

杨庆生

复合材料 细观结构力学与设计

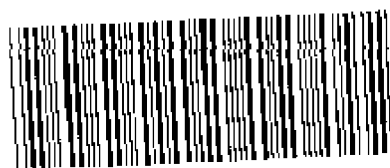
中国铁道出版社

463632

铁路科技图书出版基金资助出版

复合材料细观结构力学与设计

杨 庆 生



00463632

中 国 铁 道 出 版 社

2000年·北 京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书阐述了复合材料细观结构力学的基本概念、基本方法和若干研究成果,阐述了复合材料细观结构设计理论和软件系统框架体系。主要内容包括:复合材料的基本特性、复合材料细观结构力学基础、复合材料的线性与非线性有效性能、复合材料的界面与界面破坏力学、复合材料的细观损伤力学及破坏过程的数值模拟方法、复合材料细观结构设计的软件系统等。

本书可做为复合材料的研究、设计和应用人员的参考书,也可做为相关专业大学生和研究生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

复合材料细观结构力学与设计/杨庆生. —北京:
中国铁道出版社, 2000. 3
ISBN 7-113-03540-X

I. 复… II. 杨… III. ①复合材料-结构力学 ②复合材料-结构设计
IV. TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 64603 号

书 名:复合材料细观结构力学与设计
作 者:杨庆生
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)
责任编辑:张悦
封面设计:马利
印 刷:中国铁道出版社印刷厂
开 本:850×1168 1/32 印张:8.25 字数:209千
版 本:2000年3月第1版 2000年3月第1次印刷
印 数:1~1000册
书 号:ISBN 7-113-03540-X/TU·610
定 价:28.50元

版权所有 盗印必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

前 言

复合材料科学与技术的发展是 20 世纪最重要的科学成就之一,它是材料学科、固体力学和工程学科等诸学科相互结合与渗透的结晶。复合材料已经被广泛应用于航空航天、机械、船舶、土木工程以及电子、医疗、体育用品等领域。我国科学工作者和应用技术人员在复合材料的基本理论和应用技术方面也取得了举世公认的成就。复合材料从诞生之日起,其研究工作就沿着两个主要的方向进行,一是针对工程应用的复合材料宏观结构力学的研究,我国在该领域内的研究成果颇丰,也出版了许多学术专著和教材;二是针对材料性能的复合材料细观结构力学的研究,国外的同类研究开始于 60 年代,我国在 80 年代开始全面追赶并作出许多有特色和有价值的研究成果。

本书主要涉及复合材料细观力学的基本问题、基本理论和基本方法,阐述复合材料细观结构力学和设计方面的主要研究成果,其中包括作者本人在该领域内的若干探索。本书内容安排力求系统化,注意前后衔接;叙述力求简洁,具有逻辑性;数学推导详略适当,并给出原文出处和相关参考资料。

本书第 1 章用很少的篇幅介绍了复合材料的基本知识,第 2 章介绍了复合材料的基本工艺过程和基本性能,这部分内容对一个细观力学工作者来说是应该了解的,因为复合材料的性能与工艺过程有密切关系,复合材料细观力学和设计正在趋向于将工艺因素包括进来。第 3 章主要介绍复合材料细观结构的数学描述和简化模型,建立模型是细观力学的基础和关键。第 4 章以夹杂理论为核心阐述了复合材料细观力学的理论基础。第 5 章阐述了复合材料的宏观弹性性能的预测理论、方法和模型,这部分内容是细观力学较为成熟的一部分,也是细观力学中最基本的内容之一。

第6章以复合材料的弹塑性性能和蠕变性能为主,介绍了非线性性能与细观结构的关系及其研究模型。尽管金属材料的塑性细观力学已经是较为发达的学科,但复合材料的细观塑性机理要复杂得多,主要在于复合材料的各向异性、增强相的相互作用及界面相的影响等。第7章讨论复合材料的界面性能的表征和界面的力学模型。第8章介绍复合材料的细观损伤力学。由于复合材料的损伤形式多种多样,相应的力学模型和研究方法也异彩纷呈,本章讨论几种主要的细观损伤模式及其对宏观性能的影响。第9章介绍复合材料的界面破坏力学,主要以断裂力学的概念和方法讨论界面的破坏过程。这一部分内容也是第10章关于损伤过程数值模拟的理论基础。第10章介绍复合材料多模式破坏过程的数值模拟技术,利用界面断裂力学理论和有限元法数值再现复合材料的各种破坏形貌。第11章试图探索复合材料细观结构设计软件系统的框架体系,其目的是试图将各种不同的理论模型和设计方法统一于一个软件系统中,使材料设计进入一个更高的层次。

作者在从事该领域的研究工作过程中,一直得到我的研究生导师陈浩然教授和唐立民教授的悉心指导,得到了博士后期间的合作导师杨卫教授、余寿文教授和黄克智院士的热心指导。在本书的撰写过程中,也得到了诸位先生的热情鼓励和支持,在此向他们表示由衷的感谢。

在本书的撰写过程中,得到了北方交通大学校领导的热情支持和鼓励;得到了土木建筑工程学院夏禾院长、陈峰和许兆义副院长的大力支持;得到了高玉臣教授、章梓茂教授等的热情鼓励和指导,在此谨向他们表示由衷的感谢。

作者还要衷心感谢铁路科技图书出版基金的大力资助和中国铁道出版社的支持和大量周到细致的工作。

由于本学科正在发展中,书中难免有不当之处,恳请读者批评指正,作者不胜感激。

作 者

1999.8

主要符号

A, B, A', B'	应变、应力集中因子
C, C_{ijkl}, D, D_{ijkl}	复合材料的有效弹性和柔度矩阵、系数
C', D'	组分材料的弹性和柔度矩阵
L, L_{ijkl}, M, M_{ijkl}	复合材料的有效弹性和柔度矩阵、系数
L', M'	组分材料的弹性和柔度矩阵
S, S_{ijkl}	Eshelby 四阶张量
$\epsilon^*, \bar{\epsilon}^*$	特征应变, 等效特征应变
k_0, μ_0, k_1, μ_1	基体和夹杂物的体积和剪切模量
E_{11}, E_{22}	纵向(轴向)和横向杨氏模量
k, μ_{12}, ν_{12}	体积模量, 轴向剪切模量, 主泊松比
E^m, E^f, ν^m, ν^f	基体和纤维的杨氏模量, 泊松比
E, E_c	有效杨氏模量
Ω, S	夹杂(物)及其边界
$v_0(v_m), v_1(v_f)$	基体和增强相(纤维)的体分比
n, n_1, n_2, n_3	法向量
u, u_1, u_2, u_3	位移
σ^0, ϵ^0	均匀应力与均匀应变
$\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}$	有效应力和有效应变
$\sigma^{(r)}, \epsilon^{(r)}$	局部应力和应变场
ϵ^p	非弹性应变
W_p	塑性功
s_{ij}	偏应力张量
e_{ij}	偏应变张量

ω	蠕变损伤因子
t	时间
u_n, u_t	界面的法向和切向位移
K_n, K_t	界面的法向和切向刚度
$[u_i]$	界面的跳跃位移
b, b_i	界面的滑移位移(位错密度)
α, β	Dundurs 参数
ε	应力振荡指数, 体积应变
G, K, K_I, K_{II}	能量释放率和应力强度因子
$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$	界面和材料 1, 2 的断裂能
Ψ	荷载相角(混合度)
μ_i, τ_0	界面剪切模量, 剪切屈服应力
τ_i, τ_m	界面和基体剪应力
δ	无效长度, 特征长度(界面分离功)
c	裂纹长度
l/d	纤维的长径比
r_f, r_m	单胞的纤维和基体的半径
U	应变能
l_{cr}	荷载传递长度
l_d	界面脱粘长度
l_c	界面滑移长度
K^∞	远场应力强度因子

目 录

第 1 章 复合材料概论	1
§ 1.1 复合材料的定义	1
§ 1.2 复合材料的种类和特点	3
§ 1.3 复合材料力学与设计	5
参考文献	6
第 2 章 复合材料的基本工艺与性质	7
§ 2.1 增强物的种类及基本性能	7
§ 2.2 树脂基复合材料	9
§ 2.3 金属基复合材料	10
§ 2.4 陶瓷基复合材料	12
§ 2.5 复合材料性能的检测	15
参考文献	16
第 3 章 复合材料细观结构的数学描述与简化模型	17
§ 3.1 统计均匀假设与均匀边界条件	17
§ 3.2 随机细观结构	19
§ 3.3 周期性均匀细观结构	21
§ 3.4 细观结构的局部涨落	23
参考文献	25
第 4 章 复合材料细观力学基础	26
§ 4.1 各向异性材料的本构方程	26
§ 4.2 特征应变问题	29
§ 4.3 Eshelby 关于椭球夹杂的解答	31
§ 4.4 一个夹杂物引起的应力场——等效夹杂法	40
§ 4.5 夹杂外的弹性场	42
§ 4.6 夹杂问题的能量计算	46

参考文献	47
第 5 章 复合材料的有效弹性性能	49
§ 5.1 有效性能的定义	49
§ 5.2 自洽模型与广义自洽模型	52
§ 5.3 Mori - Tanaka 模型	57
§ 5.4 自洽有限元法与 M - T 有限元法	62
§ 5.5 微分介质法	68
§ 5.6 变分法	70
§ 5.7 涂层夹杂物问题与混合夹杂物问题	75
参考文献	81
第 6 章 复合材料的非线性性能	84
§ 6.1 引言	84
§ 6.2 一般关系式	86
§ 6.3 连续纤维复合材料的弹塑性性能	89
§ 6.4 单向短纤维复合材料的弹塑性性能	96
§ 6.5 复合材料的常温蠕变性能	99
§ 6.6 复合材料的高温蠕变分析	103
§ 6.7 界面性能对非线性性能的影响	105
参考文献	112
第 7 章 复合材料界面力学	116
§ 7.1 界面与界面层的形成机理	116
§ 7.2 界面的应力传递、剪滞模型	117
§ 7.3 界面层的应力传递分析	123
§ 7.4 界面性能的特征与测试方法	128
§ 7.5 界面(层)的力学模型	132
参考文献	135
第 8 章 复合材料细观损伤力学	138
§ 8.1 复合材料的细观损伤机理	138
§ 8.2 以纤维拉断为主要破坏模式的细观强度理论	140
§ 8.3 短纤维复合材料中的基体裂纹	143

§ 8.4	纤维桥联问题的夹杂模型	151
§ 8.5	界面的失效与滑移	157
§ 8.6	基体开裂问题的 ACK 方法	161
§ 8.7	基体开裂问题的应力强度因子法	174
	参考文献	181
第 9 章	复合材料界面破坏力学	184
§ 9.1	界面断裂力学—裂纹尖端弹性场	184
§ 9.2	界面断裂能	188
§ 9.3	界面裂纹扩展路径的选择	193
§ 9.4	基于界面控制的增强增韧机理	196
	参考文献	202
第 10 章	复合材料损伤的数值模拟	204
§ 10.1	复合材料细观计算力学	204
§ 10.2	单型应力强度因子的有限元计算	206
§ 10.3	网格动态重新划分策略	209
§ 10.4	双材料界面断裂过程的数值模拟	212
§ 10.5	单向应力作用下复合材料细观损伤过程 模拟	214
§ 10.6	远场 K 作用下复合材料破坏构型的数值 再现	223
	参考文献	228
第 11 章	复合材料细观力学设计原理及其 CAD 系统	230
§ 11.1	概 述	230
§ 11.2	复合材料细观结构的力学设计	231
§ 11.3	细观结构参数的定性设计	233
§ 11.4	优化设计的途径	236
§ 11.5	材料细观力学设计的软件系统	238
	参考文献	242
索 引		243

CONTENTS

Chapter 1 Introduction	1
§ 1.1 Definition of Composites	1
§ 1.2 Classification of Composites	3
§ 1.3 Micromechanics and Microstructural Design	5
References	6
Chapter 2 Process and Character of Composites	7
§ 2.1 Kinds and Properties of Reinforcements	7
§ 2.2 Resin Matrix Composites	9
§ 2.3 Metal Matrix Composites	10
§ 2.4 Ceramic Matrix Composites	12
§ 2.5 Detective Technologies of Composites	15
References	16
Chapter 3 Description and Model for Microstructures	
of Composites	17
§ 3.1 Statistical Homogeneity and Homogeneous Boundary Conditions	17
§ 3.2 Random Microstructures	19
§ 3.3 Homogeneous Microstructures	21
§ 3.4 Local Fluctuation of Microstructures	23
References	25
Chapter 4 Micromechanics for Composites	26
§ 4.1 Constitutive Equation for Anisotropic Elasticity	26
§ 4.2 Eigenstrain Problem	29
§ 4.3 Eshelby's Solution for an Ellipsoidal Inclusion	31
§ 4.4 Stress Fields Induced by an Inhomogeneity – Equivalent Inclusion Principle	40
§ 4.5 Elastic Field outside an Ellipsoidal Inclusion	42

§ 4.6 Energy Consideration of Inclusion Problem	46
References	47
Chapter 5 Effective Elastic Properties of Composites	49
§ 5.1 Definition of Effective Properties	49
§ 5.2 Self – Consistent Model and Generalized Self – Consistent Model	52
§ 5.3 Mori – Tanaka Model	57
§ 5.4 Self – Consistent FEM and Mori – Tanaka FEM	62
§ 5.5 Differential Medium Method	68
§ 5.6 Variational Method	70
§ 5.7 Coating and Hybrid Inclusion Problems	75
References	81
Chapter 6 Effective Nonlinear Properties of Composites	84
§ 6.1 Introduction	84
§ 6.2 General Relations	86
§ 6.3 Elastoplastic Properties of Continuous Fiber Composites	89
§ 6.4 Elastoplastic Properties of Unidirectional Short Fiber Composites	96
§ 6.5 Creep of Composites at Room Temperature	99
§ 6.6 Creep of Composites at Elevated Temperature	103
§ 6.7 Effect of Interfacial Properties on Nonlinear Behavior of Composites	105
References	112
Chapter 7 Interfacial Mechanics of Composites	116
§ 7.1 Forming Mechanism of Interface and Interlayer	116
§ 7.2 Stress Transfer Theory of Interface – Shear Lag Model	117
§ 7.3 Stress Transfer Theory of Interlayer	123
§ 7.4 Characterization and Measurement of Interfacial	

Properties	128
§ 7.5 Mechanical Models for Interfaces and Interlayers ...	132
References	135
Chapter 8 Micro-Damage Mechanics of Composites	138
§ 8.1 Damage Mechanism of Microstructures for Composites	138
§ 8.2 Microscopic Strength Theories	140
§ 8.3 Matrix Cracking in Short Fiber Composites	143
§ 8.4 Inclusion Model for Fiber Bridging Problem	151
§ 8.5 Failure and Sliding of Interface	157
§ 8.6 ACK Method for Matrix Cracking	161
§ 8.7 Stress Intensive Factor of Matrix Cracking	174
References	181
Chapter 9 Interfacial Failure Mechanics for Composites	184
§ 9.1 Interfacial Fracture Mechanics – Crack Tip Fields ...	184
§ 9.2 Interfacial Fracture Energy	188
§ 9.3 Selection of Cracking Paths	193
§ 9.4 Toughening Mechanism Based on Interfacial Control	196
References	202
Chapter 10 Numerical Simulation of Damage Process for Composites	204
§ 10.1 Computational Micromechanics for Composites	204
§ 10.2 Finite Element Calculation of Single Mode Stress Intensity Factor	206
§ 10.3 A Remeshing Strategy	209
§ 10.4 Numerical Simulation of Cracking for Bimaterial Interface	212
§ 10.5 Numerical Simulation of Damage for Composites -- Uniaxial Tension	214

§ 10.6 Numerical Simulation of Damage for Composites	
Far Field K	223
References	228
Chapter 11 CAD System for Micromechanical Design of	
Composites	230
§ 11.1 General	230
§ 11.2 Basic Theory on Micromechanical Design for	
Composites	231
§ 11.3 Qualitative Design for Microstructural Parameters	233
§ 11.4 Optimal Design for Microstructure	236
§ 11.5 Software System for Micromechanical Design for	
Composites	238
References	242
INDEX	243

第 1 章 复合材料概论

本章主要介绍复合材料的基本知识,包括复合材料的定义、种类和发展过程,最后扼要说明复合材料力学和设计的基本内容。

§ 1.1 复合材料的定义

由两种或两种以上的单一材料复合而成的材料,称为复合材料。这样定义的复合材料是非常广泛的,例如,加入植物秸杆的泥土和钢筋混凝土等可以看做复合材料,用高级纤维增强的聚合物、金属和陶瓷等也是复合材料。还有的复合材料是由同一种物质但以不同形态存在的材料组成的,如碳/碳复合材料等。复合材料不同于化合物和合金材料,它们的区别在于复合材料中的组分材料始终作为独立形态的单一材料而存在,而没有明显的化学反应。

复合材料不是几种材料的简单组合,它的性能比其组分材料更优越,并可显示出一些新的性能。

复合材料的历史可追溯到久远的古代,用泥土和稻草混合砌成的泥墙早在古埃及时代就开始应用。近代的胶合板和钢筋混凝土材料也有百年历史。但以树脂基复合材料为先驱的现代复合材料是在 20 世纪 30 年代诞生的,并在 40 年代前期的第二次世界大战中得以应用。从此以后,军事上的应用和军备竞赛一直是复合材料发展的主要动力,并逐渐向民用方向发展。随着冷战的结束和世界形势走向缓和,复合材料正在迅速地应用于各民用工业领域。现在各种类型的复合材料已广泛应用于工业、工程领域和日常生活中。复合材料的发展历史再次证明了人类制造材料和应用材料的进步是与人类社会的文明进步共同发展的。图 1.1 说明了人类应用材料的演变历史和复合材料在现代社会中的作用^[1]。

在科技革命的今天,复合材料是作为这一重大历史变革之物质基础和支柱的主要材料之一。

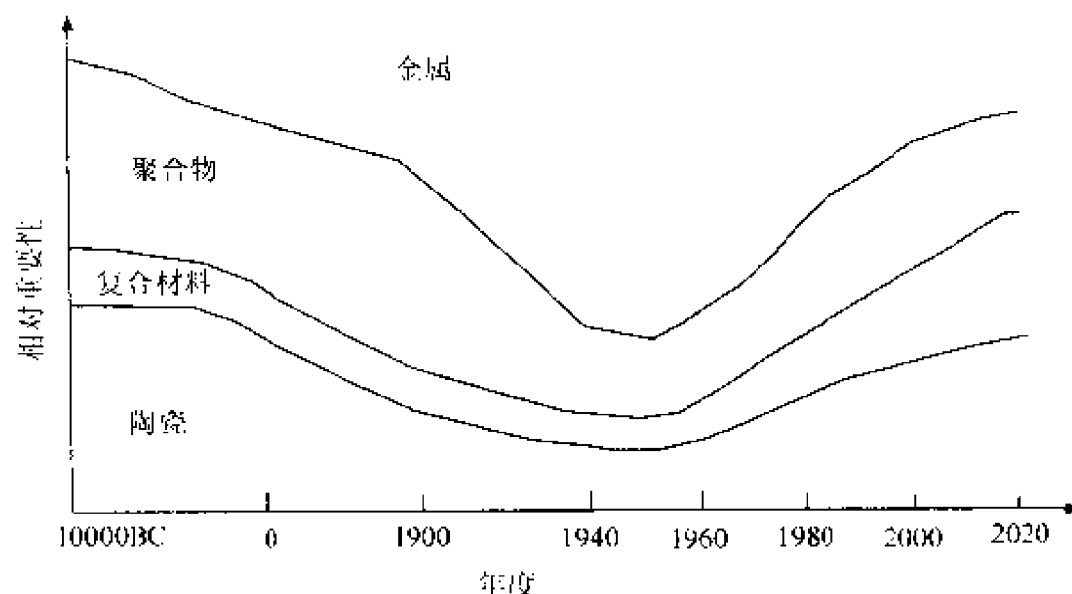


图 1.1 材料的演化历史

现在,以各种先进纤维和各种高性能基体制造的复合材料已经广泛应用于工业领域和人们的日常生活中。在航空航天领域,以各种复合材料制造的结构部件已经占到整个结构的相当比例。例如,航天飞行器和卫星的主要部件采用高性能金属基复合材料,玻璃和碳纤维复合材料应用于飞机的机翼等部件。全复合材料飞机已经投入应用多年,并显示出良好的力学和物理性能。在交通运输和汽车工业上,有复合材料铁路客车、汽车车体、各种船舶及其部件等。体育器械和娱乐工具方面也是复合材料的一个重要应用领域。在工业设备和化工、管道等方面也有大量的应用。

近年来,一个异军突起的应用领域是在土木工程和建筑结构方面,复合材料除了直接用于建造桥梁、房屋结构及其部件外,还在旧有大型结构的加固和翻新中显示出巨大的应用前景和优势。特别是在对地震和各种破坏造成的桥梁和建筑结构的加固翻新,以及沿海的强腐蚀环境下的结构建造中,复合材料已经成为首选

的结构材料。

有人预言,人类历史上曾有石器时代、铜器时代和铁器时代,而 21 世纪将是复合材料的时代。

§ 1.2 复合材料的种类和特点

和所有其他材料一样,复合材料分为结构复合材料和功能复合材料两大类^[2]。同时具有结构和功能特性的复合材料也正在发展中。本书主要涉及具有优良力学特性的结构复合材料。

复合材料中的组分材料一般可分为基体相和增强相。增强相是主要的承载单元,分布或弥散于基体相中。基体相则起到联结增强相的作用,并在增强相之间传递应力。

根据基体材料的类型,复合材料可分为三类:

1. 树脂基复合材料

以高分子聚合物做基体,各种类型的树脂最为常用。

2. 金属基复合材料

以铝、镍、钛、镁、铜等轻金属为基体材料。

3. 陶瓷基复合材料

以 SiO_2 、 SiC 、 Si_3N_4 等各种陶瓷为基体材料。

按增强相的种类和形态,复合材料可分为以下几类:

1. 连续纤维增强复合材料

作为增强相的纤维是没有端头的无限长纤维,如玻璃纤维, Nicalon, 尼龙以及碳、硼纤维等。单向连续纤维复合材料沿着纤维的方向具有很高的强度和刚度,而垂直于纤维方向上的性能很差。为了弥补某些方向上较低的力学性能,或为了得到各方向上性能较为均衡的复合材料,一般采用沿不同方向铺层的叠合形式。

2. 短纤维增强复合材料

增强相是具有一定长度的短纤维。短纤维由连续纤维切割而成,金属和陶瓷晶须也可看做短纤维。短纤维在空间或平面内一般呈随机分布,因而复合材料具有空间或平面内的各向同性性质。通过一定的定向技术,也可制造单向或具有一定取向的短纤维复

合材料。

3. 颗粒增强复合材料

增强相被加工成细小的颗粒状或粉末状,将颗粒弥散于基体材料中并使它们粘结复合而成。

4. 编织复合材料

将纤维采用纺织、编织或缝纫的形式做成各种形状的织物或毡物,然后再与基体复合。这样可使增强相的一体性大为增强。

复合材料的特点因其种类不同而有所差异,一般而言,复合材料具有如下特点:

1. 比模量和比强度高

比模量和比强度分别是指模量与质量密度、强度与质量密度的比值。一般复合材料,特别是纤维复合材料,都具有较高的比模量和比强度。例如,碳纤维/环氧树脂复合材料的比强度是普通钢材的 5 倍,铝合金的 4 倍;比模量是钢、铝的 4~6 倍。

2. 抗疲劳性能好

金属材料的疲劳破坏主要由主裂纹控制,而复合材料在疲劳破坏之前,往往在高应力区出现大面积的损伤区,具有明显的破坏预兆。单向纤维复合材料的抗拉疲劳极限一般可达到其静强度的 40%~70%,而金属材料一般为 30%~50%。

3. 可设计性

复合材料的细观结构决定了它的力学性能,可以通过选择细观结构参数,在很大的范围内设计其性能。这一特点也正是复合材料最具魅力的诱人之处。

4. 材料与结构的互容性

与传统意义上的均匀材料不同,复合材料本身具体一定的细观结构,因此可以认为复合材料是一种具有材料性能的结构。另外,复合材料在制造过程中,就按特定的工程结构形式设计,并且可以一次成型,具有良好的工艺性能。复合材料的性能往往与其工程采用的结构形式有关。

另外,复合材料还具有良好的减振性能、较小的热膨胀系数、

良好的破损安全性能和耐腐蚀、耐磨损等优点。

当然,复合材料也有很多不足。主要有复合材料的性能数据分散性较大、制造工艺和技术不完善、复合材料结构的工程应用经验少等。另一个非常致命的缺陷是复合材料的环境保护性能较差,包括复合材料的废料的回收、销毁和再利用等,这些问题急需改进和解决。

§ 1.3 复合材料力学与设计

复合材料作为一种工程上广泛采用的结构材料,人们自然非常关注它的力学性能。复合材料力学的任务就是研究复合材料在各种受力和环境条件下的力学行为。复合材料力学可分为研究其工程结构的复合材料结构力学和研究其材料力学行为的材料力学,前者主要研究以单层板为单元的工程结构,后者主要关注材料的力学行为。一般著作和教材不严格区分二者,而通称为复合材料力学^{[3]~[5]}。本书限定复合材料力学的含义仅为后者。

复合材料力学主要采用两种研究途径,一是宏观的方法,它以实验资料为基础,通过建立数学模型唯象地描述复合材料的力学行为;二是细观的方法,通过对复合材料的组成部分(增强相、基体相和界面等)以及它们的复合原理进行分析,建立细观结构参数与材料性能之间的关系。由于复合材料的各组分材料在复合后基本保持其原来的材料形态和力学特性,因而复合材料具有清晰的细观结构,其尺度大约在纳米至微米的范围内,这客观上为其细观力学的研究提供了可能性。

复合材料的性能除了取决于其组分材料的性能(相物理)和细观结构的几何状态(相几何)外,还与其工艺过程(压力、温度、加工时间、添加剂及模具等)有密切的关系。通过对细观结构和工艺参数的设计,可使复合材料达到预期的或最佳的力学性能。这就是复合材料细观结构设计的基本含义。

复合材料细观力学的概念、模型和方法很多,每一个模型和方法都有较强的针对性。即使对于同一种材料,不同的模型和方法

可能会得出不同甚至相反的结论。细观力学的结论是否可信,其衡量标准就是看其结论是否与实验结果相一致。因此,复合材料细观力学必须将实验分析、理论分析与数值计算诸手段结合起来;将宏观的方法与细观的方法结合起来,互相借鉴,互相补充。

目前,复合材料细观力学的主要研究热点可概括为以下几个方面:

1. 复合材料的有效力学行为和物理行为

有效力学行为和物理行为包括本构方程、强度、韧性和热、电、磁、光、声等功能。

2. 材料破坏的细观机理

细观机理包括孔洞或裂纹的演化、界面失效、纤维屈曲、裂纹传播、稳定性与不稳定性等。

3. 材料的细观物理化学性质

细观物理化学性质包括夹杂之间的相互作用、相变、内应力场、温度场等。特别是在工艺过程中和工作环境下的材料细观结构的物理化学变化等。

复合材料细观力学主要研究复合材料的细观不均匀性。它是材料科学、物理学、固体力学等学科相互交叉和渗透的结果,涉及界面力学、损伤力学、塑性力学、计算力学、断裂力学等学科分支。它属于连续介质力学的范畴。复合材料细观力学的一些模型和方法也适用于金属、陶瓷和岩石等细观结构材料。

参考文献

1. T W Chou, R L McCullough, R B Pipes. Composites. Scientific American, 1986 (255); 192~203
2. 周祖福. 复合材料学. 武汉: 武汉工业大学出版社, 1995
3. 琼斯. 复合材料力学. 朱颐龄等译. 上海: 上海科技出版社, 1981
4. 顾震隆. 短纤维复合材料力学. 北京: 国防工业出版社, 1987
5. J R Vinson, T W Chou. Composite Materials and Their Use in Structures. London: Elsevier-Applied Science Publishers, 1975

第 2 章 复合材料的基本工艺与性质

§ 2.1 增强物的种类及基本性能

在复合材料中增强相是主要的承载单元,它一般分散于基体材料中、通过界面与基体相构成一个统一整体。

复合材料的弹性模量、强度等力学性能主要来自于增强材料的贡献,因此为了获得更高比模量和更高比强度的复合材料,一般选用具有高模量和高强度的材料作为增强相。另外增强相还能显著地影响复合材料的收缩率和热变形温度,并在热、电、磁、光、声方面赋予复合材料新的物理性能。

增强材料的种类很多,从物理形态上看主要有纤维、晶须、薄片和颗粒等,其中纤维的应用最广泛,增强效果也最明显,这是因为材料做成纤维后其拉伸模量和强度要提高几个数量级。

纤维有金属纤维和非金属纤维两类,一般做成连续的丝、纱或短纤维、晶须等。表 2.1 列出了若干纤维的力学性能。连续纤维在基体内可平直铺设,也可做成各种编织、纺织物或网络形状。短纤维或晶须一般在基体内随机分布或部分定向分布。利用纤维作为增强相的主要目的在于显著提高复合材料的弹性模量、强度和韧度。复合材料因纤维的走向不同而具有各向同性或各向异性的性能。

表 2.1 若干纤维的力学性能

纤 维	比 重 (g/cm ³)	强 度 (GPa)	比强度 (GPa)	弹性模量 (GPa)	比模量 (GPa)
S 玻璃	2.5	3.43	1.37	86.3	34.3
碳 P100	2.15	2.2	1.0	720	3.35
碳 T300	1.76	3.2	1.3	230	130

续上表

纤 维	比 重 (g/cm ³)	强 度 (GPa)	比强度 (GPa)	弹性模量 (GPa)	比模量 (GPa)
硼纤维	2.63	3.43	1.3	412	160
SiC	3.4	3.24	0.95	481	141
Al ₂ O ₃	3.2	2.45	0.77	245	76.5
Nylon	2.15	2.45	9.98	177	70.6
纺纶 49	1.14	3.6	2.5	130	90
纺纶 149	1.47	3.5	3.1	185	126
热压聚脂	1.4	2.6	1.9	80	57
冷压聚脂	0.99	5.0	5.1	220	222
冷拔钢丝	7.74	4.12	0.55	199	25.7

常用的高级纤维有碳纤维、硼纤维、纺纶和碳化硅纤维等。

碳纤维是有机纤维在惰性气体中经高温碳化而成的纤维状碳化合物。直径约为 $5 \sim 20\mu\text{m}$ 。依其原丝类型可分为聚丙烯腈(PAN)基、粘胶基和沥青基等。碳化温度在 1400°C 以下者称为碳纤维,在 2000°C 以上者称为石墨纤维。常用的 T300(Thonel300)纤维是由两股原纱经加捻拼股而成的碳纤维丝。PAN 基和沥青基的碳纤维在市场都有充足的供应,品种很多。

硼纤维是由硼蒸汽在钨丝上沉积而成,直径为 $100\mu\text{m}$ 左右。硼纤维的比强度与玻璃纤维相差不大,但比刚度却是玻璃纤维的 5 倍。硼纤维的市场价格较高。

纺纶纤维是一种芳香族聚酰胺合成纤维。Kevlar-49 和 Kevlar-149 是常用的纺纶纤维品种。这种纤维的延伸率很大,广泛用于各种抗冲击材料的制造,如防弹衣等。纺纶纤维的线膨胀系数为负值。

碳化硅纤维和晶须是金属基和陶瓷基复合材料中应用较广的高级纤维,它们不但具有较好的力学性能,而且具有耐高温和良好的工艺特性。Nicalon 是碳化硅纤维的主要品种之一。

利用颗粒增强相可获得复合材料的较高硬度和耐磨性,但对改善材料的模量和强度不如纤维的作用明显。颗粒增强相一般弥散于基体材料中,例如:硬度高的耐高温陶瓷颗粒弥散于金属材料中,可得到耐磨性和抗热疲劳性都很好的复合材料,而延性较好的金属颗粒弥散于陶瓷基体材料中可改善陶瓷的韧性。

§ 2.2 树脂基复合材料

树脂基复合材料是开发应用较为成熟的复合材料,由于它的成本相对较低,工艺要求不高,而在复合材料的民用化上占有优势。树脂基复合材料在航空航天、汽车、船舶、体育用品以及自行车、桥梁、机械、建筑等领域,都有较多的应用和产品。

树脂是一种有机高分子合成材料,其特点是密度小,强度和其他机械性能较高,其光、电和化学性能稳定性好。另外,它容易与增强材料粘结,具有良好的工艺特性。随着石油化工工业的发展,使得树脂材料的来源充足,价格低廉,其性能-成本比十分诱人。用纤维增强树脂主要是为了获得高比模量和高比强度的复合材料性能,如图 2.1 所示。

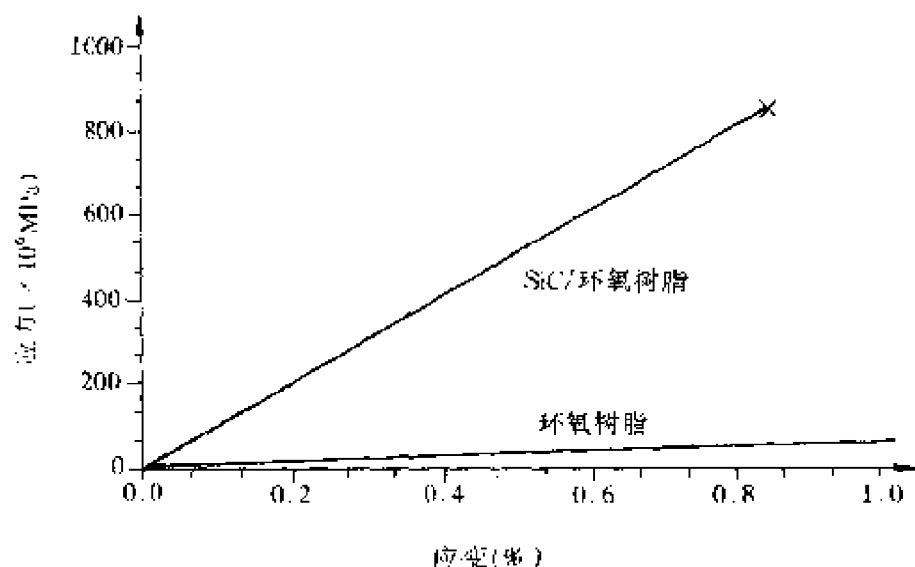


图 2.1 树脂基复合材料的应力—应变关系

用于复合材料基体的树脂品种很多,主要有热固性和热塑性两种类型。热固性树脂在初次受热时变软,可加工成一定形状,随着加热的进行或加入固化剂后,会逐步凝胶以至固化成型,再加热不会再软化。其分子结构属于体型网状结构。常用的热固性树脂包括不饱和聚酯、环氧树脂、醇酸树脂、酚醛树脂、聚酰亚胺等。

热塑性树脂加热到一定温度时可软化或流动,可加工成一定形状,冷却后会逐步固化变硬,再加热可再软化。其分子结构属于支链型分子结构。常用的热塑性树脂有聚乙烯、聚丙烯、聚苯乙烯、聚氯乙烯、聚酰胺、聚醚醚酮等。

树脂基复合材料中的增强物主要有玻璃纤维、石墨纤维、碳纤维、芳纶纤维、Nicalon 等。

树脂基复合材料的制造工艺很多,主要有铺层法、缠绕法、编织法、模压法等,这些制造方法基本由两个过程组成,一是将纤维与树脂混合并在设计好的模具上成型;二是固化过程,可以添加某些固化剂,使其在室温常压下固化,也可以通过加热加压固化,这样会使基体与纤维的粘结更好,并降低材料的气隙率。

开发具有良好性能的纤维和树脂材料是树脂基复合材料的一个发展趋势,例如,提高纤维的刚度与强度,并使其在较高温度($150^{\circ}\text{C} \sim 350^{\circ}\text{C}$)下保持较好的稳定性;提高树脂材料的韧性和耐高温性能,开发阻燃树脂等。由于高性能纤维与改进树脂的品种不断增加,使材料设计者拥有了更多的材料选择余地。

§ 2.3 金属基复合材料

与树脂基复合材料相比,金属基复合材料具有更高的比刚度、比强度和较好的延展性(图 2.2),还具有耐高温、导热导电、热膨胀系数小、尺寸稳定等优点。金属基复合材料目前主要用于航空航天和军事工业部门,例如航天飞机主舱框架、卫星天线和舱架、发动机活塞等。工艺复杂、成本高是影响金属基复合材料向民用化发展的主要障碍。

许多金属可以作为金属基复合材料的基体,一般选用铝、镁、

铅、锌、铜、钛这些轻金属和某些高温合金与金属间化合物。其中铝和钛基复合材料发展较快。

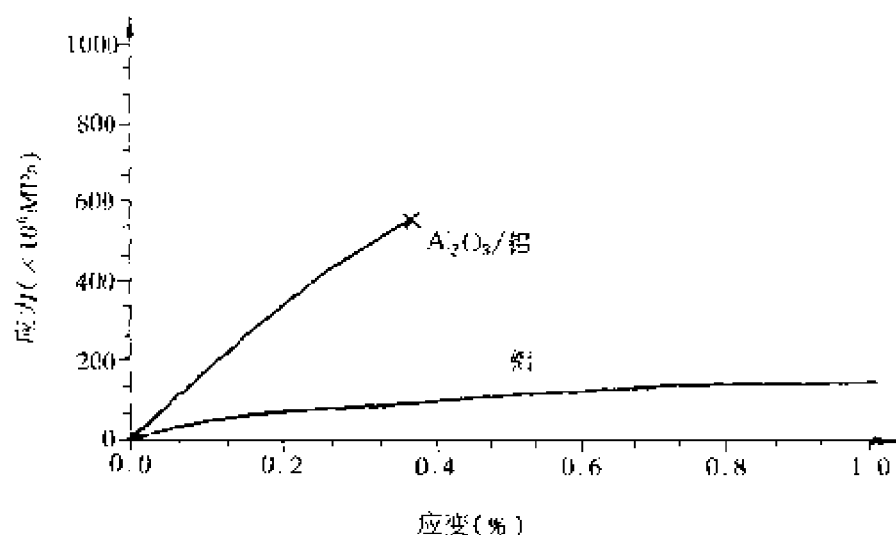


图 2.2 金属基复合材料的应力—应变关系

用于先进的金属基复合材料的增强物主要有^[1]：

纤维：硼、碳、碳化硅、氧化铝、硅酸铝、氧化硼等。

晶须：碳化硅、氧化铝、氮化铝、氮化钛等。

颗粒：碳化硅、氧化铝、碳化硼等。

金属基复合材料目前多数处于研究阶段，少数投入应用，如 B/Al、C/Al、C/Mg、C/Cu、SiC/Al、SiC/Ti 等。

金属基复合材料的制备方法和过程比较复杂^[2]，一般要首先将纤维和基体进行预处理，在用金属铸造法制备的复合材料中，纤维能够被熔融的金属湿润是必需的。采用在纤维表面上涂层的方法，可以改善纤维表面的性质，防止在高温下纤维的刚度和强度退化，并能提高纤维与基体的湿润能力和粘结力。纤维表面处理和复合材料预成型的方法有：化学涂层、化学汽相沉淀(CVD)、物理汽相沉淀(PVD)、等离子体喷涂、电镀等。

金属基复合材料的制备方法主要有固相制备方法和液相制备方法。固相制备方法有：

扩散粘结(Diffusion bonding)

热轧(Hot rolling)
挤压与拔丝(Extrusion and drawing)
热等静压(Hot isostatic pressing, HIP)
高速热压(High speed hot pressing)
爆炸焊接(Explosive welding)

液相制备方法有:

大气压下渗透(Infiltration under atmospheric pressure)
惰性气压下渗透(Infiltration under inert gas pressure)
真空渗透(Vacuum infiltration)
压铸(Squeeze casting)
流变铸造与混合铸造(Rheocasting and compocasting)

液相制备法适合于制备形状复杂的构件,纤维分布均匀,基体孔隙少,但熔化的基体常与纤维发生化学反应。

在金属基复合材料中,研究较多的制备方法是定向凝固共晶合金,用共晶复合可以制备具有纤维或层合形状合金。通过控制凝固方向,可直接从基体中生长出排列整齐的纤维,改变其成分和工艺条件可以控制纤维的尺寸、含量和复合材料的形状。

金属基复合材料的另一个优点是易于进行二次加工,例如剪裁、磨光、切削、电割、超声波加工、电子束、激光束切削等都可应用,压力成形、蠕变成形、焊接等技术也适用。

§ 2.4 陶瓷基复合材料

陶瓷基复合材料是正在迅速崛起的先进复合材料之一。它的最大优点在于它的耐高温性能,因此有希望成为发动机的理想材料。例如,一般发动机上使用陶瓷基复合材料,可以免用冷却系统,节能在 30% 以上。

陶瓷材料的硬度大、耐高温、耐磨损、强度高、热膨胀系数小、尺寸稳定,但它的弱点是韧性差,不易加工。提高陶瓷材料韧性的基本方法有相变增韧和制成复合材料。通常采用的二氧化锆(ZrO_2)相变增韧方法在高温($900^{\circ}C$ 以上)时会失去增韧作用,人们

对纤维增强增韧陶瓷基复合材料寄予极大的希望,因此,近年来陶瓷基复合材料的发展很快^[3]。

陶瓷基复合材料就是利用陶瓷本身的优点,通过加入增强物提高陶瓷的韧性,如图 2.3 所示,使它成为兼有多种功能的结构材料。

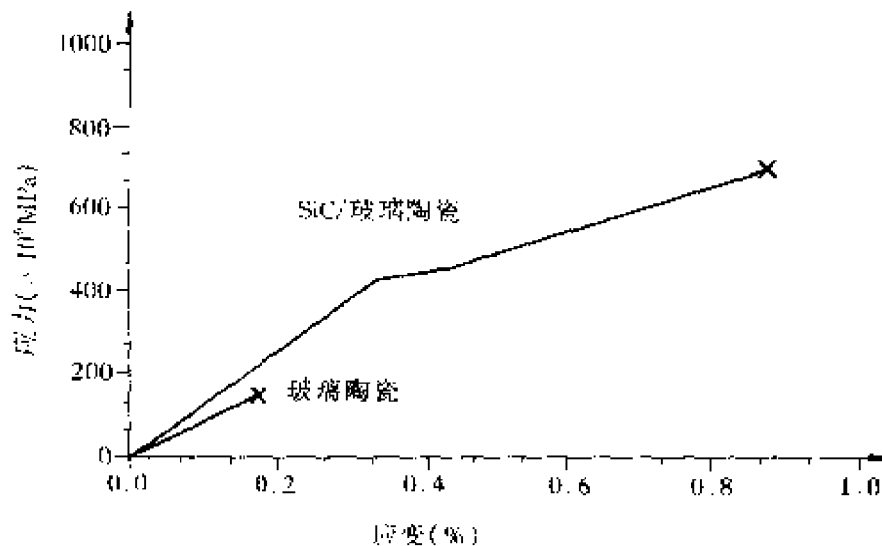


图 2.3 陶瓷基复合材料的应力—应变关系

陶瓷的种类有:碳化物陶瓷,如 SiC ;氮化物和硼化物陶瓷,如 Si_3N_4 、 TiB_2 ;氧化物陶瓷,如 Al_2O_3 、 ZrO_2 ;以及玻璃陶瓷等。

陶瓷基复合材料中的增强相一般采用纤维、晶须和颗粒等,应用较为成功的先进增强物为 Nicalon 纤维, SiC 纤维或晶须, Al_2O_3 纤维或晶须,碳纤维和各种金属晶须、颗粒等。

陶瓷基复合材料的制备技术发展很快,综合起来有以下几种:

粘合液浸渍法,溶胶-凝胶方法,聚合体解热方法,化学汽相沉积,化学汽相浸润,化学反应粘结等。

目前,已经研制成功或比较有前途的陶瓷基复合材料有: $\text{SiC}/\text{Al}_2\text{O}_3$, SiC/ZrO_2 , $\text{SiC}/\text{Si}_3\text{N}_4$, $\text{TiC}/\text{Si}_3\text{N}_4$, $\text{C}/\text{Si}_3\text{N}_4$ 和 $\text{SiC}/$ 锂铝硅酸盐。

研制陶瓷基复合材料的主要目的是为了改善陶瓷的韧性。由于一些基本的增韧机理尚未被很好地理解,所以,陶瓷基复合材料

的研制和应用都受到一定的影响。另外,适合于陶瓷基复合材料成形工艺的高性能纤维的研制,编织技术,界面质量监控以及改进制备工艺,降低成本等都是陶瓷基复合材料发展中迫切需要解决的关键问题。

树脂基复合材料、金属基复合材料和陶瓷基复合材料是复合材料家族中的主要成员。它们的增强机理和工艺过程明显不同,性能也各有其突出之处,因而其应用的场合和目的也不同。就其工作温度而言(图2.4),树脂基复合材料的工作温度较低,约在

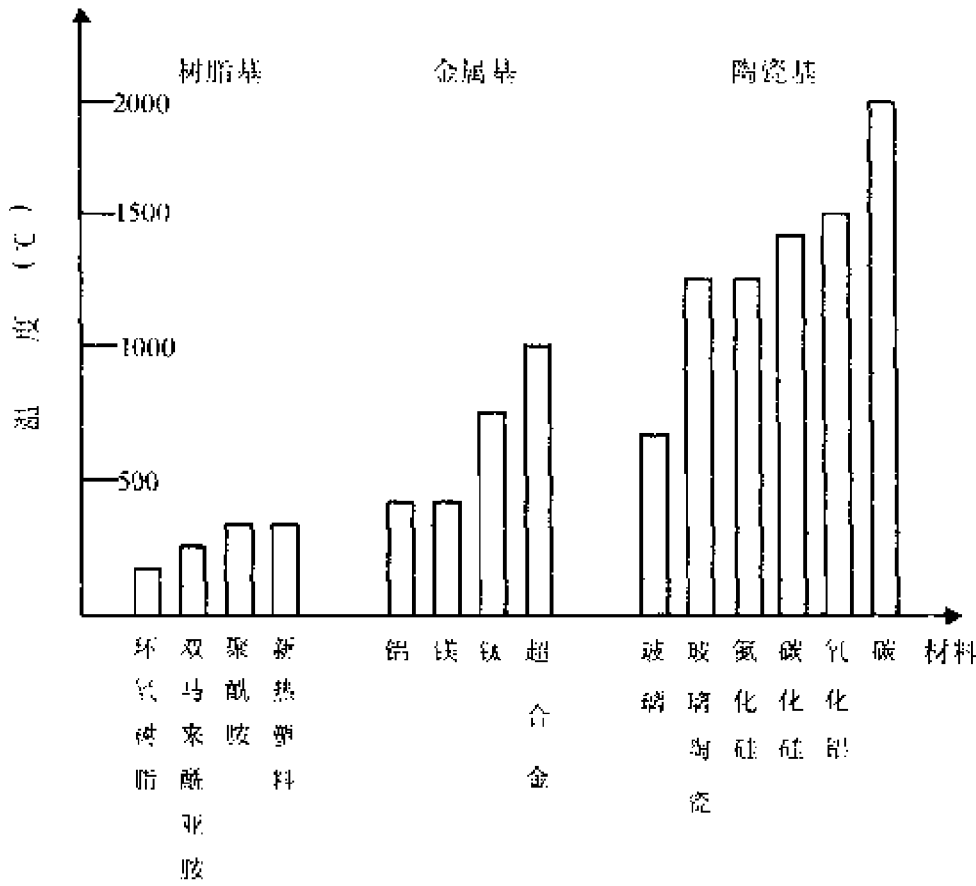


图 2.4 复合材料的工作温度

300℃以下。金属基复合材料的工作温度范围约在 350℃ ~ 1000℃之间。陶瓷基复合材料则能够经受 600℃ ~ 1500℃ 高温的考验。在 2000℃左右的工作环境下,碳/碳复合材料能够正常工作。碳/碳复合材料是由浸渍的碳纤维进行碳化或石墨化而成的超高温复合材料。就力学性能和使用性能而言,复合材料已经覆

盖了几乎所有结构工程的材料选择空间。

§ 2.5 复合材料的检测技术

复合材料的奥秘在于“复合”。通过复合,产生了原来组分材料所没有的新的性能。但是,不是任意两种材料就可复合的,通过上述几节的介绍,我们可以明显地感觉到,每一类复合材料的研制,都包含了研制者的精心谋划和设计,具有鲜明的目的和期待。有时,由于研制过程中的许多可预见或不可预见性的因素影响,使有些目标不能完全达到甚至完全达不到,因此对复合材料进行质量评估和检测是十分必要的。

当材料选定以后,复合材料的质量控制基本上在于工艺流程和工艺条件的技术水平与标准化程度。先进的检测技术可以对制造中的复合材料进行质量监视,同时为复合材料的质量评估提供可靠的依据。通过检测,使人们对于材料的细观图景有一个直观、全面的认识,对复合材料的细观结构形态、细观缺陷或损伤等有一个定性或定量的表征。这些知识也是建立细观力学模型和研究其破坏机理与模式的直接实验基础,甚至有些连续介质力学的唯象理论也需要这些知识做为参考。

先进的检测技术,特别是无损检测技术已经成为研究复合材料的有力工具和方法。无损检测技术主要有光学、声学、电磁学和射线技术、热象分析等技术。光、声、电磁都具有穿进或穿透材料的能力,而且能与材料的内应力或微缺陷发生相互作用,通过探测到的光、声、电磁信息,判断材料内部的结构形态。

先进的无损检测技术包括^[4]:

超声技术(超声回波,超声穿透,超声 C 扫描,超声背散射,超声频谱分析,超声成像);

射线技术(X 射线,中子射线);

热学技术(热成像,热动热图);

光学技术(激光超声照像)。

另外,还有涡流检测,微波检测,声发射,X 层析分析技术等。

上述方法有些已经投入应用,有些还在实验应用阶段和正在研究阶段。检测技术正在向定量检测技术和动态跟踪检测技术的方向发展,例如,细观缺陷或损伤的定量实验表征和演化过程的监视等。这些数据对于理论研究非常重要。

参考文献

1. 张国定. 金属基复合材料的研究及发展. 九十年代我国复合材料发展展望研讨会, 北京, 1990
2. T W Chou, A Kelly, A Okura. Fiber-reinforced metal matrix composites. Composites. 1985, 16(3)
3. 王兴业, 苏波. 连续纤维陶瓷基复合材料的进展. 见: 第八届全国复合材料大会文集, 北京: 航空工业出版社, 1994
4. 陈积懋, 刘松平. 复合材料无损评价技术. 九十年代我国复合材料发展展望研讨会, 北京, 1990
5. T W Chou Micromechanical design of fiber composites. London: Cambridge press, 1992

第3章 复合材料细观结构的数学描述与简化模型

§ 3.1 统计均匀性假设与均匀边界条件

一般材料可划分成三个层次,即微观层次(Micro Scale)、细观层次(Mini Scale)和宏观层次(Macro Scale)。例如,如果将聚晶体金属看成是宏观材料,则晶粒是细观层次,原子点阵是微观层次。当然还存在更高层次的微观水平。由于材料千姿百态,各不相同,很难对各个层次的尺寸量级作出数量描述。一般地有关系^[1]: $\text{Micro} \ll \text{Mini} \ll \text{Macro}$ 。在这个条件下,某一层次上的不均匀性在它的高一个层次上可以被忽略。

在连续介质的范围内,复合材料由细观和宏观两个层次的单元组成。细观层次单元由若干增强相(也称夹杂物)和它周围的基体及界面相组成。在细观层次上,材料是不均匀的,但连续介质力学仍然适用。宏观层次单元由大量的细观单元组成,具有一般工程结构的尺度。

从细观层次上看,材料具有一定的结构和不均匀性,因而细观力学有时也被称为细观结构力学。在复合材料中,英文 micro-, meso- 和 mini- 都被用来表示纤维尺度的细观层次。电镜观察到的一个画面可以看做一个典型的细观单元。如果一个细观单元具备下列性质:细观单元的总几何特征,例如增强物的体分比、增强物分布的概率统计值(一次矩、二次矩等)都是常数,与细观单元的位置无关,则称这样的细观单元为一个代表体元。也就是说代表体元是一个具有代表性和一般性的细观单元(图3.1)。由代表体元组成的材料称为统计均匀材料,统计均匀材料受到均匀边界条件的作用,则介质内的场变量是统计均匀场。统计均匀

场是指概率统计值为常数的细观场。以应力场为例,设 σ 表示细观应力场,它是位置的函数且具有不均匀性,如果 σ 是统计均匀场,则 σ 在任一体积为 V 的代表体元上的概率统计量(如均值、二次矩等)都应是常数,与代表体元的位置无关。

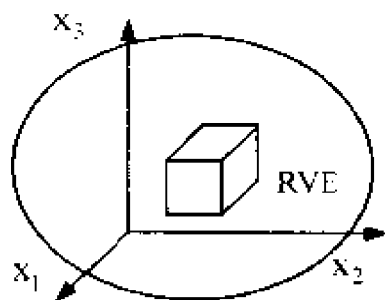


图 3.1 代表体元

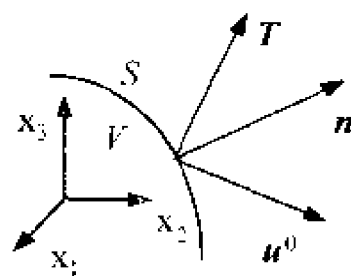


图 3.2 均匀边界条件

均匀边界条件是为了在统计均匀材料内产生统计均匀场而对边界条件所加的一种限制。对于弹性场而言,如图 3.2 所示,均匀边界条件是^[1]:

(1) 均匀应变(位移)边界条件:

$$u_i^0(S) = \epsilon_{ij}^0 x_j \quad (3.1)$$

(2) 均匀应力边界条件:

$$T_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (3.2)$$

其中 $\epsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0$ 是常数, x_i 是长度坐标, n_i 是边界 S 的外法线向量, $i, j = 1, 2, 3$ 。对温度场、电场、磁场等亦可相似地定义均匀边界条件。

这里采用张量求和约定,在一项中重复下标表示从 1 到 3 求和。下标中的逗号表示对该坐标分量求导数。例如:

$$x_{ii} = x_{11} + x_{22} + x_{33}, y_{i,j} = \partial y_i / \partial x_j, z_{,ij} = \partial^2 z / \partial x_i \partial x_j \quad (3.3)$$

统计均匀场满足遍历性条件,其场量的统计平均值(均值)与体积平均值相等。以弹性场为例,细观场量在代表体元上的体积平均值定义为:

平均应力:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \iiint_V \sigma_{ij} dv \quad (3.4a)$$

平均应变:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \iiint_V \epsilon_{ij} dv \quad (3.4b)$$

当统计均匀材料受到均匀边界条件的作用时,其统计均匀场的体积平均值可用边界值表示,例如材料受到均匀应变边界条件(3.1)的作用,应变场在代表体元上的体积平均值为:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{V} \iiint_V \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{V} \iiint_V \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) dv \\ &= \frac{1}{2V} \iint_S (u_i^0 n_j + u_j^0 n_i) ds \\ &= \frac{1}{2V} \iint_S (\epsilon_{im}^0 x_m n_j + \epsilon_{jm}^0 x_m n_i) ds \\ &= \frac{1}{2V} \iiint_V (\epsilon_{im}^0 x_{m,j} + \epsilon_{jm}^0 x_{m,i}) dv \\ &= \frac{1}{V} \iiint_V \epsilon_{ij}^0 dv \\ &= \epsilon_{ij}^0 \end{aligned} \quad (3.5a)$$

上式表明统计均匀应变场的体积平均值就等于边界上施加的常应变。

同理,如果材料受到均匀应力边界条件(3.2)的作用时,其统计均匀应力场的体积平均值就等于边界上施加的常应力,即

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad (3.5b)$$

由于代表体元的普适性,由方程(3.4a)和(3.4b)定义的平均应变和平均应力就是复合材料的宏观应变和宏观应力。上述关于统计均匀场的平均化理论对材料的热、电、磁场等同样适用。

§ 3.2 随机细观结构

当增强相在基体材料内呈现随机分布时,则可从实验上观察到随机分布的细观结构。如果增强物的形状和大小也是不规则的,并有一定的随机性,则复合材料的细观结构呈现多重的随机状

态(分布、大小和形状),可用随机场来描述。颗粒增强复合材料的细观结构大多如此。在单向纤维复合材料的横截面内,纤维呈现二维随机分布,如图 3.3a 所示。

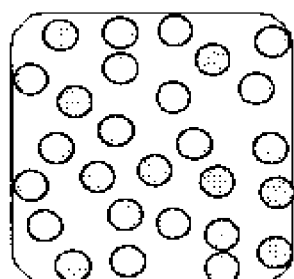


图 3.3a 随机分布颗粒

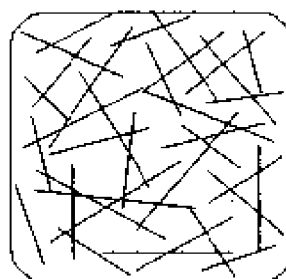


图 3.3b 二维随机分布短纤维

用 C^0 表示基体的弹性模量, C^1 表示夹杂物的弹性模量, 则随机弹性模量场可表示为:

$$C(x) = C^0 + (C^1 - C^0) V(x) \quad (3.6)$$

其中 $V(x)$ 叫做特征函数, 它是位置的随机函数

$$V(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \in D - \Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

其中 D 是整个材料所占有的区域, Ω 是夹杂物占有的区域。

这个模型实际上将弹性模量看成坐标的随机函数, 由它导出的弹性力学方程成为具有随机变量系数的微分方程, 因而由此解出的位移、应变和应力场也是坐标的随机函数。但是, 这种思想是很难实现的, 因为弹性模量的数学模型实际上很难用于描述一个实际的材料。作为一种近似和简化, 可借助于细观扫描技术, 对细观结构的分布曲面或曲线进行定量化统计处理, 再得到弹性场的统计特性。

对短纤维复合材料, 如果纤维的形状和长度是基本确定的, 则只有纤维分布的角度是随机的。在二维情况下(图 3.3b), 假设方位角在 $[0, \pi]$ 内均匀分布, 其分布函数可写为:

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \quad \theta \in [0, \pi] \quad (3.8)$$

详细分析随机细观结构复合材料的弹性场分布是比较困难的, 即便能够分析, 也会因夹杂的数量非常大而失去实用的价值。

一般分析其统计特性就够了。

§ 3.3 周期性均匀细观结构

尽管随机场模型比较接近复合材料的实际情况,但其力学问题的数学描述和定量化处理则相当困难。因此,对细观结构进行简化是非常必要的。均匀性和周期性分布假设是常用的方法。

对单方向铺设的连续纤维复合材料,由于纤维在轴向无限长,只需分析纤维在横截面内的分布情况。典型的纤维分布为正方形和正六边形分布,如图 3.4 和图 3.5 所示。对这种具有均匀性和周期性的细观结构,可取出一个最小的单胞作为代表体元。这种单胞可以按平面应变模型或广义平面应变(考虑轴向位移)模型计算,而且要满足变形后的单胞边界仍为直线或平面的协调性要求。

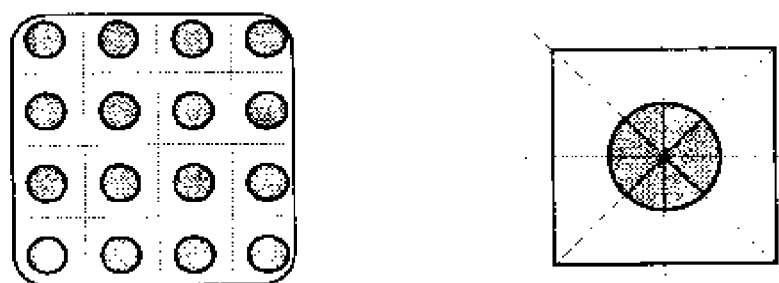


图 3.4 正方形排列与代表体元

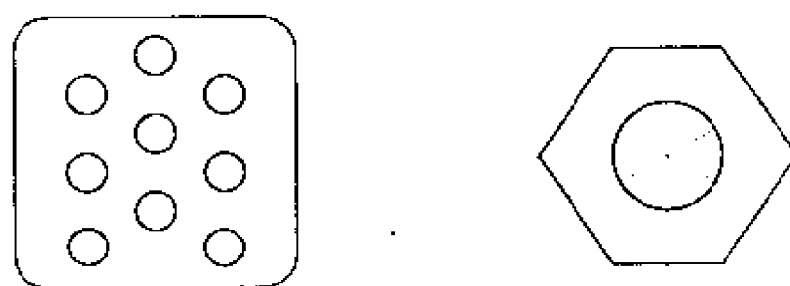


图 3.5 正六边形排列与代表体元

对于具有规则形状和一定大小颗粒增强的复合材料也可简化为上述二维模型。另一种纤维复合材料的随机分布模型是采用同心圆柱或同心球作为单胞,如图 3.6 所示。其代表体元为由纤

维和周围基体组成的同心圆柱或同心球。这种代表体元拼接后不能充满整个材料空间,但代表体元的纤维体分比与整体材料相同。

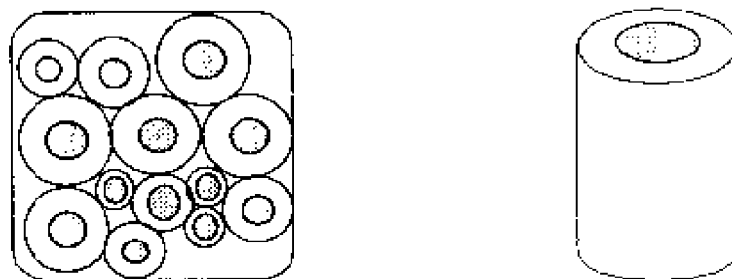


图 3.6 随机排列与同心圆柱模型

短纤维复合材料具有三维随机分布的细观结构。但单向短纤维复合材料可简化为矩形排列和交叉排列模型(图3.7)。矩形排

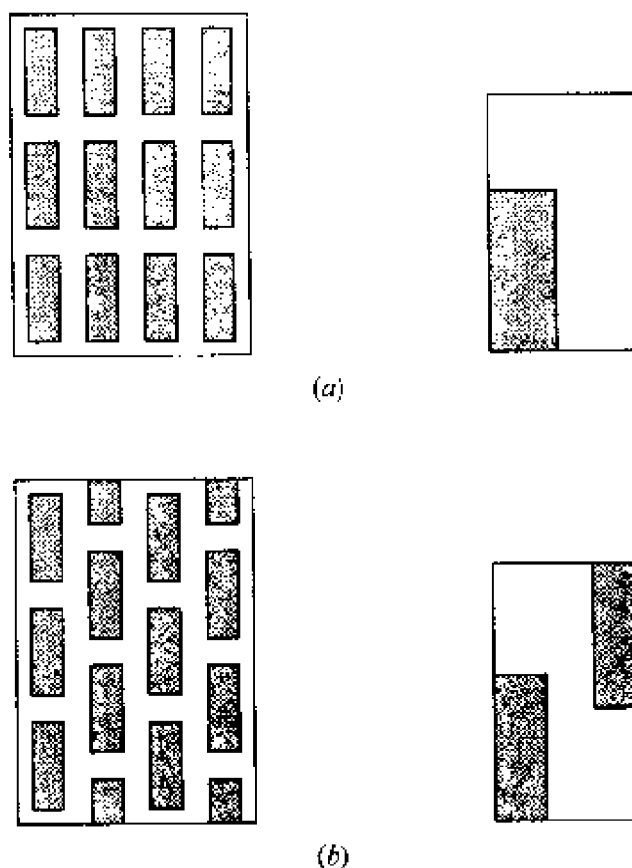


图 3.7 单向短纤维复合材料的细观结构

(a) 矩形排列及其轴对称单元;(b)交叉排列及其平面应变单元。

列复合材料造成一些没有纤维的横断区域,在这个区域内完全由基体承受荷载,它的代表体元可用一个轴对称的同心圆柱表示。交叉排列模型的纤维在两端点的界面上传递的正应力很小,而沿纤维母线的界面传递的剪应力很大,这种细观结构如果简单地用轴对称的代表体元表示,将会遇到确定边界条件的困难,较多地采用平面应变模型作为代表体元。

从以上两个模型可以看出,用轴对称模型所模拟的复合材料在实际中是很少见的,因为实际的复合材料很少具有这种规则的矩形排列结构,而且这种排列存在承载能力很弱的无纤维区,从力学的观点看,应力求避免这种细观结构。平面应变模型却不能精确模拟圆截面纤维的几何形状。一般情况下,利用三维模型的代表体元更接近于实际情况,如图 3.8 所示。

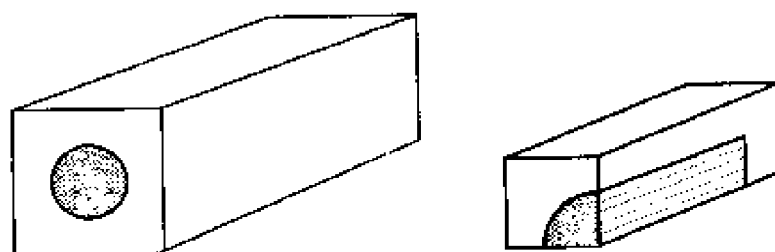


图 3.8 短纤维复合材料的三维单胞模型

无论利用哪种模型,都存在代表体元与周围材料的变形协调问题,因此,需要谨慎确定代表体元的边界条件。最简单的变形协调条件是使代表体元的边界在变形后保持直线或平面。如果代表体元是对称的,还应保证边界条件的对称性。

§ 3.4 细观结构的局部涨落

增强物在基体内的分布一般是随机的,为了分析的简单,往往将其简化为均匀的分布模型,并且认为各个增强相具有相同的大小和形状。一般而言,无论从设计上还是从工艺过程中,人们会追求一种均匀分布的完美细观结构。但是,由于现有工艺水平的限制,造成复合材料细观结构的几何缺陷是不可避免的,这种几何缺陷

陷有下列几类：

1. 增强物的形状和尺寸缺陷

增强物的形状和尺寸不可能完全相同,个别增强物的形状和尺寸与其平均值有较大的误差。另外,在制造工艺中,有些增强物被破坏而造成几何缺陷。例如在复合工艺中纤维或晶须被拉断、颗粒破碎等。从统计的观点看,只要增强物的几何统计值没有大的分散性,用其平均值表示增强物的形状和尺寸是合理的。换言之,因为增强物的数目很多,少数偏差较大的增强物的影响可以忽略。如果增强物的几何性质相差较大,且统计分散性较大,应当作为几种不同的增强物考虑。

2. 增强物位置分布的不均匀性

这是最常见的细观结构的几何缺陷,主要表现在细观结构的局部涨落。例如在纤维复合材料中,纤维分布不均匀,在局部区域内造成纤维堆积,而在另一些区域内只有基体材料没有纤维。在树脂基复合材料中,使用浸脂纤维带可在一个单层内均匀铺设纤维,但在层合固化中,纤维会随着基体的流动而造成局部堆积。当然,这与所使用的工艺和模具有关。在颗粒或晶须增强金属基复合材料中也存在类似现象,例如,在制造出的金属基复合材料毛坯中,即使增强相的分布是均匀的,但经过拔拉成型或者其他机械加工后,增强相可能会局部堆积或局部转向。图3.9给出了颗粒(连续纤维)复合材料和单向短纤维复合材料的局部涨落的示意图。

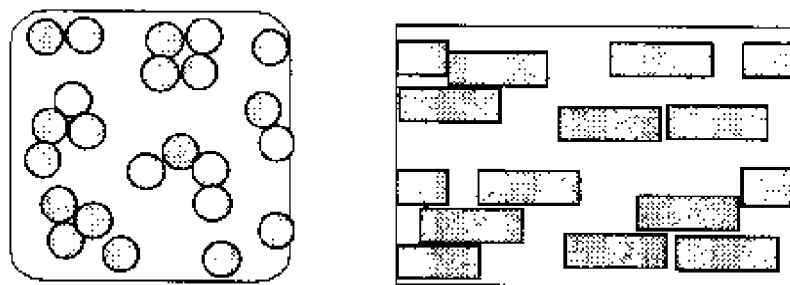


图 3.9 细观结构位置分布的不均匀性

3. 增强物方向分布的不均匀性

单向纤维和完全的随机分布纤维复合材料都是理想的材料模型,实际的复合材料与模型材料有一定的差别。单向的纤维分布可能会出现部分或局部的方向偏向,而随机的分布可能会出现部分的定向趋势,如图 3.10 所示。这种缺陷主要来自于制造工艺和随后的加工过程。增强物方向分布的不均匀性是影响复合材料质量和性能的主要因素之一。

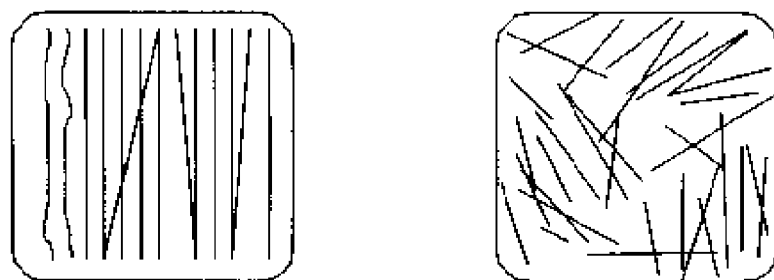


图 3.10 细观结构方向分布的不均匀性

细观结构的局部涨落对复合材料的宏观力学性能产生很大的影响,造成复合材料质量的明显降低,并且对细观力学的分析带来极大的困难。增强物相互接近时,其相互作用、接触效应等都不可忽视,对复合材料的增强机理和破坏机理有显著的影响。但目前人们对这类问题的理解还有待深入。

参考文献

1. Z Hashin. Analysis of Composite Materials – A Survey. J Applied Mechanics, 1983,50:481
2. Z Hashin. Elasticity of Random Media. Tran Soc Rheo. 1965,9(1):381~406
3. Kunit. Elastic media with microstructure II. Springer-verlag, 1983
4. T Iwakuma, S N Nasser. Composites with Periodic Microstructures. Computer & Structures, 1983,16(1~4):13~19

第 4 章 复合材料细观力学基础

§ 4.1 各向异性材料的本构方程

设坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 是材料主轴坐标系, 张量应力和张量应变用下列向量表示为:

$$\sigma = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12}\}^T \quad (4.1a)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{31} \ \epsilon_{12}\}^T \quad (4.1b)$$

假设材料沿着三个正交坐标轴有不同的性能, 则材料为正交各向异性。此时, 材料的应力-应变关系可用刚度系数表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.2a)$$

或

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (4.2b)$$

也可用柔度系数表示为:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.3a)$$

或

$$\epsilon_{ij} = D_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (4.3b)$$

其中 $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$ 。由刚度矩阵的对称性, $C_{ijkl} = C_{klij}$ 。所以在正交各向异性材料中, 独立的材料常数只有 9 个。

如果进一步假设材料是横观各向同性的, 并设 2-3 平面为各向同性平面, 则有:

$$C_{1122} = C_{1133}, C_{3131} = C_{1212}, C_{2222} = C_{3333},$$

$$C_{2323} = \frac{1}{2}(C_{2222} - C_{2233})$$

在这种情况下, 独立的材料常数只有 5 个, 其刚度方程和柔度方程可分别表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{3322} & C_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.4a)$$

和

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{3322} & D_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.4b)$$

横观各向同性材料的刚度和柔度系数与工程常数之间的关系为:

$$E_{11} = \frac{1}{D_{1111}} = C_{1111} - \frac{2C_{1122}^2}{C_{2222} + C_{2233}},$$

$$E_{22} = E_{33} = \frac{1}{D_{2222}}$$

$$= C_{2222} + \frac{C_{1122}^2(C_{2233} - C_{2222}) + C_{2233}(C_{1122}^2 - C_{1111}C_{2233})}{C_{1111}C_{2222} - C_{1122}^2}$$

$$\nu_{12} = -\frac{D_{2211}}{D_{1111}} = -\frac{C_{1122}}{C_{2222} + C_{2233}}$$

$$\mu_{12} = \frac{1}{D_{1212}} = C_{1212}$$

$$\mu_{23} = \frac{1}{D_{2323}} = C_{2323} - \frac{1}{2(D_{2222} - D_{2233})} = \frac{1}{2}(C_{2222} - C_{2233})$$

横观各向同性材料的应力-应变关系也可以用 Hill^[1]给出的另外一种形式表示:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) &= k(\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + l\epsilon_{11} \\ \sigma_{11} &= n\epsilon_{11} + l(\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= 2m(\epsilon_{22} - \epsilon_{33}) \\ \sigma_{23} &= 2m\epsilon_{23} \\ \sigma_{12} &= 2p\epsilon_{12} \\ \sigma_{13} &= 2p\epsilon_{13} \end{aligned} \quad (4.5a)$$

或用矩阵形式表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & k+m & k-m & 0 & 0 & 0 \\ l & k-m & k+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.5b)$$

或

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}\boldsymbol{\epsilon} \quad (4.5c)$$

Walpole^[2]用缩减形式将刚度阵表示为:

$$\mathbf{L} = (2k, l, n, 2m, 2p) \quad (4.6a)$$

其中, Walpole 分量与工程常数之间的关系为:

$$E_{11} = n^2 - l^2/k, \nu_{12} = l/2k,$$

$$E_{22} = \frac{4k_{23}}{k_{23}/\mu_{23} + 1 + 4\nu_{12}^2 k_{23}/E_{11}},$$

$$k_{23} = k, \mu_{23} = m, \mu_{12} = p.$$

对于各向同性材料,上述各个方程还可进一步简化,独立的材料常数只有 2 个,其应力-应变关系可写为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k-\mu & k-\mu & k-\mu & 0 & 0 & 0 \\ k-\mu & k+\mu & k-\mu & 0 & 0 & 0 \\ k-\mu & k-\mu & k+\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.6b)$$

或

$$L = (3k, 2\mu) \quad (4.6c)$$

其中 k 和 μ 分别为体积模量和剪切模量。它们与杨氏模量和泊松比的关系为:

$$k = \lambda + \mu = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

其中 λ, μ 也称为 Lamé 常数,可表示为:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

§ 4.2 特征应变问题

设有无限大的各向同性介质 D, 其局部区域 Ω 内由于某种物理和化学原因产生了一个局部应变 ε_0^* , 它是在无外力作用下产生的微小非弹性应变, 如热膨胀、相变、预应变或塑性应变等。Mura^[3] 称这种应变为特征应变 (Eigenstrain), 由特征应变引起的自平衡应力称为特征应力 (Eigenstress), 如热应力、相变应力、预应力、残余应力等。特征应

力是因为子域 Ω 的变形受到周围介质的约束而产生的。

产生特征应变 ϵ_{ij}^* 的子域 Ω 称为夹杂(Inclusion),包围夹杂的无限大介质称为基体(Matrix)。特征应变问题有时也被称为夹杂问题,它研究一个夹杂引起的弹性力学解,如图 4.1 所示。

特征应变问题可以分解为以下三个问题的叠加^[4]:

(1)从 D 中取出夹杂 Ω ,使子域 Ω 不受任何约束地经历特征应变 ϵ_{ij}^* ,子域 Ω 内对应的位移场为 u_i ,但这时夹杂内没有任何应力,而 $D-\Omega$ 内没有任何应变。

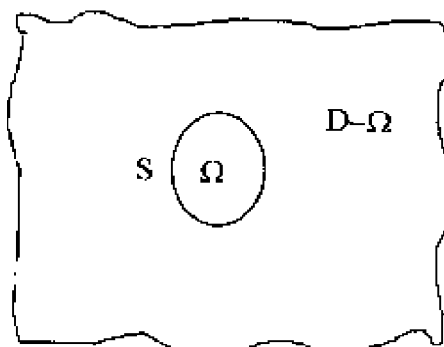


图 4.1 夹杂问题

(2) 在子域 Ω 的表面 S 上施加外力 p_i^* ,使子域 Ω 恢复到原来的大小和形状,即:

$$p_i^* = -\sigma_{ij}^* n_j \quad (4.7)$$

其中 n_j 是 S 的外法向, σ_{ij}^* 是由胡克定律得到的相应于特征应变 ϵ_{ij}^* 的应力:

$$\sigma_{ij}^* = \lambda \epsilon^* \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^*, \quad \epsilon^* = \epsilon_{ii}^* \quad (4.8)$$

其中 λ 和 μ 是拉梅常数, δ_{ij} 是 Kronecker 函数。这时,子域 Ω 内没有变形,但存在初应力 $-\sigma_{ij}^*$,而 $D-\Omega$ 内没有任何应力。

(3)将夹杂 Ω 放回 D 中,并在 Ω 的边界 S 上施加与 p_i^* 相反的表面力 p_i ,即:

$$p_i = -p_i^* = \sigma_{ij}^* n_j = (\lambda \epsilon^* \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^*) n_j \quad (4.9)$$

使夹杂 Ω 与无限大介质 $D-\Omega$ 一起协调变形。这样,特征应变问题就变为一个在 S 上作用分布面力 p_i ,而在 Ω 内存在初应力 $-\sigma_{ij}^*$ 的无限大介质的弹性力学问题。分布面力微元 $p_i ds$ 可以看做无限大介质 D 内的集中力,其解可用格林函数表示的 Kelvin 解给出,其位移场为:

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') p_k(x) ds \quad (4.10)$$

其中, $U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 是格林函数。有了位移场, 应变和应力可依次求出, 在夹杂的内外, 都有应变场:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.11)$$

在夹杂外的无限大介质 $D - \Omega$ 内的应力场为:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \varepsilon = \varepsilon_{ii} \quad (4.12)$$

在夹杂 Ω 内的应力场为:

$$\sigma_{ij}^I = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^* = \lambda(\varepsilon - \varepsilon^*)\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) \quad (4.13)$$

总之, 夹杂 Ω 内作用特征应变 ε_{ij}^* 的问题实际就是在子域 Ω 内作用体力 $C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^*$ 的问题, 其中 C_{ijkl} 为介质的弹性常数。经过 Eshelby 对这个问题的分解, 变为在子域 Ω 的边界 S 上作用分布力 p_i 和在子域 Ω 内作用初应力 $-\sigma_{ij}^*$ 的问题。

最后简要介绍一下格林函数的意义。格林函数 $U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 的定义是:

$$U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \right\} \quad (4.14a)$$

其中 ν 是材料的泊松比。格林函数 $U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 的物理含义是: 在无限大各向同性体的点 $\mathbf{x}'$ 处沿着 x_k 的方向作用一单位力, 在点 $\mathbf{x}$ 处得到沿着 x_i 方向的位移分量为 $U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。格林函数还可写成另一种形式:

$$U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right\} \quad (4.14b)$$

§ 4.3 Eshelby 关于椭球夹杂问题的解答

假设在夹杂 Ω 内发生的特征应变 ε_{ij}^* 是均匀的, 即为一常数, 将方程(4.9)代入方程(4.10)后得到^[4]:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) = & \lambda \varepsilon^* \int_S U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') n_k(\mathbf{x}') ds \\ & + 2\mu \varepsilon_{kl}^* \int_S U_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') n_l(\mathbf{x}') ds \end{aligned} \quad (4.15)$$

将格林函数(4.14b)式代入上式得到:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &= \frac{\sigma_{jk}^*}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_V \frac{f_{ijk}(l)}{r^2} d\mathbf{x}' \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}^*}{8\pi(1-\nu)} \int_V \frac{g_{ijk}(l)}{r^2} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4.16)$$

式中 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, $l = \frac{1}{r}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$,

$$f_{ijk} = (1-2\nu)(\delta_{ij}l_k + \delta_{jk}l_i) - \delta_{ik}l_j + 3l_i l_j l_k$$

$$g_{ijk} = (1-2\nu)(\delta_{ij}l_k + \delta_{jk}l_i - \delta_{ik}l_j) + 3l_i l_j l_k$$

如果夹杂的形状为椭球,式(4.16)的积分还可简化。设椭球夹杂 Ω 的方程为:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 \leq 1 \quad (4.17)$$

为了计算式(4.16)中的积分,按如下方式选取积分微元 $d\mathbf{x}'$ 。对夹杂 Ω 内部的点 $\mathbf{x}$,沿着从点 $\mathbf{x}$ 到点 $\mathbf{x}'$ 做一直线,取 dr 为该直线上的微元。现在以从点 $\mathbf{x}$ 到点 $\mathbf{x}'$ 的直线为轴线做一微元圆锥体,此圆锥体与椭球表面的交面为 ds ,所以体元 $d\mathbf{x}'$ 可表示为 $d\mathbf{x}' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = dr ds$ 。然后再做一个以点 $\mathbf{x}$ 为中心的球体 Σ ,单位球 Σ 的表面与微元圆锥体的交面为 $d\omega$,显然, $ds = r^2 d\omega$ 。这样体元 $d\mathbf{x}'$ 可进一步表示为:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}' &= dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \\ &= dr ds = dr \cdot r^2 d\omega \end{aligned}$$

注意当点 $\mathbf{x}'$ 在整个椭球内取值时, ds 应扫过整个椭球面,所以,当 $d\omega$ 扫过整个单位球面时,相应地 ds 也扫过整个椭球面,而 $d\mathbf{x}'$ 就走遍了整个椭球体。经过这样的处理,使得式(4.16)中的对椭球 Ω 的积分变换成对 dr 和对单位球面 Σ 的积分,如图 4.2 所示。

由于 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ 是夹杂 Ω 的内点,根据 r 和 l 的定义,当点 $\mathbf{x}'$ 位于椭球表面上时,它可表示为: $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(x_1 + rl_1, x_2 +$

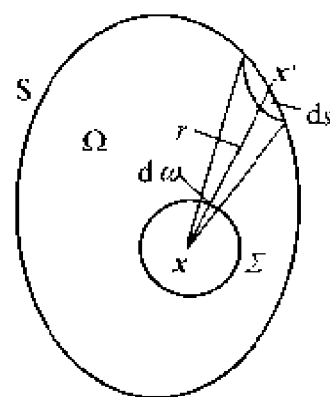


图 4.2 积分微元

$rl_2, x_3 + rl_3)$, 并且满足边界方程:

$$\frac{(x_1 + rl_1)^2}{a_1^2} + \frac{(x_2 + rl_2)^2}{a_2^2} + \frac{(x_3 + rl_3)^2}{a_3^2} = 1$$

从中解出:

$$r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.18)$$

其中:

$$\begin{aligned} a &= \frac{l_1^2}{a_1^2} + \frac{l_2^2}{a_2^2} + \frac{l_3^2}{a_3^2} \\ b &= 2 \left(\frac{l_1 x_1}{a_1^2} + \frac{l_2 x_2}{a_2^2} + \frac{l_3 x_3}{a_3^2} \right) \\ c &= \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 \end{aligned}$$

引入向量 $\lambda = \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{a_1^2}, \lambda_2 = \frac{l_2}{a_2^2}, \lambda_3 = \frac{l_3}{a_3^2} \quad (4.19)$$

于是在(4.16)式中先对 dr 从 0 到 r 积分, 得到:

$$u_i(\mathbf{x}) = -\frac{\epsilon_{jk}^*}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} r g_{ijk}(l) d\omega \quad (4.20)$$

将(4.19)代入(4.18)再代入(4.20), 得到:

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{x_m \epsilon_{jk}^*}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} \frac{\lambda_m g_{ijk}}{a} d\omega \quad (4.21)$$

相应的应变场为:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon_{mn}^*}{16\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} \frac{\lambda_i g_{jmn} + \lambda_j g_{imn}}{a} d\omega \quad (4.22)$$

从上式可以看出, 在特征应变 ϵ_{ij}^* 是均匀的情况下, 夹杂 Ω 内的应变场 $\epsilon_{ij}(\mathbf{x})$ 是不依赖于坐标的常数。这就证明了夹杂内的应变和应力场是均匀的。

将方程(4.22)表示成:

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \epsilon_{kl}^* \quad (4.23a)$$

其中

$$S_{ijkl} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} \frac{\lambda_i g_{jmn} + \lambda_j g_{imn}}{a} d\omega \quad (4.23b)$$

称为 Eshelby 张量, 它是一个四阶张量, 与椭球的形状和材料的性质有关。它有如下的对称关系:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \quad (4.23c)$$

对各向同性介质, Eshelby 张量可以显式地表示出来^[4]。具体的表达式为:

$$\left. \begin{aligned} S_{1111} &= \frac{3}{8\pi(1-\nu)} a_1^2 I_{11} + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} I_1 \\ S_{1122} &= \frac{3}{8\pi(1-\nu)} a_2^2 I_{12} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} I_1 \\ S_{1133} &= \frac{3}{8\pi(1-\nu)} a_3^2 I_{13} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} I_1 \\ S_{1212} &= \frac{a_1^2 + a_2^2}{16\pi(1-\nu)} I_{12} + \frac{1-2\nu}{16\pi(1-\nu)} (I_1 + I_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.23d)$$

对下标(1, 2, 3)循环给出其他非零项, 不能由循环给出的项都为零, 例如

$$S_{1112} = S_{1223} = S_{1232} = 0$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{dq}{(a_1^2 + q)q'} \\ I_{11} &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{dq}{(a_1^2 + q)^2 q'} \\ I_{12} &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{dq}{(a_1^2 + q)(a_2^2 + q)q'} \\ q' &= [(a_1^2 + q)(a_2^2 + q)(a_3^2 + q)]^{1/2} \end{aligned}$$

对下标(1, 2, 3)和 (a_1, a_2, a_3) 循环可得到其他的 I_i 和 I_{ij} 。

椭球的形状确定之后, 做上述积分就可得到 Eshelby 张量的所有分量。下面给出各种形状椭球的 Eshelby 张量^[3,4]。

(1) 旋转椭球夹杂 $(a_1 \geq a_2 = a_3)$, 如图 4.3a 所示。

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{3}{8(1-\nu)} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)} + \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu - \frac{9}{4(\alpha^2-1)} \right\} g$$

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu + \frac{(3\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)} - \left[1 - 2\nu - \frac{3\alpha^2}{(\alpha^2-1)} \right] g \right\}$$

$$S_{2233} = S_{3322} = \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} - (1-2\nu) - \frac{3}{4(\alpha^2-1)} g \right\}$$

$$S_{2211} = S_{3311} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)} + \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ \frac{3\alpha^2}{(\alpha^2-1)} - (1-2\nu) \right\} g$$

$$S_{1122} = S_{1133} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu + \frac{1}{(\alpha^2-1)} \right\} + \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu + \frac{3}{2(\alpha^2-1)} \right\} g$$

$$S_{1212} = S_{1313} = \frac{1}{8(1-\nu)} \left\{ 2(1-2\nu) - 2 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} + 3 \left(-1 - 2\nu + 3 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} \right) g \right\}$$

$$S_{2323} = \frac{1}{8(1-\nu)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + \frac{1}{16(1-\nu)} \left[4(1-2\nu) - \frac{3}{\alpha^2-1} \right] g$$

其中

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2}, g = \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}} [\alpha(\alpha^2-1)^{1/2} - \operatorname{arccosh} \alpha]$$

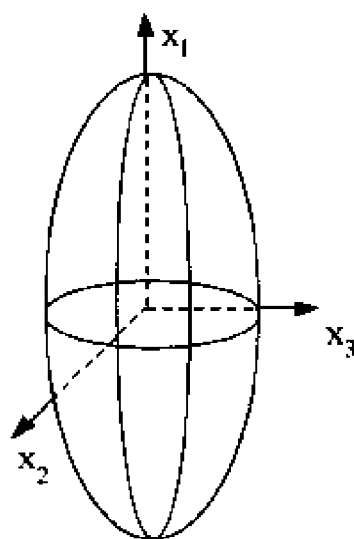


图 4.3a 旋转椭球体

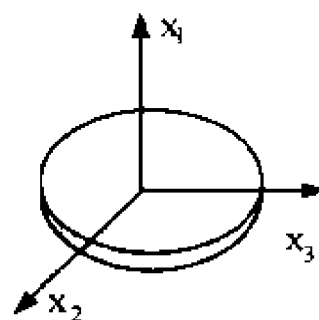


图 4.3b 圆盘

(2) 圆盘(币形夹杂) ($a_1 = t, a_2 = a_3 = c, t \ll c$), 如图 4.3b 所示。

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{(13-8\nu)\pi}{32(1-\nu)} \left(\frac{t}{c} \right)$$

$$\begin{aligned}
S_{1111} &= 1 - \frac{(1-2\nu)\pi}{4(1-\nu)} \left(\frac{t}{c} \right) \\
S_{2233} = S_{3322} &= -\frac{(1-8\nu)\pi}{32(1-\nu)} \left(\frac{t}{c} \right) \\
S_{2211} = S_{3311} &= -\frac{(1-2\nu)\pi}{8(1-\nu)} \left(\frac{t}{c} \right) \left\{ 1 - \frac{4}{\pi(1-\nu)} \left(\frac{t}{c} \right) \right\} \\
S_{1122} = S_{1133} &= \frac{\nu}{(1-\nu)} \left\{ 1 - \frac{(1+4\nu)\pi}{8\nu} \left(\frac{t}{c} \right) \right\} \\
S_{2323} &= \frac{(7-8\nu)\pi}{32(1-\nu)} \left(\frac{t}{c} \right) \\
S_{1212} = S_{3131} &= \frac{1}{2} - \frac{(2-\nu)\pi}{8(1-\nu)} \left(\frac{t}{c} \right) \\
(3) \text{球体} (a_1 = a_2 = a_3 = a), &\text{如图 4.3c 所示。}
\end{aligned}$$

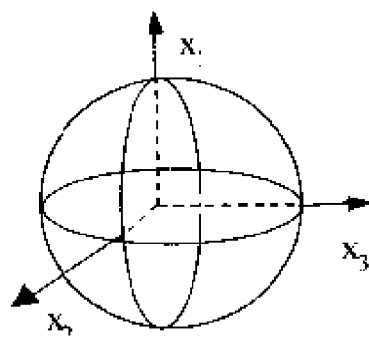


图 4.3c 球体

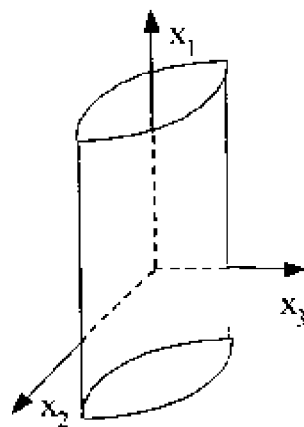


图 4.3d 椭圆柱体

$$\begin{aligned}
S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} &= \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)} \\
S_{1122} = S_{2233} = S_{1133} &= \frac{5\nu-1}{15(1-\nu)} \\
S_{2211} = S_{3322} = S_{3311} &= -\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)} \\
S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} &= -\frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}
\end{aligned}$$

(4) 椭圆柱体 ($a_1 \rightarrow \infty, a_2 \geq a_3, \alpha = \frac{a_2}{a_3}$), 如图 4.3d 所示。

$$S_{1111} = 0$$

$$S_{2222} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{1+2\alpha}{(\alpha+1)^2} + (1-2\nu) \frac{1}{\alpha+1} \right]$$

$$S_{3333} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{\alpha^2+2\alpha}{(\alpha+1)^2} + (1-2\nu) \frac{\alpha}{\alpha+1} \right]$$

$$S_{1122} = S_{1133} = 0$$

$$S_{2211} = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{1+\alpha}$$

$$S_{3311} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$S_{2233} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{1}{(1+\alpha)^2} - (1-2\nu) \frac{1}{1+\alpha} \right]$$

$$S_{3322} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} - (1-2\nu) \frac{\alpha}{1+\alpha} \right]$$

$$S_{1212} = \frac{1}{2(1+\alpha)}$$

$$S_{3131} = \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}$$

$$S_{2323} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\frac{\alpha^2+1}{2(1+\alpha)^2} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right]$$

(5) 椭圆盘 ($a_1 > a_2 \gg a_3$), 如图 4.3e 所示。

$$I_1 = 4\pi a_2 a_3 [F(k) - E(k)] / (a_1^2 - a_2^2)$$

$$I_2 = 4\pi a_3 E(k) / a_2 - 4\pi a_2 a_3 [F(k) - E(k)] / (a_1^2 - a_2^2)$$

$$I_3 = 4\pi - 4\pi a_3 E(k) / a_2$$

$$I_{12} = \{4\pi a_3 E(k) / a_2 - 8\pi a_2 a_3 [F(k) - E(k)] / (a_1^2 - a_2^2)\} / (a_1^2 - a_2^2)$$

$$I_{23} = \{4\pi - 8\pi a_3 E(k) / a_2 + 4\pi a_2 a_3 [F(k) - E(k)] / (a_1^2 - a_2^2)\} / a_2^2$$

$$I_{31} = \{4\pi - 4\pi a_2 a_3 [F(k) - E(k)] / (a_1^2 - a_2^2) - 4\pi a_3 E(k) / a_2\} / a_1^2$$

$$I_{33} = 4\pi / 3a_3^2$$

其中

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$$

$$k^2 = (a_1^2 - a_2^2) / a_1^2$$

(6) 旋转扁椭球 $\left(a_1 = a_2 > a_3, \alpha = \frac{a_3}{a_1}\right)$, 如图 4.3f 所示。

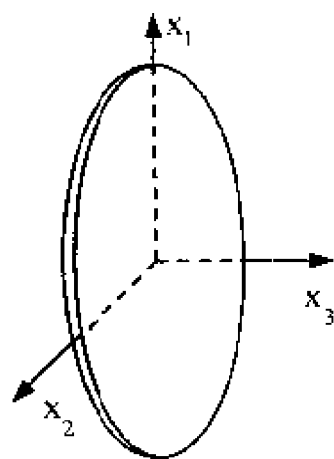


图 4.3e 椭圆盘

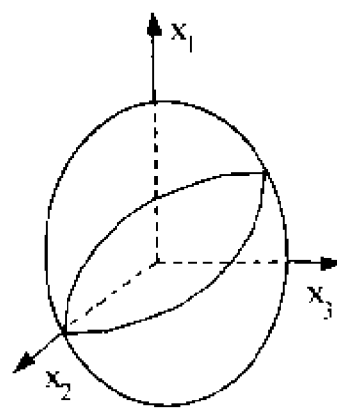


图 4.3f 旋转扁椭球

$$g = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} [\operatorname{arccosh} \alpha - \alpha(1-\alpha^2)^{1/2}]$$

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{3}{8(1-\nu)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + \frac{1}{4(1-\nu)} \left[1-2\nu - \frac{9}{4(\alpha^2-1)} \right] g$$

$$S_{3333} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[1-2\nu + \frac{3\alpha^2-1}{\alpha^2-1} - \left(1-2\nu + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} \right) g \right]$$

$$S_{1122} = S_{2211} = \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} - \left[1-2\nu + \frac{3}{4(\alpha^2-1)} \right] g \right\}$$

$$S_{2233} = S_{1133} = -\frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ -\frac{2\alpha^2}{(\alpha^2-1)} + \left[\frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} - (1-2\nu) \right] g \right\}$$

$$S_{3322} = S_{3311} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \left[1-2\nu + \frac{1}{\alpha^2-1} \right] \\ + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[1-2\nu + \frac{3}{2(\alpha^2-1)} \right] g$$

$$S_{2121} = \frac{1}{8(1-\nu)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + \frac{1}{16(1-\nu)} \left[4(1-2\nu) - \frac{3}{\alpha^2-1} \right] g$$

$$S_{3113} = S_{3232} = \frac{1}{8(1-\nu)} \\ \left[2(1-2\nu) - 2 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} + \left(3 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} - 1+2\nu \right) - 1+2\nu \right] g$$

对各向异性介质, 椭球夹杂内的应变和应力仍然是均匀

的^[3,5,6],但 Eshelby 张量的表达式较为复杂。对横观各向同性介质, Eshelby 张量的表示式写为^[6]:

$$S_{ijkl} = \frac{1}{8\pi} C_{pqkl} (M_{ijpq} + M_{jipq}) \quad (4.24)$$

其中 C_{ijkl} 为无限大横观各向同性介质的弹性张量, M_{ijkl} 可用夹杂的形状参数和基体的材料性质表示出来。对用方程(4.17)表示的夹杂, 设 x_1 方向垂直于各向同性面, 且椭球的形状为旋转椭球, 即 $a_2 = a_3$ 。

令 $\rho = a_1/a_2$, $C_{2222} = d$, $\frac{1}{2}(C_{2222} - C_{2233}) = e$, $C_{2121} = f$, $C_{2211} + C_{2121} = g$, $C_{1111} = h$ 。

则非零的 M_{ijkl} 分量为:

$$M_{2222} = M_{3333} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \Delta(1-x^2) \{ [f(1-x^2) + h\rho^2 x^2] \\ \times [(3e+d)(1-x^2) + 4f\rho^2 x^2] - g^2 \rho^2 x^2(1-x^2) \} dx$$

$$M_{1111} = 4\pi \int_0^1 \Delta \rho^2 x^2 [d(1-x^2) + f\rho^2 x^2] \\ \times [e(1-x^2) + f\rho^2 x^2] dx$$

$$M_{2323} = M_{3232} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \Delta(1-x^2) \{ [f(1-x^2) + h\rho^2 x^2] \\ \times [(e+3d)(1-x^2) + 4f\rho^2 x^2] - 3g^2 \rho^2 x^2(1-x^2) \} dx$$

$$M_{2121} = M_{3131} = 2\pi \int_0^1 \Delta \rho^2 x^2 \{ [(d+e)(1-x^2) + 2f\rho^2 x^2] \\ \times [f(1-x^2) + h\rho^2 x^2] - g^2 \rho^2 x^2(1-x^2) \} dx$$

$$M_{1313} = M_{1212} = 2\pi \int_0^1 \Delta(1-x^2) [d(1-x^2) + f\rho^2 x^2] \\ \times [e(1-x^2) + f\rho^2 x^2] dx$$

$$M_{2233} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \Delta(1-x^2)^2 \{ g^2 \rho^2 x^2 - (d-e)[f(1-x^2) + h\rho^2 x^2] \} dx$$

$$M_{3311} = M_{2211} = (-2\pi) \int_0^1 \Delta g \rho^2 x^2(1-x^2) [e(1-x^2) + f\rho^2 x^2] dx$$

$$\Delta^{-1} = [e(1-x^2) + f\rho^2 x^2] \{ [d(1-x^2) + f\rho^2 x^2] [f(1-x^2)$$

$$+ h\rho^2 x^2\} - g^2 \rho^2 x^2(1 - x^2)\}$$

§ 4.4 一个夹杂物引起的应力场—等效夹杂法

前面讨论的夹杂问题中,夹杂与其周围无限大介质的材料性质是相同的。如果子域 Ω 与周围 $D - \Omega$ 的材料性质不同,则称子域 Ω 为异质夹杂或夹杂物 (Inhomogeneity), 而称 $D - \Omega$ 为基体。异质夹杂或夹杂物问题可变换为夹杂问题求解,这种方法称为等效夹杂法,如图 4.4 所示。

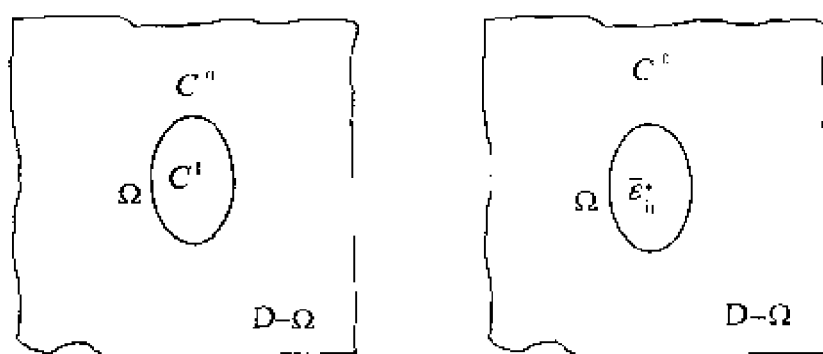


图 4.4 等效夹杂法示意图

一个夹杂问题,即使没有外力的作用,也会在整个区域 D 内产生内应力。但一个夹杂物问题,如果没有外力的作用,是会产生应力的。当然存在具有特征应变的夹杂物这类混合问题。

假设无限大介质 D 内含有一个异质夹杂 Ω , 在无穷远边界受到均匀应力边界条件(3.2)的作用。用 C_{ijkl}^0 和 C_{ijkl}^I 分别表示基体和夹杂物的刚度系数。在这种情况下,如果 D 内没有夹杂物 Ω 存在,则在整个 D 内应力为 σ_{ij}^0 , 对应的应变为 $\epsilon_{ij}^0 = (C_{ijkl}^0)^{-1} \sigma_{kl}^0$ 。而实际的应力场还应该加上由 Ω 引起的扰动应力 σ'_{ij} , 对应的扰动应变为 ϵ'_{ij} 。这样,夹杂物中的应力和应变分别为 $\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}$ 和 $\epsilon_{ij}^0 + \epsilon'_{ij}$ 。由胡克定律:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^I &= \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij} = C_{ijkl}^I (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl}) \\ &= C_{ijkl}^0 (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl} - \bar{\epsilon}_{kl}^*) \end{aligned} \quad (4.25)$$

其中 $\bar{\epsilon}_{ij}^*$ 是因为在上式中将 C_{ijkl}^1 换为 C_{ijkl}^0 后所增加的差值,称为等效特征应变。

这样,对一个夹杂物问题,通过引入等效特征应变而变为一个夹杂问题,这为处理夹杂物问题提供了一种极其方便的方法。只要求出等效特征应变,就可计算出夹杂物内的应变和应力。这一方法通常被称为等效夹杂法,是由 Eshelby 首先提出的^[4]。

夹杂物引起的扰动应变也就是由等效特征应变引起的扰动应变。按照夹杂问题的处理方法,等效特征应变与扰动应变的关系为:

$$\epsilon_{ij}^* = S_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^* \quad (4.26)$$

其中四阶 Eshelby 张量 S_{ijkl} 仅与基体的材料性能和夹杂物的形状有关。如果夹杂物的形状为椭球,则夹杂物内的应变和应力场是均匀的。

如果 Ω 是一个夹杂物,同时 Ω 内又存在特征应变 ϵ_{ij}^* ,仍然可以利用等效夹杂法,求解一个具有特征应变 ϵ_{ij}^* 和等效特征应变 $\bar{\epsilon}_{ij}^*$ 的夹杂问题。

作为例题,下面求解一个含有特征应变 ϵ_{ij}^* 的币形夹杂物问题。设夹杂物的形状为 $(a_1 = t, a_2 = a_3 = c, t \ll c)$,如图 4.3c 所示。夹杂物的拉梅常数为 λ_1, μ_1 ,均匀特征应变 ϵ_{11}^* 为 $\epsilon_{11}^* = \epsilon^*$,其余分量为零。基体的拉梅常数为 λ_0, μ_0 。

由等效夹杂法,等效特征应变 $\bar{\epsilon}_{11}^*, \bar{\epsilon}_{22}^*, \bar{\epsilon}_{33}^* = \bar{\epsilon}_{22}^*$ 由下式确定,在夹杂物内有:

$$\sigma_{11} = 2\lambda_1 \epsilon_{22} + (\lambda_1 + 2\mu_1)(\epsilon_{11} - \epsilon^*) \quad (a)$$

$$= 2\lambda_0(\epsilon_{22} - \bar{\epsilon}_{22}^*) + (\lambda_0 + 2\mu_0)(\epsilon_{11} - \bar{\epsilon}_{11}^*)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 2(\lambda_1 + \mu_1)\epsilon_{22} + \lambda_1(\epsilon_{11} - \epsilon^*) \quad (b)$$

$$= 2(\lambda_0 + \mu_0)(\epsilon_{22} - \bar{\epsilon}_{22}^*) + \lambda_0(\epsilon_{11} - \bar{\epsilon}_{11}^*)$$

其中

$$\epsilon_{ij}^* = S_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^* \quad (c)$$

Eshelby 张量 S_{ijkl} 见 § 4.3 中所述。

将(c)式代入(a)和(b)式,得到

$$\varepsilon_{11}^* = \varepsilon^* + \varepsilon^* \frac{\pi}{4(1-\nu_0)D} \left(\frac{t}{c} \right) \times \quad (d)$$

$$[\lambda_1 \Delta\mu (8\nu_0 + 5) + 2\mu_1 [2\Delta\lambda (1 - 2\nu_0) + 3\Delta\mu]]$$

$$\varepsilon_{22}^* = \varepsilon^* \frac{\pi}{4(1-\nu_0)D} \left(\frac{t}{c} \right) \times \quad (e)$$

$$[\lambda_1 \Delta\mu - 2\mu_1 (2\Delta\lambda + \Delta\mu)] (2\nu_0 - 1)$$

其中 $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0, \Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$,

$$D = 2\lambda_1 \mu_0 - 2\Delta\mu \nu_0 / (1 - \nu_0) + 4\mu_1 [\Delta\lambda \nu_0 / (1 - \nu_0) + (\lambda_0 + \mu_0)]$$

将(e)(d)式代入(a)(b)式,得到夹杂物内的应力

$$\sigma_{11} = - \frac{\mu_0}{2(1-\nu_0)} \pi \left(\frac{t}{c} \right) \varepsilon^* \quad (f)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1+4\nu_0}{4(1-\nu_0)} \pi \left(\frac{t}{c} \right) \varepsilon^* - 2\mu_0 \frac{1+\nu_0 \varepsilon^*}{1-\nu_0} \frac{\pi}{4(1-\nu_0)D} \left(\frac{t}{c} \right) \times \quad (g)$$

$$[\lambda_1 \Delta\mu - 2\mu_1 (2\Delta\lambda + \Delta\mu)] (2\nu_0 - 1)$$

ν_0 为基体的泊松比。

§ 4.5 夹杂外的弹性场

在前面的问题中,是不考虑夹杂外的应力和应变场的。当考虑两个夹杂之间、夹杂与夹杂物之间或两个夹杂物之间的相互作用时,需要知道夹杂外的应力场。

在均匀特征应变的情况下,椭球夹杂内的应变和应力场是均匀的,并可利用 Eshelby 的解答显式地表示。但夹杂外的弹性场要复杂得多。很多学者曾致力于求解这一问题^[7,8,9],其中铁木辛柯和古地尔利用弹性力学理论求解^[9]。但这些解答都很复杂,且含有隐式的求根计算。本节根据 Mura 和 Cheng^[8]的推导过程,介

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(u_{k,l} - \epsilon_{kl}^*) \quad (4.27)$$

上式中的特征应变在夹杂 Ω 外为 0, 代入平衡方程 $\sigma_{ij,j} = 0$ 得到:

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = C_{ijkl}\epsilon_{kl,j}^* \quad (4.28)$$

这个方程的解可用 Fourier 积分表示为:

$$u_i(\mathbf{x}) = -(2\pi)^{-3} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} d\mathbf{x}' \int_0^{\infty} \xi^2 d\xi \int_{\Sigma} \{ C_{klmn} \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') N_{ik}(\xi) / D(\xi) \\ \times \exp[i\xi \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \} ds(\xi) \quad (4.29)$$

这里 $d\mathbf{x}' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$, Σ 是单位球面 $\bar{\xi}_i \bar{\xi}_i = 1$, $N_{ik}(\xi)$ 和 $D(\xi)$ 分别是 3 阶矩阵 $C_{ipkq} \xi_p \xi_q$ 的余子式和行列式。它们的次数分别为 4 次和 6 次。

如令 $K_{ik} = C_{ijkl} \xi_j \xi_l$, 其代数余子式 $N_{ij}(\xi)$ 和行列式 $D(\xi)$ 为:

$$N_{ij}(\xi) = \frac{1}{2} \chi_{jkl} \chi_{lmn} K_{km} K_{ln}$$

$$D(\xi) = \chi_{nm1} K_{m1} K_{n2} K_{13}$$

其中 χ_{ijk} 中的 i, j, k 各为 1, 2, 3。当三个下标互不相同, $\chi_{ijk} = 1$, 否则为零。

令 $\xi^2 = \xi_i \xi_i$, $\bar{\xi} = \xi / \xi$, 这样

$$N_{ik}(\xi) \xi^2 / D(\xi) = (N_{ik}(\xi) / \xi^4) / (D(\xi) / \xi^6) = N_{ik}(\bar{\xi}) / D(\bar{\xi})$$

$$\int_0^{\infty} \exp(i\xi\eta) d\xi = \pi \delta(\eta)$$

于是积分(4.29)变为:

$$u_i(\mathbf{x}) = -(2\pi^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} d\mathbf{x}' \int_{\Sigma} [C_{klmn} \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') N_{ik}(\bar{\xi}) / D(\bar{\xi}) \times \\ \delta(\bar{\xi} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}'))] ds(\bar{\xi}) \quad (4.30)$$

为了计算上述积分, 假设椭球夹杂的方程为:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 \leq 1 \quad (4.17)$$

对坐标进行如下变换:

$$y_i = x_i / a_i, \text{ (对 } i \text{ 不求和)}$$

$$y'_i = x'_i / a_i, \text{ (对 } i \text{ 不求和)}$$

$$\xi_i = a_i \xi_i, \bar{\xi}_i = \xi_i / \zeta, (\text{对 } i \text{ 不求和})$$

$$\zeta = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2} = [(a_1 \xi_1)^2 + (a_2 \xi_2)^2 + (a_3 \xi_3)^2]^{1/2}$$

这样,在椭球内的积分就变为单位球 Σ 内的积分。微元体为

$$d\mathbf{x}' = dr'_1 dr'_2 dr'_3 = a_1 a_2 a_3 dy'_1 dy'_2 dy'_3 = a_1 a_2 a_3 r dr d\varphi dz$$

其中 $z = \bar{\xi} \cdot \mathbf{y}' = r, \varphi, z$ 的取值范围覆盖整个单位球 Σ , 经过变换, 方程(4.30)表示的位移场为:

$$u_i(\mathbf{x}) = - \frac{a_1 a_2 a_3}{8\pi^2} \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\Sigma} [C_{klmn} \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') \cdot N_{ik}(\bar{\xi})/D(\bar{\xi}) \cdot \bar{\xi}_l \cdot \delta'(\zeta \bar{\xi} \cdot \mathbf{y} - \zeta z)] ds(\bar{\xi}) \quad (4.31a)$$

其中 $R = (1 - z^2)^{1/2}$ 。

对(4.31a)式求 x_j 的微分, 得到应变:

$$u_{i,j}(\mathbf{x}) = - \frac{a_1 a_2 a_3}{8\pi^2} \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\Sigma} [C_{klmn} \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') \cdot N_{ik}(\bar{\xi})/D(\bar{\xi}) \cdot \bar{\xi}_l \bar{\xi}_j \delta''(\zeta \bar{\xi} \cdot \mathbf{y} - \zeta z)] ds(\bar{\xi}) \quad (4.31b)$$

对方程(4.31a), (4.31b)进行分部积分, 并消去其中的 Dirac delta 函数的一阶和二阶导数 δ' 和 δ'' , 得到位移

$$u_i(\mathbf{x}) = - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^R r dr \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') - (\bar{\xi} \cdot \mathbf{y}) \{ \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') \}_{r=R} \right]_{z=\bar{\xi} \cdot \mathbf{y}} \times \int_{\Sigma} [C_{klmn} N_{ik}(\bar{\xi})/D(\bar{\xi}) \cdot \bar{\xi}_l \zeta] ds(\bar{\xi}) \quad (4.32a)$$

相应的应变为:

$$u_{i,j}(\mathbf{x}) = - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^R r dr \frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') - z \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') \right\}_{r=R} - z \frac{\partial}{\partial z} \{ \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') \}_{r=R} - \{ \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') \}_{r=R} \right]_{z=\bar{\xi} \cdot \mathbf{y}} \times \int_{\Sigma} [C_{klmn} N_{ik}(\bar{\xi})/D(\bar{\xi}) \cdot \bar{\xi}_l \bar{\xi}_j] ds(\bar{\xi}) - \frac{1}{2\pi} C_{klmn} \oint_L \{ \epsilon_{nm}^*(\mathbf{x}') \}_{z=1} [N_{ik}(\bar{\xi})/D(\bar{\xi}) \bar{\xi}_j \bar{\xi}_l y^{-1}] d\theta(\bar{\xi}) \quad (4.32b)$$

此处 L 由 $\bar{\xi} \cdot y = 1$ 决定, 而 $R = |1 - (\bar{\xi} \cdot y)^2|^{1/2}$ 。

在上述积分变换中, 为了消去其中的 Dirac delta 函数的一阶和二阶导数 δ' 和 δ'' , 必须要有条件 $\bar{\xi} \cdot y = z$ 。不论 y 取在单位球的什么位置 (当点 x 在椭球上取值时, 经坐标变换后, y 在单位球 Σ 取值), 这一条件必须满足, 积分值才能取得, 而 $|z| \leq 1$, 所以 $\bar{\xi}$ 不能在球面 Σ 上任意取, 要满足 $\bar{\xi} \cdot y \leq 1$, 此区域记为 S^* , 如图 4.5 的阴影以外的区域所示。

当点 x 处于椭球内部时 (即 y 在单位球 Σ 内部), $\bar{\xi} \cdot y \leq 1$ 是自动成立的, 这样 S^* 就变成 Σ 了, 这时式 (4.32a) 和 (4.32b) 仍然适用, 只需把式中的 S^* 变成 Σ , 并去掉绕 L 的线积分。

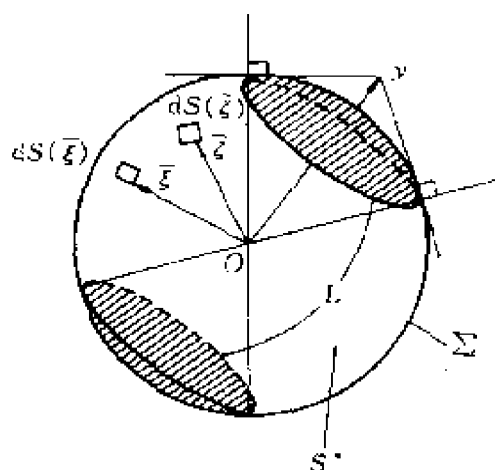


图 4.5 积分区域 S^*

如果给定特征应变 $\epsilon_{ij}^*(x)$ 的函数形式, 则可对 (4.32) 式进行积分, 得到位移和应变。

特别需要指出, 当应力场从夹杂外部变化到夹杂内部时, 应力产生突变。当从夹杂外部趋向夹杂表面时, S^* 趋于 Σ , 满足条件 $\bar{\xi} \cdot y \leq 1$ 的 $\bar{\xi}$ 趋于 y , 即 $a_i \bar{\xi}_i / \zeta \rightarrow x_j / a_i$ ($i = 1, 2, 3$, 对 i 不求和)。这样容易看出 $\bar{\xi}_i \rightarrow n_i$, n_i 是椭球夹杂表面的外法向。绕 L 的线积分变为 $-C_{klmn} \epsilon_{mn}^*(x') N_{ik}(n) D^{-1}(n) n_j n_l$, 于是, 沿着夹杂界面有应力的跳跃为:

$$[\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}(\text{out}) - \sigma_{ij}(\text{in}) = C_{ijkl} \{ -C_{pqmn} \epsilon_{mn}^*(x') N_{kp}(n) D^{-1}(n) n_q n_l + \epsilon_{kl}^*(x') \} \quad (4.33)$$

其中 $N_{ij}(n)$ 和 $D(n)$ 分别是矩阵 $K_{ik} = C_{ijkl} n_j n_l$ 的代数余子式和行列式:

$$N_{ij}(n) = \frac{1}{2} \chi_{jkl} \chi_{jmn} K_{km} K_{ln}$$

$$D(n) = \chi_{mnl} K_{ml} K_{n2} K_{l3}$$

对各向同性材料,有表达式:

$$D(\mathbf{n}) = \mu^2(\lambda + 2\mu)n^6,$$

$$N_j(\mathbf{n}) = \mu n^2 \{ (\lambda + 2\mu)\delta_{ij}n^2 - (\lambda + \mu)n_i n_j \}.$$

其中 λ 和 μ 是 Lamé 常数, $n = \sqrt{n_i n_i}$ 。式(4.33)与 Walpole^[5]的结果一致。

§ 4.6 夹杂问题的能量计算

设 D 内有一个特征应变为 ϵ_{ij}^* 的夹杂 Ω , 其基体和夹杂内的弹性场分别由(4.11)至(4.13)给出。夹杂内的弹性应变能^[4]为:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^I (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*) dv$$

基体内的弹性应变能为:

$$-\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} n_j u_i ds = -\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^I n_j u_i ds = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij} dv$$

其中 S 为夹杂的边界, 其法向以外法向为正, 因此上式应有负号。上式第一个等号来自于夹杂边界的法向应力和位移的连续性, 第二个等号来自于下面的散度定理, 并注意有平衡条件 $\sigma_{ij,j}^I = 0$ 和应力张量的对称性条件。

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij} dv = \int_S \sigma_{ij}^I n_j u_i ds - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^I u_i dv$$

这样夹杂问题的总应变能为:

$$U_{el} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^* dv \quad (4.34)$$

假设在 D 的无穷远边界上作用均匀外力场 σ_{ij}^0 , 对应的均匀应变场为 $\epsilon_{ij}^0 = C_{ijkl} \sigma_{kl}^0$, 位移为 u_i^0 。由于夹杂 Ω 的存在, 特征应变与外力场之间存在相互作用。这时系统的相互作用应变能为:

$$U_{int} = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} n_j u_i^0 - \sigma_{ij}^0 n_j u_i) ds \quad (4.35a)$$

其中 Γ 为夹杂表面 S 外侧相邻的任一表面, 考虑到 S 的正法向为外法向(如图 4.6 所示), 积分中的第二项取负号。使 Γ 与 S 的外侧靠近, 再次利用夹杂边界的法向应力和位移的连续性条件和散

度定理,上式变为在夹杂上的体积分:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{int}} &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^0 - \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}) dv \\
 &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^0 - \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0) dv \\
 &= - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^0 dv \\
 &= - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^* dv
 \end{aligned} \tag{4.35b}$$

这里利用了功的互等条件: $\sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^*$ 。所以,在外力和特征应变作用下的系统的应变能可写成:

$$\begin{aligned}
 U &= U_0 + U_{\text{el}} + U_{\text{int}} \\
 &= U_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^* dv - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^* dv
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

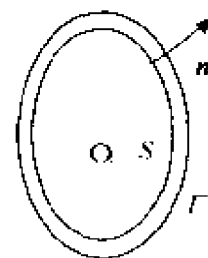


图 4.6 表面 S 的外法向

应变能表达式(4.36)中的第一项可解释为在外力作用下,没有夹杂时的均匀材料的应变能,第二项为在特征应变作用下,没有外力时的应变能,第三项为外力与特征应变的相互作用能。

参考文献

1. R Hill. Theory of mechanical properties of fiber strengthened materials 1: Elastic behavior. J Mech Phys Solids, 1964, 12: 199
2. L J Walpole. On the overall elastic moduli of composite materials. J Mech Phys Solids, 1969, 17: 235
3. T Mura. Micromechanics of Defect in Solids, 2nd ed New York: Martins Nijhoff, 1987
4. J D Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. Proc Royal Society. London, 1957, A241: 376
5. L J Walpole. The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium. Proc Royal Society. London, Series A, 1967, 300: 270 - 289

6. S C Lin, T Mura. Elastic fields of inclusions in anisotropic media II. *Physica Status Solidi (a)*, 1973, 15: 281 ~ 285
7. J D Eshelby. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proc Royal Society, London, Series A*, 1959, 252: 561 ~ 569
8. T Mura, P C Cheng. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *J Applied Mechanics*, 1977, 44: 591 ~ 594
9. 铁木辛柯, 古地尔. 弹性理论. 徐芝纶译. 北京: 高等教育出版社, 1990

第 5 章 复合材料的有效弹性性能

§ 5.1 有效性能的定义

由第 3 章的知识,我们知道由代表体元组成的复合材料可看做统计均匀材料,它在均匀边界条件下产生统计均匀的场变量。场变量在代表体元上的体积平均值称为有效场变量或宏观(平均)场变量。通过有效场变量可以定义复合材料的有效性能(Effective Property),有效性能也称为复合材料的宏观性能或平均性能(Overall or Average Property)。这些定义适用于多相材料的弹性场、电场、磁场或温度场问题以及它们的平均特性。

对于弹性场,设 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 和 $\bar{\sigma}_{ij}$ 是有效应变和有效应力,见第 3 章式(3.4)和式(3.5)。则复合材料的有效弹性张量 L_{ijkl} 由下式定义:

$$\bar{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad (5.1)$$

或用应变能定义为:

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} L_{ijkl} \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{kl} \quad (5.2)$$

同理有效柔度张量 M_{ijkl} 可用下述关系定义:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (5.3)$$

或用应变能定义为:

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} M_{ijkl} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \quad (5.4)$$

当给定均匀位移(应变)边界条件(3.1)时,由式(3.5a)可知,复合材料的有效应变为:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^0 \quad (5.5a)$$

这时,为了计算复合材料的有效弹性系数 L_{ijkl} ,必须首先计算出复合材料的有效应力场^[1]。

同样,当复合材料受到均匀应力边界条件(3.2)时,由式(3.5b)可知,复合材料的有效应力为:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} \quad (5.5b)$$

此时,为了计算复合材料的有效柔度系数 M_{ijkl} , 必须首先计算出复合材料内的有效应变场。

复合材料的有效应力和有效应变可写为:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{V} \iiint_V \bar{\sigma}_{ij} dv \\ &= \frac{1}{V} \left[\iiint_{V_0} \sigma_{ij}^{(0)} dv + \cdots + \iiint_{V_r} \sigma_{ij}^{(r)} dv + \cdots + \iiint_{V_n} \sigma_{ij}^{(n)} dv \right] \quad (5.6a) \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^n v_r \sigma_{ij}^{(r)}$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \sum_{r=0}^n v_r \epsilon_{ij}^{(r)} \quad (5.6b)$$

其中 $\sigma_{ij}^{(r)}$ 和 $\epsilon_{ij}^{(r)}$ 是第 r 相组分材料内的平均应力和平均应变, v_r 是第 r 相材料的体分比, n 是增强相数, $r=0$ 表示基体材料。在每一相中存在弹性关系:

$$\sigma_{ij}^{(r)} = L_{ijkl}^r \epsilon_{kl}^{(r)} \quad (r=0, 1, \cdots, n) \quad (5.7a)$$

$$\epsilon_{ij}^{(r)} = M_{ijkl}^r \sigma_{kl}^{(r)} \quad (r=0, 1, \cdots, n) \quad (5.7b)$$

将式(5.7a)代入式(5.6a), 并利用式(5.1), 得到复合材料的有效弹性张量为:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^0 + \sum_{r=1}^n v_r (\mathbf{L}^r - \mathbf{L}^0) \mathbf{\epsilon}^{(r)} \bar{\mathbf{\epsilon}}^{-1} \quad (5.8a)$$

将式(5.7b)代入式(5.6b), 并利用式(5.3), 得到有效柔度张量为:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \sum_{r=1}^n v_r (\mathbf{M}^r - \mathbf{M}^0) \boldsymbol{\sigma}^{(r)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} \quad (5.8b)$$

假设复合材料的有效应力、应变与每一相内的局部平均应力、应变之间存在关系:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(r)} = \mathbf{A}^r \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (5.9a)$$

$$\sigma^{(r)} = B^r \bar{\sigma} \quad (5.9b)$$

则复合材料的有效刚度 L 和柔度 M 可进一步表示为:

$$L = L^0 + \sum_{r=1}^n v_r (L^r - L^0) A^r \quad (5.10a)$$

$$M = M^0 + \sum_{r=1}^n v_r (M^r - M^0) B^r \quad (5.10b)$$

在式(5.9)中, A^r 和 B^r 分别称为应变和应力集中因子。由上述过程可知, 只要求出了集中因子 A^r 和 B^r , 则复合材料的有效性能就可容易求出。一般地说, 应力、应变集中因子与组分材料的性能和增强相的几何形状有关。

如果复合材料的所有增强相为球形颗粒或完全随机分布, 则复合材料为各向同性。这时, 有效性能可用两个独立的工程常数表示为:

$$\bar{\sigma}_{kk} = 3k \bar{\epsilon}_{kk}, \bar{s}_{ij} = 2\mu \bar{e}_{ij} \quad (5.11)$$

其中 $\bar{\sigma}_{kk} = \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}$, $\bar{\epsilon}_{kk} = \bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22} + \bar{\epsilon}_{33}$, $\bar{s}_{ij}$ 和 $\bar{e}_{ij}$ 分别为 $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 的偏量部分, k 为有效体积模量, μ 为有效剪切模量。此时, 式(5.8)变为

$$k = k_0 + \sum_{r=1}^n v_r (k_r - k_0) \bar{\epsilon}_{kk}^{(r)} \bar{\epsilon}_{ij}^{-1} \quad (5.12a)$$

$$\mu = \mu_0 + \sum_{r=1}^n v_r (\mu_r - \mu_0) \bar{e}_{ij}^{(r)} \bar{e}_{ij}^{-1} \quad (ij \text{ 不求和}) \quad (5.12b)$$

求解复合材料有效性能的方法和模型很多。这些模型可以归结为如下几类:

(1) 以复合材料代表体元为基础的直接方法, 它通过解析和数值方法求解细观场, 然后再求出有效应力(应变)场, 根据定义求出有效性能。例如, 纤维复合材料的同心圆柱模型, 细观场的有限元计算方法等, 都属于这类方法。

(2) 以单一夹杂理论为基础的各种近似模型, 包括自洽模型、广义自洽模型、Mori-Tanaka 方法、微分法等解析方法, 以及利用上述模型构造的各种数值方法, 如自洽有限元法, M-T 有限元法

等,这类方法以其模型简单和概念明确而被广泛应用。

(3)以变分原理为基础的定界法,这类方法给出有效性能的极值(上限和下限)。在下列各节中将分别介绍这些方法。

§ 5.2 自洽模型与广义自洽模型

根据计算复合材料有效性能的公式(5.10),要计算有效性能,首先要计算出其中的应变或应力集中因子。自洽模型和广义自洽模型提供计算应变或应力集中因子的一种近似方法。下面以基体($r=0$)和增强相($r=1$)组成的两元复合材料系统为例,介绍这种方法。

5.2.1 自洽模型

在自洽模型^[2-6]中,假设一个夹杂物(异质夹杂,如纤维或颗粒等)埋入到承受均匀应变 $\bar{\epsilon}$ 的无限大的均匀介质内,如图 5.1 所示。待求的复合材料有效弹性系数为 L ,根据式(5.5a), $\bar{\epsilon}$ 就是复合材料的有效应变,且等于无限远边界上施加的均匀应变,对应的有效应力为:

$$\bar{\sigma} = L\bar{\epsilon} \quad (5.13)$$

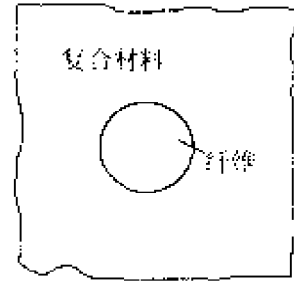


图 5.1 自洽模型

夹杂物内的应变由均匀应变 $\bar{\epsilon}$ 和扰动应变 ϵ^{pt} 两部分组成,对应的应力为 $\bar{\sigma} + \sigma^{pt}$,即:

$$\epsilon^{(1)} = \bar{\epsilon} + \epsilon^{pt} \quad (5.14a)$$

$$\sigma^{(1)} = \bar{\sigma} + \sigma^{pt} \quad (5.14b)$$

根据等效夹杂原理,有如下关系

$$\bar{\sigma} + \sigma^{pt} = L^1(\bar{\epsilon} + \epsilon^{pt}) = L(\bar{\epsilon} + \epsilon^{pt} - \epsilon^*) \quad (5.15a)$$

$$\epsilon^{pt} = S\epsilon^* \quad (5.15b)$$

其中 S 是 Eshelby 张量, ϵ^* 是等效特征应变。

解方程(5.15)和(5.14)得到:

$$\epsilon^{(1)} = [I + SL^{-1}(L^1 - L)]^{-1}\bar{\epsilon} \quad (5.16a)$$

这里 I 为单位张量,对照公式(5.9),可知应变集中因子为

$$A = [I + SL^{-1}(L^1 - L)]^{-1} \quad (5.16b)$$

将上式代入(5.10a),就可得到有效弹性系数。

如果施加均匀应力边界条件(3.2),可得到应力集中因子和有效柔度系数。事实上,位移和应力边界条件是可以互换的。

在这个模型中,无限大有效介质(复合材料)内的平均应变(应力)场就是有效应变(应力)场,因此这个模型是自洽的。

值得指出的是,应变集中因子 A 中,含有未知的有效弹性系数 L ,在实际应用中,需要采用迭代求解才能得到有效性能。另外,在这个模型中,使用了 Eshelby 等效夹杂原理,这意味着夹杂物的形状被假设为椭球状的。

对各向同性复合材料,等效方程(5.15)变为:

$$k_1(\bar{\epsilon}_{kk} + \epsilon_{kk}^p) = k(\bar{\epsilon}_{kk} + \epsilon_{kk}^p - \epsilon_{kk}^*) \quad (5.17a)$$

$$\mu_1(\bar{e}_{ij} + e_{ij}^p) = \mu(\bar{e}_{ij} + e_{ij}^p - e_{ij}^*) \quad (5.17b)$$

Budiansky^[2]和 Hill^[3]给出了球形夹杂复合材料的有效模量:

$$\frac{v_0}{k - k_1} + \frac{v_1}{k - k_0} = \frac{3}{3k + 4\mu} \quad (5.18a)$$

$$\frac{v_0}{\mu - \mu_1} + \frac{v_1}{\mu - \mu_0} = \frac{6(k + 2\mu)}{5\mu(3k + 4\mu)} \quad (5.18b)$$

其中, v_1, v_0 分别为增强相和基体的体分比。

Chou^[6]等利用自洽模型计算了单向短纤维复合材料的有效模量,并与实验值和下面的 Halpin - Tsai^[7]半经验公式进行了比较(如图 5.2 和 5.3 所示,图中字母下标 m 与 0 对应, f 与 1 对应)。

$$\frac{E_{11}^*}{E_0} = \frac{1 + 2\alpha\eta_1 v_1}{1 - \eta_1 v_1} \quad (5.19a)$$

$$\frac{E_{22}^*}{E_0} = \frac{1 + 2\eta_2 v_1}{1 - \eta_2 v_1} \quad (5.19b)$$

其中 E_{11}^*, E_{22}^* 分别为复合材料的轴向和横向模量, $\alpha = l/d$ 为纤维的长径比,而

$$\eta_1 = \frac{(E_1/E_0) - 1}{(E_1/E_0) + 2\alpha}, \eta_2 = \frac{(E_1/E_0) - 1}{(E_1/E_0) + 2} \quad (5.19c)$$

可以看出,自洽模型的结果与实验值还有一定的差距,体分比越

大,差距越大。

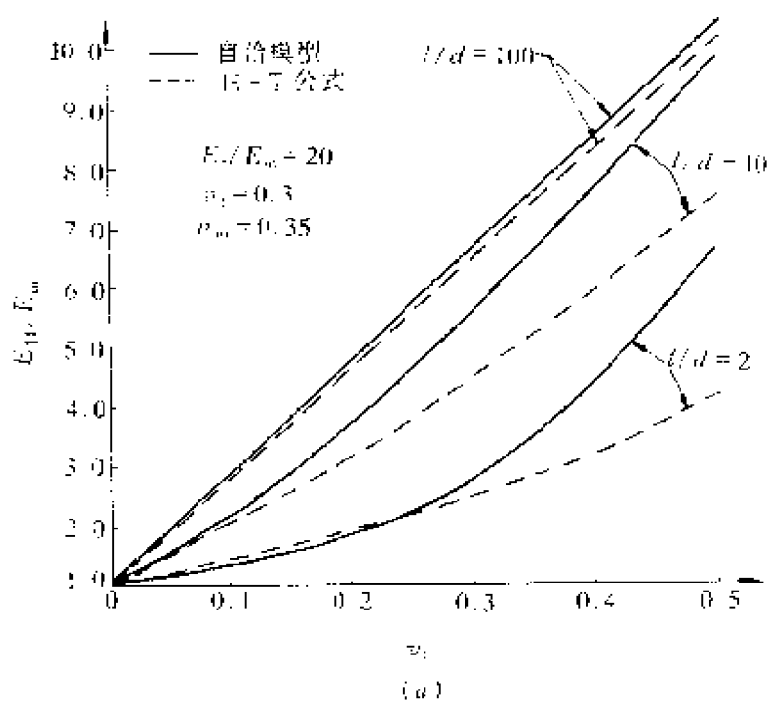


图 5.2a 单向短纤维复合材料轴向杨氏模量与体分比之关系

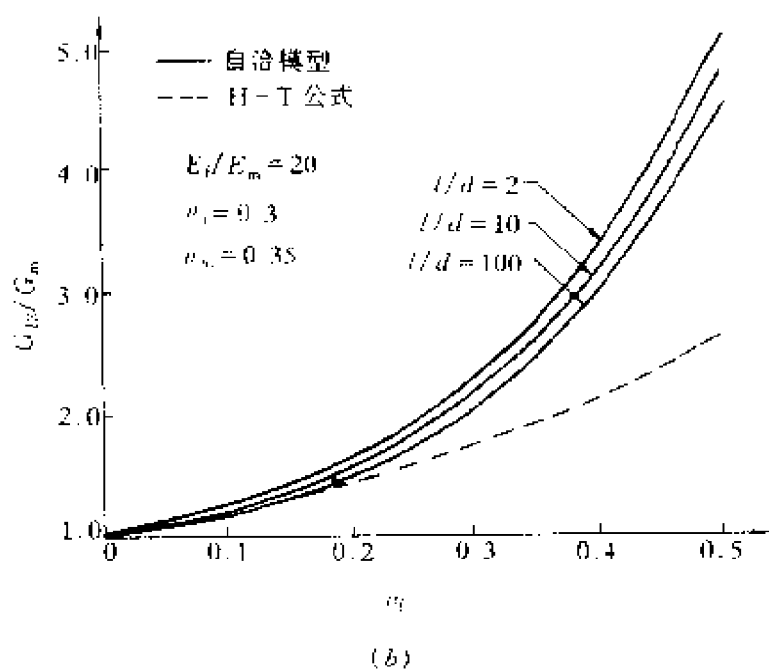


图 5.2b 单向短纤维复合材料纵向剪切模量与体分比之关系

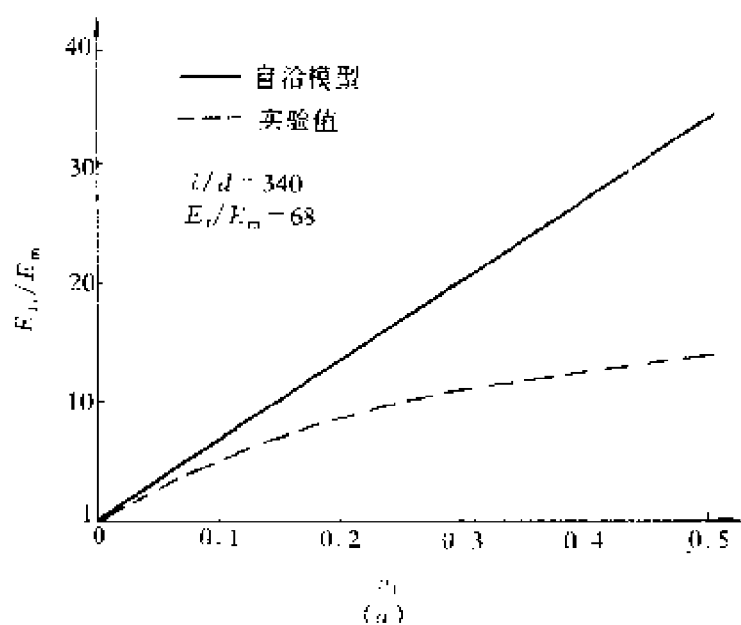


图 5.3a 单向短纤维复合材料轴向杨氏模量与体分比的关系

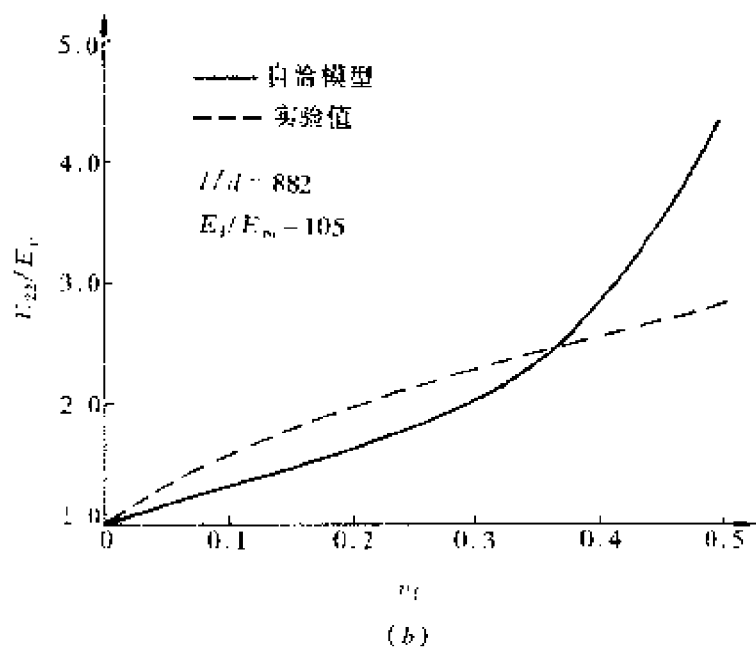


图 5.3b 单向短纤维复合材料横向杨氏模量与体分比的关系

5.2.2 广义自洽模型

在自洽模型中,利用了 Eshelby 关于无限大的均匀介质中含有单一夹杂的解,这与含有高体分比夹杂物的复合材料有一定的

差距,这时夹杂物之间、夹杂物与基体之间的相互作用非常强烈,而自洽模型仅考虑了一个夹杂物与有效介质之间的相互作用,这导致了在高体分比情况下,计算结果存在较大的误差。当两相材料的性能相差较大时甚至会导致迭代不收敛。另外,在夹杂的局部应力场与有效应力场之间存在如式(5.6a)那样的加权平均关系,而在自洽模型中,则要求两者在夹杂与有效介质的界面上保持连续,这是很明显的不合理之处。

广义自洽模型对自洽模型进行了改进^[8],它将一个夹杂及其周围的基体埋入到无限大的有效介质内,夹杂与基体所占的比例等于复合材料的体分比,如图 5.4 所示。这相当于将一个简化的代表体元嵌入到复合材料中。因此,从概念上比自洽模型更合理些。但也相应地增加了问题求解的难度。

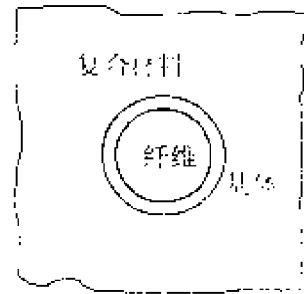


图 5.4 广义自洽模型

Christensen 和 Lo^[8]求解了单向纤维复合材料的面内剪切模量。

广义自洽模型得到的有效体积模量如下:

$$k = k_0 + \frac{v_1(k_1 - k_0)}{1 + \frac{v_0(k_1 - k_0)}{k_0 - \frac{4}{3}\mu_0}} \quad (5.20a)$$

有效剪切模量的表示式较为复杂,在理想刚性夹杂物的情况为:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\alpha}{1 - v_1} \quad (5.20b)$$

其中

$$\alpha = \frac{3(2 - 3\nu_m) + 3\sqrt{12 - 36\nu_m + 25\nu_m^2}}{8(1 - 2\nu_m)}$$

对不可压基体材料,式(5.20b)可进一步简化为:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{27}{16(1 - v_1)} \quad (5.20c)$$

自洽模型和广义自洽模型应用于求解复合材料的有效性能的

研究工作很多,关于自洽模型和广义自洽模型的详细评述见文献[1,9]。

§ 5.3 Mori-Tanaka 方法

Mori 和 Tanaka^[10]在 1973 年关于计算基体平均应力的论文,解决了在有限体分比下使用 Eshelby 等效夹杂原理的基本理论问题。其后,在 Mori-Tanaka 平均应力概念下的等效夹杂原理被广泛应用于各种复合材料的有效性能预测。因此,这种方法被称为 Eshelby-Mori-Tanaka 等效夹杂方法,或者简称为 Mori-Tanaka 方法。

对于含有特征应变为 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 的多夹杂问题(不受外力作用),由于夹杂的相互作用,基体内的应力是非常复杂的,但其平均应力可以表示为^[10]:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_m = \mathbf{L} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m = -v_1 \mathbf{L} (\mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad (5.21)$$

其中 $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m$ 是基体内的平均应变, $\mathbf{S}$ 是 Eshelby 张量, $\mathbf{L}$ 为材料的弹性系数, v_1 为夹杂的体分比。

Mori-Tanaka 的平均应力概念应用于有限体分比的夹杂物问题时,存在多种形式, Weng^[11]重新给出了该方法的公式并应用于复合材料中,下面介绍这一思想。

设由基体($r=0$)和作为增强相的夹杂物($r=1$)组成的二相复合材料,受到均匀应力边界条件(3.2)的作用,此时有效应力为 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 。对于形状相同的均匀纯基体材料,在上述同一边界条件作用下,其应变场 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 可由关系

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{L}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (5.22)$$

确定。 $\mathbf{L}^0$ 为基体的弹性系数。由于夹杂物的存在,实际复合材料基体内的应变场与均匀纯基体内的应变场相差一个扰动值,假设为 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, 相应的扰动应力为 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 。它们是在 Mori-Tanaka 平均意义下的所有夹杂在基体内产生的平均扰动应变和应力。这样实际基体内的应变和应力场分别为 $\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^0 + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, 并且具有如下关系:

$$\sigma^0 + \tilde{\sigma} = L^0(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon}) \quad (5.23)$$

夹杂物的应变和应力场又不同于基体内的场,假设分别相差一个 ϵ' 和 σ' , 这样夹杂物内的应变和应力为 $\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon'$ 和 $\sigma^0 + \tilde{\sigma} + \sigma'$ 。利用等效夹杂原理得到

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= \sigma^0 + \tilde{\sigma} + \sigma' = L^1(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon') \\ &= L^0(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon' - \epsilon^*) \quad (5.24a) \end{aligned}$$

$$\epsilon' = S\epsilon^* \quad (5.24b)$$

$$\tilde{\epsilon} = -v_1(S - I)\epsilon^* \quad (5.24c)$$

式(5.24c)来自于 Mori-Tanaka 的平均应力概念,参见式(5.21)。解方程(5.24)得到:

$$\epsilon^* = H\epsilon^0 \quad (5.25)$$

式中 $H = [L^0 + \Delta L(v_1 I - v_0 S)]^{-1} \Delta L$

$$\Delta L = L^1 - L^0$$

v_0 ——基体的体分比, $v_0 = 1 - v_1$

v_1 ——夹杂物的体分比。

另外,对于有效应变 $\bar{\epsilon}$ 有:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= (1 - v_1)\epsilon^{(0)} + v_1\epsilon^{(1)} \\ &= (1 - v_1)(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon}) + v_1(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon') \\ &= \epsilon^0 + v_1\epsilon^* \\ &= (I + v_1 H)\epsilon^0 \end{aligned} \quad (5.26a)$$

由此得到复合材料的有效模量:

$$L = L^0(I + v_1 H)^{-1} \quad (5.26b)$$

Weng 还证明了指定位移的均匀边界条件和指定应力的均匀边界条件是可以互换的,并将该方法应用于多相球形颗粒复合材料的有效性能预测, Qiu 和 Weng^[12], Zhao 和 Weng^[13] 等应用于横观各向同性复合材料的有效性能预测,并导出了所有 5 个工程常数的表达式。

在 Mori-Tanaka 方法中,使用了基体平均应力公式(5.21),实

实际上,在均匀应力边界条件下,这个公式等价于下述有效应力公式:

$$\bar{\sigma} = (1 - v_1) \sigma^{(0)} + v_1 \sigma^{(1)} \quad (5.27)$$

或者扰动应力的体积平均应力为零的条件:

$$(1 - v_1) \tilde{\sigma} + v_1 (\tilde{\sigma} + \sigma') = 0 \quad (5.28)$$

上述两个方程都得到:

$$\tilde{\sigma} = -v_1 \sigma' \quad (5.29)$$

利用方程(5.23)和(5.24a, b),得到:

$$\sigma' = L^0(\varepsilon' - \varepsilon^*) = L^0(S - I)\varepsilon^* \quad (5.30)$$

由式(5.29)、式(5.30)和式(5.23),即可得出式(5.21)。

对于各向同性复合材料, Weng^[11]给出的结果如下:

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \frac{v_1(k_1 - k_0)}{k_0 + (1 - v_1) \left[\frac{k_1 - k_0}{k_0 + 4\mu_0/3} \right] k_0} \quad (5.31a)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{v_1(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + (1 - v_1) \left[\frac{\mu_1 - \mu_0}{1 + \frac{9k_0 + 8\mu_0}{6(k_0 + 2\mu_0)}} \right]} \quad (5.31b)$$

对于刚性颗粒复合材料,上式简化为:

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \frac{v_1}{1 - v_1} \left[1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} \right] \quad (5.32a)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{v_1}{1 - v_1} \left[1 + \frac{9k_0 + 8\mu_0}{6(k_0 + 2\mu_0)} \right] \quad (5.32b)$$

对于不可压基体,上式可进一步简化为:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{1 - v_1}, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1 + 3v_1/2}{1 - v_1} \quad (5.33)$$

上述结果对应于 Hashin - Shtrikman 的下界。

Mori - Tanaka 方法曾有许多不同的表述方式, Benveniste^[14]利用应变集中因子的概念从数学上进行了更为直接的推导,使这个方法的含义更明确,应用也更直接。

仍以单类夹杂物的二元复合材料为例, 设 $\tilde{\mathbf{A}}$ 表示的是在稀

疏夹杂状态的应变集中因子,它与体分比无关。在有限体分比条件下,假设存在关系:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.34)$$

其中 $\mathbf{A}$ 应与夹杂物的体分比有关,一旦 $\mathbf{A}$ 被确定,则复合材料的有效刚度可由式(5.10)确定为:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^0 + v_1 (\mathbf{L}^1 - \mathbf{L}^0) \mathbf{A} \quad (5.35)$$

为了确定 $\mathbf{A}$,引入满足下列关系的新的张量 $\mathbf{G}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \quad (5.36)$$

利用关系 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = v_0 \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + v_1 \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$,可得到:

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} [v_0 \mathbf{I} + v_1 \mathbf{G}]^{-1} \quad (5.37)$$

这就是有效体分比下的应变集中因子。另外,在极限状态下,应满足下列条件:

$$\mathbf{A} |_{v_1 \rightarrow 0} = \tilde{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{A} |_{v_1 \rightarrow 1} = \mathbf{I} \quad (5.38)$$

显然,只要令 $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{A}}$,上述极限条件就可得到满足。这意味着

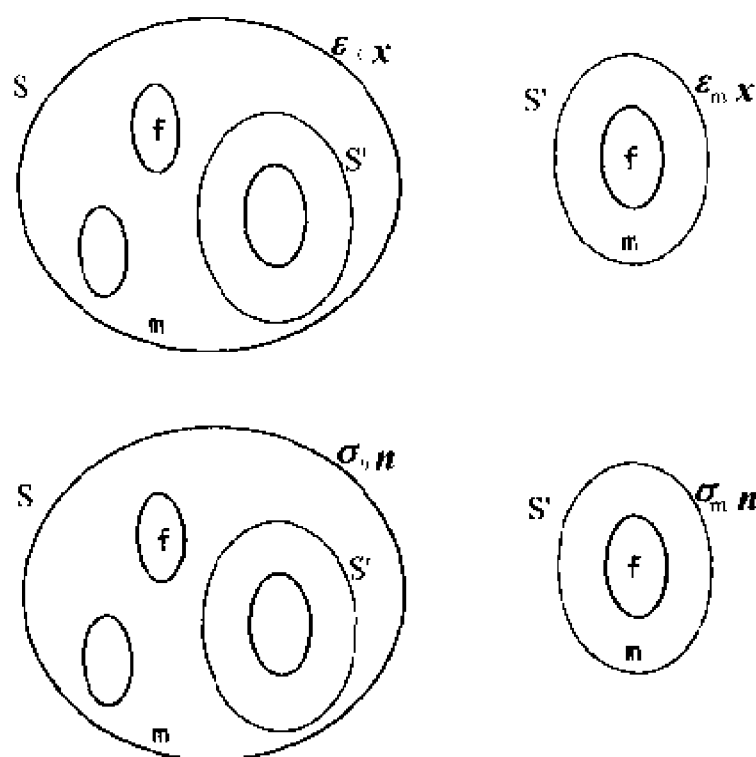


图 5.5a Mori-Tanaka 模型

Mori-Tanaka 方法有如下基本假设：一个夹杂物埋入到承受均匀应变 $\bar{\epsilon}$ 的无限大基体材料中，只要求出其应变集中因子（参看式 (5.16b)，但要将 L 换成 L^0 ）：

$$\tilde{A} = [I + S(L^0)^{-1}(L^1 - L^0)]^{-1} \quad (5.39)$$

由式 (5.35)，可求出有效刚度系数为：

$$L = L^0 + v_1(L^1 - L^0)\tilde{A}[v_0I + v_1\tilde{A}]^{-1} \quad (5.40)$$

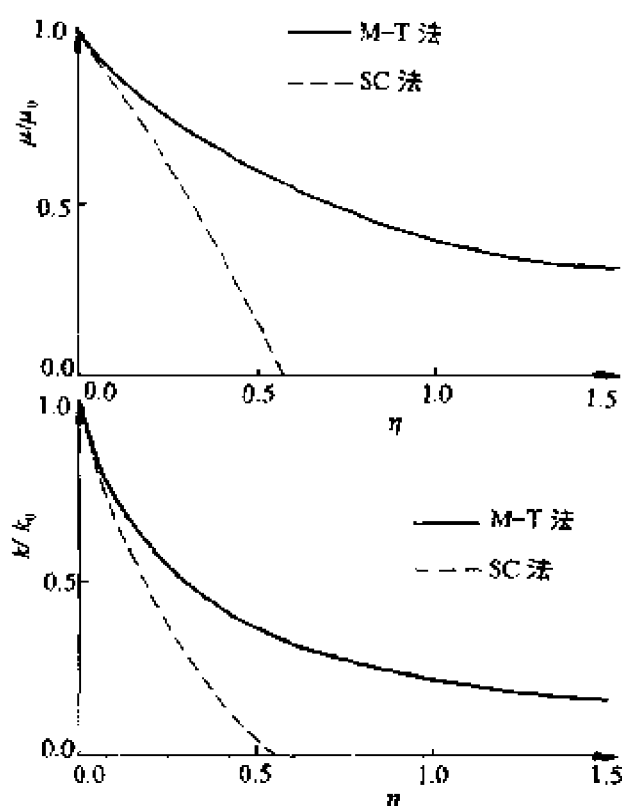


图 5.56 M-T 模型与自洽模型结果的比较
(η 为裂纹密度参数)

经检验，这个结果与 Weng(1984)导出的式 (5.26) 完全相同。图 5.5a 解释了 Mori-Tanaka 方法的基本过程。对于含有随机分布微裂纹的材料，可以计算其有效体积模量和有效剪切模量随裂纹密度的关系。Benveniste^[14]比较了 M-T 方法与自洽方法的结果。可以看出，自洽模型的结果在裂纹密度达到 0.5 多一点时，其有效体积模量和有效剪切模量就变为 0，而 M-T 方法的结果

不出现上述现象,如图 5.5b 所示。

§ 5.4 自洽有限元法和 M-T 有限元法

尽管自洽模型和 M-T 方法得到不同的结果,但它们都具有数学上的完美性,应该说这些模型设计的很巧妙,并且也比较严密,但是,它们都假设异质夹杂必须有椭球的形状,这对于工程实际是一个很强的制约。本节介绍的自洽有限元^[15-17]和 M-T 有限元法,结合了上述模型,但利用了有限元法进行数值求解。这样就将只能适用于椭球夹杂物的上述模型和方法推广到了任意形状的夹杂和夹杂物问题。

5.4.1 自洽有限元法(SCFEM)

设有一个典型夹杂物被具有未知有效模量的无限大介质所包围,无限大介质受到均匀应变场 ϵ 。用有限元法可以求解这样一个边值问题,得到夹杂物内的平均应变场,进而求出应变集中因子 A ,再通过式(5.10a)得到有效弹性系数。由于在上述求解过程中要用到未知的有效模量,因而需要一个迭代过程^[15,17]。

自洽有限元法的计算过程如下:

(1) 选择一个典型夹杂物埋入到无限大有效介质中,在实际计算中,取周围均匀介质为夹杂物尺寸的 5~10 倍即可,并在边界上作用均匀位移边界条件,建立边值问题。

(2) 给定有效介质一个初始刚度值,以使边值问题可解。该初始刚度值一般可以参照混合律给出。

(3) 用有限元法求解边值问题,并计算应变集中因子。

(4) 利用式(5.10a)求出复合材料的有效模量,并将这一结果作为新的初值,重复上述步骤。

(5) 给定一个收敛准则,例如,两次连续迭代计算的结果之差小于某一定值,则结束迭代过程,可求得有效模量。

同理,利用均匀应力边界条件可以求出有效柔度系数,在实际计算中可以选择某些特殊的边界条件以方便地分别求出某些工程

弹性常数。

为了求出弹性常数,可以选用不同的变形模型和边界条件,利用自洽有限元法分别计算出各个工程常数。对横观各向同性复合材料,分析公式(4.3)中的这几个独立工程常数可知,如果选取轴对称变形模型,则在其刚度矩阵内含有 E_{11} 、 C_{1111} 、 ν_{12} 和 μ_{12} 四个常数。如果选用横向平面内的剪切变形模型,则刚度阵内含有 μ_{23} 。另外,考虑到一般复合材料的纤维形状是圆柱形的,选用轴对称变形模型是合适的。通过选择适当的边界条件,可分别求出前四个常数。具体作法如下:

(i) 纵向拉伸模量 E_{11} 和主泊松比 ν_{12}

采用轴对称变形模型,假设沿纤维的轴向为 11 方向。在轴向施加应力边界条件: $\sigma_{11} = \sigma_0$, 其余应力分量 $\sigma_{ij} = 0$, ($ij \neq 11$)。如图 5.6a 所示,按照自洽有限元法的步骤和式(5.10b),计算有效柔度系数:

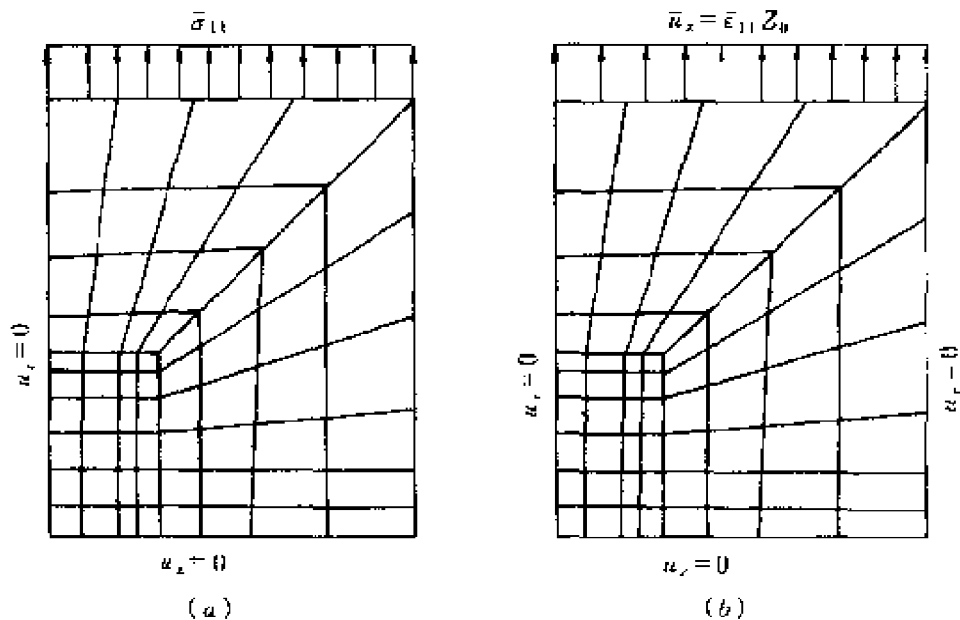


图 5.6a 单向拉伸应力边界条件

图 5.6b 单向拉伸应变边界条件

$$D_{1111} = D_{1111}^0 + \nu_1 (D_{1111}^1 - D_{1111}^0) B \quad (5.41a)$$

其中

$$B = \bar{\sigma}_{11}^{(1)} / \sigma_0 \quad (5.41b)$$

式中的 $\bar{\sigma}_{11}^{(1)}$ 为有限元计算出的夹杂物内的平均应力, 有效弹性模量为:

$$E_{11} = 1 / D_{1111} \quad (5.41c)$$

主泊松比 ν_{12} 可由下式计算:

$$\nu_{12} = -\bar{\epsilon}_{22} / \bar{\epsilon}_{11} \quad (5.41d)$$

其中 $\bar{\epsilon}_{11}$ 和 $\bar{\epsilon}_{22}$ 分别是由自洽有限元法计算的有效介质内的轴向和横向应变。在每次迭代中, 有效介质的纵向拉伸模量 E_{11} 和主泊松比 ν_{12} 被更新, 直到收敛为止。

(ii) 单向应变刚度 C_{1111}

采用轴对称变形模型, 在轴向施加单向应变边界条件: $\epsilon_{11} = \epsilon_0$, 其余应变分量 $\epsilon_{ij} = 0 (ij \neq 11)$, 如图 5.6b 所示, 由式(5.10a) 可以计算:

$$C_{1111} = C_{1111}^0 + \nu_1 (C_{1111}^1 - C_{1111}^0) A \quad (5.42a)$$

$$A = \bar{\epsilon}_{11}^{(1)} / \epsilon_0 \quad (5.42b)$$

式中的 $\bar{\epsilon}_{11}^{(1)}$ 为有限元计算出的夹杂物内的平均应变。

(iii) 纵向剪切模量 μ_{12}

采用轴对称变形模型, 在有效介质的周边施加剪切应力边界条件: $\sigma_{12} = \tau_0$, 其余应力分量 $\sigma_{ij} = 0 (ij \neq 12)$, 这个边界条件变形后仍然保持原有的轴向对称性, 如图 5.6c 所示。相似地, 可以计算出:

$$D_{1212} = D_{1212}^0 + \nu_1 (D_{1212}^1 - D_{1212}^0) \bar{\sigma}_{12}^{(1)} / \tau_0 \quad (5.43a)$$

$$\mu_{12} = 1 / D_{1212} \quad (5.43b)$$

(iv) 面内剪切模量 μ_{23}

如上所述, 面内剪切模量 μ_{23} 不能用轴对称变形模型, 而是要求一个面内纯剪状态的变形。对于连续纤维复合材料, 可以近似地认为变形沿着纤维方向是均匀的, 可采用平面应变模型。但对于单向短纤维复合材料, 材料在纵向是不均匀的, 必须采用三维变形模型。图 5.6d 表示了单向连续纤维复合材料的平面应变模型, 边界条件可取为: $\epsilon_{23} = \gamma_0$, $\epsilon_{ij} = 0, (ij \neq 23)$, 则有

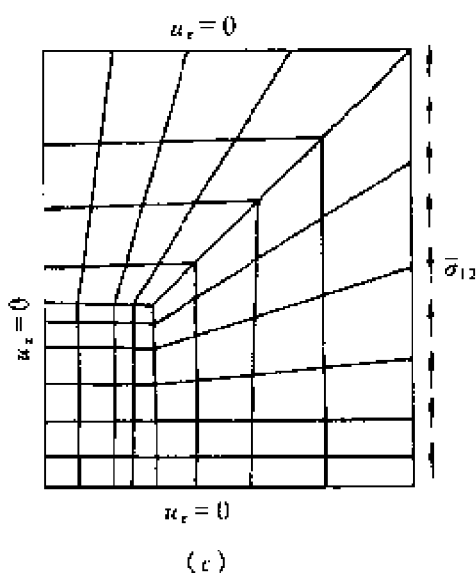


图 5.6c 纵向剪切应力边界条件

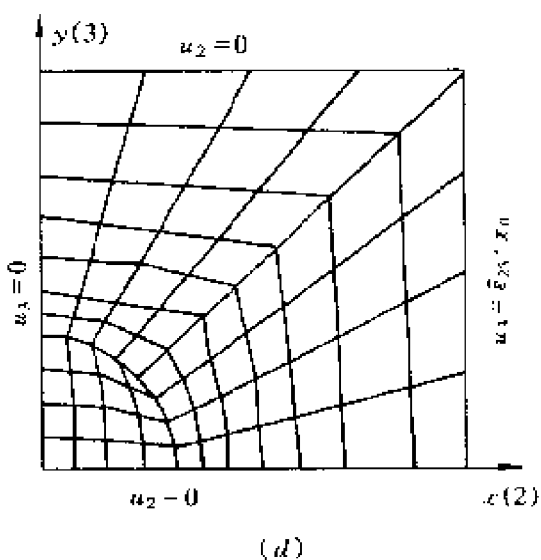


图 5.6d 平面应变模型及面内剪切边界条件

$$\mu_{23} = C_{2323} = C_{2323}^0 + v_1 (C_{2323}^1 - C_{2323}^0) \bar{\epsilon}_{23}^{(1)} / \gamma_0 \quad (5.44)$$

作为数值例题,下面计算单向短纤维复合材料的有效弹性性能。假设有三种情况: $E_f/E_m = 5, 20, 100$, 并假设纤维和基体都是各向同性的,其中 $E_f/E_m = 20$ 和 100 分别模拟玻璃/环氧树脂和石墨/环氧树脂复合材料。纤维的长径比 $\alpha = l/d$ 作为几何影响参数,分别取 $\alpha = 1, 2, 10, 100$ 这几个值。泊松比分别为: $\nu_f = 0.3, \nu_m = 0.35$ 。用于实际计算的典型有限元网格如图 5.7 所示。

当 $\alpha = 1$ 时,复合材料可以认为是各向同性的,因而只有两个独立的弹性常数($E_{11} = E_{22} = E, \mu_{12} = \mu_{23} = \mu$)。计算结果在图 5.8a 和图 5.8b 中。为了便于比较,图中同时给出了文献[6]的结果,

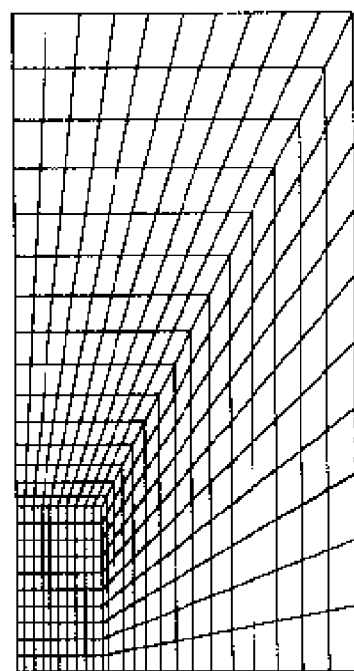


图 5.7 典型有限元网格

可以看出,两种方法的结果是符合很好的。

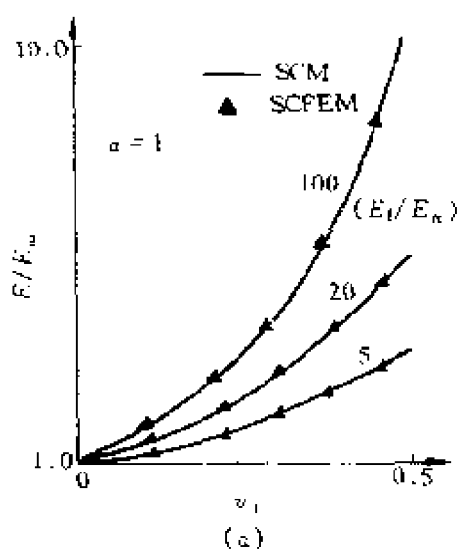


图 5.8a 各向同性复合材料的有效杨氏模量与体分比的关系

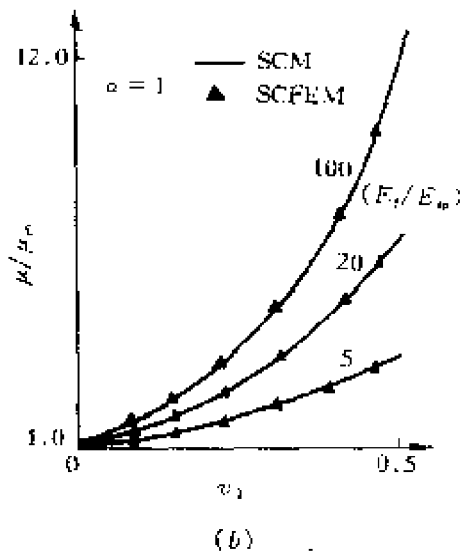


图 5.8b 各向同性复合材料的有效剪切模量与体分比的关系

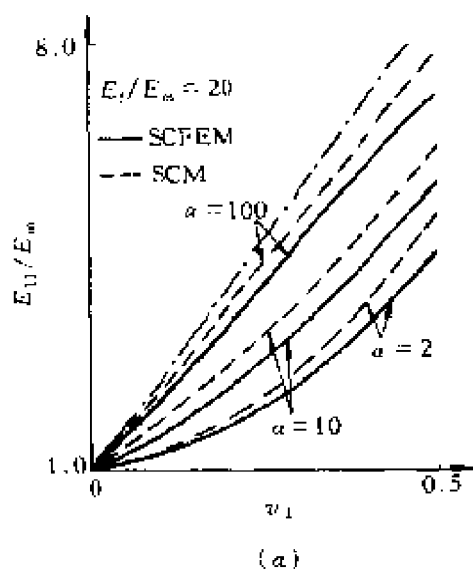


图 5.9a 复合材料的纵向拉伸模量与体分比的关系

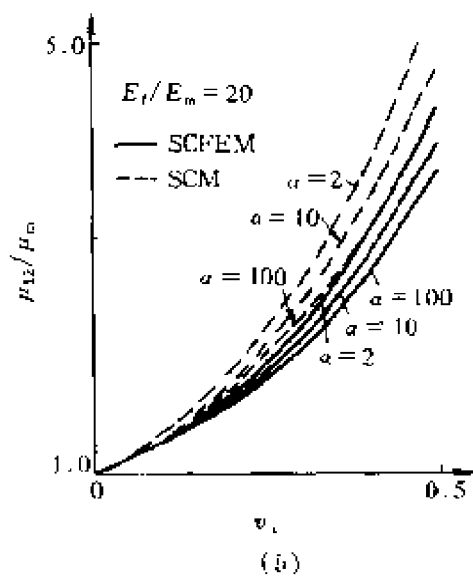


图 5.9b 复合材料的纵向剪切模量与体分比的关系

当 $\alpha > 1$ 时,复合材料是横观各向同性的,结果绘于图 5.9a ~ d 中。由图中可以看出,当 $\alpha = 100$ 时,自洽有限元法的结果接近用连续纤维复合材料的混合律计算的结果(图 5.9a)。为了与实

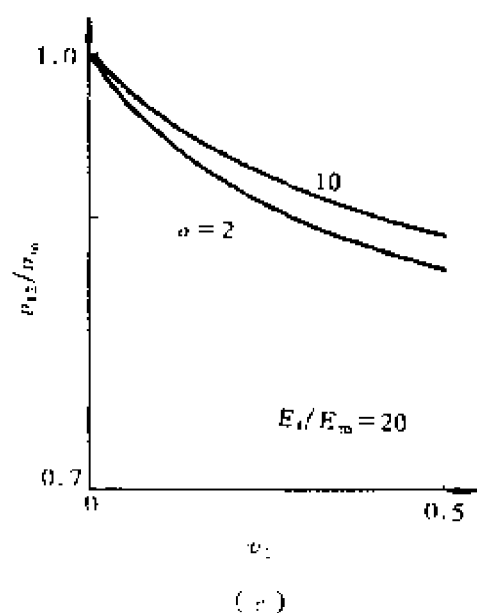


图 5.9c 复合材料的主泊松比与体分比的关系

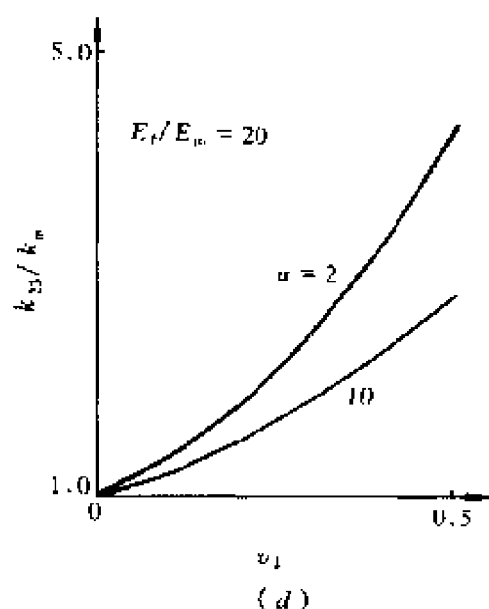


图 5.9d 复合材料的平面体积模量与体分比的关系

验值进行比较,计算了 $\alpha = 340$, $E_1/E_m = 68$ 的复合材料的纵向弹性模量(图 5.10),这实际上已经接近于细长的连续纤维,由于自洽有限元法可以较为精确地逼近夹杂物的实际形状,因而比原来的自洽模型要更接近实验值^[6]。

计算实践表明,自洽有限元法的收敛性取决于增强相与基体相的弹性性能的差异和体分比的大小。两相的性能相差越大,体分比越大,收敛性越差。为了改善收敛性,可用按相同的思路在广义自洽模型的基础上构建广义自洽有限元法。

利用自洽有限元法可以比较各种不同夹杂物形状对有效性能

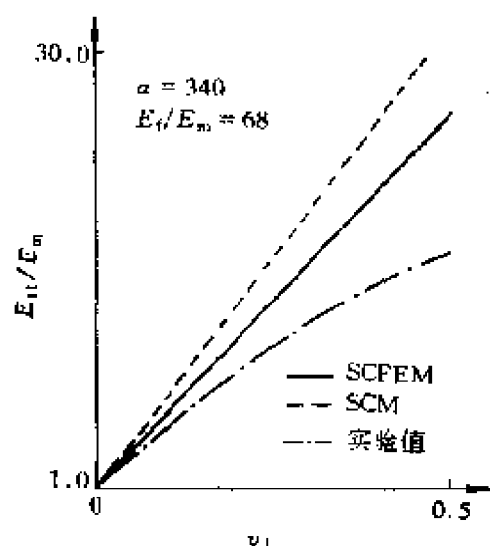


图 5.10 计算结果与实验结果的比较

的影响,也可以方便地计入界面层的影响和推广到非线性问题。

5.4.2 M-T有限元法

M-T有限元法用无限大(是夹杂尺寸的5~10倍)的基体材料包围一个典型夹杂。施加均匀的边界条件,建立边值问题,然后用有限元法求解,得到应变集中因子 Λ ,再利用式(5.40)求出有效模量。和自洽有限元法相比,M-T有限元法省去了迭代过程,只须用一次有限元分析,就可得到以组分性能和体分比为变量的有效性能表达式。

以现有的资料,尚未发现M-T有限元法的数值结果,也未发现相类似的思想。

§ 5.5 微分介质法

微分介质法简称为微分法,起初应用于研究悬浮液体的性能,后来应用于复合材料的有效性能计算。文献[18,19]分别针对复合材料和微裂纹问题详细地推导了微分法的公式。为了避开考虑夹杂物相互影响和应用Eshelby单一夹杂理论的限制,微分法构建了一个往基体内逐渐添加夹杂物的微分过程,形成一个“少量添加—均匀化”的循环迭代过程,如图5.11所示。

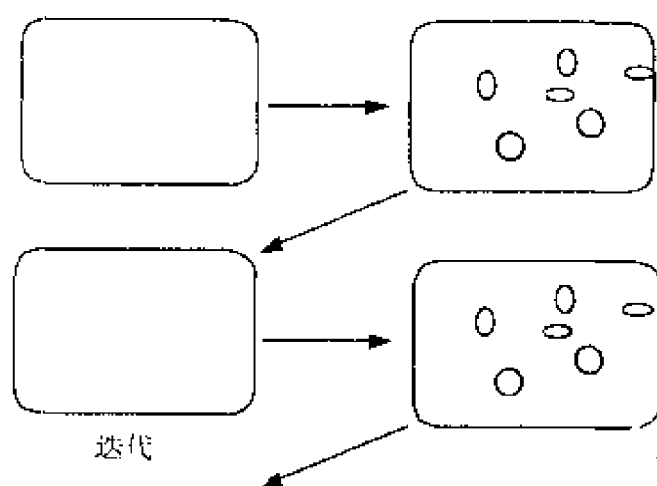


图 5.11 微分介质法示意图

设在某一时刻体积为 V_0 的复合材料中的夹杂物(增强相)体分比为 v_1 , 有效弹性常数为 L 。然后加入体积为 δV 的少量夹杂物, 使体分比为 $v_1 + \delta v_1$, 有效模量变为 $L + \delta L$, 为了保持复合材料的体积 V_0 不变, 在加入新夹杂物前, 先把复合材料去掉 δV , 这样夹杂物的实际含量为:

$$v_1 V_0 + \delta V - v_1 \delta V = (v_1 + \delta v_1) V_0 \quad (5.45a)$$

即:

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta v_1}{1 - v_1} \quad (5.45b)$$

复合材料的平均应力和应变关系为:

$$\bar{\sigma} = (L + \delta L) \bar{\epsilon} \quad (5.46a)$$

其中

$$\bar{\epsilon} = \frac{V_0 - \delta V}{V_0} \bar{\epsilon} + \frac{\delta V}{V_0} \epsilon^{(1)} \quad (5.46b)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{V_0 - \delta V}{V_0} \sigma + \frac{\delta V}{V_0} \sigma^{(1)} \quad (5.46c)$$

上式中 $\bar{\epsilon}$ 和 $\bar{\sigma}$ 表示当前作为基体的均匀介质中的平均应变和平均应力, $\epsilon^{(1)}$ 与 $\sigma^{(1)}$ 表示新加入夹杂物中的平均应变和平均应力。由于加入的夹杂很少, 因此, 可用稀疏夹杂的 Eshelby 解法求出下列平均应变集中系数(式(5.9a)),

$$\epsilon^{(1)} = A \bar{\epsilon} \quad (5.46d)$$

其中 $A = [I + SL^{-1}(L^1 - L)]^{-1}$, S 为 Eshelby 张量。

将式(5.46b)和式(5.46d)代入到式(5.46a), 得到:

$$\delta L = (L^1 - L) A \frac{\delta V}{V_0} \quad (5.47)$$

将式(5.45)代入上式, 并令 δv_1 趋向于无限小, 得到:

$$\frac{dL}{dv_1} = \frac{1}{1 - v_1} (L^1 - L) A \quad (5.48a)$$

这是关于有效弹性常数的微分方程, 它的初始条件为:

$$L|_{v_1=0} = L^0 \quad (5.48b)$$

微分方程(5.48a)是一个非线性方程。一般要简化后求解或数值求解。

对球形颗粒增强复合材料,微分方程(5.48a)可以化为

$$\frac{dk}{dv_1} = \frac{k_1 - k}{1 - v_1} \frac{k + k^*}{k_1 + k^*} \quad (5.49a)$$

$$\frac{d\mu}{dv_1} = \frac{\mu_1 - \mu}{1 - v_1} \frac{\mu + \mu^*}{\mu_1 + \mu^*} \quad (5.49b)$$

其中 k 与 μ 分别为复合材料的体积模量与剪切模量, k_1 与 μ_1 为增强相材料的相应弹性模量, 而且

$$k^* = \frac{4}{3}\mu \quad \mu^* = \frac{\mu}{6} \frac{9k + 8\mu}{k + 2\mu} \quad (5.49c)$$

问题的初始条件(5.48b)变为

$$v_1 = 0: k = k_0, \mu = \mu_0 \quad (5.49d)$$

其中 k_0 与 μ_0 分别为基体材料的体积与剪切模量。

方程(5.49a, b)是高度非线性且耦合的微分方程, 难以求得显式解, 一般要采用数值方法求解。如果我们近似地取

$$k^* = \frac{4}{3}\mu_0, \quad \mu^* = \frac{\mu_0}{6} \frac{9k_0 + 8\mu_0}{k_0 + 2\mu_0} \quad (5.49e)$$

则方程(5.49a, b)大为简化, 可以用分离变量的方法求解, 由此可得到的方程近似显式解为:

$$k = k_0 + \frac{v_1(k_1 - k_0)}{1 + (1 - v_1) \frac{k_1 - k_0}{k_1 + k^*}} \quad (5.49f)$$

$$\mu = \mu_0 + \frac{v_1(\mu_1 - \mu_0)}{1 + (1 - v_1) \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu^*}} \quad (5.49g)$$

§ 5.6 变分法

变分法是另一种完全不同的方法^[20-25]。它利用极值原理得到复合材料有效性能的上、下限, 这对复合材料的有效性能提供了一个合理的变化范围。

设体积为 V 的复合材料受到均匀位移边界条件(3.1)的作用。用 ϵ_{ij} 表示满足所有位移边界条件和几何条件的机动应变场, 其应变能可以表示为:

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int_{V_0} L_{ijkl}^0 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_{V_1} L_{ijkl}^1 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV \quad (5.50)$$

其中 V_0 表示基体所占的体积, V_1 表示增强相所占的体积, 且 $V_0 + V_1 = V$ 。

复合材料的真实应变场对应的应变能可以用有效应变场表示为:

$$U = \frac{1}{2} L_{ijkl} \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl}^0 V \quad (5.51)$$

根据最小势能原理, 在所有满足位移边界条件和几何方程的许可应变场中, 真实的应变场使系统的势能取最小值, 即:

$$U \leq \tilde{U} \quad (5.52)$$

注意在上述表述中, 势能中没有计及外力的势能贡献。

如果复合材料受到均匀的应力边界条件(3.2)作用, σ_{ij} 为满足应力边界条件和平衡方程的应力场, 对应的余能(不考虑外力贡献的余能)为:

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2} \int_{V_0} M_{ijkl}^0 \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_{V_1} M_{ijkl}^1 \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV \quad (5.53)$$

而复合材料的真实应力场对应的余能用有效应力场表示为:

$$\Gamma = \frac{1}{2} M_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 V \quad (5.54)$$

根据最小余能原理, 在所有满足应力边界条件和平衡方程的应力场中, 真实的应力场使系统的余能取最小值, 即:

$$\Gamma \leq \tilde{\Gamma} \quad (5.55)$$

利用最小势能原理和最小余能原理可以得到有效弹性系数、有效柔度系数的极值。

现在来看两个特殊情况:

1. 等应变假设

如果复合材料在轴向(1 方向)受单向均匀位移边界条件的作用,并假设基体和纤维内的应变场是相同的。这种情况与连续纤维复合材料的轴向变形相近。由最小势能原理可得:

$$E_{11} \leqslant v_0 E_m + v_1 E_f \quad (5.56)$$

上式中 E_{11} 为 1 方向上的有效弹性模量, $E_i (i = m, f)$ 为组分材料的弹性模量。上式表明,混合率为弹性模量的上限。这一结果也称为 Voigt 近似公式。

2. 等应力假设

如果复合材料受到单向应力状态的均匀边界条件作用。并假设复合材料中的纤维和基体具有相同的应力场,则由最小余能原理得到:

$$\frac{1}{E_{22}} \leqslant \frac{v_0}{E_m} + \frac{v_1}{E_f} \quad (5.57)$$

这个关系也称作 Reuss 近似公式,当它取等号时,一般应用于复合材料的横向模量的预测,但与实验结果有较大误差。

在一般情形下,计算均匀应变边界条件下的 $\tilde{U}$ 或均匀应力边界条件下的 $\tilde{\Gamma}$ 都需要首先计算每一相材料内的应变场或应力场,这个局部场与纤维的排列方式有关。上、下界的精度取决于局部应变场或应力场的精确性。文献[23]针对纤维的正六边形和随机排列两种情况,求出了横观各向同性刚度阵中 5 个独立常数的上界或下界, Walpole^[25] 利用极应力的概念导出了各向同性复合材料的弹性模量和体积模量的上、下限。一般认为, Walpole 导出的结果是最好的:

$$k_L = \frac{k_0 k_1 + k_1^* (v_0 k_0 + v_1 k_1)}{k_1^* + v_0 k_1 + v_1 k_0} \quad (5.58a)$$

$$k_G = \frac{k_0 k_1 + k_g^* (v_0 k_0 + v_1 k_1)}{k_g^* + v_0 k_1 + v_1 k_0} \quad (5.58b)$$

$$\mu_L = \frac{\mu_0 \mu_1 + \mu_1^* (v_0 \mu_0 + v_1 \mu_1)}{\mu_1^* + v_0 \mu_1 + v_1 \mu_0} \quad (5.58c)$$

$$\mu_G = \frac{\mu_0 \mu_1 + \mu_g^* (v_0 \mu_0 + v_1 \mu_1)}{\mu_g^* + v_0 \mu_1 + v_1 \mu_0} \quad (5.58d)$$

其中下标 L 和 G 分别表示下限和上限; k_1^* , k_g^* 分别表示 k_0^* , k_1^* 中的最小和最大值; μ_1^* , μ_g^* 分别表示 μ_0^* , μ_1^* 中的最小和最

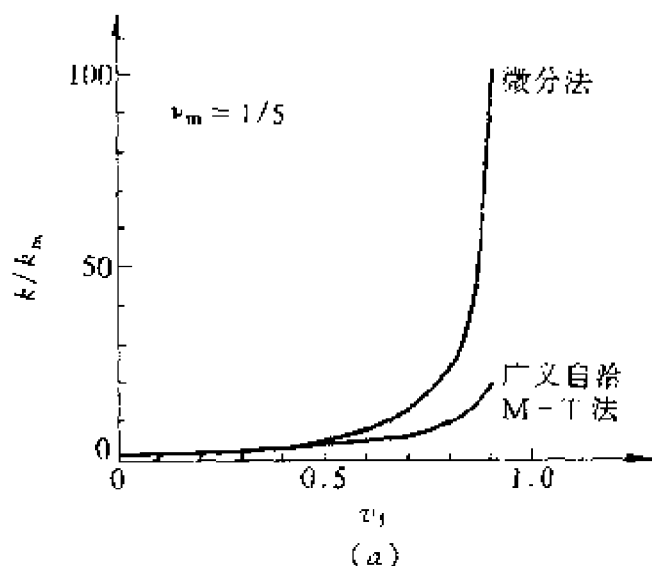


图 5.12a 体积模量的预测结果比较

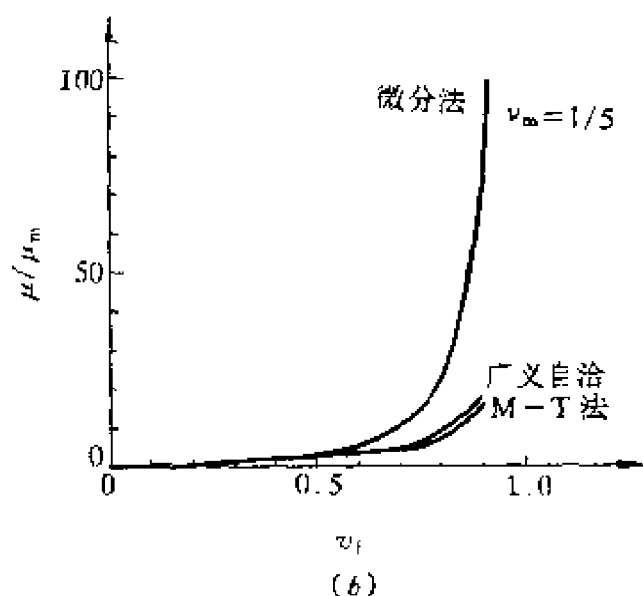


图 5.12b 剪切模量的预测结果比较

大值。而且：

$$k_i^* = \frac{4}{3}\mu_i \quad \mu_i^* = \frac{1}{6}\mu_i \left(\frac{9k_i + 8\mu_i}{k_i + 2\mu_i} \right) \quad (i=0,1) \quad (5.59)$$

上述 Walpole 的最终结果对两相材料是同等对待的，这一结果通常被称为 Hashin - Strikeman - Walpole 解。

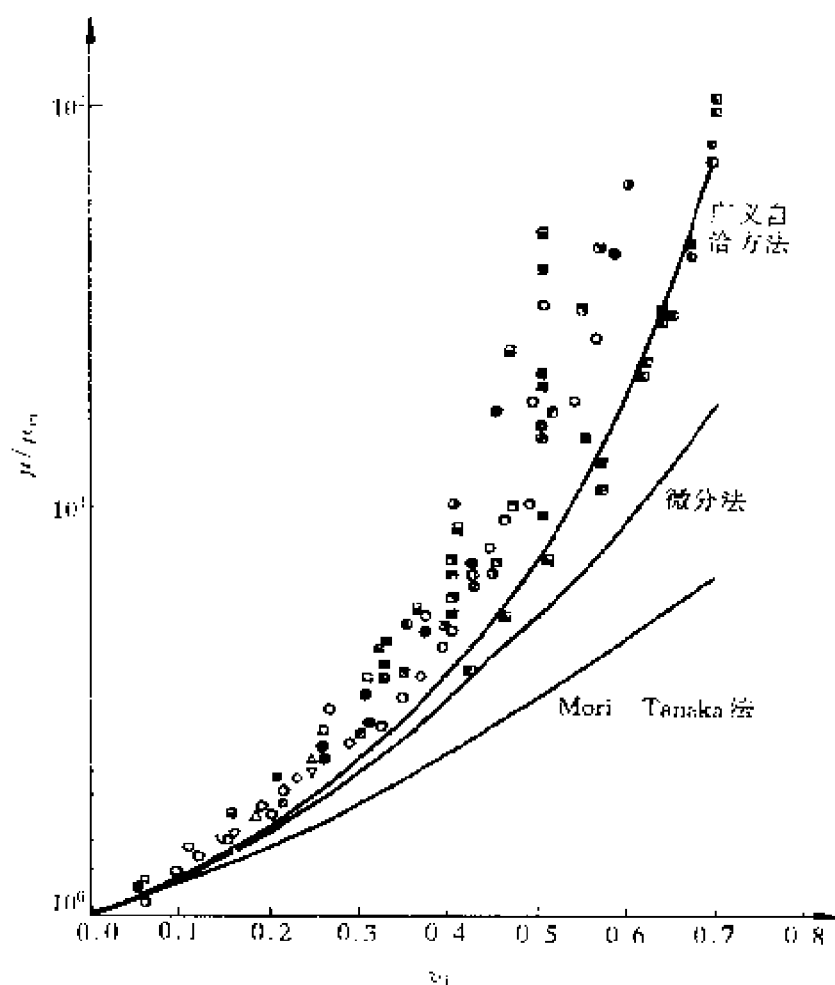


图 5.13 用三种方法得到的复合材料剪切模量
与实验结果比较曲线

变分法给出了复合材料有效刚度系数的上、下界，这对各种计算结果提供了一个判断其正误的准则。各种预测方法的结果都应被包含在上、下界之间的范围内。

关于复合材料的有效弹性性能的预测，已经有相当多的研究

工作,其方法林林总总,不计其数,例如文献[26-30]。由于没有统一和系统的数值精度比较,很难作出客观的评价。不过,对主要的方法还是有一些比较研究,例如,文献[9]对颗粒增强的各向同性复合材料进行了数值比较,如图 5.12 所示;文献[29]比较了单向短纤维增强的横观各向同性复合材料的某些弹性常数,如图 5.13 所示;文献[30]针对含裂纹或孔洞材料的有效性能进行了比较,如图 5.14 所示。

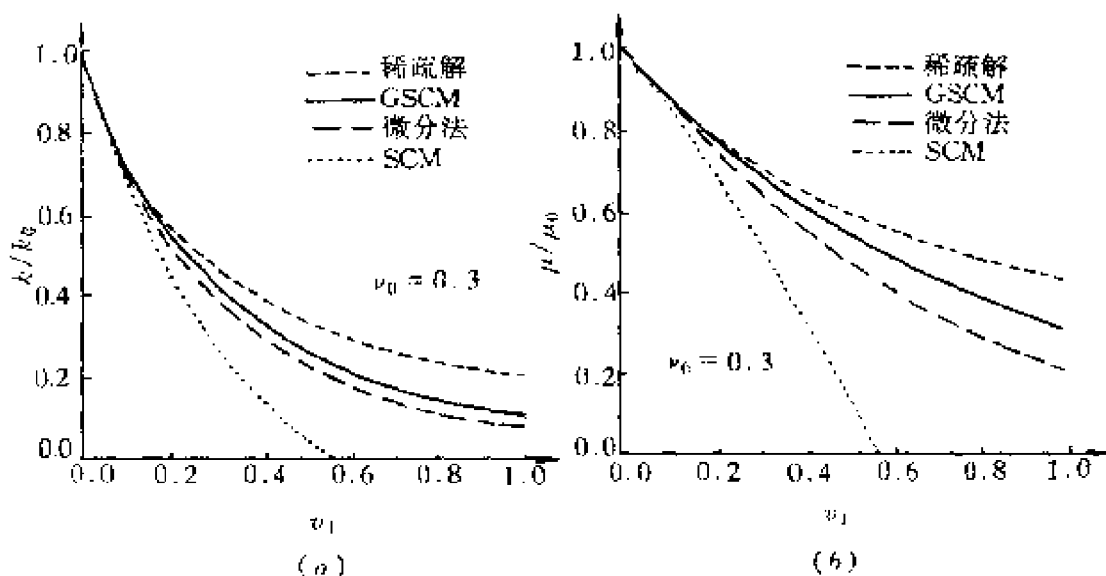


图 5.14a 体积模量与微裂纹密度的关系

图 5.14b 剪切模量与微裂纹密度的关系

§ 5.7 涂层夹杂物与混合夹杂物问题

前几节介绍的方法适用于只有单类夹杂物的问题,这一问题的直接工程背景是各种类型的二元(基体和增强相)复合材料。本节介绍另外两类夹杂物问题:涂层夹杂物和混合夹杂物。这两类问题的工程背景是,前者对应于增强相表面进行过涂层处理的复合材料,一般表现形式是涂层均匀地覆盖于增强相表面,可看作同心椭球(球、圆柱)形状的两相夹杂物。具有界面相的二元复合材料也可按涂层夹杂物问题处理。另外前面讲到的由夹杂、基体和无限大复合材料组成的广义自洽模型,也是一个理想的三相同心

夹杂物模型。而后者的混合夹杂物问题是混杂复合材料的模型。在这个模型中可以有任意多类夹杂物,每一类夹杂物之间没有互相的空间重叠和包容关系。下面分别介绍这两类问题有效性能的计算方法。

5.7.1 涂层夹杂物——三相同心夹杂模型

由于三相模型应用于复合材料的合理性(如广义自洽模型)和重要性(含有界面相或涂层纤维的复合材料),吸引了许多学者求解其应力场和有效模量,其中 Benveniste^[31,32], Luo 和 Weng^[33]用不同的方法进行了深入的研究。

在 Benveniste 等人的方法中,利用了 Mori - Tanaka 方法中的概念,即一个受到均匀应变(或应力)边界条件的复合材料,等价于一个边界上受到平均基体应变(或应力)、基体材料包含一个涂层夹杂物的问题。如图 5.15 所示。如果作用于这个模型边界上的基体应变(或应力)能够求出,则只要再求解一个三相材料的局部场问题就可得到解答。

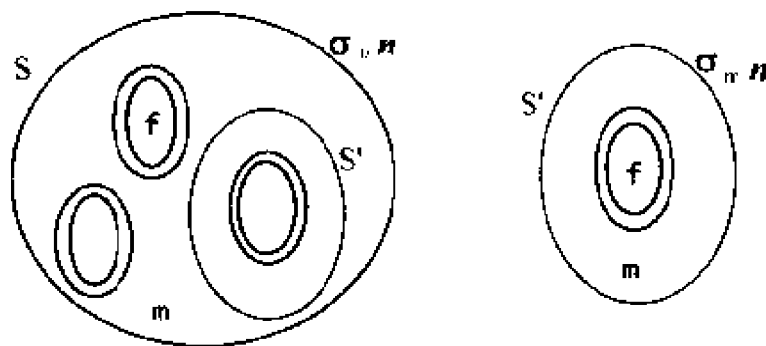


图 5.15 三相模型下的 M—T 方法

在均匀应变边界条件下, Mori - Tanaka 的单一涂层夹杂物模型的边界条件为:

$$u(S') = \varepsilon_m x \quad (5.60)$$

其中 ε_m 是未知的平均基体应变, S' 是基体材料的边界。任一点

上式中的 $T^r(x)$ ($r = f, g, m$) 是夹杂物相对于基体的应变集中因子, f 表示纤维, g 表示涂层, m 表示基体, 并注意 $T^m(x) = I$ 。如果应变场 $\epsilon_r(x)$ 都进行(或看作)体积平均, 则夹杂物和涂层内的应变场都是常数, 且 $T^r(x)$ 也是常数。对于球形和圆柱形夹杂物, 都可求解一个三相介质问题而得到应变集中因子 T^r , 注意为了使周围基体材料中的平均应变场与均匀应变边界条件相协调, 将周围基体看作无限大。式(5.61a)的体积平均可表示为:

$$\epsilon_r = T^r \epsilon_m \quad (r = f, g, m) \quad (5.61b)$$

其中 $T^m = I$, 复合材料的平均应变为:

$$\bar{\epsilon} = \sum_r v_r \epsilon_r = \epsilon_0 \quad (r = f, g, m) \quad (5.62)$$

其中 v_r 表示各相的体分比, 将式(5.61b)代入上式, 并解出:

$$\epsilon_m = \left[\sum_r v_r T^r \right]^{-1} \epsilon_0 \quad (r = f, g, m) \quad (5.63)$$

此时的复合材料平均应力为:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= L \bar{\epsilon} = L \epsilon_0 \\ &= \sum_r v_r \sigma_r = \sum_r v_r L^r \epsilon_r \quad (r = f, g, m) \\ &= \sum_r v_r L^r T^r \epsilon_m \end{aligned} \quad (5.64)$$

将(式 5.63)代入(式 5.64), 得到有效模量为:

$$L = \left[\sum_r v_r L^r T^r \right] \left[\sum_r v_r T^r \right]^{-1} \quad (r = f, g, m) \quad (5.65)$$

同理, 在均匀应力边界条件(3.2)下, 对应于上述各式为:

$$\sigma_r = W^r \sigma_m \quad (r = f, g, m) \quad (5.66)$$

其中, W^r 称平均应力集中因子。有效应力和有效应变为:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sum_r v_r \sigma_r = \sigma_0 \quad (r = f, g, m) \\ \bar{\epsilon} &= \sum_r v_r \epsilon_r \end{aligned} \quad (5.67a)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_r v_r \mathbf{M}^r \boldsymbol{\sigma}_r \quad (r = f, g, m) \quad (5.67b) \\
&= \sum_r v_r \mathbf{M}^r \mathbf{W}^r \boldsymbol{\sigma}_m
\end{aligned}$$

复合材料的有效柔度 $\mathbf{M}$ 定义为:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.68)$$

将式(5.67)代入式(5.68),得到

$$\mathbf{M} = \left[\sum_r v_r \mathbf{M}^r \mathbf{W}^r \right] \left[\sum_r v_r \mathbf{W}^r \right]^{-1} \quad (r = f, g, m) \quad (5.69)$$

其中 $\mathbf{W}^m = \mathbf{I}$ 。对复合材料的有效热膨胀系数,可用完全相同的思路导出。

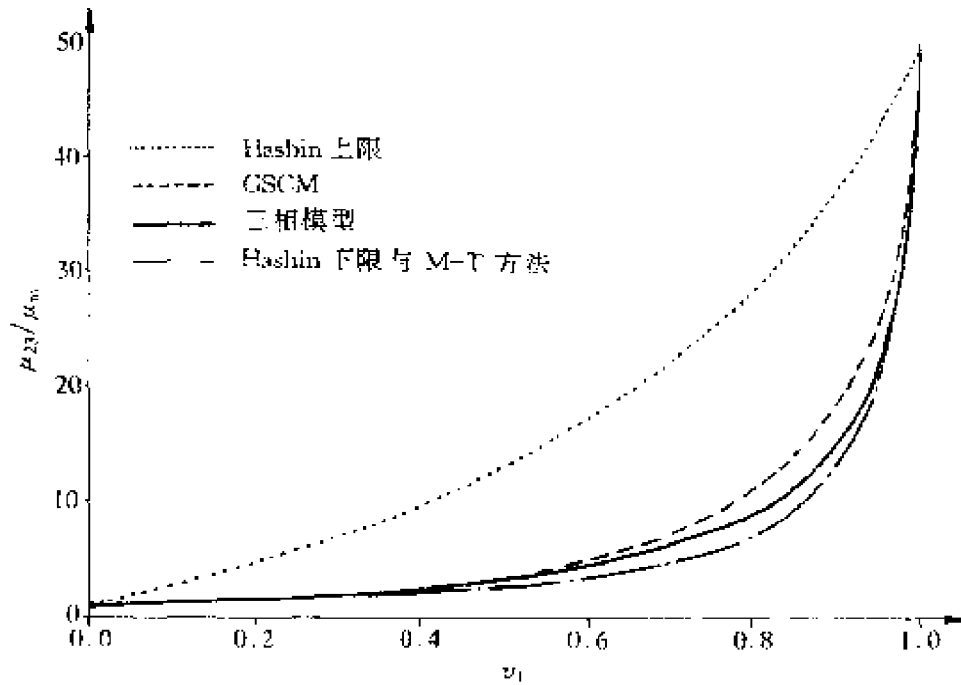


图 5.16 面内剪切模量与体分比的关系

Luo 和 Weng^[33]等人的方法不直接去解各相中的应力、应变集中因子,而是从三相模型出发,求三相模型下的 Eshelby 张量。当夹杂物发生特征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 时,求出中间层和最外层内的平均扰动应变之间的关系,即三相模型下的 Eshelby 张量。如果每一相内的扰动应变被求出,则复合材料的有效模量可用等效夹杂原理或

Mori-Tanaka 的方法计算。对两相复合材料,采用 Christensen-Lo 的广义自洽模型构造三相模型,但利用三相 Eshelby 张量求解。这一方法被作者称为修正的 M-T 方法。图 5.16 给出了面内剪切模量的计算结果。

上述两种方法都要求解三相介质中的应力场,这一般是比较困难的,但对球形和圆柱形夹杂物,可以求出它们的应力场。

5.7.2 混合夹杂物问题

当不同类型的夹杂物混合在一起时,就构成了混合夹杂物问题。混杂纤维复合材料和含有裂纹的复合材料是混合夹杂物问题的典型例子,如图 5.17 所示。前面介绍的大部分方法适合于混合

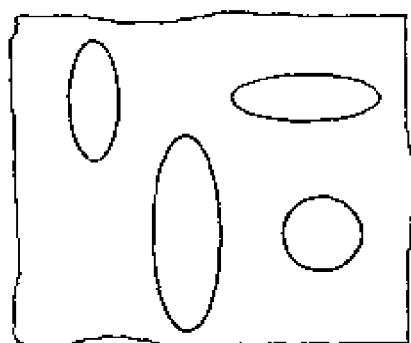


图 5.17 混合夹杂物问题

夹杂物问题,显然,当夹杂物的种类较多时,其代表体元的选取和细观应力场的计算将非常困难。但是, Mori-Tanaka 方法仍然是合适的^[34,35]。只不过将 Eshelby 等效夹杂原理应用于每一类夹杂物,即有:

$$\begin{aligned}\sigma^{(i)} &= \sigma^0 + \bar{\sigma} + \sigma'_i = L^i(\epsilon^0 + \bar{\epsilon} + \epsilon'_i) \\ &= L^0(\epsilon^0 + \bar{\epsilon} + \epsilon'_i - \epsilon_i^*)\end{aligned}\quad (5.60a)$$

$$\epsilon'_i = S_i \epsilon_i^* \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (5.60b)$$

其中 n 为夹杂物的类型数, $\bar{\epsilon}$ 为所有夹杂物引起的基体扰动应变。采用相同的分析过程,可得到有效弹性常数为:

$$L^{-1} = M^0 + \sum_{i=1}^n v_i S_i T_i M^0$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i (\mathbf{S}_i - \mathbf{I}) \mathbf{T}_i \mathbf{M}^0 \mathbf{G}^{-1} \sum_{i=1}^n v_i (\mathbf{T}_i - \mathbf{I}) \quad (5.61)$$

其中

$$\mathbf{T}_i = -(\mathbf{L}^0 - \Delta \mathbf{L}_i \mathbf{S}_i)^{-1} \Delta \mathbf{L}_i$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^n v_i (-\mathbf{I} + \mathbf{S}_i) \mathbf{T}_i$$

$$\Delta \mathbf{L}_i = \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^0$$

$$\mathbf{M}^0 = (\mathbf{L}^0)^{-1}$$

这里 v_i 为第 i 类夹杂物的体分比, $\mathbf{S}_i$ 为第 i 类夹杂物的 Eshelby 张量。

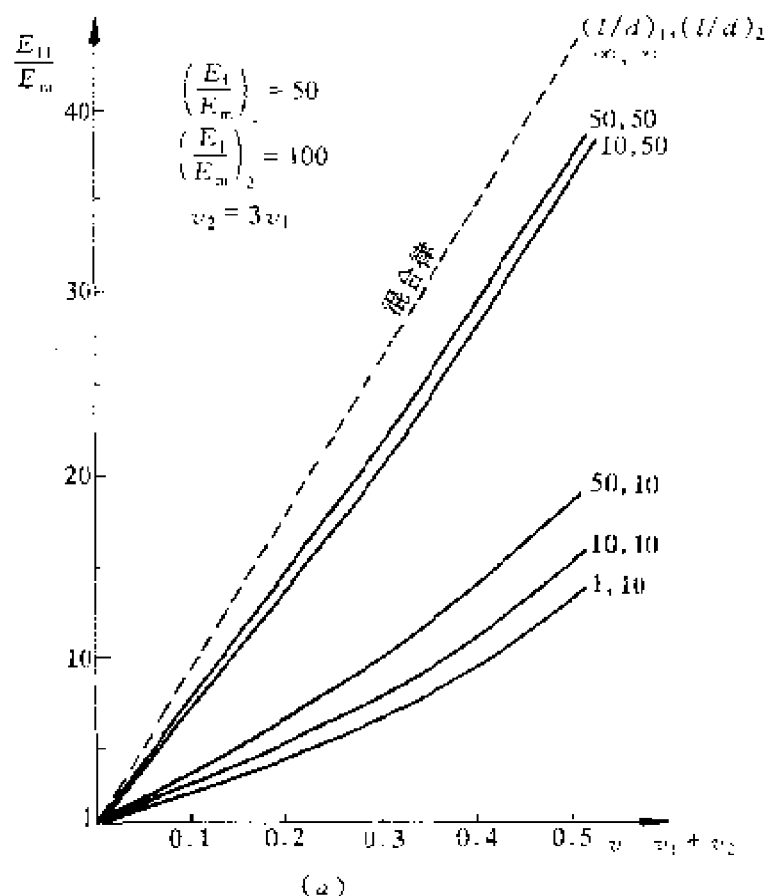


图 5.18a 混杂纤维复合材料的纵向杨氏模量

文献[43]研究了含有两种夹杂物的复合材料的有效弹性模量

和剪切模量,如图 5.18 所示,这里考虑两种情况:(1)纤维和纤维;
(2)纤维和颗粒。其中的虚线为混合率计算出的结果。

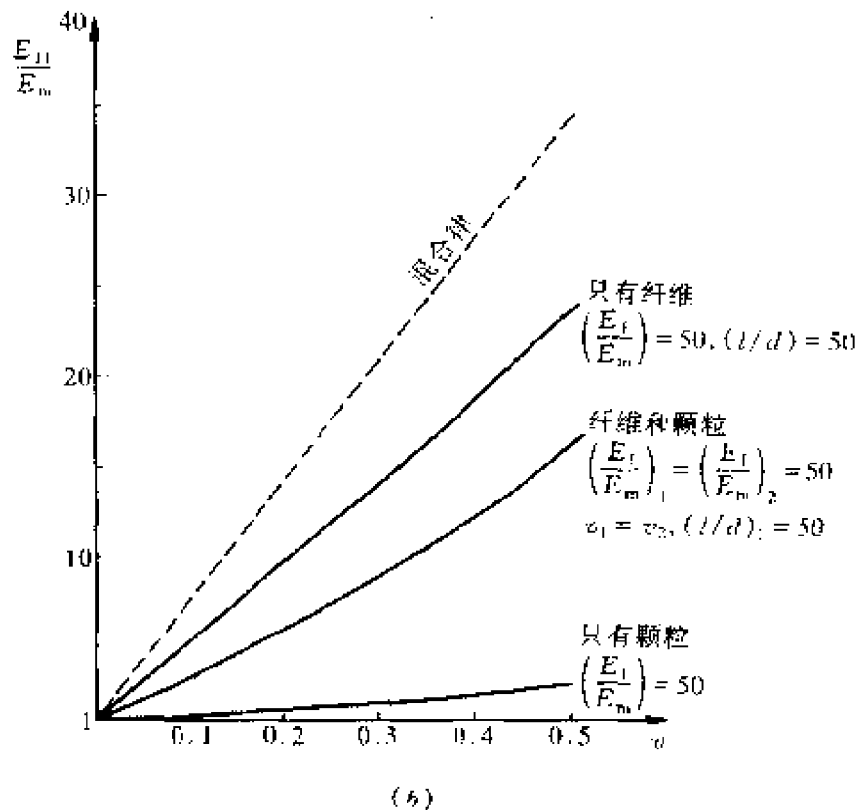


图 5.18b 纤维与颗粒混杂复合材料的纵向杨氏模量

参考文献

1. Z Hashin. Analysis of Composite Materials - A survey. *J Appl Mach*, 1983, 50: 481
2. B Budiansky. On the Elastic Moduli of Some Heterogeneous Material. *J Mech Phys Solides*, 1965, 13: 223 ~ 227
3. R Hill. Theory of Mechanical Properties of Fiber Strengthened Materials - 3. Self - Consistent Model. *J Mech Phys Solides*. 1965, 3: 189 ~ 198
4. E Kroner. Self - consistent Scheme in Random Media Elasticity—Exact or only Approximate? *Mechanics Today*, 1980, 5
5. R. Hill A self - consistent mechanics of composite materials. *J Mech Phys Solids*, 1965, 13: 213 ~ 222

6. T W Chou, S Nomura, M Taya. A Self - Consistent Approach to the Elastic Stiffness of Short - Fiber Composites. *J Compos Materials*, 1980, 14:178
7. 顾震隆. 短纤维复合材料力学. 北京: 国防工业出版社, 1987
8. R M Christensen, K H Lo. Solutions for effective shear properties in three sphere and cylinder models. *J Mech Phys Solids*, 1979, 27:315 - 330
9. R M Christensen. A critical evaluation for a class of micromechanics models. *J Mech Phys Solids*, 1990, 38:379 - 404
10. T Mori, K Tanaka. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusion. *Acta Metall*, 1973, 21: 571 - 574
11. G J Weng. Some Elastic Properties of Reinforced Solids with Special Reference to Isotropic Ones Containing Spherical Inclusions. *Inter J Eng Sci*, 1984, 22(7)
12. Y P Qiu, G J Weng. On the application of Mori - Tanaka's theory involving transversely isotropic spheroidal inclusions. *Inter J Eng Sci*, 1990, 28 (11):1121 - 1137
13. Y H Zhao, G J Weng. Effective Elastic Moduli of Ribbon - Reinforced Composites. *J Appl Mech*, 1990, 57:158
14. Y Benveniste. A new approach to the application of Mori - Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 1987, 6: 147 - 157
15. Q Yang, L Tang, H Chen. Self - consistent finite element method: A new method for predicting effective properties of inclusion media. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1994, 17:247 - 257
16. H Chen, Q Yang, F W Williams. A self - consistent finite element approach to the inclusion problem. *Computational Mater Sci*, 1994, 2:301 - 307
17. 杨庆生, 陈浩然. 夹杂问题中的自洽有限元法和复合材料的有效弹性性能. *复合材料学报*, 1992, 9(1):79 - 84
18. A N Norris. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mechanics of Materials*, 1985(4): 1 - 16
19. Z Hashin. The differential scheme and its application to cracked materials. *J Mech phys solids*, 1988, 36:719 - 734.
20. A Somotoff. A Variational Approach to statistically Nonhomogeneous Field. *Quat Appl Mech*, 1970
21. Mil Accorsi, S Nemat - Nasser. Bounds on the overall elastic and instantan-

- neous elastoplastic moduli of periodic composites. *Mechanics of Materials*, 1986(5), 209~220
22. Z Hashin, S Strikeman. A Variational Approach to the Theory of Elastic Behavior of Multiphase Materials. *J Mech Phys Solids*, 1963, 127~140
 23. Z Hashin, B W Rosen. The elastic moduli of fiber reinforced materials. *J Appl Mech*, 1964, 223~232
 24. E Kroner. Bounds for Effective Elastic Moduli of Disordered Materials. *J Mech Phys Solids*, 1977, 25: 137~155
 25. L J Walpole. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems. *J Mech Phys Solids*, 1966, 14: 151
 26. T T Wu. The Effect of Inclusion Shape on the Elastic Moduli of Two-phase Materials. *Inter J Solid Struct*, 1966, 2: 1~8
 27. W E Zhang, K E Evens. Numerical prediction of the mechanical properties of anisotropic composite materials. *Comput Struct*, 1988, 19(3): 413~422
 28. J Aboudi. The Effective Moduli of Short-Fiber Composites. *Inter J Solid Struct*, 1983, 19(8): 693~707
 29. H Tolonen, S G Sjolind. Effect of mineral fiber on properties of composite matrix materials. *Mech of Comp Mater*, 1995, 31: 435~445
 30. Y Huang, K C Huang. A unified energy approach to a class of micromechanics models for microcracked solids. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1995, 8(2): 110~120
 31. Y Benveniste, G J Dvorak, T Chen. Stress fields in composites with coated inclusions. *Mechanics of Materials*, 1989, 7: 305~317
 32. Y Benveniste, G J Dvorak, T Chen. On effective properties of composites with coated cylindrically orthotropic fibers. 1991, 12: 289~297
 33. H Luo, G J Weng. On Eshelby's Tensor in a three-phase cylindrically concentric solid and the elastic moduli of fiber reinforced composites. *Mechanics of Materials*, 1989, 8: 77~88
 34. N Oshima, S Nomura. A Method to Calculate Effective Modulus of Hybrid Composite Materials. *J Composit Materials*, 1985, 19
 35. M Taya, T W Chou. On Two Kinds of Ellipsoidal Inhomogeneities in an Infinite Elastic Body: An Application to a Hybrid Composites. *Inter J Solid Struct*, 1981, 17: 553~563

第6章 复合材料的非线性性能

复合材料的非线性性能(包括弹塑性、粘弹性、粘塑性等)是复合材料非常重要的性能之一。树脂基复合材料、金属基复合材料和陶瓷基复合材料都会出现一相或两相发生塑性变形的可能性。在本章中,以纤维增强金属基复合材料的弹塑性和蠕变性能为例,研究复合材料的非线性变形和性能。

§ 6.1 引言

复合材料的变形可分成三个阶段:(1) 纤维和基体都是弹性变形,(2) 纤维是弹性变形,而基体进入了非弹性(塑性)变形,有时,也可能纤维比基体首先进入非弹性变形,(3) 纤维和基体中有一相带损伤工作,直到完全破坏,如图 6.1 所示。像金属基复合材料和某些树脂基复合材料,基体都有很好的塑性变形能力。为了发挥复合材料的高比刚、高比强和高延性的优点,使其在第二变形阶段正常承载是很必要的。复合材料中有一相发生塑性变形可能会对减缓应力集中、提高断裂韧性产生有益的作用。因此,研究复合材料的弹塑性变形是具有实际意义的。

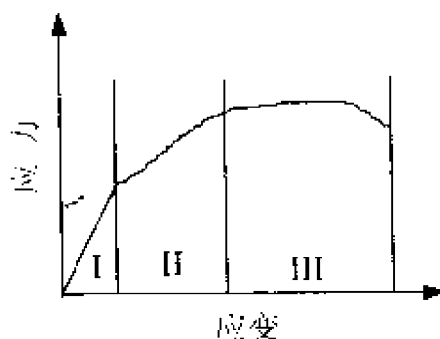


图 6.1 复合材料的变形阶段

在本章中,假设纤维处于线性弹性变形状态,而基体发生弹-粘塑性变形。纤维是单向铺设的连续或不连续纤维。

按照传统塑性力学的思想,复合材料的弹塑性变形主要有两个问题,一是复合材料的宏观屈服条件,二是复合材料的弹塑性应力-应变关系。

假设复合材料由弹性的增强相和弹塑性的基体材料组成,基体材料的屈服函数为 $F_m(\sigma_{ij}^m) = 0$, 假设宏观应力 $\bar{\sigma}$ 与基体内的应力 σ^m 存在关系:

$$\sigma_{ij}^m = A_{ijkl}^m \bar{\sigma}_{kl} \quad (6.1)$$

则可直接写出复合材料的屈服函数:

$$F(\bar{\sigma}_{ij}) = F_m(A_{ijkl}^m \bar{\sigma}_{kl}) = 0 \quad (6.2)$$

如果只考虑初始屈服条件,则方程(6.1)仅在弹性范围内成立就可以了。如果要考虑后继屈服条件,则方程(6.1)应与基体材料的塑性变形历史有关。因此,要研究复合材料的屈服条件,只要求出应力集中因子就可以了。这样,在研究有效弹性性能中用到的各种方法均可用于求解复合材料的弹塑性屈服模式。如 Lin^[1]用有限元法计算应力集中因子; Hutchinson^[2]则采用了自洽模型, Dvorak 等^[4,5]用近似模型求解应力集中因子。

研究复合材料弹塑性应力-应变关系的方法比较多,例如:独立的单胞模型^[1,3,6-9]、自洽模型^[2,10,11]、Mori - Tanaka 方法、变分定界法^[12,13]及各种近似法^[14-21]等都可应用于复合材料的弹塑性问题中。但一般而言,当材料进入弹塑性变形之后,问题就比较复杂了,例如循环加载,应变硬化等问题在均匀各向同性材料中就很难描述,在复合材料中就更为困难了。

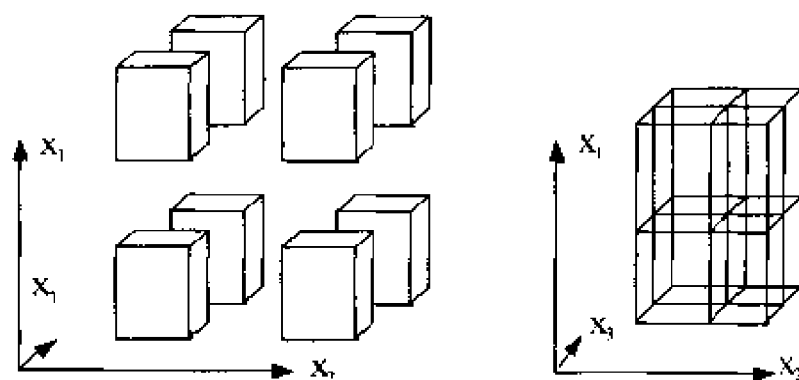


图 6.2 Aboudi 的连续统模型

为了描述复合材料的循环加载时的本构关系, Aboudi^[22-26]

提出了一个连续统模型,如图 6.2 所示。并用内变量理论表示基体的弹塑性本构关系,从而避开了求解屈服和加载函数的困难,其思想是在单向短纤维复合材料中取出一个代表体元,将代表体元再分为若干矩形小区域,在每一个区域内用平均应力和平均应变表示其场量,然后再利用应力与变形的协调条件得到一组代数方程,数值求解后得到复合材料的应力-应变曲线。

对复合材料的粘弹性和粘塑性行为的研究,其力学模型和研究方法与其弹塑性行为大致相同。

纵观复合材料非线性行为的研究,其力学模型一般都比较简单,有的甚至比弹性问题的模型还要简化。发生塑性变形的相一般为基体相,或者只有界面相,其余均为弹性变形。组分材料的弹塑性本构方程也采用较简单的形式,如理想弹塑性模型、无屈服面的 Bodner-Partom 统一本构方程等。

对于金属基复合材料而言,还有一个重要的问题,就是金属材料与纤维或晶须发生相互作用。这时,金属的塑性变形机制会发生较大的变化。因此,从更细观的角度,研究金属基体材料在复合材料中的塑性行为,如强化行为等,显得特别重要,否则就难以知道基体材料的原位(in-situ)性能。关于这方面的工作请参阅文献[28~31]。

§ 6.2 一般关系式

设 V 表示一个由增强相和基体相组成的二元复合材料代表体元。 $d\bar{\sigma}$ 和 $d\bar{\epsilon}$ 表示作用于代表体元 V 上的宏观应力和宏观应变增量, $d\sigma_m, d\sigma_f, d\epsilon_m$ 和 $d\epsilon_f$ 分别表示基体和纤维内的平均应力和平均应变增量, v_f 和 $v_m (=1 - v_f)$ 分别表示纤维和基体的体分比。宏观增量与局部增量之间的关系由下列确定:

$$d\bar{\sigma} = v_f d\sigma_f + v_m d\sigma_m, \quad d\bar{\epsilon} = v_f d\epsilon_f + v_m d\epsilon_m \quad (6.3)$$

且有

$$d\sigma_r = L_r d\epsilon_r \quad d\epsilon_r = M_r d\sigma_r \quad (r=f, m) \quad (6.4)$$

其中 L_r 和 $M_r (= L_r^{-1})$ 分别为组分材料的瞬时刚度和柔度, 当组分材料为线弹性时, 它们为常数。假定宏观增量与局部增量之间存在关系:

$$d\bar{\sigma}_r = B_r d\bar{\epsilon}, \quad d\bar{\epsilon}_r = A_r d\bar{\sigma} \quad (6.5)$$

其中 B_r 和 A_r 称为瞬时应力和应变集中因子, 将式(6.5)代入到式(6.3), 得到:

$$v_f B_f + v_m B_m = I \quad v_f A_f + v_m A_m = I \quad (6.6)$$

I 为单位矩阵。

定义复合材料在每个塑性加载瞬时的瞬时有效刚度 L 和柔度 M 为:

$$d\bar{\sigma} = L d\bar{\epsilon} \quad d\bar{\epsilon} = M d\bar{\sigma} \quad (6.7)$$

显然, 存在关系:

$$L = \sum v_r L_r A_r \quad M = \sum v_r M_r B_r \quad (r = f, m) \quad (6.8)$$

对于弹性和稳定的弹塑性材料, L_r, M_r 和 L, M 都是对称的。

正如上一节提到的求解复合材料屈服函数的方法一样, 如果确定了瞬时应变或应力集中因子 A_r 或 B_r , 则复合材料的弹塑性性能就可完全确定了, 用于弹性分析的各种方法如自治方法、M-T 方法等都可适用。下面用 Dvorak 和 Behei-El-Din 提出的一个近似模型^[5], 展示其分析过程。

对单向连续纤维复合材料, 设 33 方向为纤维方向, 假设纤维的直径为零, 但纤维仍占有一定的体分比。这导致如下力学模型:

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma}_{ij} &= d\sigma_{ij}^f = d\sigma_{ij}^m \quad ij \neq 33 \\ d\bar{\sigma}_{33} &= v_f d\sigma_{33}^f + v_m d\sigma_{33}^m \\ d\bar{\epsilon}_{ij} &= v_f d\epsilon_{ij}^f + v_m d\epsilon_{ij}^m \quad ij \neq 33 \\ d\bar{\epsilon}_{33} &= d\epsilon_{33}^f = d\epsilon_{33}^m \end{aligned} \quad (6.9)$$

假设应力和应变增量张量具有如下形式:

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} &= \{d\bar{\sigma}_{11} \quad d\bar{\sigma}_{22} \quad d\bar{\sigma}_{33} \quad d\bar{\sigma}_{12} \quad d\bar{\sigma}_{13} \quad d\bar{\sigma}_{23}\}^T \\ d\bar{\epsilon} &= \{d\bar{\epsilon}_{11} \quad d\bar{\epsilon}_{22} \quad d\bar{\epsilon}_{33} \quad d\bar{\epsilon}_{12} \quad d\bar{\epsilon}_{13} \quad d\bar{\epsilon}_{23}\}^T \end{aligned} \quad (6.10)$$

则横观各向同性弹性矩阵具有如下形式:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} k+m & k-m & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & k+m & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1} \quad (6.11)$$

其中 $k = -E_T\mu_T/[E_T - 4\mu_T + 4\nu_A^2\mu_TE_T/E_A]$

$l = 2k\nu_A$ $n = E_A + l^2/k$ $m = \mu_T$ $p = \mu_A$

下标 A 表示纤维的纵向, T 表示横向。对各向同性材料:

$l = k - m$ $n = k + m$ $m = p$ $E = E_A = E_T$

$\mu = \mu_A = \mu_T$ $\nu = \nu_A = \nu_T$

在弹性变形阶段,上述力学模型产生下列弹性应变、应力集中因子:

$$\mathbf{A}_{re} = \begin{bmatrix} a'_r & 0 \\ 0 & a''_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{re} = \begin{bmatrix} b'_r & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

其中

$$a'_r = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k/k_r + m/m_r & k/k_r - m/m_r & (l-l_r)/k_r \\ k/k_r - m/m_r & k/k_r + m/m_r & (l-l_r)/k_r \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a''_r = \begin{bmatrix} m/m_r & 0 & 0 \\ 0 & p/p_r & 0 \\ 0 & 0 & p/p_r \end{bmatrix}$$

$$b'_r = \frac{1}{E_c} \begin{bmatrix} E_c & 0 & 0 \\ 0 & E_c & 0 \\ (1-\nu_r)a_r & (1-\nu_r)a_r & E_{Ar} \end{bmatrix}$$

$E_c = \nu_f E_A^f + \nu_m E_A^m$ $a_f = (\nu_A^f E_A^m - \nu_A^m E_A^f) = -a_m$ ($r=f, m$)

将集中因子 $\mathbf{A}_{re}$ 和 $\mathbf{B}_{re}$ 代入到方程(6.8)中,并利用式(6.11)的形式,得到如下有效弹性系数:

$$\begin{aligned}
k &= (v_f/k_f + v_m/k_m)^{-1} \\
l &= (v_m k_f l_m + v_f k_m l_f) / (v_f k_m + v_m k_f) \\
n &= v_m n_m + v_f n_f - [v_f v_m (l_f - l_m)^2 / \\
&\quad (v_f k_m + v_m k_f)] \\
m &= (v_f/m_f + v_m/m_m)^{-1} \\
p &= (v_f/p_f + v_m/p_m)^{-1}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

若假设基体材料服从 J_2 流动法则:

$$F_m = 3J_2^m - Y_m^2 = 0 \tag{6.14a}$$

或

$$F_m = \frac{3}{2} s_{ij}^m s_{ij}^m - Y_m^2 = 0 \tag{6.14b}$$

式中 s_{ij}^m 是基体内的偏应力张量, Y_m 是基体单轴屈服应力。由式 (6.12), 可得复合材料的初始屈服函数为:

$$F = \bar{\sigma}^T \begin{bmatrix} b_m'^T c b_m' & 0 \\ 0 & 3I \end{bmatrix} \bar{\sigma} - Y_m^2 = 0 \tag{6.15}$$

其中

$$c = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

§ 6.3 材料力学模型

对单向连续纤维复合材料, 可以用简单的力学模型进行分析, 下面的材料力学模型虽然比较简单, 但将它用于分析复合材料的弹塑性变形及粘塑性变形, 可以得到具有满意精度的轴向性能预测。

6.3.1 组分材料性能

假设纤维是线弹性的横观各向同性材料, 其应力 - 应变关系

由胡克定律表示:

$$\sigma_{ij}^f = L_{ijkl}^f \epsilon_{kl}^f \quad \text{或} \quad \epsilon_{ij}^f = M_{ijkl}^f \sigma_{kl}^f \quad (6.16)$$

其中 $L_f = M_f^{-1}$ 。

假设基体是各向同性的弹粘塑性材料,其本构关系为:

$$\sigma_{ij}^m = L_{ijkl}^m (\epsilon_{kl}^m - \epsilon_{kl}^{mp}) \quad (6.17a)$$

或

$$\epsilon_{ij}^m = M_{ijkl}^m \sigma_{kl}^m + \epsilon_{ij}^{mp} \quad (6.17b)$$

其中 ϵ_{ij}^{mp} 表示基体的非弹性应变,它含有与时间无关的塑性变形和与时间相关的粘性变形,可用 Bodner-Partom 统一本构理论^[32]表示为:(下面省略表示“基体”的上角标 m)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij} \quad (6.18)$$

其中 $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk}/3$ 为应力偏量, δ_{ij} 为 Kronecker delta,将上式平方得:

$$D_2^p = \lambda^2 J_2 \quad (6.19)$$

上式中 $D_2^p = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p$, $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$, 根据非弹性变形动力学, D_2^p 有如下形式:

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left\{ - \frac{n+1}{n} [Z^2/(3J_2)]^n \right\} \quad (6.20)$$

其中 Z 是与加载历史相关的状态变量,描述材料阻止塑性流动的硬化状态。对各向同性硬化, Z 的演化律可以写成:

$$\dot{Z} = m(Z_1 - Z) \dot{W}_p / Z_0 - AZ_1 [(Z - Z_1)/Z_1]^r \quad (6.21)$$

上式中右边第一项表示功硬化的效应,第二项表示热恢复或静态恢复效应, $\dot{W}_p$ 是塑性功率:

$$\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 2\lambda J_2 \quad (6.22)$$

在常温下,热恢复项可以略去不计,这时方程(6.21)有积分形式:

$$Z = Z_1 + (Z_0 - Z_1) \exp[-mW_p/Z_0] \quad (6.23)$$

上述各式中材料常数的意义如下:参数 Z_0 对应于材料单轴应力-应变关系曲线中的屈服应力; Z_1 正比于材料的破坏应力;

常数 m 表示硬化的速率; n 控制材料的率敏感性, 并影响流动应力的总水平, 它是温度相关的参数, n 随温度的增加而减小, 减少 n 也降低流动应力的总水平; D_0 是材料在受到剪切变形时的极限应变率, 通常在低于 $10/\text{sec}$ 的应变率下, 取 $D_0 = 10^4 \text{sec}^{-1}$ 。

在热恢复或静态恢复效应中, Z_1 是 Z 在给定温度下的稳态(最小)值, A 和 r 是与温度相关的热恢复常数。这些材料常数可根据单轴应力-应变实验曲线, 采用曲线拟合法确定。

Bodner-Partom 统一本构方程考虑的是各向同性硬化, 因而不涉及 Bauschinger 效应。各向异性硬化的本构方程可见文献^[32]。

下面给出几种金属基复合材料的组分材料的性能。

表 6.1 Boron/Aluminum 复合材料的组分材料性质

性质 材料	$E(\text{GPa})$	ν	$D_0(\text{sec}^{-1})$	$Z_0(\text{MPa})$	$Z_1(\text{MPa})$	m	n
Boron	400	0.2					
Alum	72.5	0.33	10000	100	190	70	10

表 6.2 Graphite/Titanium 复合材料的组分材料性质

性质 材料	$E_{11}(\text{GPa})$	$E_{22}(\text{GPa})$	ν_{12}	ν_{23}	$\mu_{12}(\text{GPa})$		
Graph	165.47	13.79	0.3	0.15	27.58		
性质 材料	$E(\text{GPa})$	ν	$D_0(\text{sec}^{-1})$	$Z_0(\text{MPa})$	$Z_1(\text{MPa})$	m	n
Ti	120	0.33	10000	1000	1400	100	1

表 6.3 Borsic/Aluminum(1100)复合材料的组分材料性质

性质 材料	$E(\text{GPa})$	ν	$D_0(\text{sec}^{-1})$	$Z_0(\text{MPa})$	$Z_1(\text{MPa})$	m	n
Borsic	300	0.2					
Al 1100	68.94	0.33	10000	55.15	151.67	300	4.4

6.3.2 细观力学模型

对于连续纤维复合材料, 可使用下列所谓的材料力学模型。

沿着纤维轴向,假设纤维与基体的应变相等,且等于有效应变,有效应力等于各组分材料的应力之和;在非轴向方向,纤维与基体的应力相等,而有效应变等于组分材料的应变之和,用数学公式表示为^[33]:

在轴向(11 方向)

$$\begin{aligned} d\epsilon_{11} &= d\epsilon_{11}^f = d\epsilon_{11}^m \\ d\sigma_{11} &= v_f d\sigma_{11}^f + v_m d\sigma_{11}^m \end{aligned} \quad (6.24)$$

在非轴向

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= d\sigma_{ij}^f = d\sigma_{ij}^m \\ d\epsilon_{ij} &= v_f d\epsilon_{ij}^f + v_m d\epsilon_{ij}^m \end{aligned} \quad (ij \neq 11) \quad (6.25)$$

将(6.16)和(6.17)代入到(6.24)和(6.25)中,得到如下复合材料的应力-应变的增量关系:

$$d\sigma_{11} = (v_f L_{1111}^f + v_m L_{1111}^m) d\epsilon_{11} - v_m L_{1111}^m d\epsilon_{11}^{pp} \quad (6.26a)$$

$$d\sigma_{ij} = (v_f M_{ijkl}^f + v_m M_{ijkl}^m)^{-1} (d\epsilon_{kl} - v_m d\epsilon_{kl}^{pp}) \quad ij \neq 11 \quad (6.26b)$$

公式(6.24)和(6.25)意味着复合材料的非弹性应变完全由基体的非弹性变形贡献。文献[2]曾利用这个细观力学模型(公式(6.24)和(6.25))研究过复合材料发生塑性变形时的瞬时应力集中因子。

求解方程(6.26a)和(6.26b)时,必须进行时间积分。Bodner-Partom 统一本构方程是高度非线性和刚性的微分方程。这类微分方程的时间积分,要求时间步长必须极小,否则,将会影响其收敛性和稳定性。数值积分的策略有许多,这里采用自动选择时间步长的一阶预测-校正法。

对于给定应变率 $\dot{\epsilon}$, 应变增量为 $\Delta\epsilon = \dot{\epsilon} \Delta t$ 。随着时间的延续,总应变由小变大。在每一时间步上计算出应变对应的应力,则可得到复合材料的应力-应变关系^[33~36]。

下面以 Boron/Aluminum 复合材料和 Graphite/Titanium 复合材料为例,研究它们在单向应力状态下的应力-应变关系。两种复合材料的材料常数见表 6.1 和表 6.2。

在计算过程中,初始步长为 10^{-3} sec 秒。加载应变率取为

$10^{-5}/\text{sec}$, 这个应变率相当于准静态加载。这时, 基体的粘性效应很小, 可以略去不计, 因而弹-粘塑性材料可以看成弹塑性材料。

B/Al 复合材料的加载过程如图 6.3 所示, 这是一个循环的静态加载过程。将这个加载过程分别施加于轴向变形、横向变形和剪切变形, 可以分别得到轴向、横向和剪切变形的应力-应变关系。

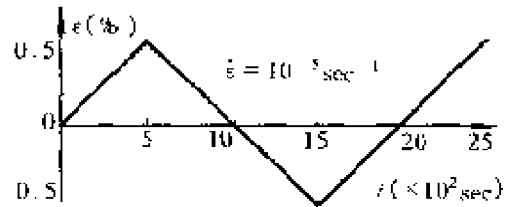
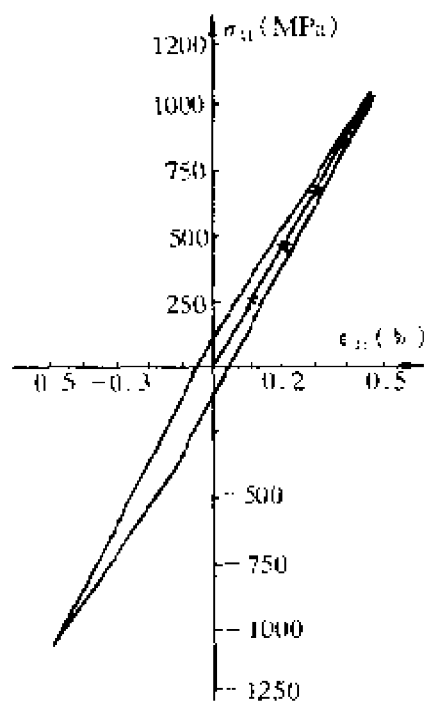


图 6.3 B/Al 复合材料的循环加载过程

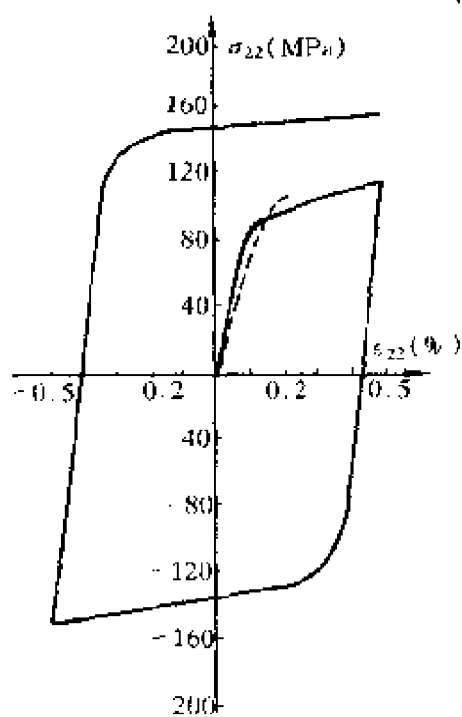
图 6.4a 至图 6.4c 分别给出了这种复合材料的纵向、横向和剪切应力-应变关系, 其中的虚线是取自文献^[26]的实验值, 体分比 $v_f = 0.46$ 。通过比较, 说明预测结果与实验结果符合较好, 特别是在纤维轴向上, 预测结果与实验结果几乎完全相同, 但在横向方向上和主剪切变形方向上, 存在一定的误差, 而且, 随着变形的增加, 这种差距有扩大的趋势。

Graphite/Titanium 复合材料的计算结果表示在图 6.5a 至图 6.5c 中, 这种复合材料中的 Graphite 纤维是横观各向同性的。应变率 $3.2 \times 10^{-3}/\text{sec}$ 为常数。由这些结果可以看出, 纤维在轴向对于基体的塑性流动有显著的阻止作用。在体分比较大时, 基体的塑性流动对于复合材料轴向变形影响很小。随着体分比增大, 复合材料的屈服应力随之提高, 但屈服应变不受体分比的影响。而在横向拉伸和纵向剪切变形方向上, 情形就完全不同了。纤维体分比影响复合材料屈服应变, 而对屈服应力没有影响。

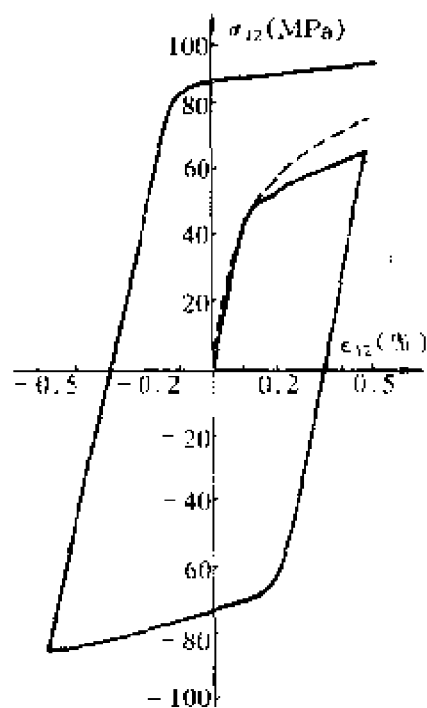
另外一个重要的因素就是应变率的影响^[36], 为了分析不同应变率对复合材料屈服的影响, 图 6.6 给出了应变率分别是 $3.2 \times 10^{-2}/\text{sec}$ 和 $3.2 \times 10^{-3}/\text{sec}$ 两种情况下的应力-应变曲线(体分比为 0.1)。从这个比较中, 我们得出的结论是, 提高应变率不仅使复合材料的屈服应力相应提高, 而且, 提高了整个塑性变形的应力水平。可以断定, 随着纤维体分比的增大, 应变率的影响将逐渐减弱。



(a)



(b)



(c)

图 6.4a B/Al 复合材料的纵向应力-应变关系 (* 实验值, 一本文)

图 6.4b B/Al 复合材料的横向应力-应变关系 (.....实验值, 一本文)

图 6.4c B/Al 复合材料的剪切应力-应变关系 (.....实验值, 一本文)

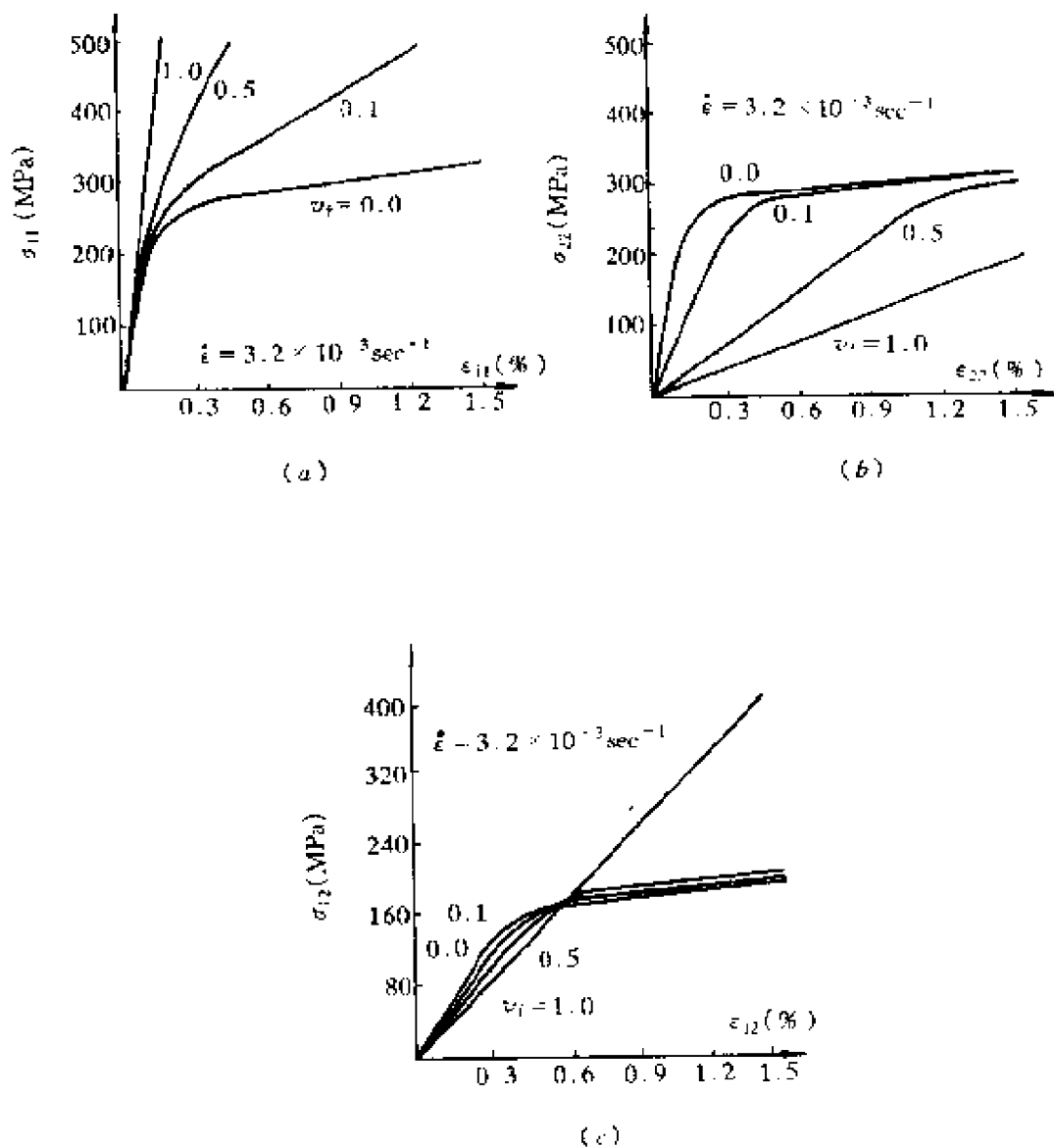


图 6.5a G/Ti 复合材料的纵向应力-应变关系

图 6.5b G/Ti 复合材料的横向应力-应变关系

图 6.5c G/Ti 复合材料的剪切应力-应变关系

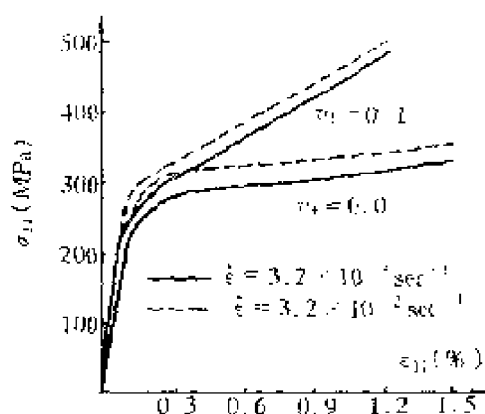


图 6.6 G/E 复合材料在不同应变率下的纵向
应力-应变关系

§ 6.4 有限元模型

在上一节内,研究了单向连续纤维复合材料的弹性粘塑性本构行为,在本节将研究单向短纤维复合材料的弹性粘塑性本构关系。与连续纤维复合材料不同,短纤维复合材料在纵向方向上不保持连续纤维复合材料的那种均匀性,因此,必须采用新的模型和方法。

用有限元分析复合材料弹塑性变形的研究工作很多。文献[8]曾经用弹塑性有限元法研究过单向短纤维复合材料的应力分布,它利用轴对称有限元模型,假设基体是弹性理想塑性材料,并且只考虑单向应力状态。文献[9]通过对球状颗粒复合材料的三维有限元分析得出结论,在计算复合材料内的应力场和有效弹性模量时,三维分析与简单的轴对称分析的结果非常接近。并指出三维分析是不必要的。受上述工作的启发,我们这里选择了轴对称模型和平面应变模型^[37,38]。

本节介绍的有限元法适用于具有周期性均匀细观结构的短纤维或颗粒复合材料,也适用于连续纤维复合材料的横向变形。

组分材料的性能与连续纤维复合材料情况一样,假设纤维为线弹性,基体为 Bodner-Partom 统一本构方程描述的弹性粘塑性材料。基于率型本构方程的变分原理可表述为:

对于运动许可的任意的应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 和速度场 $\dot{u}_i$, 其真实值使虚功率

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv - \int_V \dot{b}_i \dot{u}_i dv - \int_S \dot{f}_i \dot{u}_i ds \quad (6.27a)$$

取最小值。即有:

$$\delta\pi = 0 \quad (6.27b)$$

其中 $\dot{u}_i$ 是节点速度向量, $\dot{b}_i$ 和 $\dot{f}_i$ 分别为体力和表面力率向量。(6.27a) 和 (6.27b) 式可称为用应力率、应变率表示的虚功率原理。由它导出的有限元方程可以表示为:

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}} + \dot{\mathbf{F}} \quad (6.28)$$

其中

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^N dv$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \int_V \mathbf{N} \dot{\mathbf{b}} dv$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \int_S \mathbf{N} \dot{\mathbf{f}} ds$$

上式中 $\mathbf{K}$ 是刚度矩阵, $\dot{\mathbf{F}}$ 和 $\dot{\mathbf{P}}$ 是等效节点力率向量, $\dot{\mathbf{Q}}$ 表示由非弹性应变率 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^N$ 引起的不平衡力率。 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 分别为应变矩阵和弹性矩阵。为了计算当前的应力、应变和位移,在每一个荷载增量步上采用一阶预测—校正方法进行时间积分。

用纤维的长径比 α 表示纤维的形状,采用同心圆柱轴对称模型。一个典型的有限元网格如图 6.7a 所示。对 B/Al 复合材料的部分计算结果绘于图 6.8a 和图 6.8b 中,在计算中,纤维体分比取为 0.24,加载应变率 $\dot{\epsilon} = 0.01/\text{sec}$ (近似静态)。图 6.8a 中的虚线表示用上一节材料力学模型的计算结果。从这些计算结果来

看,轴向变形和剪切变形的应力-应变曲线都比较光滑,这与材料力学模型(仅对连续纤维的情况)是不同的,在材料力学模型中,假设纤维和基体内的应力都是常数,基体在各点的屈服是同时发生的,因而基体的屈服会引起复合材料弹性模量的明显跌落。而在轴对称有限元分析中,基体的屈服是逐渐发生的,屈服首先从某一点开始,逐渐扩大其范围,这种现象的宏观表现就是复合材料的应力-应变曲线是平缓光滑的。

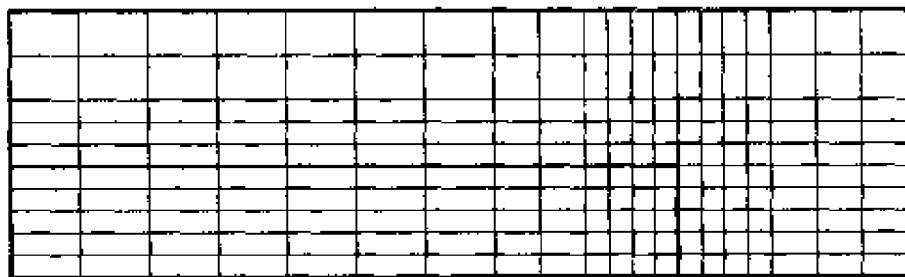


图 6.7a 轴对称模型

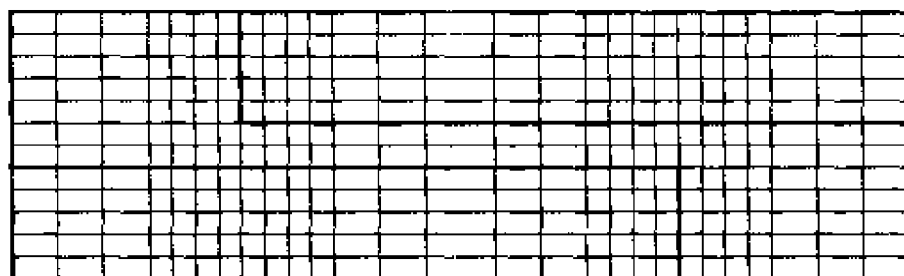


图 6.7b 平面应变模型

从这些计算结果还可以看出,在 $\alpha = \infty$ 时,轴对称模型与上一节的材料力学模型所计算的结果非常接近。这些曲线还反映了不同纤维长径比的增强效果和对基体屈服的影响。当纤维长径比增加时,增强效果明显增大。连续纤维的复合材料对基体屈服的阻止作用最明显。轴向剪切变形的应力-应变关系的非线性效应是非常明显的(图 6.8b),但长径比的影响不如轴向拉伸变形明显。

用平面应变模型也可以研究复合材料的弹塑性性能。平面应变模型的有限元网格如图 6.7b 所示。计算结果如图 6.9 所示,

图中表示了 Boron/Aluminum 复合材料在纵向和横向变形时的应力-应变关系。横向方向的增强效果是很差的, 所以其曲线是缓慢上升的, 非线性效应很明显。而在纵向, 几乎是线性的, 说明基体的屈服影响很小。

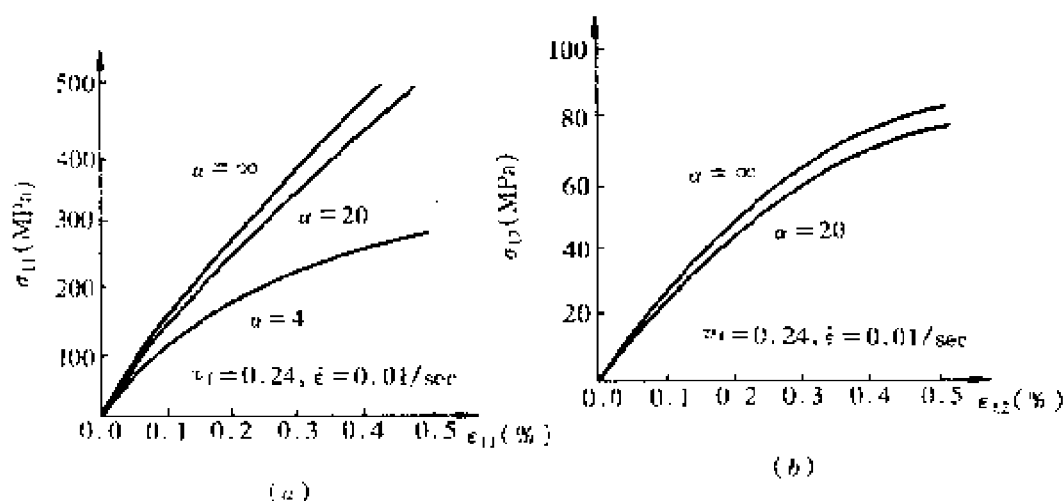


图 6.8a B/Al 的轴向应力-应变关系曲线

图 6.8b B/Al 的剪切应力-应变关系曲线

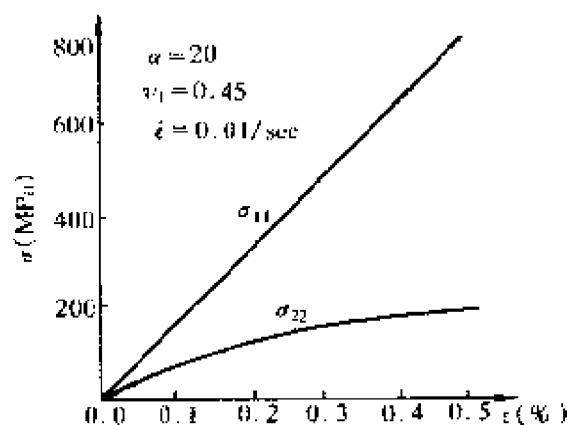


图 6.9 B/Al 的纵向和横向应力-应变关系(平面应变模型)

§ 6.5 复合材料的常温蠕变变形

复合材料的蠕变变形是由于基体的粘塑性而引起的, 单向复

合材料的蠕变变形从 60 年代就开始进行实验研究^[39],但理论分析的工作较少。近年来,由于金属基复合材料的发展和复合材料在高温或超高温环境下工作的要求,复合材料的常温与高温蠕变问题再次突出出来^[29]。

6.5.1 连续纤维复合材料的蠕变分析

单向连续纤维复合材料的蠕变变形的细观力学模型仍采用材料力学模型。将方程(6.26)中的应变增量用应力增量表示,并将应变看作时间 t 的函数,则可得到如下蠕变方程^[41]:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11}(t) &= (v_f L_{1111}^f + v_m L_{1111}^m)^{-1} [\sigma(t) + v_m L_{1111}^m \epsilon_{11}^{mp}(t)] \\ \epsilon_{ij}(t) &= (v_f M_{ijkl}^f + v_m M_{ijkl}^m) \sigma(t) + v_m \epsilon_{ij}^{mp}(t) \quad (ij \neq 11)\end{aligned}\quad (6.29)$$

这就是单向复合材料的蠕变方程,蠕变变形与组分材料的特性和体分比有关。由于假设纤维是线弹性材料,所以复合材料蠕变变形完全由基体的粘塑性贡献。

以常应变率 $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \text{sec}^{-1}$ 的速度逐渐加载,直到达到所设计的应力水平,然后停止加载,进入蠕变变形的时间进程。

选择两种复合材料作为例题,第一种材料为 Graphite/Titanium 复合材料,其组分材料性能列于表 6.2 中,另一种材料为 Borsic/Al(1100)复合材料,其组分材料常数列于表 6.3 中。

图 6.10a ~ 图 6.10d 是 Borsic/Al1100 的蠕变曲线,其中图 6.10a 是基体铝的蠕变应变与时间 t 的关系曲线,并与实验结果进行了比较。图 6.10b ~ d 是 Borsic/Al1100 复合材料(体分比 $v_f = 0.35$)的纵向、横向和剪切蠕变曲线,在每一种变形中有几种应力水平。可以看出,应力水平对于蠕变变形影响很大,当应力水平较低时,蠕变曲线很平缓,受时间的影响很小,当应力水平较大时,蠕变变形随着时间的延长而增大,甚至由于蠕变应变的迅速增大而引起蠕变破坏。

与实验结果的比较也同时给出,这些实验结果取自文献[23]。在纵向变形时,与实验值符合很好,在横向变形时,预测值高于实验值。由于实验资料难以获得,横向蠕变与剪切蠕变的结果比较做得较少。这些计算结果对于研究复合材料的蠕变特性具有重要价值。

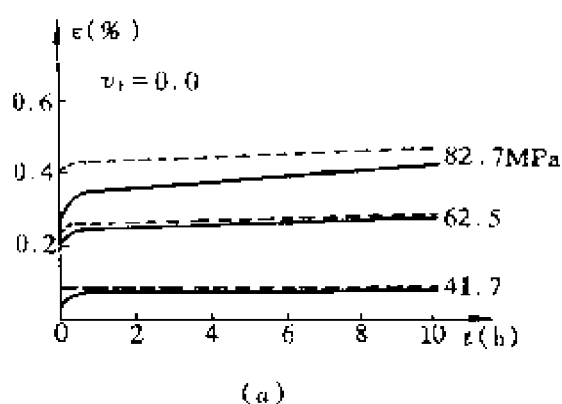


图 6.10a Al1100 的蠕变曲线
(———实验值
———本文)

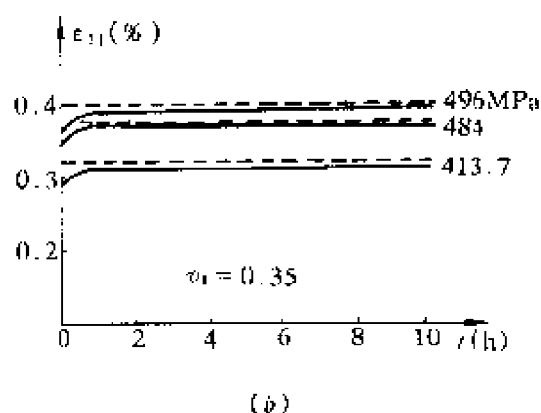


图 6.10b B/Al 复合材料的纵向蠕变曲线
(———实验值
———本文)

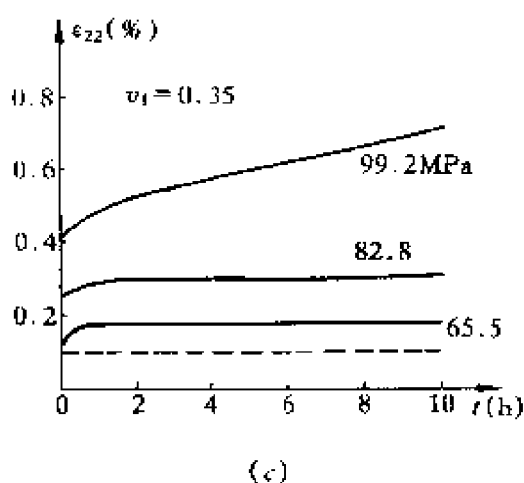


图 6.10c B/Al 复合材料的横向蠕变曲线
(———实验值
———本文)

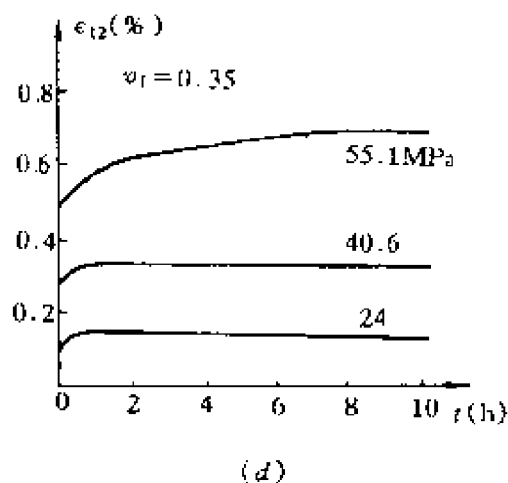


图 6.10d B/Al 复合材料的密切蠕变曲线

在本节的分析中,忽略了纤维的粘性,这是带来误差的原因之一。纤维一般可以看作线性粘弹性材料。另外,现今的模型是一个材料力学模型,纤维在横向方向上的刚度贡献较小,这也会导致误差。有些作者在研究弹性变形时,横向上引入了修正系数,以便使计算结果与实验结果更接近。

蠕变特性还可以从另一个角度来研究,即在时间进程中,应变保持不变,而应力随时间变化。图 6.11 表示 Graphite/Titanium 复合材料的应力松弛曲线,应变以 $\dot{\epsilon} = 3.2 \times 10^{-3}/\text{sec}$ 的速率增加到 0.96%,并保持这个值,应力经过一个急剧的跌落之后,很快趋于一个较稳定的值。这表明,应力与应变之间保持一个较稳定的关系,蠕变变形很小。在这里,纤维的作用是抵抗应力跌落的幅值。当纤维含量较大时,应力松弛的幅度是很小的。

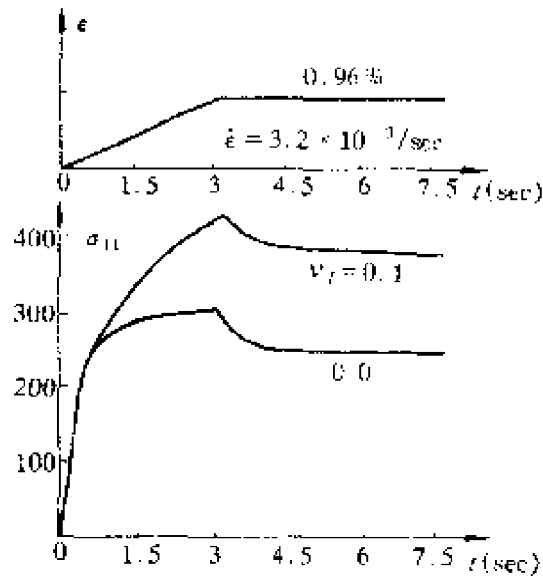


图 6.11 G/Ti 复合材料的纵向应力松弛及其加载过程

6.5.2 单向短纤维复合材料的蠕变分析

对于单向短纤维复合材料,利用轴对称模型和有限元法可分析其蠕变变形。图 6.12a 给出了 B/Al 系统的轴向蠕变分析结果,应力水平分别取 $\sigma = 82\text{MPa}$, 150MPa 和 250MPa ,纤维的长径比 $\alpha = 20$,体分比 $v_f = 0.24$ 。

从以上分析可以看出,除了应力水平对蠕变变形有显著的影响之外,纤维的增强作用对复合材料的蠕变变形也有较大的影响。如在轴向方向,纤维有效地抑制了轴向蠕变变形,纤维含量越高,这种抑制作用越明显。

平面应变模型的蠕变分析结果绘于图 6.12b 中。应力水平分别为 $\sigma = 450\text{MPa}$ 和 $\sigma = 600\text{MPa}$,蠕变变形是比较稳定的。在这样的体分比下,复合材料的轴向变形基本上由纤维控制,基体的粘性效应对复合材料的影响很小。但是,如果增加应力水平,复合材料发生蠕变的曲线会相应提高。

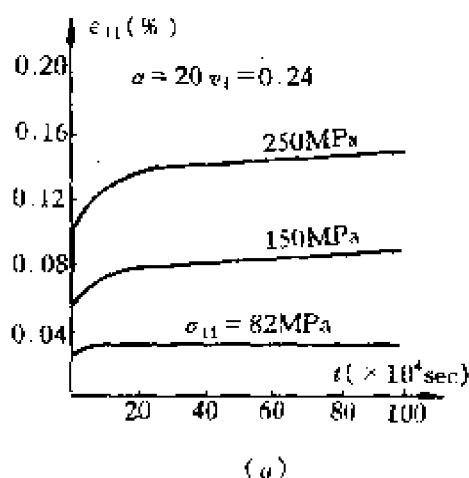


图6.12a B/Al的蠕变变形
曲线(轴对称模型)

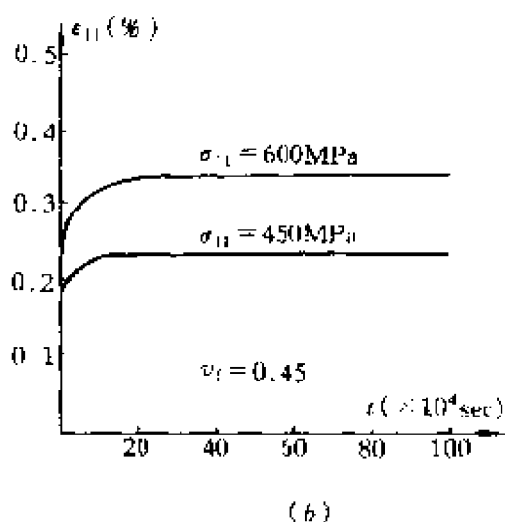


图6.12b B/Al的纵向蠕变
曲线(平面应变模型)

§ 6.6 复合材料的高温蠕变分析

关于复合材料的高温蠕变分析,可以采用与常温蠕变分析相同的方法进行,所不同的是,在基体弹性粘塑性本构方程中,必须计入热恢复效应的影响。另外,在高温状态下,纤维的粘性与基体的损伤也应考虑在内。下面以 C/Cu 复合材料的高温蠕变变形为例,讨论复合材料的轴向蠕变。

为了简化分析,并考虑到碳(T300)纤维在高温下的稳定性,将碳纤维仍然看作线性弹性体,弹性常数取为 165.47GPa。基体铜的材料常数见文献[42]。

在高温状态下,材料的蠕变与材料内部的损伤状态有关。假设损伤仅发生在基体材料内。

在 Bodner-Partom 本构方程(6.20)中引入损伤因子 ω ,

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left\{ -\frac{n+1}{n} [Z^2(1-\omega)^2/(3J_2)]^n \right\} \quad (6.30)$$

其中损伤因子 ω 是材料丧失承载能力的一种唯像表征。在常应力作用下,蠕变损伤因子可近似地写成:

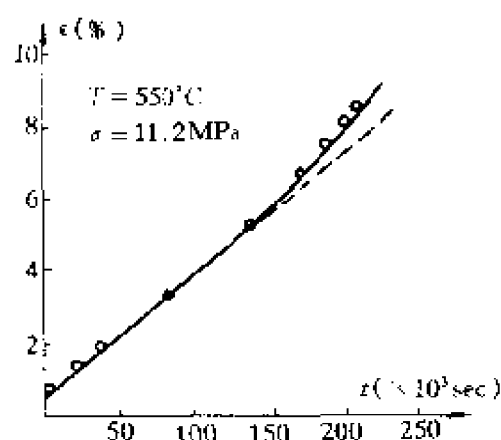
$$\omega = \exp[-(R/t)^p] \quad (6.31)$$

这里 R, p 是与温度相关的材料常数, R 一般还与应力水平有关, t 是时间变量。

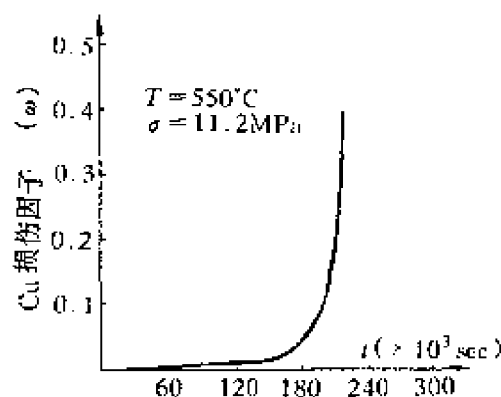
另外, 在高温状态下, 还要计及方程 (6.21) 中的热恢复效应项。作为例题, 考虑铜在 550°C 高温下的蠕变变形, 在外力 11.2MPa 的作用下, 铜的损伤参数取为^[32, 40]

$$R = 255000\text{sec}, p = 5.8 \quad (6.32)$$

其蠕变曲线如图 6.13a 所示, 图中同时给出了实验结果、计及损伤和不计损伤的计算结果。可以看出, 考虑基体损伤之后, 计算值与实验值符合较好。有损伤与无损伤的计算结果差别仅在最后蠕变变形阶段。损伤参数 ω 与时间 t 的关系如图 6.13b 所示。损伤参数 ω 在初始阶段蠕变中很小, 但在最后阶段, 蠕变损伤迅速增长。



(a)



(b)

图 6.13a Cu 在 550°C 下的蠕变曲线

(--- 无损伤的计算结果)

——有损伤的计算结果

○ ○ ○ 实验值

图 6.13b Cu 的损伤因子与

时间 t 的关系

在此基础上, 我们采用材料力学模型考虑碳/铜复合材料的轴向蠕变变形^[42], 纤维体分比和应力水平分别取为

$$v_f = 0.01, \sigma = 17.8\text{MPa}$$

$$v_f = 0.05, \sigma = 44.2\text{MPa} \quad (6.33)$$

$$v_f = 0.2, \sigma = 143.2 \text{ MPa}$$

温度 T 取为 550°C 。由连续纤维复合材料的材料力学模型可知,上述三种加载组合,所对应的基体应力都为 11.2 MPa ,这样,基体的损伤参数可以采用式(6.32)中的数据。

结果表明(图 6.14),在纤维体分比较高的情况下,主要由纤维控制轴向变形,基体的粘性对复合材料变形的影响很小,基体损伤的影响很不明显。在小体分比下,复合材料的蠕变很明显。主要是基体内的损伤发展较明显。如果不考虑损伤的影响,这一阶段的蠕变仍然是较稳定的。

通过上述分析,我们可以得出结论,复合材料在高温下发生纵向蠕变变形时,基体损伤对最后阶段的蠕变影响很大。随着纤维体分比的增大,基体损伤的影响逐渐减小。

本文的方法还可以模拟小体分比下的复合材料蠕变破坏。

复合材料的高温蠕变性质是一个十分重要的课题,不仅金属基复合材料,还有陶瓷基复合材料,碳-碳复合材料等,都需要认真地从实验和理论、计算上进行研究。

§ 6.7 界面性能对复合材料弹塑性能的影响

在复合材料的有效弹性和弹塑性性能中,一般不考虑界面弹性性能的影响。事实上,研究表明,界面的弹性模量等对于有效弹性性能的影响很小。但是界面的强度对有效性能的影响较大,不能忽视。

Lissenden 和 Herakovich^[43,44]考虑了界面强度 σ_0 和用界面特

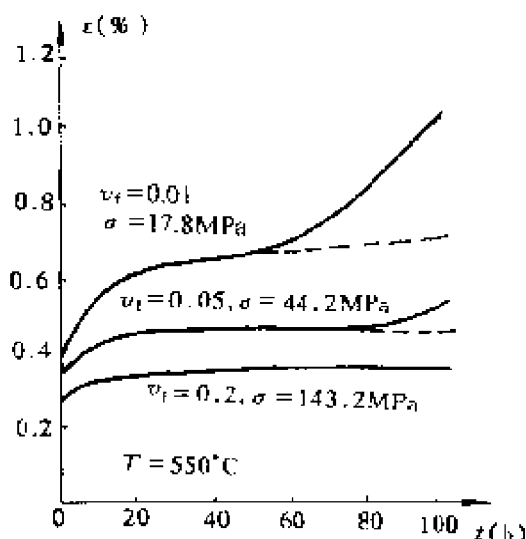


图 6.14 C/Cu 复合材料的高温蠕变
(---不含基体损伤
——含有基体损伤)

征长度表示的单位面积界面分离功等对复合材料弹塑性性能的影响。

对于单向连续纤维增强的金属基复合材料,假设纤维为弹性,基体为遵守 Bodner - Partom 本构方程的弹粘塑性材料。界面的性能用修正的 Needleman 界面演化模型表示,Needleman 的模型^[45]原用于考虑界面从损伤起始到完全脱粘的空洞形核过程。原模型只考虑法向分离情况,现在推广到包含切向和法向荷载的情况。为此,首先定义界面的无量纲合位移:

$$\lambda = \begin{cases} \sqrt{\eta^2 + \chi^2} & \xi \leq 0 \\ \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \chi^2} & \xi > 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

其中

$$\xi = [u_n]/\delta_n, \eta = [u_t]/\delta_t, \chi = [u_b]/\delta_b \quad (6.35)$$

是界面的相对位移与其特征长度分量的比值, $[u_i]$ 是界面的相对位移,下标 n, t 和 b 在界面坐标系中表示法向、正交于纤维轴向的切向和沿着纤维轴向的切向。

界面特征长度 δ 可表示界面的延性大小,较大的特征长度 δ 对应较大的界面延性,较小的特征长度 δ 表示界面较脆,如图 6.15 所示。界面的性能 δ 和 σ_0 可以用实验确定。

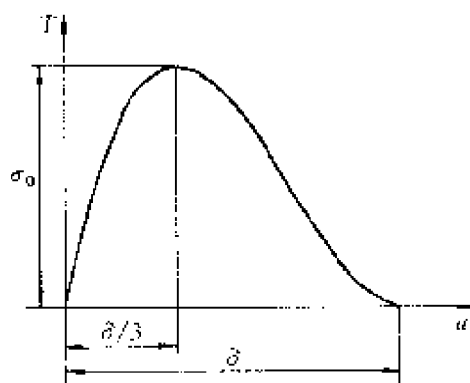


图 6.15 界面的一维荷载位移关系

对于完善界面,相对位移为零,由上述定义可知, $\lambda = 0$ 。当界面在某点完全脱粘时, $\lambda = 1$ 。一般的界面对应于 $0 < \lambda < 1$,而 $\lambda \geq 1$ 时,对应于界面的无粘结条件。

对单调加载,当前的 λ 值总是最大值,但对卸载和再加载,当前的 λ 值有可能小于以前的最大值。为防止界面的自我恢复,取 λ 的最大值,即 $\lambda = \lambda_{\max}$,建立界面的力 T_i 和相对位移的关系:

对于一般粘结情况($\lambda_{\max} < 1$)

$$\begin{aligned} T_n &= \begin{cases} 10^6 \xi & u_n \leq 0 \\ F(\lambda_{\max}) & u_n > 0 \end{cases} \\ T_t &= \gamma F(\lambda_{\max}) \eta \\ T_b &= \gamma F(\lambda_{\max}) \chi \end{aligned} \quad (6.36)$$

其中 γ 表示界面的剪切 - 法向强度比, $F(\lambda_{\max})$ 是引进的一标量函数,

$$F(\lambda_{\max}) = \frac{27}{4} \sigma_0 (\lambda_{\max}^2 - 2\lambda_{\max} + 1) \quad (6.37)$$

对于纯法向分离, 上述关系退化为 Needleman 的力 - 相对位移关系。

对于无粘结情况($\lambda_{\max} \geq 1$):

$$\begin{aligned} T_n &= \begin{cases} 10^6 \xi & u_n \leq 0 \\ 0 & u_n > 0 \end{cases} \\ T_t &= 0 \\ T_b &= 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

式(6.38)中的后二式表示无粘结界面的相对滑动是无摩擦的光滑滑动。

采用广义平面应变模型和含有中心节点的 4 节点常应变三角形单元。位移场模式为

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_i + A_1 y + A_2 z + \epsilon^* x \\ v(x, y, z) &= v_i + A_3 y + A_4 z \\ w(x, y, z) &= w_i + A_5 y + A_6 z \end{aligned} \quad (6.39)$$

其中 ϵ^* 表示轴向的常应变, (u_i, v_i, w_i) 是节点 i 的位移。代表体元的边界条件为

$$\begin{aligned} y=0: v &= 0 \\ z=0: w &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=b: \Delta v &=0 \\ z=a: \Delta w &=0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$y=0, z=0: u=v=w=0$$

代表体元的有限元网格和边界条件如图 6.16 所示。在纤维和基体之间加入一层 4 节点界面元。界面元每对节点的初始坐标是相同的,当界面发生相对位移后,每对节点可以分开。利用界面元进行计算时,单元的刚度可表示为

$$K_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \quad (6.41)$$

其中 F_i 是单元对 i 自由度贡献的力, u_j 是 j 自由度的相对位移。

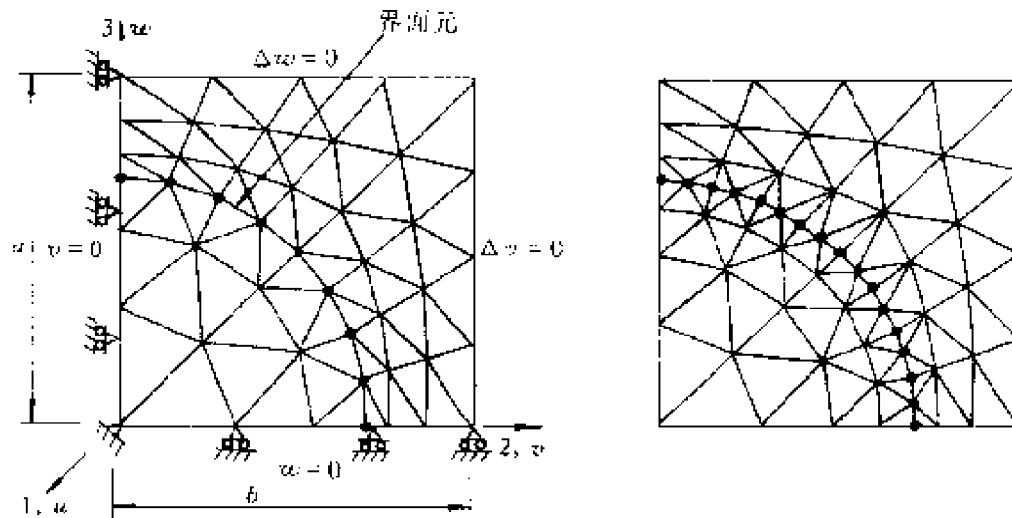


图 6.16 有限元网格和边界条件(两种划分)

Lissenden 和 Herakovich^[43,44]对 SiC/Ti 系统,研究了界面性能的影响。材料数据列入表 6.4 中。

表 6.4 SiC/Ti 复合材料的组分材料性质

材料 性质	$E(\text{GPa})$	ν	$D_0(\text{sec}^{-1})$	$Z_0(\text{MPa})$	$Z_1(\text{MPa})$	m	n
SiC	400	0.25					
Ti	91	0.36	10000	965	1172	1700	7

首先选取界面的性能为固定值： $\sigma_0 = 103\text{MPa}$ ， $\gamma = 3.3$ 和 $\delta = 254\mu\text{m}$ ，考虑完善粘结、变形中脱粘和无粘结情况的结果比较，以及有限元网格的相关性。第一组网格有 56 个三角形单元，8 个界面元，第二组网格有 100 个三角形单元，16 个界面元(图 6.16)。图 6.17 给出了轴向拉伸、横向拉伸和轴向剪切的应力 - 应变曲线。可以看出，轴向的拉伸变形与界面的粘结状态完全无关，而横向拉伸和轴向剪切变形受到界面粘结状态的显著影响。从中还可看出，计算结果对有限元网格是不敏感的。

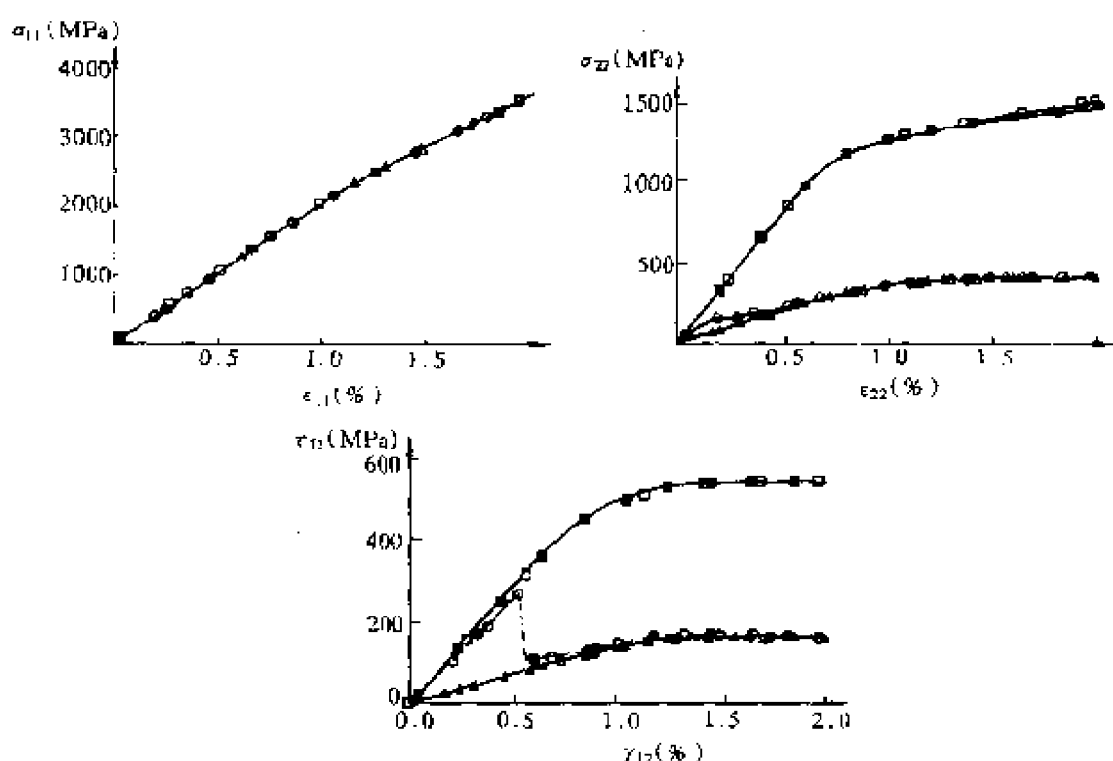


图 6.17 轴向、横向、轴向剪切三种情况下界面脱粘的影响
(16 个界面元: ■完善粘结, ●脱粘, ▲无粘结)
(8 个界面元: □完善粘结, ○脱粘, △无粘结)

其次考虑界面的各种性能对横向拉伸和轴向剪切响应的影
响。图 6.18~6.20 分别给出了不同界面粘结强度、不同剪切 - 法
向强度比和不同界面特征长度下的横向拉伸和轴向剪切应力 - 应
变曲线。这些结果表明，界面性能对横向拉伸和轴向剪切性能有

显著的影响。在变形的开始阶段,横向拉伸和轴向剪切变形都接近于完善界面的情况;当变形较大时,接近于无粘结的情况。

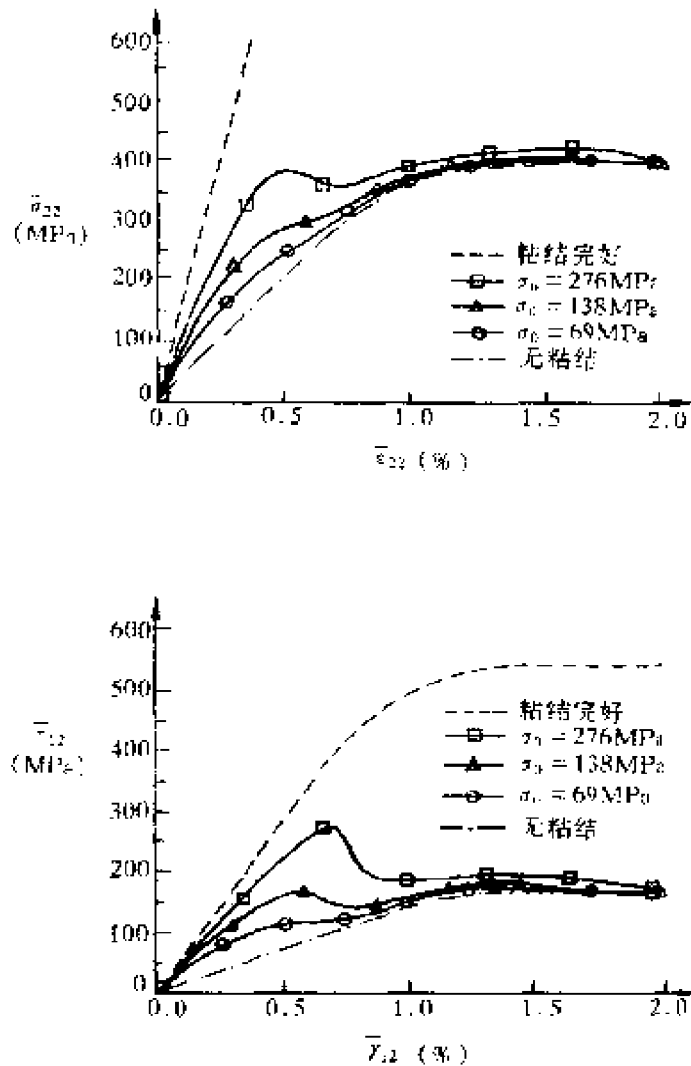


图 6.18 界面粘结强度的影响

最后,图 6.21 给出了代表体元长宽比 $R = a/b$ 对计算结果的影响。结果表明,代表体元长宽比对计算结果有一定的影响,但不明显。结果建议选取 $R = 1$ 较为合理。

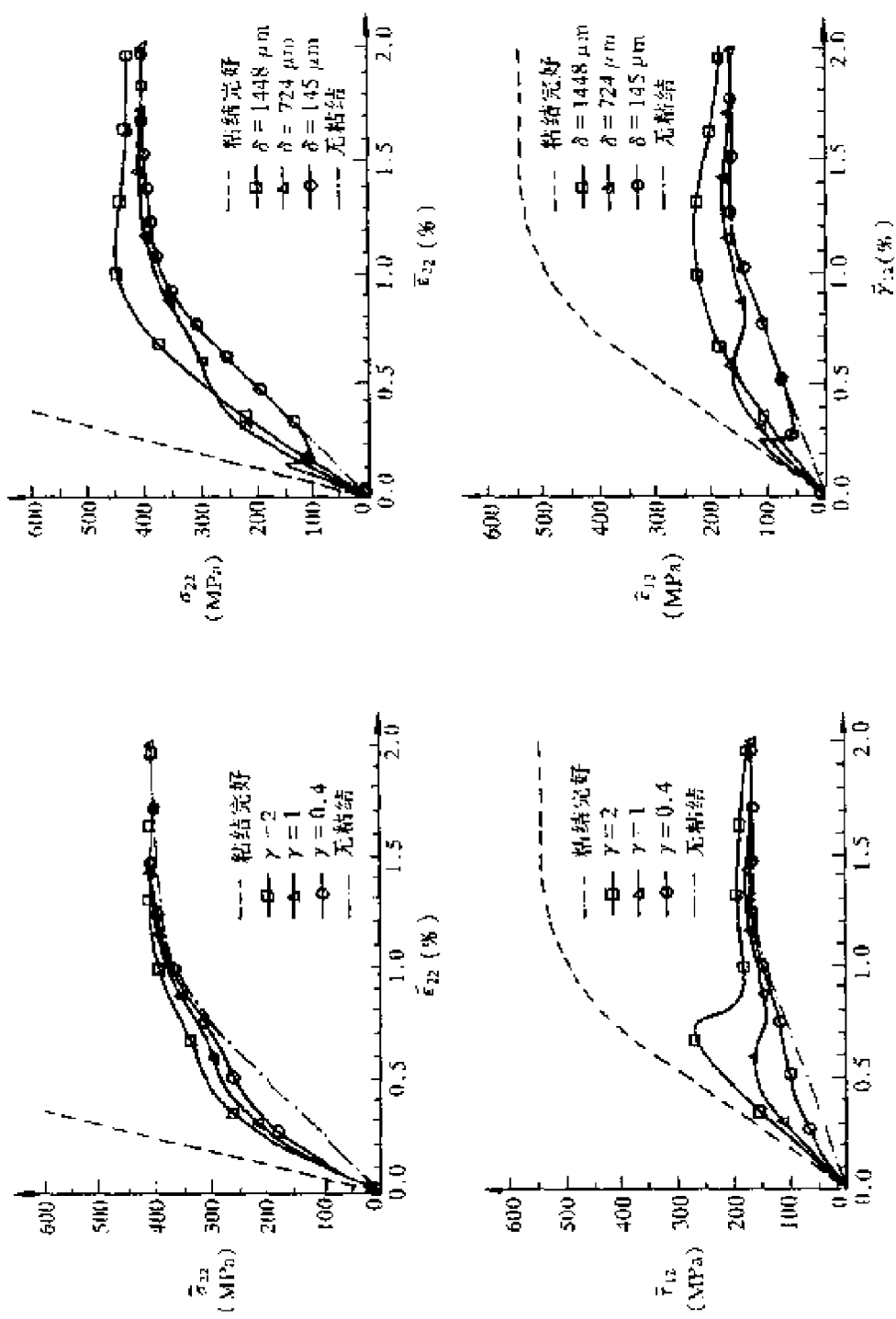


图 6.20 特征长度的影响

图 6.19 剪切 - 法向强度比的影响

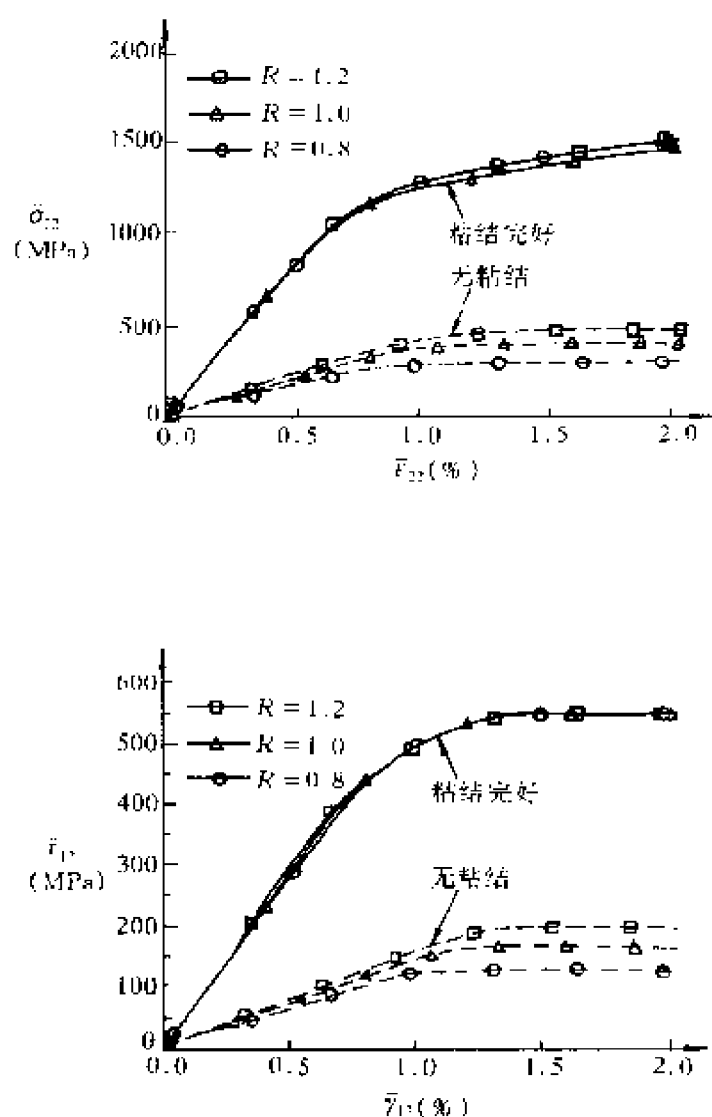


图 6.21 代表体元形状对计算结果的影响

参考文献

1. T H Lin, D Salinas, Y M Ito. Initial Yielding Surface of a Unidirectional Reinforced Composite. J Appl Mech, 1972(7):321
2. J W Hutchinson. Elastic-Plastic Behaviour of Polycrystalline Metals and Composites. Proc Roy Soci London, 1970, 319:247~272
3. Y A Bahei-El-Din, G J Dvorak. Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Fibers Composite Structure. Comput Struct, 1981, 13:321~330
4. G J Dvorak, S M Rao, J Q Tanr. Generalized Initial Yield Surfaces for Uni-

- directional Composite. *J Appl Mech*, 1974(3):249
5. G J Dvorak, Y A Bahei-El-Din. Plasticity Analysis of Fibrous Composites. *J Appl Mech*, 1982, 49:327
 6. G J Dvorak, Y A Bahei-El-Din. Elastic-plastic Behavior of Fiber Composites. *J Mech Phys Solid*, 1979, 27:51 ~ 72
 7. J F Wu, S Sphephard. G J Dvorak. A Material Model for the Finite Element Analysis of Metal Matrix Composites. *Composite Sci Tech*, 1989, 35: 347 ~ 366
 8. B D Agarwal, J W Lifshits. Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Short Fiber Composites. *Fiber Sci Tech*, 1974, 7
 9. B D Agarwal, L J Broutman. Three-Dimensional finite element analysis of spherical particle composites. *Fiber Sci Tech*, 1974, 7:63
 10. Huang. Plastic Behavior of Some Composite Materials. *J Composite Materials*, 1971, 5:320
 11. Huang. Elastoplastic Transverse Properties of a Unidirectional Fiber Reinforced Composite. *J Composite Materials*, 1973, 7:482
 12. M L Accorsi, S NEMAT-NASSER. Bounds on the Overall Elastic and Instantaneous Elastoplastic Moduli of Periodic Composites. *Mech Mat*, 1986(5): 209 ~ 220
 13. L Teply, G J Dvorak. Bound on Overall Instantaneous properties of Elastic-Plastic Composites. *J Mech Phys Solid*, 1988, 36(1):59 ~ 78
 14. C T Sun, J L Chen. A Simple Flow Rule for Characterizing Nonlinear Behavior of Fiber Composites. *J Engi Mech*, 1973, 7:102 ~ 118
 15. C T Sun, W H Feng. A Theory for Physically Nonlinear Elastic Fiber Composites. *Inter J Engi Sci*, 1974, 12:919 ~ 935
 16. D, Kdenaga J F Doyle, C T Sun. The characterization of Boron/Aluminum Composites in the Nonlinear Range as an Orthotropic Elastic - Plastic Materials. *J Composite Materials*. 1987, 21:516 ~ 531
 17. S R Frost. An Approximate Theory for Predicting the Moduli of Unidirectional Laminates With Nonlinear Stress/Strain Behavior. *J Composite Materials*, 1990, 24
 18. Y Surrel, A Varcettrin. On Modeling of the Plastic Respose of FRP under Monotonic Loading. *J Composite Materials*, 1989, 23(3):232

19. T, Ishikawa W Matsushims, Hayashhi. Hardening NonLinear Behavoir in Longitudinal Tension of Unidirectional Carbon Composites. J Mat Sci, 1985, 20;4075 ~ 4083
20. S K Ha, G S Springer. Nonlinear Mechanical Properties of Thermoset Matix Composite at Elevated Temperature. J Composite Materials, 1989, 23; 11
21. D F Adams. Inelastic Analysis of a Unidirectional Composite Subjected to Transverse Normal Loading. J Composite Materials, 1970, 1; 285
22. J Aboudi. Effective Constitutive Equations for FRVPC Exhibiting Anisotropic Hardening. Inter J Engi Sci, 1983, 21(9): 1081
23. J Aboudi. Elastoplasticity Theory for Composite Materials. SM Archires, 1986, 11(3): 141 ~ 183
24. J Aboudi. A Continuum Theory for Fiber-Reinforced Elastic Viscoplastic Composites. Inter J Engi Sci, 1982, 20(5): 605 ~ 621
25. J Aboudi. Closed form Constitutive Equations for Metal Matrix Composites. Inter J Engi Sci, 1987, 25(9): 1229 ~ 1240
26. M-J Pindera, J Aboudi. Nonlinear Response of Unidirectional Boron/Aluminum. J Composite Materials, 1990, 24
27. T Christman A, Needleman S, Suresh An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites, Acta metall mater, 1989, 37: 3029
28. T Christman, A Needleman, S Nutt, etc. On microstructural evolution and micromechanical modelling of deformation of a whisker - reinforced metal - matrix composite. Mater Sci Engng, 1989, A107: 49
29. T L Dragone, W D Nix, Geometric factors affecting the internal stress distribution and high temperature creep rate of discontinuous fiber reinforced. Acta metall mater, 1990, 38: 1941 ~ 1953
30. J M Papazian, P N Adler. Tensile properties of short fiber - reinforced Sic/Al composites. Metall Trans A, 1990, A21: 401 ~ 419
31. V Tvergaard. Analysis of tensile properties for a whisker - reinforced metal - matrix composite. Acta metall mater, 1990, 38: 185 ~ 194
32. S R Bodner. Review of a unified elastic - viscoplastic theory, in unified constitutive equation for plastic deformation and creep of engineering alloys. A K Miller(ed). Elsevier Applied Science Publishers, 1986

33. Q, Yang L, Tang H. Chen Elastoplastic constitutive relations of unidirectional fiber composites for cyclic loadings. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1993, 6(1): 39~46
34. 杨庆生, 陈浩然, 唐立民. 复合材料非线性本构关系的计算机模拟. *复合材料学报*, 1992, 9(4): 13~16
35. 杨庆生, 陈浩然. 单向复合材料的弹塑性行为研究. *复合材料学报*, 1993, 10(3): 129~133
36. 杨庆生. 纤维复合材料的塑性变形行为: 体分比与应变率的影响. *应用力学学报*, 1994, 11(4): 57~60
37. 杨庆生, 唐立民, 陈浩然. 纤维复合材料的细观塑性变形和宏观性能. *复合材料学报*, 1995, 12(3): 76~82
38. 杨庆生. 短纤维复合材料细观力学模型的研究. *大连理工大学学报*, 1994, 34(2): 218~221
39. R H Ericksen. Room Temperature Creep of Borsic-Aluminum Composites. *Metall Trans*, 1973, 4: 1687~1692
40. A M Merzer. Steady and Transient Creep Behavior Based on Unified Constitutive Equations. *JEMT*, 1982, 10(4): 18~25
41. 杨庆生, 陈浩然. 金属基复合材料的蠕变和松弛. *计算结构力学及应用*, 1992, 9(4): 376~380
42. 杨庆生. 纤维复合材料的高温蠕变分析. 第七届全国复合材料学术会议文集, 大连, 1993
43. C F Lissenden, C T Herakovich. Numerical modelling of damage development and viscoplasticity in metal matrix composites. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1995, 126: 289~303
44. C F Lissenden, C T Herakovich. Interfacial debonding in laminated titanium matrix compositess. *Mech Mater*, 1996, 22: 279~290
45. A Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J Appl Mech*, 1987, 54: 525

第 7 章 复合材料界面力学

任何两种材料接触在一起,就存在一个界面,即使在同一种材料内部的原子之间、分子之间或晶粒之间都存在界面。界面随着两种材料的接触而存在,随着两种材料的分离而消失。虽然界面不是物质,但它却有不可缺少的作用。

在复合材料中,纤维与基体通过界面粘接在一起,界面的性能可通过粘接方式得到控制。进一步的研究发现,界面的性能对复合材料的各种性能有显著的影响,但程度是不同的,有正面的,也有负面的。例如:为了提高复合材料的强度和抗蠕变性能,需要一个较强的界面;但为了提高复合材料的韧性,则希望存在一个较弱的界面,以有利于更多地耗散断裂过程中的能量。因此,复合材料的界面是可以设计的,而且有可能寻求一种综合性能的“平衡”或最优化。

本章主要介绍复合材料界面性能表征和应力传递理论,有关界面破坏的分析模型和数值模拟方法分别在第 9 章和第 10 章中介绍。

§ 7.1 界面与界面层的形成机理

在复合材料中,纤维与基体之间的界面是两种材料物理化学作用或固化反应的产物。界面从宏观上可以简单地看作是两相材料的分界面,没有厚度。但它有一定的力学性能,界面的强度甚至有可能超过基体材料。在细观尺度上,界面是具有一定厚度的界面层或界面相,其尺度范围在 nm 至 μm 之间。利用电镜可以观察到界面层的结构,但一般难以精确确定界面层的厚度。复合材料界面(层)的几何与力学特性的表征一直是复合材料领域中的研究热点^[1]。

界面的形成机理是很复杂的,包含了許多复杂的物理和化学因素。界面层的几何与力学特性不仅与两相组分材料有关,而且与复合工艺条件有密切的关系。在纤维复合材料中,通过对纤维表面进行预处理可以部分控制界面的特性。目前,对界面的形成机理主要有如下基本理论^[1,2]。

(1) 化学键合作用:认为基体表面上的官能团与增强物表面上的官能团发生化学反应,形成由共价键结合而成的界面区。这一理论导致增强物表面的涂层处理和偶联剂的广泛应用。

(2) 浸润-吸附理论:这一理论认为,如果基体材料具有良好的浸润特性,则增强材料能够被基体良好浸润,在它们的界面处因物理吸附而产生较大的界面粘接强度,其大小甚至会超过基体本身的内聚强度。

(3) 扩散作用:两相材料在界面上互相扩散,导致原有界面平衡被破坏,并形成界面模糊区。

(4) 弱界面层理论:在两相材料之间形成一过渡层或塑性层,起到松弛界面局部应力的作用。

(5) 静电作用理论:当复合材料中的两相材料对电子的亲合力相差较大时(如金属与聚合物),在界面区容易产生接触电势并形成双电层。静电吸引力是产生界面结合力的直接原因之一。

(6) 机械作用:当两相材料的表面比较粗糙时,两相材料互相啮合在一起。

上述界面形成机理的理论各适合于不同的情况,有的界面可能同时有几种机理起作用。

§ 7.2 界面的应力传递、剪滞模型

在多相材料中,各相材料之间的应力是通过界面传递的,应力传递的效率取决于界面的粘结状况。在本节中,假设界面是理想的完善界面,也就是界面没有任何缺陷,跨越界面的物理量都是连续的。

界面上的应力传递是用剪滞模型(shear lag model)来分析的。

剪滞法最早由 Cox 应用于复合材料的界面应力分析。剪滞模型的基本原理是纤维受到的轴向应力由其界面上的剪应力来平衡。剪滞法采用下列假设：纤维只承受轴向荷载，而基体和界面只承受剪切荷载。

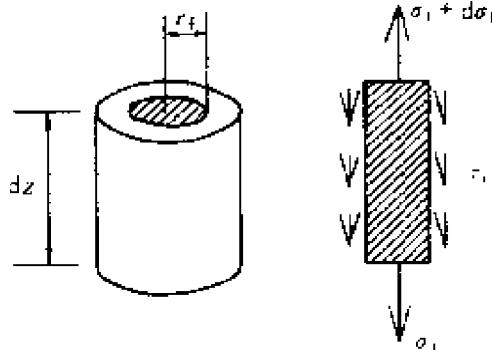


图 7.1 剪滞模型

对于受单向拉力的纤维复合材料，取出长为 dz 圆柱形微元体，如图 7.1 所示。纤维受到轴向力和界面剪应力的作用，考虑纤维的平衡可得到：

$$\pi r_f^2 \sigma_f + 2\pi r_f \tau_i dz = \pi r_f^2 (\sigma_f + d\sigma_f) \quad (7.1)$$

或

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = \frac{2\tau_i}{r_f} \quad (7.2)$$

其中 σ_f 是纤维的轴向应力， τ_i 为界面上的剪应力， r_f 为纤维半径。如果已知界面剪应力 τ_i 的变化规律，上式可进行积分求解。

实际上，界面剪应力的分布是未知的，为了求解式(7.2)，针对不同的情况，需要做出不同的界面剪应力分布假设，并设定边界条件。

7.2.1 界面常应力假设

对于短纤维复合材料，剪滞法进一步做如下假设^[3]：

(1) 纤维周围基体或界面层是理想刚塑性的，其剪应力为一常数，其值为基体的屈服应力 τ_0 。这样，对式(7.2)积分后得：

$$\sigma_f = \sigma_0 + 2\tau_0 z / r_f \quad (7.3)$$

式中 σ_0 是纤维末端的应力，

(2) 由于纤维的横断面积很小，且往往由于应力集中使纤维末端与基体之间的界面脱粘，故可忽略纤维末端的轴向应力 σ_0 。这样式(7.3)变为

$$\sigma_f = 2\tau_0 z / r_f \quad (7.4)$$

对于短纤维,最大纤维应力 $(\sigma_f)_{\max}$ 发生在纤维长度的中点 $\delta = l/2$ 处,其大小为

$$(\sigma_f)_{\max} = \tau_0 l / r_f \quad (7.5)$$

其中 l 为纤维的长度。但纤维应力 σ_f 不能超过一个极限值,即在同样的外力作用下连续纤维复合材料中的纤维所受的应力值,采用等应变假设,纤维的最大应力由下式确定:

$$(\sigma_f)_{\max} / E_f = \sigma_c / E_c \quad (7.6a)$$

或者

$$(\sigma_f)_{\max} = \sigma_c E_f / E_c \quad (7.6b)$$

其中 E_f, E_c 分别是纤维和复合材料的弹性模量, σ_c 是作用在复合材料上的应力。将能达到最大纤维应力的最小纤维长度定义为荷载传递长度 l_t 。由式(7.5),它可以按下列公式计算:

$$\frac{l_t}{d} = \frac{(\sigma_f)_{\max}}{2\tau_0} \quad (7.7a)$$

式中 $d = 2r_{f0}$ 。由于 $(\sigma_f)_{\max}$ 是 σ_c 的函数,所以荷载传递长度 l_t 也是 σ_c 的函数,而能够达到最大的可能的纤维应力(纤维的极限强度 σ_{fu})的最小长度称为临界长度 l_{cr} ,即:

$$l_{cr} = d \frac{\sigma_{fu}}{2\tau_0} \quad (7.7b)$$

临界长度是荷载传递长度的最大值,与外荷载无关。它是材料系统的一个重要性能,它将影响到复合材料的极限性能。有时把荷载传递长度和临界长度称为失效长度,因为在该长度上纤维承受的应力小于最大的纤维应力。不同纤维长度的纤维应力和界面剪应力的分布表示在图7.2上。从图中可以看出,在

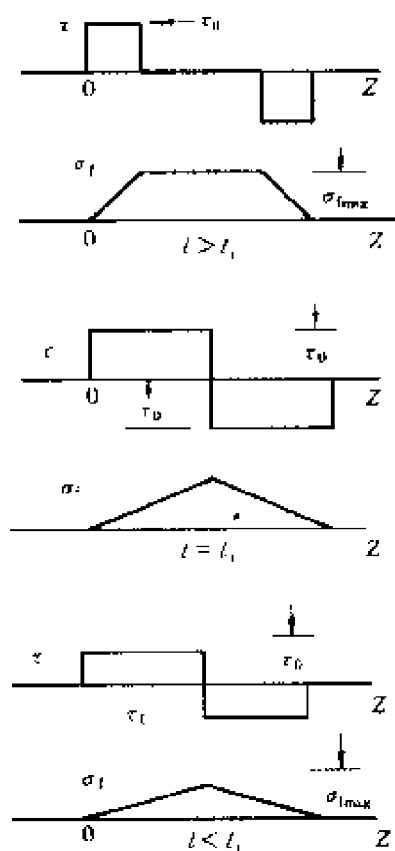


图 7.2 界面常剪应力和纤维应力分布

靠近纤维末端的一小段长度上,其应力小于最大纤维应力。当纤维长度比荷载传递长度 l_t 大得多时,其应力分布就接近于连续纤维复合材料的情况。

图 7.2 中所表示的应力分布是近似的,因为在剪滞模型中假设基体不承受轴向荷载和界面应力为常数。

7.2.2 界面剪切变形的线弹性假设

Cox^[4]假设界面剪切应力与界面上的剪切应变遵守弹性关系,为了求出界面剪切应力和应变,首先求出基体内的剪切应力和应变。设 $w(r, z)$ 为基体内任一点的轴向位移,由胡克定律,剪切应力可表示为:

$$\tau = \mu_m \frac{dw}{dr} \quad (7.8)$$

其中 μ_m 为基体的剪切模量。

其次,考虑任一基体环层的平衡,可得到

$$2\pi r_f \tau_i = 2\pi r \tau \quad (7.9)$$

将式(7.8)代入式(7.9)中,得到

$$\frac{dw}{dr} = \frac{r_f \tau_i}{\mu_m r} \quad (7.10)$$

对上式积分

$$\int_{w_f}^{w_R} dw = \frac{r_f \tau_i}{\mu_m} \int_{r_f}^R \frac{dr}{r} \quad (7.11a)$$

得到

$$\tau_i = \frac{\mu_m (w_R - w_f)}{r_f \ln(R/r_f)} \quad (7.11b)$$

其中 w_f 是 $r = r_f$ 处的轴向位移,即纤维的轴向位移, w_R 是基体在 $r = R$ 处的轴向位移。由胡克定律,存在如下关系

$$\sigma_f = E_f \frac{dw_f}{dz} \quad (7.12a)$$

$$\frac{dw_R}{dz} = \epsilon_0 \quad (7.12b)$$

其中 ϵ_0 是 $r = R$ 处的轴向应变, 设其为已知的复合材料平均应变。将式(7.11b)代入式(7.2)中, 得到

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = -\frac{2\mu_m(w_R - w_f)}{r_f^2 \ln(R/r_f)} \quad (7.13)$$

对上式取 z 的微分, 并注意式(7.12), 有

$$\frac{d^2\sigma_f}{dz^2} = -\frac{2\mu_m}{r_f^2 \ln(R/r_f)} (\epsilon_0 - \sigma_f/E_f) \quad (7.14a)$$

令 $n^2 = \frac{2\mu_m}{\ln(R/r_f)E_f}$, 式(7.14a)变为

$$\frac{d^2\sigma_f}{dz^2} = -\frac{n^2}{r_f^2} (\sigma_f - E_f\epsilon_0) \quad (7.14b)$$

它的解可表示为

$$\sigma_f = E_f\epsilon_0 + B\sinh(nz/r_f) + D\cosh(nz/r_f) \quad (7.15)$$

其中的常数利用下列边界条件确定, 当 $z = -l$ 和 $z = l$ 时, $\sigma_f = 0$, 由此可得到

$$B = 0, D = -E_f\epsilon_0/\cosh(nl/r_f)$$

这里取纤维的长度为 $2l$ 。这时, 纤维的正应力为

$$\sigma_f = E_f\epsilon_0[1 - \cosh(nz/r_f)/\cosh(nl/r_f)] \quad (7.16a)$$

将(7.16a)代入(7.1b), 得到界面的剪切应力为

$$\tau_i = \frac{1}{2} nE_f\epsilon_0 \sinh(nz/r_f)/\cosh(nl/r_f) \quad (7.16b)$$

由上式可知, 最大的界面剪切应力发生在纤维的两端, 为

$$\tau_{i\max} = \frac{1}{2} nE_f\epsilon_0 \tanh(nl/r_f) \quad (7.17a)$$

由式(7.16a), 最大的纤维拉伸应力发生在纤维的中点, 为

$$\sigma_{f\max} = E_f\epsilon_0[1 - \operatorname{sech}(nl/r_f)] \quad (7.17b)$$

图 7.3 给出了由式(7.16a)和(7.16b)确定的界面剪切应力和纤维正应力的分布示意图。

Chua 和 Piggott^[5]等改进了 Cox 的剪滞模型,并用于单丝拔出和单丝碎断实验的数据标定。认为界面有弹性粘结区和界面滑移区两部分。在界面粘结区用 Cox 的剪滞模型计算传递应力,在脱粘区是用摩擦力表示界面剪切应力。动摩擦力一般小于界面的剪切强度,如图 7.4 所示。

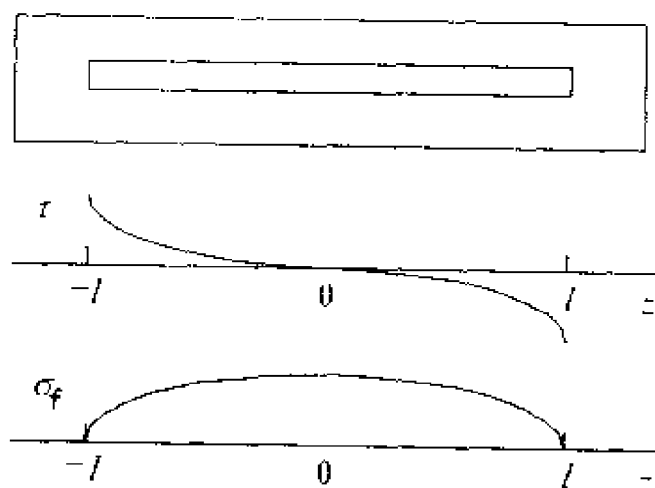


图 7.3 Cox 界面剪应力与纤维应力分布

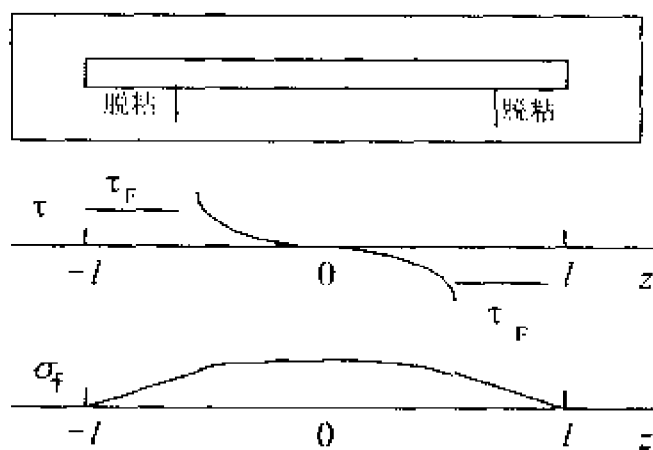


图 7.4 界面脱粘的剪应力和纤维应力分布

Tripathi 和 Jones^[6]考虑了更详细的界面应力分布,将界面分为弹性粘结区、塑性屈服区和脱粘滑移区。在界面的弹性粘结区采用剪滞模型计算界面应力;在塑性屈服区,界面剪切应力等于屈服应力;在脱粘滑移区,界面剪切应力为滑动摩擦力,如图 7.5 所

示。

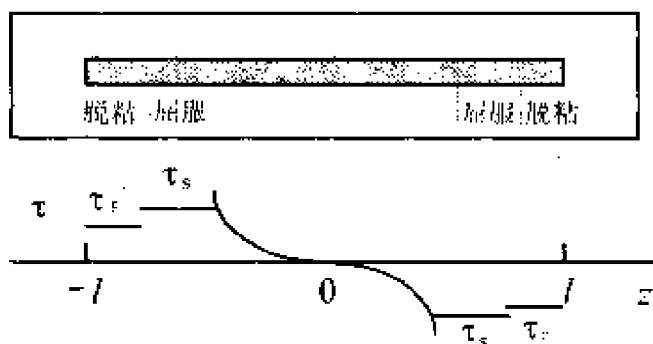


图 7.5 界面脱粘、屈服的剪应力分布

剪滞法虽然是一种近似方法,精度较差,但由于它的简单与方便,被广泛用于界面应力传递的分析中,精确的方法是采用有限元法对局部应力场进行详细的计算。

§ 7.3 界面层的应力传递模型

在上一节介绍的剪滞法中,界面是一个没有厚度的几何面,界面剪应力沿纤维的母线作用于纤维表面。

Tsai 等^[7]发展了一种包含界面层的剪滞模型,取一个长度为 dz 的微元体,微元体由纤维、界面层、基体和无限大复合材料组成,如图 7.6a 所示。设纤维的半径为 r_f ,界面层的厚度为 t_i ,基体的厚度为 t_m 。由微元体的平衡(见图 7.6b, c)可得:

$$\frac{d\sigma_f}{dz} + 2\pi r_i \tau_i = 0 \quad (7.18a)$$

$$\frac{d\sigma_i}{dz} + 2\pi r_m \tau_m = 0 \quad (7.18b)$$

由此可得到关系:

$$\tau_i r_i = \tau_m r_m = \tau r \quad (7.19)$$

其中 σ_f 是纤维上的力, r_f 和 r_i 分别为纤维与界面层的(外)半径, τ_i 和 τ_m 分别是界面层($r_f \leq r \leq r_i$)和基体内($r_i \leq r \leq r_m$)的剪应力。如果考虑基体环层的平衡,也可得到式(7.19)。微元体的几

何变形条件模拟纤维压出实验的边界条件,即固定边界施加在无限大复合材料上。在界面层内外侧有位移边界条件:

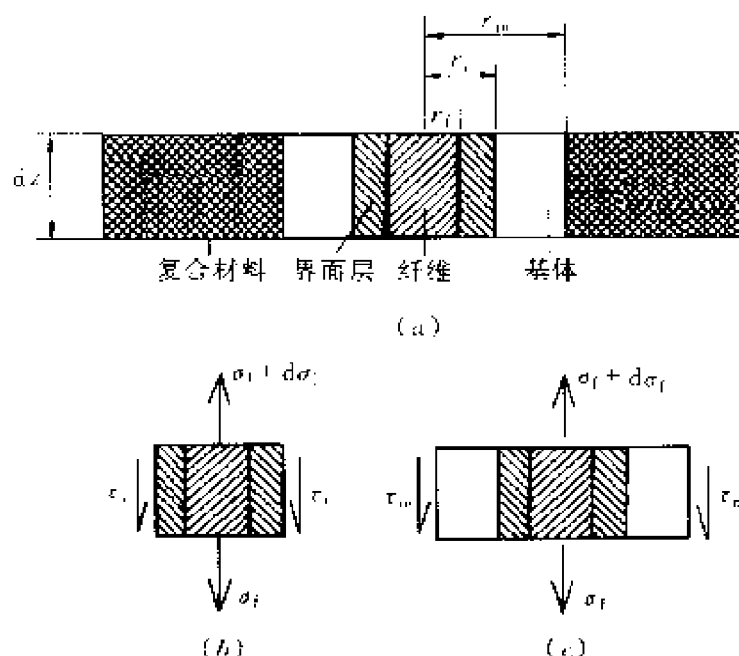


图 7.6a 四相材料微元体

图 7.6b 界面层的应力分布

图 7.6c 基体的应力分布

$$r = r_f: \quad w = w_1 \quad (7.20a)$$

$$r = r_i: \quad w = w_2 \quad (7.20b)$$

$$r = r_m: \quad w = 0 \quad (7.20c)$$

其中 w_1, w_2 为界面层内外侧的轴向位移。由弹性理论,在界面层内

$$\tau = \mu_i \frac{dw}{dr} \quad r_f \leq r \leq r_i \quad (7.21)$$

其中 τ 是界面层内的剪应力, μ_i 是界面层的剪切模量。由式 (7.19), 可得:

$$\tau = \frac{\tau_i r_i}{r} \quad (7.22)$$

将(7.22)代入到(7.21)中,并积分得:

$$w = \frac{\tau_i r_i}{\mu_i} \ln r + C \quad (7.23)$$

将边界条件(7.20)代入到式(7.23)中,确定积分常数后,得到

$$\tau_i = \frac{(w_2 - w_1)\mu_i}{r_i \ln(r_i/r_f)} \quad (7.24a)$$

和

$$\tau_m = -\frac{w_2\mu_m}{r_m \ln(r_m/r_i)} \quad (7.24b)$$

考虑纤维的平衡得:

$$F = \pi r_f^2 \sigma_f = E_f \pi r_f^2 \frac{dw_1}{dz} \quad (7.25)$$

将(7.24)和(7.25)代入到(7.18)中,得到如下微分方程:

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} - \frac{2\mu_i}{E_f r_f^2 \ln(r_i/r_f)} (w_1 - w_2) = 0 \quad (7.26a)$$

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} - \frac{2\mu_m}{E_f r_f^2 \ln(r_m/r_i)} w_2 = 0 \quad (7.26b)$$

消去 w_2 以后,变为

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} - a^2 w_1 = 0 \quad (7.27)$$

其中

$$a = \frac{2\mu_i / [E_f r_f^2 \ln(r_i/r_f)]}{1 + [\mu_i \ln(r_m/r_i)] / [\mu_m \ln(r_i/r_f)]}$$

方程(7.27)的解为:

$$w_1 = C_1 \cosh(az) + C_2 \sinh(az) \quad (7.28)$$

利用边界条件:

$$\text{当 } z=0 \text{ 时, } F = -P_0 = -\pi r_f^2 \bar{\sigma} = E_f \pi r_f^2 \frac{dw_1}{dz} \quad (7.29a)$$

$$\text{当 } z=l \text{ 时, } w_1 = 0 \quad (7.29b)$$

$\bar{\sigma}$ 为作用在纤维端点上的平均应力。由于这里要模拟单丝压出实验,所以纤维的端点为压力。确定(7.28)中的积分常数,得到:

$$w_1 = -\frac{\bar{\sigma}}{E_f a} [-\tanh(al) \cosh(az) + \sinh(az)] \quad (7.30a)$$

将式(7.30a)代入(7.26b)后,得到:

$$\omega_2 = \frac{r_f^2 E_f \alpha^2 \ln(r_m/r_i)}{2\mu_m} \omega_1 \quad (7.30b)$$

将方程(7.30)代入(7.24a),得到 $r = r_i$ 处(基体与界面层)的界面剪应力:

$$\tau_i = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu_m}{E_f} \right)^{1/2} \frac{r_f}{r_i} \frac{-\tanh(\alpha l) \cosh(\alpha z) + \sinh(\alpha z)}{[(\mu_m/\mu_i) \ln(r_i/r_f) + \ln(r_m/r_i)]^{1/2}} \quad (7.31)$$

由方程(7.22)得到 $r = r_f$ 处(纤维与界面层)的界面剪应力

$$\bar{\tau}_i = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu_m}{E_f} \right)^{1/2} \frac{-\tanh(\alpha l) \cosh(\alpha z) + \sinh(\alpha z)}{[(\mu_m/\mu_i) \ln(r_i/r_f) + \ln(r_m/r_i)]^{1/2}} \quad (7.32)$$

最大界面剪应力发生在 $z = 0$ 处:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= (\bar{\tau}_i)_{z=0} \\ &= -\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu_m}{E_f} \right)^{1/2} \frac{\tanh(\alpha l)}{[(\mu_m/\mu_i) \ln(r_i/r_f) + \ln(r_m/r_i)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (7.33)$$

注意在式(7.33)中含有两个未知的常数 μ_i 和 r_i ,它们可由实验测定。当式(7.33)中的 $\tau_{\max}$ 达到界面层剪切强度 τ_0 时,界面层开始失效,此时对应的外应力 $\bar{\sigma}_0$ 称为脱粘应力,即

$$\bar{\sigma}_0 = -\sqrt{2} \tau_0 \left(\frac{E_f}{\mu_m} \right)^{1/2} \frac{[(\mu_m/\mu_i) \ln(r_i/r_f) + \ln(r_m/r_i)]^{1/2}}{\tanh(\alpha l)} \quad (7.34)$$

一旦界面层的性能确定后,脱粘应力就可计算出来。对于S—玻璃/环氧树脂复合材料,式(7.34)可近似表示为:

$$\bar{\sigma}_0 = -\sqrt{2} \tau_0 \left(\frac{E_f}{\mu_m} \right)^{1/2} \left[1.8446 + \ln \left(1 + \frac{2t_m}{d_f} \right) \right]^{1/2} \quad (7.35a)$$

对石墨/环氧树脂复合材料,式(7.34)为:

$$\bar{\sigma}_0 = -\sqrt{2} \tau_0 \left(\frac{E_f}{\mu_m} \right)^{1/2} \left[2.0672 + \ln \left(1 + \frac{2t_m}{d_f} \right) \right]^{1/2} \quad (7.35b)$$

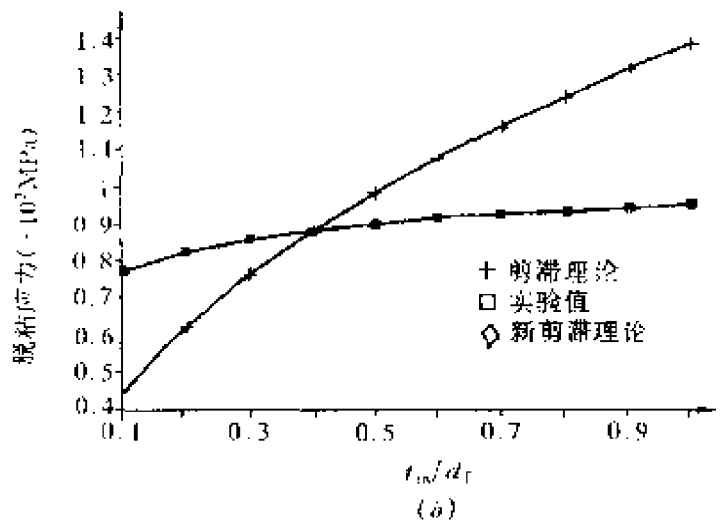
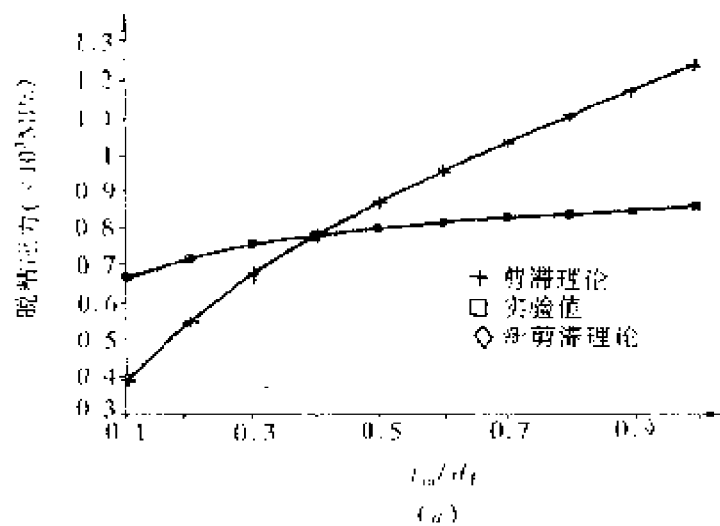


图 7.7a S—玻璃/环氧树脂的脱粘应力

图 7.7b 石墨/环氧树脂的脱粘应力

将方程(7.35a)和(7.35b)分别表示于图 7.7a 和图 7.7b 中, 可以发现与实验数据符合良好, 图中同时给出了 Cox 的无厚度界面的剪滞分析结果。

用线弹性有限元法也可分析界面层上的剪应力分布, 图 7.8 给出了剪应力分布的数值结果。可以看出, 没有界面层的界面剪应力比有界面层时高许多。

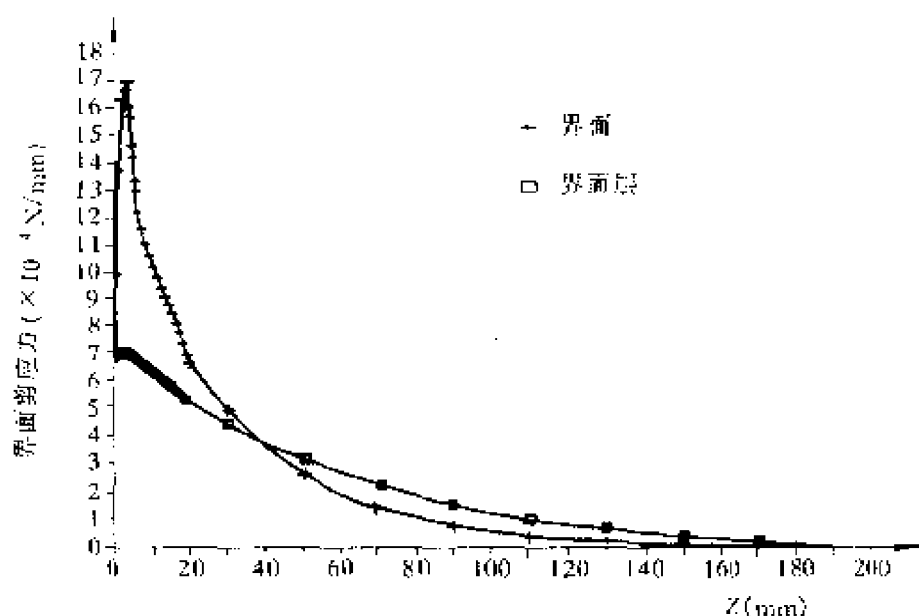


图 7.8 界面与界面层的剪应力分布

§ 7.4 界面性能的特征与测试方法

从上一节中剪滞模型的分析过程中可以看出,当把界面看作一个没有厚度的几何界面时,须先知道界面的剪切强度;当把界面看作具有一定厚度的界面层时,实际上将界面层看作了一种新材料,因此必须了解它的几何和力学性能。在复合材料中,需要表征的界面参数主要有三类:其一为界面的几何参数和弹性特性,例如界面层的厚度、分布、弹性模量等。由于界面层尺寸很小,这些参数很难定量确定;其二为界面的剪切强度和界面层的屈服强度等,这些量可以利用细观实验确定;其三为界面或界面层的断裂能及摩擦系数等,这些参数是进行界面破坏分析所必须的。本节介绍如下几种有关界面剪切强度的细观实验方法,即单丝拔出实验、单丝压出实验、单丝碎断实验等。但这些实验都不能直接测量界面的剪切强度,而是根据作用在单丝上的外力,用理论模型和公式计算出它。关于界面断裂能的表征方法在第 9 章介绍。

7.4.1 单丝拔出实验

为连续纤维复合材料所设计的单丝拔出实验(single fiber pull

out test)广泛应用于研究树脂基复合材料的界面剪切强度。它通过施加于纤维上的拉力,将埋入基体中的纤维拔出,图7.9表示了单

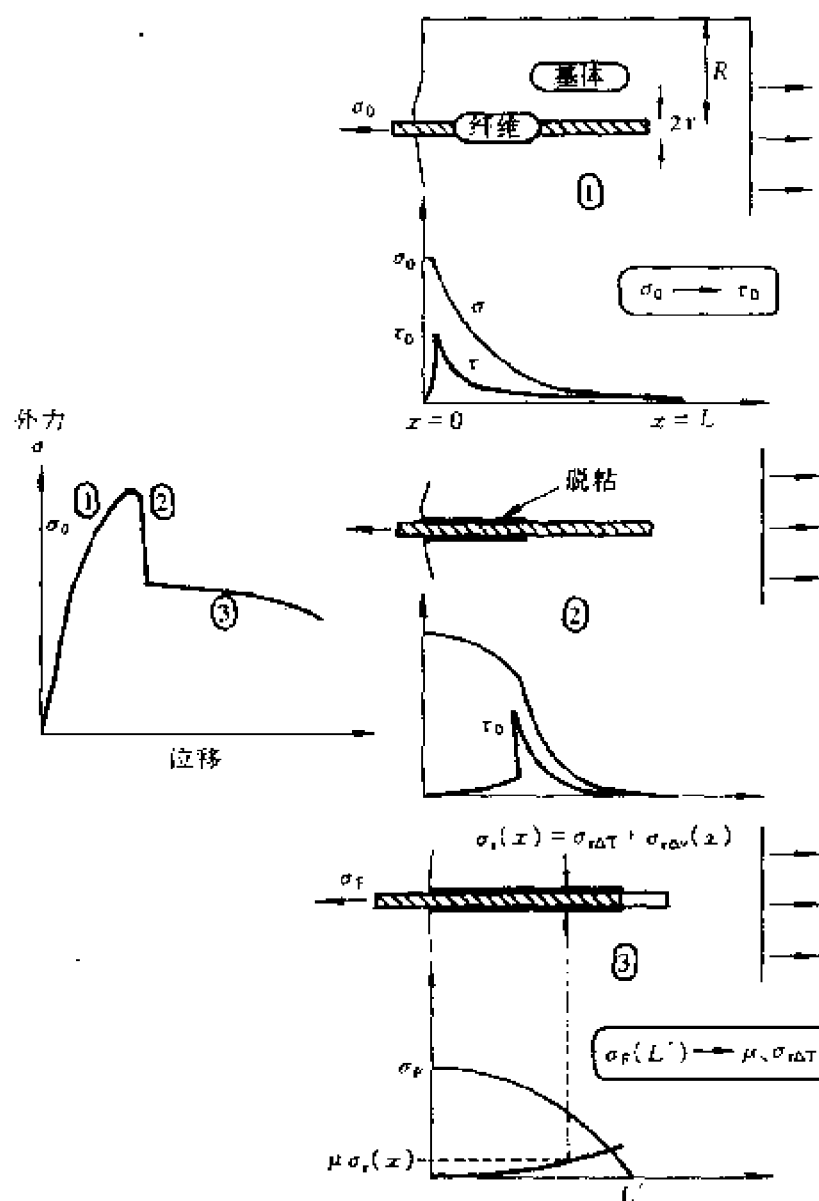


图 7.9 单丝拔出过程中的应力分布

丝拔出过程的应力变化状态。拔出过程由三部分组成,即界面脱粘之前的弹性变形、脱粘部分的扩展及其摩擦滑移。这个实验结果基本符合剪滞模型中关于纤维不承受剪切变形,纤维端点不传递正应力的假设。因此,一般利用剪滞模型和有限元法从实验数据推算界

面剪切强度。

当施加于纤维的拉力 σ 达到脱粘应力 σ_0 (即界面剪应力 τ 达到极限应力 τ_0) 时, 界面开始脱粘。这时, 可以利用剪滞模型和有限元法确定界面的剪切强度。脱粘后, 界面开始滑动, 界面滑动的距离与界面上的摩擦力有关。界面摩擦力可以假设为常数, 也可假设为库仑摩擦力。后一种情况需要确定界面上的法向压力, 垂直于界面的压力由两部分组成, 即热收缩和泊松比效应, 由此可以测定脱粘后界面的摩擦系数。

单丝拔出实验的结果与纤维埋入基体的长度有密切的关系, 在试件的制备中往往难以控制纤维的埋入长度。后来发展的微脱粘实验克服了这一困难, 它是在纤维上粘结一滴基体, 然后将纤维从微滴中拔出。其实验原理与埋入基体的单丝拔出原理相同。

7.4.2 单丝压出实验

单丝压出实验 (single fiber push out test) 已经广泛用于金属基和陶瓷基复合材料的界面性能测试中, 与单丝拔出实验相比, 它可适用于更广泛的纤维长径比的范围, 特别适用于长径比较小的纤维。单丝压出实验的原理和数据标定方法和单丝拔出实验基本相同, 其实验过程中的应力变化如图 7.10 所示。

7.4.3 单丝碎断实验

单丝碎断实验 (single fiber fragmentation test) 与单丝拔出实验的目的相同, 都是用于测量界面的剪切强度, 当作用于纤维的拉力增加时, 纤维内的拉伸应变将最终超过纤维的断裂应变, 纤维被拉断。当外载继续增加时, 纤维将被拉断到更短的长度, 直到碎断长度变得短得不能再拉断。实验所测得的数据只是荷载位移关系和脱粘应力。界面的剪切强度还需要根据剪滞模型或有限元法的计算推算出来。在计算界面剪切强度时, 如果采用 Kelly 和 Tyson^[3] 界面剪应力在一个碎断长度上为常数的假设, 则得到平均的界面剪应力, 其界面剪应力的变化如图 7.11 所示。目前, 一般采用 Chua 和 Piggott^[5] 或者 Tripathi 和 Jones^[6] 的分析模型进行数据标定。

现在,许多研究人员正在致力于利用激光 Raman 光谱^[8]和有限元法研究界面剪应力的分布。有关界面强度的细观力学实验的评述见文献[6,9~11]。

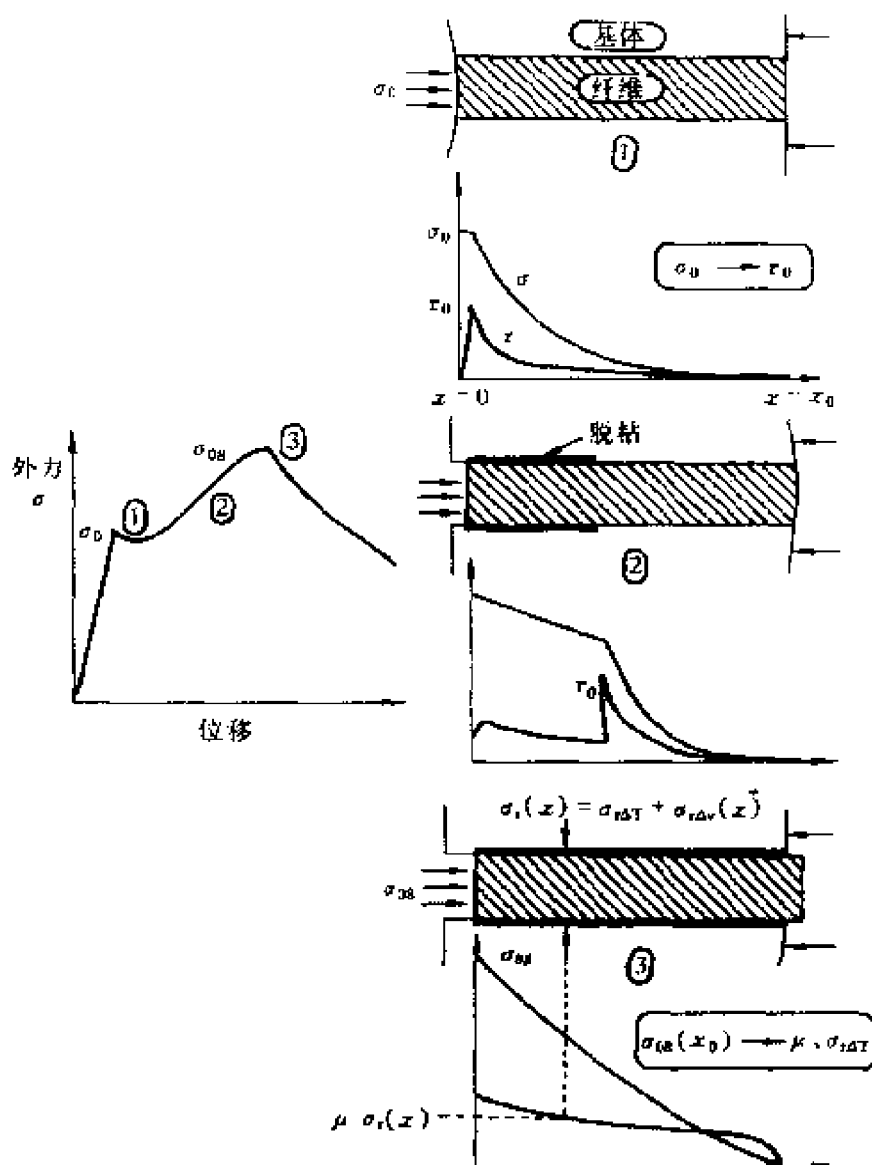


图 7.10 单丝压出过程中的应力分布

界面剪切强度是表征界面粘结强度的一个重要参数。另外,可以用能量相关的参数表示界面的粘结强度,例如,界面断裂能。有些工作已经发展了测量界面断裂能的试验。界面断裂能更接近于断裂力学的概念和方法。

§ 7.5 界面(层)的力学模型

由于界面的力学性能很难准确测量,特别是界面上的剪应力分布非常复杂,用一个剪切强度表征界面的性能是不全面的。在理论分析中,一般对界面(层)进行简化处理。如果假设界面粘接是理想的,则意味着在界面上位移和应力都是连续的;如果界面破坏后互相分离,则分离面变为自由表面。这种假设是一种非常简单的简化方法,与工程实际情况相差较远。如果考虑界面(层)的破坏过程,必须在分析中引入界面(层)的性能。下面介绍界面的弹簧模型、弹塑性模型、粘弹型性模型和界面层过渡模型。

7.5.1 弹簧模型

该模型假设界面没有几何厚度,但有一定的弹性刚度和强度,就象存在两个弹簧一样,它们分别表示界面的切向刚度 K_t 和法向刚度 K_n 。如图 7.12 所示。只要知道界面的相对位移就可以计算界面的应力。当界面正应力达到极限强度时,界面开始分离;当界面剪应力达到切向极限强度时,界面开始滑移。

当界面具有一定的厚度时^[12],也可将界面层折算为弹性刚度,简化为弹簧模型处理。

7.5.2 弹性界面层模型

假设界面层具有一定的厚度 t 和弹性模量 E_i 及强度 τ_0 ,并假设界面层的厚度与力学性质是均匀的。这实际上在纤维与基体之间增加了一层新材料,这时由原来的纤维/基体界面变成了纤维/界面层和界面层/基体两个界面,由于界面层的厚度和力学特性很难准确地确定,所以一般假设界面层的参数是变化的,以考虑界面层性能变化的影响。

例如,文献[13]用轴对称有限元法计算了含有界面层 GFRP 的界面应力分布。采用的组分材料的数据如下:

基体: $E_m = 0.4 \times 10^6 \text{ psi}$, $\nu_m = 0.35$

纤维: $E_f = 11.8 \times 10^6 \text{ psi}$, $\nu_f = 0.197$

纤维体分比为 42.2%, 纤维长细比为 10.375

界面层的弹性模量是由 $8 \times 10^6 \text{ psi}$ 变化到 100 psi (7 kg/cm^2), 界面层的泊松比为 0.2, 保持不变, 界面层所占的体分比为 7.76%。使界面层的性能在这样大的范围内变化, 其目的是为了包含所有可能的界面状态。

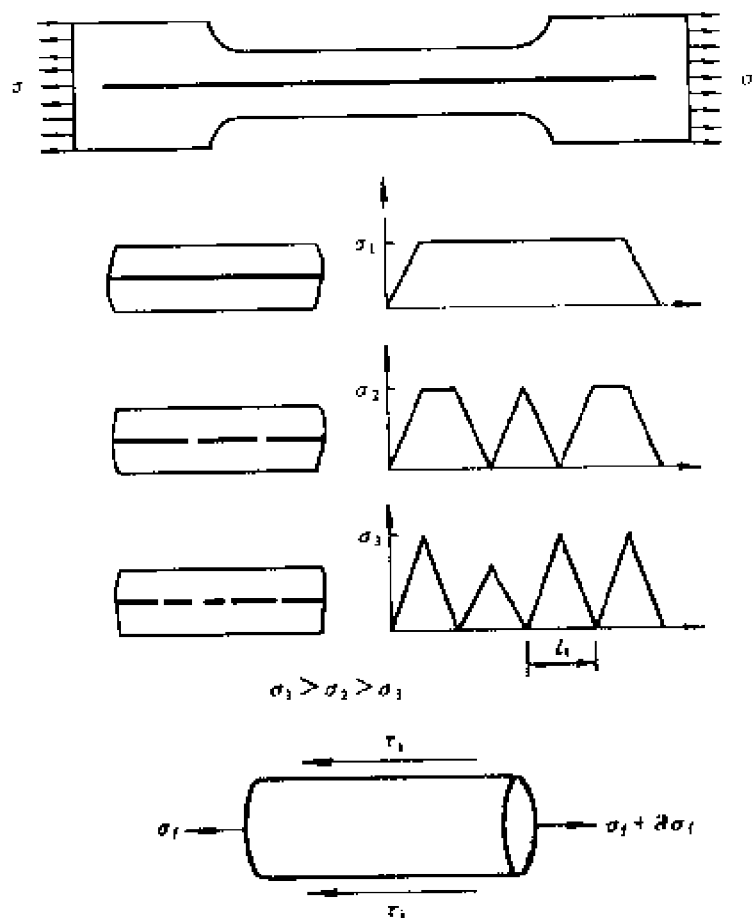


图 7.11 单丝碎断过程中的应力变化

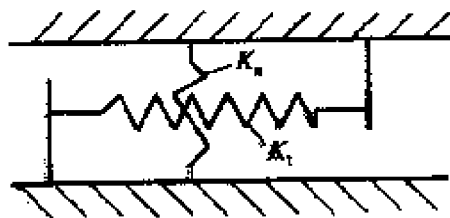


图 7.12 界面的弹簧模型

7.5.3 弹塑性界面层模型

假设界面层是弹塑性材料,最简单的弹塑性界面层模型当然是理想弹塑性模型,当界面剪应力达到屈服应力后,界面剪应力保持常数,界面的塑性流动可近似地用来模拟界面的常摩擦力滑动。

有些研究工作,例如文献[14,15],利用界面单元技术模拟界面或界面层的破坏过程。由于界面是具有极薄厚度的单元,所以界面元既可以模拟一个界面层,也可以模拟一个无厚度界面。如果假设界面的剪切屈服为理想弹塑性,如图 7.13a 所示,这样,用屈服应力模拟界面的常摩擦力。如果假设界面为弹性-损伤模型,如图 7.13b 所示,当界面应力达到剪切强度时,就赋予界面层的剪切模量为零,模拟界面的无摩擦滑移。

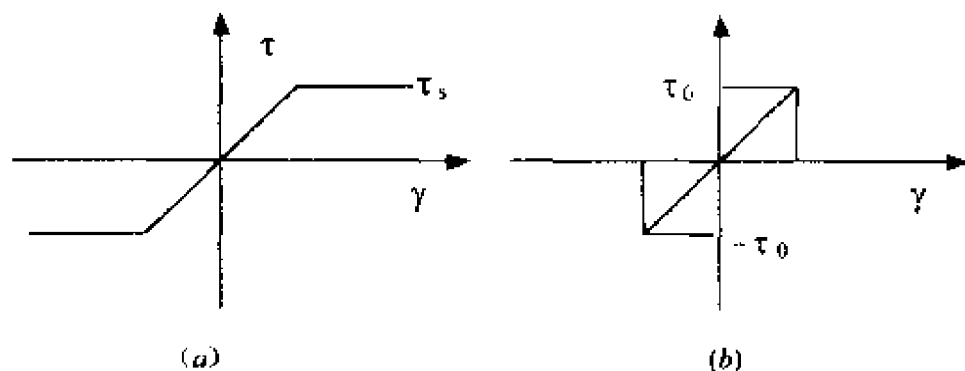


图 7.13

界面层的剪切屈服模型

界面层的弹性-损伤模型

7.5.4 粘弹性界面层模型

粘弹性界面层来自于对纤维表面涂层处理技术的应用,认为涂层界面具有粘弹性效应。粘弹性界面层的优点是可以部分地松弛由工艺过程带来的界面残余应力。Hashin^[16]利用 Laplace 变换讨论了粘弹性界面对材料宏观性能的影响, Gosz, Moran 和 Achenbach^[17]利用界面单元模拟了复合材料的横向性能和局部应力松弛。原则上,只要知道了弹性系统的响应,则利用相关原理就可以求出粘弹性系统的响应。

7.5.5 界面层过渡模型

杨卫教授和 Shih^[18]提出了一种界面层过渡模型,假设界面层的特性是由一种材料逐渐过渡到另一种材料中,其弹性模量的变化公式为

$$E(y) = f(y)E^- + [1 - f(y)]E^+ \quad (7.30)$$

其中 $f(y)$ 满足在界面层的上表面 $f(h) = 0$, 在下表面上 $f(-h) = 1$, 如图 7.13 所示。

假设 $f(y)$ 具有如下形式

$$f(y) = [1 - \operatorname{sgn}(y) |y|^m]^{1/2} \quad (7.31)$$

其中 sgn 表示符号函数。当 $m = 1$ 时, 界面层性能呈线性变化。实际上, 这一模型将弹性性能变化较大的界面层用许多性能接近的界面层代替。这一模型的优点是在界面裂纹尖端不产生应力振荡和裂纹面的互相嵌入。

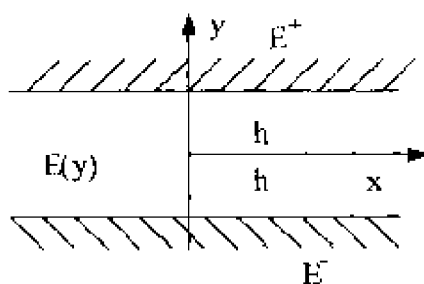


图 7.14 界面层过渡模型

参考文献

1. 张国定. 金属基复合材料界面问题. 见张志民主编: 第九届全国复合材料学术会议文集. 北京: 世界图书出版公司, 1996
2. 伍章健, 余寿文. 界面和界面力学的几个问题. 复合材料及其结构的力学进展(第四册). 武汉: 武汉工业大学出版社, 1994
3. Kelly A, Tyson W R. Tensile properties of fiber reinforced metals. J Mech Phys Solids, 1965, 13: 329~350
4. Cox H L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. Brit J Applied Physics, 1952, 3: 73~79
5. Chua P S, Piggott M R. The glass fiber polymer interface 1: Theoretical con-

- siderations for single fiber pullout tests. *Composites Sci Tech*, 1985, 22: 33 ~ 42
6. Tripathi D, Jones F R. Measurement of the load - bearing capability of the fiber / matrix interface by single fiber fragmentation. *Composites Science and Technology*, 1997, 57(8): 925 ~ 935
 7. Tsai H C, Arocho A M, Gaus L W. Prediction of fiber matrix interphase properties and their influence on interface stress, displacement and fracture toughness of composite materials. *Mater Sci Engi*, 1990, A126: 295 ~ 304
 8. Galliotis C. A study of mechanism of stress transfer in continuous and discontinuous model composite by laser Raman spectroscopy. *Comp Sci Tech*, 1993, 48: 15 ~ 28
 9. Verpoest I, Desaegeer M, Keunings R. Critical review of direct micromechanical test methods for interfacial strength measurements in composites. In: *Controlled Interphases in composite materials*, ed. H Ishida, Elsevier, New York, 1990. 653 ~ 666
 10. Clyne T W, Watson M C. Interfacial Mechanics in Fiber Reinforced Metals. *Composites Science and Technology*, 1991, 42: 25 ~ 55
 11. Hsueh C H. Evaluation of the interfacial shear strength, residual clamping stress and coefficient of friction for fiber reinforced ceramic composites. *Acta Metall Mater*, 1990, 38: 403 ~ 409
 12. Achenbach J D, Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behaviour and failure of fiber reinforced composites. *J Mech Phys Solids*, 1989, 37: 381 ~ 393
 13. Broutman L J, Agarwal B D. A theoretical study of the effect of interfacial layer on the properties of composites. *Polymer Engi Sci*, 1974, 14(8): 581 ~ 588
 14. 崔维成. 复合材料结构破坏的计算机模拟. *复合材料学报*, 1996, 13: 102
 15. 杨庆生. 复合材料的界面破坏力学. 第八届全国复合材料学术会议文集, 南京, 1994
 16. Hashin Z. Composite materials with viscoelastic interphase: creep and relaxation. *Mech of Maters*, 1991, 11: 135 ~ 148
 17. Gosz M, Moran B, Achenbach J D. Effect of viscoelastic interface on the transverse behaviour of fiber reinforced composites. *I J Solids Structures*,

1991, 27:1757~1771

18. Yang W, Shih C F. Fracture along an interlayer. Int J Solids Structs, 1994, 31: 985~1002

第 8 章 复合材料细观损伤力学

本章在分析复合材料细观损伤机理的基础上,分别讨论若干细观损伤模式的演化及其对复合材料宏观性能的影响,包括纤维断裂、基体开裂和界面脱粘滑移等。在复合材料的初始破坏阶段,这些损伤模式是复合材料损伤的主要表现形式。

§ 8.1 复合材料的细观损伤机理

纤维复合材料从损伤起始到最终破坏要经历一个较长的损伤演化、发展过程。复合材料的损伤可分为准静态损伤、疲劳损伤和冲击损伤以及化学腐蚀、环境老化损伤等。本节主要针对单向纤维复合材料的准静态损伤,讨论在损伤初始阶段的损伤机理。

复合材料的初始缺陷或损伤是不可避免的,这是由于组分材料本身的性能就具有一定的统计分散性,再加上工艺过程的不完善性和不可避免的损伤等因素造成的。但哪个缺陷首先开始发展、以怎样的方式发展却是随机的。因此,破坏过程的随机性是复合材料破坏的主要特征之一^[1,2]。

复合材料的破坏是其内部损伤累积的结果,形式多种多样。因此研究复合材料的破坏过程应从损伤的萌生直到最终破坏,全程跟踪复合材料的损伤演化过程。单向纤维复合材料与正交铺设层合复合材料享有相似的物理机理,但单向复合材料的破坏模式更多、更复杂,在细观的观测上更加困难。

在纤维、基体和界面中都有可能存在初始缺陷或初始损伤。在外力作用下,这些初始缺陷将发展成为可见的细观损伤模式,即纤维断裂、基体开裂和界面脱粘滑移。随着外荷载的增加,这些损伤模式逐渐发展扩大,甚至互相影响和转化,实际的破坏情况非常复杂,其过程受到各组分材料的相对性能和体积含量等因素的影响。

纤维断裂对复合材料宏观强度有显著的影响。当一根纤维被拉断后,在纤维的断头处的应力集中,将有可能引起基体材料的龟裂或屈服,也有可能引起邻近纤维的断裂或界面脱粘。一般将纤维的拉断过程看做一系列的随机事件。

在单向拉伸作用下,对具有脆性或粘结强度较高界面的复合

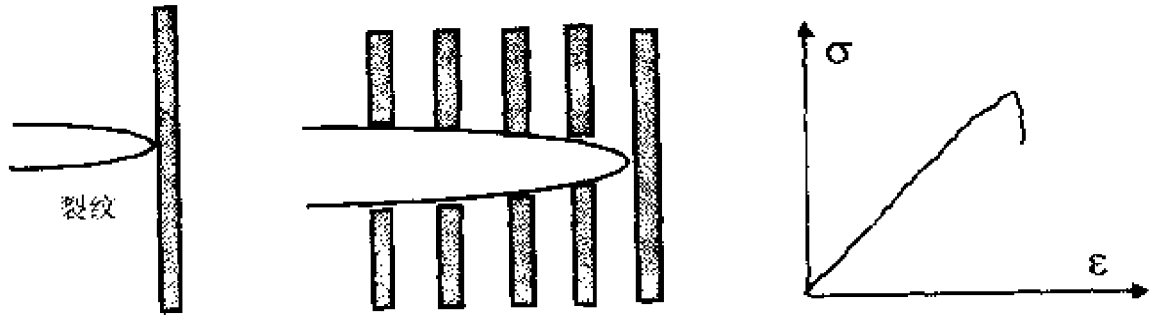


图 8.1a 脆性界面复合材料的破坏模式

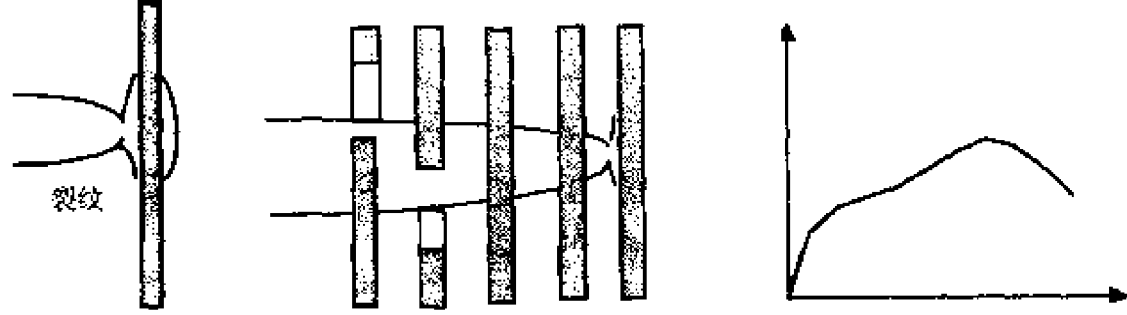


图 8.1b 延性界面复合材料的破坏模式

材料,基体中的初始裂纹将穿过基体和纤维,直到某个截面失去承载能力而导致最终破坏,破坏后的断口比较平整。这种复合材料表现出明显的脆性特征,如图 8.1a 所示。对具有延性或粘结强度适中界面的复合材料,无论初始裂纹来自于基体或纤维,都会造成界面的部分脱粘,并逐渐形成纤维对裂纹的部分桥联。随着外载的加大,纤维将被拉断,直到某一临界值后使材料最终破坏。从断口上可看到纤维的拔出现象,这种复合材料表现出较好的延性,

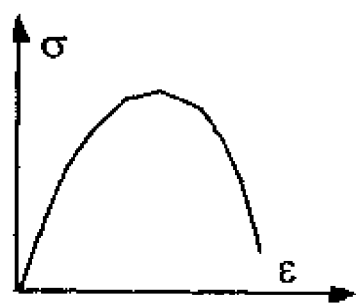


图 8.1c 极弱界面复合材料的荷载变形曲线

具有较好的断裂韧性,如图 8.1b 所示。当界面的粘结非常弱时,基体不能在纤维之间传递应力,这样的复合材料与组成它的纤维束没有什么区别,其荷载变形曲线如图 8.1c 所示。

§ 8.2 以纤维拉断为主要破坏模式的细观强度理论

正如前节所述,复合材料的破坏是一个复杂的损伤累积过程,其破坏模式也多种多样。但无论复合材料的破坏过程多么复杂,复合材料的最终破坏是由纤维控制的。纤维是否破坏,哪根纤维首先破坏,有很大的随机性。因此,应首先确定纤维的强度分布。

描述纤维强度的分布函数主要有正态分布和 Weibull 分布,常用的两参数 Weibull 分布表示为

$$F(\sigma) = 1 - \exp(-a\delta\sigma^\beta) \quad (8.1a)$$

这里, $F(\sigma)$ 是长度为 δ 的纤维应力不超过 σ 时的破坏概率, a 为尺度函数, β 为形状函数。

由式(8.1a)可知,当纤维的破坏概率接近于 1 时,可以求出纤维的平均强度,它与纤维的长度无关。但实验表明,纤维的强度受到尺寸效应(长度,样本尺寸)的严重影响。由于这一模型的简单,被大多数研究者所接受。

纤维束的强度分布,是在单根纤维的强度分布的基础上建立的。纤维束强度的概率分布函数 $g(\sigma)$ 近似服从正态分布

$$g(\sigma) = \frac{1}{\Psi \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\Psi}\right)^2\right] \quad (8.1b)$$

其中 Ψ 是标准差, $\bar{\sigma}$ 是纤维束强度的均值,可由下式确定

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 [1 - F(\sigma_0)] \quad (8.1c)$$

这里的 $F(\sigma)$ 是单纤维的强度分布函数, σ_0 是使 $\sigma[1 - F(\sigma)]$ 取最大值时的解。若取 $F(\sigma)$ 为两参数分布函数,当纤维应力取最大值时,可得纤维束的强度均值

$$\bar{\sigma} = (l\alpha\beta)^{-1/\beta} \exp\left(-\frac{1}{\beta}\right) \quad (8.1d)$$

式中, l 为纤维束的长度。

研究复合材料的最终强度问题的细观力学模型一般不考虑基体对复合材料强度的贡献,但基体材料承担剪切变形,并在纤维之间传递应力。损伤首先发生在强度最弱、受力最大的纤维中;单根纤维拉断后,造成的应力集中和应力重分布可用剪滞模型分析;然后,以某种方式,让其他未断纤维承担多出的荷载。只有在某一截面附近断裂纤维的数目达到某一临界值(称为断裂核),复合材料将发生最终破坏。

为了确定最终强度,可将复合材料的破坏看成是由一系列随机事件组成的随机过程。可使用概率论方法求解,或进行随机仿真。比较著名的方法有链式模型,随机临界核模型^[3],Monte Carlo 随机模拟方法^[6]等。文献[3]对复合材料的细观统计强度理论进行了详细的评述。

8.2.1 链式模型

单向纤维复合材料在纵向拉伸外力的作用下,其强度主要由纤维的拉断强度控制。链式模型将具有 N 条纤维束组成的复合材料分为 M 节串联的链环,每节的长度 δ 都相等,每一节也称为一个 δ 层。如果复合材料的长度为 L ,则链环的节数为 $M = \frac{L}{\delta}$ 。

按照最弱环理论,只要链环中有一节破坏,则意味着复合材料破坏。这样复合材料的破坏概率计算转化为至少有一节链环破坏的概率。

每节的长度 δ 不能任意取值,它应取已断纤维的卸载区长度,在链式模型中将这一长度 δ 称为无效长度。在无效长度 δ 内,已断纤维的应力发生衰减,而邻近的纤维因受应力集中的影响,承受较大的应力。而在无效长度之外,纤维应力等于远场应力。无效长度可利用剪滞模型计算。

在每一 δ 层内,按纤维束模型,可以得到该层的强度分布为

$$G(\sigma) = \int_0^{\sigma} g(\sigma) d\sigma \quad (8.2a)$$

此即每节链环在应力 σ 下的破坏概率。而复合材料(链环中至少有一环破坏)的强度分布为:

$$H(\sigma) = 1 - [1 - G(\sigma)]^M \quad (8.2b)$$

链式模型的主要特点是假设无效长度在整个破坏过程中保持不变。以链式模型为基础,经过各种修正和改进的统计强度理论很多^[3,4,5]。

8.2.2 随机扩大临界核模型

这一理论^[3]放弃了无效长度在整个破坏过程中保持不变的思想,而是让它随着破坏过程的进行而相应变化。

当某纤维在最弱处断裂后,引起局部应力集中和应力重分布,它可使断口附近的纤维发生相继断裂。断口附近的纤维在何处断裂是随机的。如果附近纤维在无效长度外发生断裂,则认为它的断裂与原断口无关。只有在无效长度之内断裂才能形成连贯的裂纹,使原始断口扩展。当两纤维发生破坏后,连贯断口附近的纤维所受到的应力集中将有所增大,无效长度也有所增大,纤维可在更大的无效长度范围内发生相继破坏。如此下去,当相继断裂的纤维达到某一临界值(称为随机临界核)时,复合材料将发生失稳破坏。

使用这一模型需要正确地确定在破坏过程中的裂纹应力集中系数和无效长度。

8.2.3 Monte Carlo 随机模拟方法

Monte Carlo 随机模拟方法的基本思想是首先按一定的概率分布用 Monte Carlo 方法随机确定纤维的断裂的位置,一根纤维断裂以后,引起的应力重分布采用剪滞模型分析(采用差分格式求解)。此过程一直进行下去,可模拟复合材料的破坏过程,并得到其破坏强度^[6]。

实际上,细观强度理论的目标是想建立复合材料有效强度与组分材料的强度之间的关系,但这是极其困难的事情。首先,组分材料的强度不是一个常数,它与细观结构的形式和外荷载作用方式有关。例如,一个单层板放置在不同的叠层中有不同的强度。其次,组分材料的强度与材料的破坏方式有关,而它又不能象应力强度因子那样被计算出来。如果考虑组分材料自身强度的随机

性,问题就更加复杂。总之,复合材料的细观强度理论还有许多工作要做。

§ 8.3 短纤维复合材料中的基体裂纹

当复合材料的内部出现微缺陷或微损伤后,有两个问题倍受关注,一是在存在缺陷或损伤的情况下,复合材料的宏观刚度有多大的损失,即从材料平均性能的角度考察其影响。二是缺陷与损伤本身的发展与其演化问题,这要借助断裂力学或损伤力学的概念及数值模拟技术来解决。

在单向短纤维复合材料中,由于纤维的不连续性,造成在纤维端点附近区域的应力集中,这将产生所谓的纤维端头裂纹(fiber-end crack)。这一现象已经在实验中被观察到,而且越是纤维含量较高、组分性能相差较大的复合材料,这种现象越明显。另外,复合材料所使用的短纤维一般从经过表面处理的连续纤维短切而来,这样,在纤维两端截面是没有得到表面处理的,在这一部分与基体的结合很弱,这也是造成纤维端头截面容易脱粘的主要原因。

设 Ω_1 表示第一类夹杂物——椭球状纤维, Ω_2 表示第二类夹杂物——币形裂纹,并且 Ω_2 位于 Ω_1 的两个极点上,纤维的长轴为 $2l$,两个短轴为 $2d$,币形裂纹的长轴为 $2c$,两个短轴为 $2t$,如图 8.2 所示。

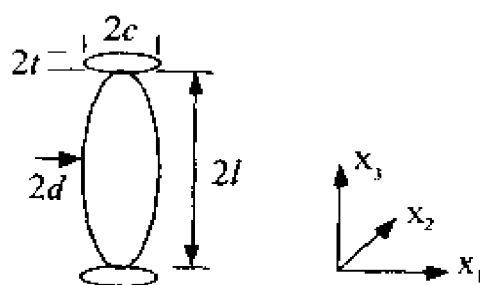


图 8.2 纤维和端头裂纹的模型

当复合材料受到沿纤维长轴方向的单向拉力:

$$\sigma^0 = \{0, 0, \sigma^0, 0, 0, 0\}^T$$

时,首先考虑在没有裂纹 Ω_2 的情况下,用 Eshelby 的等效夹杂法和 Mori-Tanaka 的平均应力概念,求出纤维内的等效特征应变 ε^* 和扰动应力 σ^f 。设 $\bar{\varepsilon}$ 为基体内的扰动应变,基体内的扰动应力为:

$$\bar{\sigma} = C^0 \bar{\varepsilon} \quad (8.3a)$$

由等效夹杂法,在纤维 Ω_1 内:

$$\begin{aligned} \sigma^0 + \sigma^f &= \sigma^0 + \bar{\sigma} + \sigma' \\ &= C^f(\varepsilon^0 + \bar{\varepsilon} + \varepsilon') = C^0(\varepsilon^0 + \bar{\varepsilon} + \varepsilon' - \varepsilon^*) \end{aligned} \quad (8.3b)$$

其中 C^f 为纤维的刚度, C^0 为基体的刚度,另外存在关系:

$$\varepsilon' = S\varepsilon^* \quad (8.4a)$$

$$\sigma^0 = C^0 \varepsilon^0 \quad (8.4b)$$

由方程(8.3b)至(8.4b)得:

$$\sigma^f = \bar{\sigma} + \sigma' = C^0(\bar{\varepsilon} + S\varepsilon^* - \varepsilon^*) \quad (8.5)$$

根据 Mori-Tanaka 的平均应力分析,扰动应力在整个复合材料内是自平衡的,即其平均值为零:

$$(1 - \nu_f)\bar{\sigma} + \nu_f\sigma^f = 0 \quad (8.6)$$

将(8.3a)和(8.5)代入(8.6)式得:

$$C^0 \bar{\varepsilon} + \nu_f C^0 (S\varepsilon^* - \varepsilon^*) = 0 \quad (8.7)$$

从方程(8.3b), (8.4a) 和 (8.7) 中解出夹杂(纤维)的等效特征应变 ε^* 和基体内的扰动应变 $\bar{\varepsilon}$, 进而可求出纤维内的扰动应力 σ^f 及 Ω_1 之外的应力场 $\bar{\sigma}^f$ 。

然后我们再计算微裂纹的等效特征应变 ε^{**} , 在这里只考虑夹杂与它的端头裂纹之间的关系,我们用等效夹杂法可以求出 Ω_2 内的扰动应力 $\sigma^c(\varepsilon^{**})$, 而裂纹 Ω_2 位于 Ω_1 之外,因此应有:

$$\sigma^0 + \sigma^c + \bar{\sigma}^f = 0 \quad (8.8)$$

式中, $\sigma^c(\varepsilon^{**})$ 是 ε^{**} 产生的扰动应力,由下式确定

$$\sigma^c = C^0(S^c\varepsilon^{**} - \varepsilon^{**}) \quad (8.9)$$

Ω_1 之外的应力场 $\bar{\sigma}^f$ 由下式确定

$$\bar{\sigma}_{ij}^f - \sigma_{ij}^f = C_{ijkl}^0 (-C_{pqmn}^0 \epsilon_{mn}^* M_{kp} n_q n_l + \epsilon_{kl}^*) \quad (8.10)$$

其中

$$M_{kp} = \frac{1}{\mu^0} \left\{ \delta_{kp} - \frac{n_k n_p}{2(1-\gamma)} \right\},$$

n_i 是夹杂 Ω_1 的外法向分量,对纤维端头有

$$(n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1) \quad (8.11)$$

将式(8.9)和式(8.10)代入式(8.8),可得到微裂纹的等效特征应变 ϵ^{**} 。

在求出微裂纹的等效特征应变 ϵ^{**} 之后,可以计算出在单向外力作用下的相互作用能:

$$E_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \sigma^0 \epsilon_{33}^{**} V_c - \frac{1}{2} \sigma^0 \epsilon_{33}^{**} V_f \quad (8.12)$$

其中 V_c 和 V_f 分别是 Ω_2 和 Ω_1 的体积,式中的第二项与裂纹的长度无关。注意 $V_c = \frac{4}{3} \pi c^2 t$, $\epsilon_{33}^{**} = 4(1-\nu_0^2)(1+F) \left(\frac{c}{\pi t} \right) \frac{\sigma^0}{E_0}$ 。上式中与裂纹有关的部分可简化为:

$$E_{\text{int}}^c = -\frac{1}{2} \sigma^0 \epsilon_{33}^{**} V_c = -\frac{8(\sigma^0)^2 c^3 (1-\nu_0^2)}{3 E_0} (1+F) \quad (8.13)$$

其中 F 是与 c 无关的常数,币形裂纹的能量释放率为

$$G = \left| \frac{\partial E_{\text{int}}^c}{\partial c} \right| = \frac{8(\sigma^0)^2 c^2 (1-\nu_0^2)}{E_0} (1+F) \quad (8.14)$$

式中, E_0 、 ν_0 是基体的弹性模量和泊松比。

另外,根据弹性能等效原理

$$\frac{(\sigma^0)^2}{2E_L} V = \frac{(\sigma^0)^2}{2E_0} V - E_{\text{int}} \quad (8.15)$$

其中 V 是复合材料的体积, E_{int} 是由(8.12)式确定的相互作用能,可以确定复合材料的有效纵向弹性模量 E_L 。

回顾本问题的解法,可以发现在处理问题时的思路。首先利用等效夹杂法求出纤维的等效特征应变 ϵ^* ,这个过程没有考虑裂纹与纤维的相互作用,但由于利用了 Mori-Tanaka 的平均化概

念,所以考虑到了纤维之间的相互作用。其次利用外力、 Ω_2 自身的扰动应力和夹杂 Ω_1 外的应力三者之和为零的条件,求出微裂纹的等效特征应变 ε^{**} 。在整个分析过程中,只考虑了纤维与它的端头裂纹之间的相互作用,没有考虑裂纹与其他邻近纤维、裂纹之间的相互作用,因而这个模型只能用于比较短(纤维直径的量级)的裂纹。当裂纹比较长(达到纤维长度的量级)时,应考虑裂纹与邻近纤维的相互作用。

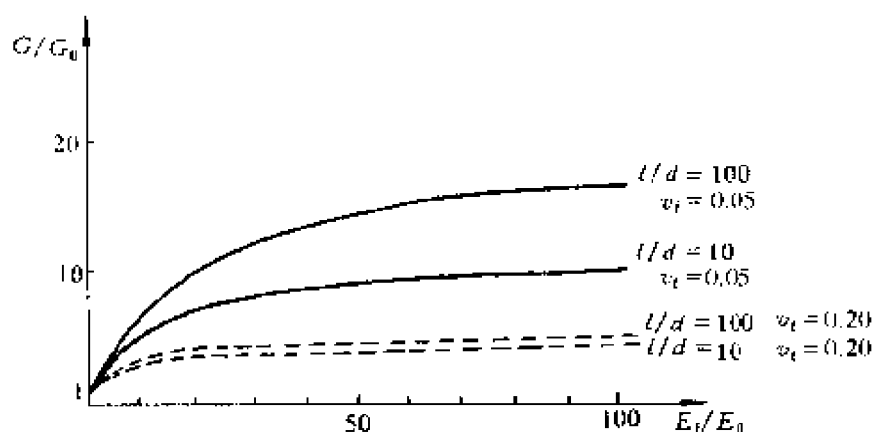


图 8.3 能量释放率与组分性能的关系

文献[7]对三种情况的复合材料进行了数值计算。图 8.3 表示在不同纤维长径比和不同体分比下的能量释放率与组分性能比之间的关系。图 8.4a ~ c 分别表示三种情况下的纵向杨氏模量与体分比的关系。其中 F_{mix} 表示没有裂纹的纤维复合材料的混合率的结果; F 表示在没有裂纹时,由上述方法得到的结果; FC 表示存在裂纹时,由上述方法得到的结果; C 表示只有裂纹时而没有纤维的结果。

上面介绍的夹杂模型是 Taya 和 Mura^[7] 提出的。但在这个模型中,纤维为椭球状和币形裂纹与纤维垂直的假设与实际情况有一定的差距。如果界面在椭球纤维的两个极点处脱粘,其裂纹应是沿着界面的。另外,在实际问题中,将纤维看做圆柱体更接近实际。

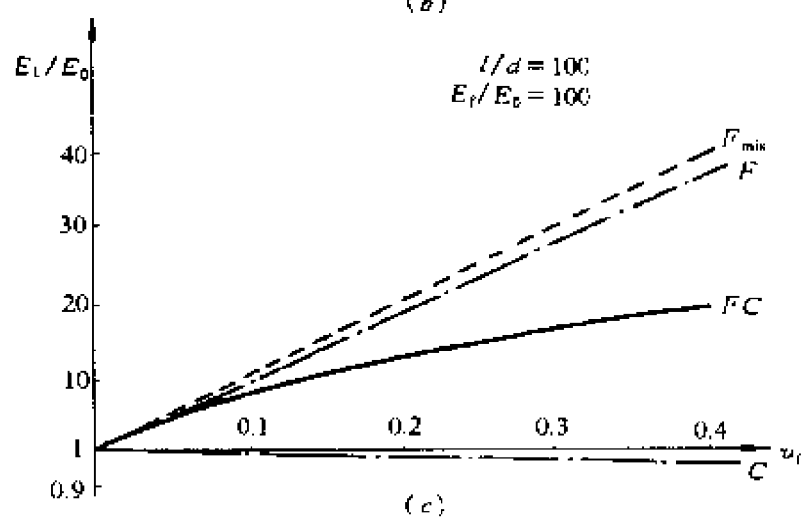
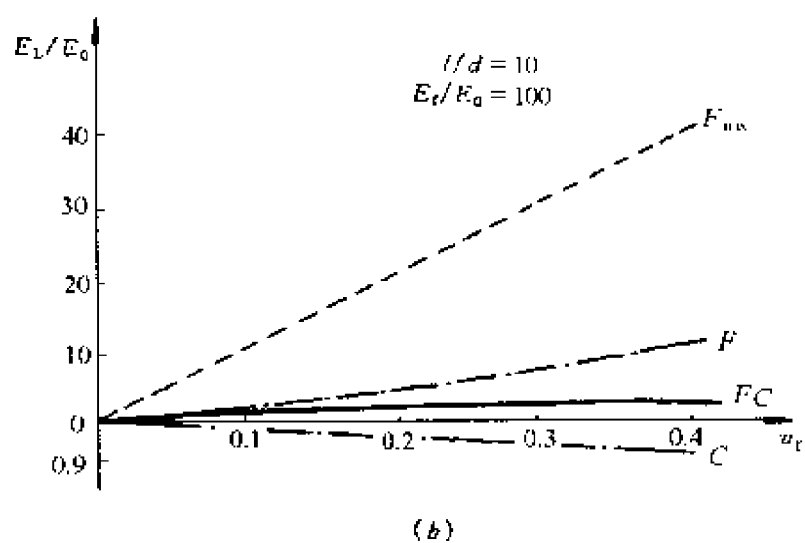
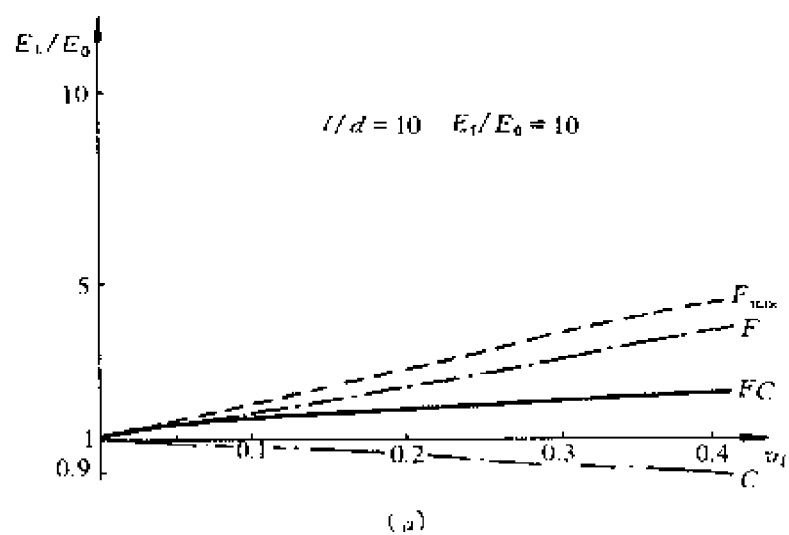


图 8.4 纵向杨氏模量与体分比的关系

短纤维复合材料的纤维端点界面脱粘问题,可采用自治有限元法进行数值求解^[8,9]。将纤维端头裂纹作为一相材料和纤维一起构成自治模型,但裂纹所占的体分比为0,如图8.5所示。采用四边形八节点轴对称等参元,分别考虑轴向拉伸和轴向剪切变形。

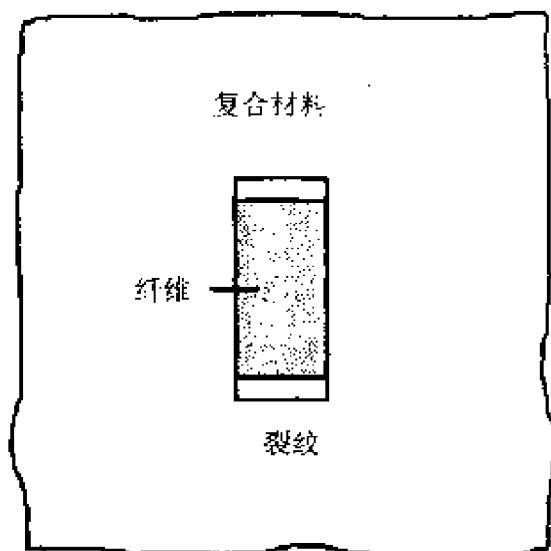


图 8.5 部分界面脱粘短纤维复合材料的自治有限元模型

所用材料的参数如下:基体 $E_m = 3.5\text{GPa}$, $\nu_m = 0.35$, 纤维 $\nu_f = 0.3$, 纤维拉伸模量 $E_f/E_m = 1 \sim 100$ 。纤维的长径比 $l/d = 10$ 。

图 8.6a 绘出了有效拉伸模量和剪切模量与体分比之间的变化曲线。随着体分比的增大,纤维端头脱粘的影响越大。由于纤维端头不能传递轴向应力,

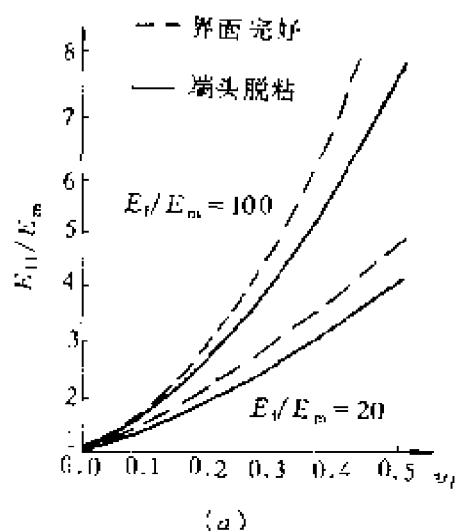


图 8.6a 杨氏模量与体分比的关系 ($l/d = 10$)

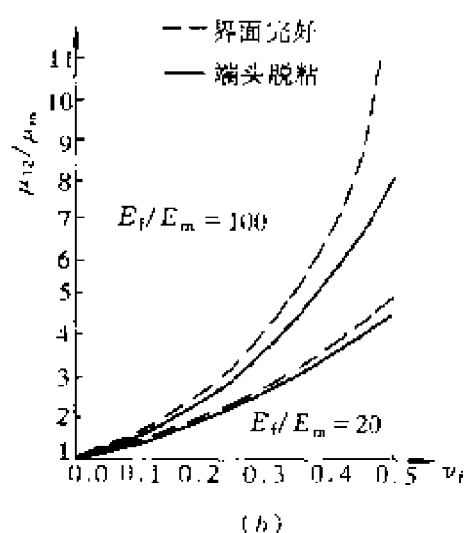
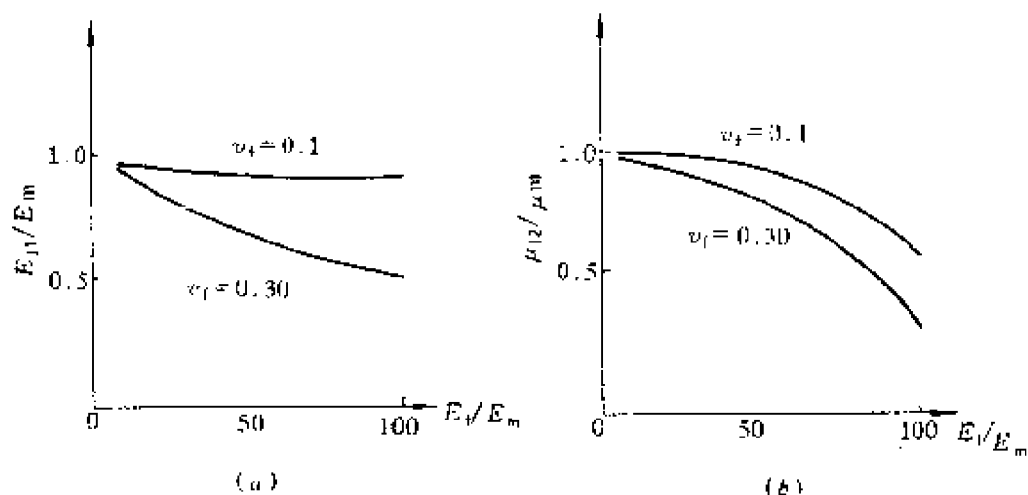


图 8.6b 剪切模量与体分比的关系 ($l/d = 10$)

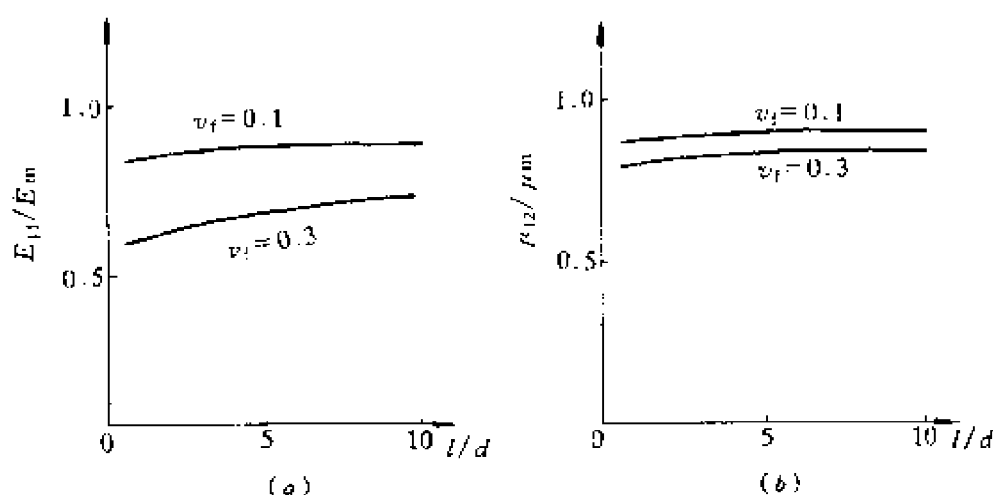
使拉伸模量和剪切模量都比无脱粘时降低了。图 8.7a 和图 8.7b

给出了比值 E_{11}/E_m 和 μ_{12}/μ_m 与相材料刚度比的变化关系。可以看出,增强比(E_f/E_m)越大,界面脱粘的影响越严重。由于纤维端头脱粘,界面传递应力的效率降低,纤维的作用不能充分发挥。这对于高模量纤维的使用很不利。图 8.8a 和图 8.8b 绘出了纤



8.7a 有效杨氏模量和无脱粘有效杨氏模量的比值与组分性能的关系($l/d=10$)

8.7b 有效剪切模量和无脱粘有效剪切模量的比值与组分性能的关系($l/d=10$)



8.8a 有效杨氏模量和无脱粘有效杨氏模量的比值与纤维长径比的关系($E_f/E_m=20$)

8.8b 有效剪切模量和无脱粘有效剪切模量的比值与纤维长径比的关系($E_f/E_m=20$)

维长径比的影响,纤维端头界面脱粘对于细长纤维复合材料的影响较小,而对于短粗纤维的复合材料影响较大。最后,在图 8.9 中给出了一个结果比较,与本文结果相比,文献[8]中的端头脱粘后

的模量衰减较大。这与所取的模型有关。在文献[8]中,纤维和端头裂纹看作两个正交的椭圆形夹杂。这实际上使端头裂纹向基体内扩展了一小段。当然,这些计算结果有待于实验验证。

本节介绍了部分脱粘界面复合材料的有限刚度问题的夹杂模型和自洽有限元法,并比较了多种物理因素和几何因素对有效弹性常数的影响。通过对单向短纤维复合材料的研究,可以得出以下结论:

(1) 界面部分脱粘对有效拉伸弹性模量和剪切模量均有明显的影响。纤维端头脱粘使拉伸模量和剪切模量都有下降。

(2) 界面脱粘的影响随着体分比增加而增大。

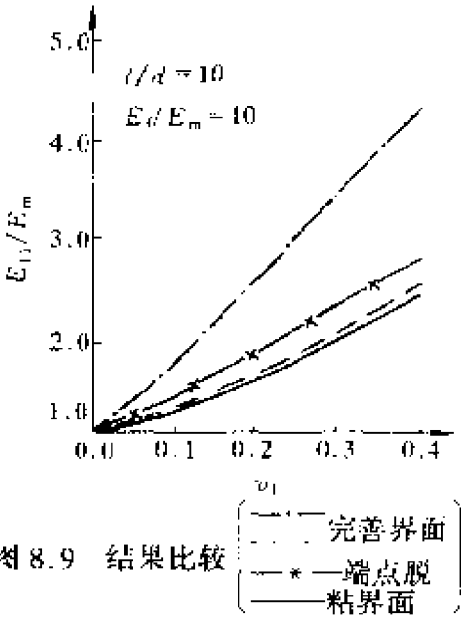


图 8.9 结果比较

(3) 相材料的刚度比 E_f/E_m 越大,脱粘对拉伸模量和剪切模量的影响越明显。

(4) 拉伸模量和脱粘对拉伸模量的影响均对长径比较为敏感,而在剪切变形时,长径比的影响很小。

在这个问题的自洽有限元法中,用无限大的有效介质包围纤维及其端头裂纹,这实际上是纤维与有效介质之间的界面脱粘。更合理的模型应该利用广义自洽模型的概念,

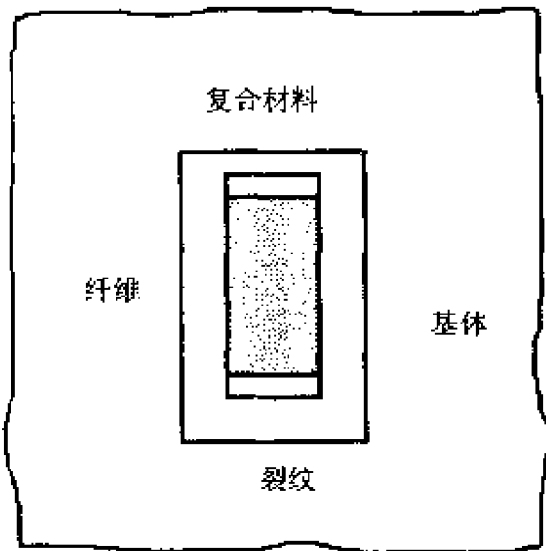


图 8.10 部分界面脱粘短纤维复合材料的广义自洽有限元模型

在纤维和有效介质之间引入一层基体,构成广义自洽有限元模型。如图 8.10 所示。

§ 8.4 纤维桥联问题的夹杂模型

连续纤维复合材料在受到纤维方向的拉伸荷载作用下,在基体内会形成垂直于纤维的裂纹,相应的基体开裂应力也许会显著地高于无增强基体的最终断裂应力。但由于纤维的增强,复合材料能够继续承受荷载,直到纤维被拉断。在这个过程中,纤维对基体裂纹形成了搭桥联结,显著地提高了裂纹的扩展阻力。

现在考虑一个沿垂直于纤维方向扩展的币形裂纹问题,假设纤维有相同的半径 r 、长度 l 和间距 λ ,纤维足够强以使桥联纤维不致拉断。用 Ω_0 表示复合材料中一条长度为 $2a$ 、厚度为 $2c$ 的币形裂纹。由于纤维的桥联, Ω_0 中有许多纤维。用 Ω 表示纤维在裂纹中所占据的区域,并假设裂纹和含在裂纹中的纤维都具有椭球的形状,如图 8.11 所示,其方程为:

$$\begin{aligned}\Omega_0: \frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} &\leq 1 \\ \Omega: \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2} + \frac{x_3^2}{c^2} &\leq 1\end{aligned}\quad (8.16)$$

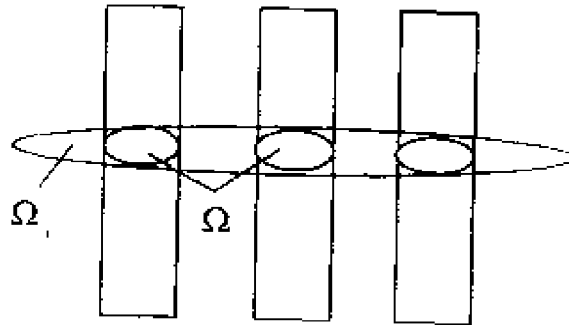


图 8.11 桥联裂纹问题的夹杂模型

这个问题可看做在夹杂物 Ω_0 (裂纹) 内叠加许多的夹杂物 Ω (纤维)。当复合材料受到纤维方向上的拉力 σ_A 时,桥连纤维 Ω 内的特征应变有两部分组成,第一部分是 Ω_0 内的等效特征应变,假设为 $\epsilon_{33}^* = \epsilon_p$,其中 ϵ_p 是待求的未知量;第二部分是 Ω 自身产生的等效特征应变 $\bar{\epsilon}_{33}^* = -(1-\alpha)\epsilon_p$, ($0 \leq \alpha \leq 1$)。

$$\text{在 } \Omega_0 \text{ 内: } \quad \epsilon_{33}^* = \epsilon_p \quad (8.17a)$$

$$\text{在 } \Omega \text{ 内: } \quad \epsilon_{33}^* = -(1-\alpha)\epsilon_p \quad (8.17b)$$

于是,在 Ω 内的总的等效特征应变是 $\alpha\epsilon_p$ 。当纤维完全占据裂纹的张开区域时, $\alpha = 0$; 当裂纹内没有纤维时, $\alpha = 1$ 。在等效夹杂法中,当裂纹的宽度 $c \rightarrow 0$ 时, $\epsilon_p \rightarrow \infty$, 以使 $c\epsilon_p$ 为有限值。在没有纤维处的裂纹张开位移是 $2c\epsilon_p$, 而在纤维占据区 Ω 的裂纹张开位移是 $2\alpha c\epsilon_p$ 。

由裂纹的等效特征应变 ϵ_{33}^* 在 Ω_0 内引起的内应力(见 § 4.4)为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 &= -\frac{\bar{\mu}(1+2\bar{\nu})}{4(1-\bar{\nu})} \pi \frac{c}{a} \epsilon_p \\ \sigma_{33}^0 &= -\frac{\bar{\mu}}{2(1-\bar{\nu})} \pi \frac{c}{a} \epsilon_p \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

纤维的等效特征应变 ϵ_{33}^* 在 Ω 内和在 $\Omega_0 - \Omega$ 内都产生应力, 当只存在一个 Ω 时, $\bar{\epsilon}_{33}^*$ 在 Ω 内诱发的内应力为:

$$\sigma_{33}^* = \frac{\bar{\mu}}{2(1-\bar{\nu})} \pi \frac{c}{r} (1-\alpha) \epsilon_p \quad (8.19a)$$

所有 Ω 产生的应力之和为上式乘以 Ω 在 Ω_0 内所占的体积比 $-\pi r^2/\lambda^2$, 即:

$$\bar{\sigma}_{33} = -\frac{\bar{\mu}}{2(1-\bar{\nu})} \pi \frac{c}{r} (1-\alpha) \epsilon_p \frac{\pi r^2}{\lambda^2} \quad (8.19b)$$

因为 Ω_0 为一裂纹, 则有条件:

$$\sigma_A + \sigma_{33}^0 + \bar{\sigma}_{33} = 0 \quad (8.20)$$

将式(8.18)和式(8.19b)代入到式(8.20)中, 得到:

$$\epsilon_p = \frac{2(1-\bar{\nu})\sigma_A a}{\bar{\mu}\pi c} \left/ \left\{ 1 + (1-\alpha)\pi ar/\lambda^2 \right\} \right. \quad (8.21)$$

其中 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\nu}$ 是复合材料的有效剪切模量和泊松比, 可近似用混合律求出:

$$\bar{\mu} = (1-f)\mu_m + f\mu_f \quad \bar{\nu} = (1-f)\nu_m + f\nu_f$$

这里下角标 m 和 f 分别表示基体和纤维, f 为纤维体积比:

$$f = \pi r^2 / \lambda^2。$$

这样由 ϵ_{33}^* 和 $\bar{\epsilon}_{33}^*$ 所引起的总内应力为:

在 $\Omega_0 - \Omega$ 内:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \sigma_{33}^0 + \bar{\sigma}_{33} = \\ &= -\frac{\bar{\mu}}{2(1-\bar{\nu})} \pi \frac{c}{a} \epsilon_p - \frac{\bar{\mu}}{2(1-\bar{\nu})} \pi \frac{c}{r} (1-\alpha) \epsilon_p \frac{\pi r^2}{\lambda^2}\end{aligned}\quad (8.22a)$$

在 Ω 内:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \sigma_{33}^0 + \sigma'_{33} = \\ &= -\frac{\bar{\mu}}{2(1-\bar{\nu})} \pi \frac{c}{a} \epsilon_p + \frac{\bar{\mu}}{2(1-\bar{\nu})} \pi \frac{c}{r} (1-\alpha) \epsilon_p\end{aligned}\quad (8.22b)$$

系统的 Gibbs 自由能为 (见 § 4.6):

$$F = -\frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dV - \int_D \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^* dV \quad (8.23a)$$

将式(8.17)和式(8.22)代入式(8.23a),得到:

$$F = -\frac{4(1-\bar{\nu})a^3\sigma_A^2}{3\bar{\mu}} \frac{1 + (1-\alpha^2)\pi ar/\lambda^2}{[1 + (1-\alpha)\pi ar/\lambda^2]^2} \quad (8.23b)$$

其能量释放率为:

$$\begin{aligned}G &= -\frac{\partial F}{\partial(\pi a^2)} \\ &= G_0 \frac{[3 + (1-\alpha)(5+4\alpha)\pi ar/\lambda^2 + 2(1-\alpha^2)(1-\alpha)(\pi ar^2/\lambda^2)^2]}{3[1 + (1-\alpha)\pi ar/\lambda^2]^3}\end{aligned}\quad (8.24a)$$

其中 $G_0 = 2(1-\bar{\nu})\sigma_A^2 a / \pi \bar{\mu}$ 为没有纤维时的均匀材料中的裂纹能量释放率。

利用关系 $f = \pi r^2 / \lambda^2$, 式(8.24a) 可变为

$$\frac{\pi \mu \bar{G}}{2(1-\nu)(\sigma_A)^2 r} = \frac{a}{r} \frac{[3 + (1-\alpha)(5+4\alpha)fa/r + 2(1-\alpha^2)(1-\alpha)f^2(a/r)^2]}{3[1 + (1-\alpha)fa/r]^2} \quad (8.24b)$$

由均匀材料的能量释放率 G 与应力强度因子 K 的关系: $G = K^2(1-\nu)/(2\mu)$, 可得应力强度因子:

$$K = K_0 \frac{[3 + (1-\alpha)(5+4\alpha)\pi ar/\lambda^2 + 2(1-\alpha^2)(1-\alpha)(\pi ar^2/\lambda^2)^2]^{1/2}}{\sqrt{3}[1 + (1-\alpha)\pi ar/\lambda^2]^{3/2}} \quad (8.25a)$$

其中, $K_0 = 2\sigma_A(a/\pi)^{1/2}$ 为没有纤维时的均匀材料中的裂纹应力强度因子。

相似于方程(8.24b)的形式, (8.25a) 式可变为

$$\frac{\sqrt{\pi K}}{2\sigma_A \sqrt{r}} = \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \frac{[3 + (1-\alpha)(5+4\alpha)fa/r + 2(1-\alpha^2)(1-\alpha)f^2(a/r)^2]}{\sqrt{3}[1 + (1-\alpha)fa/r]^{3/2}} \quad (8.25b)$$

当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, G 和 K 取得极限值

$$G_\infty = \frac{4(1-\nu)(\sigma_A)^2}{3\pi\mu} \frac{(1+\alpha)\lambda}{(1-\alpha)\pi r} \quad (8.26a)$$

$$K_\infty = 2\sigma_A \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{(1+\alpha)^{1/2}\lambda}{\pi(1-\alpha)^{1/2}\sqrt{r}} \quad (8.26b)$$

纤维的拔出距离为

$$\delta = 2\alpha\epsilon_p = \delta_0\alpha/[1 + (1-\alpha)\pi a/\lambda^2] \quad (8.27)$$

其中, $\delta_0 = 4(1-\nu)a\sigma_A/(\pi\mu)$ 。

图 8.12 表示了归一化能量释放率与无量纲裂纹长度之间的关系^[10], 从图中和上述各方程中可看出, 能量释放率、应力强度因子和裂纹张开距离都依赖于 α , 而 α 依赖于外力、纤维和裂纹的几何参数以及界面的摩擦状况。

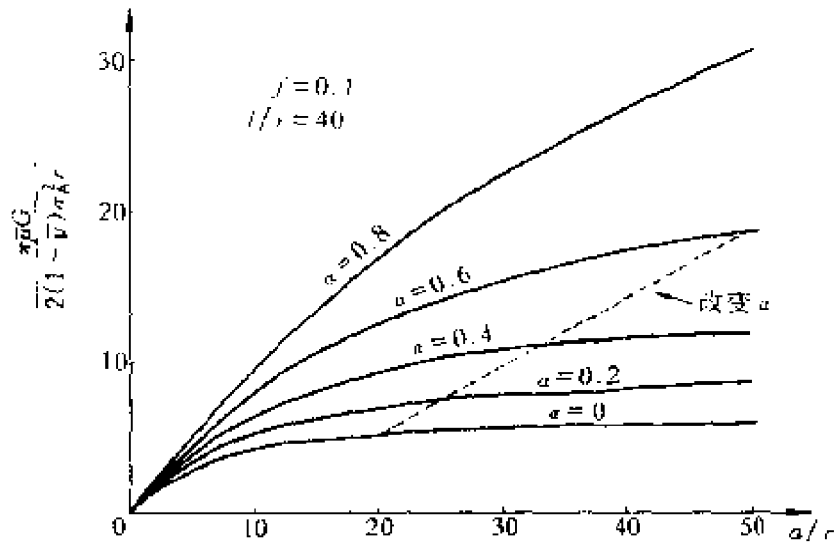


图 8.12 能量释放率与裂纹长度的关系

下面分析 α 与各个影响参数间的关系。

纤维从基体内拔出,需要做功克服界面摩擦,因此,裂纹的张开位移与界面摩擦力有关。设界面的摩擦力为一常数 k ,对于小体分比 f 的复合材料,纤维的桥联应力,即裂纹区内纤维受到的拉力 $\sigma_{33}(\Omega)$ 可近似表示为 $\sigma_{33}^0 + \sigma_{33} + \sigma_A$,由式(8.17)和式(8.18),得

$$\sigma_{33}(\Omega) = \sigma_A(1 - \alpha) \frac{a}{r} / [1 + (1 - \alpha)\pi ar/\lambda^2] \quad (8.28)$$

当外力或裂纹长度 a 较小时,由于纤维的拔出力 $\sigma_{33}(\Omega)\pi r^2$ 小于界面摩擦力 $2\pi r l k$,不会产生纤维的拔出现象,相应的 $\alpha = 0$ 。因此,纤维的拔出条件可表示为

$$\sigma_{33}(\Omega)\pi r^2 = 2\pi r l k, \text{ 且 } \alpha = 0 \quad (8.29a)$$

由此得出外力的临界值

$$\sigma_A = \sigma_c = 2k(l/a)(1 + \pi ar/\lambda^2) \quad (8.29b)$$

其中 l 是纤维的长度。因此,没有纤维拔出的临界条件也可写为 $\sigma_A < \sigma_c$, 且 $\alpha = 0$ 。此时,能量释放率、应力强度因子和裂纹张开距离分别由 $\alpha = 0$ 时的(8.24), (8.25) 式和(8.27) 式计算。

当 $\sigma_A \geq \sigma_c$ 时,有纤维从基体中拔出,使 $\alpha > 0$ 。此时 α 用关系

$\sigma_{33}(\Omega)\pi r^2 = 2\pi r l k$ 确定, 即有

$$\alpha = 1 - 2kl(\sigma_A - 2\pi klr/\lambda^2)/a \quad (8.30)$$

在纤维拔出时, 总的能量耗散 W 为

$$W = 2\pi r l k \delta f = 2\pi r l k 2c\alpha\epsilon_p(\pi a^2/\lambda^2) \quad (8.31a)$$

将式(8.27) 和(8.30) 代入式(8.31a), 得到

$$W = 8\pi a^3 \frac{klr}{\lambda^2} \frac{(1-\bar{\nu})}{\mu} (\sigma_A - \sigma_c) \quad (8.31b)$$

上式表明, 纤维桥联除了能够降低能量释放率之外, 还能产生附加的阻力, 以阻止裂纹的扩展。将这种阻止效应定义为

$$\Delta G_f = \partial W / \partial (\pi a^2) \quad (8.32a)$$

或

$$\begin{aligned} \Delta G_f &= 4 \frac{klr}{\lambda^2} \frac{(1-\bar{\nu})}{\mu} a \left[3\sigma_A - 2k \frac{l}{a} (2 + 3\pi ar/\lambda^2) \right] \\ &= 4 \frac{klr}{\lambda^2} \frac{(1-\bar{\nu})}{\mu} a [3(\sigma_A - \sigma_c) + 2kl/a] \end{aligned} \quad (8.32b)$$

这个附加效应应加到阻止裂纹扩展的材料常数 G_{Ic} 上, 它随着裂纹的扩展而增大。这是滑移桥联纤维贡献于裂纹稳定性的又一因素。

当裂纹扩展时 ($\alpha > 0$), 由式(8.30) 可知

$$a \geqslant 2kl/(\sigma_A - 2\pi klr/\lambda^2) \quad (8.33)$$

当裂纹不扩展时, 有 $a < 2kl/(\sigma_A - 2\pi klr/\lambda^2)$, 且 $\alpha = 0$ 。

纤维对裂纹的总的阻止效应可以表示为

$$\Delta G_c = (G - G_0) + \Delta G_f \quad (8.34)$$

对于满足式(8.33) 的长裂纹, 由式(8.24a) 和式(8.32b) 可确定

$$\begin{aligned} \Delta G_c &= G_0 \left\{ 1 - \frac{[3 + (1-\alpha)(5+4\alpha)\pi ar/\lambda^2]}{3[1 + (1-\alpha)\pi ar/\lambda^2]^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1-\alpha^2)(1-\alpha)(\pi ar^2/\lambda^2)^2}{3[1 + (1-\alpha)\pi ar/\lambda^2]^3} \right\} \\ &\quad + 4 \frac{klr}{\lambda^2} \frac{(1-\bar{\nu})}{\mu} a \left[3\sigma_A - 2k \frac{l}{a} (2 + 3\pi ar/\lambda^2) \right] \end{aligned} \quad (8.35a)$$

对于不满足式(8.33)的短裂纹,式(8.34)由当 $\alpha = 0$ 时,式(8.24a)和条件 $\Delta G_I = 0$ 确定,

$$\Delta G_c = \frac{G_0(4 + 3\pi ar/\lambda^2)\pi ar}{3\lambda^2(1 + \pi ar/\lambda^2)^2} \quad (8.35b)$$

对于给定桥联纤维体分比($f = \pi r^2/\lambda^2$),式(8.24)和式(8.32)都与纤维半径 r 呈递减或反比关系,这说明较细的纤维有利于提高裂纹的扩展阻力。

本节讨论了纤维桥联对裂纹扩展的作用,是由Mori、Saito和Mura^[10]等完成的。夹杂模型基本可以揭示纤维桥联问题的基本特征。关于基体初始开裂应力的计算将在§8.6中介绍。

§ 8.5 界面的滑移与失效

当夹杂与基体的界面被假设为理想粘结时,界面上的应力和位移都是连续的。在实际的复合材料中,界面发生部分的或全部的失效是一种常见的现象。界面的失效是因为界面的粘结较弱而引起夹杂与基体在界面失效处存在相对的运动,进而造成应力与位移的不连续。界面失效后并不意味着夹杂与基体完全分开。在失效界面受到法向拉力的区域,界面会完全脱离,这时界面不能传递任何应力,完全失去作用;在界面受到法向压力的区域,界面的粘结状态对应力传递没有任何影响;在界面受到切向作用的区域,界面会发生有摩擦的或无摩擦的相对滑动,这是一种有趣的常见情况,许多学者进行了研究工作,例如:Mura & Furuhashi(1984);Mura, Jasiuk & Tsuchida(1985);Huang、Furuhashi & Mura(1993)等。

8.5.1 基本公式

考虑一个含有夹杂 Ω 的无限大域 D ,夹杂 Ω 的均匀特征应变为 ϵ_{ij}^* ,当夹杂的界面 S 发生滑移时,其界面的位移连续条件为:

$$\text{在 } S \text{ 上} \quad \begin{cases} [u_i]n_i = 0 & (8.36a) \\ [u_i] = b_i & (8.36b) \end{cases}$$

其中 $[]$ 表示量在 S 上的跳跃值, n_i 是 S 的外法向量,如图8.13所示。上式表示位移的法向量是连续,但切向量不连续。界面的应力

连续条件可按沿界面的切向分量 t_i 和法向分量 N_i 来考虑。

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j - \sigma_{kl} n_k n_l n_i \\ N_i &= \sigma_{kl} n_k n_l n_i \end{aligned} \quad (8.37)$$

t_i 和 N_i 正是我们要求的应力,为此,定义它们的平均值:

$$\begin{aligned} |t| &= \{t, t\}^{1/2} = \sqrt{\int_S t_i t_i ds} \\ |N| &= \{N, N\}^{1/2} = \sqrt{\int_S N_i N_i ds} \end{aligned} \quad (8.38)$$

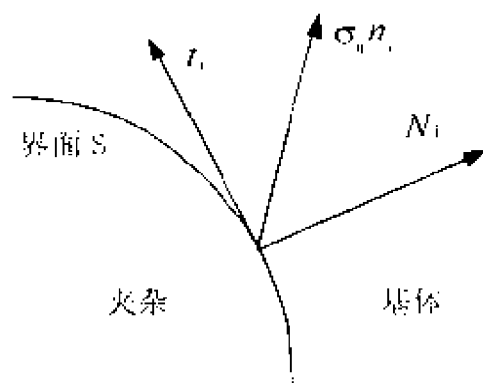


图 8.13 界面的应力条件

如果 Ω 的界面是理想粘结的,其解已由 Eshelby 求出(见第 4 章):

$$u_i^E(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} G_{ij,k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{jklm} \epsilon_{lm}^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (8.39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^E(\boldsymbol{\epsilon}^*) &= C_{ijkl} (u_{k,l}^E - \epsilon_{kl}^*) \\ &= - C_{ijkl} \left\{ \int_{\Omega} C_{pqmn} \epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') G_{kpql}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \epsilon_{kl}^*(\mathbf{x}) \right\} \end{aligned} \quad (8.40)$$

将界面的滑移看作 Somigliana 位错,不连续性位移看做 Burgers 向量(位错密度),其位移场可由 Volterra 解表示(见 Asaro (1975)^[17]):

$$u_i^v(\mathbf{x}) = - \int_S G_{ij,k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{jklm} b_l(\mathbf{x}') n_m(\mathbf{x}') ds(\mathbf{x}') \quad (8.41)$$

写成积分的形式

$$u_i^v(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} G_{ij,k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') C_{jklm} \frac{\partial b_l(\mathbf{x}')}{\partial x'_m} d\mathbf{x}' - b_i(\mathbf{x}) \quad (8.42)$$

相应的应力场为:

$$\sigma_{ij}^v(\mathbf{b}) = - C_{ijkl} \left\{ \int_{\Omega} C_{pqmn} G_{kp,ql}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \epsilon_{mn}^{**}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \epsilon_{kl}^{**}(\mathbf{x}) \right\} \quad (8.43)$$

其中

$$\epsilon_{ij}^{**}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [b_{i,j}(\mathbf{x}) + b_{j,i}(\mathbf{x})] \quad (8.44)$$

对一个有滑移界面的夹杂问题,其解为 Eshelby 解与 Volterra 解的叠加:

$$u_i = u_i^E(\mathbf{x}) + u_i^v(\mathbf{x}) \quad (8.45a)$$

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij}^E(\boldsymbol{\epsilon}^*) + \sigma_{ij}^v(\mathbf{b}) \quad (8.45b)$$

从上式可以看出,只要不连续的位移 $\mathbf{b}$ 是已知的,应力场 τ_{ij} 就可确定。

8.5.2 界面的应力跳跃

当界面失效后,由于 $\epsilon_{ij}^*(\mathbf{x})$ 的不连续,将会在界面上造成位移的不连续,设跳跃位移有如下形式:

$$[u_{i,j}] = b_{i,j} + \lambda_i n_j \quad (8.46a)$$

这样选取的位移,能使在 S 的任一线元 dx_j 的位移跳跃:

$$[u_{i,j}] dx_j = b_{i,j} dx_j \quad (8.46b)$$

与开始定义的界面位移不连续条件(8.36)相一致。

由跳跃位移产生的应力跳跃为:

$$[\sigma_{ij}] = C_{ijkl} ([u_{k,l}] - [\epsilon_{kl}^*]) = C_{ijkl} ([u_{k,l}] - \epsilon_{kl}^*) \quad (8.47)$$

由应力的界面条件:

$$[\sigma_{ij}] n_j = C_{ijkl} (\lambda_k n_l - \epsilon_{kl}^* + b_{k,l}) n_j = 0 \quad (8.48)$$

由此解出 λ_l 为:

$$\lambda_l = C_{ijmn} (\epsilon_{mn}^* - b_{m,n}) n_k N_{ij}(\mathbf{n}) / D(\mathbf{n}) \quad (8.49)$$

其中

$$D(\mathbf{n}) = \mu^2(\lambda + 2\mu)n^6$$

$$N_{ij}(\mathbf{n}) = \mu n^2 \{ (\lambda + 2\mu)\delta_{ij}n^2 - (\lambda + \mu)n_in_j \}$$

λ 和 μ 是 Lamé 常数, $n = \sqrt{n_in_i}$ 。

将式(8.46a)和式(8.49)代入式(8.47),得到

$$[\sigma_{ij}] = C_{ijkl} [C_{pqmn}(\epsilon_{mr}^* - b_{m,n})n_qn_lN_{kp}(\mathbf{n})/D(\mathbf{n}) - (\epsilon_{kl}^* - b_{k,l})] \quad (8.50)$$

当不连续位移 b_i 不存在时,即当界面上没有裂纹时,界面上的应力跳跃为:

$$[\sigma_{ij}] = C_{ijkl} [C_{pqmn}\epsilon_{mr}^*n_qn_lN_{kp}(\mathbf{n})/D(\mathbf{n}) - \epsilon_{kl}^*] \quad (8.51)$$

这一结果与第4章§5的结果相一致。

上述过程表明,只要知道了界面上的不连续性位移 b_i ,就可计算界面上的不连续应力。Huang 和 Mura^[16]给出了球形和椭圆形夹杂的无摩擦滑移的 Somigliana 位错的具体形式。如果无摩擦

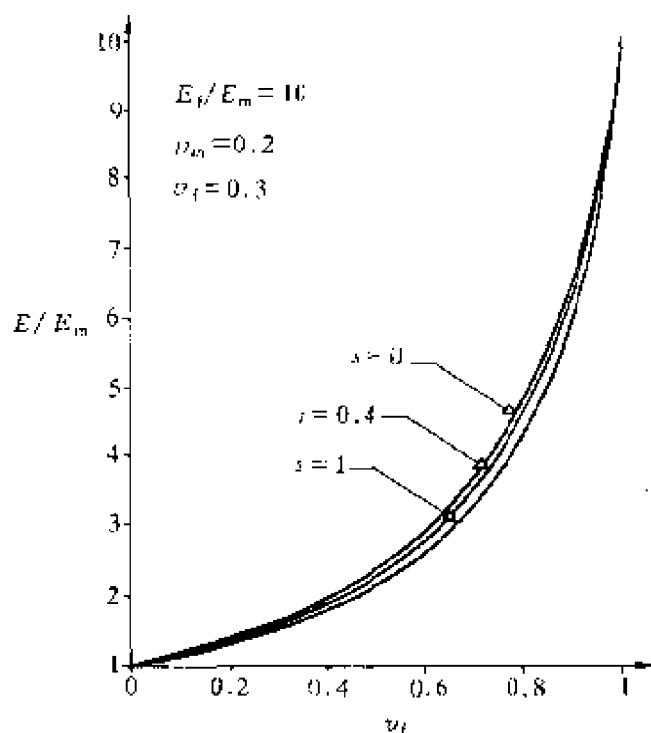


图 8.14 界面滑移对有效弹性模量的影响

滑移的不连续性位移 $\bar{b}_i$ 是已知的, 在有摩擦的情况下可以假设不连续性位移 $\bar{b}_i$ 具有如下形式:

$$\bar{b}_i = s b_i \quad (8.52)$$

当 $s = 0$ 时, 表示界面的理想粘结, 没有任何滑移。当 $s = 1$ 时, 表示界面理想的光滑滑移。在界面滑移的情况下, 利用 Mori-Tanaka 方法可以计算球形颗粒复合材料的有效模量, 如图 8.14 所示。可以看出, 界面的滑移对复合材料的有效弹性模量有显著的影响。

§ 8.6 基体开裂问题的 ACK 方法

在前面的两节中介绍了纤维桥联和界面失效问题。实际上是在假设基体或界面上预先存在一个裂纹的前提下, 考虑它们对宏观性能的影响。我们不免提出这样的问题: 何时出现基体裂纹? 如何计算基体开裂应力? 等等。

根据复合材料的细观损伤机理, 基体开裂后, 将伴随发生界面脱粘和滑移(有摩擦或无摩擦)、纤维桥联或拔出等复杂机制。Aveston、Cooper 和 Kelly^[15,16] (简称 ACK) 最先用比较损伤前后的能量关系, 求解基体开裂应力, 其后 Budiansky、Hutchinson 和 Evans^[17] 利用 ACK 方法详细分析了脆性基体的开裂过程, 考虑了无粘结但有摩擦滑移的界面和初始有弱粘结但其后破坏的界面等情况。本节将介绍这些工作。

Budiansky、Hutchinson 和 Evans^[17] 的工作研究单向纤维增强陶瓷基复合材料, 在沿着纤维方向的单向应力作用下, 由于基体的强度和断裂应变比纤维低, 因此基体中首先出现垂直于纤维方向的横向裂纹。在基体裂纹出现之前的无损伤阶段, 复合材料的有效刚度可以用混合率近似计算。随着

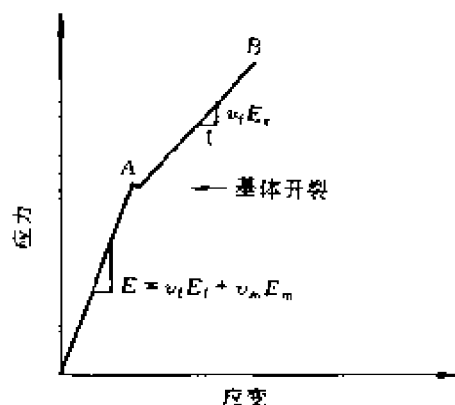


图 8.15 脆性基体复合材料的应力-应变关系

外载的增加,基体裂纹将贯穿整个试件,实际上只有纤维承受荷载,直到最终完全被拉断。如图 8.15 所示。

基体裂纹的稳态扩展过程受到界面粘结状态的影响,这里考虑三种情况:界面粘结良好,无滑移,不脱粘;界面无粘结,但有摩擦力;界面初始有粘结,但在高应力作用下脱粘。如图 8.16 所示。

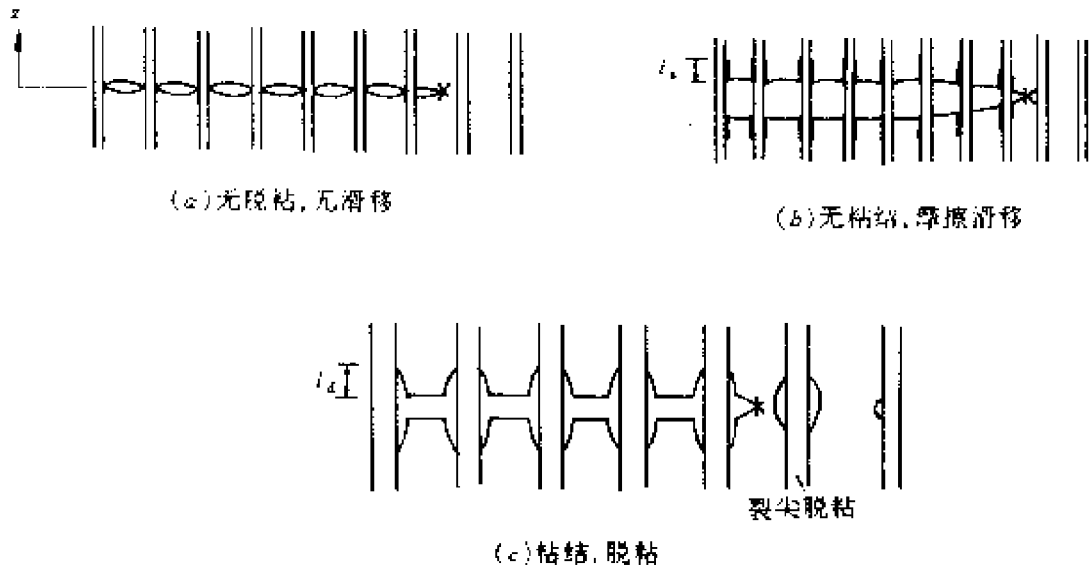


图 8.16 基体的稳态开裂

利用 ACK 能量法,一般的能量关系由初应力弹性体的势能减少得到,在不变的外载作用下,弹性体内产生裂纹或界面滑移,得到的能量关系式广泛用于稳态裂纹的扩展计算中。

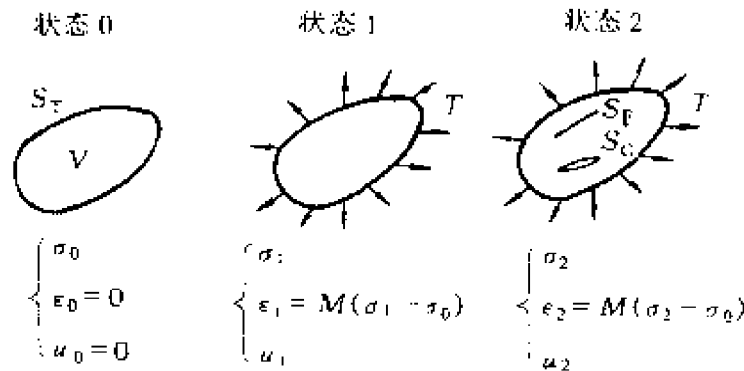


图 8.17 弹性体的三种连续状态:(0)未加载,有初应力,(1)加载,(2)裂纹张开,滑移

图 8.17 表示 3 种状态,状态 0 表示弹性体不受任何外力作

用,但承受加工过程产生的残余应力 σ_0 。状态 1 表示弹性体处在外载 T 作用下,产生的位移场为 u_1 ,应力和应变场分别为 σ_1 和 ε_1 ,势能记为 π_1 ,其内部可能含有初始缺陷。状态 2 表示在外力不变的情况下,裂纹或界面发生了扩展或滑移。对应的位移为 u_2 ,应力和应变场为 σ_2 和 ε_2 ,势能为 π_2 。弹性体的本构关系为:

$$\varepsilon = M(\sigma - \sigma_0) \quad (8.53)$$

其中 σ_0 为残余应力, M 为材料的线性算子。

各状态的势能为

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_1 \cdot M(\sigma_1) dv - \int_S T \cdot u_1 ds \quad (8.54a)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_2 \cdot M(\sigma_2) dv - \int_S T \cdot u_2 ds \quad (8.54b)$$

体积分部分表示了物体内的应变能,面积分部分代表了外力势能。利用 $\sigma_1 \cdot M(\sigma_2) = \sigma_2 \cdot M(\sigma_1)$,得到从状态 1 到状态 2 的势能减少 $\pi_1 - \pi_2$ 为

$$\pi_1 - \pi_2 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot M(\sigma_1 - \sigma_2) dv - \int_S T \cdot (u_1 - u_2) ds \quad (8.55)$$

假设由状态 1 到状态 2 的变化过程中,作用在滑移面上的剪切应力为一常数 τ_s ,与滑移方向相反。相对滑移量为 $|\Delta v|$,滑移方向不变。这样,由虚功原理可以得到由状态 1 到状态 2 时外力所作的功

$$\int_S T \cdot (u_1 - u_2) ds = \int_V \sigma_2 \cdot M(\sigma_1 - \sigma_2) dv - \tau_s \int_{S_f} |\Delta v| ds \quad (8.56)$$

其中上式右边第二项表示由于界面滑移而消耗的能量,表示为

$$\xi_f = \tau_s \int_{S_f} |\Delta v| ds \quad (8.57)$$

则式(8.55)变为

$$\pi_1 - \pi_2 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot M(\sigma_1 - \sigma_2) dv + \xi_f \quad (8.58)$$

上述结果是针对一般的裂纹扩展和界面滑移情况的能量变化。

考虑厚度为 1 宽度为 W 的单向纤维复合材料中有一长度为 s 的裂纹,如图 8.18 所示。此

时裂纹尖端在 CC 截面,但所有纤维均未断裂。保持荷载不变,使裂纹尖端向前扩展 Δs 至 $C'C'$ 截面。相对于这一问题,状态 0 对应于无裂纹及无外载但有初应力的状态,状态 1 对应于在外载作用下,裂纹尖端处于 CC 位置,而状态 2 则对应于在相同外载作用下,裂纹尖端扩展至 $C'C'$ 位置。稳态裂纹扩展可以理解为裂纹前沿的应力场及应变场的

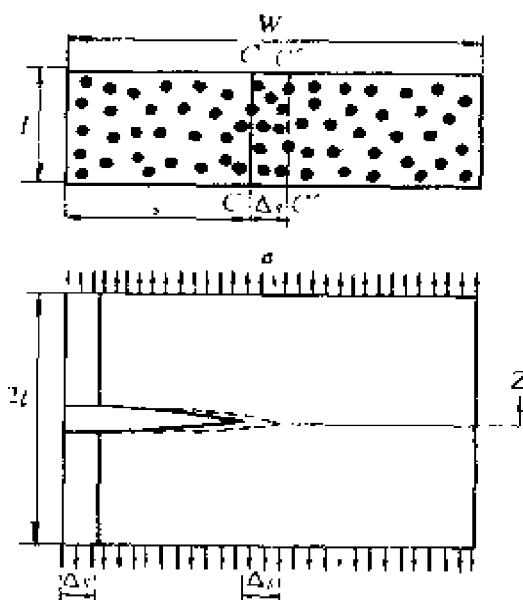


图 8.18 基体裂纹的扩展

分布不会因裂纹扩展而改变,远离裂纹尖端的前端和尾端的应力场及应变场的分布也不变。定义 P_U 及 P_D 为远离裂尖的前端及尾端单位横截面积弹性势能,则从状态 1 到状态 2 的能量变化可以表示成下式:

$$\pi_1 - \pi_2 = (P_U - P_D) \Delta s \quad (8.59)$$

其中 Δs 为裂纹的扩展长度(面积),利用式(8.58)可以得到势能释放率

$$P_U - P_D = \frac{1}{2A_c} \int_{-t}^t \int_{A_c} (\sigma_U - \sigma_D) \cdot (\epsilon_U - \epsilon_D) dA dz + \frac{\partial \xi_f}{\partial s} \quad (8.60)$$

式中 $\sigma_U, \epsilon_U, \sigma_D, \epsilon_D$ 分别为裂尖前端及尾端的应力及应变场, A_c 为复合材料的横截面积, $\frac{\partial \xi_f}{\partial s}$ 为界面滑移的摩擦能量耗散率(单位

厚度)。

如果纤维及基体界面无粘结,只是由于残余应力的作用使得界面靠摩擦阻力控制,这样,材料由状态 1 转化到状态 2 所释放的弹性势能将用于平衡已开裂部分基体的断裂能 Γ_m 与摩擦阻力能之和,因此,式(8.60)成为

$$\frac{1}{2A_c} \int_{-l}^l \int_{A_c} (\sigma_U - \sigma_D) \cdot (\epsilon_U - \epsilon_D) dA dz = v_m \Gamma_m \quad (8.61)$$

式中 v_m 为基体所占的体积含量。根据式(8.61)可以求得纤维增强脆性基体复合材料中基体稳态开裂应力,它对于纤维与基体界面滑移情况和结合完好未滑移情况都是适用的。在有界面滑移的情况,要求滑移是单调增加的。

对于初始界面结合完好,但在外载作用下界面发生开裂的情况,不考虑式(8.60)中的摩擦滑移项,释放的能量要平衡基体开裂所需要的能量和界面脱粘的能量。对于单位裂纹扩展,在裂纹的每一侧每根纤维脱粘的面积为 $2\pi a l_d$,单位面积内界面产生脱粘的纤维数量为 $v_f/(\pi a^2)$,这样,总的界面开裂能量释放率为 $4v_f(l_d/a)\Gamma_d$,其中 l_d 为界面脱粘长度, v_f 为纤维体积含量, a 为纤维半径, Γ_d 为界面脱粘的临界能量释放率。因此,式(8.61)变为

$$\frac{1}{2A_c} \int_{-l}^l \int_{A_c} (\sigma_U - \sigma_D) \cdot (\epsilon_U - \epsilon_D) dA dz = v_m \Gamma_m + 4v_f(l_d/a)\Gamma_d \quad (8.62)$$

为了利用式(8.61)和式(8.62)计算基体的稳态开裂应力,必须首先计算裂纹前端及尾端的应力场分布 σ_U 及 σ_D ,对界面脱粘情况还要计算脱粘长度 l_d 。下面计算裂纹前端和尾端的纤维和基体中的应力。

对于裂纹前端的未开裂部分,其应力状态与无裂纹的材料情况一样。假设等应变假设成立,则纤维和基体内的应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma_f^U &= (E_f/E)\sigma + \sigma_f^I \\ \sigma_m^U &= (E_m/E)\sigma + \sigma_m^I \end{aligned} \quad (8.63)$$

其中 σ 为单向外荷载, σ_f^I 和 σ_m^I 分别为未加载复合材料中纤维和

基体内的初始轴向应力, E_f 和 E_m 为纤维和基体的杨氏模量。 E 为复合材料的轴向杨氏模量, 可由混合率求出

$$E = E_f v_f + E_m v_m \quad (8.64)$$

初应力和总体应力满足关系

$$v_f \sigma_m^I + v_m \sigma_m^I = 0 \quad (8.65)$$

和

$$v_f \sigma_f + v_m \sigma_m = \sigma \quad (8.66)$$

裂纹尾区的应力稍复杂一些, 与界面的粘结有关, 参见图 8.16。在裂纹面上, 纤维与基体的轴向应力为

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \sigma / v_f \\ \sigma_m &= 0 \end{aligned} \quad (8.67)$$

对于离开裂纹面两侧较远的地方 ($z = l, l \gg a$), 其应力仍由式(8.63)表示。对于远离尖端但靠近裂纹面的区域, 纤维和基体中的应力与界面的滑移和摩擦情况有关, 可由剪滞法求得。

8.6.1 界面无脱粘、无滑移(图 8.16a)

取出一同心圆柱微元体, 半径为 a 的纤维由一层外半径为 R 的圆柱形基体包裹。取 $R = a / \sqrt{v_f}$ 以满足材料对纤维体积分含量的要求, 为了使问题简化, 可以认为在 a 及 R 之间基体所承受的轴向荷载均集中在半径为 $\bar{R}$ 的圆环上, 而 $a < r < \bar{R}$ 区间的基体仅承担剪切荷载 $\tau_{rz}(r, z)$ 。这个区域的平衡方程为

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (8.68)$$

由弹性理论

$$\tau_{rz} = \mu_m \frac{\partial w}{\partial r} \quad (8.69)$$

其中 $w(r, z)$ 为无裂纹状态的轴向位移。考虑一基体环的平衡, 可得到

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{a \tau_i(z)}{r} \quad (8.70)$$

式中 $\tau_i(z)$ 为界面剪切应力, 由下式确定

$$\tau_i(z) = \frac{\mu_m (w_m - w_f)}{a \ln(R/a)} \quad (8.71)$$

式中 $w_f = w(a, z)$, $w_m = w(\bar{R}, z)$ 分别为纤维及基体 ($r = \bar{R}$ 处) 的轴向位移。考虑纤维的轴向平衡, 得到

$$\frac{\partial \sigma_f}{\partial z} + \left(\frac{2}{a} \right) \tau_i = 0 \quad (8.72)$$

利用关系

$$\frac{\sigma_f - \sigma_f^I}{E_f} = \frac{dw_f}{dz} \quad (8.73a)$$

$$\frac{\sigma_m - \sigma_m^I}{E_m} = \frac{dw_m}{dz} \quad (8.73b)$$

和方程(8.66), (8.71)和(8.72), 并利用 $z = 0$ 及 $|z| = \infty$ 时边界条件(8.63)和(8.67), 求得尾区纤维和基体中的应力

$$\begin{aligned} \sigma_f^D - \sigma_f^U &= (v_m/v_f) \sigma_m^U e^{-\rho|z|/a} \\ \sigma_m^D - \sigma_m^U &= -\sigma_m^U e^{-\rho|z|/a} \\ \tau_i^D &= \frac{z}{|z|} \times \frac{\rho}{2} (v_m/v_f) \sigma_m^U e^{-\rho|z|/a} \end{aligned} \quad (8.74a)$$

其中

$$\rho = \left[\frac{2\mu_m E}{v_m E_m E_f \ln(\bar{R}/a)} \right]^{1/2} \quad (8.74b)$$

由于上式没有计及界面的滑移效应, 对于纤维与基体之间靠摩擦力联结的情况, 上述结果仅在界面不产生滑移时才适用, 亦即满足关系

$$\tau_i^D(0) \leq \tau_s \quad (8.75a)$$

或者

$$\sigma + (E/E_m) \sigma_m^I \leq \left(\frac{2v_f E}{\rho v_m E_m} \right) \tau_s \quad (8.75b)$$

式中, τ_s 为界面滑移的临界应力。

8.6.2 纤维产生滑移(图 8.16b)

当方程式(8.75)不满足时, 界面以摩擦力 $\tau_i = \tau_s$ 产生滑移, 在裂纹的每侧的纤维滑移长度为 l_s 。对于远离裂尖的尾区和 $0 \leq |z| \leq l_s$, 由式(8.66)、(8.67)和(8.72)可以得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^D &= \frac{\sigma}{\nu_f} - 2\tau_s |z|/a \\ \sigma_m^D &= 2(\nu_f/\nu_m)\tau_s |z|/a \quad (0 \leq |z| \leq l_s) \\ \tau_i^D &= \tau_s \end{aligned} \right\} \quad (8.76)$$

对于 $|z| \geq l_s$, 由式(8.66)、(8.70)~(8.72), 利用边界条件 $|z| = l_s, \tau_i = \tau_s$, 并且当 $|z| = \infty$ 时, 式(8.63)成立。可得

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_i^D - \sigma_i^U &= \frac{2\tau_s}{\rho} e^{-\rho(|z| - l_s)/a} \\ \sigma_m^D - \sigma_m^U &= -\frac{2\tau_s}{\rho} (\nu_f/\nu_m) e^{-\rho(|z| - l_s)/a} \quad (|z| \geq l_s) \\ \tau_i^D &= \frac{z}{|z|} \tau_s e^{-\rho(|z| - l_s)/a} \end{aligned} \right. \quad (8.77)$$

由 $|z| = l_s$ 处轴向应力连续条件, 可以得到关系

$$\frac{l_s}{a} = \frac{[\sigma + (E/E_m)\sigma_m^I] \left[\frac{\nu_m E_m}{\nu_f E} \right]}{2\tau_s} - \frac{1}{\rho} \quad (8.78)$$

这就是确定界面滑移长度 l_s 的公式, 当 $l_s = 0$ 时, 这一结果与条件(8.75b)一致。当然方程(8.76)和(8.77)仅在 $l_s/a \geq 0$ 时才成立。当 l_s 大于几个纤维半径时, 式(8.78)中的 $1/\rho$ 项较小。

8.6.3 初始粘结, 但在荷载作用下纤维脱粘(图 8.16c)

假设界面在裂尖处沿着纤维脱粘了长度 l_d , 而且界面脱粘区域保持张开。则在 $0 \leq |z| \leq l_d$ 内, 轴向和剪切应力简化为

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_i^D &= \sigma/\nu_f \\ \sigma_m^D &= 0 \\ \tau_i^D &= 0 \end{aligned} \right. \quad (8.79)$$

在 $|z| \geq l_d$ 内, 利用剪滞分析可得到与无滑移情况一样的结果, 只是在式(8.74)中将指数函数中的 $|z|$ 用 $(|z| - l_d)$ 代替。界面剪应力将不会产生超过裂尖脱粘长度 l_d 的任何附加脱粘。

与滑移情况相反, 在 $|z| = l_d$ 处, τ_i 具有不连续性。

有了裂尖前端和尾端的应力, 可以计算基体的稳态开裂应力。

基体开裂: (i) 无粘结, 纤维靠摩擦力控制

当 $l \rightarrow \infty$ 时, 稳态开裂情况的方程(8.61)可以写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\nu_f}{E_f} (\sigma_f^U - \sigma_f^D)^2 + \frac{\nu_m}{E_m} (\sigma_m^U - \sigma_m^D)^2 \right] dz \\ & + \frac{1}{2\pi R^2 \mu_m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^{\bar{R}} (\tau_{rz}^D)^2 2\pi r dr dz = \nu_m \Gamma_m \end{aligned} \quad (8.80)$$

对界面无滑移情况, 将式(8.66)代入式(8.80), 可以导出基体稳态开裂应力 σ_{cr} 满足的关系

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} + \frac{\sigma_m^I}{E_m} = \left[\frac{\nu_f E_f \Gamma_m \rho}{a E_m E} \right]^{1/2} \quad (8.81)$$

如果不考虑左边第二项, 上式与 Aveston 和 Kelly 导出的结果一致。而系数 ρ 与半径 $\bar{R}$ 有关, 应首先确定 $\bar{R}$ 。Budiansky, Hutchinson 和 Evans^[17]用能量等效法得到关系

$$\log \left(\frac{\bar{R}}{a} \right) = - \frac{2 \log \nu_f + \nu_m (3 - \nu_f)}{4 \nu_m^2} \quad (8.82)$$

此式表明当 $\nu_f \rightarrow 1$ 时, $(\bar{R} - a)/(R - a) \rightarrow 1/3$; 当 $\nu_f \rightarrow 0$ 时, $(\bar{R} - a)/(R - a) \rightarrow e^{-3/4} \approx 0.47$ 。

现在, 引入常量

$$B = \left(\frac{\nu_m}{6 \log(\bar{R}/a)} \right)^{1/4} \quad (8.83)$$

则 ρ 的表达式(8.74b)可以写成

$$\rho = \frac{B^2}{\nu_m} \left[\frac{6E}{E_f (1 + \nu_m)} \right]^{1/2} \quad (8.84)$$

这样, 式(8.81)可写成如下形式

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} + \frac{\sigma_m^I}{E_m} = \frac{\sigma_0}{E} \quad (8.85)$$

式中

$$\frac{\sigma_0}{E} = B \left[\frac{6\nu_f E_f}{\nu_m^2 E (1 + \nu_m)} \right]^{1/4} \left[\frac{\Gamma_m}{a E_m} \right]^{1/2} \quad (8.86)$$

将式(8.82)代入式(8.83), 得到

$$B = \left[\frac{2\nu_m^3}{-6\log\nu_f - 3\nu_m(3 - \nu_f)} \right]^{1/4} \quad (8.87)$$

当 $\nu_f \rightarrow 1$ 时, $B \rightarrow 1$ 。对于较大的纤维体分比, 参数 B 的变化很小。

当纤维与基体界面产生滑移时, 对 $0 \leq |z| \leq l_s$, 可将方程 (8.76) 代入式 (8.80), 忽略区域 $|z| \geq l_s$ 中释放的能量, 式 (8.78) 中略去 $1/\rho$ 项 (这相当于 $l_s/a \rightarrow \infty$, 大滑移的情况), 得到如下结果

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} + \frac{\sigma_m^I}{E_m} = \frac{\sigma_1}{E} \quad (8.88)$$

其中

$$\frac{\sigma_1}{E} = \left[\frac{6\nu_f^2 E_f \tau_s}{\nu_m E_m E} \right]^{1/3} \left[\frac{\Gamma_m}{a E_m} \right]^{1/3} \quad (8.89)$$

这个结果是 ACK 针对大滑移情况得到的结果。为了建立无滑移和大滑移之间的关系, 将 $|z| \geq l_s$ 的式 (8.77) 和 $0 \leq |z| \leq l_s$ 的式 (8.76) 代入式 (8.80), 可以得到如下公式

$$\frac{\sigma_{cr} + (E/E_m)\sigma_m^I}{\sigma_0} = \frac{Y}{3} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^3 \quad (8.90)$$

$$\text{且:} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \left(\frac{27}{Y^3 + 3Y - 1} \right)^{1/6} \quad (8.91)$$

参量 Y 由下式定义

$$Y = \left(\frac{\sigma_{cr}}{E} + \frac{\sigma_m^I}{E_m} \right) \left(\frac{\nu_m E_m \rho}{2\nu_f \tau_s} \right) \quad (8.92)$$

在 $Y > 1$ 范围内的滑移情况下, 参数 $\frac{\sigma_{cr} + (E/E_m)\sigma_m^I}{\sigma_0}$ 随独立变量 $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)$ 的变化曲线如图 8.19 所示。

当 $Y = 1$ 时, $(\sigma_1/\sigma_0) = 3^{1/3} = 1.442$ 。所以对 $(\sigma_1/\sigma_0) > 3^{1/3}$ 的无滑移结果为

$$\frac{\sigma_{cr} + (E/E_m)\sigma_m^I}{\sigma_0} = 1 \quad (8.93)$$

当 $Y \rightarrow \infty$ 时, $(\sigma_1/\sigma_0) \rightarrow 0$ 。此时 $\sigma_{cr} + (E/E_m)\sigma_m^I$ 接近于大滑

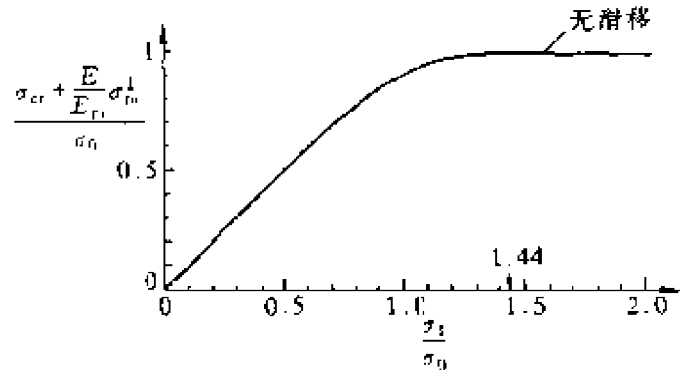


图 8.19 基体开裂应力(初始无粘结,只有摩擦控制纤维)

移 ACK 理论的 σ_1 , 大滑移的结果与图中曲线的初始部分符合较好。

利用式(8.88)可以对初始的非弹性失配应变进行优化,以使基体的稳态扩展应力取最大值。

基体开裂: (ii) 初始粘结, 但在外载作用下界面脱粘并张开

利用式(8.79), 可以将能量方程(8.62)写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\nu_f}{E_f} (\sigma_f^U - \sigma_f^D)^2 + \frac{\nu_m}{E_m} (\sigma_m^U - \sigma_m^D)^2 \right] dz \\ & + \frac{1}{2\pi R^2 \mu_m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^{\bar{R}} (\tau_{rz}^D)^2 2\pi r dr dz = \nu_m \Gamma_m \end{aligned} \quad (8.94)$$

由此, 可以建立确定基体稳态开裂应力的方程如下:

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} = \left[\frac{1 + \frac{4\nu_f l_d \Gamma_d}{\nu_m a \Gamma_m}}{1 + \frac{\rho l_d}{a}} \right]^{1/2} - \left(\frac{E}{E_m} \right) \frac{\sigma_m^I}{\sigma_0} \quad (8.95)$$

要计算 σ_{cr} , 需要首先确定脱粘长度 l_d 。

利用能量平衡法可以得到脱粘长度 l_d

$$l_d/a = (1 + \sqrt{\nu_f}) \left(\frac{1 - \nu_m}{8\nu_f} \right)^{1/2} X \quad (8.96)$$

和

$$\Gamma_d/\Gamma_m = \frac{(1 + \sqrt{\nu_f})^2}{128\pi\nu_f} \left[\frac{2}{\nu_f(1 - \nu_m)} \right]^{1/2} Q(X) \quad (8.97)$$

式中

$$Q(X) = \left\{ \frac{\int_0^X \frac{\cosh s ds}{\sqrt{s}}}{\cosh X} \right\}^2 \quad (8.98)$$

其中 $X = (l_d/R) \left(\frac{2}{1-\nu_f} \right)^{1/2}$

图 8.20 绘出了 $Q(X)$ 随 X 变化曲线, 式(8.96)和式(8.97)表明, l_d/a 不是 Γ_d/Γ_m 的单值函数。图 8.21 绘出了相对于不同纤维体积含量情况, 界面开裂长度随界面断裂韧性变化曲线。从图中可以发现, 当 $X^* = 0.9204$ 时, $Q(X)$ 达到最大值 $Q^* = 2.061$ 。将 Q^* 代入式(8.97), 可得 Γ_d/Γ_m 的临界值 $(\Gamma_d/\Gamma_m)^*$ 。这一临界值随纤维体积含量变化曲线如图 8.22 所示。

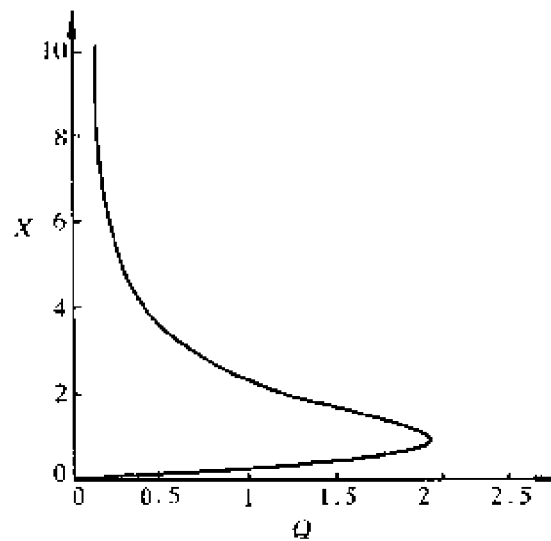


图 8.20 无量纲函数 $Q(X)$

利用式(8.74b), 计算基体稳态开裂应力的方程(8.89)变为

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} + \frac{E}{E_m} \frac{\sigma_m^I}{\sigma_0} = \left\{ \frac{1 + \frac{4\nu_f l_d \Gamma_d}{\nu_m a \Gamma_m}}{1 + \frac{B^2 l_d}{\nu_m a} \left[\frac{6E}{(1+\nu_m)E_f} \right]^{1/2}} \right\}^{1/2} \quad (8.99)$$

当 $\Gamma_d/\Gamma_m > (\Gamma_d/\Gamma_m)^*$ 时, 界面不会产生脱粘。无滑移的结果为

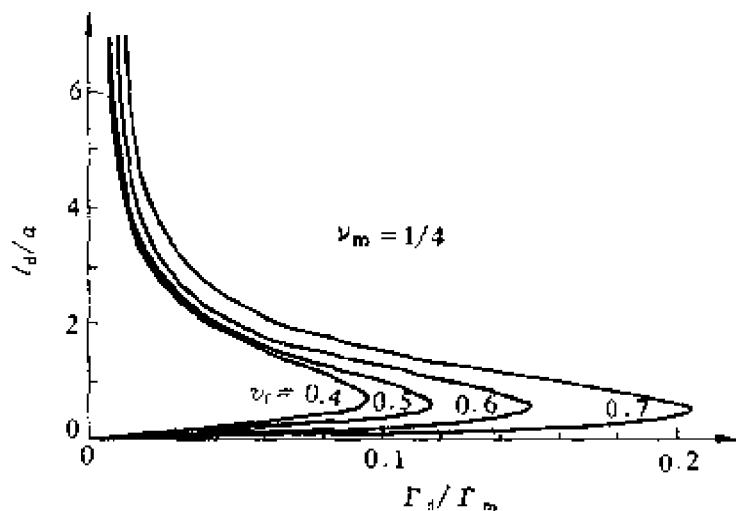


图 8.21 脱粘长度与韧度比的关系

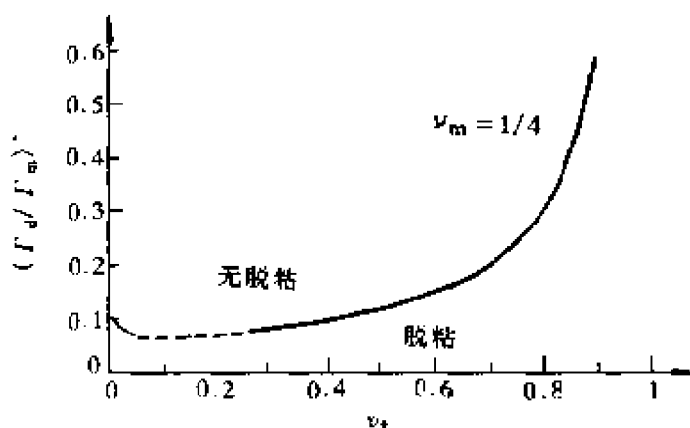


图 8.22 临界脱粘韧度与纤维体分比的关系

方程(8.93)。在有脱粘[即 $\Gamma_d/\Gamma_m < (\Gamma_d/\Gamma_m)^*$]的情况下,式(8.99)预测的基体开裂应力应该小于无脱粘的情况。实际上只要

$$(\Gamma_d/\Gamma_m)^* < \frac{B^2}{4\nu_f} \left[\frac{6E}{E_f(1+\nu_m)} \right]^{1/2} \quad (8.100)$$

式(8.99)的值就小于 1。条件(8.100)一般很容易满足。图8.23说明了基体开裂强度从无脱粘到脱粘的急剧下降的变化情况。在这个图中取材料常数为 $E_f/E_m=3$, $\nu_m=1/4$, $\sigma_m^J=0$ 。

上述结果与 Marshall 和 Evans^[18]的实验结果进行了对比,对于碳化硅纤维增强玻璃陶瓷基体复合材料,理论结果与实验观察基本一致。

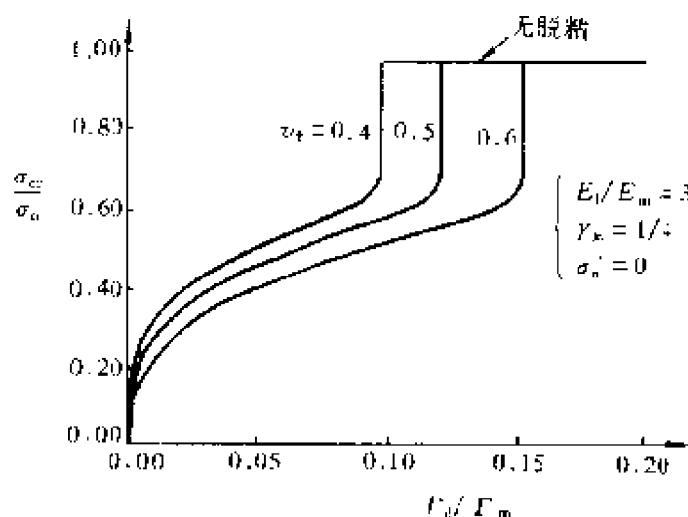


图 8.23 基体开裂强度与初度比的关系

§ 8.7 基体开裂问题的应力强度因子法

用 ACK 模型分析基体的稳态开裂强度存在两个限制,其一,是不能考虑裂纹的分布状态,而玻璃和陶瓷一类的材料的开裂强度与裂纹的分布有关。其二,ACK 方法的基本原理是比较基体开裂前后的能量变化,但是严格的热力学分析要求考虑裂纹长度的影响。

Marshall, Cox 和 Evans^[19]利用应力强度因子法考虑纤维桥联的基体开裂强度问题,并且对稳态裂纹与 ACK 能量平衡法进行了比较。对于短裂纹提出了相应的处理方法。

如图 8.24 所示的纤维桥联基体裂纹,长裂纹开口处的位移接近于基体完全破坏时的位移 u_0 。除了裂纹尖端的一段 c_0 之外,裂纹面上的位移等于 u_0 ,在这一区域桥联纤维的所受的力与施加的外力相平衡。这种情况下,只在长度 c_0 内引起裂纹尖端的应力集中,裂纹扩展所需的应力与裂纹的长度无关,裂纹扩展为稳态扩展。相反,对于短裂纹($c < c_0$),整个裂纹对应力集中都有影响,因此,就象均匀材料一样,裂纹扩展的应力与裂纹长度有关。

考虑复合材料中含有一裂纹,假定基体与纤维的滑移只有摩擦力起作用。桥联裂纹的形成分两步,首先,在外力 σ_∞ 作用下,裂

纹面上的所有纤维和基体都断开;其次,在纤维的端点施加力 T , 其大小使断开的纤维再重新闭合,如图 8.25 所示。如果裂纹的长度远大于纤维的间距,上述过程相当于在裂纹的表面施加闭合压力

$$p(x) = Tv_f \quad (8.101)$$

其中 x 为裂纹表面上的位置, v_f 为纤维体分比。如图 8.26 所示。作用在裂纹表面的净压力为 $[\sigma_\infty - p(x)]$ 。由断裂力学理论,无限大介质中裂纹的合应力强度因子为:

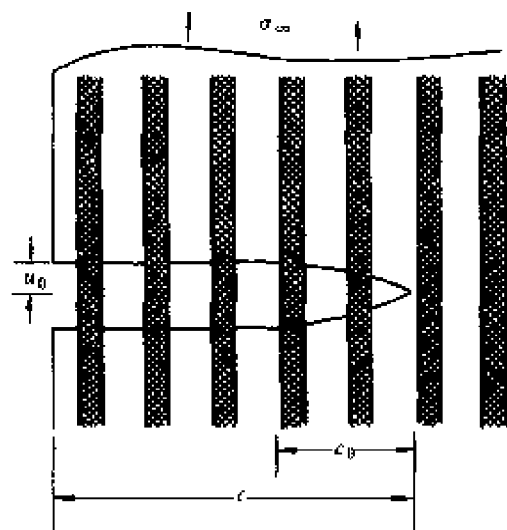


图 8.24 稳态基体裂纹

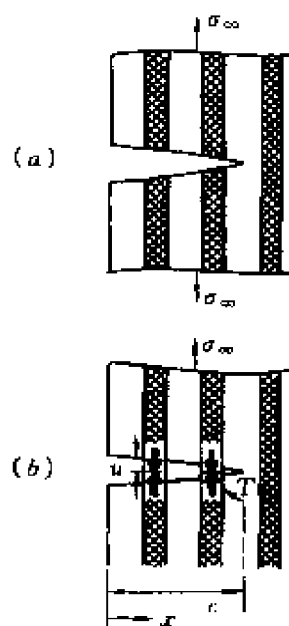


图 8.25 纤维闭合效应的实现

对直裂纹

$$K^L = 2 \left(\frac{c}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{[\sigma_\infty - p(X)] dX}{\sqrt{1 - X^2}} \quad (8.102a)$$

对币形裂纹

$$K^L = 2 \left(\frac{c}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{[\sigma_\infty - p(X)] X dX}{\sqrt{1 - X^2}} \quad (8.102b)$$

其中 $X = x/c$ 。

应力强度因子表征了紧靠基体裂纹前沿区域的应力和应变场。在这个区域内,不允许纤维和基体有相对位移,因而其变形是协调的。纤维、基体及复合材料发生的轴向变形应相同,

$$\frac{\sigma^m}{E_m} = \frac{\sigma}{E} \quad (8.103)$$

其中 σ^m 是基体的应力, σ 为复合材料的应力, E 为复合材料的有效轴向弹性模量,可由混合率求出。这样复合材料和基体的应力强度因子之间的关系为

$$K^L = K^m E / E_m \quad (8.104)$$

其中 K^m 为基体的应力强度因子,当 K^m 达到基体的临界应力强度因子 K_c^m 时,裂纹将均衡扩展。这样,裂纹的扩展准则可写为

$$K^L = K_c^L = K_c^m E / E_m \quad (8.105)$$

式(8.102)和(8.105)建立了基体开裂条件与外力 σ_∞ 的关系。但需要首先计算纤维的闭合压力 $p(x)$ 。

为了计算裂纹表面纤维的闭合压力 $p(x)$,取出如图 8.27 所示的材料单元。在 AA' 面的纤维及基体应力为远场应力,不因裂纹的存在而改变。并且

$$T_m / E_m = T_f / E_f \quad (8.106)$$

在滑移部分,纤维与基体界面有一常量摩擦阻力 τ ,其方向与滑移方向相反。分别考虑纤维和基体的平衡得到

$$T_m A_m = 2\pi R / \tau \quad (8.107a)$$

$$T A_f = 2\pi R / \tau + T_f A_f \quad (8.107b)$$

式中 R 为纤维半径, $A_f = \pi R^2$ 为纤维横截面积。 A_m 为每个纤维所拥有的基体面积。基体的应变为

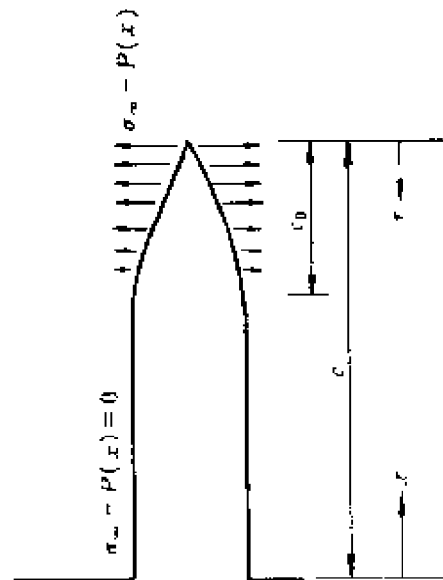


图 8.26 作用在稳态裂纹上的表面力

$$\delta/l = \pi R / (\tau A_m E_m) \quad (8.108a)$$

纤维的应变为

$$(\delta + u)/l = T_f/E_f + \pi R / (\tau A_f E_f) \quad (8.108b)$$

其中 u 为裂纹的张开位移, 即纤维的拔出长度。由式(8.106)和(8.107), 得到

$$T = 2l\tau(1 + \eta)/R \quad (8.109)$$

其中 $\eta = E_f\nu_f/(E_m\nu_m)$ 。联立式(8.106)、(8.107a)和(8.108), 得到界面的滑移长度

$$l^2 = uRE_f/[\tau(1 + \eta)] \quad (8.110)$$

将式(8.110)代入式(8.109), 得到

$$T = 2[uE_f\tau(1 + \eta)/R]^{1/2} \quad (8.111)$$

由式(8.101)得到裂纹表面的纤维闭合压力与张开位移的关系

$$p(x) = 2[u\tau\nu_f^2 E_f(1 + \eta)]^{1/2} \quad (8.112)$$

裂纹面上任一点的张开位移与整个裂纹的全部荷载有关。

对直裂纹:

$$u(X) = \frac{4(1 - \nu_m)c}{\pi E} \int_X^1 \frac{s}{\sqrt{1-s}} \int_0^1 \frac{[\sigma_\infty - p(t)]}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt ds \quad (8.113a)$$

对币形裂纹:

$$u(X) = \frac{4(1 - \nu_m)c}{\pi E} \int_X^1 \frac{s}{\sqrt{1-s}} \int_0^1 \frac{[\sigma_\infty - p(t)]t}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt ds \quad (8.113b)$$

其中 s, t 为归一化坐标。用应力强度因子法分析基体的开裂, 需要求解方程(1.112)和方程(8.113), 得到裂纹表面的力, 然后利用方程(8.102)得到应力强度因子。

对于稳态裂纹, 如图 8.27 所示, 采用量纲分析。在 $x < c - c_0$ 上, 纤维的闭合压力正好与外力平衡, 即 $\sigma_\infty - p(x) = 0$ 。但是, 在接近裂尖的区域 $c - c_0 < x < c$ 内, 存在净张力。在这个区域内, 闭合压力 $p(x)$ 应该从裂尖 $x = c$ 处的 0 值光滑地变化到 $x = c -$

c_0 处的 σ_∞ , 令

$$p = \sigma_\infty f(\rho) \quad (\rho \leq 1) \quad (8.114)$$

其中 $\rho = r/c_0 = (c-x)/c_0$; 当 $\rho = 0$ 时, $f(\rho) = 0$; 当 $\rho = 1$ 时, $f(\rho) = 1$ 。

这样, 对稳态裂纹 ($c \gg c_0$, 且当 $r > c_0$ 时, $\sigma_\infty - p(x) = 0$), 式 (8.102a) 和 (8.102b) 都简化为

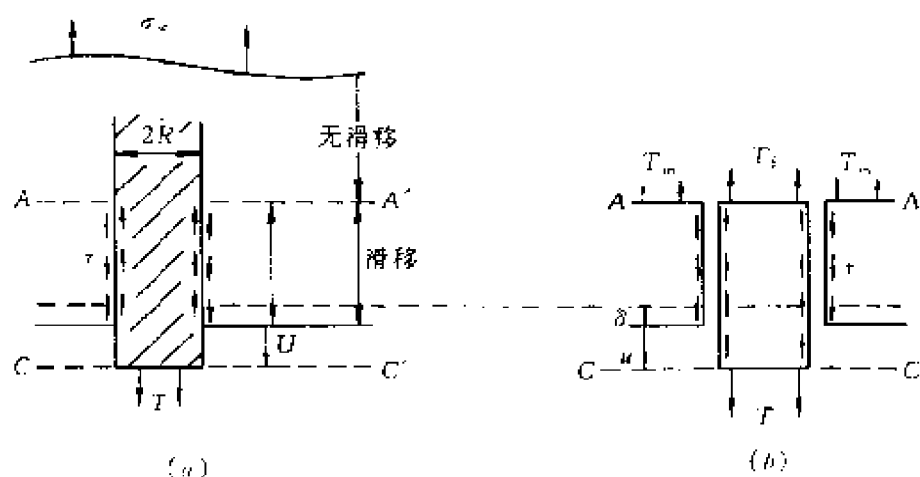


图 8.27 纤维拔出的分析模型

$$K^I = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{c_0} [\sigma_\infty - p(r)] r^{-1/2} dr = \nu \sigma_\infty c_0^{1/2} \quad (8.115)$$

其中 $\nu = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^1 [1 - f(\rho)] \rho^{-1/2} d\rho$ 是无量纲常数。式 (8.113a) 和 (8.113b) 都简化为

$$u(\rho) = \frac{2(1 - \nu_m) \sigma_\infty c_0}{\pi E} \int_\rho^0 \frac{1}{\sqrt{\rho - \lambda}} \int_1^\lambda \frac{[1 - f(\phi)] d\phi}{\sqrt{\phi - \lambda}} d\lambda \quad (8.116)$$

其中 $\phi = c(1 - t)/c_0$, $\lambda = c(1 - s)/c_0$ 。另外, 由式 (8.112) 和 (8.114), 得到

$$u(\rho) = \sigma_\infty^2 [f(\rho)]^2 R / [4\tau_f E_f (1 + \eta)] \quad (8.117)$$

由式 (8.116) 和式 (8.117), 得到

$$c_0 = \tau \sigma_\infty E R / [\tau_f^2 E_f (1 + \eta) (1 - \nu_m^2)] \quad (8.118)$$

其中 w 是无量纲常数

$$w = \frac{\pi[f(\rho)]^2}{8} \int_{\rho}^0 \frac{1}{\sqrt{\rho - \lambda}} \int_1^{\lambda} \frac{[1 - f(\phi)]d\phi}{\sqrt{\phi - \lambda}} d\lambda \quad (8.119)$$

将式(8.118)代入式(8.115)中,并令 $K^L = K_c^m E / E_m$ 时的外力 $\sigma_{\infty} = \sigma_0$, 得到基体开裂应力

$$\sigma_0 = \delta' [(1 - \nu_m^2)(K_c^m)^2 \tau E_f \nu_f^2 \nu_m (1 + \eta)^2 / (E_m R)]^{1/3} \quad (8.120)$$

其中 $\delta' = (wv^2)^{-1/3}$ 。

这一结果与 ACK 方法的结果相同。

对于短裂纹,要计算复合材料的应力强度因子,必须从式(8.112)和(8.113)中解出位移,然而无法得到这一显式解,采用近似分析。

假定短裂纹的形状与承受均布压力的裂纹的形状相同,通过调整压力的大小使其产生相同的应力强度因子 K^L 。由式(8.113)得到

$$u(x) = 2(1 - \nu_m^2) K^L c^{1/2} (1 - x^2/c^2)^{1/2} / (E\pi^{1/2}) \quad (8.121)$$

由式(8.112)和(8.113)得到实际的压力分布

$$p(x) = [\alpha K^L c^{1/2} (1 - x^2/c^2)^{1/2}]^{1/2} \quad (8.122)$$

其中 $\alpha = 8(1 - \nu_m^2) \tau \nu_f^2 E_f (1 + \eta) / (ER\pi^{1/2})$ 。

在裂纹尖端位移是 K^L 的单值函数,对于 $x \approx c$, 式(8.121)是精确解,但不适用于长裂纹的 x 很小的情况,这是因为裂纹的张开位移必须渐近地趋向 u_0 , 但由式(8.121)表示的位移在长裂纹时是无界的。在方程(8.121)中令 $p = \sigma_{\infty}$, 得到极限位移

$$u_0 = \sigma_{\infty}^2 R / [4\tau \nu_f^2 E_f (1 + \eta)] \quad (8.123)$$

在式(8.121)中令 $u = u_0$ 和 $x = 0$, 得到相应的瞬间裂纹长度 c_0

$$c_0 = \sigma_{\infty}^4 / (\alpha K^L)^2 \quad (8.124)$$

所以,方程(8.121)表示的位移只能应用于长度小于 c_0 的裂纹(即 $u < u_0$)。对于长裂纹,可通过裂纹形状相等的方法得到极值解。

将方程(8.121)代入方程(8.102)中,得到 $c \leq c_0$ 的应力强度

因子

$$K^L = \Omega \sigma_{\infty} c^{1/2} + (4\alpha/\pi)^{1/2} (K^L)^{1/2} c^{3/4} I \quad (c \leq c_0) \quad (8.125a)$$

其中 Ω 和 I 是无量纲函数, 对直裂纹

$$\Omega = \pi^{1/2}, \quad I = \int_0^1 (1 - X^2)^{-1/4} dX = 1.2 \quad (8.125b)$$

对币形裂纹:

$$\Omega = 2/\pi^{1/2}, \quad I = \int_0^1 (1 - X^2)^{-1/4} X dX = 2/3 \quad (8.125c)$$

在式(8.125a)中, 令 $K^L = K_c^L$, 得到

$$\sigma_{\infty} = K_c^L / (\Omega c^{1/2}) + [4\alpha K_c^L I^2 / (\pi \Omega)^2]^{1/2} c^{1/4} \quad (c \leq c_0) \quad (8.126)$$

将此式表示为归一化形式

$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{1}{3} \left(\frac{c}{c_m} \right)^{-1/2} + \frac{2}{3} \left(\frac{c}{c_m} \right)^{1/4} \quad (8.127a)$$

其中

$$c_m = (\pi K_c^L / \alpha I^2)^{2/3} \quad (8.127b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m &= (3/\Omega) (K_c^L \alpha I^2 / \pi)^{1/3} \\ &= \delta'' [(1 - \gamma_m^2) (K_c^L)^2 \tau E_f^2 \nu_f^2 \nu_m (1 + \eta)^2 / (E_m R)]^{1/3} \end{aligned} \quad (8.127c)$$

$$\delta'' = 6I^{2/3} / (\Omega \pi^{1/2}) \quad (8.127d)$$

方程(8.127a)表明了归一化应力与裂纹长度的关系。另外, 对式(8.112)和(8.113)可以直接进行迭代数值求解。对于直裂纹和币形裂纹, 方程(8.127a)和数值结果表示在图 8.28 中。

由图 8.28 可以看出, 当裂纹的长度 $c > c_m/3$ 时, 基体的开裂应力与裂纹长度无关, 当裂纹的长度 $c < c_m/3$ 时, 基体的开裂应力随裂纹长度的减小而迅速增大。这实际上定义了裂纹稳态扩展的范围。 c_m 可以作为一个细观结构参数, 称为基体开裂的特征长度。研究表明, 在高应力下, 基体稳态开裂的适用范围很小, 因为

稳态开裂仅适用于很小的 c_m , 并且要求纤维在裂纹面上保持完整。

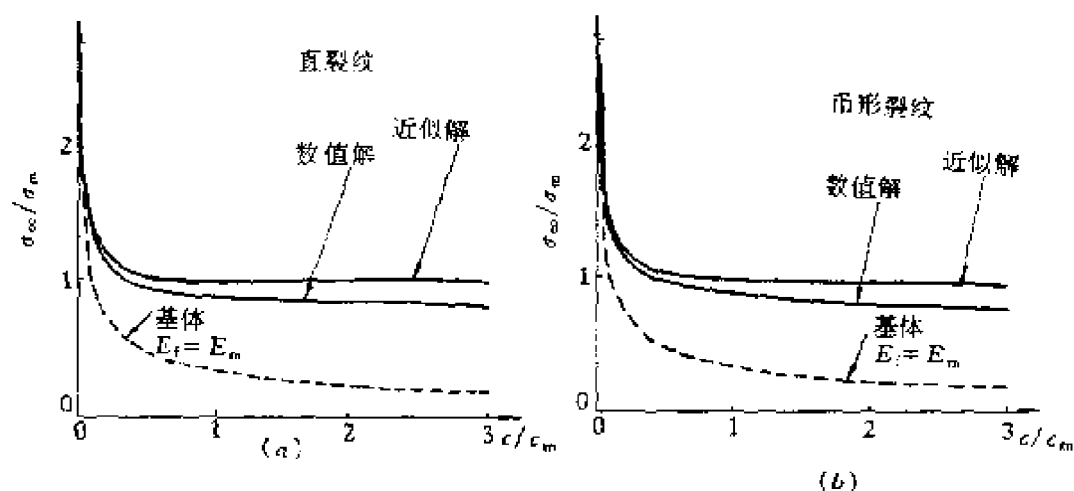


图 8.28 直裂纹与币形裂纹的归一化应力同裂纹长度的关系

基体的开裂是一个复杂的问题, ACK 能量模型适用于稳态裂纹的扩展, 本节用应力强度因子法处理了短裂纹的情况。在稳态开裂情况下, 两种方法得出一致的结果。

另一个重要问题是纤维的拔出过程, 这需要考虑复合材料的残余应力和界面的摩擦状况, 这方面的研究工作也很多^[20-24]。

参考文献

1. 薛元德. 关于复合材料破坏模式的研究. 见周履主编. 在复合材料及其结构的力学进展(第一册). 广州: 华南理工大学出版社, 1991
2. R Y Kim, N J Pagano. Initiation of damage in unidirectional brittle matrix composites. proc. 4th US-JAPAN conf. on comp. mat. 799
3. 范赋群, 曾庆敦. 复合材料力学的统计断裂理论和单向复合材料的随机临界核理论. 见王震鸣主编. 在复合材料及其结构的力学进展(第三册). 武汉: 武汉工业大学出版社, 1992
4. F Hikami, T W Chou. A Probabilistic Theory for the Strength of Discontinuous Fiber Composites. J Mater Sci, 1984, 19: 1805
5. K P Oh. A Monte Carlo study of the Strength of Unidirectional fiber-Reinforced Composites. J Comp Mater, 1979, 13: 311

6. 袁建明,曲家军,夏源明,等. 混杂复合材料破坏过程的 Monte Carlo 数值模拟. 见李顺林主编. 第八届全国复合材料会议文集. 北京:航空工业出版社, 1994. 831
7. M Taya, T Mura. On Stiffness and Strength of an Aligned Short - Fiber Reinforced composite containing Fiber - End Cracks Under Uniaxial Applied Stress. *J Appl Mech*, 1981, 48:361
8. Q Yang. Effective properties of composites with fiber - end crack. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 14(2): 171
9. 杨庆生,陈浩然,唐立民. 纤维端头脱粘对复合材料性能的影响. *大连理工大学学报*, 1992, 32(6):664 ~ 669
10. T Mori, K Saito, T Mura. An Inclusion Model for Crack Arrest in A Composite Reinforced by Sliding Fibers. *Mech Mater*, 1988, 7:49 ~ 58
11. T Mura, R Furuhashi. The elastic inclusion with a sliding interface. *Journal of Applied Mechanics*, 1984, 54:308 ~ 310
12. T Mura, I Jasiuk, B Tsuchida. The stress field of a sliding inclusion. *Int J Solids Structures*, 1985, 21(12):1165 ~ 1179
13. Jin H Huang, R Furuhashi, T Mura. Frictional sliding inclusions. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41(12) 247 ~ 265
14. J Asaro. Somigliana dislocations and internal stresses: with application to second phase hardening. *Int J Eng Sci*, 1975, 13:271 ~ 286
15. J Aveston, G Cooper, A Kelly. Single and Multiple Fracture, in *The Properties of Fiber Composites*, Conference Proceedings. National Physical Laboratory. IPC Science and Technology Press Ltd, 1971. 15 ~ 26
16. J Aveston, G Cooper, A Kelly. Theory of Multiple Fracture of Fibrous Composites. *J Mater Sci*, 1973, 8:352 ~ 362
17. B Budiansky, J W Hutchinson, A G. Evans. Matrix Fracture in Fiber Reinforced Ceramics. *J Mech Phys Solids*, 1986, 34:167 ~ 189
18. A G Evans, D B Marshall. Mechanical behaviour of ceramic matrix composites. in *Fiber Reinforced Ceramic Composites*, K S Mazdiyshi ed. Noyes Pub. 1990
19. D B Marshall, B N Cox, A G Evans. The mechanics of matrix cracking in brittle matrix fiber composites. *Acta Metall*, 1985, 33(11): 2013 ~ 2021
20. M D Thouless, A G Evans. Effects of pull out on the mechanical properties

-
- of ceramic matrix composites. *Acta Metall*, 1988, 36(3): 517~522
21. Y C Gao, Y M Mai, B Cotterel. Fracture of fiber reinforced materials. *J Appl Math and Phys*, 1988, 39: 550~572
22. J W Hutchinson, H M Jensen. Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction. *Mechanics of Materials*, 1990, 9: 139~163
23. L S Sigl, A G Evans. Effects of residual stress and frictional sliding on cracking and pullout in brittle matrix composites. *Mechanics of Materials*, 1989, 8:1~12
24. 杜善义,王彪.复合材料细观力学.北京:科学出版社,1998

第9章 复合材料界面破坏力学

在第7章中,主要讨论了界面在复合材料中的作用,并且利用界面强度的概念讨论了以剪切破坏为主要模式的界面破坏。在第8章中,讨论了界面缺陷对复合材料宏观性能和局部应力场的影响。这些工作对于理解界面(层)的作用和破坏过程有重要的帮助。但是,这些工作也存在许多明显的缺陷和不足。主要是界面强度的实验测定比较困难,单丝拔出、单丝压出和单丝碎断实验的结果分散性很大。除了实验标准的问题之外,主要原因是对剪应力在界面上的分布不清楚,而现有的假设又过于简单。最近的研究表明^[1,2],在自由端点处的界面应力是奇异的,这一结论直接导致了界面剪切强度准则的失效。因此,许多工作致力于用能量相关的参数表示界面的粘结程度,这样便形成了以界面断裂力学为核心的界面破坏力学。

本章将利用界面断裂能的概念和断裂力学的方法分析界面的破坏过程。最后将讨论基于界面控制的复合材料增强增韧机理。

§9.1 界面断裂力学—裂纹尖端弹性场

二维各向同性材料的弹性位移和应力场可用复变函数表示成^[3]:

$$2\mu(u_x + iu_y) = k\phi(z) + (\bar{z} - z)\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\Omega}(\bar{z}) \quad (9.1)$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z})] \quad (9.2)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[(\bar{z} - z)\phi''(z) - \phi'(\bar{z}) + \Omega'(z)] \quad (9.3)$$

其中 $z = x + iy$, $\phi(z)$ 和 $\Omega(z)$ 是解析函数, $\phi'(z) = d\phi/dz$, $\bar{z}$ 表示 z 的共扼。 μ 是剪切模量, ν 是泊松比。

$$k = \begin{cases} 3-4\nu & \text{平面应变} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & \text{平面应力} \end{cases}$$

用 R_1 表示无限大材料域 1, R_2 表示无限大材料域 2, 假设界面裂纹表面无外力作用, 如图 9.1 所示, 用 ϕ_1, Ω_1 和 ϕ_2, Ω_2 分别表示在 R_1 和 R_2 区域内的解。由界面的应力连续条件

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})_1 &= (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})_2 \\ (y=0, x>0) \end{aligned} \quad (9.4)$$

得到

$$\begin{aligned} \phi'_1(x)^+ + \bar{\Omega}'_1(x) \\ = \phi'_2(x)^- + \bar{\Omega}'_2(x)^+ \end{aligned} \quad (9.5)$$

由于 $\phi_1(z)$ 在 R_1 内解析, $\bar{\phi}_1(z)$ 在 R_2 内解析, 对 $\Omega_1, \phi_2, \Omega_2$ 也有相同的解析性质, 则式(9.5)可表示为:

$$\phi'_1(z) - \bar{\Omega}'_2(z) = \phi'_2(z) - \bar{\Omega}'_1(z) = 2g(z) \quad (9.6)$$

其中 $g(z)$ 在 $R = R_1 + R_2$ 上是解析的。

由界面位移连续条件:

$$(u_x + iu_y)_1 = (u_x + iu_y)_2 \quad (y=0, x>0) \quad (9.7)$$

可得到:

$$\begin{aligned} [k_1 \phi'_1(x)^+ - \bar{\Omega}'_1(x)^-] / \mu_1 &= [k_2 \phi'_2(x)^- - \bar{\Omega}'_2(x)^+] / \mu_2 \\ (x>0) \end{aligned} \quad (9.8)$$

由 $\phi'(z)$ 与 $\Omega'(z)$ 的解析连续性, 有

$$(k_1/\mu_1) \phi'_1(z) + (1/\mu_2) \bar{\Omega}'_2(z) = (k_2/\mu_2) \phi'_2(z) + (1/\mu_1) \bar{\Omega}'_1(z) \quad (9.9)$$

最后, 在裂纹表面上

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})_1 = 0 \quad (y=0^+, x<0) \quad (9.10)$$

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})_2 = 0 \quad (y=0^-, x<0) \quad (9.11)$$

可得到关系:

$$\phi'_1(x)^+ + \bar{\Omega}'_1(x)^- = 0 \quad (x<0, \text{在 } R \text{ 内}) \quad (9.12)$$

至此, 利用方程(9.6)和方程(9.9), 可以将函数 $\phi'_2(z)$ 、

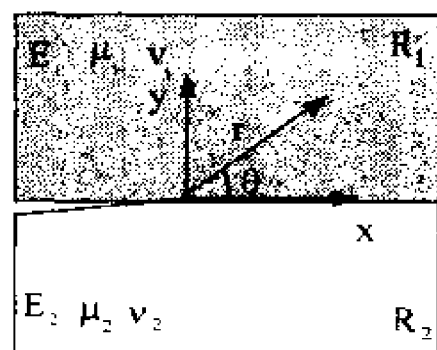


图 9.1 界面断裂问题

$\bar{\Omega}'_1(z), \bar{\Omega}'_2(z)$ 用 $\phi'_1(z)$ 和 $g(z)$ 表示出来。再利用方程 (9.12) 可首先得到函数 $\phi'_1(z)$ 的表达式:

$$\phi'_1(z) = e^{-\pi\epsilon z^{-\frac{1}{2} + i\epsilon}} f(z) + 2c_2 g(z) / (c_1 + c_2) \quad (9.13)$$

其它函数的表达式为:

$$\Omega'_1(z) = e^{\pi\epsilon z^{-\frac{1}{2} + i\epsilon}} f(z) - 2c_2 \bar{g}(z) / (c_1 + c_2) \quad (9.14)$$

$$\phi'_2(z) = e^{\pi\epsilon z^{-\frac{1}{2} - i\epsilon}} f(z) + 2c_1 g(z) / (c_1 + c_2) \quad (9.15)$$

$$\Omega'_2(z) = e^{-\pi\epsilon z^{-\frac{1}{2} + i\epsilon}} \bar{f}(z) - 2c_1 \bar{g}(z) / (c_1 + c_2) \quad (9.16)$$

其中 $f(z)$ 是在 R 内解析的函数。

$$c_1 = (k_1 + 1) / \mu_1, c_2 = (k_2 + 1) / \mu_2 \quad (9.17)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{k_1 / \mu_1 + 1 / \mu_2}{k_2 / \mu_2 + 1 / \mu_1} \right] \quad (9.18)$$

引入下述两个参数:

$$\alpha = \frac{\mu_1(k_2 + 1) - \mu_2(k_1 + 1)}{\mu_1(k_2 + 1) + \mu_2(k_1 + 1)} \quad (9.19)$$

$$\beta = \frac{\mu_1(k_2 - 1) - \mu_2(k_1 - 1)}{\mu_1(k_2 + 1) + \mu_2(k_1 + 1)} \quad (9.20)$$

它们被称为 Dundurs 参数, 表示两种材料的弹性失配程度, 对大部分的材料组合, 第二个 Dundurs 参数在零附近取值。

利用第二个 Dundurs 参数, 可将 ϵ 表示为:

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (9.21)$$

对于不同的边界条件, 可选择适当的解析函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 得到应力场。在界面裂纹尖端有

$$\sigma_{ij} = \frac{\operatorname{Re}[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} \sigma_{ij}^I(\theta) + \frac{\operatorname{Im}[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} \sigma_{ij}^{II}(\theta) \quad (9.22)$$

其中 $\sigma_{ij}^I(\theta)$ 和 $\sigma_{ij}^{II}(\theta)$ 是角度的无量纲函数。在界面裂纹前沿 ($\theta =$

0), 式(9.22)简化为

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = Kr^{i\epsilon} / \sqrt{2\pi r} \quad (9.23)$$

裂纹面之间的位移差为:

$$u + iv = \frac{8Kr^{i\epsilon}}{E^*(1+2i\epsilon)\cosh\pi\epsilon} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (9.24)$$

其中

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2},$$

$$\bar{E} = \begin{cases} E/(1-\nu^2) & (\text{平面应变}) \\ E & (\text{平面应力}) \end{cases}$$

注意到 $r^{i\epsilon} = e^{i\epsilon \ln r} = \cos(\epsilon \ln r) + i \sin(\epsilon \ln r)$, 从式(9.23)和式(9.24)可以看出, 当 r 趋于零时, 奇异应力是振荡的, 裂纹面有互相嵌入现象。只要 $\epsilon \neq 0$, 应力的奇异振荡和裂纹面的相互嵌入现象总是存在的。为了消除这种现象, 提出了许多的解决办法, 例如, 裂纹面接触区模型^[4]、无滑移界面裂纹模型和各种各样的界面层模型等^[3]。

式(9.23)中的应力强度因子是一个复数, 可表示为:

$$KL^{i\epsilon} = |K| e^{i\Psi} \quad (9.25)$$

其中相角 Ψ 可通过式(9.24)表示成:

$$\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{v}{u} \right) + \tan^{-1}(2\epsilon) - \epsilon \ln \left(\frac{L}{r} \right) \quad (9.26a)$$

上式中的 L 是一个参考长度, 对于一个界面裂纹, 要首先给定参考长度, 才能定义相角。对于不同的参考长度 L_1 和 L_2 , 对应的相角之间的关系为:

$$\Psi_2 - \Psi_1 = \epsilon \ln(L_2/L_1) \quad (9.26b)$$

应力强度因子有不同的定义方式, 式(9.22)定义的应力强度因子 K 具有 $\sigma L^{(\frac{1}{2}-i\epsilon)}$ 的量纲, 即

$$K = Y\sigma L^{(\frac{1}{2}-i\epsilon)} e^{i\Psi} \quad (9.27)$$

能量释放率可以写成:

$$G = |K|^2 / (E^* \cosh^2 \pi \epsilon) \\ = |K|^2 \left(\frac{1 - \nu_1}{\mu_1} + \frac{1 - \nu_2}{\mu_2} \right) / (4 \cosh^2 \pi \epsilon) \quad (9.28)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 上述所有方程都退化为均匀材料的解, 即

$$K = K_I + iK_{II} = |K| e^{i\Psi} \quad (9.29)$$

$$\Psi = \arctan \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right) = \arctan \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} \right) = \arctan \left(\frac{v}{u} \right) \quad (9.30)$$

$$G = (K_I^2 + K_{II}^2) / \bar{E} \quad (9.31)$$

§ 9.2 界面断裂能

双材料界面的断裂韧性有两个重要参数控制, 第一个参数是界面断裂能 Γ , 它是裂纹能量释放率的临界值, 可以根据式(9.28)计算出来。在许多情况下, 能量释放率可以直接解析地确定或用有限元法计算。能量释放率也可用裂纹表面位移表示为:

$$G = \frac{\pi(u^2 + v^2)(1 + 4\epsilon^2)}{8r[(1 - \nu_1)/\mu_1 + (1 - \nu_2)/\mu_2]} \quad (9.32a)$$

其中 u, v 分别为裂纹表面的张开和错动位移, ν, μ 为材料的泊松比和剪切模量(参看图 9.1)。

第二个重要参数是外载的相角 Ψ , 它是裂纹表面所经历的剪切与张开模式混合度的度量。其定义为式(9.26), 在 $\beta = 0$ 时, 可简化为

$$\Psi = \arctan \left(\frac{v}{u} \right) \quad (9.32b)$$

Ψ 可以利用有限元法和积分方程法确定。但它要比能量释放率的计算复杂一些。值得注意的是, 即使外载垂直于界面, Ψ 也往往是非零的。这是因为界面两侧材料的弹性失配造成的。另外, Ψ 的大小是裂纹长度的函数, 因而在求解界面断裂力学问题时, 必须要计算 Ψ 。这是界面断裂与均匀材料断裂的一个重要区

别。

9.2.1 界面断裂韧度的唯象表示

界面断裂一般是混合型的,界面断裂的混合度决定了裂纹表面是否产生接触效应与塑性变形,从而影响材料的断裂韧度。因此,界面断裂韧度与混合度具有密切的关系。设 G_I^c 是界面的纯 I 型韧度,则在混合状态下的界面断裂韧度可用下式表示^[5,6]

$$\Gamma(\Psi) = G_I^c [1 + (\lambda - 1) \sin^2 \Psi]^{-1} \quad (9.33)$$

其中 λ 是一个参数,表示 II 型断裂对界面韧度的贡献,当 $\lambda = 1$ 时,表示裂纹的扩展仅依赖于 I 型分量。对塑胶玻璃/环氧树脂 (plexiglass/epoxy) 系统, $\lambda = 0.3$ 。公式(9.33)和对塑胶玻璃/环氧树脂系统的实验结果表示于图 9.2 中。

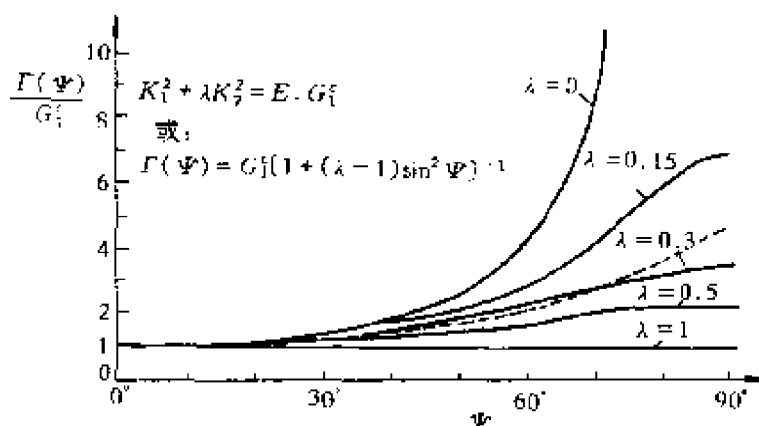


图 9.2 界面韧度与混合度的关系(式 9.33)

从公式(9.33)中可以看出,当 $\Psi \rightarrow \pi/2$ (近 II 型) 时,界面韧度明显提高,而当 $\Psi = 0$ (I 型) 时,界面韧度最低。其他的界面断裂韧度公式还有:

$$\Gamma(\Psi) = G_I^c [1 + \tan^2((\lambda - 1)\Psi)] \quad (9.34a)$$

$$\Gamma(\Psi) = G_I^c [1 + (1 - \lambda) \tan^2 \Psi] \quad (9.34b)$$

它们分别表示在图 9.3a 和图 9.3b 中。图 9.4 给出了塑胶玻璃/环氧树脂系统的实验数据及其与式(9.34b)的比较^[6],图中的 Ψ_1

和 Ψ_2 是在式(9.26)中选用不同的参考长度 L 所得的相角。

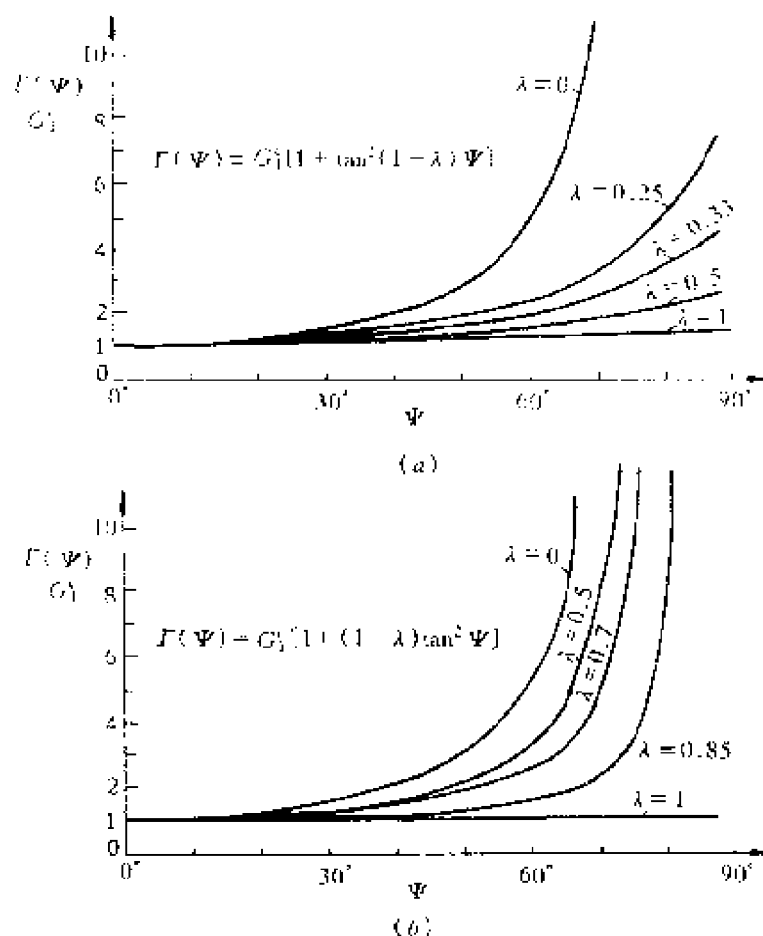


图 9.3 界面韧度与混合度的关系(式 9.34a, b)

当界面的断裂韧度确定以后,界面裂纹的起裂准则可表示为:

$$G(\Psi) = \Gamma(\Psi) \quad (9.35)$$

9.2.2 界面断裂韧度的实验测定

为了测量不同外载相角下的界面断裂韧度,已经发展了多种测试方法和试件。Evans 等^[5,9,10]列出了 4 种常用的试件。

(a) 对称双悬臂梁试件

这种试件中裂纹长度与均匀介质的厚度相比很大,因此界面上下材料可近似看成悬臂梁,如图 9.5a 所示。在忽略了剪应力的情况下,每根梁的位能贡献为:

$$U = \frac{2P^2 a^3}{Eh^3 b} \quad (9.36)$$

这里 E 为杨氏模量, h 为梁厚度, a 为裂纹长度, P 为外载, b 为梁宽。当界面上的裂纹扩展时, 其能量释放率可简单计算如下:

$$G = -\frac{2}{b} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right) = \frac{12P^2 a^2}{Eb^2 h^3} \quad (9.37)$$

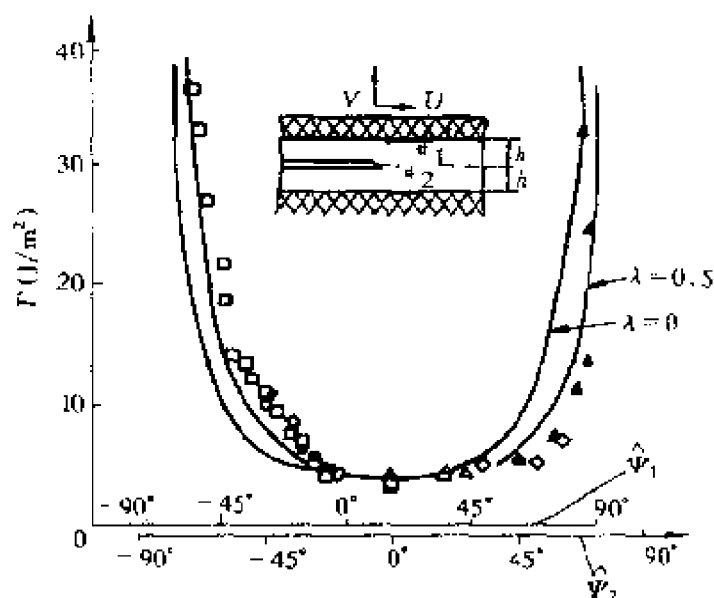


图 9.4 塑胶玻璃/环氧树脂系统的界面韧性实验数据

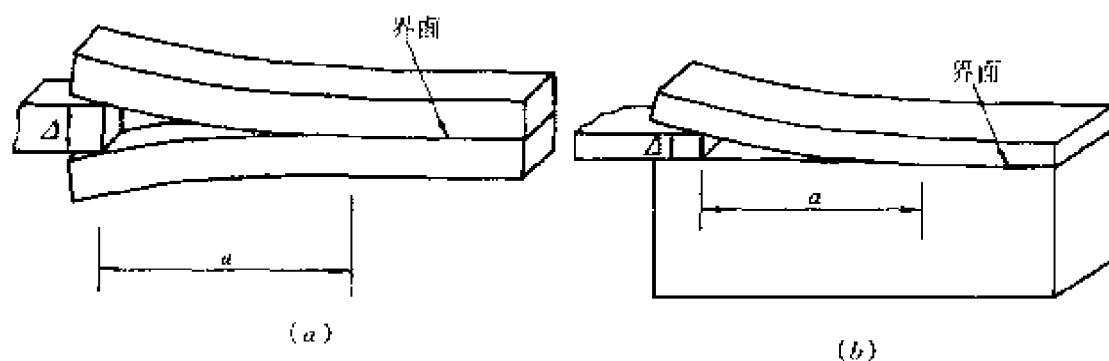


图 9.5a 对称双悬臂梁试件

图 9.5b 非对称双悬臂梁试件

其实, 以上这一种情况就是裂纹处于均匀介质中的情况。

(b) 非对称悬臂梁试件

如图 9.5b 所示, 其中只有被卷曲的上层介质的位能对 G 有贡献:

$$G = \frac{6P^2a^2}{E_1b^2h^2} = \frac{3E_1\Delta^2h^3}{8a^4} \quad (9.38)$$

其中 E_1 为上层悬臂梁的杨氏模量。

(c) 四点弯曲试件

如图 9.5c 所示,其能量释放率等于未断裂的梁的总位能与裂开的梁的总位能之差(每单位长度)。由于裂纹上部的位能很小,在计算裂开的梁的总位能时可忽略不计,而仅由裂纹下 h_2 高的梁确定。这样经过简单的运算可得到:

$$G = \frac{M^2}{2E_1b} \left(\frac{E_1}{E_2I_2} - \frac{1}{I_c} \right) \quad (9.39)$$

其中下标 c 对应于复合梁, $M = Pl/2$, I_2 和 I_c 分别为

$$I_2 = bh_2^3/12$$

$$I_c = bh_c^3/12 + \lambda bh_2^3/12 + \lambda bh_1h_2(h_1 + h_2)^2/[4(h_1 + \lambda h_2)]$$

这里 $\lambda = E_2/E_1$ 。从式(9.39)可注意到 G 与裂纹长度无关。

(d) 轴对称拉伸试件

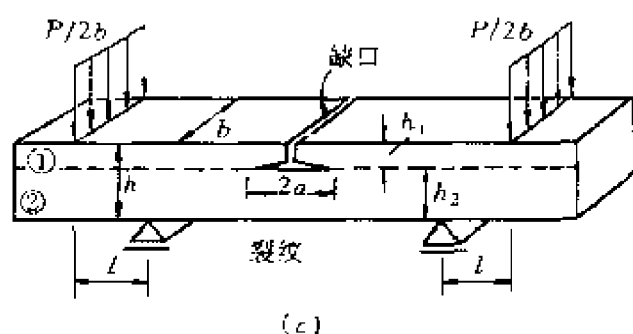


图 9.5c 四点弯曲试件

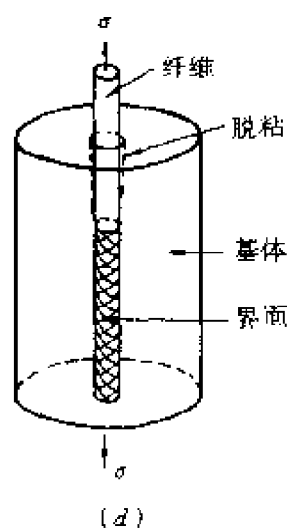


图 9.5d 轴对称拉伸试件

如图 9.5d 所示,从下部完好的复合材料位能中减去上部脱粘纤维中的位能,可得界面裂纹扩展的能量释放率:

$$G = \frac{t^2\lambda R}{4E_1[\lambda + f/(1-f)]} \quad (9.40)$$

这里 R 为纤维半径, t 为外载应力, f 为纤维所占体积百分比, E_f 为纤维模量。

上述各种试件具有一个共同的特点, 当界面裂纹的长度远大于试件的特征尺寸(如梁的厚度或纤维的半径等)时, 外载相角维持一个稳定值, 而各试件的这一稳定值可以通过有限元计算得到。但这对实验也带来许多不便, 因为不同的相角要用不同的实验来做。Wang 和 Suo^[7] 发展了一种 Brazil-nut 试件, 可以

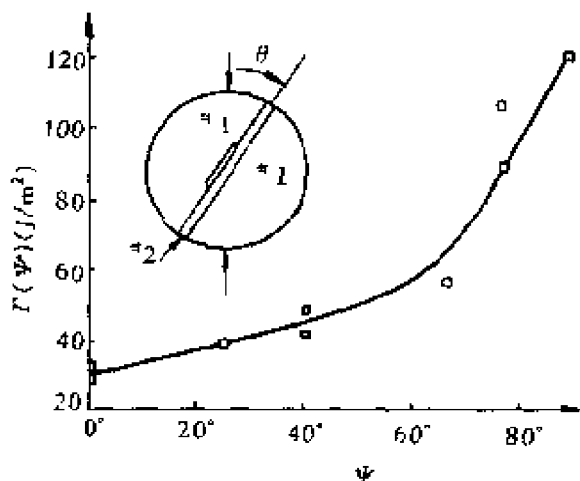


图 9.6 用 Brazil nut 试件测量的界面韧度

对不同大小的相角进行实验, 图 9.6 是利用这种实验测量的塑胶玻璃/环氧树脂 (plexiglass/epoxy) 系统的界面断裂韧度。

§ 9.3 裂纹扩展路径的选择

在各向同性均匀材料中, 能量释放率与应力强度因子之间的关系可表示为

$$G = (K_I^2 + K_{II}^2) / E \quad (9.41)$$

对于一个分叉的小裂纹, 当其长度 a 远小于主裂纹的长度时, 分叉裂纹的应力强度因子可用主裂纹的应力强度因子表示

$$\begin{cases} K_I^k = c_{11}K_I + c_{12}K_{II} \\ K_{II}^k = c_{21}K_I + c_{22}K_{II} \end{cases} \quad (9.42)$$

其中系数 c_{ij} 与分叉裂纹角度 Ω 有关。分叉裂纹的能量释放率为

$$G^k = (K_I^k + K_{II}^k) / E \quad (9.43)$$

这样可得关系式

$$G/G^k = F(\Omega, \Psi) \quad (9.44)$$

其中

$$\Psi = \arctan(K_{II}/K_I) \quad (9.45)$$

如果裂纹要偏折,必然选择使 G^k 取最大值 $G_{\max}^k$ 的方向,由此确定偏折角 Ω 。研究表明, $G_{\max}^k$ 对应的偏折角度与 $K_{II} = 0$ 对应的角度基本一致。大量的实验也证明了这一事实。

在含有界面的多相材料中,裂纹的偏转与裂纹转换主要发生在界面上^[8,9]。这可分为两种情况,一种为原来沿着界面扩展的裂纹偏折出界面,一种为垂直于界面的裂纹在界面前的偏转。

9.3.1 界面裂纹的路径选择

对于含有一种界面的二元系统,界面裂纹扩展路径取决于下列参数:加载相角 Ψ ,界面韧度 $\Gamma = \Gamma(\Psi)$,均匀材料 1 和 2 的 I 型韧度 Γ_1 和 Γ_2 ,以及 Dundurs 参数 α, β 等。

He 和 Hutchinson^[8]将界面裂纹的扩展路径选择准则表示为:当

$$G_1/G_2^{\max} > \Gamma(\Psi)/\Gamma_2 \quad (9.46)$$

时,裂纹保持在界面上;当

$$G_1/G_2^{\max} < \Gamma(\Psi)/\Gamma_2 \quad (9.47)$$

时,裂纹折入材料 2。其中 $G_2^{\max}$ 是 G_2 相对于折角 Ω 的最大值,如图 9.7 所示。与均匀材料的情况相似,利用这一准则得到的界面裂纹偏折角度与 $K_{II} = 0$ 对应的角度基本一致。当 $\beta = 0$ 时, $G_1/G_2^{\max}$ 与相角 Ψ 的关系曲线如图 9.7 所示。

Evans^[9,10]等对界面裂纹的偏折进行了实验研究,建议采用下列准则判断界面裂纹的扩展路径:

(1)当界面韧度 $\Gamma \ll \Gamma_1, \Gamma_2$ 时,对于任意相角 Ψ ,裂纹沿界面扩展。

(2)当界面韧度 $\Gamma \approx \Gamma_2, \Gamma_2 \ll \Gamma_1$ 时,存在一个相角范围,当

$$0 \leq \Psi \leq \Psi_{\max} \quad (9.48)$$

时,裂纹保持在界面上;当

$$\Psi > \Psi_{\max} \quad (9.49)$$

时,裂纹折入材料 2。其中 $\Psi_{\max}$ 与 Dundurs 参数 α, β 和比值 Γ_1/Γ_2

Γ_2 有关。这个准则被表示在图 9.8 中。

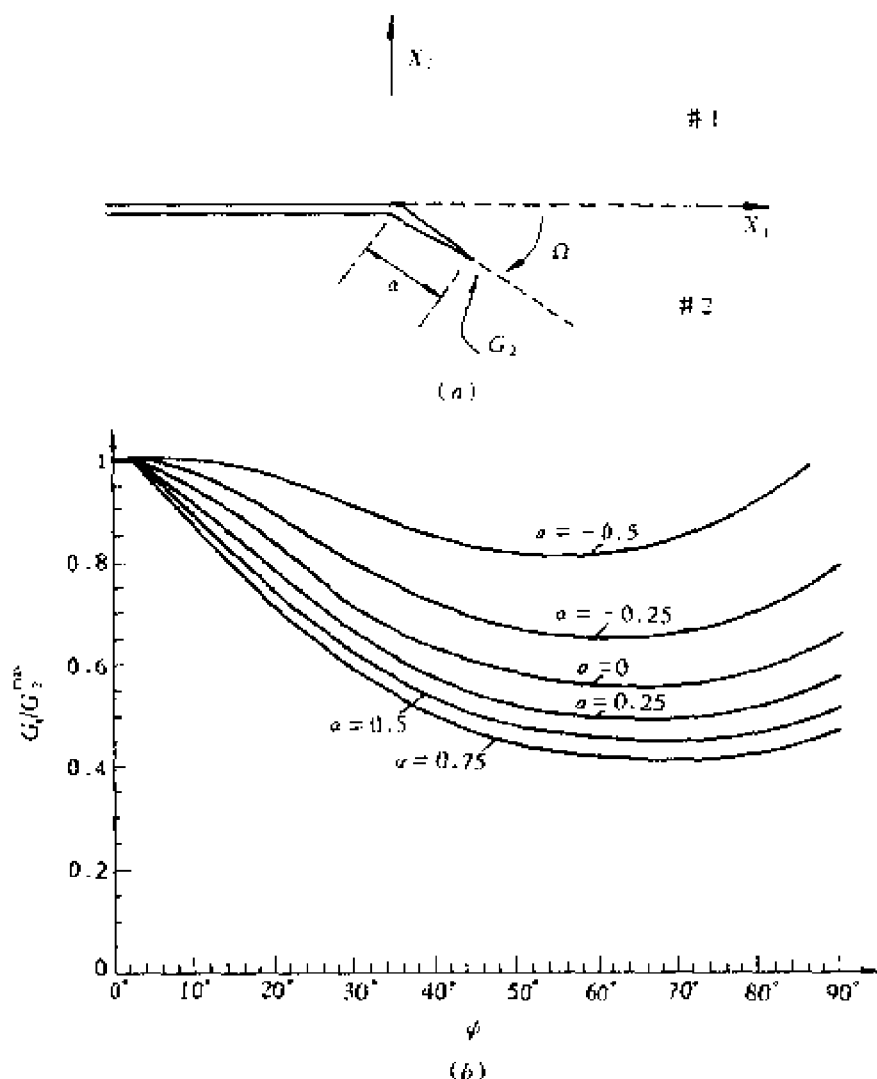


图 9.7a 界面裂纹的偏折 图 9.7b 能量释放率比值与相角的关系($\beta=0$)

在实际计算时,这一准则可进一步简化^[11]。假设 $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$, 裂纹路径选择准则为:

(1) 在 $\Psi < 0$ 的情况下,裂纹保持在界面上。

(2) 在 $\Psi \geq 0$ 的情况下,当 $\Gamma(\Psi)/\Gamma_2 \leq 1 - \rho(\Psi)$ 时,裂纹保持在界面上,反之,裂纹折入材料 2 中,其中 $\rho(\Psi)$ 与材料组合有关,在计算中可近似取为:

$$\rho(\Psi) = \begin{cases} 0.0 & \Psi \in [0, \pi/8] \\ 0.2 & \Psi \in [\pi/8, \pi/4] \\ 0.4 & \Psi \in [\pi/4, \pi/2] \end{cases} \quad (9.50)$$

9.3.2 垂直于界面的裂纹路径选择

当一条垂直于界面的裂纹扩展到界面附近时,裂纹发生偏转而沿着界面扩展的条件为^[9]:

$$\Gamma(\Psi)/\Gamma_2 \leq r(\alpha) \quad (9.51)$$

此时裂纹将折入界面上。当

$$\Gamma(\Psi)/\Gamma_2 > r(\alpha) \quad (9.52)$$

时,裂纹穿过界面,进入材料2中。对于零 α 值附近的材料组合,上式中 $\Gamma(\Psi)$ 取 $\Psi \approx 45^\circ$ 时的值, $r(\alpha) = 0.25$ 。 $r(\alpha)$ 随 α 的变化曲线如图9.9所示。

§ 9.4 基于界面控制的增强增韧机理

纤维复合材料的性能取决于许多因素,包括组分材料的性能和界面粘结状态。就复合材料的强度和韧度而言,还涉及到复合材料的破坏模式。由前面的讨论知道,界面的粘结状况对复合材料的破坏过程,因而对复合材料的强度和韧度,有重要的影响。

一个非常重要的细观结构参数是界面与纤维的韧度比值 $\Gamma(\Psi)/\Gamma_f$,高韧度复合材料必须满足 $\Gamma(\Psi)/\Gamma_f \leq r(\alpha)$ 的条件,并希望纤维从基体中拔出尽可能大的长度。但是,界面的粘结强度过低,又要影响材料的静强度。为了设计强韧平衡或高强高韧的复合材料,需要在细观结构参数之间寻找一个优化的组合关系。

Harris^[12]详细识别了单向复合材料破坏过程中的每个细观机理, Kim 和 Mai^[13]分析和综述了各个细观破坏过程对应的韧度贡献。

9.4.1 增韧机理

当单向复合材料中的基体裂纹在垂直于界面的方向扩展时,复合材料的破坏和韧化机理主要有如下几种模式:基体断裂、界面

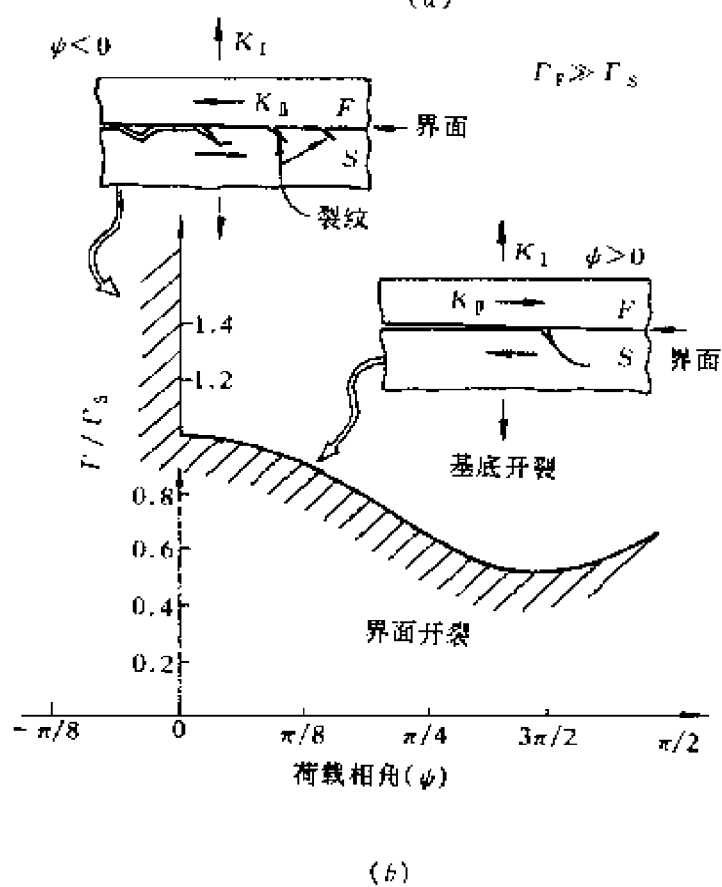
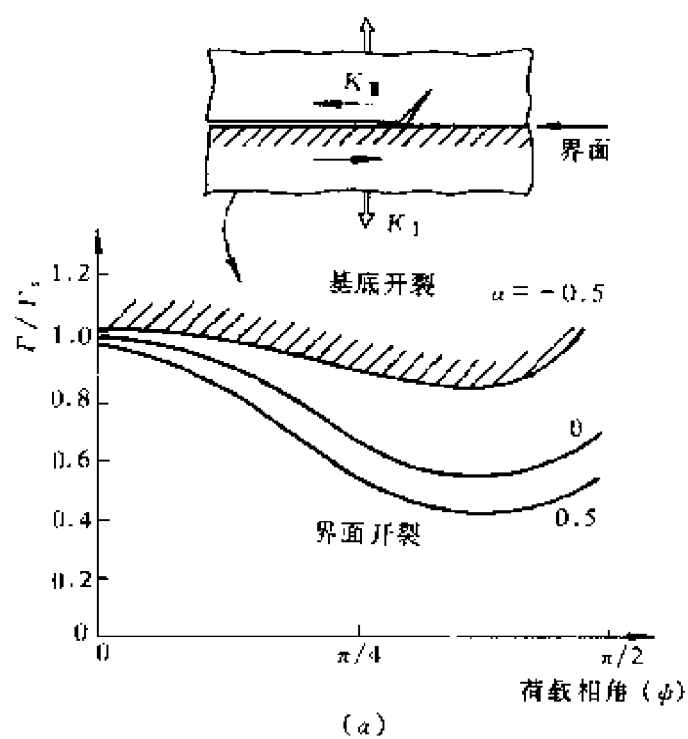


图 9.8 界面裂纹的路径选择($\beta=0$)

的裂纹将受到纤维的阻止,随着外载的增加,纤维与基体将分别变形,并在纤维内产生较大的局部应力。这导致局部的泊松压缩并最终使界面上的剪应力超过其静强度,使界面脱粘,如图 9.10b 所示。界面脱粘耗散的功(称为脱粘韧度),可用在脱粘段纤维储存的应变能表示:

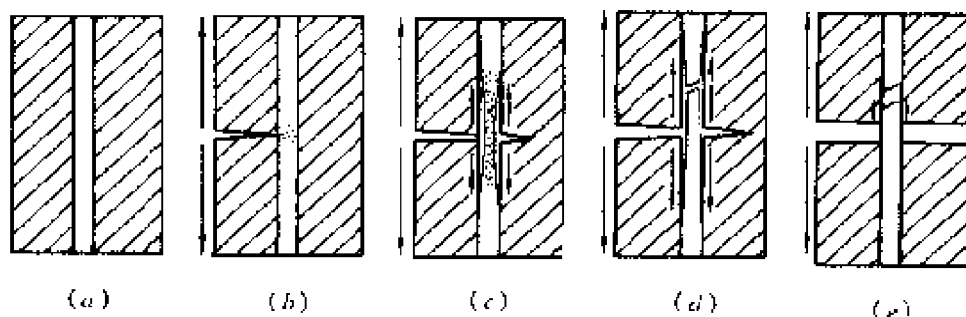


图 9.10 复合材料的破坏模式

- (a)无裂纹基体粘结纤维;(b)纤维阻止基体开裂;
(c)界面剪切和纤维的收缩造成界面脱粘和裂纹进一步扩展;
(d)脱粘后纤维在最弱处断裂;(e)拉断的纤维从基体中拔出。

$$R_d = \frac{v_f \sigma_d^2 l_d}{2E_f} \quad (9.53)$$

其中 l_d 为脱粘长度, σ_d 为脱粘时纤维的应力, E_f 和 v_f 分别为纤维的弹性模量和体分比, σ_d 为脱粘长度的函数,一般与基体收缩引起的残余应力、界面韧度和组分材料的泊松比有关。对 GFRP 的实验表明,脱粘过程是总体断裂韧度中的主要提供者。

(b) 摩擦滑移

当界面脱粘后,纤维与基体之间将产生相对运动,由摩擦产生的能量耗散等于摩擦剪力乘以界面上的相对位移,相对位移近似为 $l_d \Delta \epsilon = l_d (\epsilon_f - \epsilon_m)$, 于是,摩擦韧度为

$$R_{df} = \frac{2v_f \tau_f l_d^2 \Delta \epsilon}{d} \quad (9.54)$$

其中 τ_f 是摩擦剪切强度, d 是纤维直径。对脆性基体复合材料可假设 $\Delta \epsilon = \epsilon_f$ 。对 GFRP 的研究已经表明, R_{df} 显著地贡献于复合材料的断裂韧性。

(c) 应力重分布

界面明显脱粘之后,纤维承受的荷载继续增加,直到最终破坏。纤维也许在主裂纹平面附近的某一最弱处断裂。一旦纤维破坏,纤维立刻松弛并恢复到它的原来的直径,然后其端点部分被基体包紧。纤维断裂后的能量耗散机理就是应变能从纤维到基体的重分布。假设在断裂端的 $l_c/2$ 长度内,应力从端点开始为线性变化,纤维失去的应变能为:

$$R_r = \frac{v_f \sigma_f^2 l_c}{3E_f} = \frac{v_f \sigma_f^3 d}{2E_f \tau_f} \quad (9.55)$$

其中 l_c 为临界荷载传递长度。对 BFRP 的研究表明, R_r 显著地贡献于总的断裂韧度。

(d) 纤维拔出

裂纹的继续扩展使拉断的纤维从基体中拔出,这个过程要克服常摩擦力 τ_f 而耗散能量,即拔出功,其大小为:

$$R_{po} = \frac{2v_f \tau_f l_{po}^2}{d} \quad (9.56)$$

其中 l_{po} 为纤维的拔出长度。但 l_{po} 很难从断裂表面上确定,当纤维长度小于临界传递长度 l_c 时,所有纤维拔出。假设 l_{po} 在平均值为 $l/4$ 的 $0 \sim l/2$ 之间取值,则式(9.56)的适当平均值为:

$$R_{po} = \frac{v_f \tau_f l^2}{6d} \quad (l < l_c) \quad (9.57)$$

当 $l = l_c$ 时, R_{po} 取最大值:

$$R_{po} = \frac{v_f \tau_f l_c^2}{6d} = \frac{v_f \sigma_f l_c}{12} \quad (l = l_c) \quad (9.58)$$

注意上式利用了 $l_c = \sigma_f d / (2\tau_f)$ 。当纤维长度大于 l_c 时,拔出纤维的比例为 l_c/l , l_{po} 在 $0 \sim l_c/2$ 之间取值。这时 R_{po} 变为:

$$R_{po} = \frac{v_f \tau_f l_c^2}{6d} \left(\frac{l_c}{l} \right) \quad (l > l_c) \quad (9.59)$$

对 GFRP、CFRP、KFRP 和 BFRP 的研究表明,上式估计的拔出功近似等于实测的复合材料韧度。

(e) 总体断裂韧度

此处的总体断裂韧度包括三部分。当三个主要增韧机理：应力重分布、纤维拔出和新表面产生机理共存时，吸收的能量由三部分组成：

$$R_t = R_r + R_{po} + R_s \quad (9.60)$$

其中 R_s 为产生新的表面所作的功，它是纤维 R_f 、基体 R_m 和界面 R_i 三部分表面能之和

$$R_s = v_f R_f + (1 - v_f) R_m + v_f (l_c/d) R_i = v_f (l_c/d - 1) R_m$$

这样，式(9.60)表示为：

$$\begin{aligned} R_t &= R_r + R_{po} + R_s \\ &= \frac{v_f \sigma_f}{\tau_f} \left[\frac{\sigma_f d}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sigma_f}{E_f} \right) \frac{R_m}{2} \right] + (1 - v_f) R_m \end{aligned} \quad (9.61)$$

其中 R_f 被忽略， R_i 近似等于 R_m 。注意上式中的 R_s 已经包括了脱粘韧度 R_d 。式(9.61)适用于上述三种破坏模式共存的情况，这一方程预测结果与实验结果符合较好。

(f) 基体与纤维塑性变形功

只要不是脆性纤维/脆性基体组合，就应将组分材料的塑性变形功考虑在内，对脆性纤维增强延性基体复合材料，基体塑性剪切功为：

$$R_{ms} = \frac{(1 - v_f)^2 d \sigma_m \epsilon_m}{v_f} \quad (9.62)$$

对延性纤维增强脆性基体复合材料，纤维的塑性流动功为：

$$R_{fm} = 2 v_f d \sigma_f \epsilon_f \quad (9.63)$$

9.4.2 高韧度复合材料的设计方法

从上面的增韧机理分析可以看出，对于 $l > l_c$ 的复合材料，其韧性随着 v_f 和 σ_f 的增加而增加，随着 τ_f 的增加而减少。对于复合材料的微结构设计，我们可以明显地得到如下结论：

- (a) 使用延性基体材料；
- (b) 使用不同类型的纤维，制造混杂纤维复合材料；

- (c) 使用大直径纤维,增加纤维拔出力;
- (d) 使用强弱交替的间断界面粘结,以钝化裂尖;
- (e) 使用纤维涂层,增加韧性层;
- (f) 使用膨胀单体,减少基体的收缩等。

文献[13]从界面控制的角度,分析了间断粘结界面的增韧机理,如图 9.11 所示。间断粘结涂层在工艺上已经不存在困难,是一种非常有效地提高韧度而又不显著降低强度的界面控制技术^[14]。例如,25%的硼纤维增强环氧树脂系统,采用 80% 亚聚胺脂(PUV)进行纤维的间断涂层,其韧度提高 400%,而强度几乎没有下降。

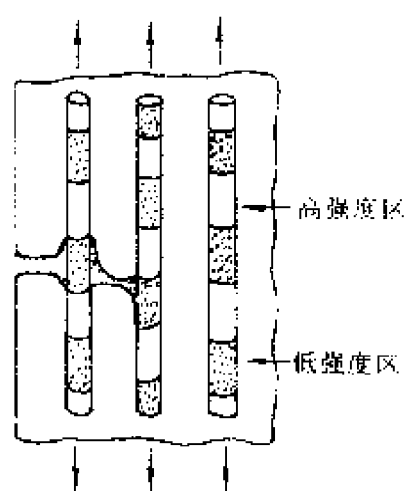


图 9.11 间断粘结界面的裂纹在弱粘结区被钝化

参考文献

1. Marozzke C. The elastic field arising in the single fiber pullout test. *Composites Sci. Tech*, 1994, 50: 393~405
2. 稽醒等. 纤维压入压出实验界面端应力奇异性的数值研究. 见: 党嘉立主编. 第十届全国复合材料学术会议文集. 长沙: 湖南科技出版社, 1998
3. R Rice. Elastic fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks. *J App Mech*, 1988, 55: 98~103
4. M Comninou. The interface crack. *J Appl Mech*, 1977, 44: 631~636
5. A G Evans, et al. The fracture energy of bimaterial interfaces. *Materials Science and Engineering*, 1990, A126: 53~64
6. J W Hutchinson, Z Suo. Mixed mode cracking in layered materials. *Advances in Applied Mechanics*. Academic Press, 1991
7. J S Wang, Z Suo. Experimental determination of interfacial toughness using Brazile-nut-sandwich. *Acta Metall*, 1990, 38: 1279~1290
8. M Y He, J W Hutchinson. Kinking of crack out of an interface. *J Appl*

-
- Mech, 1989, 56: 270~2710
9. A G Evans, et al. on crack path selection and the interface fracture energy in bimaterial systems. *Acta metall*, 1989, 37(12): 3249~3254
 10. A G Evans. The mechanical performance of fiber-reinforced ceramic matrix composites. *Materials Science and Engineering*, 1989, A107: 227~239
 11. 杨庆生. 复合材料的破坏行为与细观力学设计——数值模拟研究. 清华大学博士后研究报告, 1996
 12. B Harris. Micromechanisms of crack extension in composites. *Metal Science*, 1980, 14(7): 351
 13. J K, Kim Y W Mai. High strength, high fracture toughness fiber composites with interface control——A review. *Comp Sci Tech*, 1991, 41: 333~378
 14. A G Atkins. Intermittent bonding for high toughness / high strength composites. *J Mater Sci*, 1975, 10: 819~832

第 10 章 复合材料破坏过程的数值模拟

复合材料的破坏是一个非常复杂的过程,在这个过程中,包括有许多的破坏模式和破坏机理,而且这些破坏模式可能同时发生,也可能互相转换。前面两章的工作都是针对单一的或固定的破坏模式进行的。展开对复合材料的多模式破坏过程的研究是非常必要的。显然,数值模拟应该是首选的方法。

本章以断裂力学和界面断裂力学的概念和有限元法模拟复合材料的细观损伤过程,并针对裂纹的扩展问题,通过网格动态重新划分和裂纹扩展准则、节点力释放等主要环节来说明有限元模拟技术的发展,最后利用这些技术模拟单向纤维复合材料的破坏过程。

§ 10.1 复合材料计算细观力学

复合材料计算细观力学就是复合材料的细观力学模型与数值方法的结合,或者简单地说是针对细观模型的计算力学或利用数值方法的细观力学。因此,复合材料计算细观力学主要由两个要素构成,一是细观力学模型,二是数值计算方法。

细观力学模型大致可分为二类:一类是细观唯象理论,如 Gurson 模型等。这类模型看上去是一个唯象表示,但公式中含有细观参数,反映了细观变形机理。在用有限元进行分析时,仍然在宏观试件上进行网格划分,这种方法在模拟延性材料的孔洞形核和多晶金属的剪切带变形与滑移方面获得了成功。第二类方法是选取含有详细细观结构参数的模型,称为细观结构力学模型,在这些模型中,各组分材料的本构关系是已知的,细观参数反映在模型的细观结构中,这类模型成功的关键因素在于模型是否合理。但

这种方法需要建立细观参数与宏观参数之间的相互关系。在选择复合材料细观结构力学模型时,代表体元、自洽模型、M-T模型等可以参考。另外,利用细观结构的周期性、均匀性和对称性条件,可使模型大大简化。一个成功的细观结构力学模型应具备如下特点:

- (1)模型中必须包含所要研究的细观特征单元;
- (2)模型中必须包含足够的细观和宏观参数,这样才能建立宏观细观参数之间的关系;
- (3)模型的边界条件能够确定;
- (4)在求解上尽可能简单;
- (5)具有实验或物理基础及直观性。

一些大变形、率相关的本构关系的建立和复杂细观结构材料模型的构造,对计算力学提出了新的挑战,这种对大规模复杂系统的发展过程的数值模拟也正是现代计算力学的主要特征之一。有限元方法仍然是解决这些问题的强有力的工具之一。但是,传统意义上的有限元法必须增加新的方法和技术,才能适应细观力学对它的要求。在过去,有限元分析的目的往往是为了得到一个满意的最终结果,随着计算环境的改善和实际问题的客观要求的发展,有限元分析正在转向整个结构和一个发展过程的全程模拟。这种由一点一时的状态计算到整个空间和时间上的全程模拟是有限元法的一个重大发展。

细观计算力学的特点是大规模、非线性和长周期。大规模是指细观结构的几何形式比较复杂,各相之间的几何尺度相差很大。要想真实反映某些细观特征,必须采用非常多的自由度。例如,界面相的尺寸比纤维或基体相的尺寸相差几个量级。在利用细观唯象本构理论进行计算时,为了在宏观试件上显现细观变形特征(孔洞的形核、剪切滑移带),需要非常多的节点和单元。这样就形成非常大的解题规模。非线性是指材料的内部结构演化都是在较大变形下出现的,具有非常强的几何和材料非线性特征。长周期是指要模拟的问题是一个从变形起始到最终破坏的过程,这个过程

对数值模拟而言是非常漫长的,由此带来的网格重划分、单元消去与再生、节点释放和数据存储管理都需要进一步研究。文献[1]和[2]给出了计算细观力学进展的评述。

§ 10.2 单型应力强度因子的有限元计算

在有限元计算中,应变能释放率 G 可以利用虚裂纹扩展法计算。对于均匀材料中的裂纹,由能量释放率 G 计算出的应力强度因子 K_I 对应于 I 型外载, K_{II} 对应于 II 型外载。但对于界面裂纹,断裂模式是混合的,单型应力强度因子的计算相对复杂一些。

裂纹扩展 Δa 的能量释放率 G 可表示为^[3,4]:

$$G = -(\partial U / \partial a) = -\frac{1}{2} \{u\}^T (\partial S / \partial a) \{u\} \quad (10.1)$$

其中 U 是系统的势能, $\{u\}$ 是节点位移向量, S 是系统的刚度阵。

应力强度因子与能量释放率的关系为:

$$K_I^2 + K_{II}^2 = H \cdot G \quad (10.2)$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) / \cosh^2(\pi \epsilon)$$

为了求出单型应力强度因子 K_I , 在相同几何的问题上施加对应于 $K_I = \Delta K_I, K_{II} = 0$ 的另一组位移 $\{\Delta u_I\}$, 这样在三个位移场 $\{u\}$, $\{\Delta u_I\}$ 和 $\{u + \Delta u_I\}$ 之间的势能关系可由式(10.1)得到:

$$G_T = G + \Delta G + M_1 \quad (10.3)$$

其中

$$G_T = -\frac{1}{2} \{u + \Delta u_I\}^T [\partial S / \partial a] \{u + \Delta u_I\}$$

$$G = -\frac{1}{2} \{u\}^T [\partial S / \partial a] \{u\}$$

$$\Delta G_I = -\frac{1}{2} \{\Delta u_I\}^T [\partial S / \partial a] \{\Delta u_I\}$$

$$M_1 = -\{u\}^T [\partial S / \partial a] \{\Delta u_I\}$$

其中 M_1 表示 $\{u\}$ 与 $\{\Delta u_I\}$ 之间的相互作用能量释放率。在推导过程中应用了功的互等定理或对称正定矩阵的交换性质:

$$\frac{1}{2} \{u\}^T [\partial S / \partial a] \{\Delta u_I\} = \frac{1}{2} \{\Delta u_I\}^T [\partial S / \partial a] \{u\} \quad (10.4)$$

另一方面,由式(10.2),有:

$$G_I = [(K_I + \Delta K_I)^2 + K_{II}^2] / H$$

$$G = (K_I^2 + K_{II}^2) / H$$

$$\Delta G = \Delta K_I^2 / H$$

再由方程(10.3)得到

$$M_I = 2K_I \cdot \Delta K_I / H \quad (10.5)$$

或

$$K_I = H \cdot M_I / (2\Delta K_I) \quad (10.6)$$

若取 $\Delta K_I = 1$, 则 $K_I = \frac{1}{2} H M_I$ 。

同理,若施加对应于 $K_I = 0, K_{II} = \Delta K_{II}$ 的位移场 $\{\Delta u_{II}\}$, 可得到:

$$M_{II} = 2K_{II} \cdot \Delta K_{II} / H \quad (10.7)$$

$$K_{II} = H \cdot M_{II} / (2\Delta K_{II}) \quad (10.7)$$

若取 $\Delta K_{II} = 1$, 则 $K_{II} = \frac{1}{2} H M_{II}$,

单型位移场 $\{\Delta u_I\}$ 和 $\{\Delta u_{II}\}$ 可用下述裂尖渐近场表示:

$$\Delta u_I = \frac{\Delta K_I}{2\mu_j} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{e^{\pi\epsilon}}{1 + e^{2\pi\epsilon}} f_I(r, \theta, \epsilon, \bar{\gamma}_j) \quad (10.8)$$

$$\Delta u_{II} = \frac{\Delta K_{II}}{2\mu_j} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{e^{\pi\epsilon}}{1 + e^{2\pi\epsilon}} f_{II}(r, \theta, \epsilon, \bar{\gamma}_j) \quad (10.9)$$

其中 $j = 1, 2$ 表示材料号, μ_j 是材料的剪切模量。

无量纲向量函数 $f_I(r, \theta, \epsilon, \bar{\nu}_j), f_{II}(r, \theta, \epsilon, \bar{\nu}_j)$, 的表达式为^[3,4]:

$$f_{xI} = D_j + 2\delta_j \sin\theta \sin\Psi$$

$$f_{yI} = -C_j - 2\delta_j \sin\theta \cos\Psi$$

$$f_{xII} = -C_j + 2\delta_j \sin\theta \cos\Psi$$

$$f_{yII} = -D_j + 2\delta_j \sin\theta \sin\Psi$$

其中 D_j, C_j, δ_j, Ψ 按下列各式定义:

$$\delta_1 = e^{-(\pi - \theta)\epsilon}, \delta_2 = e^{(\pi + \theta)\epsilon}.$$

$$\Psi = \epsilon \ln r + \frac{\theta}{2}$$

$$D_j = \beta \gamma_j \cos \frac{\theta}{2} + \beta' \gamma'_j \sin \frac{\theta}{2}$$

$$C_j = \beta' \gamma_j \cos \frac{\theta}{2} - \beta \gamma'_j \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\beta = \frac{0.5 \cos(\epsilon \ln r) + \epsilon \sin(\epsilon \ln r)}{0.25 + \epsilon^2}$$

$$\beta' = \frac{0.5 \sin(\epsilon \ln r) - \epsilon \cos(\epsilon \ln r)}{0.25 + \epsilon^2}$$

$$\gamma_j = \bar{\nu}_j \delta_j - \frac{1}{\delta_j}$$

$$\gamma'_j = \bar{\nu}_j \delta_j + \frac{1}{\delta_j}$$

对平面应力情况 $\bar{\nu}_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, 对平面应变情况 $\bar{\nu}_j = 3 - 4\nu_j$, 其中 ν_j 是材料的泊松比。

这一位移场被认为能够适合于任何所要解决的问题。事实上, 在虚位移扩展法中, 只有靠近裂尖的第一圈单元发生虚刚体位移, 远处的单元保持不动, 这个位移场仅仅在刚度发生扰动的单元中被用到, 即靠近裂尖的第二圈单元中被用到。如图 10.1 中的阴影单元所示。

求出单型应力强度因子 K_I 和 K_{II} 后, K 的模与相角都可确定,

$$K = |K| \cdot e^{i\Psi^*} \quad (10.10)$$

由式(9.25), 在取定参考长度 L 后, 界面断裂的应力强度因子和相角为:

$$KL^{3/2} = |K| \cdot e^{i\Psi}, \quad (10.11a)$$

其中

$$\Psi = \Psi^* + \epsilon \ln L. \quad (10.11b)$$

在复合材料中, 参考长度 L 一般可取为纤维的半径。取长度

的单位为毫米,角度的单位为度。一般情况下,式(10.11b)中的第二项($\epsilon \ln L$)很小。

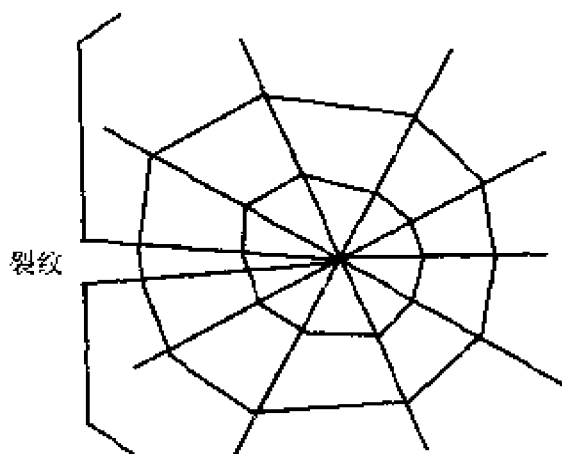


图 10.1 虚位移扩展法

§ 10.3 网格动态重新划分策略

在有限元分析中,网格的划分对整个计算过程有重要的影响,它不仅极大地影响计算精度和计算效率,而且还会决定一个计算过程能否正常进行下去。因此,从有限元诞生之日起,有关网格划分的研究就随之展开,并一直长盛不衰。由于有限元法的发展,网格划分的方法也需要重新认识,例如,在弹塑性分析中,荷载是分步施加的,所以有限元分析需要一个反复的求解过程,假如给定一个初始网格,当计算进行到第 n 步时,发现网格精度不够,需要重新划分。对于这样一个问题,通常的作法是将原来网格涂掉再重新划分,而原来计算的前 $n-1$ 步结果也弃之不要,尽管这些结果都很好。这样便会造成经济与时间的浪费。对于一个给定的几何区域,无论其边界多么复杂,都可以用最简单的方法划出最合理的有限元网格,但在计算过程中对网格随时进行修改要复杂得多。自适应有限元法研究如何在计算过程中重新划分网格。下面介绍的网格动态划分策略^[5,6,7],是在整个计算的动态过程中完成网格的重新划分。一个网格从初始状态到计算完成后的最终状态可能

相差甚远,但整个计算过程却没有因网格的重新划分而中断。

对于给定的边界条件和初始条件,有限元计算是一步一步连续进行的,每一步计算都要用到上一步的计算结果,与这一过程相应的网格动态重新划分策略的基本思想可以归纳为三个步骤:

(1) 继承上一次计算的结果和网格数据作为本次计算的基础和母体网格,例如,节点和节点位移,积分点与积分点的应力、应变等。在当前步上,母体网格只起数据传递作用,不参与计算。

(2) 在当前计算步上对母体网格进行修改,得到新的网格数据并将上一步的计算结果(载体是母体网格)都插值到新的网格上,这个网格是实际用来计算的网格。

(3) 基于计算结果的整体与局部误差估计,选出下一计算步的网格修改的区域和下一次计算的继承值,并将选择出的网格信息和计算结果作为下一次的母体。

至此完成了一个计算步和网格的一代更新。

这个网格更新过程在有限元分析过程中比较容易实现。事实上,网格的重新划分一般只在局部的小区域内进行,大部分网格是保持不变的,而且并不是每步计算都要进行网格修改,因此所要修改的网格数据和场量插值是很少的。其次,网格的更新方式可以采取相同的方法,例如每次更新网格加密一至几倍等。所以网格动态重新划分策略非常适合于增量型有限元计算的特点。另外,由于单元数和总节点数是不断变化的,所以相应的数组必须预留足够的空间,数据管理技术也要随之更新。

下面以裂纹扩展问题为例^[5,6],实现上述思想。

裂纹从一点连续地扩展到另一点,在有限元分析中用自由表面模拟裂纹面,裂纹扩展沿单元之间的界面,考虑到裂纹扩展的特点,母体网格采用矩形单元。裂纹问题的关键是计算裂纹端点处的应力场,为了保持计算精度,将修改后的计算网格设计为裂尖奇性单元,并仅在此周围区域局部加密。这个计算网格随着裂纹的扩展而不断变化,以保证奇性单元和加密网格始终处于裂纹尖端。图 10.2、图 10.3 给出了该问题的两种细分策略,其中每一种细分

策略中含有三级细分水平。母体网格记录了整个计算过程的主要数据和结果,裂纹在母体网格的单元间扩展。而加密的计算网格是保证计算精度所不可缺少的。

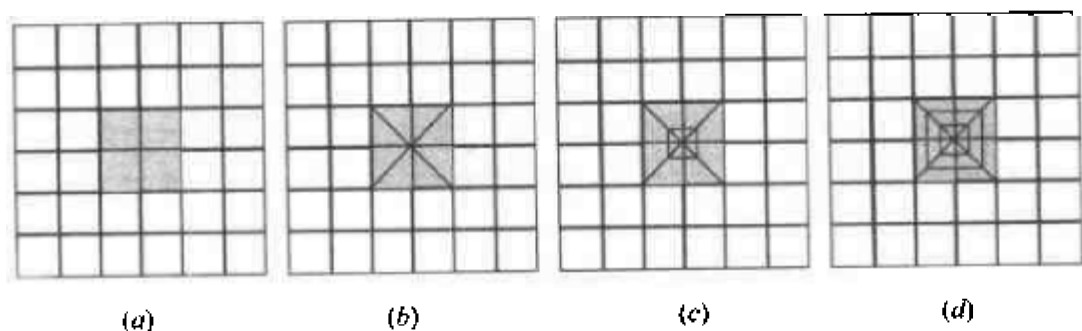


图 10.2 网格细分策略之一

(a)应力奇点与细分区域 (b)一级细分 (c)二级细分 (d)三级细分

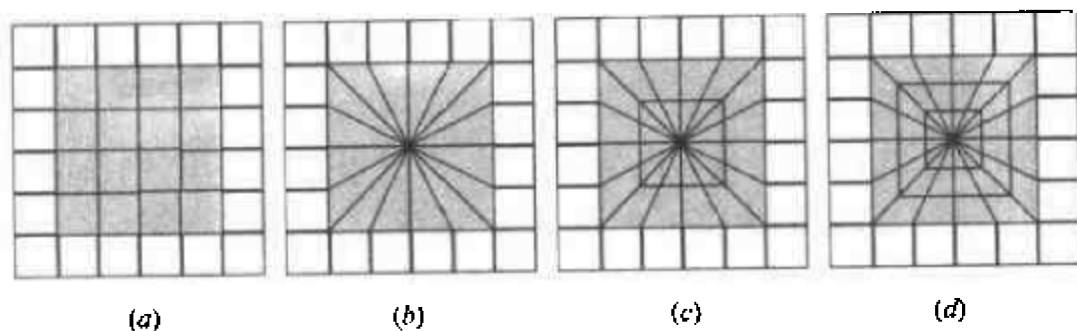


图 10.3 网格细分策略之二

(a)应力奇点与细分区域 (b)一级细分 (c)二级细分 (d)三级细分

裂纹扩展准则采用断裂力学准则,当材料的能量释放率 G 超过材料自身的断裂能 Γ 时,裂纹将扩展,即

$$G \geq \Gamma \quad (10.12)$$

裂纹扩展路径可以根据外载的混合度或界面破坏准则来确定,在矩形母体网格假设下,裂纹在每一个母体网格的节点上只有 3 条可能的扩展路径(如图 10.4a 所示),其他方向上的裂纹扩展路径都近似地纳入上述 3 条路径之一。如果在限定的单型(I 型)加载条件下,裂

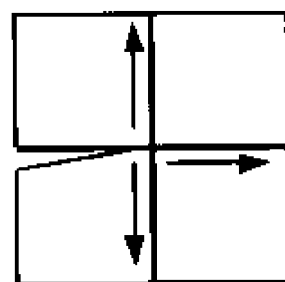


图 10.4a 裂纹在单元之间扩展

纹扩展路径只有一条,即沿裂纹面直线扩展。复杂加载条件下的裂纹曲线扩展,可用密集网格近似逼近。这种方法尽管略显粗糙,但

在多相材料中对识别单元的材料特性和材料界面是十分方便的。

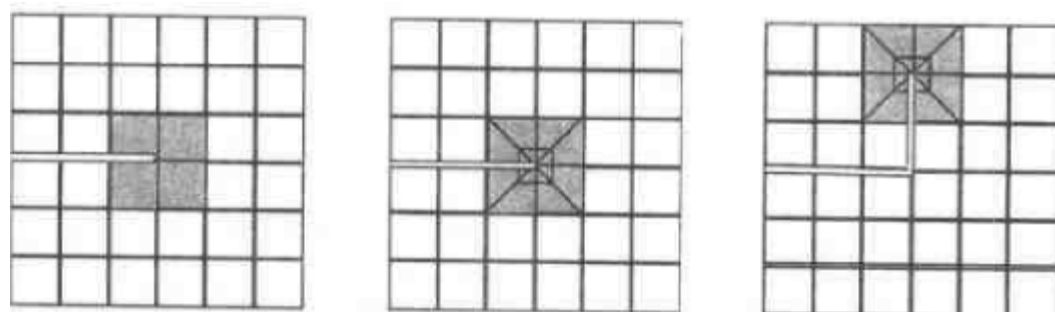


图 10.4b 裂尖区域的网格局部加密与移动

裂纹穿过的节点变成自由表面上的节点,其节点力被分步释放,裂尖的加密网格和奇异单元随裂纹一起运动,如图 10.4b 所示。裂纹每扩展一次,位于裂尖前沿的节点被释放一个。这个过程直到整个材料破坏。

由于裂纹扩展是一个连续的过程,裂纹每扩展一步,网格都要进行重新划分,但因为每一步计算都要用到上一步的计算结果,必须将旧网格上的数据插值转移到新网格上,并且保证在裂纹尖端附近具有精细网格和必要的奇性单元。网格动态重新划分策略实现了上述思想。

§ 10.4 双材料界面断裂问题的数值模拟

双材料平面应变界面裂纹扩展问题,上半部分为材料 1,下半部分为材料 2, $E_1/E_2 = 1/2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 材料 1 的韧度远远大于材料 2。受到远场 $K^\infty = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ 的作用,用 $\Psi^\infty = \arctan(K_2/K_1)$ 表示远场的相角,有限元网格如图 10.5 所示^[7]。

该问题的 Dundurs 参数为 $\alpha = -1/3$, $\beta = 1/12$ 。假设为小 β 问题,并用 $\lambda = 0.3$ 的式(9.33)表示界面的韧度。

首先研究一种弱界面,即取界面的断裂能 $G_{Ic}/\Gamma_2 = 0.8$,多次计算表明,无论 Ψ^∞ 取何值,裂纹总是沿着界面扩展,图 10.6a 给出的是 $\Psi^\infty = 20^\circ$ 时的相角随裂纹扩展的变化情况。

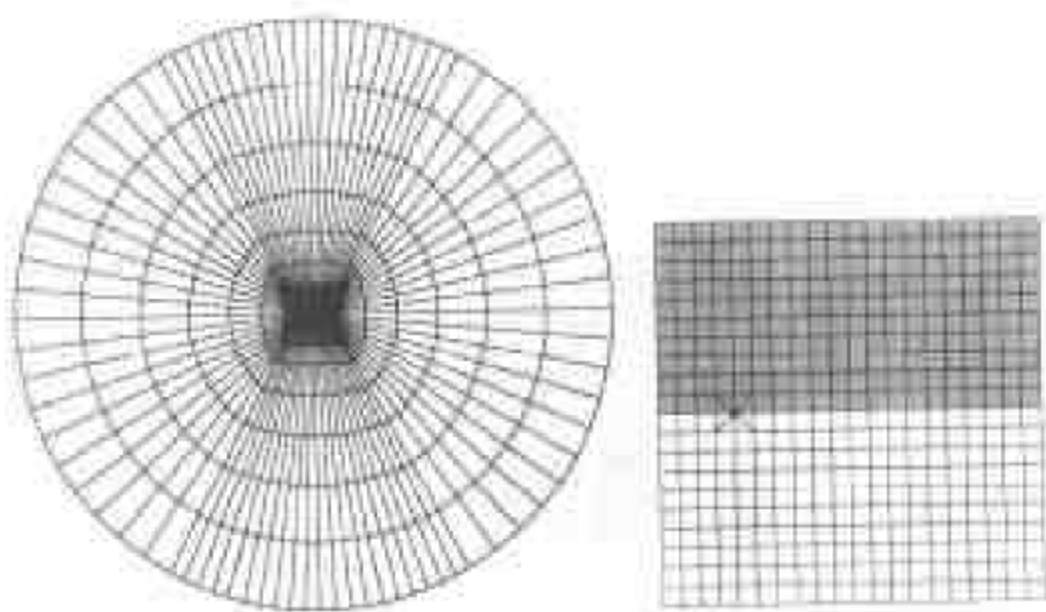


图 10.5 双材料断裂的有限元网格

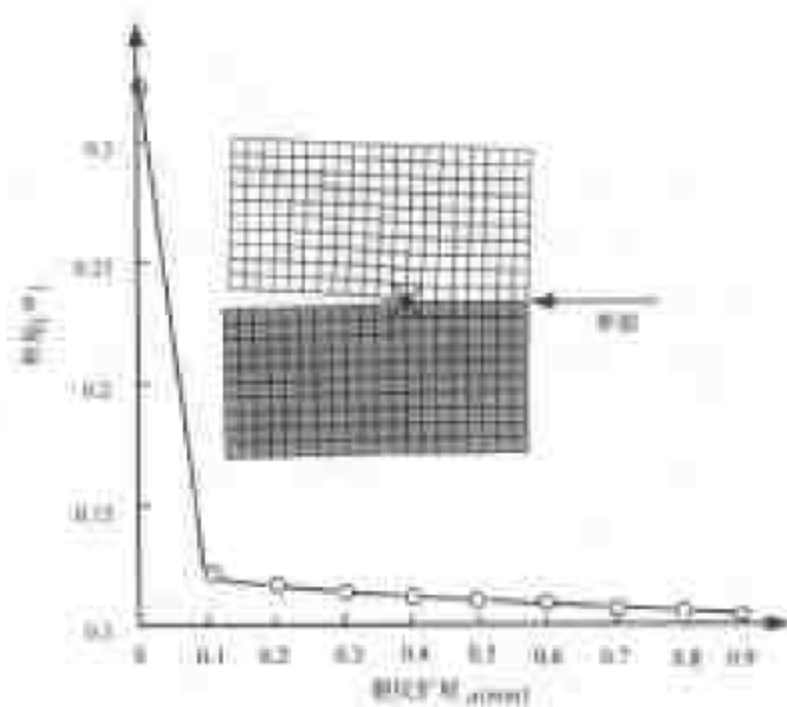


图 10.6a 裂纹沿弱界面扩展 ($\psi^m = 20^\circ$)

下面研究一种强界面, $G_{Ic}/\Gamma_2 = 1.2$ 。先取 $\psi^m = 60^\circ$, 这时裂

纹折出界面并沿着 $\Psi \rightarrow 0$ 的方向扩展,如图 10.6b 所示。

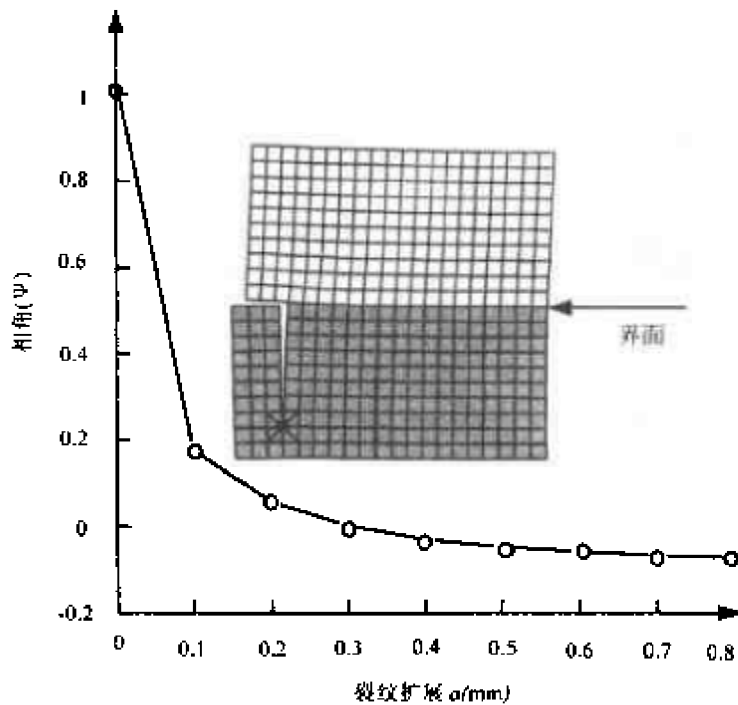


图 10.6b 裂纹折出强界面并垂直于界面扩展($\Psi^\infty = 60^\circ$)

裂纹的扩展路径完全由裂纹尖端的断裂力学参量根据破坏准则确定,所以必须保证这些参量的有限元计算精度。考虑到裂尖变形场的奇异性,特别是裂纹非直线扩展之后的复杂几何构型,在计算中采用精度较高的虚裂纹扩展法是合适的,有限元的网格局部加密和动态重分是必须的。有限元网格的动态重新划分策略是一种简单高效且实用的方法。数值例题和结果显示了数值方法的适应性。再现了界面断裂的各种破坏构型。当界面的韧度较弱时,裂纹总是沿着界面继续扩展,当界面韧度较强时,裂纹的路径取决于裂尖的混合度,一旦裂纹折出界面,其路径沿着 $K_{II} = 0$ 的方向扩展。

§ 10.5 单向应力作用下复合材料细观损伤过程模拟

本节以裂纹连续扩展的断裂力学方法,研究复合材料的细观

损伤与韧度计算,用数值方法模拟复合材料的多模式破坏过程,并计算复合材料对应不同破坏模式的有效韧度。

纤维复合材料的细观损伤机理非常复杂,细观损伤的发展对复合材料的增强增韧机理和宏观破坏性能具有重要的影响。在纤维复合材料中细观损伤的模式很多,这些损伤模式之间存在复杂的相互作用,在损伤的演化中还存在模式之间的互相转变,在不同的变形阶段可能由不同的损伤模式起主要作用。所以,非常有必要寻找能够同时模拟多种破坏模式的力学模型和数值方法。

10.5.1 力学模型

在连续纤维增强复合材料中,已经提出了各种各样的模型,其中应用最多的模型是单胞模型,即在复合材料中取出一个最小的可重复单元,通过适当的边界条件来模拟裂纹和周围材料的作用,甚至将周围材料的影响用无限大连续介质(一般取其性能为复合材料的性能)来替代。这一模型简单实用,仍然具有强大的诱惑力^[8,9,10]。

单向连续或单向短纤维增强增韧复合材料在外力作用下,主要的细观弹性破坏模式是基体开裂,界面脱粘,纤维断裂和拔出等。为了在模型中反映这些主要细观损伤模式和细观结构特征并建立宏观韧度与细观参数的联系,采用整体—局部模型作为含有无限长裂纹复合材料体的分析模型,亦即主裂纹的尖端附近是细观结构模型,而在其外部是无限大的复合材料连续介质。

考虑含有单边缺口的复合材料板的单向拉伸(平面应力)问题。为了与实验背景相对应,在整体部分,其几何和边界条件与真实试件的几何和受力状况相一致;而在局部部分,主要突出细观特征,如图 10.7 所示。根据问题的不同,细观部分可以是单胞单元,也可以由多个单胞单元组成。

在以下研究中,以玻璃纤维/环氧树脂系统为研究对象,其材料数据为:

玻璃纤维: $E_1 = 68900\text{MPa}$, $\nu_1 = 0.3$

环氧树脂: $E_2 = 2070\text{MPa}$, $\nu_2 = 0.3$

这一材料系统的 Dundurs 参数为:

$$\alpha = 0.94, \beta = 0.269$$

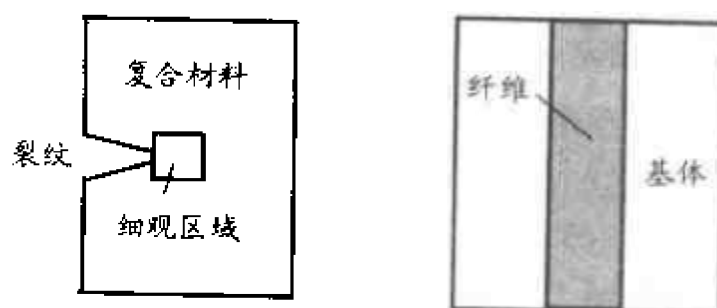


图 10.7 整体-局部模型与细观单元

组分材料的韧度为:

$$\Gamma_1 = 1.45 \text{ J/m}^2, \text{ 对应的 } K_{\text{c}} = 0.316 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

$$\Gamma_2 = 6.5 \text{ J/m}^2, \text{ 对应的 } K_{\text{c}} = 0.116 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$$

界面的韧度采用 $\lambda = 0.3$ 的式(9.33)进行计算, 式(9.51)、(9.52)中取 $r = 1.1$ 。

10.5.2 计算结果

采用整体-局部模型, 单边缺口试件的外部尺寸的高宽比为 8/1, 局部采用单胞模型, 利用对称性取其上半部分, 其有限元网格如图 10.8 所示^[10]。

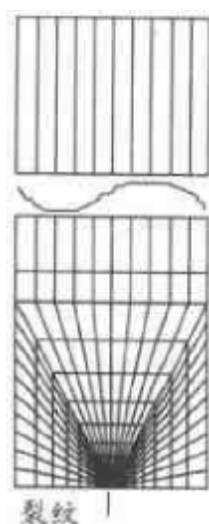


图 10.8a 整体有限元网格

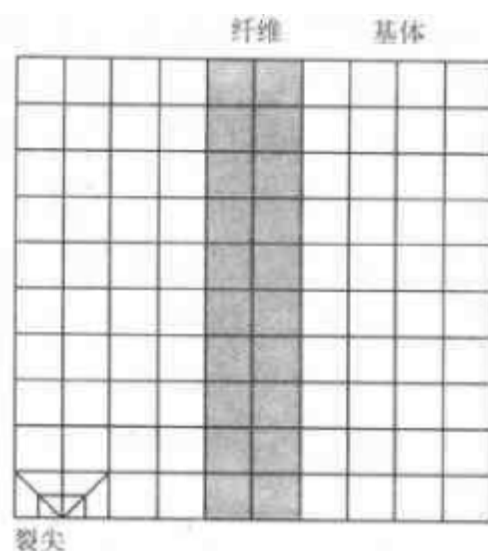


图 10.8b 局部有限元网格与裂尖起始位置

首先取界面的 I 型韧度 $G_{Ic}^I = 1.0 \text{ J/m}^2$, 它对应于一种复合材料的弱界面。在这种情况下, 按照裂纹路径选择的判断准则, 当裂纹达到界面时将会偏折到界面上继续扩展, 数值模拟结果再现了整个破坏过程的几何构型。

图 10.9a 给出了体分比为 0.2 和 0.4 时的荷载 P 与裂纹开口处的张开位移之间的曲线。图 10.9b 给出了应力应变曲线。图 10.9c 是无量纲能量释放率与裂纹扩展之间的关系曲线, 由于裂纹在扩展过程中, 外载是逐步增加的, 从曲线上可以看出加载 - 扩展 - 松弛的变形过程。图 10.9d 给出了细观部分的有限元变形网格。这些结果表明, 当破坏模式有基体开裂转为界面脱开后, 能量释放率有一个大的跌落, 然后再随着外载的增加逐步升高, 而总体的承载能力却没有大的变化, 从定性上讲, 这是一种比较理想的破坏模式。

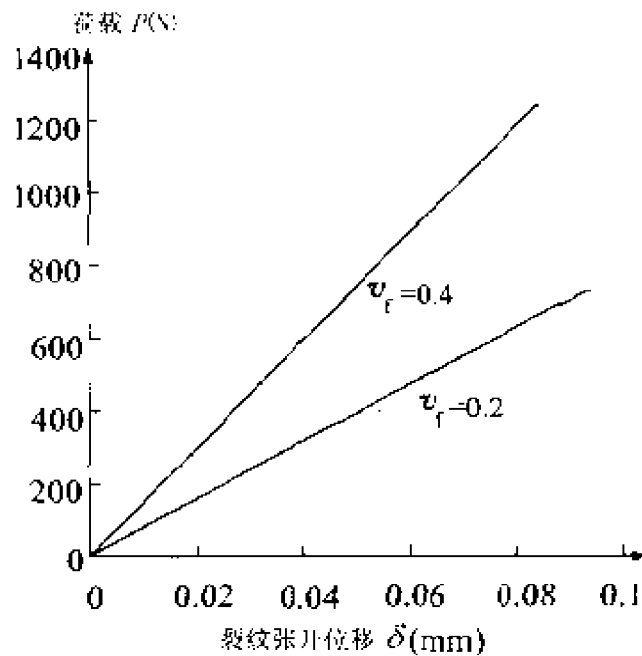


图 10.9a 弱界面复合材料的荷载 - COD 关系

取界面的 I 型韧度 $G_{Ic}^I = 5.0 \text{ J/m}^2$, 它对应于一种复合材料的强界面。在这种情况下, 裂纹将垂直穿过界面。计算结果在图

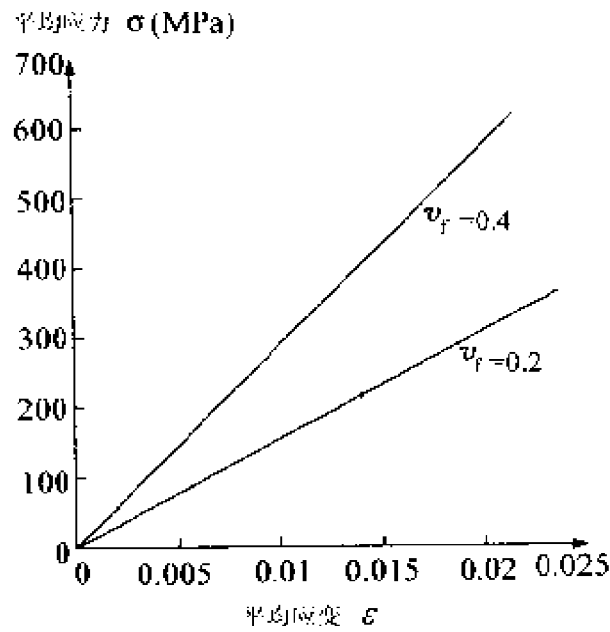


图 10.9b 弱界面复合材料的应力 - 应变关系

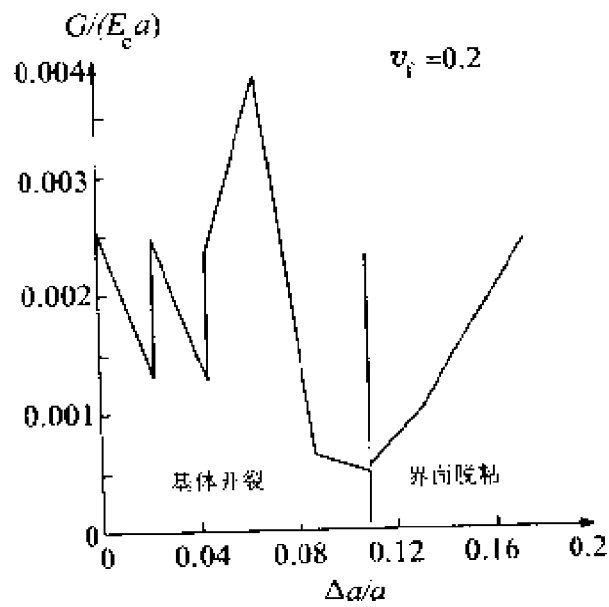


图 10.9c 弱界面复合材料的能量释放率曲线

10.10中给出,其局部模型的有限元变形网格在图 10.10d 中给出。当纤维断裂时能量释放率达到最大值,而 $P - \delta$ 曲线和应力

应变曲线都达到极值,在此之后曲线开始下降,说明一旦纤维断裂,复合材料的承载能力开始下降。这是应该避免的一种破坏模式。

文献[11]给出了一组纤维复合材料应力-应变关系的实验曲线(图 10.11),由于该文献没有报道相应的材料数据和界面状态,所以只能进行定性的比较。从图中可以看出,数值预测的曲线与实验曲线是非常相似的。

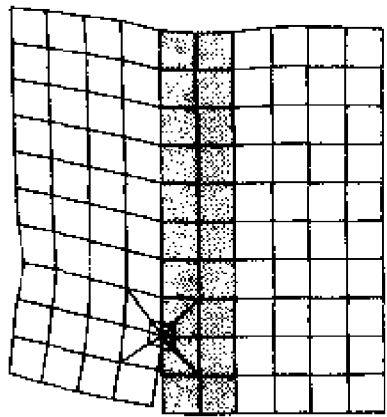


图 10.9d 弱界面复合材料的破坏构型

10.5.3 界面韧度对破坏性能的影响

在复合材料以裂纹连续扩展为主要特征的破坏模式中,不同的裂纹路径对应不同的材料韧度,而控制裂纹路径的关键参数是界面的韧度和受力状态(混合度)。为了定量地设计复合材料的宏观韧度,假设在同一破坏模式下,让界面韧度取不同的值,试看其力学行为如何变化。

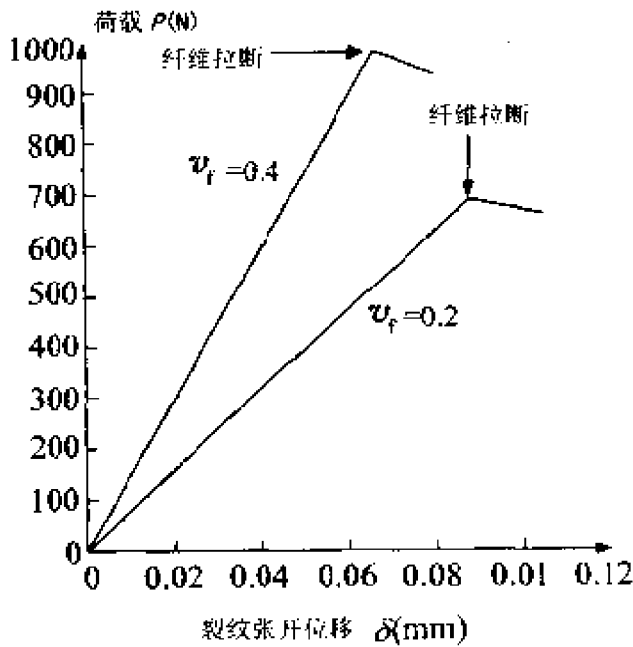


图 10.10a 强界面复合材料的荷载-COD 曲线

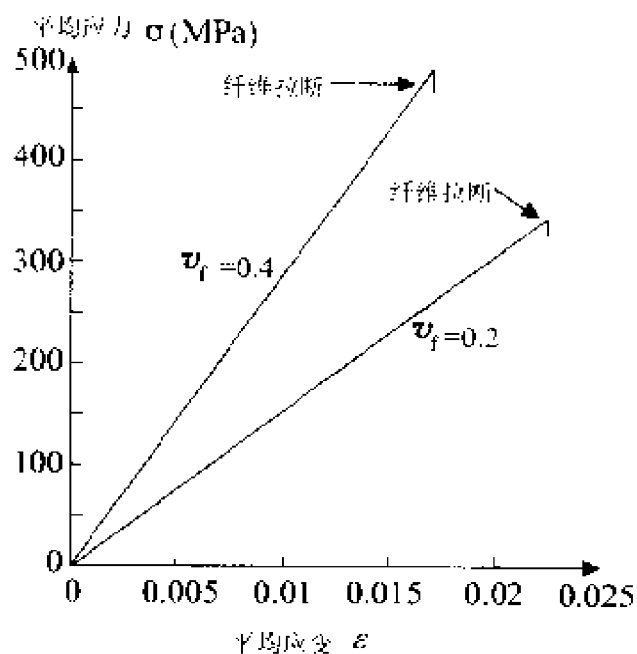


图 10.10b 强界面复合材料的应力-应变关系

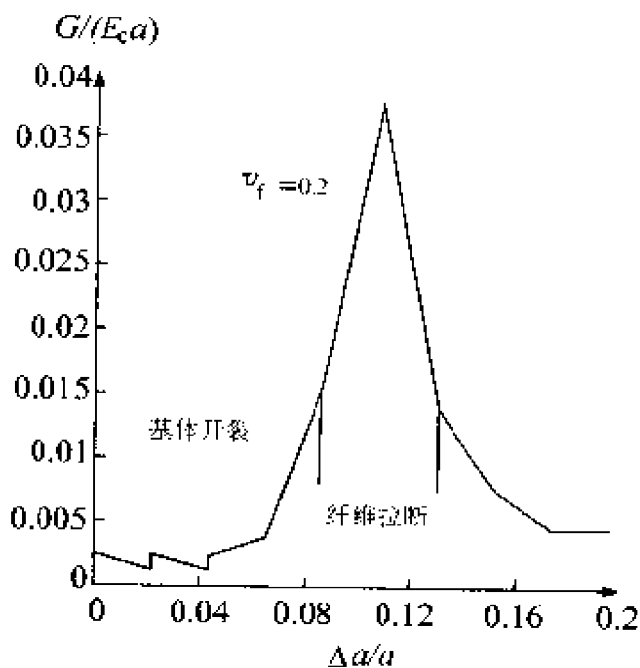


图 10.10c 强界面复合材料的能量释放率曲线

考虑有单边缺口的拉伸试件,材料性质仍然与前面的相同,但界面的 I 型断裂韧度取为 0.5J/m^2 , 1.0J/m^2 , 1.5J/m^2 三个不同的

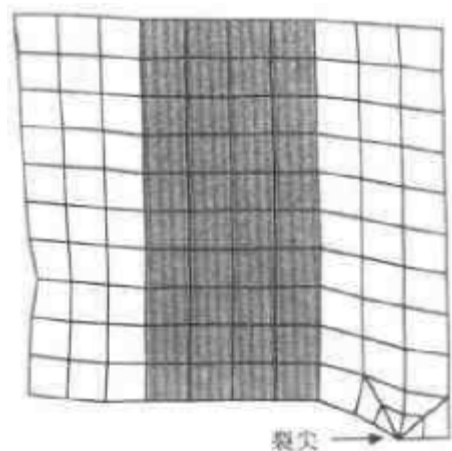


图 10.10d 强界面复合材料的
I 破坏构型($v_f=0.4$)

值。根据力学准则,这三个界面韧度都属于弱界面的情况,也即裂纹在遇到界面时会发生转折,而沿界面继续扩展。在前面的研究中已经指出这是一种较理想的破坏模式。在计算中让界面裂纹扩展相同的长度,图 10.12 分别给出了不同界面韧度下的应力-应变曲线、荷载-位移曲线和断裂阻力曲线。

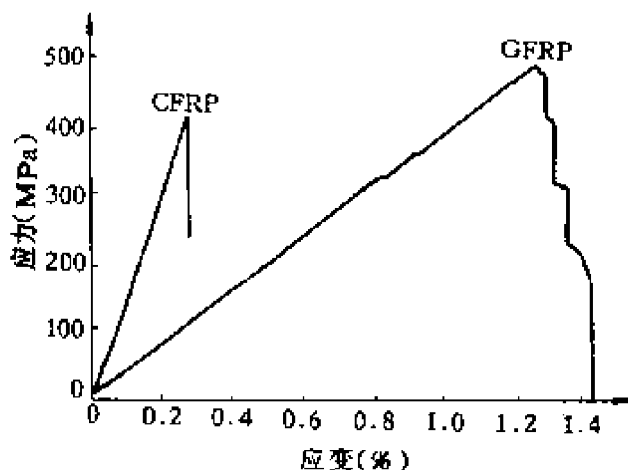


图 10.11 复合材料的应力-应变实验曲线

计算结果表明,界面的韧度对于复合材料的最终破坏强度和断裂韧性具有显著的影响。界面韧度越高,裂纹扩展相同的长度所需要的外力越大,这意味着复合材料的宏观强度越大。从这个角度讲,界面

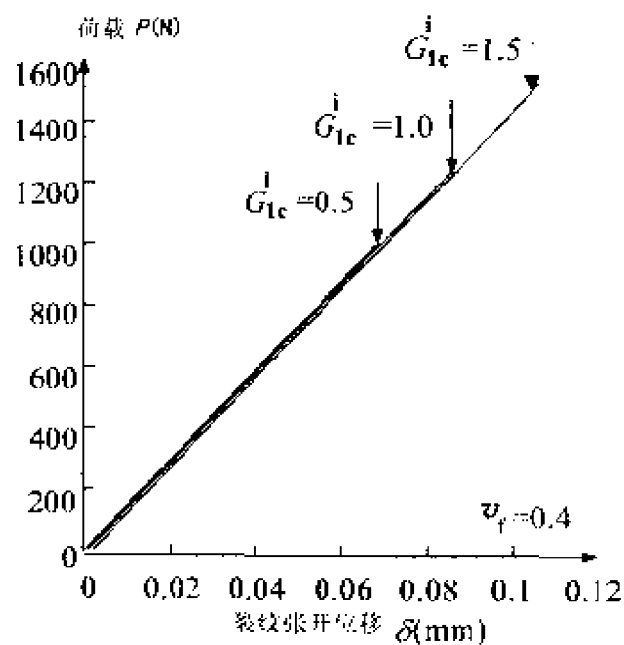


图 10.12a 界面韧度对荷载 - COD 曲线的影响

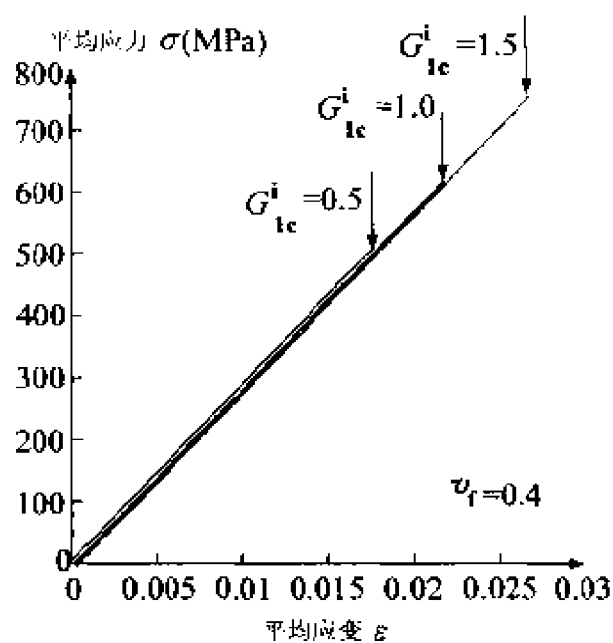


图 10.12b 界面韧度对应力 - 应变曲线的影响

的韧度越高越好,但是,当界面韧度高到一定值时,裂纹会改变扩展路径而穿过界面,使复合材料的韧度大幅度降低。因此存在界面韧度的一个最优值。

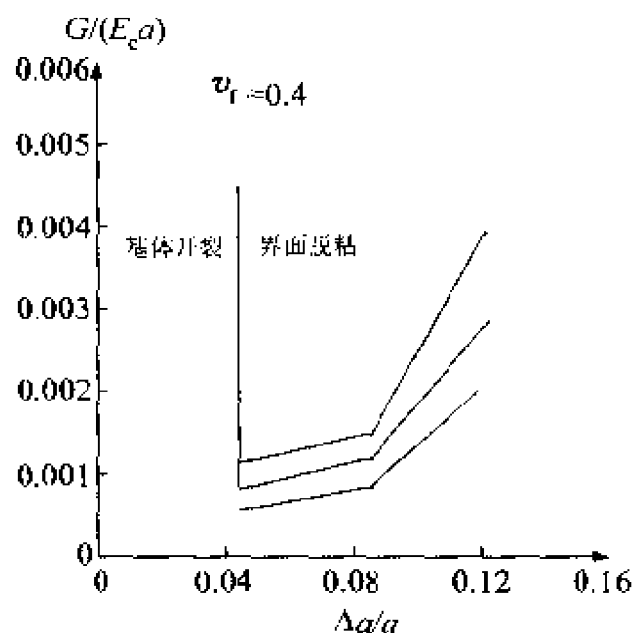


图 10.12c 界面韧度对断裂阻力曲线的影响

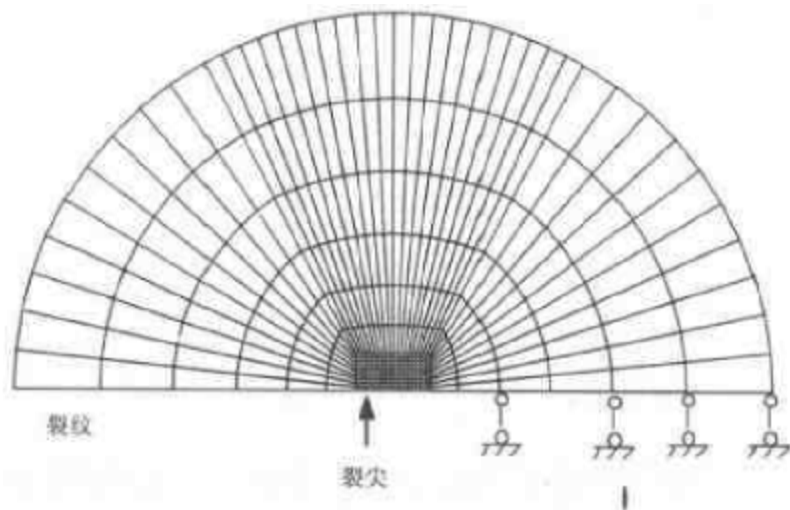
此项工作主要基于断裂力学的概念和方法,利用断裂能和混合度等参量来表征复合材料以裂纹连续扩展为主要破坏特征的细观损伤与宏观断裂的力学行为。正确地确定复合材料的破坏模式是进行韧度设计的基础,因此破坏过程的跟踪与模拟是非常重要的。研究表明,界面断裂能不仅决定复合材料的破坏模式,即使在同一种破坏模式下界面韧度也对宏观韧度有一定影响。存在界面韧度的最优值,这个最优值可能就是保持理想破坏模式(基体开裂转为界面脱粘)的最大界面韧度,它与组分材料的性能和受力状态有关。

界面断裂能实际上反映了界面的粘合功与偏析效应,可以通过工艺过程改进界面的粘结状况来控制断裂能,例如改变组分材料的组合,在纤维表面涂层等。另外界面的断裂能与外载相角密切相关,也可以使界面的受力状态与外载相匹配来提高复合材料的韧性。

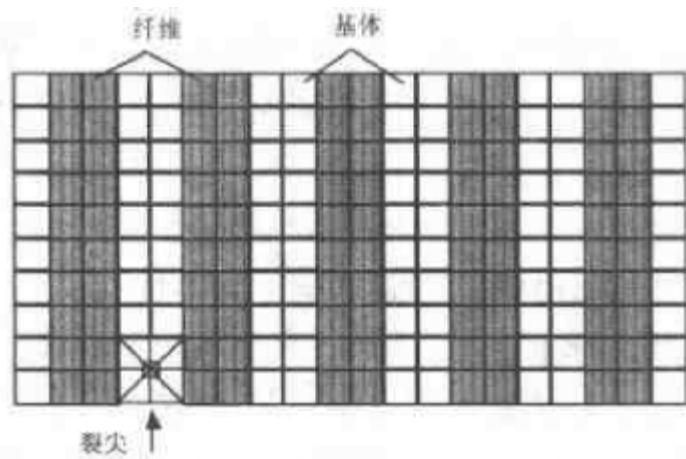
§ 10.6 远场 K 作用下复合材料破坏构型的数值再现

材料的强度与韧度是与材料的破坏模式和机理密切相关的。由于复合材料的破坏模式复杂,破坏机理多,例如,在简单的单向

连续纤维复合材料中存在着纤维断裂、基体开裂、基体劈裂、界面脱粘与滑移,以及基体的塑性变形及再形核等多种破坏机制,究竟哪几种破坏机制同时发生或占优取决于组分材料的性质和细观结构的状态,特别取决于纤维与基体的界面特征。每一种破坏模式对应不同的增韧机理,因而具有不同的有效强度和韧度。本节将数值再现复合材料的主要破坏构型[12,13]。



(a)整体网格



(b)裂尖附近网格

图 10.13 有限元网格

假设复合材料受到远场 K 的作用,采用整体-局部模型,局部部分有许多的纤维和基体组成,它们所占的比例等于复合材料的体分比。数值分析所采用的有限元网格如图 10.13 所示。用远

场 K 表示的位移边界条件是:

$$u = \frac{K}{2\mu_c} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \bar{u}(\theta) \quad (10.49)$$

其中 μ_c 是复合材料的剪切模量, r 是离开裂尖的距离, $\bar{u}(\theta)$ 是无量纲函数。对应于 K^∞ 的能量释放率为:

$$G_0 = (K^\infty)^2 / E_c \quad (10.50)$$

式中, E_c 是复合材料的杨氏模量。

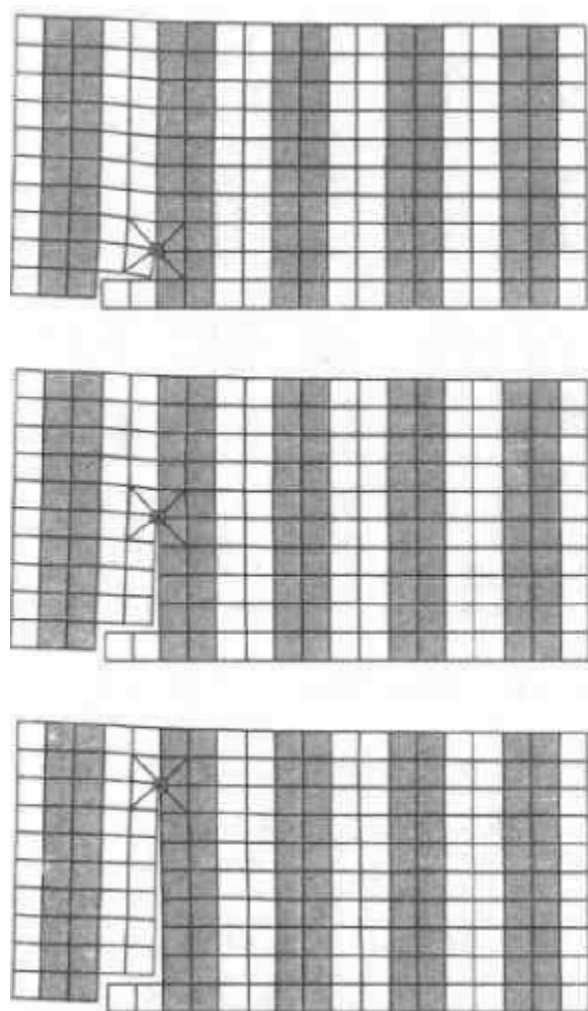


图 10.14 破坏过程模拟(弱界面复合材料)

图 10.14~10.16 是针对三种典型破坏过程的数值模拟结果,分别是弱界面复合材料中的裂纹转折并沿界面扩展,强界面复合材料中的裂纹横穿界面沿直线扩展和中等界面复合材料中的裂

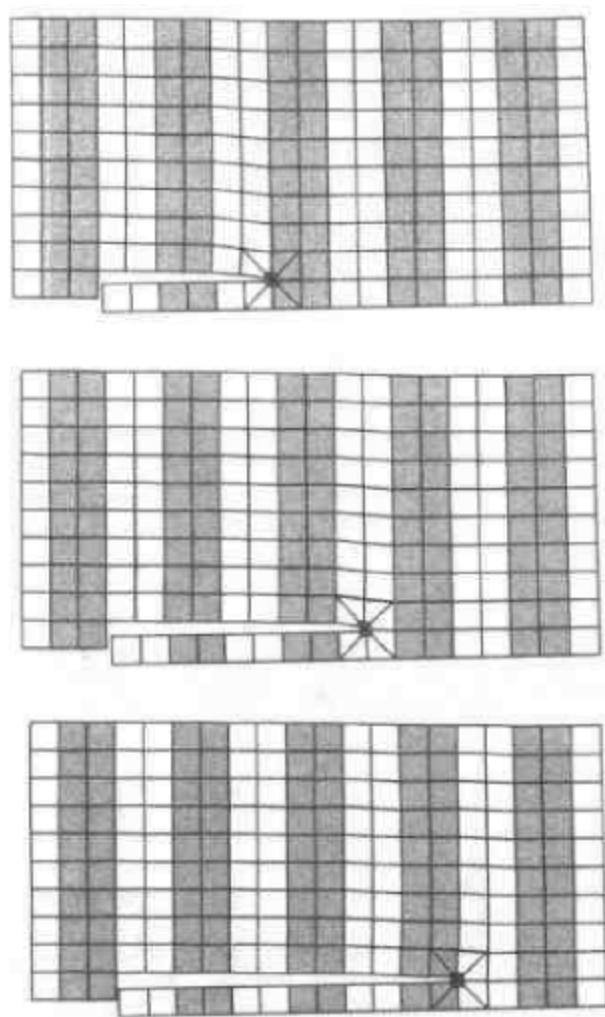


图 10.15 破坏过程模拟(强界面复合材料)

纹折线扩展并伴有纤维拔出的情况。其中界面的强弱是用界面断裂能相对于组分材料断裂能的大小来度量的。并且假定脱粘后的界面是光滑的。

在裂纹扩展的不同位置可以计算出裂纹尖端的能量释放率,当边界的 K 场给定以后,裂尖的能量释放率实际上确定了材料的韧度增值。取边界条件为 I 型单位 K 场,对两种不同路径的计算结果表明,不同路径对应的裂纹能量释放率相差很大(如图 10.17 所示)。

裂纹在遇到模量较大的纤维时,有一个很高的能量释放率,一旦裂纹偏转到界面上,这个高值迅速下降到一个较为稳定的值。

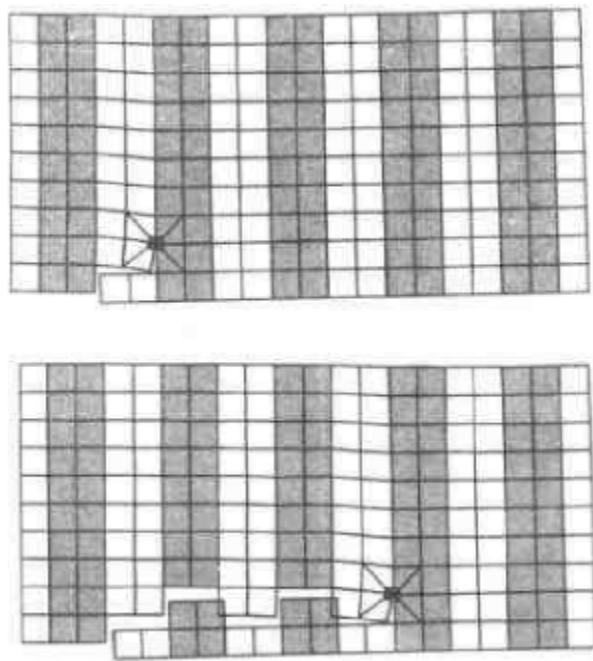


图 10.16 破坏过程模拟(中等强度界面)

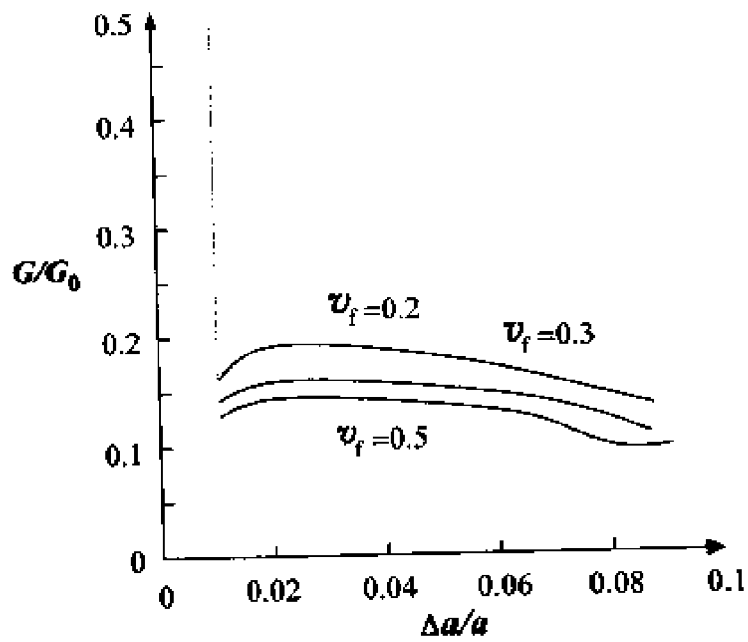


图 10.17a 裂纹沿界面扩展的能量释放率

如果裂纹不能偏转,这个高裂纹驱动力足以穿过纤维,使纤维起不到增韧作用。

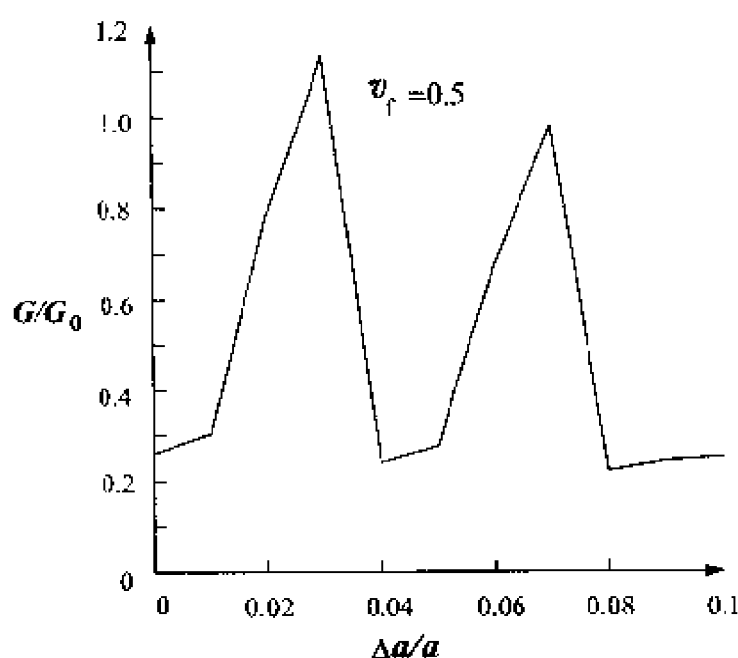


图 10.176 裂纹沿水平直线扩展的能量释放率

通过增韧破坏路径选择与增韧机理的数值模拟和增韧值的定量计算,我们可以看到,复合材料的细观结构参数与宏观韧度之间存在着复杂的关系,其中控制界面断裂破坏特征的界面断裂能尤为重要。界面的断裂能至少可以起到两个方面的重要作用,首先它是裂纹扩展路径选择的开关参数,对于不同的组分材料搭配,合适的界面断裂能够使裂纹扩展沿着一条优化的路径扩展,进而使材料的宏观韧性最优化;其次界面断裂能与界面摩擦系数是确定纤维脱粘和拔出长度的两个重要界面参数,这对于以界面脱粘和纤维拔出为主要耗能机制和增韧机理的纤维增强复合材料来说是非常重要的。当界面的混合度 $\psi \rightarrow \pi/2$ 时,界面摩擦起主要作用,而在小相角时,断裂能起主要作用。

参考文献

1. A Needleman. Computational Micromechanics, Theoretical and Applied Mechanics. P Germain Ed, IUTAM. Elsevier Sci Pubs, 1989
2. 陆明万,罗学富,郑长卿.计算细观力学进展.见:黄克智,徐秉业主编.固

体力学发展趋势. 北京: 北京理工大学出版社, 1995

3. P P L Matos, et al. A method for calculating stress intensities in bimaterial fracture. *International Journal of Fracture*, 1989, 40: 235~254
4. G T Sha, J K Chen. Weight functions for bimaterial interface cracks. *International Journal of Fracture*, 1991, 51: 265~284
5. 杨庆生, 杨卫. 断裂过程的有限元模拟. *计算力学学报*, 1997, 14(4): 407~412
6. 杨庆生, 孙艳丰. 裂纹扩展过程的数值模拟. *铁道学报*, 1997, 19(5): 116~120
7. 杨庆生, 杨卫. 界面裂纹的路径选择与数值模拟. *力学学报*, 1997, 29(3): 355~358
8. H Cao. A model for crack extension in metal-reinforced brittle solids, in *Advanced Composite Material*
9. Bakuckas, et al. A numerical model for predicting crack path and modes of damage in unidirectional metal matrix composites. *J Reinf Plas Comp*, 1993, 12: 3410~3510
10. 杨庆生, 杨卫. 纤维复合材料损伤过程的数值模拟. *计算力学学报*, 1998, 15(2): 154~160
11. 袁建明, 曲家军, 夏源明, 等. 混杂复合材料破坏过程的 Monte Carlo 数值模拟. 见: 李顺林主编. 第八届全国复合材料会议文集. 北京: 航空工业出版社, 1994. 831
12. 杨庆生, 杨卫. 纤维复合材料的细观损伤与韧度设计. 见: 张志民主编. 第九届全国复合材料学术会议论文集. 北京: 世界图书出版公司, 1996. 120
13. 杨庆生, 杨卫. 纤维复合材料的损伤韧度设计. *复合材料学报*, 1998, 15(1): 121~125

第 11 章 复合材料细观力学设计 原理及其 CAD 系统

§ 11.1 概 述

从复合材料诞生之日起,人们就试图对其进行设计,并且在材料细观结构与宏观性能之间关系的这一关键问题上进行了长期的探索,特别是近 20 年来,取得了非常大的研究成果,并逐渐形成了细观力学这一学科分支。人们正在力图利用细观力学的原理来设计复合材料,推动新型复合材料的研制与发展,促进力学与材料科学的交叉与渗透,发展新的力学原理,并进而认识和掌握材料增强增韧的内在规律。

物理学、力学以及材料科学工作者为实现上述愿望进行了从理论到实践的各个方面的努力。首先,在各种力学原理指导下,开发问世了大批新型复合材料,其中有些已经投入工程应用,支撑了新技术革命的发展。其次,力学原理的发展,推动了各相关学科的结合,在这种强大的产业背景和日益完臻的学科体系发展的驱动下,复合材料的细观结构—性能关系与细观结构设计一直是国内外学术界研究的热点。

材料的性能设计主要是为新型高性能材料的研制和使用服务的。由于高性能材料及其技术属于高技术领域,材料配方、原理与工艺设计以及关键性能参数等都属于严格的保密范围,很少能在学术期刊和学术会议上公开报道。材料的细观力学设计也很难见到其细节和关键思想。在这种技术互相保密,竞争日益激烈的局面下,新材料的研制和应用都面临着更新研究手段,加快研制速度,降低研制成本的问题。采用计算机辅助设计将会有效地帮助解决这一问题。目前,材料细观力学计算机辅助设计的研究趋势已经显现出来。

目前,在复合材料的细观力学和性能设计方面还存在下列问题:

(1)复合材料的宏观性能定量预测还只限于刚度性能,破坏性能的定量预测(亦即细观结构参数与破坏性能的定量关系)还没有实现。相应的力学模型还没有完全建立或需进一步完善。

(2)复合材料的破坏分析仅限于单一破坏模式和固定的几何构型,还没有认真研究多种破坏模式的相互转换和联合效应;多模式破坏过程的数值模拟(特别是数值模拟方法)还需进一步深入研究。

(3)对材料增强增韧力学原理的认识还限于定性阶段,定量的认识还很浮浅。

(4)现有的细观力学研究结果和结论还没有完全被材料研制人员所理解,在材料研制过程中被采用的力学原理还很少。

本章主要讨论复合材料细观力学设计的基本原理及其计算机辅助设计系统。介绍复合材料细观力学设计中的一般方法,研制和开发复合材料计算机辅助设计的软件系统。

§ 11.2 复合材料细观结构的力学设计

材料设计是一个非常广义的概念,凡是通过某种手段来谋求改善材料性能的行为都可称之为材料设计。本文所谓的复合材料细观力学设计是指按照力学原理定量地设计细观结构参数,使材料的宏观力学性能达到人们所期望的目标或最优化。这里特别界定了复合材料的细观层次和力学性能两个概念。以单层板为设计单元,以铺设角度、单层厚度和密度为设计变量的层合结构优化设计问题不在本书讨论之列。尽管如此,材料的细观力学设计也是一个非常大的系统工程。因为影响材料宏观性能的因素很多,从组分材料选择、工艺设计、界面设计及使用环境等每个环节都对材料宏观性能产生不同程度影响。我们这里主要强调材料细观结构与宏观性能的关系,亦即将材料细观结构参数如组分材料和界面的刚度、强度、韧度等物理参数和它们的分布、体积比、形状等几何

参数作为设计变量,而将材料的宏观力学性能作为设计目标^[1]。

由于表征材料宏观力学性能的目标变量很多,而且各个目标变量之间不一定相容,所以很难提出一个反映材料宏观性能的综合指标,加之存在那么多的设计变量,实际上使材料设计在数学上成为一个多变量、多目标的规划问题。由于问题的复杂性,不可能提出包含所有因素的模型并进行数学求解。在实际操作中必须进行简化。强韧化材料的细观力学设计的确切提法应该是以某一宏观性能(如刚度、强度、韧度)作为目标函数,以一个或几个重要的细观结构参数作为设计变量,进行材料设计和优化。而对于某些固定的材料常数(对细观参数不敏感)或必要的性能限制可作为约束条件引入。

复合材料的宏观性能可分为两类:一类是表征材料平均变形性能的宏观刚度,另一类是表征材料最终破坏状态的宏观破坏性能(包括破坏模式、强度、韧度等)。与此相对应的细观力学设计可分为刚度设计和韧度设计,它们的区别和共同点列于表 11.1 中^[1]。

关于材料细观结构与宏观刚度性能关系,已经进行相当深入的研究,在复合材料热弹性性能、非线性本构关系方面取得了很多成果,发展了一些著名细观力学模型,如自洽模型、Mori-Tanaka 方法、微分法、变分法、自洽有限元法和各种近似方法等。可以说此问题已经获得相当满意的解决。以后所要进行的工作就是解决这些理论方法在实际应用中的问题,以及将这些方法进一步扩展使其适应某些特殊的问题。

在复合材料的细观结构与宏观破坏性能的关系问题上,由于从细观损伤到宏观失效的漫长破坏过程中要经历多种破坏模式的转换,例如纤维增强复合材料中的基体开裂、界面脱粘、纤维断裂或拔出、基体再形核等,而每一种破坏模式对应不同的增韧机理,因而具有不同的宏观破坏性能。这种破坏模式的多样性和破坏过程的复杂性,使得这一个问题研究难度极大。目前的研究手段仍然是唯现象的和针对静止破坏状态的。还远没有建立细观结构

参数与宏观破坏模式或破坏性能之间的关系,亦即破坏模式与性能的预测问题。也没有解决对破坏过程的全程描述和模拟问题。目前的研究工作多数集中于基体和界面裂纹、纤维拔出等独立的破坏现象。而材料科学工作者致力于实验观测和破坏模式的定性分析,这些工作为力学工作者建立力学模型与数值分析提供了实验基础。

表 11.1 刚度设计与韧度设计比较

参 量 设 计	设计变量	设计目标	基础知识	力学模型	基本方法	典型工作
刚度设计	微结构和界面参数	E, μ, α	变形历史	代表体元	均匀化(体积平均法)	自洽模型 M-T 法
韧度设计	微结构和界面参数	$\Gamma(K_I), \sigma_b$	破坏过程 界面性能	损伤局部 单元	损伤断裂 力学	

以各种复合材料为典型的材料刚度设计是以细观结构-宏观性能关系的建立为基础的。利用这些关系可以由材料细观结构参数预测材料的宏观刚度,其中细观结构参数中包含了组分材料性能、体积含量和夹杂形状等重要参数,有些模型还能反映界面性能和缺陷对材料刚度的影响。这些定量分析的结果被典型的实验数据所证实,并被应用于材料的初步设计和工艺控制之中。

强韧化材料的韧度设计尚处于探索阶段。材料韧性与材料的破坏过程和破坏模式紧密相关。进行材料韧性设计必须具备关于多模式破坏过程和破坏路径选择的基本知识,而研究材料的破坏过程与路径选择的关键问题是建立各种破坏模式之间的转变准则。一般通过改变材料的微结构来控制材料的破坏过程与模式,例如在复合材料中,通过改变组分材料的性能比和设置不同性质的界面或界面层来改变裂纹扩展路径。从研究手段上来讲,必须建立一套以大规模有限元法为基础的快速高效准确的数值分析技术,用以模拟多相介质中裂纹的长距离非直线扩展。

§ 11.3 细观结构参数的定性设计

基于对复合材料弹塑性变形的分析和宏观性能预测,可以对

某些细观结构参数进行定性或定量的设计^[2,3]。由于影响宏观性能的细观结构参数很多,而且彼此之间参数影响可能是耦合的,所以首先应恰当地选取设计变量,在现在的以宏观刚度为目标函数的细观结构设计中,基体与增强物的性能匹配(E_1/E_0)、纤维的几何形状参数(l/d)、纤维的空间分布的不均匀性和纤维体分比 v_f 是最重要的设计变量,而纤维-基体的界面参数对宏观刚度影响很小,除非界面发生了脱粘破坏。但界面性能对宏观强度和韧度有显著的影响。

11.3.1 基体与增强物的性能匹配性

用 E_0 表示基体材料的杨氏模量, E_1 表示增强材料的杨氏模量,则比值 E_1/E_0 表示了组分材料的性能匹配性。 $E_1/E_0 > 1$ 表示硬增强, $E_1/E_0 < 1$ 表示软增强。软增强在实际中较少见到,而硬增强的范围一般在 $10 \sim 100$ 之间。数值分析表明, E_1/E_0 越大,则复合材料的增强效应(有效模量)也越大。但是,由于基体与增强物之间的性能相差较大,导致其界面性能的急剧变化,并在界面处出现大的应力梯度,容易使界面脱粘。界面脱粘会引起有效模量的下降。 E_1/E_0 越大,则界面脱粘引起的有效模量的下降越明显。所以在选择组分材料的性能匹配时,不仅要考虑到复合材料的增强效应,还要考虑到与界面性能的匹配和部分界面破坏后的剩余刚度。

另外,在用自洽模型和自洽有限元法计算有效模量时, E_1/E_0 还会影响到数值迭代的收敛性。

11.3.2 纤维几何形状的设计

计算结果表明,对于长径比较大的纤维,在纤维端头界面所传递的应力很小,而对于长径比较小的纤维,端头界面传递的正应力不能忽略。纤维的拉应力由通过纵向界面所传递的剪应力和通过纤维端头界面所传递的正应力两部分组成。但随着塑性变形的增加,端头界面的传递效率在降低。当复合材料的纤维与基体的刚度相差很大(如 B/Al 和 SiC/Al 系统)时,纤维的不连续性只影响它邻近基体材料的变形,而纤维内的拉应力没有受到邻近纤维不

连续性的影响。在纤维长径比为 5, 体积百分比为 0.46 时, 邻近纤维界面上的剪应力受到轻微的影响。其原因是柔性较大的基体材料会在高应力集中区产生较大的塑性变形, 而迅速减小由纤维不连续性引起的应力集中影响。

复合材料的宏观应力-应变关系通过对局部应力场的体积平均而得到。在纵向拉伸时, 曲线的非线性随着纤维长径比的减小而增大, 而在横向拉伸时, 情况正好相反。这说明较长的纤维与较短的纤维在阻止基体非线性变形能力上的差别。尽管纤维不连续性诱发的应力集中导致基体材料在较低的应力水平下局部提前进入塑性变形, 但纤维增强的宏观效应还是显著地提高了复合材料的刚度。当基体的塑性变形继续增大时, 复合材料的刚度将下降, 从而造成复合材料宏观本构关系的非线性。

对于单向短纤维复合材料, 纤维的长径比是表征纤维几何形状的重要参数。这个参数可理解为圆柱的长径比、椭球体的长短轴之比以及矩形截面块体的长宽之比等。换言之, 对于长径比相同的纤维, 圆柱体和椭球体纤维增强复合材料的有效性能有何不同呢? 显然, 这种比较只能在同一方法所得结果之间进行才有意义。利用自洽有限元法可以研究圆柱体纤维和椭球体纤维两种复合材料的有效性能。研究表明, 在同一长径比下, 圆柱状纤维对 E_{11} 和 G_{12} 的增强效果略好于椭球状纤维, 且当纤维与基体的模量相差越大时, 纤维几何形状因素的影响越明显。

11.3.3 纤维体分比的优化

纤维体分比是最重要的微结构参数之一。单就完善界面复合材料有效刚度而言, 它们之间是单调函数关系, 不存在体分比的极值点, 因而也就无从谈其优化问题。但是从细观变形分析的观点来看, 当体分比增大时, 纤维之间的相互作用更加强烈, 应力集中必然导致界面部分脱粘, 从而导致有效刚度的丧失。因此在高体分比情况下, 用完善界面的模型已经不合适了。在塑性变形情况下, 由于应力集中诱发材料发生塑性变形, 这对于复合材料的宏观屈服行为和本构响应有明显影响, 因此存在一个纤维体分比的优

化值。当然,在强度和韧度设计中,研究纤维体分比的优化会有更加深刻的意义。

11.3.4 纤维空间分布的不均匀性

纤维空间分布的不均匀性不是一个微结构参数,而应视为复合材料的初始缺陷。从一般意义上说,所有工艺过程都在追求纤维的均匀空间分布。由于现有工艺水平的限制,经常会出现纤维较集中地堆积在某一个区域的现象。对于这样的初始缺陷,可以利用平面应变模型进行分析。数值结果表明,复合材料的弹性性能对此是不敏感的,但对弹塑性有效(切线)模量有明显的影响。然而,纤维空间分布的不均匀性显著影响细观变形和细观应力场的分布,对于复合材料的破坏过程和强度有明显的影响。

§ 11.4 优化设计的途径

任何设计本身都包含了优化的意思,但严格意义的优化应该找出最优解或近似最优解。材料的细观力学设计的优化问题目前还难于展开实质性研究,其原因在于材料设计的定量研究尚不深入。另外,传统的结构优化理论不含有局部破坏条件^[4],这也使强韧化材料的韧度优化比刚度优化更困难。

材料设计的优化模型可通过两种途径来建立,第一种方法是直接以材料性能为目标函数,以一个或几个重要的微结构参数作为设计变量,以材料变形或破坏的协调性条件为约束条件,建立材料性能优化设计的数学模型,这种方法可能对材料的刚度设计较为可行。利用上面提到的细观力学模型,再加上相应的约束条件,即可进行优化计算。

设材料宏观刚度 E 可表示为 n 个细观参数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的函数

$$E = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

则材料刚度设计的优化模型为:

$$\begin{aligned} & \max E \\ & s. t. g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

其中,约束条件根据参数的物理意义和对材料性能的要求确定。

第二种方法是根据材料的增强增韧机理,建立间接的优化准则。这种方法主要针对材料局部性能优化。复合材料的增强机理主要通过加入高模量的纤维来实现。而增韧机理取决于材料中的固有缺陷和它周围的细观特征。主要有两类增韧机理:第一类发生在裂纹面上,通过纤维桥联、粒子钉铆等方法阻止裂纹的扩展;第二类发生在过程区内,通过相变、塑性变形等钝化裂纹尖端。表 11.2 列出了几种典型的增韧方法和相应的增韧效果^[5]。例如,连续纤维复合材料的主要增韧机理是纤维的桥联作用,实际上这预示了裂纹的扩展存在一条优化的路径。否则,这种增韧机理就不能得以实现,由此可设计界面参数。事实上,根据破坏模式转换和裂纹路径选择准则,界面韧度是裂纹扩展路径选择的开关性参数,对于不同的组分材料搭配,合适的界面断裂能能够使裂纹扩展沿着一条优化的路径扩展,进而使材料的宏观韧度最大。这种思想可归结为基于破坏模式和增韧机理的材料韧度设计。这种方法的优点是将材料的破坏过程、增韧机理和宏观韧度紧密地联系在一起,并且将界面韧度作为一个重要的设计变量。

表 11.2 增韧陶瓷的韧性

增韧机理	相变	微裂纹	金属弥散	晶须/粒子	纤维
最大韧性 (MPa/m ²)	~20	~10	~25	~15	>30

一个优化设计是否合理取决于多种因素,由于材料变形和破坏是组分材料性能与界面性能相互协调的作用过程,所以在约束条件中必须谨慎建立对每个参数的限制条件,不仅从物理概念上对某些细观结构参数加以必要的约束,有时还要考虑工艺上的要求以及对材料其他宏观性能的要求。

影响材料性能的因素很多,这启发我们可以从多个侧面设计材料,例如通过最小应力集中和最小残余应力设计,得到夹杂的形状优化和界面性能优化^[6,7]。这些工作仍然利用刚度或剪切强度来表示界面的性能,难以与材料的韧度相联系。

§ 11.5 材料设计的软件系统

复合材料的分析程序已经开发了许多,并在工程中广泛应用,但这些程序主要处理工程结构中普遍采用的层合复合材料,建立在逐层破坏的层合理论的基础上。尽管有些这样的程序能够计算纤维增强单层的力学性能,但仍然侧重于工程结构的分析。这里所说的细观力学的软件与其上述程序有一定的差异,属于材料设计的范畴。

研制复合材料的细观力学设计的软件系统对于将细观力学的理论加快应用于材料的研究与使用中,具有非常重要的意义。首先,细观力学的理论已经相当地丰富,提出了许多的力学模型、方法、准则等,涉及到各种类型的组分材料、各种细观结构构型、各种材料性能以及各种增强增韧机理等。这些工作为研制材料设计的软件系统提供了理论基础。其次,在实际的材料设计和工艺中迫切需要理论的指导,材料设计软件是力学与材料科学进一步结合的桥梁和纽带。第三,材料设计的软件系统是改进材料设计手段的重要工具,是实现材料设计由定性到定量的标志。

这个软件系统以原理模拟和数值分析为主要功能。

软件名称:COMIDS (COmposite MIcromechanics Design System)

软件的总体设计思想可用图 11.1 表示。

其主要功能有:

组分材料数据库;

细观应力场分析;

刚度性能预测;

破坏过程与破坏模式的模拟;

韧度性能预测。

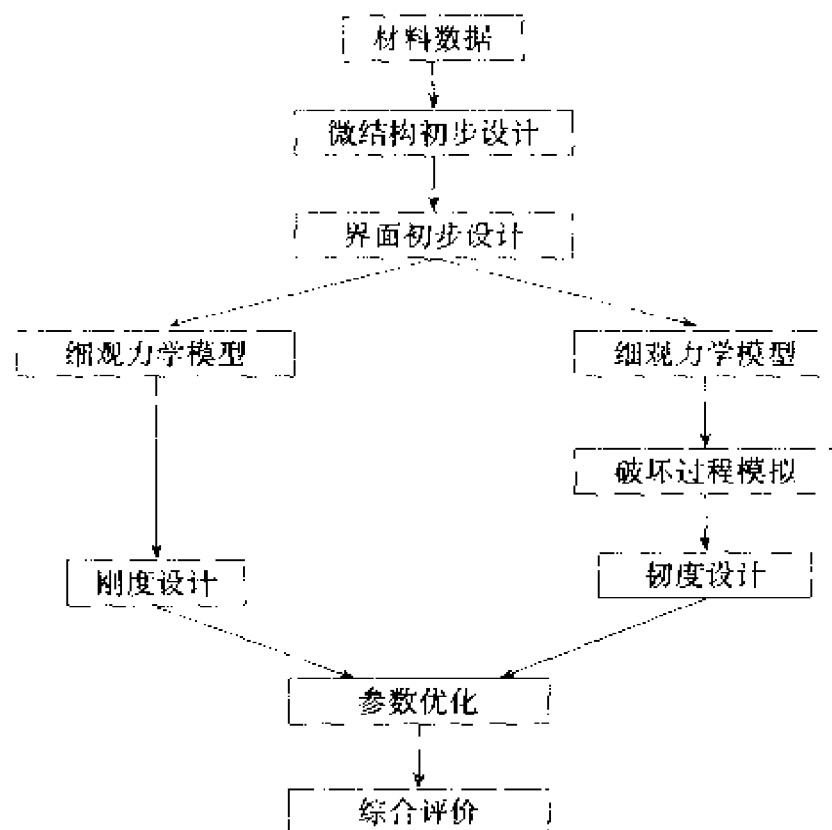


图 11.1 材料设计软件系统框图

11.5.1 功能模块的建立

(1) 材料数据库

分类建立组分材料的数据库,并用多级菜单系统管理数据流。基体材料分为树脂、陶瓷、金属三类,增强材料分为连续纤维、短纤维(晶须)、颗粒、混杂四大类。每一种材料含有弹性模量、泊松比、热和湿膨胀系数、屈服极限、切线模量、硬化系数等。数据库具有增加、查询、编辑、删除功能。

(2) 细观结构几何模型

按照纤维(连续纤维,单向短纤维,平面随机分布,立体随机分布)、颗粒、层合三类结构建立细观结构的几何模型。

(3) 细观力学模型库

优先选择适应面广并经过实验验证,精度较高的模型。通过这些模型可以预测材料的有效性能(弹性模量、泊松比、弹塑性本

构关系、湿热系数等)。

预测热弹性性能的模型:

- (a) 基于修正混合律的半经验公式;
- (b) 基于单胞模型的解析公式;
- (c) 基于自洽模型的解析公式;
- (d) 基于 Mori-Tanaka 模型的解析公式;
- (e) 变分法;
- (f) 基于单胞模型的数值方法;
- (g) 基于自洽模型的数值方法;
- (h) 基于 Mori-Tanaka 模型的数值方法。

预测弹塑性和粘弹、粘塑性的模型:

- (a) 纤维消失模型;
- (b) 自洽模型;
- (c) Aboudi 连续体模型。

11.5.2 程序结构

(1) 主菜单

- (a) Database of constituent materials
- (b) Micromechanical stress analysis
- (c) Stiffness property prediction
- (d) Failure process simulation
- (e) Toughness property prediction
- (f) Optimization of microstructural parameters

(2) 数据库操作

从主菜单依次进入:

Database of constituent materials

Matrix

Inclusion

Polymer Ceramics Metal

Fiber Whisker Particle Hybrid

Poly1	Cera1	Meta1	Fibe1	Whis1	Part1	Hybr1
:			:			
Polyn	Ceran	Metan	Fiben	Whisn	Partn	Hybrn

Properties

Prop1	Prop2
-------	-------

Dens,	σ_y
E_1 ,	Et
E_2 ,	N
G_{12} ,	σ_b
ν_{12} ,	dum
α_1 ,	dum
α_2 ,	dum

(3)性能预测

从主菜单依次进入:

Stiffness properties prediction

Shape of inclusion

Geometry of microstructure

Model for micromechanical analysis

Database of constituent materials

Effective properties window

材料设计是一项复杂的系统工程,在某些重要的问题上已经

取得若干进展。材料的细观力学设计是以力学原理为基础的,设计建立在充分的分析基础之上。材料刚度设计的基础是建立细观结构-宏观刚度关系;材料韧性设计的基础是建立细观结构—破坏过程—材料韧度之间的关系。材料韧度设计要比刚度设计困难得多。优化设计的关键在于建立相应的力学和数学模型。建立强韧化材料细观力学设计的计算机辅助系统是将理论应用于实际的桥梁,也是实现材料设计由以定性为主转为以定量为主的标志。

参考文献

1. 杨庆生,杨卫.强韧化材料的细观力学设计.力学进展,1997,27(2):177~184
2. 杨庆生,杨卫等.复合材料的宏观性能与参数设计.力学与实践,18(3):1~7
3. 陈浩然,杨庆生.短纤维复合材料线性与非线性力学行为的理论研究.见:复合材料和结构的力学进展(第五章).武汉:武汉工业大学出版社,1994
4. H A Eschenauer, V V Kobelev. Structural analysis and optimization modelling including fracture conditions. Int J Num Meth Eng, 1992, 34: 873~888
5. A G Evans. Perspective on the development of high toughness ceramics. J Ame Ceram Soc, 1990, 73: 187~206
6. G P Carman, et al. Optimization of fiber coatings to minimize stress concentrations in composite materials. J Comp Mate, 1993, 27(6): 589~612
7. S N Gulrajani, S Mukherjee. Sensitivities and optimal design of hexagonal array fiber composites with respect to interphase properties. Int J Solids Structures, 1993, 30(15): 2009~2026
8. D A Trapeznikov, et al. Modelling approach to optimization of mechanical properties of discontinuous fiber reinforced C/C composites. Composites, 1992, 23(3): 174~182

索 引 (Index)

A

Aboudi 连续体模型 85,240

ACK 方法 161,179

B

Bodner-Partom 统一本构

方程 86,90

Brazil-nut 试件 193

比刚度 4

比模量 4

比强度 4

编织复合材料 4

变分法 70,85,232

玻璃纤维 3,7,215

C

CAD 系统 230

材料设计 5,231

材料数据库 239

残余应力 181,199

D

Dirac-delta 函数 44

Dundurs 参数 186,194

代表体元 17,108

单胞模型 21,85,215,216

单丝拔出实验 128,184

单丝碎断实验 130,184

单丝压出实验 130,184

单位球 44

单向短纤维复合

材料 3,7,53,96,102,235

单型应力强度因子 206,208

弹簧模型 132

弹塑性 84,134

弹性应变能 46

等效夹杂

法 40,41,52,144,145,152

等效特征应变 41,52

短纤维 7,22

E

Eshelby 张量 34

F

Fourier 积分 43

方向分布 25

芳纶 8

非线性变形 84

非线性性能 84,105

分叉裂纹 193

复合材料力学 5

G

Gurson 模型 204

刚度设计 233

刚性夹杂物 56

高温蠕变变形 103

格林函数 31
各向同性硬化 90
各向异性 26
功能复合材料 3
广义平面模型 107
广义自洽模型 52,150
H
Halpin-Tsai 半经验公式 53
Hashin-Strikeman-Walpole
解 74
荷载传递长度 119
横观各向同性 27,88
宏观屈服条件 84
宏观应变 19,85
宏观应力 19,85
环氧树脂 10,189,202,215
J
 J_2 流动法则 89
基体开裂 138,169
极应力 72
计算细观力学 204
夹杂问题 30
间断粘结界面 202
剪滞法 117,123,166
剪滞模型 3,117,123,141,142
结构复合材料
界面层 116,123,132,187
界面层过渡模型 135
界面的剪切-法向强度比 107
界面断裂能 188

界面滑移 129
界面韧度 193,222
界面特征长度 106
界面脱
粘 109,129,138,148,150,198
界面相 78,116
金属基复合材料 3,10,186
金属间化合物 11
均匀边界条件 18,62
K
Kelvin 解 30
Kevlar 8
Kronecker 函数 30
孔洞 205
L
Lame 常数 29
链式模型 141
裂纹 164
M
M-T 有限元法 62,68,232
Monte-Carlo 模拟 141,142
Mori-Tanaka
方法 57,85,144,145,240
N
Needleman 界面演化
模型 106
Nicalon 8,13
能量释放率 146,153,155
P
硼纤维 8

平均性能 49
平均应变 19,208
平均应力 18,208
平面应变模型 98,104
破坏模式 196,204

Q

纤维端头裂纹 143
纤维断裂 138
纤维桥联 139,151
屈服函数 85

R

Reuss 近似公式 72
扰动应变 40,144
热膨胀系数 12
韧度设计 233
蠕变变形 100
蠕变损伤 103

S

Soligliana 位错 158,160
三维有限元分析 96
三相模型 78
失效长度 119
树脂基复合材料 3,9
率敏感性 91
塑性功率 90
随机分布 19,23
随机临界核模型 141
损伤因子 103

T

碳/碳复合材料 14

碳化硅晶须 8,13
碳化硅纤维 8,13,173

碳纤维 8,11

陶瓷基复合材料 3,12

特征应变 29

特征应力 29

统计均匀场 17

涂层 75

椭球夹杂 31,62,150,160

W

外载相角 223

网格动态重新划分 204,209

微分法 68,232

稳态裂纹 162

无损检测 15

V

Voigt 近似公式 72

X

细观强度理论 140

细观损伤机理 138,161

旋转椭球 34

Y

异质夹杂 34

应变集中因子 51,60,88

应力传递 117,123

应力集中因子 51,88,174

应力强度因子 142,154,174

应力松弛 102

优化设计 236

有效弹性张量 49,63,80

有效剪切
模量 54,56,59,66,70,73
有效柔度张量 49
有效体积
模量 56,59,67,70,73
有效性能 49,68
有效应变 49
有效应力 49
原位性能 86
圆盘 35
粘弹性 84,134

粘塑性 84,90,103
Z
整体-局部模型 215,224
正交各向异性 26
周期性分布 21,96
轴对称模型 98
主裂纹 193
自洽模型 52,85,205
自洽有限元
法 62,148,150,232