

# 第 1 章 概 论

## 1.1 结构稳定性分析的目的、方法和进展

飞机机翼、尾翼和机身上的薄壁/加筋结构和蜂窝夹层结构等板壳结构，当它们承受压缩、剪切、扭转和弯曲等载荷作用时，最常见的失效模式为丧失稳定性，又称“失稳”或“屈曲”。为了保证结构的使用安全，需要进行稳定性分析和相应的强度校核。

结构稳定性分析的目的是求解结构件的失稳临界载荷（屈曲载荷）和失稳模态（屈曲模态），以控制结构失效。对于重要的承力结构和气动外形要求严格的结构，使用中不允许其失稳。

对结构进行稳定性分析，涉及到较复杂的弹/塑性理论和数学运算，理论分析复杂。例如，即使是一块简单的矩形平板，也要通过求解高阶偏微分方程组，才能确定它的失稳临界载荷。而对于比较复杂的飞机构件，采用这种解析的方法一般很难求得精确解。因此，必须作大量简化，采用近似分析方法，如能量法、数值法和有限元素法等方法求解。

为了满足飞机结构设计的需要，工程上常采用与理论分析相比拟的简化方法，并根据大量的典型构件的试验数据，总结、归纳出简便的计算公式、设计曲线和经验修正系数，编成“手册/指南”供设计人员使用。近二十多年以来，采用有限元素法，又编制了许多实用的分析软件（程序），提高了对飞机结构稳定性分析的能力和结构设计水平。

关于金属飞机结构的稳定性分析，已经比较成熟，并形成了各种手册。如美国的 Handbook of Structural Stability, Part I - VII (NACA TN 3781 ~ 3786, NACA TN D-162) 等。我国在 1965 年 8 月出版的《飞机设计员手册（第四册）》和 1983 年 4 月出版的《飞机设计手册（下册）》中，均介绍了金属飞机结构的稳定性计算方法。在 1996 年 6 月出版的《结构稳定性设计手册》中，较全面地总结了我国飞机设计部门多年的设计经验和大量试验研究数据，给出了金属飞机结构稳定性分析的较完整的计算公式、设计曲线和实用分析软件。

关于复合材料飞机结构的稳定性分析，近二十年来也有了长足的进展。国外的飞机公司纷纷制定了各自的“先进复合材料设计手册”，我国在 1987 年出版了《复合材料工作手册》，在 1990 年出版了《复合材料设计手册》，近期又出版了《复合材料结构设计手册》，其中都介绍了复合材料结构稳定性分析的内容。但是，至今未见一本专业性的“复合材料结构稳定性分析手册/指南”。

需要指出的是，目前工程上对结构的稳定性分析一般仍采用经典的线性屈曲理论，即，认为作用于结构上的载荷一旦达到失稳临界值时，结构就立即产生无限大的变形而丧失了承载能力。这种理论起源于 18 世纪中期欧拉 (L. Euler) 和拉格朗日 (J. Lagrange) 等的研究，欧拉在 1759 年“关于柱的承载能力”的研究报告中，采用变分法研究了一根细长弹性杆在不同载荷下的平衡曲线，利用经过简化的微分方程  $c \frac{d^2 y}{dx^2} = -P_y$  导出了受压柱的失稳临界载

荷的计算公式  $P = \frac{c\pi^2}{4l^2}$ ，其中  $c$  被称为“绝对常数”，他指出  $c$  与柱的材料性能、几何尺寸和边界支持等有关。此即著名的欧拉屈曲公式的雏形。嗣后，随着桥梁、船舶和飞机结构发展的需要，促使人们对于杆、板和壳等薄壁构件展开了稳定性的理论和实验研究。1936 年铁木辛柯 (S. P. Timoshenko) 和盖莱 (J. M. Gere) 在他们的专著《弹性稳定性理论》中，对自欧拉建立屈曲理论以后近百年的线性稳定性 (线性屈曲) 的研究作了系统的总结和阐述。因此，线性屈曲理论在工程中得到了广泛的应用。可以说，当前工程实际中的各种结构稳定性分析方法和设计手册都是在此理论的基础上形成的。

线性屈曲理论对结构稳定性进行分析时，是基于小挠度、线弹性的假设，没有考虑结构受载后的变形和几何初始缺陷对平衡状态的影响。对于较“刚性”的杆、板和壳结构是比较适用的，因此，广泛为工程界接受。

但是，随着宇航结构的应用发展，发现采用小挠度的线性屈曲理论对结构稳定性的分析结果与试验结果间有较大的差异。如：试验表明，四边支持的矩形薄平板在屈曲以后还可以继续承载；采用线性屈曲理论计算的受轴压薄壁圆柱壳的失稳临界载荷比试验值高 60% 以上；尤其是某些有几何初始缺陷的壳体，其临界失稳载荷的试验值甚至仅为理论值的十几分之一。这些现象引起了许多科学家的关注和研究，从而提出了大挠度非线性屈曲理论。如我国科学家钱学森和美国科学家冯·卡门 (T. V. Karman) 共同在 1941 年和 1949 年先后发表了关于轴压下的薄壁圆柱壳和外压下的球壳的大挠度屈曲分析研究成果；罗祖道教授在 1954 年发表了关于大挠度和几何初始缺陷对受压扭圆柱壳屈曲的影响等研究成果。1959 年沃耳密耳 (A. C. Вольмир) 在其专著“柔韧板和柔韧壳”中，对薄壁板壳结构的大挠度非线性理论作了较系统的介绍。但由于非线性屈曲理论的复杂性和求解十分困难，一直无法在实际工程中应用。直到近五十年，尤其是近二十年，随着有限元素法和数字电子计算机的出现和迅猛发展，才有力促进了非线性屈曲理论及其求解方法的发展和应用。

至今，已逐步研制出了以非线性理论为基础的求解板壳结构屈曲、后屈曲及破坏分析的有限元素法的分析软件。在一些发达国家已陆续推出了商品软件，我国也逐步研制出了自己的非线性屈曲、后屈曲及破坏分析的软件，并开始在航空结构上得到了应用。因此可以预见，今后，非线性屈曲理论的分析方法将会得到工程界日益广泛的认识和采用。

## 1.2 复合材料结构稳定性分析的特点和处理方法

复合材料的各向异性和可设计性的特点，给飞机结构设计和稳定性分析提出了许多新问题。与金属结构相比，复合材料结构的稳定性分析具有如下特点：

(1) 结构的稳定性特性主要取决于刚度，即结构 (自身的) 刚度和对它支持的刚度。而结构刚度与它的剖面几何特性和材料力学性能有关。

对于各向同性的金属材料结构，计算其刚度时，可将剖面几何特性的计算与材料性能分开处理。而对于由各方向力学性能不同的单层 (材料) 组成的复合材料层压板，其本身就是一种结构材料，计算其刚度时，必须一层一层地考虑材料不同方向的力学性能，不能将结构的剖面几何特性的计算与材料性能分开处理。而且，各向异性复合材料层压板的刚度特性比各向同性金属板的刚度特性复杂得多。例如，描述各向同性金属板的刚度只需两三个参数，

而一般铺层的复合材料层压板的刚度系数多达 18 个。

研究表明,对于工程上常采用的层数较多的均衡对称层压板,采用正交各向异性板壳理论求解屈曲载荷,可以达到足够的精度。从而,减少了复合材料刚度的复杂性,大大简化了力学分析。

(2) 金属薄壁结构的拉压、弯曲、扭转刚度主要取决于厚度,一般可采取增加厚度的方法提高其刚度。而复合材料层压板和蜂窝夹层板的刚度,不仅仅取决于其总厚度,还可以通过合理地选择铺层方向,按受载情况进行设计。

研究表明,对于工程中经常采用的 $0^\circ$ 、 $45^\circ$ 和 $90^\circ$ 铺层方向中,控制 $45^\circ$ 铺层的比例和位置可以明显地提高层压板的轴压和剪切屈曲载荷。这为复合材料层压板的刚度设计提供了有效的指导。

(3) 层压板的刚度中,还存在拉弯、拉剪、弯扭等耦合项,它们对结构的稳定性会产生不利影响,也应在稳定性分析中加以考虑。一般来说,采取均衡对称铺层和增多层数的方法可以消除这些影响;按 $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 对称铺设的层压板可消除全部耦合效应。

(4) 碳/环氧、硼/环氧复合材料基本上属于脆性材料,破坏前无明显屈服现象。因此,在这类复合材料结构屈曲分析中不必考虑塑性影响,无需进行材料非线性分析。

(5) 如果复合材料层压板的层间粘接强度不够,可能会发生分层屈曲。而且,与金属材料相比,复合材料对冲击十分敏感,受冲击易引起分层损伤,也会导致分层屈曲,尤其是大面积的冲击损伤分层,会显著降低层压板结构的屈曲载荷。

(6) 复合材料构件局部屈曲后,在高应力区有时会伴随发生纤维折断、基体开裂等现象。这在短板和桁条的压损破坏校核,以及后屈曲分析时,需要加以综合考虑。

随着复合材料结构的深入研究和应用开发,将不断出现新的问题,如湿/热环境影响、缝合、编织复合材料等。还会对复合材料结构稳定性分析提出新的课题。

### 1.3 本指南的编写目的、内容及说明

20 世纪 70 年代初,我国就开始进行复合材料的研究发展工作,80 年代以后,在垂尾、前机身等承力结构上的应用研究,积累了许多设计使用经验和试验数据。经过近十年的发展,尤其是在机翼和各新机种上的广泛开发应用,设计水平有了进一步的提高。在结构稳定性分析方面,概括起来有了如下进展:① 计算机和有限元分析技术在飞机结构设计分析中已获得了广泛应用。研制和引进了一些成熟的实用软件,这不仅可以取代复杂、繁冗的人工计算,而且还可以把构件的稳定性分析与整个结构部件的分析联系起来,能更准确地反映支持刚度(边界支持条件)的影响;② 在后屈曲的理论分析和研究方面有了较大进展,已编制了复合材料板壳结构非线性的分析计算软件,并进行了相应的试验研究,已在飞机设计中获得了一定的应用;③ 形成了较完整的对复合材料面板的蜂窝夹层结构的稳定性分析方法和实用软件;④ 结合飞机研制,开展了较广泛的试验研究,又积累了许多使用经验和试验数据,并且试验技术水平有了较大的提高。

因此,基于对上述复合材料结构稳定性分析方面的应用研究的归纳总结,以及对国外有关资料的分析引用,编写了这本专业性的指南。力求较全面系统地介绍这一专业领域内设计分析所需要的内容,反映最新应用研究成果,以期能更好地满足飞机结构分析的需要。

对全书的内容说明如下：

为适应当今飞机结构设计中广泛采用有限元分析技术和电子计算机的新进展，在第 2 章～第 6 章中都着重介绍了有限元素法的应用技术和计算实例，向读者推荐较成熟的计算软件。

虽然复合材料结构稳定性分析程序的功能越来越全，应用已十分普及。但在第 2 章“矩形层压平板的屈曲分析”和第 3 章“加筋层压板的屈曲分析和承载能力计算”中，仍列出了实用的工程计算公式和曲线。因为它们已经经过了实践考核，是在大量试验研究基础上形成的，使用十分方便，可以使设计人员简便、快捷地对结构稳定性进行预估，这对于结构选型和初步设计是不可少的。

第 4 章“复合材料蜂窝夹层结构稳定性分析”中，系统地介绍了复合材料面板的蜂窝夹层结构各种局部失效模式的计算公式和总体稳定性的分析方法，给出了通用分析软件和应用实例。

复合材料结构后屈曲理论分析难度很大，反映了屈曲研究领域的最新进展，并已显露出一定的工程应用前景。所以在第 5 章“复合材料结构后屈曲分析与设计”中，不仅给出了复合材料板壳结构后屈曲的计算方法和通用分析程序，而且对后屈曲的分析理论作了简要介绍，还考虑了损伤、温度和湿度等因素对屈曲的影响，给出了一些简单、典型的计算实例。

另外，为满足当前设计需要，工程上通过试验研究形成了一些半经验半理论的估算结构后屈曲承载能力的方法，在 3.3.3 节中介绍了三种估算加筋层压板在轴压下承载能力的方法。

第 6 章“飞机复合材料结构稳定性有限元分析”中，介绍了采用有限元素法对复合材料结构进行稳定性分析的适用范围和应注意的问题，并给出了对几种典型的飞机构件进行稳定性有限元分析及指导设计的过程。

在飞机结构设计研制中，为确保使用安全，对于重要的、受力严重的构件和新型结构仍需进行试验验证和试验研究。在第 7 章“复合材料结构稳定性试验设计及试验技术”中，针对设计人员的需要，介绍了设计试验件和制定试验任务书时应注意的问题，以及试验结果如何确认和使用的问题，并向试验人员推荐了两项重要的试验新技术。

在附录 A“刚度计算”中，对层压板和加筋层压板的刚度计算公式进行了整理和推导，给出了各种刚度、等效刚度和等效弹性模量的计算公式。

复合材料结构稳定性分析技术正在不断发展，其分析内容还有待今后继续补充。

注意，为了与大多数稳定性分析的资料和手册中的习惯用法一致，本指南中规定：作用载荷  $N_x$ 、 $N_y$  和相关的应力  $\sigma_{cr}$ 、 $\sigma_e$ 、 $\sigma_r$ 、 $\sigma_{cc}$ 、 $\sigma_{co}$ 、 $\sigma_{cu}$  等均以压缩为正。对于名词、术语和符号，采用习惯俗成的用法，因此，对某些名词、术语和符号有几种表示，详见“符号和名词术语表”。

## 第 2 章 矩形层压平板的屈曲分析

### 2.1 概 述

现代航空结构中采用了大量的复合材料层压平板，当其承受压缩、剪切时，可能发生屈曲甚至因此而引起破坏，设计中应对其屈曲载荷及承载能力进行分析计算。机身上板框中的格板、纵向构件与框之间的蒙皮，翼面上的肋腹板、长桁与肋之间的蒙皮，都可作为平板来处理。尽管蒙皮具有一定的曲率，处理成平板是偏安全的。

工程上经常使用铺层组数较多的对称均衡层压板，这类层压板不产生拉-剪-弯-扭的耦合效应，对制造和分析都带来方便，采用正交各向异性板理论求解屈曲载荷就可以达到足够的精度。非均衡、非对称的层压板的屈曲分析比较复杂，只有特殊情况下的非均衡、非对称的层压板有解析解，对于一般情况只有采用数值法求解。

本章介绍正交各向异性层压平板、对称非均衡层压平板和某些特殊类型的非对称层压平板在各种载荷和边界支持条件下的屈曲载荷计算与分析；介绍组合型层压平板的压损载荷计算，可用于 J、I 形加强筋条或加筋板的压损问题；介绍层压平板屈曲设计中应注意的问题，以提高抗屈曲品质及分析质量；最后还介绍了几个典型计算例题。

实际的层压平板是飞机结构中的一部分，其四边支持不会是理想的简支/固支。在应用本章公式时应根据平板四边的实际支持件的强弱，对计算结果作出工程判断。要精确地考虑边界支持的影响，可采用有限元程序（如：MSC/NASTRAN）对包括其周边结构的计算模型进行计算。有关这方面的建模问题在本章的 2.4 节中也作了简介，计算例题中也列入了有限元屈曲分析例题。

在本章中所用的层压平板的刚度系数公式为：

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned}$$

### 2.2 正交各向异性矩形层压平板的屈曲分析

对于  $D_{16}$  和  $D_{26}$  为零，或可近似认为等于零的对称层压板，具有正交各向异性特性。属于这种情况的对称层压板主要有：

- (1) 对称正交层压板，如： $[0/90/0]_S$ ， $[0/90/0/90]_S$ ；
- (2) 主方向平行或垂直于板边的单向层压板，如： $[0_3]_S$ ， $[0_5]_S$ ；

(3) 含铺层组数较多  $\pm 45^\circ$  (大于 8) 的对称均衡  $\pi/4$  层压板, 如:  $[0/\pm 45/90/\pm 45/0]_S$ ;

(4) 铺层组数较多 (大于 8) 的对称均衡斜交层压板, 如:  $[\pm 45/\pm 45]_S$ ;

在面内均匀分布的载荷作用下, 正交各向异性矩形平板 (图 2-1) 的屈曲控制方程为

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2-1)$$

式中:  $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$ ——板的弯曲刚度系数;

$N_x, N_y, N_{xy}$ ——作用在板周边的单位长度上的载荷;

$w$ ——屈曲时板的法向 (沿  $z$  方向) 位移。

对于简单的问题已有精确解, 对于较复杂的问题 (如受剪切载荷或在混合边界条件下时), 要采用能量法、数值法等方法求近似解。

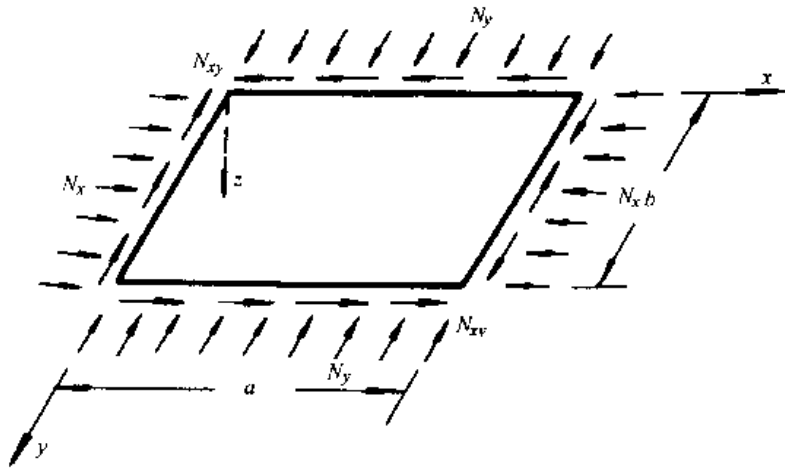


图 2-1 面内载荷作用下的矩形平板

### 2.2.1 正交各向异性矩形层压平板的轴压屈曲分析

#### 2.2.1.1 四边简支正交各向异性矩形层压平板的屈曲分析

其屈曲载荷的计算公式为:

$$N_x = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \frac{D_{11}}{D_{22}} \left( \frac{b}{a} \right)^2 m^2 + 2 \left( \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} \right) + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \frac{1}{m^2} \right] \quad (2-2)$$

式中:  $N_x$ ——单位长度上轴压屈曲载荷;

$m$ ——沿板的方向屈曲半波数。

计算时, 可取  $m=1, 2, 3, \dots$ , 计算相应的一组  $N_x$ , 其中最小的  $N_x$  即为板的屈曲载荷  $N_{cr0}$ 。

当板的长宽比为  $a/b = m \sqrt{D_{11}/D_{22}}$  时 ( $m=1, 2, 3, \dots$ ), 板的屈曲载荷可直接按下式计算

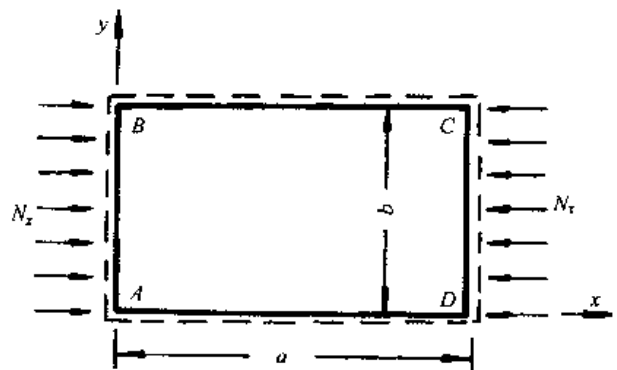


图 2-2 轴压作用下四边简支矩形平板

$$\dot{N}_{cr} = \frac{2\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} + \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \right] \quad (2-3)$$

上式也是无限长板 ( $a/b \rightarrow \infty$ ) 的屈曲载荷计算公式。一般, 当  $a/b \geq 4$  时, 即可近似地按公式 (2-3) 计算。

还可用下面的公式计算四边简支矩形层压板的轴压屈曲载荷

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{12}}}{b^2} \left[ K - 2 \left( 1 - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \right) \right] \quad (2-4)$$

式中  $K$  按  $\lambda$  由图 2-3 中曲线 (a) 查取,  $\lambda = (a/b)(D_{22}/D_{11})^{1/4}$ 。

屈曲载荷与板的长宽比和板的刚度都有关系, 图 2-4 中给出了在  $D_{11}/D_{22} = 0.1, 1, 10$ ;  $(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} = 1$  的情况下, 板的屈曲载荷系数  $K_x$  随着长宽比  $a/b$  的变化曲线, 其中  $K_x = N_x (b^2/D_{22})$ 。

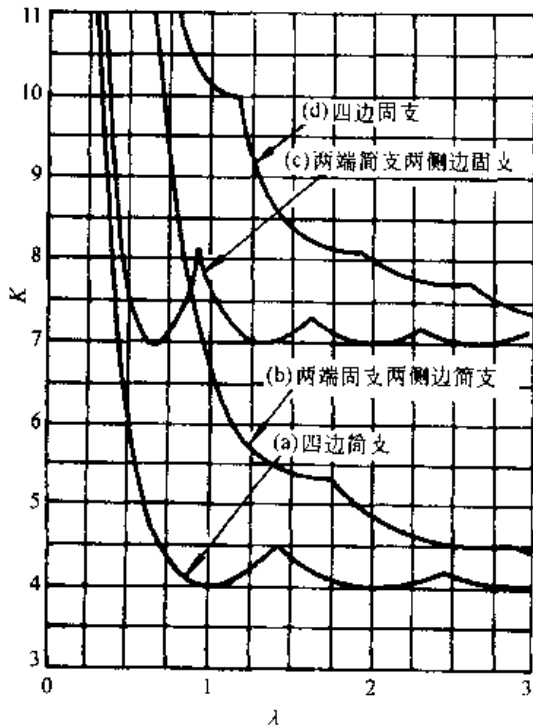


图 2-3 正交各向异性矩形平板的轴压  $K-\lambda$  曲线

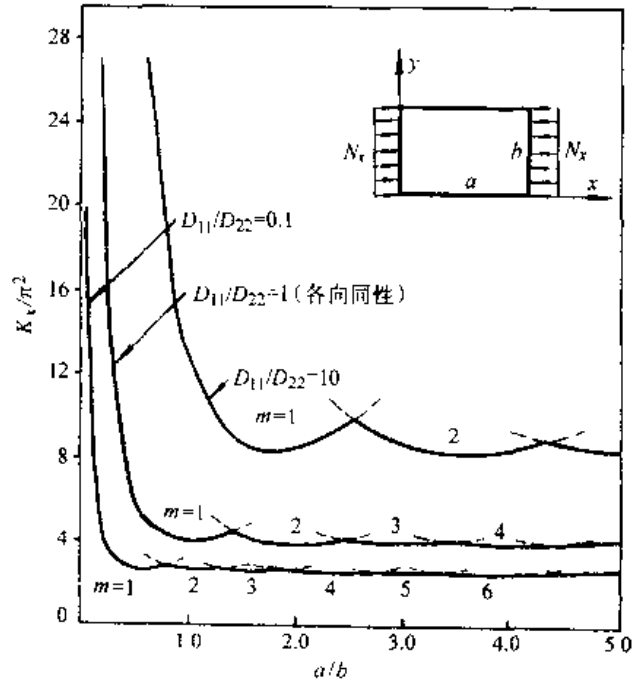


图 2-4 四边简支正交各向异性矩形平板的轴压屈曲系数,  $(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} = 1$

### 2.2.1.2 四边固支正交各向异性矩形层压平板的轴压屈曲

其屈曲载荷按下式计算:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{12}}}{b^2} \left[ K - 2.46 \left( 1 - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \right) \right] \quad (2-5)$$

式中  $K$  按  $\lambda$  由图 2-3 中曲线 (d) 查取,  $\lambda = (a/b)(D_{22}/D_{11})^{1/4}$ 。

对于  $a/b \geq 4$  的长板, 屈曲载荷的计算公式为:

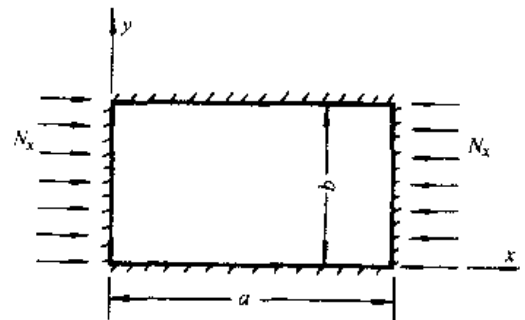


图 2-5 轴压作用下四边固支矩形平板

$$N_{xcr} = \frac{2\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ 2.26 \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} + 1.225 \left( \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} \right) \right] \quad (2-6)$$

与公式 (2-3) 相比, 固支情况比简支情况的屈曲载荷有显著的提高。

2.2.1.3 两加载边简支, 两侧边固支的正交各向异性矩形层压平板轴压屈曲  
其屈曲载荷按下式计算:

$$N_{xcr} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2} \left[ K - 2.40 \left\{ 1 - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \right\} \right] \quad (2-7)$$

式中  $K$  按  $\lambda$  由图 2-3 中曲线 (c) 查取,  $\lambda = (a/b)(D_{22}/D_{11})^{1/4}$ 。

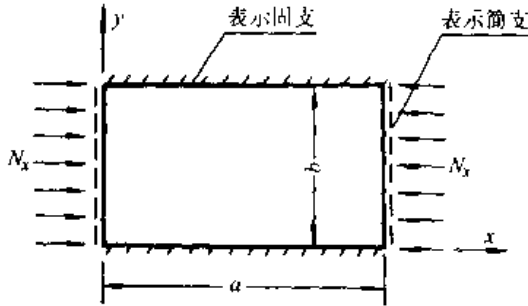


图 2-6 轴压作用下, 两加载边简支, 两侧边固支的矩形平板

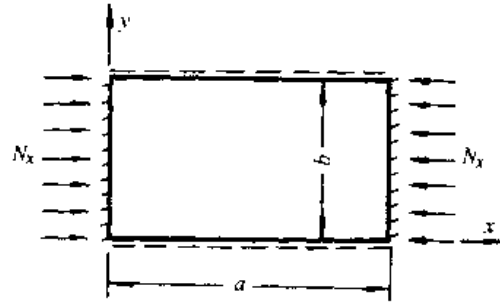


图 2-7 轴压作用下, 两加载边固支, 两侧边简支的矩形平板

2.2.1.4 两加载边固支, 两侧边简支的正交各向异性矩形层压平板轴压屈曲  
其屈曲载荷按下式计算:

$$N_{xcr} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2} \left[ K - 2.0 \left\{ 1 - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \right\} \right] \quad (2-8)$$

式中  $K$  按  $\lambda$  由图 2-3 中曲线 (b) 查取,  $\lambda = (a/b)(D_{22}/D_{11})^{1/4}$ 。

## 2.2.2 正交各向异性矩形层压平板的剪切屈曲分析

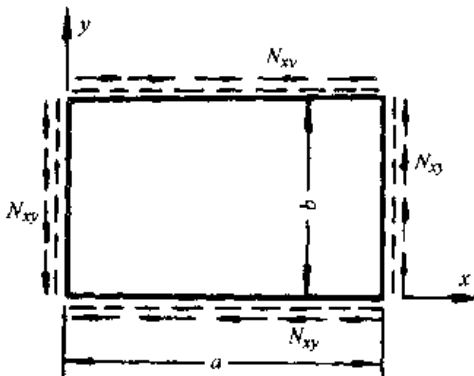


图 2-8 四边简支受剪矩形平板

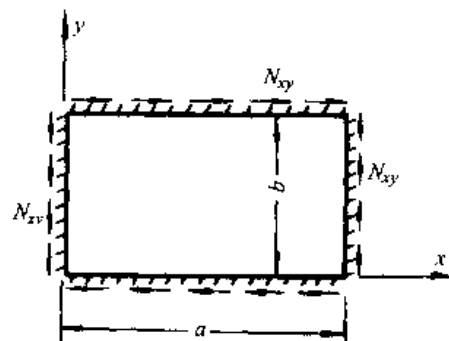


图 2-9 四边固支受剪矩形平板

受载情况如图 2-8 与图 2-9 所示。

四边简支和四边固支情况下, 剪切屈曲载荷的计算公式均为:

$$N_{xycr} = K_s \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}^3}}{b^2} \quad (2-9)$$



但其中剪切屈曲系数  $K_s$  在简支与固支情况下是不同的，可按无量纲参数  $\alpha$ 、 $\beta$  分别从图 2-10 和图 2-11 中查取，图中， $\alpha = \sqrt{D_{11}D_{22}/D_3}$ ， $\beta = (b/a) \sqrt[4]{D_{11}/D_{22}}$ ， $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ 。

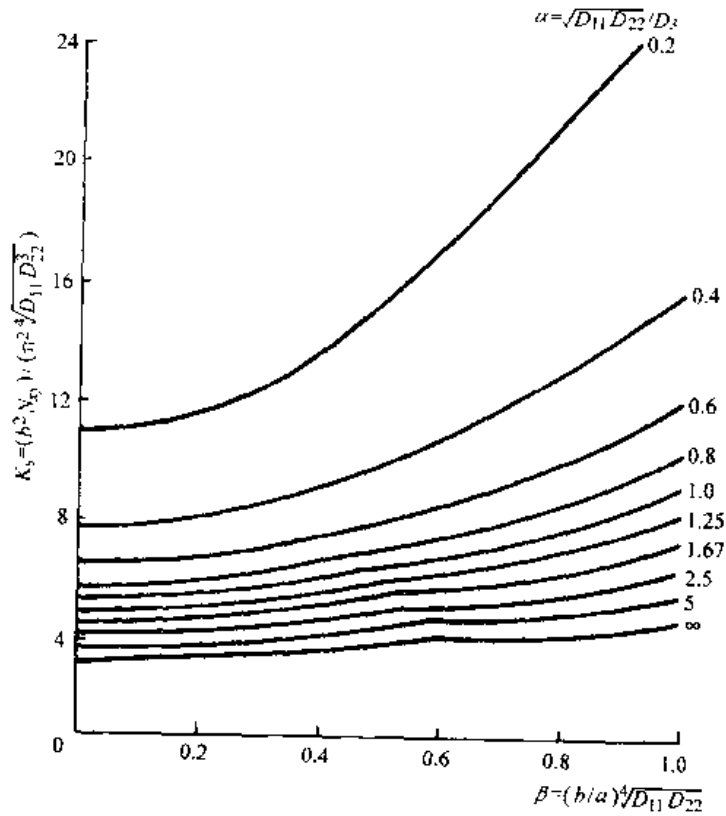


图 2-10 四边简支板的剪切屈曲系数

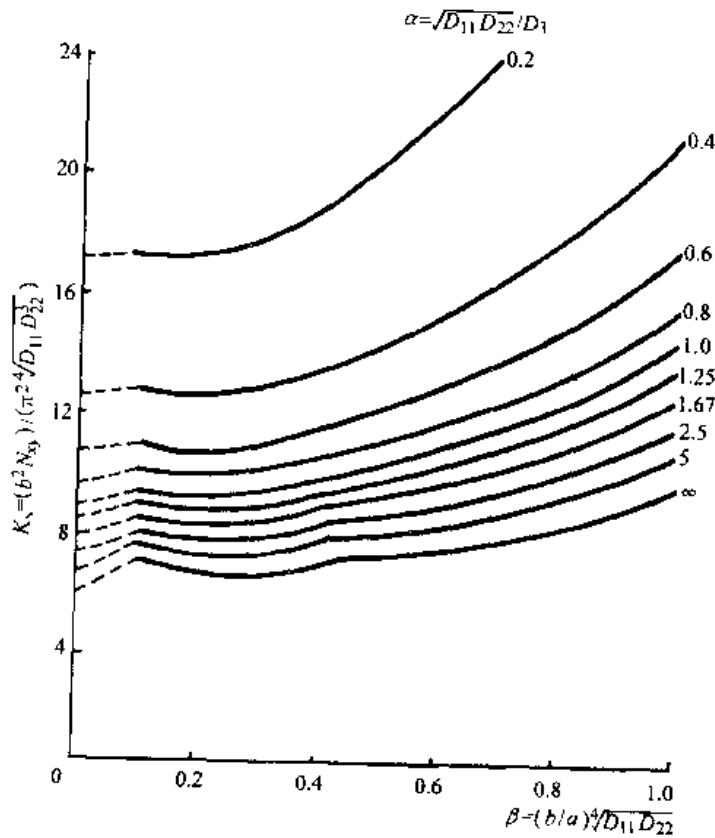


图 2-11 四边固支板的剪切屈曲系数

### 2.2.3 正交各向异性矩形层压平板在复合载荷作用下的屈曲分析

#### 2.2.3.1 正交各向异性矩形平板在双向轴压下的屈曲

##### 1. 四边简支矩形平板双轴压的屈曲载荷

(1) 在  $N_x, N_y$  作用下,  $N_y/N_x$  比值保持不变时, 可用下式计算屈曲载荷:

$$N_x = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \frac{(D_{11}/D_{22})(b/a)^2 m^2 + 2n^2(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} + (a/b)^2 n^4/m^2}{1 + (N_y/N_x)(a/b)^2 (n/m)^2} \right] \quad (2-10)$$

对于已知的比值  $N_y/N_x$ , 取  $m=1, 2, 3, \dots$ , 及  $n=1, 2, 3, \dots$ , 由上式可计算一系列的  $N_x$ , 其中最小的  $N_x$  即为屈曲载荷  $N_{xcr}$ 。

图 2-13 和图 2-14 中, 分别为  $(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} = 1, N_y/N_x = 1$  和  $N_y/N_x = -1$  的四边简支矩形平板的  $K_x/\pi^2 \sim a/b$  曲线, 其中  $K_x = N_x(b^2/D_{22})$ 。

由图 2-13 可见, 四边简支矩形平板在双轴压下 ( $N_y/N_x = 1$ ), 纵横方向均为一个屈曲半波 ( $m=1, n=1$ ), 且最小值  $K_x/\pi^2 = 1$ 。而图 2-14 表明, 由于拉伸载荷  $N_y$  的作用 ( $N_y/N_x = -1$ ), 显著地提高了  $x$  轴向上的压缩屈曲载荷。

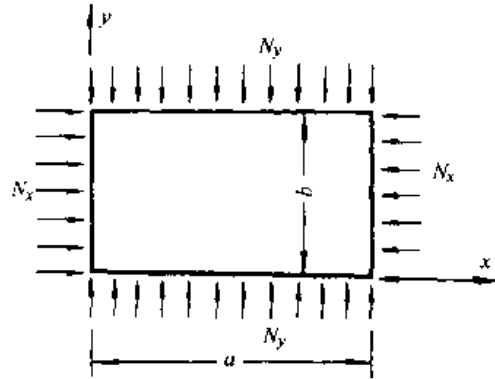


图 2-12 双轴压作用下矩形平板

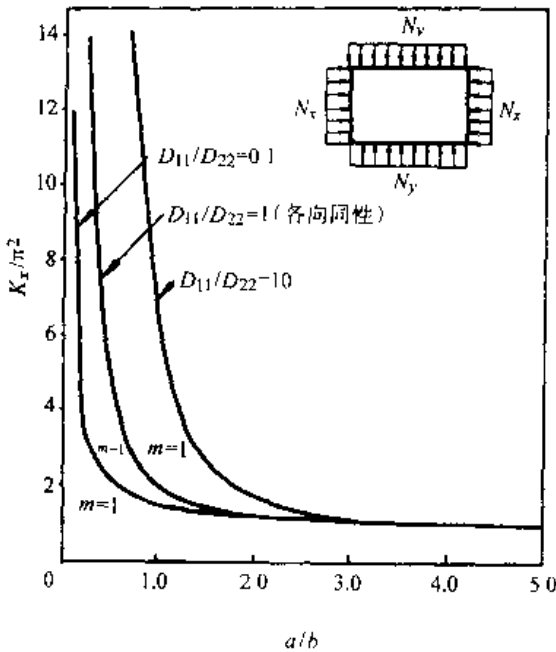


图 2-13 双轴向受压, 具有各种  $D_{11}/D_{22}$  比值的四边简支矩形平板的屈曲系数 ( $N_y/N_x = 1, (D_{11} + 2D_{66})/D_{22} = 1$ )

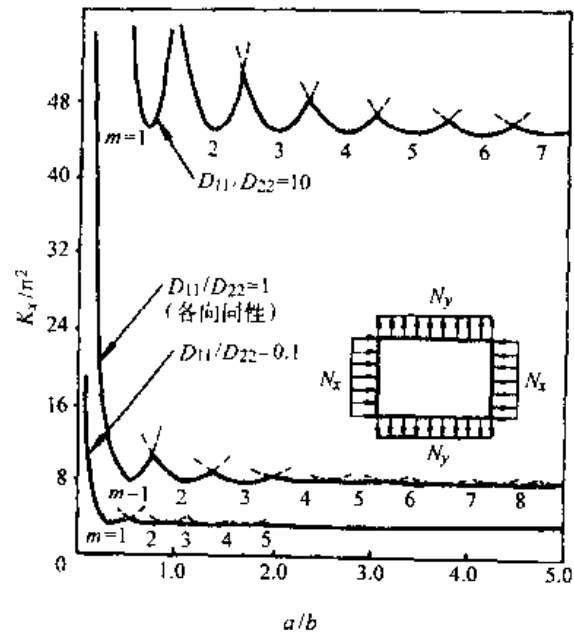


图 2-14  $x$  轴向受压,  $y$  轴向受拉, 具有各种  $D_{11}/D_{22}$  比值的四边简支矩形平板的屈曲系数 ( $N_x/N_y = -1, (D_{11} + 2D_{66})/D_{22} = 1$ )

(2) 在  $N_x, N_y$  作用下,  $N_y$  值保持不变时, 可用下式计算屈曲载荷:

$$N_x = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} [(D_{11}/D_{22})(b/a)^2 m^2 + 2n^2(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} + (a/b)^2 n^4/m^2 - (a^2/\pi^2 D_{22})(n/m)^2 N_y] \quad (2-11)$$

取  $m = 1, 2, 3, \dots$ , 及  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 计算相应的  $N_x$ , 其中最小的  $N_x$  即为屈曲载荷  $N_{xcr}$ 。

在下列情况下, 公式 (2-11) 可得到简化:

当  $N_y < 2\pi^2 [D_{22}/b^2 + (D_{12} + 2D_{66})/a^2]$  时, 公式 (2-11) 中可取  $n = 1$ ;

当  $\pi^2 D_{22}/b^2 < N_y < 2\pi^2 [D_{22}/b^2 + (D_{12} + 2D_{66})/a^2]$  时, 公式 (2-11) 中可取  $m = 1, n = 1$ ;

当  $N_y < \pi^2 D_{22}/b^2$  时 (包括  $N_y$  为负值, 即  $y$  轴向受拉的情况), 公式 (2-11) 可简化为:

$$N_x = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2} \left[ (K - 2) \left( 1 - \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_{22}} \right)^{1/2} + 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \right] \quad (2-12)$$

其中  $K$  按  $\lambda$  由图 2-3 中曲线 (a) 查取, 但必须注意, 在双轴向载荷时,  $\lambda$  应由下式计算

$$\lambda = \frac{a}{b} \left[ \frac{D_{22}}{D_{11}} \left( 1 - \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_{22}} \right) \right]^{1/4}$$

对于  $y$  方向受拉,  $x$  方向受压的无限长板 ( $a/b \rightarrow \infty$ ), 其屈曲载荷可按下式计算

$$N_x = 2 \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2} \sqrt{1 - \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_{22}} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}} \quad (2-13)$$

对于有限长板, 用公式 (2-13) 计算偏保守。

2. 加  $N_x$  的边固支, 加  $N_y$  的边简支的矩形平板双轴压的屈曲载荷

当  $N_y < \pi^2 D_{22}/b^2$  时, 按公式 (2-12) 计算屈曲载荷, 式中的  $K$  值按  $\lambda$  从图 2-3 中曲

线 (b) 查取,  $\lambda = \frac{a}{b} \left[ \frac{D_{22}}{D_{11}} \left( 1 - \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_{22}} \right) \right]^{1/4}$

### 2.2.3.2 正交各向异性矩形层压平板在压剪复合载荷作用下的屈曲

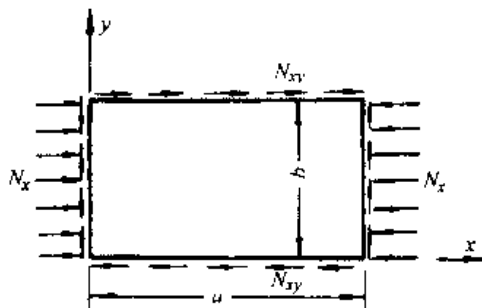


图 2-15 压剪复合载荷作用下矩形平板

其屈曲载荷一般地按下式计算:

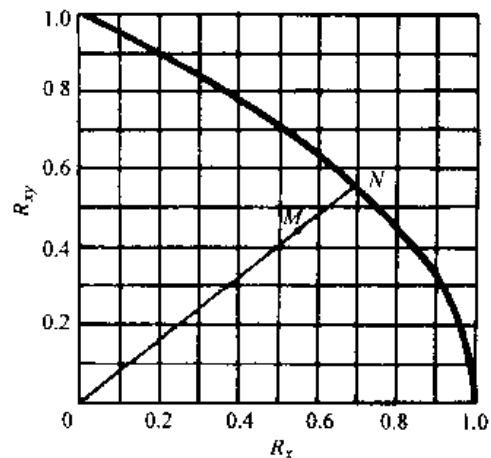


图 2-16 压剪屈曲相关曲线

$$R_x + R_y^2 = 1 \quad (2-14)$$

式中

$$R_x = N_x / N_{xcr}^0, \quad R_{xy} = N_{xy} / N_{xycr}^0$$

$N_{xcr}^0$ ,  $N_{xycr}^0$  分别为单轴压和纯剪切情况的屈曲载荷。由公式 (2-14) 构成的屈曲关系见图 2-16, 当作用载荷点在图 2-16 中相关曲线与坐标轴所围区域之内 (即式 (2-14) 的左端之和小于 1 时), 则不发生屈曲, 当作用载荷点落在曲线上及曲线以外 (即式 (2-14) 的左端之和大于、等于 1 时), 则发生屈曲。

工程上, 通常用图 2-16 来计算屈曲的安全裕度。当作用载荷  $N_x$ 、 $N_{xy}$  给定后, 先求出  $R_x$ 、 $R_{xy}$ , 可得图中 M 点, 连接 OM, 得与相关曲线的交点 N, 则屈曲安全裕度为:

$$MS = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} - 1$$

## 2.3 一般矩形层压平板的屈曲分析

层压板的屈曲分析较为复杂, 除与铺层材料特性有关外, 还与铺层角、铺层顺序等有关。对于非均衡的对称层压板和非对称层压板, 屈曲分析将更为复杂。一般需采用能量法、数值法编制的程序求解。

### 2.3.1 对称层压平板的屈曲分析<sup>[4,2,8]</sup>

对于  $D_{16} \neq 0$ ,  $D_{26} \neq 0$  的对称层压板, 包括对称非均衡的层压板和含  $\pm\theta$  铺层数较少的对称均衡层压板等, 不具有正交各向异性特性, 其屈曲控制方程为

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2-15)$$

与正交各向异性板的屈曲控制方程 (2-1) 相比, 由于增加了含  $D_{16}$ 、 $D_{26}$  的耦合项, 一般不能求得封闭解。

可采用 MSC/NASTRAN 程序计算压缩和剪切屈曲载荷。

图 2-17 和图 2-18 可用来说明铺层角  $\theta$  对对称均衡斜交层压板屈曲载荷的影响。铺层的材料性能数据为,  $E_{11}/E_{22} = 8.787$ ,  $G_{12}/E_{22} = 0.272$ ,  $\nu_{12} = 0.31$ 。由图可见:

(1) 当  $\theta = 45^\circ$  时, 轴压屈曲载荷最大。因此, 在设计以承受轴压载荷为主要情况的层压板时, 应把  $\pm 45^\circ$  铺层尽量安排在板的外层及其附近;

(2) 当长宽比  $a/b = 1$  时,  $\theta = 45^\circ$  的对称均衡斜交层压板的剪切屈曲载荷最大; 而当  $a/b \geq 2$  时, 约在  $\theta = 60^\circ$  时剪切屈曲载荷

最大。在设计以承受剪切载荷为主要情况的层压板时, 应考虑长宽比与铺层角的综合影响。

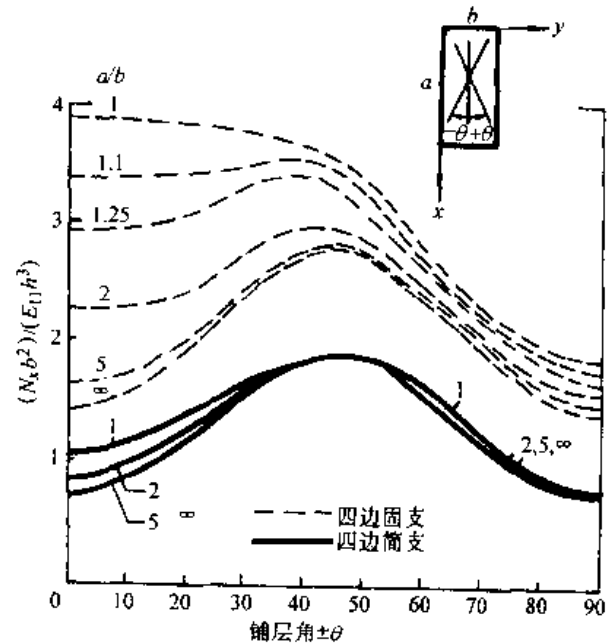


图 2-17 铺层角  $\theta$  对轴压屈曲载荷的影响

图 2-19 可用来说明  $D_{16}$  和  $D_{26}$  对四边简支对称均衡斜交层压板轴压屈曲载荷的影响。铺层材料性能数据为  $E_{11}/E_{22} = 10$ ,  $G_{12}/E_{22} = 0.3$ ,  $\nu_{12} = 0.3$ ; 板的长宽比为  $a/b = 1.13$ 。图中最上面的曲线是  $D_{16} = 0$ ,  $D_{26} = 0$  的正交各向异性板的解。由图可见:

(1) 20 层铺层角均为  $\theta$  的单向层压板, 由于  $D_{16}$  和  $D_{26}$  的影响, 其轴压屈曲载荷降低了三分之一左右。

(2) 20 层对称均衡斜交层压板, 其屈曲载荷与正交各向异性板已无区别, 说明此类层压板  $D_{16}$  和  $D_{26}$  的影响大为降低, 铺层数愈多就愈接近正交各向异性板。

(3) 设计中对于  $D_{16}$ 、 $D_{26}$  不为零的层压板处理成正交各向异性板计算时, 其轴压屈曲载荷偏高, 设计是偏危险的, 特别是在层数较少时,  $D_{16}$ 、 $D_{26}$  对屈曲载荷的降低更不应忽略。

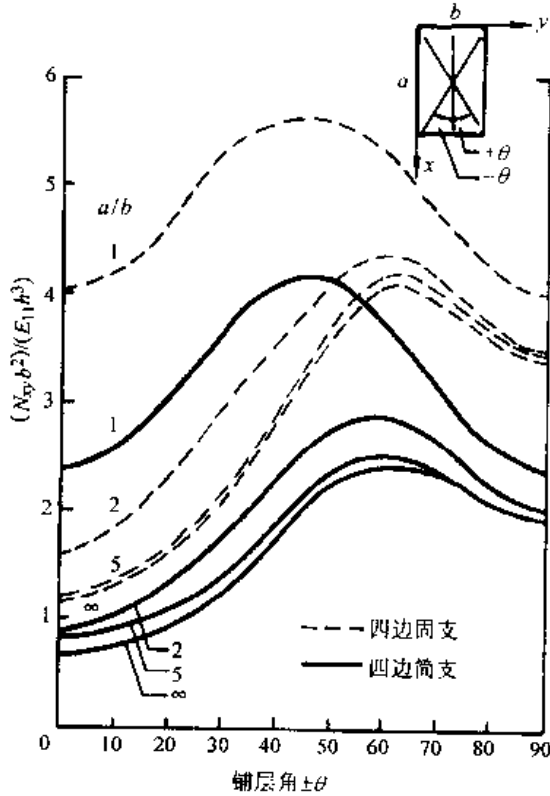


图 2-18 铺层角  $\theta$  对剪切屈曲载荷的影响

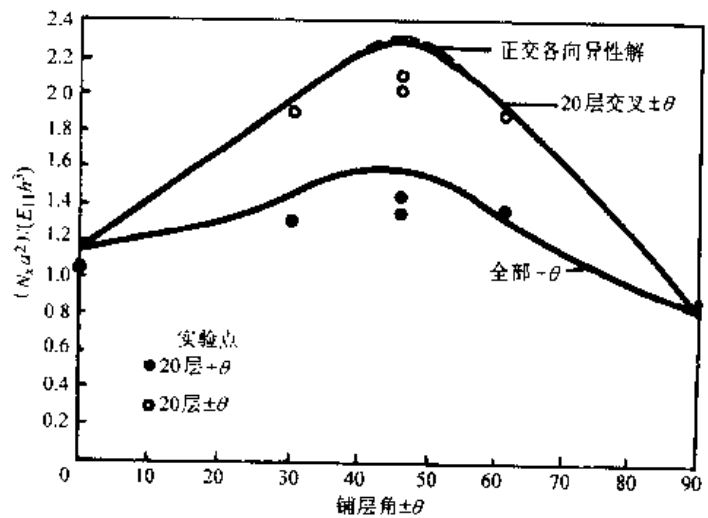


图 2-19  $D_{16}$ 、 $D_{26}$  对轴压屈曲载荷的影响

### 2.3.2 非对称层压平板的屈曲分析

非对称层压板, 由于存在拉-弯耦合, 即  $B_y$  不为零或不全为零, 屈曲计算比较复杂。只有某些特殊类型的非对称层压板才有现成的屈曲计算公式。

#### 2.3.2.1 规则非对称正交层压平板的轴压屈曲

这类层压板的  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  单向层交替铺设, 其刚度系数中  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ ,  $B_{16} = B_{26} = B_{66} = B_{12} = 0$ ,  $A_{11} = A_{22}$ ,  $B_{11} = -B_{22}$ ,  $D_{11} = D_{22}$ 。

在第二类简支边界条件 ( $w = 0$ ,  $M_n = 0$ ,  $N_n = 0$ ,  $u_t = 0$ , 即边界挠度与沿板边法向弯矩为零, 沿板边法向面内力与切向面内位移为零) 下, 轴压屈曲载荷为

$$N_x = \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 \left( T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T_{13}^2 - T_{11}T_{23}^2}{T_{11}T_{22} - T_{12}^2} \right) \quad (2-16)$$

式中

$$\begin{aligned} T_{11} &= A_{11}(m\pi/a)^2 + A_{66}(n\pi/b)^2; \\ T_{12} &= (A_{12} + A_{66})(m\pi/a)(n\pi/b); \\ T_{22} &= A_{22}(n\pi/b)^2 + A_{66}(m\pi/a)^2; \\ T_{33} &= D_{11}(m\pi/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2 + D_{22}(n\pi/b)^4; \\ T_{13} &= -B_{11}(m\pi/a)^3; \\ T_{23} &= B_{11}(n\pi/b)^3 \end{aligned}$$

$a, b$ ——分别为层压板的长度和宽度;

$m, n$ ——分别为板的长度方向和宽度方向的屈曲半波数。

计算时, 取  $m=1, 2, 3, \dots$ , 及  $n=1, 2, 3, \dots$ , 计算相应的一组  $N_x$ , 其中最小的  $N_x$  即为轴压屈曲载荷  $N_{x,c}$ 。

### 2.3.2.2 规则反对称斜交层压平板的轴压屈曲

这类层压板相对于板中面对称位置 ( $z = \pm z_1$ ) 上的两个单层 (或层组) 材料相同, 厚度相等, 且满足  $\theta(z_1) = -\theta(-z_1)$  的条件。反对称板一般由偶数的单向层 (或层组) 组成, 但中间层 (层组) 的铺层角为  $0^\circ, 90^\circ$  时, 也可由奇数层 (层组) 组成。 $+\theta/-\theta$  单向层交替铺设的层压板即是反对称层压板的典型例子。反对称层压板的  $+\theta, -\theta$  单向层交替铺设, 其刚度系数中  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0, B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_{66} = 0$ 。

在第三类简支边界条件 ( $w=0, M_x=0, u_x=0, N_x=0$ , 即边界挠度与沿板边法向弯矩为零, 沿板边法向面内位移与面内剪切力为零) 下, 轴压屈曲载荷  $N_x$  的计算公式与公式 (2-16) 相同。但  $T_{13}$  和  $T_{23}$  的计算公式与公式 (2-16) 中的不同, 要按下式计算:

$$\begin{aligned} T_{13} &= -[3B_{16}(m\pi/a)^2 + B_{26}(n\pi/b)^2](n\pi/b) \\ T_{23} &= -[B_{16}(m\pi/a)^2 + 3B_{26}(n\pi/b)^2](m\pi/a) \end{aligned}$$

图 2-20 和图 2-21 示出了拉-弯耦合效应对非对称正交层压平板屈曲载荷的影响。

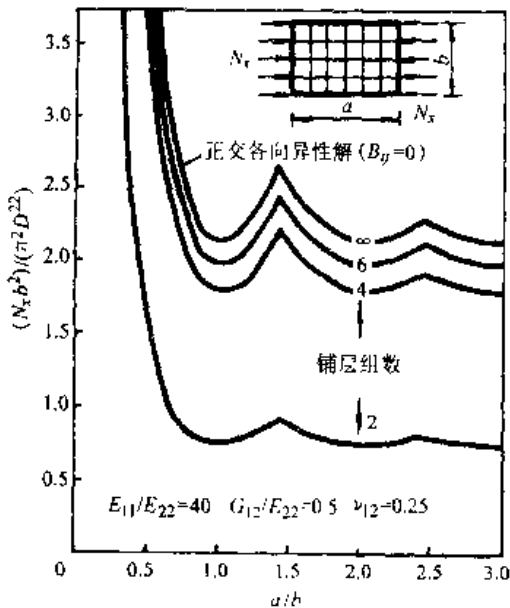


图 2-20 规则非对称正交层压平板的轴压屈曲载荷随  $a/b$  的变化

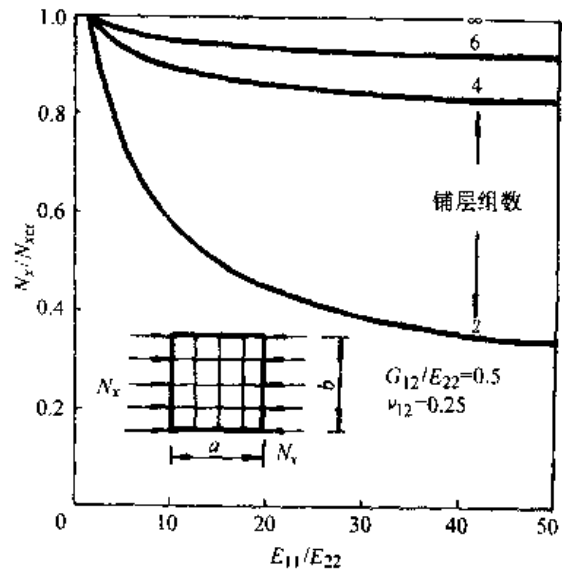


图 2-21 规则非对称正交层压平板的轴压屈曲载荷随  $E_{11}/E_{22}$  的变化

图 2-22 和图 2-23 示出了拉-弯耦合效应对反对称斜交层压平板屈曲载荷的影响。

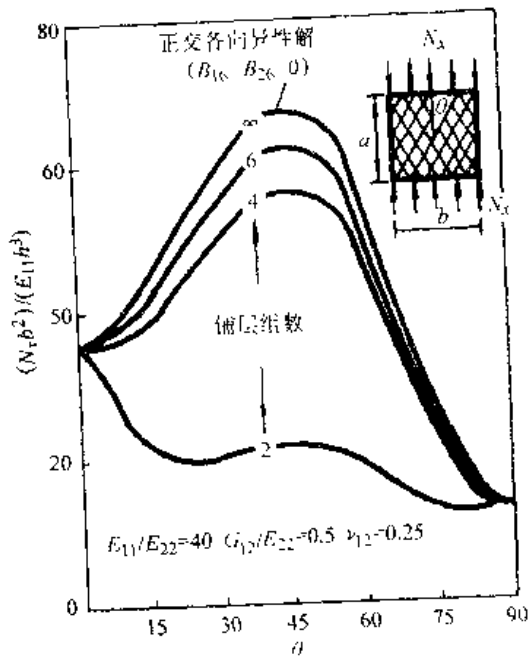


图 2-22 规则反对称斜交层压平板的轴压屈曲载荷随  $\theta$  的变化

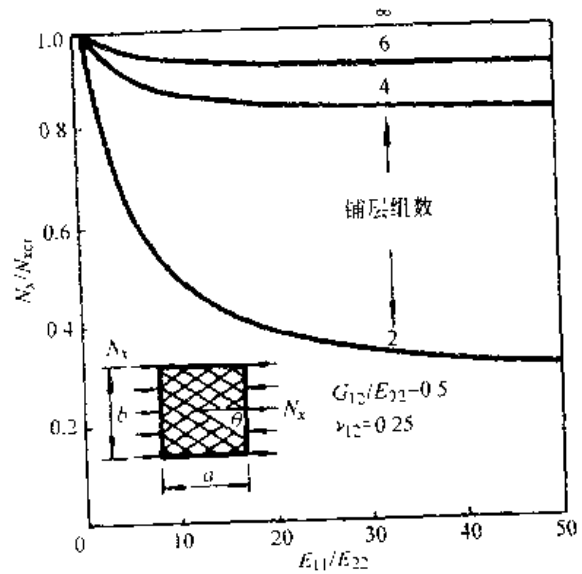


图 2-23 规则反对称斜交层压平板的轴压屈曲载荷随  $E_{11}/E_{22}$  的变化

由图 2-20 至图 2-23 可见：

- (1) 板的铺层组数愈少，拉-弯耦合效应愈大，屈曲载荷明显变小；
- (2) 随着铺层材料的  $E_{11}/E_{22}$  比值下降，拉-弯耦合效应变小；
- (3) 对于目前常用的复合材料，当铺层组数大于 8 时，可忽略拉-弯耦合效应。临界载荷可近似地按正交各向异性板计算。

### 2.3.3 对称铺层层压平板在压剪复合载荷作用下的屈曲分析

对于可当作正交各向异性板处理的层压板（见 2.2 节），可用式（2-14）计算压剪复合屈曲载荷。

对于  $D_{16} \neq 0$ ， $D_{26} \neq 0$  的对称层压板，四边简支和四边固支条件下，压剪复合屈曲载荷可用 MSC/NASTRAN 程序计算。

值得注意的是，由于  $D_{16}$  和  $D_{26}$  的存在，剪力方向（图 2-24）对层压板的压剪复合屈曲相关特性有显著影响。

(1) 当  $D_{16} > 0$  和  $D_{26} > 0$  时，正向剪力使轴压屈曲载荷显著下降，而负向剪力会使轴压屈曲载荷提高；

(2) 当  $D_{16} < 0$  和  $D_{26} < 0$  时，负向剪力使轴压屈曲载荷显著下降，而正向剪力会使轴压屈曲载荷提高；

(3) 当  $D_{16} = 0$  和  $D_{26} = 0$  时，即对于正交各向异性层压板，剪力方向的改变对轴压屈曲载荷没有影响。

图 2-25 为  $D_{16} > 0$  和  $D_{26} > 0$  的对称层压方板的压剪复合屈曲相关曲线，铺层材料性能数据为  $E_{11}/E_{22} = 10$ ， $G_{12}/E_{22} = 0.25$ ， $\nu_{12} = 0.3$ 。图中抛物线为相应的正交各向异性板的

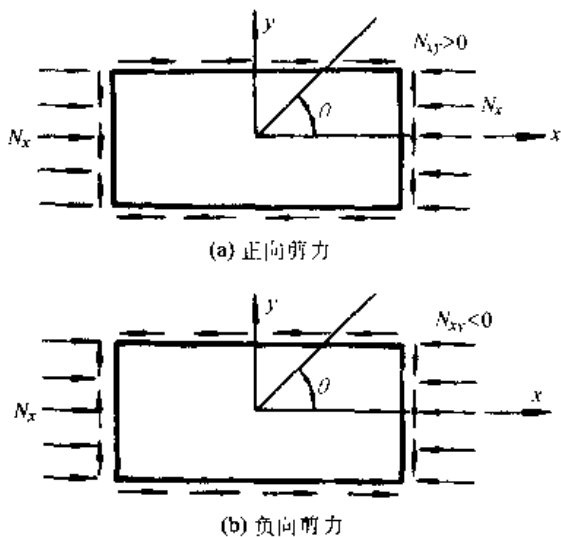


图 2-24 压剪复合作用下矩形层压平板

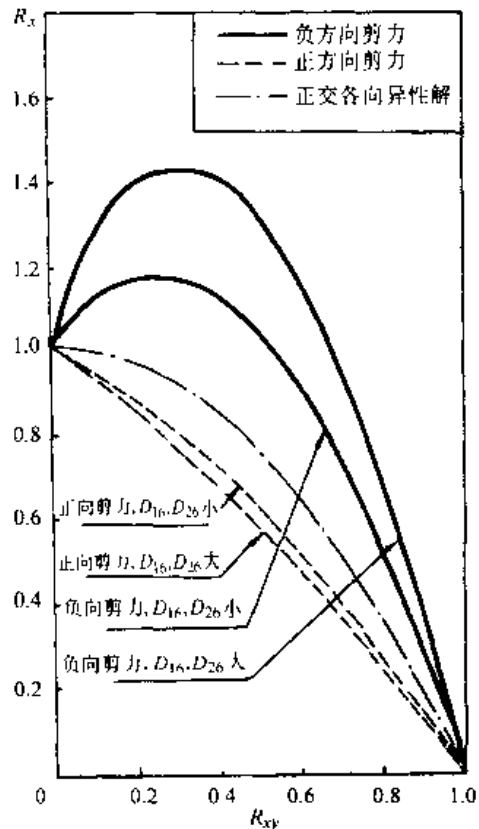


图 2-25 对称层压板 ( $D_{16} > 0$  和  $D_{26} > 0$ ) 的压剪复合屈曲相关曲线

压剪屈曲相关曲线，虚线为正向剪力作用下的压剪屈曲相关曲线，实线为负向剪力作用下的压剪屈曲相关曲线。

这种相关特性还与  $E_{11}/E_{22}$ 、板的长宽比、边界条件等有关。如： $E_{11}/E_{22}$  愈大，实线愈凸鼓，虚线愈平缓；四边固支时的实线比四边简支时的更凸鼓，四边固支时的虚线比四边简支时的更平缓。

为利用这种特性，设计时可使层压板的外层纤维方向与剪力合力所产生的压力方向相一致或接近。这样，在垂直纤维方向（即在板的弯曲刚度较小的方向）上，剪力合力为拉力，则可提高层压板承受压剪复合载荷的能力。

## 2.4 层压平板的有限元屈曲分析

可用于层压板屈曲分析的有限元程序很多，建议采用通用性强的 MSC/NASTRAN 程序求解。有限元建模通常应注意下述事项。

(1) 网格的划分 网格的划分要适应屈曲模态，在可能的屈曲波形的波峰、波谷、波节上要设置计算节点。

由图 2-26 可见，当纵向（或横向）产生一个屈曲半波，即  $m = 1$ （或  $n = 1$ ）时，纵向



(或横向)取5个节点(4个格子)为宜;当纵向产生2个屈曲半波,横向产生一个屈曲半波,(即  $m=2$ ,  $n=1$ )时,纵向取9个节点(8个格子),横向取5个节点(4个格子)为宜,这样有足够多的节点位移表征屈曲模态。若节点数少,则不能充分表征屈曲模态,相当于有横向约束使模态偏离真实模态,这将使计算的屈曲载荷偏高。

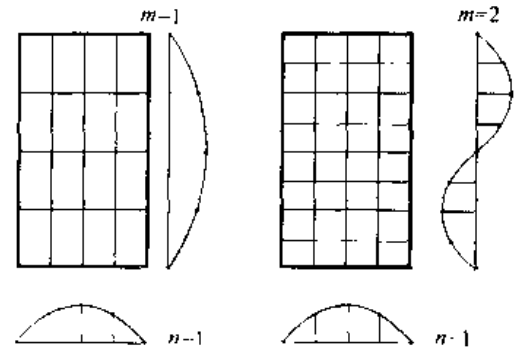


图 2-26 有限元网格划分示意图

(2) 边界条件的设置 用 MS/NASTRAN 程序进行屈曲分析时,必须要有两个子情况,第一个子情况是静力分析,以确定格板内各元素的应力状态,从而形成屈曲分析不可缺少的几何刚度矩阵。第二个子情况是求解屈曲分析的特征值问题。在第一个子情况,为求得合理的应力分布,其边界条件可不同于第二个子情况的边界条件。

如对图 2-2 用 QUAD4 元所建的有限元模型,为求得均匀的轴压应力分布,第一种子情况的边界条件中要适当放松面内位移的约束。其边界条件可取为:四边上  $w=0$  ( $z$  向位移为 0);端边 AB 上  $u=0$  ( $x$  向位移为 0);为防止平板在  $y$  方向的刚体位移及绕  $z$  的刚体转动,可在端边 AB, CD 的中点上设置  $v=0$  ( $y$  向位移为 0);边界上其他面内位移则放松。如要求在变形过程中端边 CD 平直地向端边 AB 靠拢,则还要置端边 CD 各点上的  $u$  ( $x$  向位移)相等。而求解屈曲的特征值问题的第二个子情况的边界条件,则要用真实的边界条件。

(3) 弹性支持的考虑 本章提供的计算公式和曲线适用于简支、固支等典型的边界支持情况,而作为飞机结构中的平板,其四边支持一般为弹性支持。如果板的四边的梁(或长桁)和框(或肋)等支持件的刚度较大,对于机械连接情况,则可以根据单排或多排连接情况使用简支或固支边界条件。若难以工程判断,则要考虑支持的弹性影响,这要采用有限元方法进行计算。计算模型可取一个格板,而两侧边要把梁(或长桁)附上,两端边要把框(或肋)附上,这样可以考虑板周边的弹性支持的影响。由于板两端的框(或肋)的刚度一般都比较大,计算模型中也可不附上,而采用固支(或简支)边界条件。例如,两框(或两肋)与两梁(或两长桁)之间的蒙皮格板,在总体坐标  $xyx$  下第二个子情况(屈曲情况)的边界条件可取为(图 2-27):

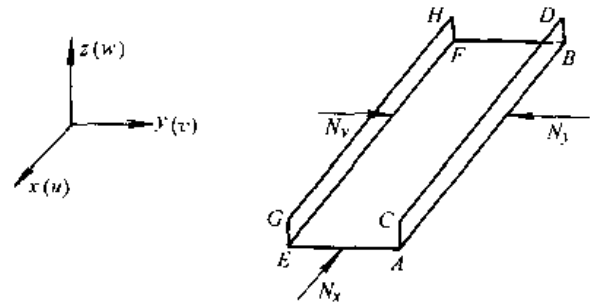


图 2-27 考虑两侧边为弹性支持的计算模型

格板 ABFE 端部

$BF: u = v = w = 0, \theta_y = 0, \theta_x = 0, \theta_z = 0$ , (简支时  $\theta_y$  不限制)

$AE: v = w = 0, \theta_y = 0, \theta_x = 0, \theta_z = 0$ , (简支时  $\theta_y$  不限制)

$u_i = u_j = u_k = \dots$ 。(格板端部 AE 上结点位移  $u$  均相等)

梁(或长桁) ABDC, EFHG 的端部

$BD, FH: u = v = w = 0, \theta_x = 0, \theta_y = 0, \theta_z = 0$ , (简支时  $\theta_x$  不限制)

$AC, EG: v = w = 0, \theta_x = 0, \theta_y = 0, \theta_z = 0$ , (简支时  $\theta_x$  不限制)

$u_p = u_q = u_r = \dots = u_i = u_j = u_k = \dots$ 。(侧梁两端 AC, EG 上的结点

位移  $u$  相等且相等于格板端的  $u$ )

格板 ABFE 的两侧边 在格板与桁条相连两侧边 BA、FE 上的节点位移与转角不约束。

如前所述,为使格板处于均匀轴压状态,第一子情况(静力情况)的边界条件中,在两端要适当放松面内切向位移。载荷取自结构的应力分析,将面内的内力作用到板格的端部与两侧的节点(如图 2-27)。蒙皮格板与梁建议用四边形板弯元(在 MSC/NASTRAN 程序中为 QUAD4 元)进行建模。

## 2.5 组合型平板的压损载荷

加筋壁板的加强筋通常为组合形平板,图 2-28 表示一种 J 形加强筋的典型横截面。若加强筋较短,则在压缩载荷下不会发生欧拉型的总体失稳。加强筋中,上突缘可视为一个三边支持一边自由的平板,腹板可视为四边支持(无自由边)的平板,下突缘可视为两个三边支持一边自由的平板。

在压缩载荷下加强筋的各平板组元的屈曲应力是不同的,对于较短的组合形平板一般要以加强筋的压损载荷(压缩承载能力)来判别是否失效。

(1) 加强筋的几何参数 图 2-28 为加强筋的典型横截面,各板单元的符号如下:

$t_c$ 、 $t_w$ 、 $t_f$ 、 $t_s$ ——分别为上突缘、腹板、下突缘、蒙皮的厚度;

$w_c$ ——上突缘的宽度(更准确地应取为  $w_c - t_w/2$ );

$w_w$ ——腹板的宽度(同样忽略了  $t_c/2$ ,  $t_f/2$ );

$w_f$ ——下突缘的宽度;

$w_s^e$ ——壁板失稳后蒙皮的有效宽度;

$l$ ——加强筋长度。

假设  $l$  为  $w_c$ 、 $w_w$ 、 $w_f$  的数倍,譬如  $l > 3w_c$ ,  $3w_w$ ,  $3w_f$ , 这在一般结构中均能满足。

(2) 屈曲载荷的计算

• 上突缘的屈曲载荷

上突缘的屈曲载荷(单位宽度上)为:

$$N_{cr}^c = \frac{\pi^2}{w_c^2} \left[ D_{11}^c \frac{m^2 w_c^2}{l^2} + D_{22}^c \frac{l^2}{m^2 w_c^2} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + D_{12}^c \frac{\varphi_3}{\varphi_1} + D_{66}^c \frac{\varphi_4}{\varphi_1} \right]_{\min} \quad (2-17)$$

其中

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} + k \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi^2} \right) + k^2 \left( \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2} \right)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{32} k^2$$

$$\varphi_3 = -k \left( \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \right) + k^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) \quad (2-18)$$

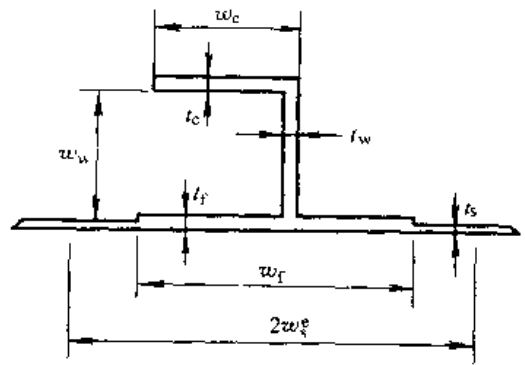


图 2-28 加强筋的典型横截面

$$\varphi_4 = 4 \left[ \frac{1}{\pi^2} + k^2 \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) \right]$$

$$k = \frac{11 w_c / D_{22}^c}{11 w_c / D_{22}^c + 10 h / D_{22}^w} \quad (2-19)$$

$$h = w_w + \frac{t_c}{2} + \frac{t_f}{2}$$

对 (2-17) 式中纵向屈曲半波数取  $m=1, 2, 3, \dots$ , 求  $N_{cr}^c$  的最小值即为所求屈曲载荷。 $D_{11}^c, D_{22}^c, D_{12}^c, D_{66}^c$  分别为上突缘的纵向弯曲刚度、横向弯曲刚度、弯曲泊松刚度和扭转刚度； $D_{22}^w$  为腹板的横向弯曲刚度。

• 下突缘的屈曲载荷

下突缘的屈曲载荷计算公式同 (2-17) 式, 只需用  $w_f/2$  代替  $w_c$ , 用  $D_{ij}^f$  代替  $D_{ij}^c$ 。而此时  $k$  的公式为:

$$k = \frac{11 w_f / 80 D_{22}^f}{11 w_f / 80 D_{22}^f + h / 3 D_{22}^w} \quad (2-20)$$

• 腹板的屈曲载荷

腹板的屈曲载荷 (单位宽度上) 可按四边简支计算:

$$N_{cr}^w = \frac{\pi^2}{w_w^2} \left[ D_{11}^w \frac{m^2 w_w^2}{l^2} + D_{22}^w \frac{l^2}{m^2 w_w^2} + 2(D_{12}^w + 2D_{66}^w) \right]_{\min} \quad (2-21)$$

若  $l \geq 3w_s$  ( $w_s$  为加强筋的间距), 式 (2-21) 亦可用于筋间蒙皮屈曲载荷  $N_{cr}^s$  计算, 只需用  $w_s$  代替  $w_w$ , 用  $D_{ij}^s$  代替  $D_{ij}^w$ 。

(3) 突缘、腹板的压损载荷计算  $N_{cu}$  为层板的极限压缩强度, 可以根据材料的力学性能及具体铺层作理论上的估算, 或可通过试验测出。( $N_{cu} / N_{cr}$ ) 表征加强筋各平板组元的几何与材料特性。由 ( $N_{cu} / N_{cr}$ ) 通过图 2-29 和图 2-30 中的经验曲线可求得加强筋的上、下突缘、腹板的压损载荷  $N_{cc}^c$ 。

(4) 加强筋的压损载荷计算

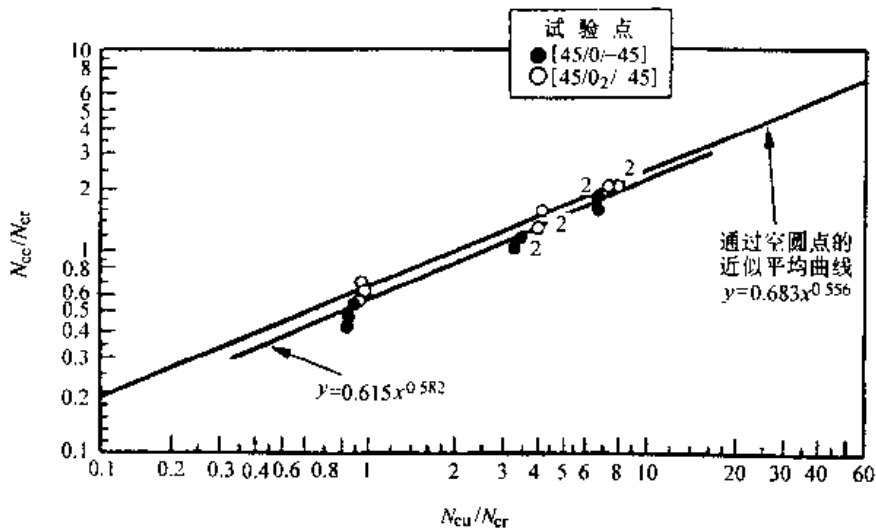


图 2-29 具有一个自由边板元的压损载荷曲线

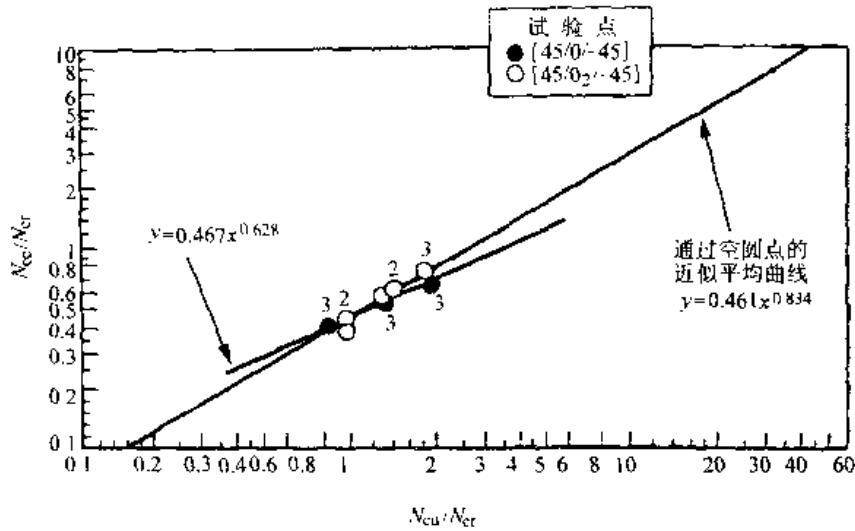


图 2-30 无自由边板元的压损载荷曲线

加强筋的突缘、腹板的压损载荷是不同的，因而其压损应变也不同。选取其中的最小应变  $[\epsilon_{cc}]$  作为限制应变来计算加强筋的压损载荷。

$$[\epsilon_{cc}] = \left[ (N_{ci}^c / t^i) E_x^i \right]_{\min} \quad (2-22)$$

式中：上角标  $i$  为  $c, f, w$ ，分别表示上突缘的、下突缘的和腹板的；

$E_x$ ——为  $x$  轴向等效压缩弹性模量。

于是用限制应变修正后的上、下突缘、腹板的压损载荷为：

$$\begin{aligned} P_{cc}^c &= [\epsilon_{cc}] \times E_x^c \times t_c \times w_c \\ P_{cc}^f &= [\epsilon_{cc}] \times E_x^f \times t_f \times w_f \\ P_{cc}^w &= [\epsilon_{cc}] \times E_x^w \times t_w \times w_w \end{aligned} \quad (2-23)$$

加筋薄板的筋间蒙皮在压缩载荷下承载能力很低，蒙皮屈曲后，在加强筋附近的有效宽度  $w_s^e$  内的蒙皮可与加强筋一起继续承载。蒙皮的有效宽度按下式计算：

$$w_s^e = (w_s / 4) [1 + (N_{cr}^s / t_s) / \sigma_{cc}^f] \quad (2-24)$$

其中  $w_s$  为加筋间蒙皮的宽度， $N_{cr}^s$  可用公式 (2-21) 代入相应参数计算，而

$$\sigma_{cc}^f = [\epsilon_{cc}] \times E_x^f \quad (2-25)$$

在蒙皮有效宽度内所承受的载荷为

$$P_s = \sigma_{cc}^f \times t_s \times (w_s^e - w_f / 2) \quad (2-26)$$

所以，图 2-28 所示的 J 形加强筋的压损载荷  $P_{cc}$  为：

$$P_{cc} = P_{cc}^c + P_{cc}^w + P_{cc}^f + 2P_s \quad (2-27)$$

而整个组合形平板的压损载荷为

$$\sum P_{cc} = P_{cc} \times n \quad (2-28)$$

$n$  为加强筋数。

## 2.6 复合材料层压平板的屈曲设计

作为飞机结构的基本构件——复合材料层压平板，承受着各种载荷情况的内力。只有适当的铺层设计，才能保证各种设计载荷下的强度和刚度要求，在规定的载荷下不发生屈曲。因此，设计层压板首先要满足一般的铺层设计要求，在此基础上再考虑有利于屈曲要求的铺层设计，以最大限度提高层压平板的屈曲载荷。

### 2.6.1 铺层设计要求

#### 2.6.1.1 一般的铺层设计要求

- 采用 $0^\circ$ ， $\pm 45^\circ$ ， $90^\circ$ 的标准铺层角。这四个铺层角一般可以满足载荷设计要求，同时也能简化分析和制造。只有在必须采用任意角以减小结构重量和/或特殊设计情况下，才使用有限数目的非标准铺层角。

- 要有足够多的铺层，其纤维轴线与内力拉压方向一致，以最大限度利用纤维的高强度、高刚度特性。

- 应避免相同取向的铺层叠置。如难以满足此要求，则不能将5层以上取向相同的铺层叠置，以减小边缘分层现象发生。

- 对于较厚的（一般6~16层）层压板，相邻的铺层角度变化一般不要超过 $60^\circ$ ，也就是说，不要用 $0^\circ$ 和 $90^\circ$ ，或 $45^\circ$ 和 $-45^\circ$ 的相邻铺层，以避免固化应力产生的微观裂纹和有利于层间剪切应力的传递。

- $0^\circ$ ， $\pm 45^\circ$ ， $90^\circ$ 四种铺层中每一种至少要占10%，以防任何方向的基体直接受载。

- 避免采用 $90^\circ$ 的层组（载荷为 $0^\circ$ 方向时），而用 $0^\circ$ 或 $\pm 45^\circ$ 的层将它隔开，以减小层间的剪切与法向应力。

#### 2.6.1.2 提高屈曲性能的铺层设计

(1) 抗冲击损伤的铺层设计 复合材料结构在制造、使用中会受到外来物的冲击，从而引起复合材料构件的损伤和分层，结构受冲击后可能降低其压缩强度、屈曲载荷。一般可采用如下的铺层设计以提高结构的抗冲击能力，减少层间的分层。

- 减少取向相同的层组过多的层数；

- 表面几层的相邻铺层角应尽可能小；

- 在碳纤维层压板中加入诸如芳纶、玻璃纤维等混合材料，或表面层采用这些材料的织物，但要注意内部热膨胀效应；

- 在层压板的外层使用 $\pm 45^\circ$ 的铺层也可减少损伤的程度。

(2) 对称均衡铺层设计 除非特殊的需要（如气动剪裁等），一般复合材料结构应采用对称均衡铺层设计，以避免拉-弯-扭耦合产生的挠曲。因为这种挠曲相当于板的初始挠度，会降低板的屈曲性能，同时也会给制造和设计分析带来困难。对称均衡铺层具有下列特性：

- 层压板对于中心面对称；

- 每个 $+45^\circ$ （或 $+\theta$ ）铺层应由 $-45^\circ$ （或 $-\theta$ ）铺层平衡。

当然，此种铺层也要满足上述一般的铺层要求及抗冲击要求。典型的对称均衡铺层如图

2-31。

(3) 根据受力特点考虑屈曲要求的铺层设计

• 承受单轴压的平板

可通过将 $0^\circ$ 层设置在最远离中面处的办法提高屈曲临界载荷。在层压板的外层设置 $\pm 45^\circ$ 层对抗屈曲也是有利的，见图 2-32。

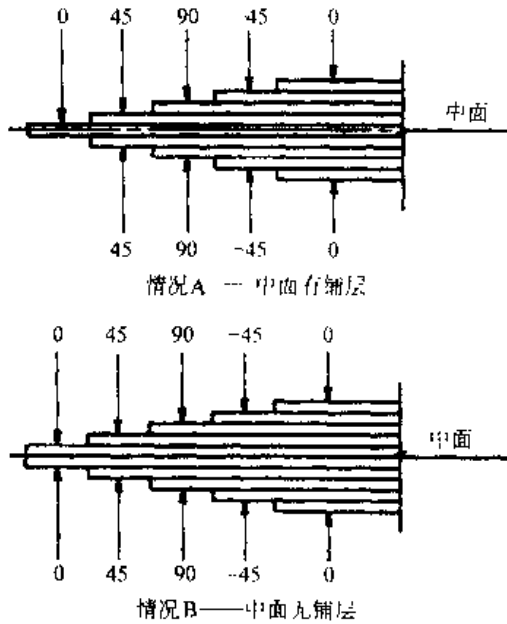


图 2-31 对称均衡的层板

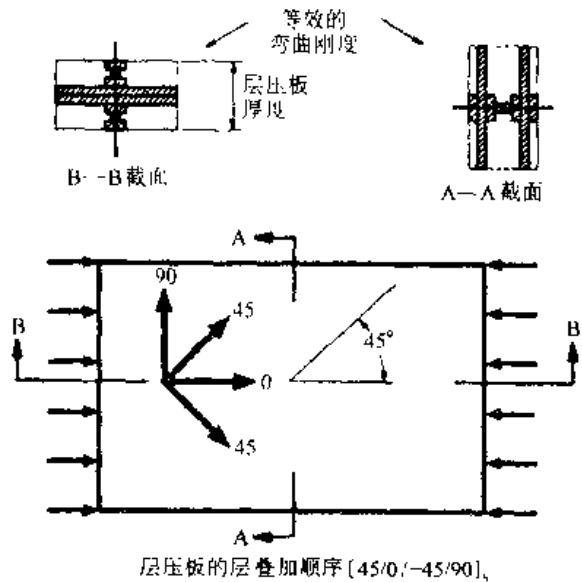
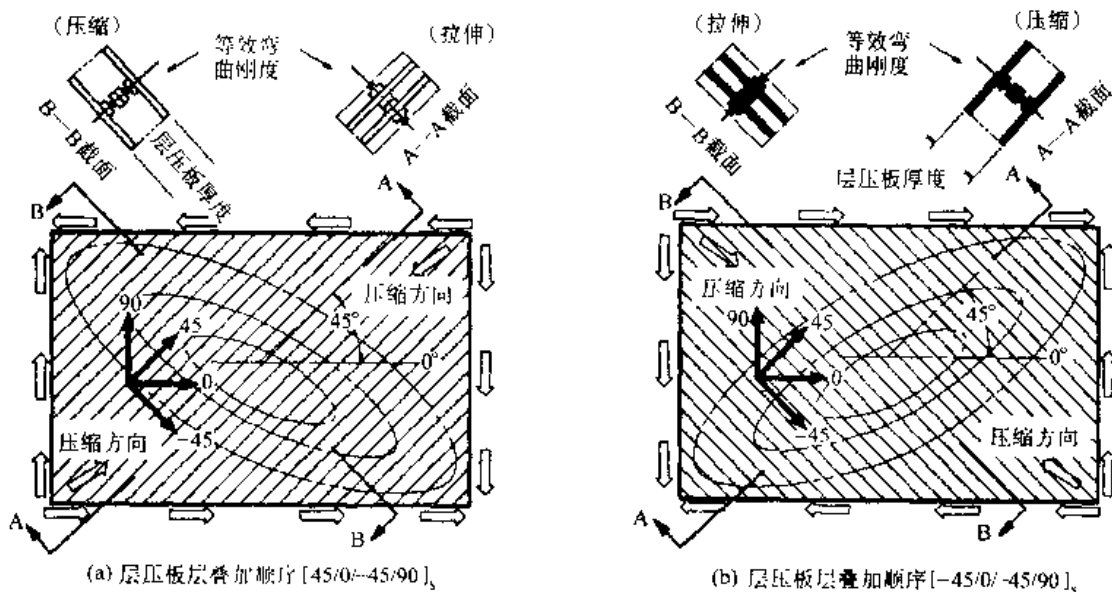


图 2-32 在单轴压载荷作用下的铺层顺序

• 承剪平板

可通过将 $\pm 45^\circ$ 层设置在最远离中面处的办法提高屈曲临界载荷。但要注意剪切载荷的方向，如果剪切载荷方向使最外层的 $\pm 45^\circ$ 层的纤维受压时，其屈曲临界载荷将比最外层的 $\pm 45^\circ$ 层的纤维受拉时的要高。图 2-33 示出两种剪切载荷方向，对左图的载荷方向，层压



(a) 层压板层叠加顺序 [45/0/-45/90]<sub>s</sub>

(b) 层压板层叠加顺序 [-45/0/45/90]<sub>s</sub>

图 2-33 在剪切载荷作用下采用 $45^\circ$ 或 $-45^\circ$ 的外表层使纤维受压可增加屈曲刚度

板的最外层要设置 +45° 层，右图的载荷方向最外层则要 -45° 层。在某一剪切载荷下，尽管两种层压板的材料相同，层数相同，面内拉伸刚度相同，但铺层顺序不同，其屈曲临界载荷是不同的。这对设计主要承受剪切载荷的梁、肋腹板是很为重要的。

### 2.6.2 泊松约束设计

如图 2-34 所示的两块相同的层压板，一块板在平行于载荷方向的两侧边上的  $y$  方向位移被约束，而另一块板在平行于载荷方向的两侧边可以自由膨胀，前者的屈曲载荷比后者降低了 2 至 3 倍。这种屈曲载荷降低之大，曾震惊了某些设计和试验工程师，从而推动了对泊松比的研究。

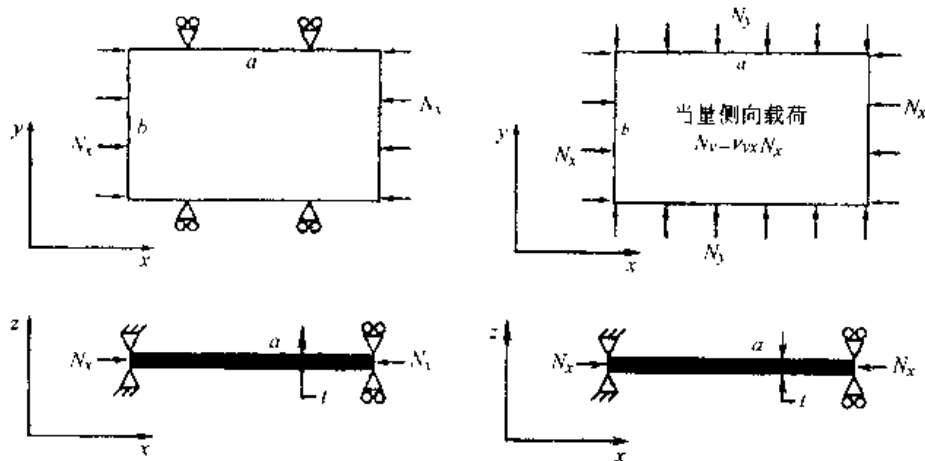


图 2-34 板的几何尺寸，边界与载荷条件

为理解这一降低的机理，用里兹能量法研究了一块受单轴压而侧向位移被约束的正交各向异性层压板（图 2-34）。发现由于侧向位移被阻止，在板的侧边上产生了一正比于轴向压缩载荷的侧向压缩载荷，其值为  $N_y = \nu_{yx} N_x$ 。则板的屈曲载荷变为

$$N_x(m, n) = \frac{D_{11}(m\pi/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2 + D_{22}(n\pi/b)^4}{(m\pi/a)^2 + \nu_{yx}(n\pi/b)^2} \quad (2-29)$$

其中， $m$ ， $n$  分别为屈曲时纵向、横向的半波数。此式即为侧向载荷正比于轴向载荷的双轴压屈曲载荷的计算公式，见式 (2-10)。

从式 (2-29) 可以看出：

- 泊松比  $\nu_{yx}$  降低屈曲载荷。 $\nu_{yx}$  愈大，则屈曲载荷降低愈多。为提高层压板的屈曲性能，则要设计小的泊松比  $\nu_{yx}$ ；

- 泊松比  $\nu_{yx}$  减少屈曲时的纵向半波数。若  $\nu_{yx}$  较大时，将屈曲模态  $(m, n)$  中的  $n$  固定，则  $N_x(m, n)$  倾向于发生在较低的  $m$  时。

上述是一个简化的例子。飞机结构中的平板，其边界支持更为复杂。可以预期其泊松比约束产生的影响是相同的。

设计时可用下列公式控制层压板面内的泊松比  $\nu_{yx}$ 。图 2-35 表示了 HT3/8911 材料的各方向铺层比对泊松比的影响，为不使泊松比过大，一般 90° 铺层比不要小于 10%。对于正交各向异性层压板， $\nu_{yx}$  可用下式计算

$$\nu_{yx} = \frac{E_y}{E_x} \nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{11}} \quad (2-30)$$

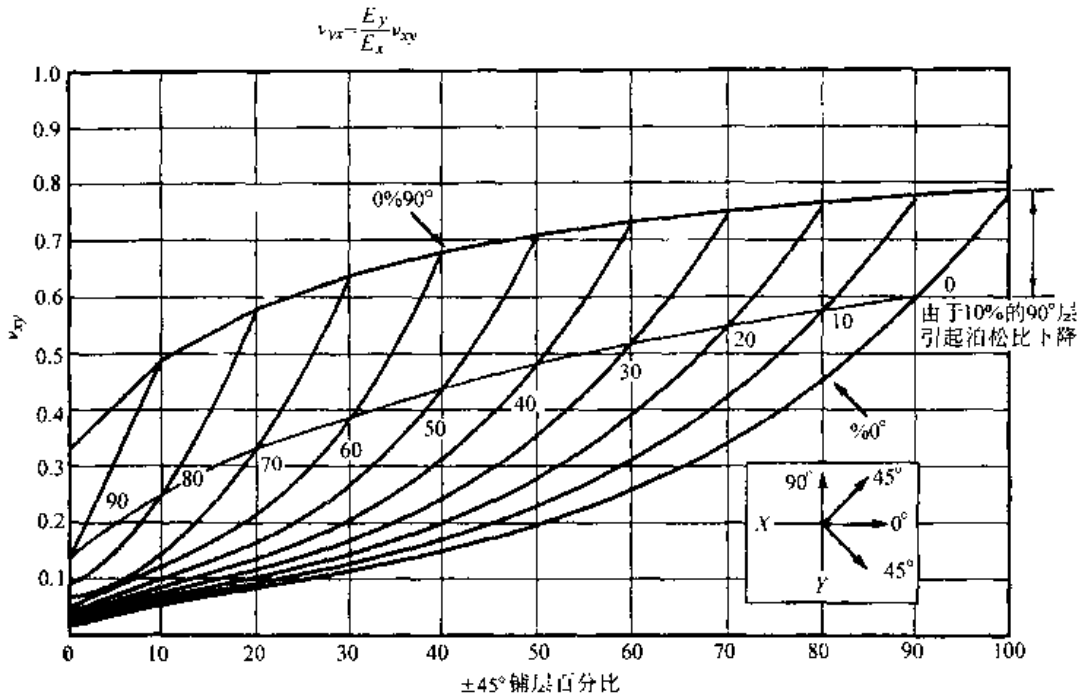


图 2-35 [0/45/-45/90] 层压板的泊松比与 ±45° 层百分比的关系

### 2.6.3 提高板的支持刚度的设计

层压平板的屈曲载荷除与前述因素有关外，还与板四边的支持刚度有关。增加板边的支持刚度可提高屈曲载荷。

为提高板边的支持刚度，与板端边相连的框、肋的突缘最好设计成 T 形的，与板侧边相连的桁条最好设计成帽形和泡形的，以增加扭转刚度。I 形、J 形和 T 形桁条的扭转刚度一般依次降低。

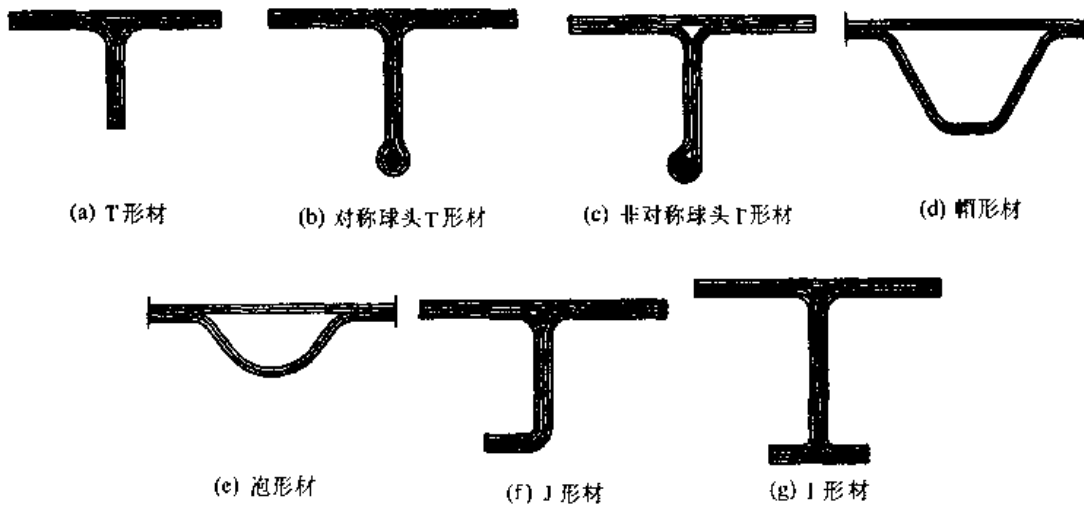


图 2-36 各种桁条剖面



### 2.6.4 关于过屈曲设计

屈曲后，进入过屈曲状态的层压平板还能继续承载，有时其继续承载的能力远高于屈曲载荷，可采用过屈曲设计，进一步挖掘结构的承载能力。采用过屈曲设计时，应妥善处理下述问题：

- 平板周边的支持构件要具有足够的强度与刚度；
- 保证过屈曲状态板的强度；
- 保证屈曲后板与周边支持结构的连接强度（不分离）（见图 2-37）；
- 由于飞机结构反复受载，层压板件一次次进入过屈曲状态，因此还要考虑屈曲疲劳问题。

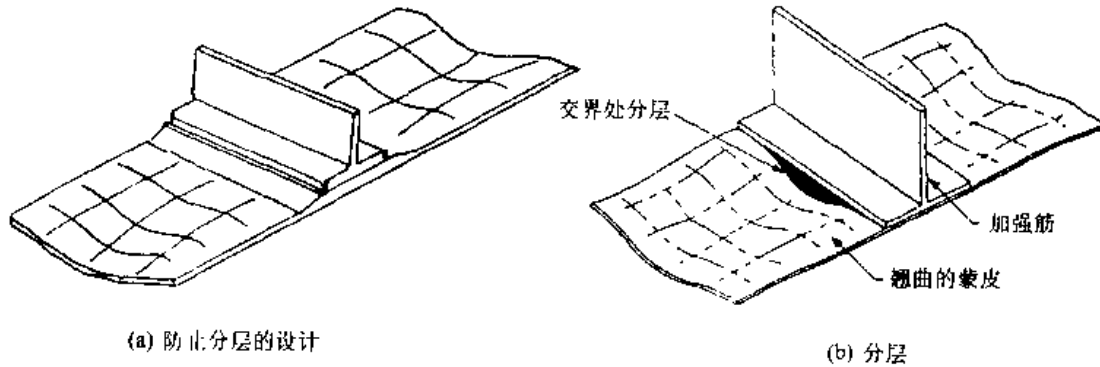


图 2-37 蒙皮屈曲后蒙皮-加强筋界面

## 2.7 例 题

(1) 例题 1 四边简支正交各向异性层压平板的轴压屈曲计算

已知长  $a = 330\text{mm}$ ，宽  $b = 165\text{mm}$  的四边简支正交各向异性铺层的矩形层压平板，其刚度系数  $D_{11} = 43670\text{N}\cdot\text{mm}$ ， $D_{22} = 28160\text{N}\cdot\text{mm}$ ， $D_{12} = 4913\text{N}\cdot\text{mm}$ ， $D_{66} = 5568\text{N}\cdot\text{mm}$ 。求轴压屈曲载荷  $N_{xcr}$ 。

由 (2-2) 式得

$$N_x = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \frac{D_{11}}{D_{22}} \left( \frac{b}{a} \right)^2 m^2 + 2 \left( \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} \right) + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \frac{1}{m^2} \right]_{\min}$$

$$= 10.2086 \left[ 0.387695 m^2 + \frac{4}{m^2} + 1.13984 \right]_{\min}$$

令 
$$y = 0.387695 m^2 + \frac{4}{m^2}$$

$$\frac{dy}{dm} = 2 \times 0.387695 m - 4 \times 2 m^{-3} = 0$$

得  $m = 1.79$  时， $N_x$  取得极小值。取  $m = 2$ ，则得  $N_{xcr} = 37.68\text{N/mm}$ 。

也可由图 2-3 求解  $N_{xcr}$ ，参数  $\lambda = (a/b)(D_{22}/D_{11})^{1/4} = 1.7922$ ，由图 2-3 查得  $K = 4.05$ ，则

$$N_{xcr} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2} \left[ K - 2 \left( 1 - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \right) \right] = 37.90\text{N/mm}$$

若用无限长板公式 (2-3) 计算, 则

$$N_{scr} = \frac{2\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} + \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \right] = 37.06 \text{ N/mm}$$

也可得到满意的近似值。

(2) 例题 2 组合形层压板受轴压时的压损载荷计算

已知组合形平板 (J 形加筋平板) 的几何参数及刚度参数如下:

典型 J 形加强筋的截面参数为 (参见图 2-28)

$$t_c = 1.88 \text{ mm}, \quad t_w = 1.67 \text{ mm}, \quad t_f = 2.56 \text{ mm},$$

$$w_c = 12.7 \text{ mm}, \quad w_w = 35 \text{ mm}, \quad w_f = 50 \text{ mm},$$

蒙皮厚度  $t_s = 1.88 \text{ mm}$ , 筋间距  $w_s = 165 \text{ mm}$ , 加筋板长度  $l = 330 \text{ mm}$ , 筋条数  $n = 3$ , 筋条等间距排列。刚度参数见表 2-1。

表 2-1 组合形平板的刚度参数

刚度参数 板元	$E$ , (MPa)	$D_{11}$ (N·mm)	$D_{22}$ (N·mm)	$D_{12}$ (N·mm)	$D_{66}$ (N·mm)
上突缘、蒙皮	57570	43670	28160	4913	5568
腹板	65110	34150	22020	3842	4354
下突缘	63720	109000	83000	16230	18070

(下突缘的铺层一般是不对称的, 可用当量对称板刚度  $D^* = D - BA^{-1}B$  近似处理)

突缘、腹板、蒙皮的极限压缩强度可由元件试验或计算获得, 本例均取为  $\sigma_{cu} = 512.37 \text{ MPa}$ , 则

$$N_{cu}^c = 512.37 \times 1.88 = 963.26 \text{ N/mm}$$

$$N_{cu}^f = 512.37 \times 2.56 = 1311.67 \text{ N/mm}$$

$$N_{cu}^w = 512.37 \times 1.67 = 855.66 \text{ N/mm}$$

$$N_{cu}^s = 512.37 \times 1.88 = 963.26 \text{ N/mm}$$

求该 J 形组合平板的压损载荷。

① 上突缘的屈曲载荷、压损载荷、压损应变的计算

由式 (2-19)

$$h = w_w + \frac{t_c}{2} + \frac{t_f}{2} = 35 + 1.88/2 + 2.56/2 = 37.22 \text{ mm}$$

$$k = \frac{11w_c/D_{22}^c}{11w_c/D_{22}^c + 10h/D_{22}^w} = 0.2269$$

由式 (2-18)

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} + k \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi^2} \right) + k^2 \left( \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2} \right) = 0.3052$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{32} k^2 = 0.0016089$$

$$\varphi_3 = -k \left( \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \right) + k^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) = -0.023807$$

$$\varphi_4 = 4 \left[ \frac{1}{\pi^2} + k^2 \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) \right] = 0.41016$$

由式 (2-17)

$$N_{cr}^c = \frac{\pi^2}{w_c^2} \left[ D_{11}^c \frac{m^2 w_c^2}{l^2} + D_{22}^c \frac{l^2}{m^2 w_c^2} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + D_{12}^c \frac{\varphi_3}{\varphi_1} + D_{66}^c \frac{\varphi_4}{\varphi_1} \right]_{\min}$$

$$= 0.061192 \left[ 64.6789 m^2 + 100230 \frac{1}{m^2} \quad 383.24 + 7482.87 \right]_{\min}$$

对上式求最小值, 令  $y = 64.6789 m^2 + 100230 \frac{1}{m^2}$

$$\frac{dy}{dm} = 2 \times 64.6789 m - 2 \times 100230 m^{-3} = 0$$

解得  $m = 6.27$ , 取失稳半波数  $m = 6$ , 则

$$N_{cr}^c = 747.29 \text{ N/mm}$$

$$N_{cu}^c / N_{cr}^c = 963.26 / 747.29 = 1.289$$

查图 2-29

$$N_{cc}^c / N_{cr}^c = 0.615 (N_{cu}^c / N_{cr}^c)^{0.582} = 0.7129$$

则

$$N_{cc}^c = 0.7129 \times 747.29 = 532.74 \text{ N/mm}$$

由式 (2-22)

$$\epsilon_{cc}^c = \frac{N_{cc}^c}{t_c E_x^c} = \frac{532.74}{1.88 \times 57570} = 4922 \mu\epsilon$$

② 腹板屈曲载荷、压损载荷、压损应变的计算

由式 (2-21)

$$N_{cr}^w = \frac{\pi^2}{w_w^2} \left[ D_{11}^w \frac{m^2 w_w^2}{l^2} + D_{22}^w \frac{l^2}{m^2 w_w^2} + 2(D_{12}^w + 2D_{66}^w) \right]_{\min}$$

$$= 0.0080568 \left[ 384.15 m^2 + 1957533 \frac{1}{m^2} + 25100 \right]_{\min}$$

对上式求最小值, 令  $y = 384.15 m^2 + 1957533 \frac{1}{m^2}$

$$\frac{dy}{dm} = 2 \times 384.15 m - 2 \times 1957533 m^{-3} = 0$$

解得  $m = 8.44$ , 取失稳半波数  $m = 8$ , 则

$$N_{cr}^w = 646.74 \text{ N/mm}$$

$$N_{cu}^w / N_{cr}^w = 855.66 / 646.74 = 1.323$$

查图 2-30:

$$N_{cc}^w / N_{cr}^w = 0.467 (N_{cu}^w / N_{cr}^w)^{0.628} = 0.5567$$

则

$$N_{cc}^w = 0.5567 \times N_{cr}^w = 360.04 \text{ N/mm}$$

由式 (2-22)

$$\epsilon_{cc}^w = \frac{N_{cc}^w}{t_w E_x^w} = \frac{360.04}{1.67 \times 65110} = 3311 \mu\epsilon$$

③ 下突缘的屈曲载荷、压损载荷、压损应变的计算

由式 (2-19)

$$h = w_w + \frac{t_c}{2} + \frac{t_f}{2} = 37.22 \text{ mm}$$

由式 (2-20)

$$k = \frac{11 w_f / 80 D_{22}^f}{11 w_f / 80 D_{22}^f + h / 3 D_{22}^w} = 0.128171$$

由式 (2-18)

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} + k \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi^2} \right) + k^2 \left( \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2} \right) = 0.317130$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{32} k^2 = 0.000513369$$

$$\varphi_3 = k \left( \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \right) + k^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) = -0.0140472$$

$$\varphi_4 = 4 \left[ \frac{1}{\pi^2} + k^2 \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) \right] = 0.406841$$

由式 (2-17), 用  $w_f/2$  代替  $w_c$ , 用  $D_{ij}^f$  代替  $D_{ij}^c$ , 则

$$\begin{aligned} N_{cr}^f &= \frac{\pi^2}{(w_f/2)^2} \left[ D_{11}^f \frac{m^2 (w_f/2)^2}{l^2} + D_{22}^f \frac{l^2}{m^2 (w_f/2)^2} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + D_{12}^f \frac{\varphi_3}{\varphi_1} + D_{66}^f \frac{\varphi_4}{\varphi_1} \right]_{\min} \\ &= 0.0157914 \left[ 625.57 m^2 + 23410.9 \frac{1}{m^2} - 718.90 + 23181.71 \right]_{\min} \end{aligned}$$

对上式求最小值, 令  $y = 625.57 m^2 + 23410.9 \frac{1}{m^2}$

$$\frac{dy}{dm} = 2 \times 625.57 m - 2 \times 23410.9 m^{-3} = 0$$

解得  $m = 2.5$ , 取  $m = 3$ ,  $N_{cr}^f = 484.70 \text{ N/mm}$ , 则

$$N_{cu}^f / N_{cr}^f = 1311.67 / 484.70 = 2.7061$$

查图 2-29

$$N_{cc}^f / N_{cr}^f = 0.615 (N_{cu}^f / N_{cr}^f)^{0.582} = 1.0977$$

则

$$N_{cc}^f = 1.0977 \times N_{cr}^f = 532.06 \text{ N/mm}$$

由式 (2-22)

$$\epsilon_{cc}^f = \frac{N_{cc}^f}{t_f E_x^f} = \frac{532.06}{2.56 \times 63720} = 3262 \mu\epsilon$$

则加强筋的限制压损应变为

$$[\epsilon_{cc}] = [\epsilon_{cc}^c, \epsilon_{cc}^w, \epsilon_{cc}^f]_{\min} = [4922, 3311, 3262]_{\min} = 3262 \mu\epsilon$$

由式 (2-23)

$$P_{cc}^c = [\epsilon_{cc}] \times E_x^c \times t_c \times w_c = 0.003262 \times 57570 \times 1.88 \times 12.7 = 4484 \text{ N}$$

$$P_{cc}^w = [\epsilon_{cc}] \times E_x^w \times t_w \times w_w = 0.003262 \times 65110 \times 1.67 \times 35 = 12414 \text{ N}$$

$$P_{cc}^f = [\epsilon_{cc}] \times E_x^f \times t_f \times w_f = 0.003262 \times 63720 \times 2.56 \times 50 = 26605 \text{ N}$$

由例题 1, 蒙皮的屈曲载荷为  $N_{cr}^s = 37.68 \text{ N/mm}$ , 则由 (2-24) 式, 蒙皮有效宽度为:

$$\begin{aligned} w_s^e &= \frac{w_s}{4} \left[ 1 + \left( \frac{N_{cr}^s}{t_s} \right) / \sigma_{cc}^f \right] = \frac{w_s}{4} \left[ 1 + \left( \frac{N_{cr}^s}{t_s} \right) / ([\epsilon_{cc}] E_x^f) \right] \\ &= \frac{165}{4} \left[ 1 + \left( \frac{37.68}{1.88} \right) / (0.003262 \times 63720) \right] = 45.23 \text{ mm} \end{aligned}$$

由式 (2-26), 蒙皮有效宽度内的承载为

$$P_s = \sigma_{cc}^f \times t_s \times (w_s^e - w_f/2) = 0.003262 \times 63720 \times 1.88 \times (45.23 - 25) = 7905 \text{ N}$$

由式 (2-27), 加强筋的压损载荷为

$$P_{cc} = P_{cc}^c + P_{cc}^w + P_{cc}^f + 2P_s = 4484 + 12414 + 26605 + 2 \times 7905 = 59313 \text{ N}$$

则组合形平板的压损载荷为:

$$\sum P_{cc} = 59313 \times 3 = 177939 \text{ N}$$

(3) 例题3 考虑边界弹性支持影响的层压板的屈曲计算

图2-38为机翼上翼面的一块加筋壁板(图中只表示了多个等长宽板格中的两个典型板格),板格间蒙皮两侧边由长桁弹性支持,求蒙皮的屈曲载荷 $N_{x,cr}$ 。

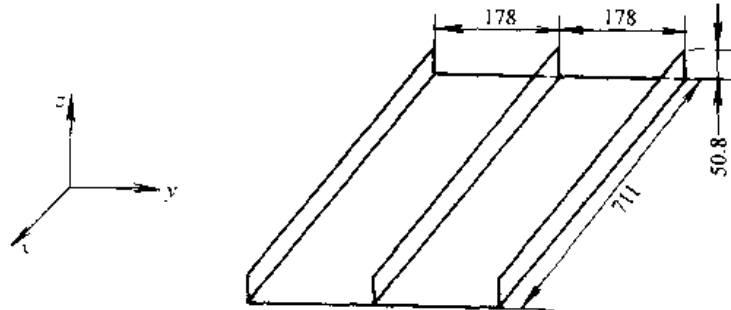


图2-38 侧边长桁弹性支持对蒙皮板格屈曲的影响

材料 单层的厚度 $t=0.125\text{mm}$ ,其性能为:

$$E_{11} = 125.6\text{GPa} \quad E_{22} = 10.7\text{GPa} \quad G_{12} = 4.47\text{GPa} \quad \nu_{12} = 0.328$$

蒙皮铺层  $[0/45/0/-45/90/-45/0/45/0]_{3S}$ , 54层对称铺层,  $h_1=6.75\text{mm}$

长桁铺层  $[0/45/0/-45/90/-45/0/45/0]_{4S}$ , 72层对称铺层,  $h_2=9\text{mm}$

以上铺层角为纤维与 $x$ 轴的夹角,连接桁条与蒙皮的突缘被忽略。

蒙皮的弯曲刚度

$$D_{11} = 1953250 \text{ N}\cdot\text{mm}, \quad D_{22} = 935406 \text{ N}\cdot\text{mm}, \quad D_{12} = 409217 \text{ N}\cdot\text{mm}, \quad D_{66} = 432999 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

载荷 由结构应力分析得:板与桁条受均匀压缩,工作载荷为

$$N_x = 1751 \text{ N/mm}; \quad \text{桁条} \quad N_r = 1751 \times \frac{8}{6} = 2335 \text{ N/mm}$$

用有限元程序(MSC/NASTRAN)

求解,为考虑长桁弹性支持的影响,取一个典型板格(见图2-39)进行分析。采用CQUAD4板元,长桁取 $12 \times 2 = 24$ 个板元,蒙皮取 $12 \times 4 = 48$ 个板元。

边界条件:

板端部  $B'C'$   $u = v = w = \theta_x = \theta_z$

$= 0$  (简支)

长桁端部  $A'B', C'D'$   $u = v =$

$w = \theta_x = \theta_y = 0$  (简支)

板端部  $BC$   $v = w = \theta_x = \theta_z = 0$  ( $x$ 向可滑动简支)

长桁端部  $AB, DC$   $v = w = \theta_x = \theta_y = 0$  ( $x$ 向可滑动简支)

板端部  $ABCD$   $u_1 = u_2 = \dots = u_9$  (九个节点上 $u$ 相同,两端保持平面相对接近)

在第一个子情况(静力分析),为使板件处于均匀受压应力状态,在两端 $ABCD, A'B'C'D'$ 上放松沿 $AB(A'B'), CD(C'D'), BC(B'C')$ 方向的约束,仅在 $BC, B'C'$ 的中点置 $v$ 为零。

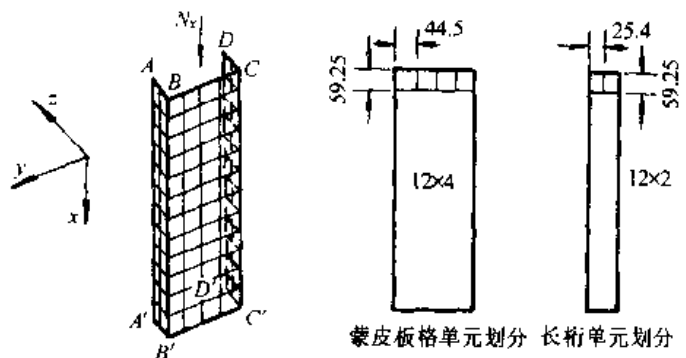


图2-39 典型板格单元划分

计算结果：计算的特征值为  $\lambda = 1.264$ 。蒙皮的屈曲载荷为特征值乘以工作载荷，则

$$N_{x,cr1} = \lambda \times 1751 = 2213 \text{ N/mm}$$

取多个典型单元所计算的屈曲载荷见表 2-2，屈曲模态见图 2-40。

表 2-2 考虑边界弹性支持影响的层压板的屈曲载荷

典型单元数	特征值 $\lambda$	模态 $m$ 值
1	1.264	3
2	1.234	3
3	1.223	3
4	1.216	3

可见，取一个典型板格，已有满意的精度，在设计前期为减少工作量完全可以这样简化处理。

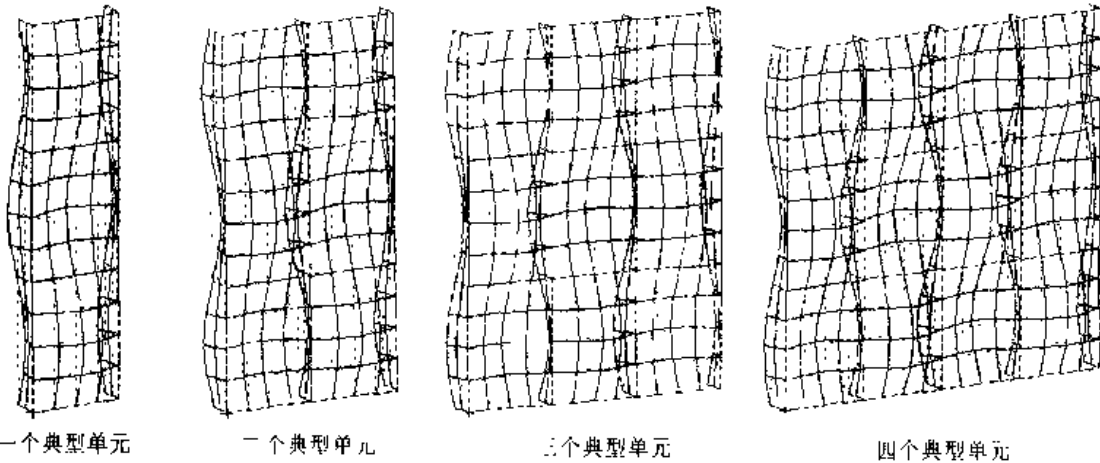


图 2-40 各典型单元的失稳模态

为分析长桁弹性支持的影响，下面采用有限元法还计算了四边简支蒙皮的屈曲载荷（图 2-41），边界条件取为：

$$\underline{B'C'} \quad u = v = w = \theta_x = \theta_z = 0$$

$$\underline{BC} \quad v = w = \theta_x = \theta_z = 0$$

$$u_1 = u_2 = \dots = u_5 \quad (BC \text{ 保持平面移动})$$

$$\underline{BB'}, \underline{CC'} \quad w = \theta_y = \theta_z = 0$$

计算的特征值为  $\lambda = 0.96827$ ，四边简支蒙皮的屈曲载荷为

$$N_{x,cr1} = 0.96827 \times 1751 = 1695 \text{ N/mm} \quad (m = 3)$$

又用式 (2-2) 计算了四边简支蒙皮的屈曲载荷为  $N_{x,cr1} = 1654 \text{ N/mm} \quad (m = 3)$ ，与有限元计算结果很接近。

可见，考虑侧边长桁弹性支持的蒙皮的屈曲载荷要高于侧边取为简支的情况。

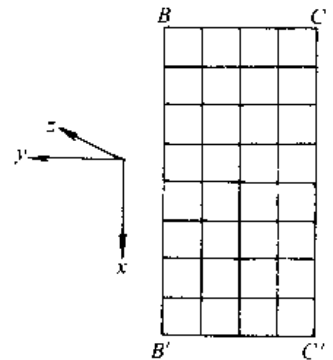


图 2-41 四边简支蒙皮的网格

## 参 考 文 献

- [1] 列赫尼茨基 C Г 著. 各向异性板. 胡海昌译. 北京: 科学出版社, 1963
- [2] 琼斯 R M 著. 复合材料力学. 朱颀龄等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1981
- [3] Wittrick W H. Correlation between Some Stability Problems for Orthotropic and Isotropic Plates under Bi-axial and Uni-axial Direct Stress. *The Aeronautical Quarterly*, 1952, 4
- [4] Leissa A W. An Overview of Composite Plate Buckling. *Composite Structures*, 1987, 1 (4)
- [5] 李顺林, 薛文兴, 赵渠森. 复合材料工作手册. 北京: 航空工业出版社, 1988
- [6] Housner J M, Stein M. Numerical Analysis and Parametric Studies of the Buckling of Composite Orthotropic Compression and Shear Panels. NASA TN D-7996, 1975
- [7] 牛春匀. 飞机复合材料结构与制造. 西安: 西北工业大学出版社, 1995

## 第3章 加筋层压板的屈曲分析和承载能力计算

### 3.1 概 述

机翼、尾翼和机身上的蒙皮壁板广泛采用桁条加强的加筋层压板结构——加筋层压板，简称“加筋板”，它们在面内压缩和剪切等载荷作用下的失效模式一般为失稳（屈曲）。由于加筋层压板是飞机结构中最具代表性的典型构件，因此，在本指南的第2章、第5章和第6章中都将涉及各自相关的内容。第2章中给出了组合平板形的加筋板的压损载荷的计算方法；第5章中介绍了加筋板的后屈曲特性和分析方法；第6章中给出了采用线性屈曲理论和非线性屈曲理论计算的加筋板的承载能力的对比分析算例。

本章只介绍加筋层压平板在均布轴压、剪切载荷作用下的屈曲分析软件和工程计算方法，以及加筋层压平板在轴压下承载能力的估算方法。

在实际的机翼和尾翼蒙皮上，一般有多根加筋桁条，互相平行或接近平行，其两端由翼肋支持，而且蒙皮有曲度。设计分析时，常取出两翼肋间的一段，并将其简化为加筋桁条互相平行的“纵向加筋平板”。经验表明，这种简化在工程上是可行的。研究结果还表明，当加筋桁条多于四根时，可以忽略壁板两侧边的边界支持条件的影响。

图3-1为加筋层压板的受载情况和符号规定。图3-2为飞机结构中常用的加筋板的剖面形式。

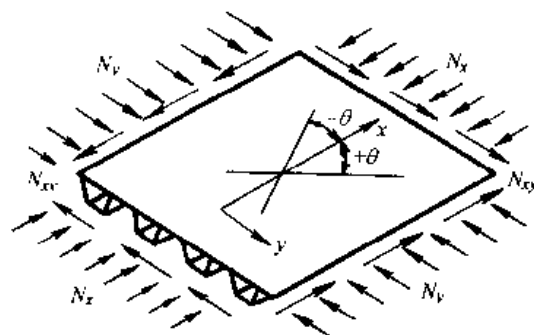


图3-1 加筋层压板的受载情况

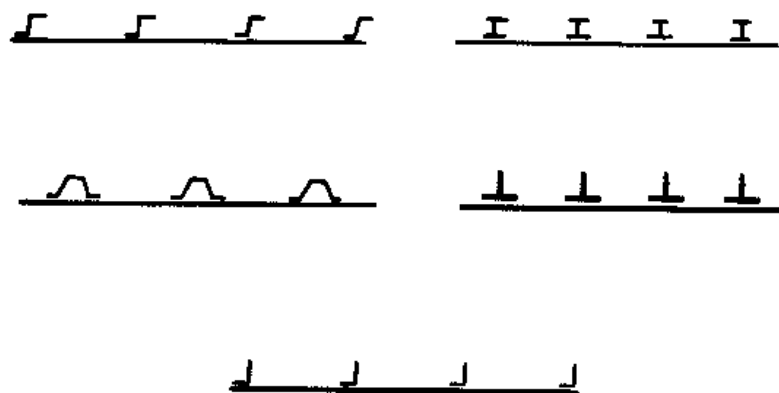


图3-2 飞机结构中常用的加筋板的剖面形式

加筋层压板的屈曲分析比较复杂，可采用现有的有限元软件进行计算。3.2节中给出



了常用的四种屈曲分析软件，介绍了它们的主要功能和适用范围。并在 3.4 节中给出了使用这些软件的算例，对目前工程中使用的七类加筋层压板在轴压、剪切和压剪复合载荷作用下的屈曲进行了分析计算，同时，还给出了对比的试验研究结果，供设计人员应用时参考。

工程中，为简化结构分析，常常采用与理论分析相比拟的工程简化方法，它们是根据试验数据总结归纳出的简便计算公式、曲线和经验修正系数，可对加筋层压板的稳定性和承载能力作简便、快捷的评估。对于结构初步设计分析，尤其适用。本章将在 3.3 节介绍这种方法。

## 3.2 加筋层压板的有限元屈曲分析及软件

本节介绍几个采用有限元素法编制的屈曲分析软件的主要功能和适用范围。这些软件的详细使用情况，可参见本指南中的有关章节，或参见章末的参考文献。使用这些软件时必须正确地简化结构的计算模型，恰当地处理边界条件，对于计算结果的判断和选用要有一定的工程经验。

这些软件都经过了一定的考核，但有些尚缺乏统一的规范和评估。建议在使用时，最好辅之以典型的试验，通过与试验结果的对比，引入适当的修正系数。

### 3.2.1 有限条元素法的屈曲分析软件 BAFLCP

该软件是针对具有薄壁桁条的纵向加筋平板开发的。采用的是有限条元素法，其中对于板条元素的处理采用精确的解析法求解，因此具有精度较高、划分元素少、节省计算机时等优点。可计算加筋层压平板的线性屈曲载荷。

BAFLCP 的适用范围：

- ① 带纵向薄壁桁条的加筋层压平板；
- ② 加筋板的四边受均匀分布的剪力、两端受均匀分布的轴压或压剪复合载荷的作用；
- ③ 加筋板的两端的支持是按简支边界条件处理的，对于其他的支持条件要考虑支持系数；
- ④ 加筋板的两侧边的支持可以为简支、固支和自由边界条件。

使用该程序进行计算时，要将加筋板简化成一系列（对称铺层的）板条元，各板条元的侧边为它与相邻的板条元的交线，输入各板条元的刚度和几何尺寸，并假设一组纵向屈曲半波长和载荷迭代初值，即可求出加筋板的屈曲载荷。3.4.1 节中给出了应用此软件的算例。

### 3.2.2 复合材料加筋板壳优化设计软件 CPANDA

该软件是在 PANDA2 的基础上开发的复合材料加筋板壳优化设计软件。采用的是解析法和有限元素法，可求解复合材料加筋板的局部屈曲和总体屈曲载荷，还可对复合材料加筋层压平板、曲板和圆筒壳进行最小重量设计。

CPANDA 的适用范围：

- ① 结构承受的载荷：面内载荷（均匀压缩、纯剪）、法向载荷（均布侧压），轴压载荷

可沿板宽呈线性变化（以考虑面内弯曲）；

② 结构形式：适用于各种剖面形状（T形、J形、条形、帽形）加筋桁条的纵向、横向、纵横向加筋平板、加筋曲板和圆柱壳，加筋桁条必须等间距排列，各加筋桁条的几何尺寸、铺层情况和材料要相同；

③ 边界条件：分析时是按四边简支条件处理的，对于受压边为固支的情况，将板长  $L$  转化成了有效长度  $L' = L/\sqrt{3.85}$ ；

④ 可考虑含缺陷的结构，固化时的热应力及残余变形的影响。

### 3.2.3 MSC/NASTRAN 大型通用有限元结构分析系统

该系统功能十分强大。因此，也可用于复合材料加筋结构的线性屈曲分析。对复合材料加筋平板进行屈曲分析时，常采用带弯曲和薄膜刚度耦合任选项的四边形等参元 *QUAD4* 和直梁元 *BEAM*。分析计算结果时，应运用工程经验，选用实际中可能发生的屈曲模态所对应的屈曲载荷。

MSC/NASTRAN 已为各设计单位普遍采用，在第 2 章、第 4 章和第 6 章中均介绍了应用此软件的算例。

### 3.2.4 CMBC 复合材料对称层压板屈曲综合分析软件

该软件采用十六自由度保续矩形板弯元，对复合材料层压加筋板进行有限元分析。可计算纵向、横向和纵横双向加筋的加筋层压平板的屈曲载荷。分析中将加筋桁条当作梁处理，可考虑加筋桁条的弯曲刚度和扭转刚度的影响。

需要指出的是，由于现存的屈曲分析软件大多数都是采用线性屈曲理论的有限元素法编制的，只能给出加筋层压板或其中某个元件首先发生屈曲时的载荷，它可能是加筋层压板的总体失稳载荷，也可能是加筋条或加筋条间蒙皮的局部屈曲载荷。由于不给出加筋层压板的屈曲模态，因而无法判别计算结果是总体屈曲载荷还是局部屈曲载荷。

对于设计上需要挖掘蒙皮局部屈曲后的承载能力的加筋层压板，基于线性屈曲理论编制的计算软件不能满足结构设计的要求。为此，需要采用非线性屈曲理论编制的软件，关于后屈曲和破坏的分析理论和软件将在第 5 章中介绍。

## 3.3 加筋层压板屈曲分析的工程简化方法

工程上一般把加筋层压板的屈曲或失效形式分为四种：（1）加筋桁条间蒙皮局部屈曲或桁条局部屈曲；（2）加筋板的总体屈曲；（3）加筋板的压损破坏；（4）介于（2）和（3）之间的失效形式。此外，还可能出现复杂的屈曲模态耦合、分层屈曲等。

实际中的加筋板会发生哪种屈曲形式，主要取决于加筋层压板的长度（长宽比）以及加筋条和蒙皮的相对抗弯刚度。三种屈曲形式之间，没有明确的界限，需要分别加以校核。

飞机翼面上的壁板大多数为中等长度的加筋板，其屈曲的主要形式是加筋桁条间的蒙皮或加筋桁条首先发生局部屈曲，因此，应校核加筋桁条间蒙皮的局部屈曲和桁条的局部屈曲（见 3.3.1 节）。但应指出的是，桁条先于蒙皮的局部屈曲的结构设计是不合理的，将会显著

地降低加筋板的承载能力，设计中应尽量避免。

较长的加筋板，一般呈总体屈曲破坏。可采用现有的分析软件或工程简化方法计算其总体屈曲载荷。对于桁条较稀疏的、所谓“离散”加筋板，3.3.2节中给出了计算加筋层压板总体屈曲载荷的工程简化方法；对于桁条较密的、所谓“密”加筋板，可按附录A中的方法计算其等效刚度，将加筋板等效为“光”层压板，按层压板计算其总体屈曲载荷。

十分短有加筋板，受压缩载荷时可能呈压损破坏。一般由试验确定加筋层压板的压损破坏载荷。对于由薄壁桁条加强的加筋层压板，可按2.4节中计算组合形平板压损破坏载荷的方法计算其压损破坏应力。3.4.2节中还介绍了一种初步估算加筋层压板压损破坏应力的方法，仅供使用者参考。

关于屈曲模态耦合，没有简便实用的工程计算方法。理论分析表明，蒙皮和桁条的屈曲载荷十分接近的所谓“等屈曲”设计，会出现复杂的屈曲模态耦合，可能降低加筋板的承载能力，因此不一定是最佳设计。为了避免出现此种情况，可把加筋桁条设计得稍强于蒙皮，使桁条间的蒙皮先于桁条产生局部屈曲。

关于分层屈曲，由于影响因素较复杂，目前仍处于研究阶段，尚无成熟的工程简化计算方法可以推荐。在第5章中介绍了分层屈曲的有限元分析方法。

实际上，飞机结构中的大多数（中长）加筋板，在加筋桁条间的蒙皮发生局部屈曲后还有继续承载的能力。关于桁条间蒙皮局部屈曲后加筋层压板继续承载的能力，即后屈曲强度，可按第5章中介绍的分析方法和软件计算。由于分析十分复杂，目前工程中常用半经验半理论的方法确定其承载能力。在3.3.3节中，给出了在设计中会经常遇到的、加筋层压板轴压下承载能力的三种工程估算方法，这三种方法都在一定范围内进行过试验验证。

### 3.3.1 加筋层压板的局部屈曲分析

#### 3.3.1.1 蒙皮的局部屈曲分析

对相邻的加筋桁条间的蒙皮，可按矩形层压板进行局部屈曲分析。层压板两端和两边的边界条件，一般按其周边的支持翼肋或桁条的扭转/弯曲刚度大小，简化成典型的固支边界条件或简支边界条件，因为只有这种典型的边界支持条件的矩形层压板才有简便的工程计算方法。

层压板的边界支持情况的判定，没有严格的标准，主要凭经验。一般来说，对于开剖面的薄壁加筋桁条或翼肋所支持的边界，其支持条件可取为简支；对于闭剖面或实心（厚重）的加筋桁条或强翼肋所支持的边界，其支持条件可取为固支。

实际上，加筋桁条和翼肋对于蒙皮的边界支持介于简支和固支边界条件之间，而按简支和按固支边界条件分别计算的屈曲载荷相差达一倍以上，因此需要设计人员凭经验对计算结果进行判断。所以，在有条件的情况下，可借助于较精确的分析程序进行校核，或做相应的试验，获得对简化计算结果的修正系数，以提高校核的准确性。

典型的（简支和固支）边界条件的层压板的屈曲，可按第2章的方法进行计算。如果层压板的长宽比大于4时，可按无限长板考虑。下面给出一种简化的估算方法<sup>[1]</sup>，供初步设计时采用。对于只含 $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 和 $\pm 45^\circ$ 对称铺层的长层压板，可按铺层百分比，用下面的方法估算屈曲载荷。

① 受纵向轴压 $N_x$ 作用的长层压板，可由图3-3和图3-4查取屈曲载荷系数 $k_{L0}$ ，按

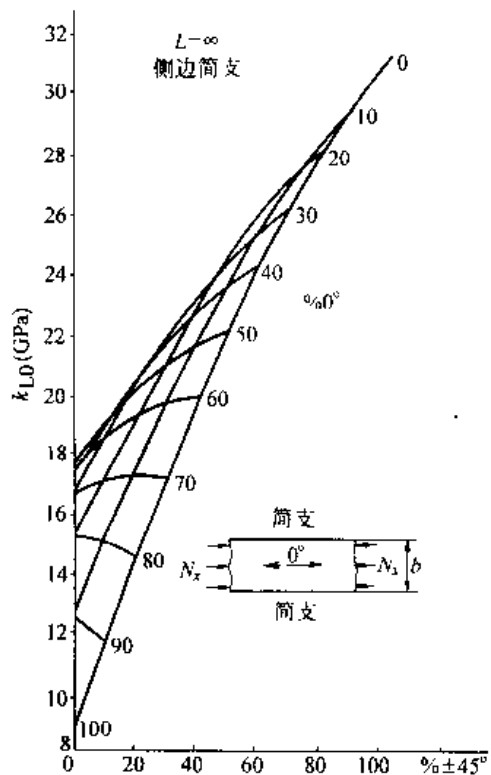


图 3-3 长边简支的长层压平板的轴压屈曲系数

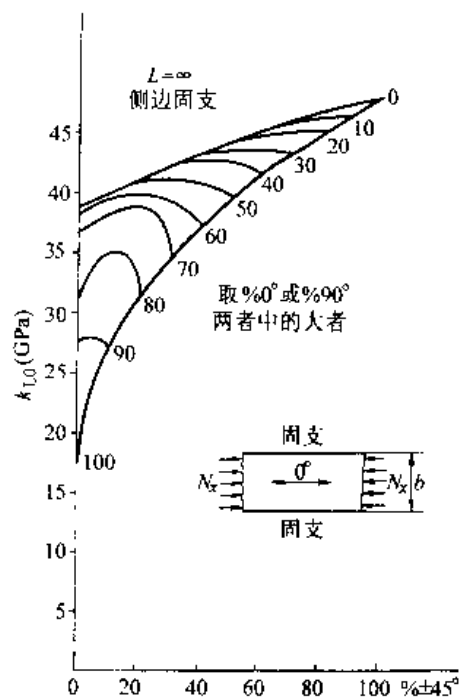


图 3-4 长边固支的长层压平板的轴压屈曲系数

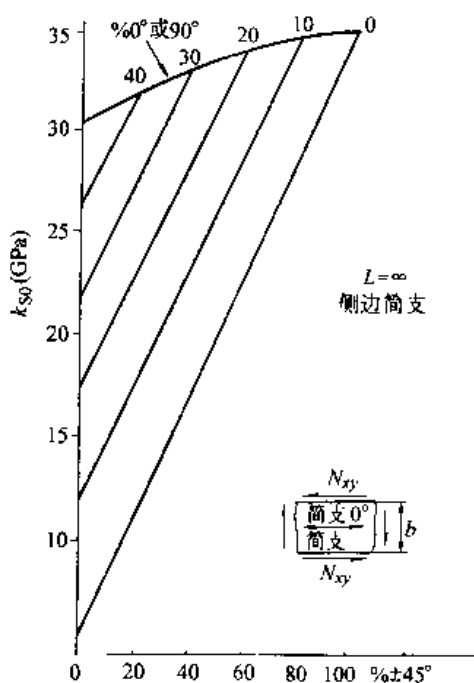


图 3-5 长边简支的长层压平板的剪切屈曲系数

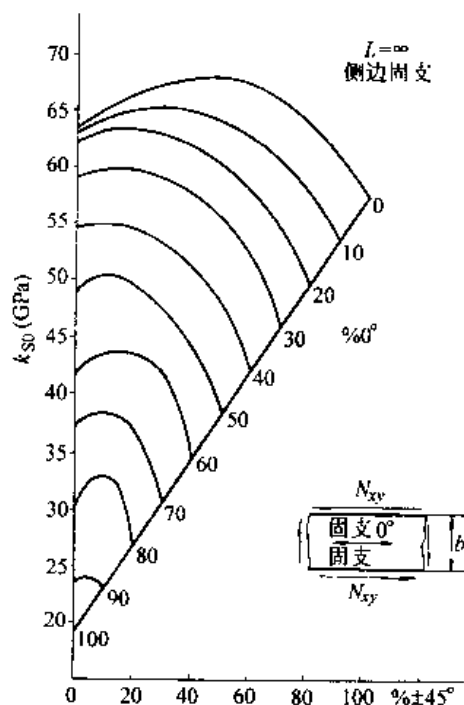


图 3-6 长边固支的长层压平板的剪切屈曲系数

下式估算屈曲应力<sup>1</sup>

$$\sigma_{xcr} = 6.9k_{L0}(t/b)^2 \quad (3-1)$$

式中： $\sigma_{xcr}$ ——平均轴压屈曲应力 (GPa)；

$t$ ——层压板厚度 (mm)；

$b$ ——层压板宽度 (mm)。

② 受剪切载荷  $N_{xy}$  作用的长层压板，可由图 3-5 和图 3-6 查取屈曲载荷系数  $k_{S0}$ ，按下式估算屈曲应力<sup>1</sup>

$$\tau_{xycr} = 6.9k_{S0}(t/b)^2 \quad (3-2)$$

式中： $\tau_{xycr}$ ——平均剪切屈曲应力 (GPa)；

$t$ ——层压板厚度 (mm)；

$b$ ——层压板宽度 (mm)。

③ 受横向压缩  $N_y$  作用的长层压板，可由图 3-7 和图 3-8 查取屈曲载荷系数  $k_{T0}$ ，按下式估算屈曲应力<sup>1</sup>

$$\sigma_{ycr} = 6.9k_{T0}(t/b)^2 \quad (3-3)$$

式中： $\sigma_{ycr}$ ——平均横压屈曲应力 (GPa)；

$t$ ——层压板厚度 (mm)；

$b$ ——层压板宽度 (mm)。

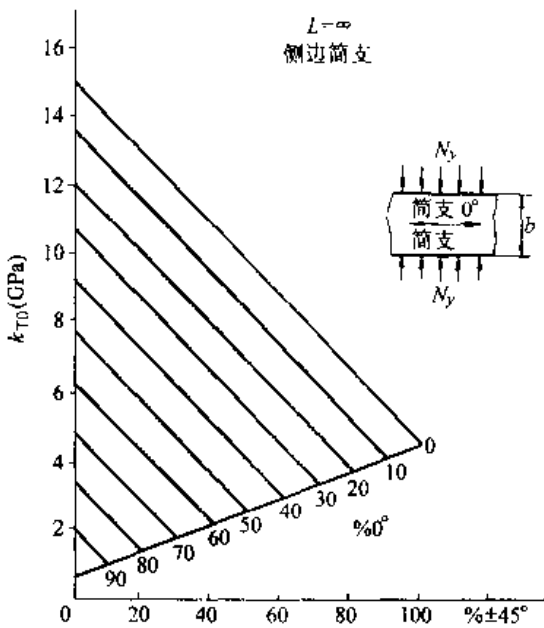


图 3-7 长边简支的长层压平板的横压屈曲系数

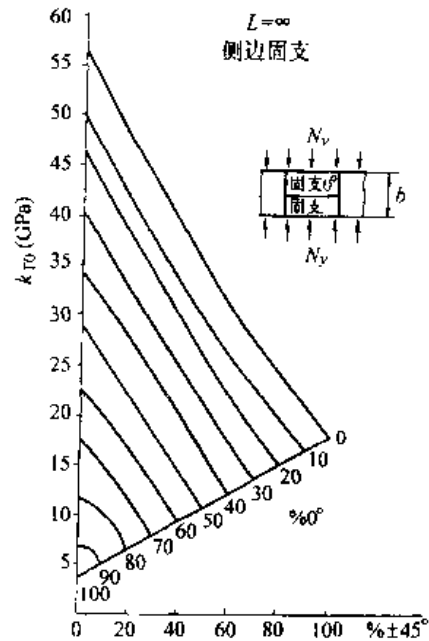


图 3-8 长边固支的长层压平板的横压屈曲系数

### 3.3.1.2 加筋桁条的局部屈曲分析

加筋板受剪和横向压缩时，加筋桁条一般不受力，因此只需校核加筋板受轴压时加筋桁条（后简称“桁条”）的局部屈曲。

桁条的局部屈曲是指桁条的组成单元（突缘或腹板，见图 3-9）产生了面外翘曲而发

1 限于材料性能不低於 HT3/S208 的长层压平板，由于未考虑铺层顺序的影响，设计时要注意选择对稳定性有利的铺层顺序。

生的屈曲。桁条受轴压时，其局部屈曲可由其某一组成单元的载荷-挠度曲线的斜率的突然变化加以识别。

对于开口薄壁剖面桁条的突缘，一般当作一长边自由、另一长边简支的长板处理，可按下列式计算突缘的轴压局部屈曲载荷

$$N_{xcr} = \frac{12D_{66}}{b^2} + \frac{\pi^2 D_{11}}{L^2} \quad (3-4)$$

式中： $N_{xcr}$ ——单位宽度上的轴压屈曲载荷；

$b$ ——突缘的宽度；

$L$ ——桁条的长度；

$D_{11}$ 、 $D_{66}$ ——层压板的弯曲刚度系数。

对于薄壁桁条的腹板，一般可当作两长边简支的长板处理，按下式计算其局部屈曲载荷。

$$N_{xcr} = \frac{2\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} + \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \right] \quad (3-5)$$

式中： $N_{xcr}$ ——单位宽度上的轴压屈曲载荷；

$b$ ——腹板的宽度；

$D_{11}$ 、 $D_{12}$ 、 $D_{22}$ 、 $D_{66}$ ——层压板的弯曲刚度系数。

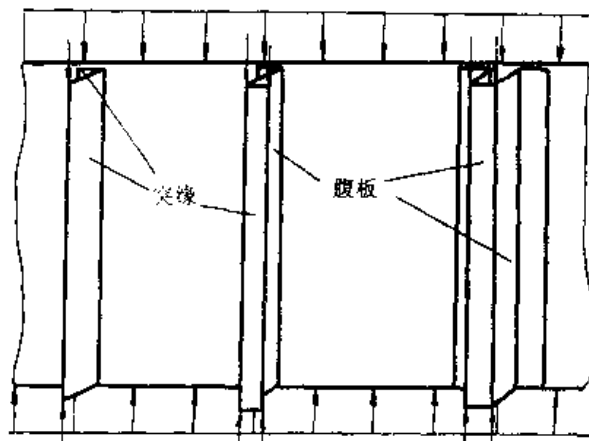


图 3-9 加筋桁条中的突缘和腹板

### 3.3.1.3 复合材料桁条的压损破坏

桁条的压损破坏是指桁条的组成单元产生了永久变形和破坏。

对于金属材料的桁条，压损被定义为桁条剖面在自身平面内发生了非弹性歪曲，导致整个剖面产生塑性屈服和永久变形破坏。

对于复合材料的桁条，一方面，它与金属材料的桁条一样，其压损强度可作为其横剖面的一种力学性能，与桁条的长度无关；另一方面，由于复合材料的塑性效应不明显，很难判定发生了永久变形。其破坏模式，如：分层、纤维断裂和基体开裂等可能在组成单元初始屈曲后的任何时间发生，而且一旦发生了会加速桁条的破坏，因此，复合材料桁条的压损破坏与金属材料桁条的压损破坏不同。一般来说，可以认为受压桁条整个横剖面上的应力是均匀分布的，但是，当桁条发生局部屈曲后，其横剖面的某些稳定区域，如单元交合处和角隅处的应力，可能高于屈曲应力。因此，随时可能发生分层、纤维断裂和基体破坏。

鉴于上述特点，对于复合材料桁条的压损破坏还要进行校核。

下面给出初步设计时的一种分析方法：

① 将桁条分解为“一边自由、另一边简支”的突缘（图中注“一边自由”）和“两边简支”的腹板（图中注“无自由边”）等两类层压板组成单元。

② 其压损应力  $\sigma_{cc}$  可由实用的曲线求得<sup>1</sup>。

对于由单向带制成的层压板，由图 3-10 查取；

1 图 3-10 和图 3-11 中的曲线适用于中等强度的石墨长纤维、固化温度为 350°F 的环氧基体之复合材料单向预浸带和织物制成的对称层压板，其含 ±45° 铺层的百分比为 33% - 67%，未考虑铺设顺序的影响，设计时要注意选择对稳定性有利的铺层顺序。

对于由织物、织物和单向带制成的层压板，由图 3-11 查取。

③ 各组成单元的压损应力的压缩截止值取决于其材料类别、铺层情况和压缩设计应变  $\epsilon_c$ ，用下式计算

$$\sigma_{cu} = E_x \epsilon_c$$

式中： $\sigma_{cu}$ ——各组成单元的层压板的压缩截止值；

$E_x$ ——各组成单元的层压板沿受压方向的等效弹性模量；

$\epsilon_c$ ——各组成单元的层压板的压缩设计许用应变。

④ 取桁条各组成单元的  $\sigma_{cc}$  和  $\sigma_{cu}$  中的最低值计算整个桁条的压损强度。

在计算整个桁条的压损强度时，由于复合材料不产生塑性屈服，因此无须考虑其组成单元的塑性加权系数。

在图 3-10 和图 3-11 中还给出了屈曲应力的计算曲线（对于  $L'/\rho \geq 12$  的柱），可与

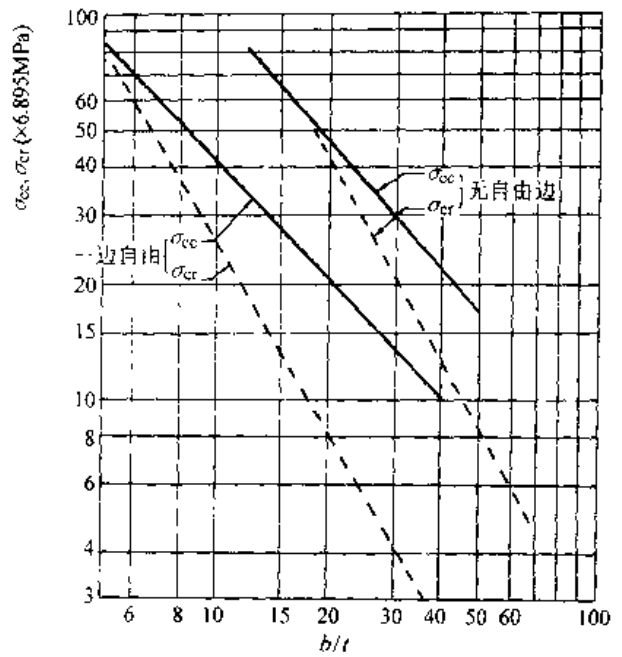


图 3-10 由单向带制成的桁条中突缘和腹板的屈曲和压损应力曲线

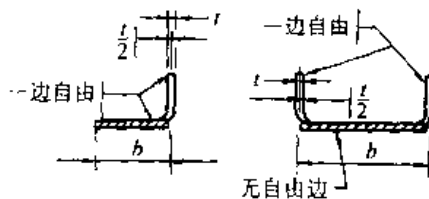
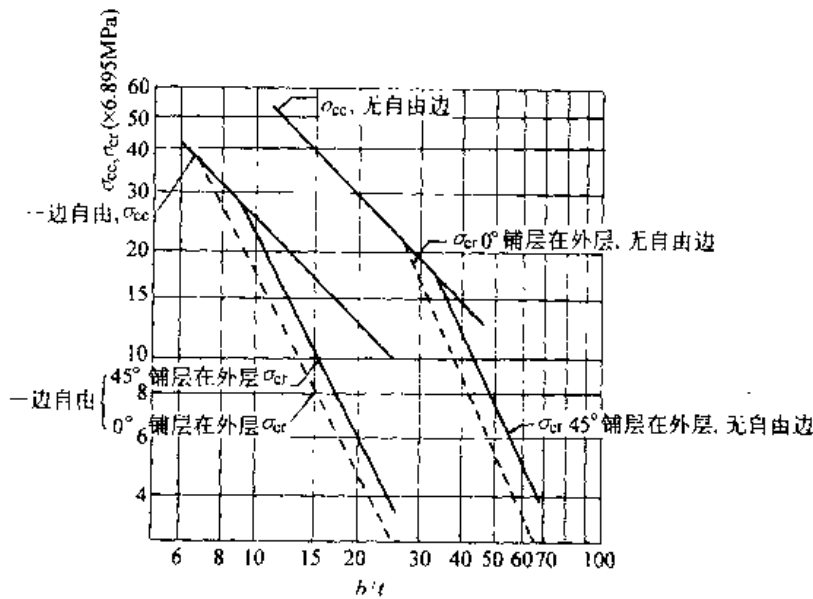


图 3-11 由织物、织物和单向带制成的桁条中突缘和腹板的屈曲和压损应力曲线

式 (3-4) 和式 (3-5) 一起选择使用。

### 3.3.2 加筋层压板的总体屈曲分析

本节介绍的工程简化计算方法的适用范围有限, 对于其他情况和受载复杂的加筋层压板需要采用 3.2 节的分析软件计算。

#### 3.3.2.1 加筋层压板在轴压载荷作用下的总体屈曲分析

对于桁条多于四根的长加筋板, 一般可忽略两侧边的支持效应, 将加筋板当作组合宽柱处理, 计入横向剪切效应的加筋板的欧拉屈曲载荷计算公式为<sup>[2]</sup>

$$P_{cr} = \frac{P_e}{1 + \lambda P_e / (GA)} \quad (3-6)$$

式中:  $P_e$ ——加筋板的欧拉屈曲载荷, 用下式计算

$$P_e = \frac{c\pi^2(EI)}{L^2}$$

$L$ ——加筋板长度;

$c$ ——加筋板的端部支持系数 (见表 3-1);

$EI$ ——加筋板剖面的弯曲刚度 (相对于加筋板剖面中性轴的);

$G$ ——桁条中竖直腹板的等效剪切模量;

$\lambda$ ——形状系数, 对于剖面形状不同的桁条, 选用不同的  $\lambda$  值。例如, 对于帽形剖面桁条, 取  $\lambda = 1.0$ , 对于矩形剖面桁条, 取  $\lambda = 1.2$ <sup>[3]</sup>;

$\bar{A}$ ——桁条中竖直腹板的剖面积 (腹板不垂直于蒙皮时, 取垂直于蒙皮方向的投影值)。

对于帽形加筋层压板, 总体屈曲载荷的修正欧拉公式为<sup>[3]</sup>

$$N_{xcr} \approx \left[ \frac{\pi^2(\bar{EI})}{SL^2} \right] \left/ \left[ 1 + \frac{\pi^2(\bar{EI})}{2L^2 A_{662} \bar{b}_2} \right] \right. \quad (3-7)$$

式中:  $S$ ——典型单元 (图 3-12) 的剖面宽度;

$L'$ ——加筋板的有效长度,  $L' = L/\sqrt{c}$ ;

$c$ ——加筋板的端部支持系数 (见表 3-1);

$\bar{A}_{662}$ ——桁条中腹板的刚度系数  $A_{66}$ ;

$\bar{b}_2$ ——桁条中斜置腹板的投影宽度,  $\bar{b}_2 = b_2 \sin \alpha$ ;

$(\bar{EI})$ ——典型单元剖面的弯曲刚度, 按下式计算 (忽略各板元自身的弯曲惯性矩时)

$$(\bar{EI}) = \sum_k E_{xk} t_k (z_k - \bar{z})^2 b_k$$

式中:  $b_k$ ——第  $k$  个板元的宽度;

$t_k$ ——第  $k$  个板元的厚度;

$z_k$ ——第  $k$  个板元的剖面中心到计算参考轴的距离;

$\bar{z}$ ——整个典型单元的剖面中心到计算参考轴的距离;

$$\bar{z} = \left( \sum_k E_{xk} t_k b_k z_k \right) / \left( \sum_k E_{xk} t_k b_k \right)$$

$E_{xk} t_k$ ——第  $k$  个板元的轴向压缩刚度;



$$E_{xk}t_k = A_{11k} - (A_{12k})^2/A_{22k}$$

其中  $A_{11k}$ 、 $A_{12k}$ 、 $A_{22k}$  为第  $k$  个板元的面内刚度系数。

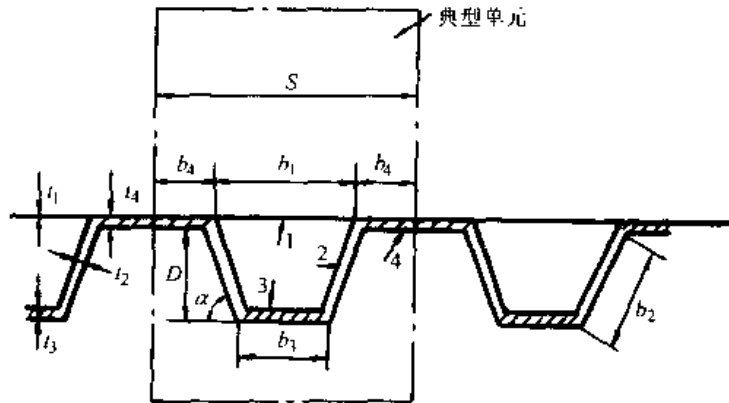


图 3-12 帽形加筋层压板典型单元

表 3-1 加筋板端部支持系数  $c$

支持条件						
理论 $c$ 值	4.00	2.04	1.00	1.00	0.25	0.25
建议 $c$ 值	2.37	1.56	0.694	1.00	0.227	0.25

### 3.3.2.2 加筋层压板在剪切荷载作用下的总体屈曲分析

长加筋层压平板，四边简支条件下的总体剪切屈曲荷载可按下式计算<sup>[3]</sup>：

$$N_{xycr} = (2/a)^2 (D_1^3 D_2)^{1/4} [8.125 + (5.05/\theta)] \quad (\theta \geq 1 \text{ 时}) \quad (3-8)$$

$$N_{xycr} = (2/a)^2 (D_1 D_3)^{1/2} (11.7 + (0.532\theta + 0.938\theta)^2) \quad (\theta < 1 \text{ 时})$$

式中： $a$  ——加筋板的短边长度；

$D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  ——加筋板的弯曲刚度；

$\theta$  ——加筋板的折算弯扭刚度比。

$\theta = \sqrt{D_1 D_2 / D_3}$ ， $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  按下式计算

$$D_1 = D_x / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$$

$$D_2 = D_y / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$$

$$D_3 = D_{xy} + \nu_{yx} D_x / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$$

当略去  $\nu_{xy}$  和  $\nu_{yx}$  项时，帽形加筋层压板典型单元（图 3-12）的  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  可按下式近似计算

$$D_1 = \frac{1}{s} \sum_k E_{xk} t_k b_k (z_k - \bar{x})^2$$

$$D_2 = \frac{s}{(2b_4/D_{224}) + b_1/[b_1/(2X) + D_{221}]}$$

$$D_3 = \frac{(2\bar{A})^2 \eta}{s[(b_1/A_{661}) + (2b_2/A_{662}) + (b_3/A_{663})]}$$

$$X = (b_2/D_{222}) + b_3/(2D_{223}) - H[b_2^2 \sin^2 \alpha / (2D_{222}) + Db_3 / (2D_{223})]$$

$$H = \frac{(b_2^2/2)(\sin \alpha / D_{222}) + (b_3/2)(D/D_{223})}{(b_2^3/3)(\sin^2 \alpha / D_{222}) + (b_3/2)(D^2/D_{223})}$$

$$\bar{z} = \left( \sum_k E_{xk} t_k b_k z_k \right) / \left( \sum_k E_{xk} t_k b_k \right)$$

式中： $s$ ——加筋板典型单元宽度， $s = b_1 + 2b_4$ ；

$\bar{A}$ ——帽形材与蒙皮所围的闭剖面面积；

$\eta$ ——降低系数，可取  $\eta = 0.3$ ；

$A_{66k}$ 、 $D_{22k}$ ——第  $k$  个板元的刚度系数  $A_{66}$ 、 $D_{22}$ ；

$\alpha$ 、 $D$  见图 3-12。 $z_k$ 、 $b_k$ 、 $E_{xk} t_k$  等见式 (3-7) 的说明。

### 3.3.3 加筋层压板在轴压下的承载能力估算

本节给出的加筋层压板在轴压下的承载能力是指它的破坏载荷。其估算方法源于铝合金加筋板的经验公式，已经经过相应的试验验证。但因考核的范围有限，对重要的承力构件仍需做试验。有如下三种方法可供选择。

#### 3.3.3.1 分段处理法

按加筋板的有效长细比  $L'/\rho$ ，将其破坏形式分为三个区段，对每个区段分别计算。

有效长细比  $L'/\rho$  中的  $L' = L/\sqrt{c}$ ， $L$  为加筋板的长度， $c$  为加筋板受压端的端部支持系数（见表 3-1）； $\rho = \sqrt{I/A}$ ， $I$  为加筋板的剖面对其形心轴的弯曲惯性矩， $A$  为加筋板的剖面面积。

三个区段如图 3-13 所示：

(1) 短柱区段 ( $D-E$ )  $L'/\rho \leq 20$  的加筋板属于这一区段，在这一区段的加筋板呈蒙皮劈裂（分层和纤维断裂）、桁条歪扭或压断等形式的压损破坏，其承载能力（破坏应力）不随板长而改变。一般由试验确定其承载能力，对于由薄壁桁条加强的加筋层压板，可按 2.4 节中计算组合形平板压损破坏载荷的方法计算其压损破坏应力。

(2) 长柱区段 ( $B-A$ ) 在这一区段的加筋板呈总体欧拉屈曲破坏，或称“总体失稳”，其承载能力就是总体屈曲载荷，可按 3.2 节或 3.3.2 节的方法确定。

(3) 过渡区段 ( $D-B$ ) 在这一区段内，加筋板破坏之前，蒙皮或桁条将先发生局部屈曲，然后随载荷增加，蒙皮的局部屈曲波形逐渐扩大并穿过桁条而导致加筋板破坏。实际中，加筋板的破坏形式多属于此种形式。其承载能力实质上是加筋板的后屈曲强度，应按后屈曲分析确定。目前，工程上采用半经验的方法，用一条抛物线拟合在这一区段内加筋板的后屈曲强度，抛物线的顶点  $D$  的坐标由其短板的压损破坏应力确定，抛物线的另一点  $B$  的坐标由这类加筋板，当欧拉屈曲和局部屈曲同时发生时的有效长细比确定。可按下式估算加筋层压板的破坏应力：

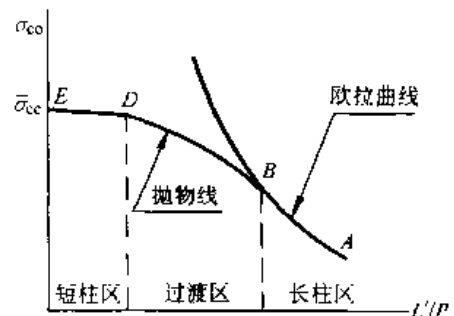


图 3-13 加筋层压板分段处理法的承载能力曲线

$$\sigma_{co} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\sigma_{cr}}{\bar{\sigma}_{cc}} \right) \frac{\sigma_{ci}}{\sigma_r} \right] \bar{\sigma}_{cc} \quad (3-9)$$

式中： $\bar{\sigma}_{ci}$ ——加筋层压板的平均破坏应力；

$\sigma_{cr}$ ——蒙皮或桁条的平均局部屈曲应力；

$\bar{\sigma}_{cc}$ ——加筋层压板的平均压损破坏应力，取相应的短加筋板 ( $L'/\rho \leq 20$ ) 计算，或由试验确定；

$\sigma_r$ ——为不考虑蒙皮或桁条局部屈曲后刚度降低的影响，按欧拉公式计算的加筋层压板的总体屈曲应力。

初步估算时，可取  $\sigma_{ci} \approx \bar{\sigma}_{cc}/2$  和  $\sigma_r = \pi^2 \bar{E}_x / (L'/\rho)^2$ ，则式 (3-9) 还可以简化成

$$\sigma_{co} = \bar{\sigma}_{cc} - (\bar{\sigma}_{cc})^2 (L'/\rho)^2 / (4\pi^2 \bar{E}_x) \quad (3-10)$$

式中： $\bar{E}_x$ ——加筋层压板的等效轴向弹性模量， $\bar{E}_x = \sum E_x A_i / \sum A_i$ ；

$\rho$ ——加筋层压板剖面的回转半径， $\rho = \sqrt{I/A}$ ；

$L'$ ——加筋层压板的有效柱长， $L' = L/\sqrt{c}$ ；

$I$ ——加筋层压板剖面的弯曲惯性矩， $I = (EI)/\bar{E}_x$ ；

$(EI)$ ——加筋层压板剖面的弯曲刚度；

$A$ ——加筋层压板剖面的面积；

$L$ ——加筋层压板的长度；

$c$ ——加筋层压板的端部支持系数 (见表 3-1)；

$A_i$ ——组成加筋层压板的第  $i$  个板元的剖面面积；

$E_{xi}$ ——第  $i$  个板元的  $x$  轴向弹性模量， $E_{xi} = (A_{11} - A_{12}^2/A_{22})_i / t_i$ ；

$t_i$ ——第  $i$  个板元的厚度。

### 3.3.3.2 改进的分段处理法

这种方法根据试验研究结果将分段处理法中过渡区段的抛物线公式改成了直线公式 (见图 3-14)，并推荐了一个估算加筋层压板平均压损破坏应力  $\bar{\sigma}_{cc}$  的简便方法。

如图 3-14 所示，对过渡区段 (BD) 内的加筋层压板的破坏应力，按下式计算

$$\bar{\sigma}_{co} = \frac{\sigma_{cr} - \bar{\sigma}_{ic}}{\lambda_{cr} - 20} \lambda + \sigma_{cr} - \frac{\sigma_{cr} - \bar{\sigma}_{cc}}{\lambda_{cr} - 20} \lambda_{cr} \quad (3-11)$$

式中： $\bar{\sigma}_{co}$ ——加筋层压板的平均破坏应力；

$\sigma_{cr}$ ——蒙皮或桁条的平均局部屈曲应力；

$\bar{\sigma}_{cc}$ ——加筋层压板的平均压损破坏应力，初步设计时，可近似取蒙皮层压板的纯压缩破坏应力的 0.75 倍的值；

$\lambda$ ——加筋层压平板的有效长细比， $\lambda = L'/\rho$ ；

$L'$ ——加筋层压平板的有效柱长， $L' = L/\sqrt{c}$ ；

$L$ ——加筋层压平板的长度；

$c$ ——加筋层压平板的端部支持系数；

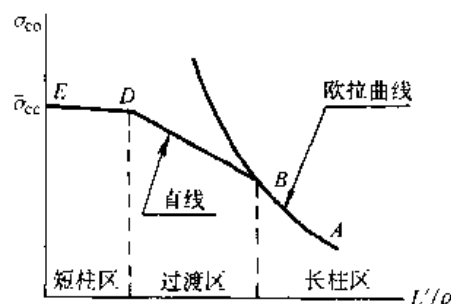


图 3-14 加筋层压板的改进的分段处理法承载能力曲线

$\rho$  —— 加筋层压平板剖面的回转半径,  $\rho = \sqrt{I/A}$ ;

$I$  —— 加筋层压平板剖面的弯曲惯性矩,  $I = (EI)/\bar{E}_x$ ;

$A$  —— 加筋层压平板剖面的面积;

$\lambda_{cr}$  —— 为这类加筋层压板当欧拉屈曲和局部屈曲同时发生时的有效长细比。可按下式计算

$$\lambda_{cr} = bm \sqrt{\frac{\Delta E_x}{c(EI)D_{22}} \left[ \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{22} \left( D_{11} - \frac{c(EI)t}{m^2 A} \right) - D_{12} - 2D_{66}} \right]} \quad (3-12)$$

式中:  $m$  —— 蒙皮的屈曲半波数;

$b$  —— 桁条间蒙皮的宽度;

$t$  —— 蒙皮的厚度;

$\bar{E}_x$  —— 加筋层压板的等效弹性模量;

$(EI)$  —— 加筋层压板剖面的弯曲刚度;

$D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}$  —— 蒙皮的弯曲刚度系数。

前述两种方法中, 对于过渡区段的处理方法不相同, 但都经过了一定范围的试验验证, 因此都列出。试验结果表明, 对于蒙皮相对于加筋条较弱, 蒙皮局部屈曲载荷偏低的加筋板, 可采用 3.3.3.1 的方法计算; 对于蒙皮较厚的加筋板, 可采用 3.3.3.2 的方法计算。

### 3.3.3.3 有效宽度法

对于蒙皮先产生局部屈曲的轴压加筋板, 蒙皮屈曲后, 其压应力的分布将变得不均匀了, 靠近未屈曲的桁条附近的应力依然随作用载荷的增加而增加, 而在蒙皮中部的应力增加将减缓。因此, 引入“有效宽度”概念, 来考虑蒙皮屈曲后的应力改变, 即, 将桁条间蒙皮的宽度进行折减, 以拟合蒙皮总的实际承载能力 (见图 3-15)。

蒙皮的有效宽度  $b_e = b\varphi$ ,  $b$  为桁条间蒙皮的实际宽度,  $\varphi$  为蒙皮的有效宽度系数, 又称“宽度折减系数”。在 2.5 节中给出了一种计算蒙皮有效宽度的公式 (见式 (2-24)), 因为是经验性的, 有一定的适用范围。下面给出一种经过试验验证的经验公式。

当加筋层压板的加筋桁条相同且等间距排列时, 加筋层压板的破坏载荷可按下式估算。

$$P = (n_1 b_e t E_x + n_2 F E_x^*) \epsilon_y \quad (3-13)$$

式中:  $t$  —— 蒙皮的厚度;

$E_x$  —— 蒙皮的等效轴向弹性模量;

$$E_x = \frac{(A_{11} - A_{12}^2/A_{22})}{t}$$

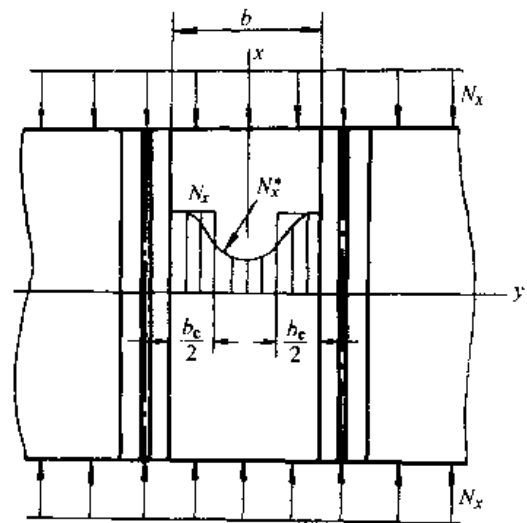


图 3-15 轴压加筋层压板蒙皮屈曲后的

$$\text{有效宽度 } (N_x b_e = \int_{-b/2}^{b/2} N_x^*(y) dy)$$

$A_{11}, A_{12}, A_{22}$  ——蒙皮的面内刚度系数;

$F$  ——桁条的剖面面积;

$E_x^*$  ——桁条的等效轴向弹性模量;

$n_1, n_2$  ——分别为桁条间的蒙皮数和桁条数;

$\varepsilon_b$  ——有效宽蒙皮的极限应变, 一般取桁条的屈曲应变;

$b_e$  ——蒙皮屈曲后的有效宽度,  $b_e = b\varphi$ ;

$$\varphi = \xi + (1 - \xi)\varepsilon_{cr}/\varepsilon_b \quad (3-14)$$

$$\xi = 1 - 2/[3 + \eta(a/b)^4] \quad (3-15)$$

式中:  $a, b$  ——桁条间蒙皮的长度和宽度;

$\varphi$  ——桁条间蒙皮的有效宽度系数;

$\varepsilon_{cr}$  ——桁条间蒙皮的局部屈曲应变;

$\eta$  ——蒙皮的各向异性度,  $\eta = A_{22}/A_{11}$ 。

### 3.4 应用实例

#### 3.4.1 加筋层压平板的有限元屈曲分析计算和试验结果比较

本例题采用有限条元素法屈曲分析软件 BAFLCP 对七种复合材料加筋层压板受轴压、剪切和压剪复合载荷时的稳定性进行了分析计算。并且, 还列出了相应的试验验证结果。

(1) 各种加筋层压平板的原始参数

第 1 种: 为帽形加筋层压板, 受轴压。图 3-16 为加筋层压板的剖面结构简图, 加筋层压板长  $L = 300\text{mm}$ , 宽  $B = 348\text{mm}$ 。两受压端取简支, 两侧边取面支。

铺层情况:

蒙皮:  $[0/90/0/90/0/90/0/90]_s$ , 15 层,  $t_1 = 1.5\text{mm}$ ;

帽顶:  $[0_9/-45/45_2/-45_2]_s$ , 28 层,  $t_2 = 2.8\text{mm}$ ;

帽腰:  $[-45/45_2/-45_2]_s$ , 10 层,  $t_3 = 1.0\text{mm}$ ;

帽缘:  $[0_4/-45/45_2/-45_2]_s$ , 18 层,  $t_4 = 1.8\text{mm}$ 。

单层材料性能: 单层厚度  $t = 0.100\text{mm}$ ,

$E_{11} = 98.0\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 10.78\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 5.194\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.31$ 。

第 2 种: 为 Z 形加筋层压板, 受轴压。图 3-17 为加筋层压板的剖面结构简图, 加筋层压板长  $L = 290\text{mm}$ , 宽  $B = 312\text{mm}$ 。两受压端取简支, 两侧边取自由。

铺层情况:

蒙皮:  $[45/0/-45_2/45/-45/\bar{0}]_s$ , 13 层,  $t_1 = 1.625\text{mm}$ ;

Z 形桁条:  $[45/0/-45/0/45/0/-45]_s$ , 14 层,  $t_2 = 1.75\text{mm}$ 。

单层材料性能: 单层厚度  $t = 0.125\text{mm}$ ,

$E_{11} = 118.0\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 8.11\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 3.75\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.31$ 。

第 3 种: 为 T 形加筋层压板, 受压剪复合载荷。图 3-18 为加筋层压板的结构简图, 加筋层压板长  $L = 370\text{mm}$ , 宽  $B = 390\text{mm}$ 。四边取筋支。

铺层情况:

蒙皮:  $[45/-45/0/90/-45/45/90/45/-45/0_3/-45/45/\overline{90}]_s$

29层,  $t_1 = 3.393\text{mm}$ ;

水平缘条:  $[90/45/-45/0_3/-45/0_4/45]_s$  24层,  $t_2 = 2.808\text{mm}$ ;

竖直缘条:  $[\pm 45/0/90_2/\pm 45/0_3/-45/0_4/45_2/0_4/-45/0_3/-45/45/90/0_{12}]_s$

80层,  $t_3 = 9.36\text{mm}$ 。

单层材料性能: 单层厚度  $t = 0.117\text{mm}$ ,

$E_{11} = 125.0\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 7.2\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 4.7\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.33$ 。

第4种: 为L形加筋层压板, 受轴压。图3-19为加筋层压板的结构简图, 加筋层压板长  $L = 606$  (586) mm, 宽  $B = 254$  (234) mm。四边取简支。

铺层情况:

蒙皮:  $[45/-45/0/-45/0/45/90/45/-45/0/-45_2/0/-45/0/45]_s$

32层,  $t_1 = 3.744\text{mm}$ ;

筋条:  $[45/-45/0/-45/0/45/90/45/0/-45/0]_s$  22层,  $t_2 = 2.574\text{mm}$ 。

单层材料性能: 单层厚度  $t = 0.117\text{mm}$ ,

$E_{11} = 126.0\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 10.7\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 4.47\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.33$ 。

第5种: 为T形加筋层压板, 受压剪复合载荷。图3-20为加筋层压板的结构简图, 加筋层压板长  $L = 300\text{mm}$ , 宽  $B = 300\text{mm}$ 。四边取简支。

铺层情况:

蒙皮:  $[45/-45/0/90/45/0/-45]_s$  14层,  $t_1 = 1.68\text{mm}$ ;

水平缘条:  $[45/-45/0/90/45/-45]_s$  6层,  $t_2 = 0.72\text{mm}$ ;

竖直缘条:  $[45/-45/0/90/45/-45/0_2/-45/45/0_5]_s$  30层,  $t_3 = 3.6\text{mm}$ 。

单层材料性能: 单层厚度  $t = 0.12\text{mm}$ ,

$E_{11} = 103.0\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 7.1\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 4.2\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ 。

第6种: 为T形加筋层压板, 受压剪复合载荷。图3-21为加筋层压板的结构简图, 加筋层压板长  $L = 380$  (300) mm, 宽  $B = 380\text{mm}$ 。四边取简支。

铺层情况:

蒙皮:  $[45/-45/0/45/-45/90]_s$  12层,  $t_1 = 1.5\text{mm}$ ;

水平缘条:  $[-45/45/0/45]_s$  4层,  $t_2 = 0.5\text{mm}$ ;

竖直缘条:  $[-45/45/0/45]_s$  8层,  $t_3 = 1.0\text{mm}$ 。

单层材料性能: 单层厚度  $t = 0.125\text{mm}$ ,

$E_{11} = 142.4\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 10.5\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 4.9\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.3$ 。

第7种: 为T形加筋层压板, 受轴压、剪切和压剪复合载荷。图3-22为加筋层压板的结构简图。受轴压加筋层压板的长和宽  $L \times B = 720(\text{mm}) \times 450(\text{mm})$ , 受剪切加筋层压板的长和宽  $L \times B = 630(\text{mm}) \times 380(\text{mm})$ , 受压剪复合载荷加筋层压板的长和宽  $L \times B = 700(\text{mm}) \times 330(\text{mm})$ 。四边取简支。

铺层情况:

蒙皮:  $[45/-45/0/45/\overline{90}]_s$  9层,  $t_1 = 9 \times 0.125 = 1.125\text{mm}$ ;

水平缘条:  $[45^*/-45^*]_s$  2层,  $t_2 = 2 \times 0.36 = 0.72\text{mm}$ ;

竖直缘条:  $[45^*/-45^*/0_3/-45^*/45^*]_s$  7层,  $t_3 = 3 \times 0.25 + 4 \times 0.36 = 2.19\text{mm}$ 。

单层材料性能：共有三种：织物、单向带和加厚单向带。

织物（带“\*”者）单层的厚度  $t=0.36\text{mm}$ ，性能为

$$E_x = E_y = 50.0\text{GPa}, \quad G_{xy} = 4.8\text{GPa}, \quad \nu_{xy} = 0.3;$$

加厚单向带（带“·”者）单层的厚度  $t=0.25\text{mm}$ ；普通单向带（不带“·”者）单层的厚度  $t=0.125\text{mm}$ 。两种单向带的性能均为

$$E_{11} = 115.2\text{GPa}, \quad E_{22} = 7.72\text{GPa}, \quad G_{12} = 4.7\text{GPa}, \quad \nu_{12} = 0.3。$$

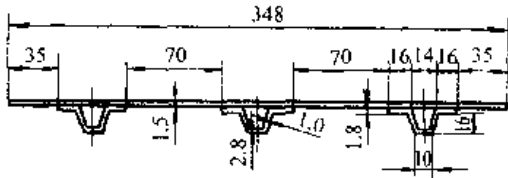


图 3-16 第 1 种加筋层压平板的剖面结构简图

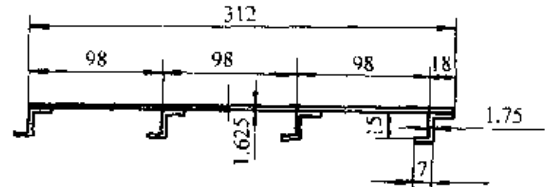


图 3-17 第 2 种加筋层压平板的剖面结构简图

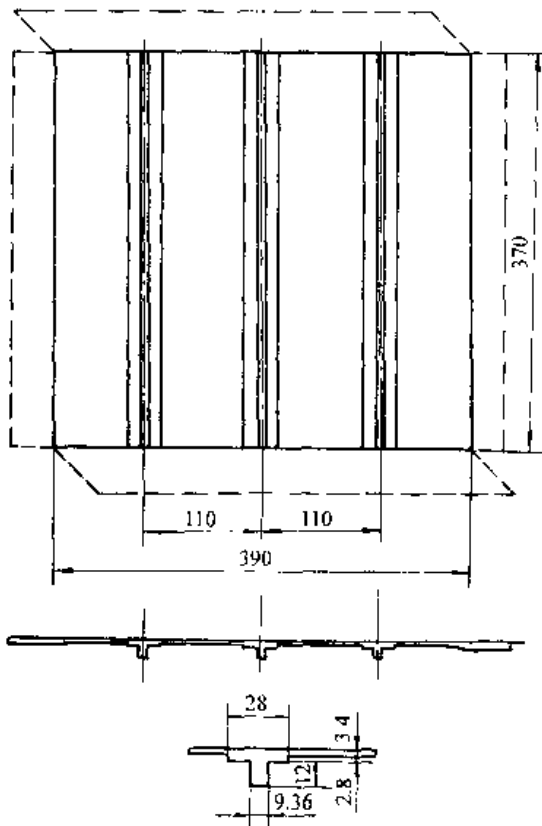


图 3-18 第 3 种加筋层压平板的结构简图

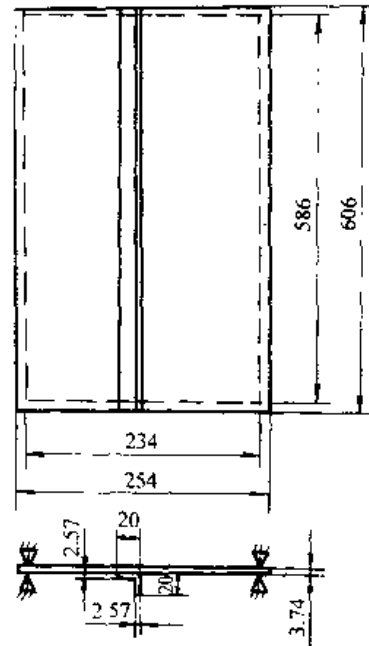


图 3-19 第 4 种加筋层压平板的结构简图

(2) 计算说明 以第 2 种加筋层压板为例，说明采用 BAFLCP 的计算过程。

① 建立计算模型、元素划分

将加筋板划分为由一系列板条元组成的结构。以各板条元侧边的公共交线作为节线（见图 3-23，在该横剖面图中为节点）。对各板元进行编号（图 3-23 中带圆括号者），对各节线进行编号（图 3-23 中不带圆括号者）。

② 形成计算软件要求的数组

按层压板的刚度系数、板宽和偏心距，将板元划分成五类（同类板元的刚度系数相同、板宽相同和偏心距相同）：（一）与筋条相连的蒙皮；（二）与蒙皮相连的筋条突缘；（三）筋

条的腹板；(四)筋条外突缘；(五)筋条间的蒙皮。形成按板元顺序编排的板元类别数组。

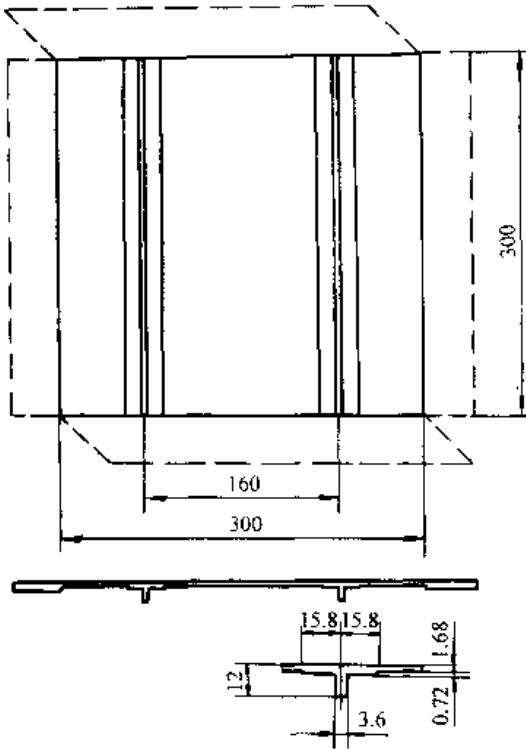


图 3-20 第 5 种加筋层压平板的结构简图

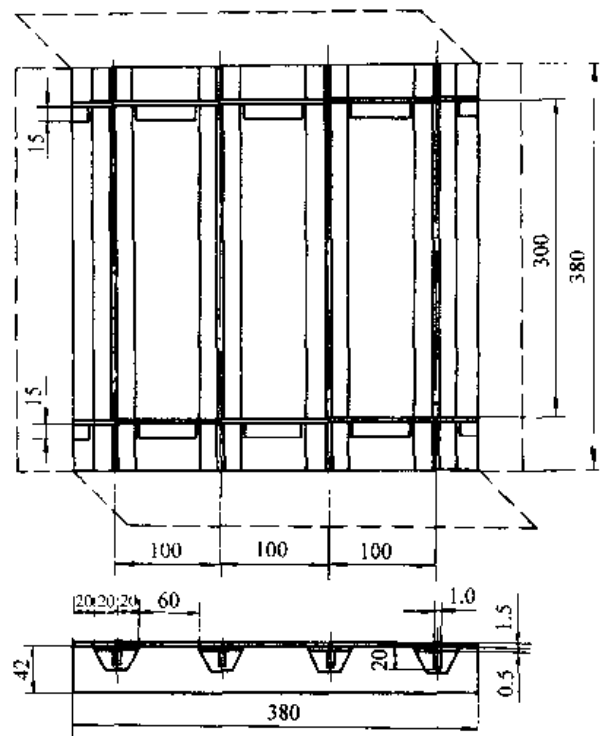


图 3-21 第 6 种加筋层压平板的结构简图

以公共交线为参考，确定各类板元侧边相对于公共交线的偏心距 ( $y_c^+$ ,  $z_c^+$ ,  $y_c^-$ ,  $z_c^-$ )，形成各类板元的偏心距数组。

形成以各板元左、右边节线编号为标识的结构总刚度矩阵的装配识别数组。

### ③ 建立原始数据输入文件

按 BAFLCP 的使用说明书的要求，第 2 种加筋层压板的原始数据输入文件如下：

第 1 行 1, 19, 16, 5, 2, 0.0, 5.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1000.0, 3, 44, 3, 290.0, (基本参数：载荷情况 (1)；板元数 (19)；节线数 (16)；板元类别数 (5)；屈曲半波数 (2)；给定初载 (0.0)；加载增量 (5.0)；载荷比 (0.0, 0.0, 0.0)；加载截止值 (1000.0)；返回打印标识符 (3)；开口筋条的板元类别特征参数 (44)；约束节线数 + 1 (3)；板长 (290.0))

第 2 行 18.0, 18.0, 13.25, 6.125, 80.0, (各类板元的宽度)

第 3 行 2 \* 0.0, 90.0, 4 \* 0.0, 90.0, 4 \* 0.0, 90.0, 4 \* 0.0, 90.0, 0.0, (各个板元的倾角)

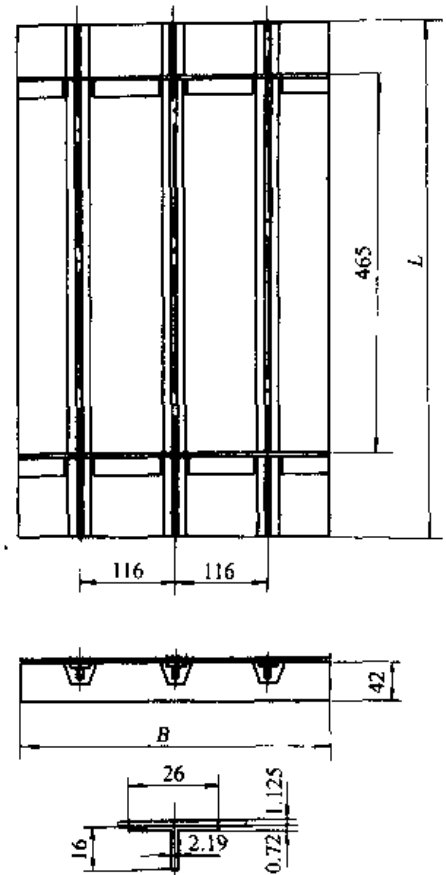


图 3-22 第 7 种加筋层压平板的结构简图



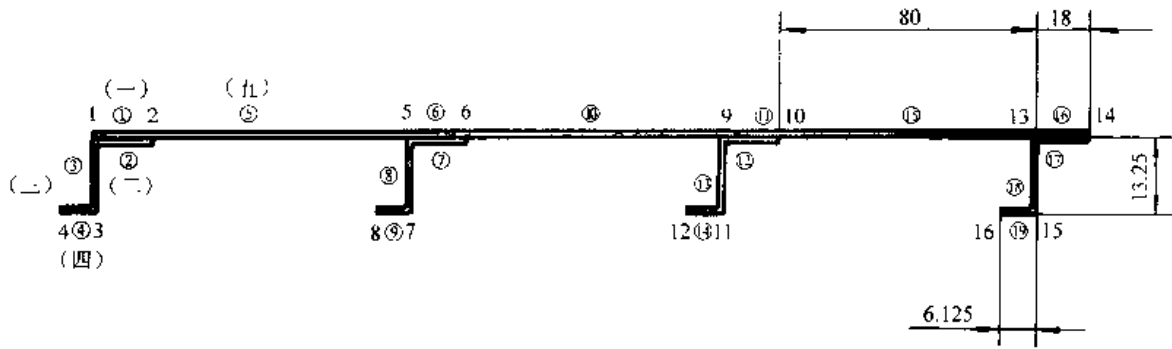


图 3-23 第 2 种加筋层压板的计算模型、元素划分

- 第 4 行 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, (各板元的类别)
- 第 5 行 1, 2, 1, 2, 1, 3, 3, 4, 2, 5, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 7, 8, 6, 9, 9, 10, 9, 10, 9, 11, 11, 12, 10, 13, 13, 14, 13, 14, 13, 15, 15, 16, (各个板元的左、右节线编号——总刚度矩阵的装配识别数组)
- 第 6 行 2, 601, 614, (侧边约束数和侧边边界条件识别参数)
- 第 7 行 0.1445e5, 0.4607e4, 0.6142e4, 0.4844e4, 2 \* 0.1, (第一类板元面内刚度)  
 0.1260e5, 0.3139e4, 0.4299e4, 0.3323e4, 2 \* 0.1, (第二类板元面内刚度)  
 0.1260e5, 0.3139e4, 0.4299e4, 0.3323e4, 2 \* 0.1, (第三类板元面内刚度)  
 0.1260e5, 0.3139e4, 0.4299e4, 0.3323e4, 2 \* 0.1, (第四类板元面内刚度)  
 0.1445e5, 0.4607e4, 0.6142e4, 0.4844e4, 2 \* 0.1, (第五类板元面内刚度)
- 第 8 行 0.5966e4, 0.1985e4, 0.2636e4, 0.2085e4, 2 \* 0.5622e3, (第一类板元弯曲刚度)  
 0.3088e4, 0.8427e3, 0.1142e4, 0.8897e3, 2 \* 0.3027e3, (第二类板元弯曲刚度)  
 0.3088e4, 0.8427e3, 0.1142e4, 0.8897e3, 2 \* 0.3027e3, (第三类板元弯曲刚度)  
 0.3088e4, 0.8427e3, 0.1142e4, 0.8897e3, 2 \* 0.3027e3, (第四类板元弯曲刚度)  
 0.5966e4, 0.1985e4, 0.2636e4, 0.2085e4, 2 \* 0.5622e3, (第五类板元弯曲刚度)
- 第 9 行 98, 18.0, 13.25, 6.125, (各类板元的特征宽度, 所有蒙皮作一类)
- 第 10 行 0.0, 1.0e-15, 1.0e-20, 1000, 1.0e-3, 266, (计算控制参数及端部边界条件)
- 第 11 行 4 \* 0.0, 0.0, 2.0, 0.0, 2.0, 0.0, 2.0, 2 \* 0.0, 8 \* 0.0, (各类板元节线偏心距)

#### ④ 操作说明

将上述原始数据以自由格式形成一输入文件, 文件名可任意给定。当计算机屏幕上显示“the name of input data file=”时输入该文件名, 即完成了原始数据输入。

当计算机屏幕上提示“the name of result data file=”时输入输出文件名，文件名自定。

当返回打印标识符置 1 和 3 时，首先打印“原始数据”。执行中，可输出中间计算结果（该程序可输出加筋板中各板元的载荷分配比、单位长度上的载荷及稳定判别行列式的值）。

执行完后，将打印“计算结果”（Calculating Results），给出临界载荷（Critical Load）：

$$\begin{aligned} NX (CR) & \quad \text{即} \quad N_{xcr} \\ NY (CR) & \quad \text{即} \quad N_{ycr} \\ NXY (CR) & \quad \text{即} \quad N_{xycr} \end{aligned}$$

(3) 有限元分析计算值与试验结果的比较 表 3-2 中给出了这七种复合材料加筋层压平板在轴压、剪切和压剪复合载荷作用下的屈曲载荷的计算值和试验结果。试验值取自相应的研究报告<sup>[9]</sup>。由表 3-2 可见，计算值和试验结果吻合较好。

表 3-2 加筋层压平板的屈曲计算值和试验结果比较

种 类	载 荷	计算值		试 验 值		相对误差 $1 - \frac{N_{\text{计}}}{N_{\text{试}}} (\%)$
		$N_{xcr \text{ 计}}$ (N/m)	$N_{ycr \text{ 计}}$ (N/m)	$N_{xcr \text{ 试}}$ (N/m)	$N_{ycr \text{ 试}}$ (N/m)	
1	轴压	189.7		196.3		-3.5
2	轴压	257.4		266.6		-3.6
3	压剪	482.8	343.1	516.0	366.7	-6.9
4	轴压	346.1		391.7		-13.2
5	压剪	26.83	26.83	28.87	28.87	-7.6
6	压剪	63.31	63.31	62.62	62.62	1.1
7	轴压	52.63		51.55		2.1
7	剪切		34.13		36.85	-8.0
7	压剪	72.44	30.75	86.06	36.54	-18.8

### 3.4.2 加筋层压平板蒙皮的局部屈曲计算<sup>[8]</sup>

图 3-24 和图 3-25 中分别给出了帽形加筋层压平板和 Z 形加筋层压平板蒙皮的局部屈曲载荷计算结果。图中的“。”为按精确的有限条元素法计算的屈曲载荷值，图中还给出了蒙皮两侧边分别按简支边界条件和固支边界条件考虑时的计算曲线。

工程中一般将闭剖面桁条支持的边界条件取为固支，而从图 3-24 可见，侧边按固支边界条件计算的帽形加筋板蒙皮的屈曲载荷，比精确计算值偏高 10%~12%。

工程中一般将开剖面桁条支持的边界条件取为简支，而从图 3-25 可见，侧边按简支边界条件计算的 Z 形加筋板蒙皮的屈曲载荷，比精确计算值偏低 10%~40%，而且，其偏低值与蒙皮的长宽比有关，大约为：蒙皮的长宽比  $L/b=1.0$  时，偏低约 40%； $L/b=2.0$  时，偏低约 30%； $L/b=2.5$  时，偏低约 15%；当  $L/b \geq 3$  后，偏差不大。

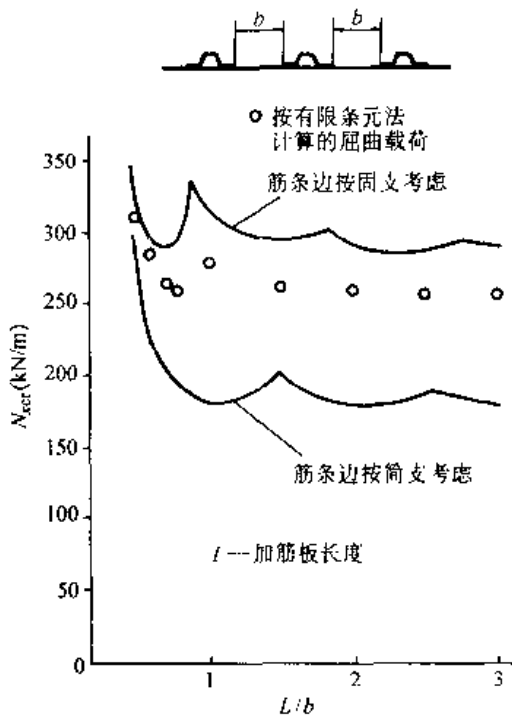


图 3-24 帽形加筋层压平板蒙皮的局部屈曲载荷计算曲线

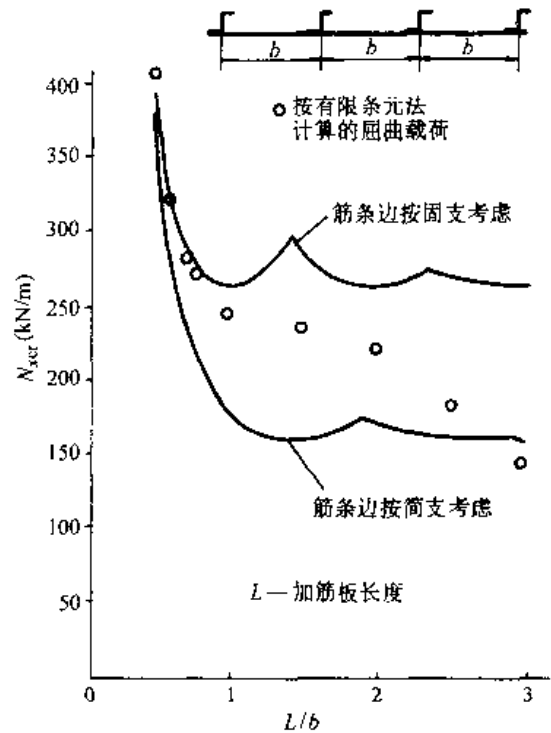


图 3-25 Z形加筋层压平板蒙皮的局部屈曲载荷计算曲线

### 3.4.3 加筋层压平板在轴压下的承载能力计算<sup>[1]</sup>

图 3-26 中给出了一种矩形加筋层压平板在均布轴压下的承载能力的计算曲线  $\sigma_{\infty} \sim L'/\rho$ ，它是按 3.3.3.1 节中的分段处理法计算的。图中还示出了试验值。

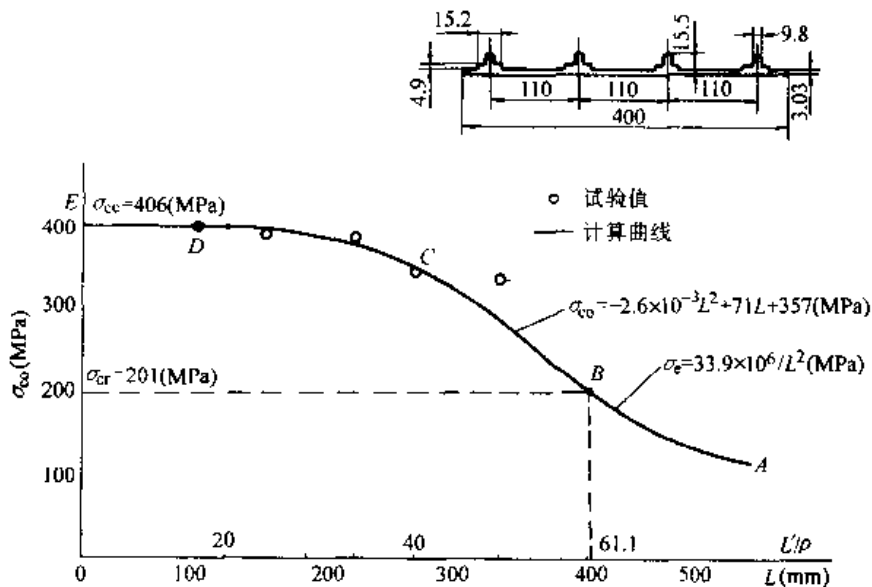


图 3-26 矩形加筋层压平板在轴压下的承载能力计算曲线和试验值

加筋层压平板的剖面尺寸如图 3-26 中的附图所示。其余参数如下：

· 铺层情况

蒙皮：[ $\mp 45 / (\pm 45)_2 / 0_4 / 90 / 0_2$ ]<sub>s</sub>， 共 26 层；

桁条：[ $\mp 45 / (\pm 45)_2 / 0_4 / 90 / (\mp 45)_3 / 90 / \mp 45 / 0 / 90 / 0_{20}$ ]<sub>s</sub>， 共 84 层。

· 铺层材料性能：

$E_{11} = 133.38\text{GPa}$ ，  $E_{22} = 8.34\text{GPa}$ ，  $G_{12} = 5.49\text{GPa}$ ，  $\nu_{12} = 0.34$ ；

铺层的厚度为 0.1167mm。

· 加筋层压平板的剖面性能数据

剖面面积： $A = 1924.16\text{mm}^2$ ；

剖面压心： $z_c = 4.12\text{mm}$ （距蒙皮的内表面）；

回转半径： $\rho = 4.77\text{mm}$ ；

弯曲刚度： $(\overline{EI}) = 3327\text{N}\cdot\text{m}^2$ ；

等效轴向弹性模量： $E_L = 75.97\text{GPa}$ ；

· 蒙皮的刚度系数： $D_{11} = 129.98\text{N}\cdot\text{m}$ ；  $D_{12} = 63.15\text{N}\cdot\text{m}$ ；

$D_{22} = 89.28\text{N}\cdot\text{m}$ ；  $D_{66} = 69.29\text{N}\cdot\text{m}$ 。

计算方法说明：

· 加筋板的压损应力  $\sigma_{cc}$  取自试验结果。

· 蒙皮的平均局部屈曲应力按下式计算

$$\sigma = \frac{2\pi^2 D_{22}}{tb^2} \left( \sqrt{D_{11}/D_{22}} + (D_{12} + 2D_{66})/D_{22} \right)$$

式中： $b$ ——桁条间蒙皮的宽度，取  $b = 100\text{mm}$ ；

$t$ ——蒙皮的厚度，取  $t = 3.03\text{mm}$ 。

· 长加筋板的欧拉总体屈曲应力按下式计算

$$\sigma_r = \frac{c\pi^2(\overline{EI})}{AL^2}$$

式中： $L$ ——加筋板的长度；

$c$ ——加筋板的端部支持系数，取  $c = 2.04$ 。

令  $\sigma_r = \sigma_{cr}$ ，由上两式即可求得图 3.26 中长柱区和过渡区的分界点  $B$  处的有效长细比  $L'/\rho = 61.1$  及板长  $L = 416.3\text{mm}$ 。

### 3.4.4 加筋层压板稳定性的工程简化方法计算和试验结果比较

采用工程简化方法对 3.4.1 节中第 7 种 T 形加筋层压板的轴压稳定性进行了计算，并与试验结果做了比较。T 形加筋层压板的结构简图见图 3-22，铺层情况、材料性能等见 3.4.1 节。

加筋层压板的长度  $L = 465\text{mm}$ ，宽度  $B = 450\text{mm}$ ；

蒙皮的厚度  $t_1 = 1.125\text{mm}$ ，蒙皮的总宽度  $b_1 = 450\text{mm}$ ，加筋间蒙皮的宽度  $b_{10} = 90\text{mm}$ ；

加筋条竖筋（竖直缘条）的厚度  $t_2 = 2.19\text{mm}$ ，加筋条竖筋的宽度  $b_2 = 15.28\text{mm}$ ；

加筋条平筋（水平缘条）的厚度  $t_3 = 0.72\text{mm}$ ，加筋条平筋的宽度  $b_3 = 26\text{mm}$ ；

蒙皮、加筋条的平筋和竖筋的刚度系数见表 3-3。

#### (1) 蒙皮局部屈曲分析

加筋条间蒙皮的长宽比  $465/90 = 5.17 > 4$ ，故可按无限长板考虑。蒙皮的屈曲应力由式

(3-1) 计算

$$\sigma_{x,cr} = 6.9k_{L0} \left( \frac{t_1}{b_{10}} \right)^2$$

其中  $t_1 = 1.125\text{mm}$ ,  $b_{10} = 90\text{mm}$ 。侧边按简支考虑,  $k_{L0}$  由图 3-3 查取,  $\pm 45^\circ$  铺层百分比为  $(6/9) \times 100\% = 66.67\%$ ,  $0^\circ$  铺层百分比为  $(2/9) \times 100\% = 22.22\%$ , 由图 3-3 查得  $k_{L0} = 26.7\text{GPa}$ 。则蒙皮的屈曲应力为

$$\sigma_{x,cr} = 6.9 \times 26.7 \times \left( \frac{1.125}{90} \right)^2 = 0.0288\text{GPa} = 28.8\text{MPa}$$

表 3-3 加筋层压板的刚度系数

	面内刚度系数 (kN/mm)					
	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{22}$	$A_{16}$	$A_{26}$	$A_{66}$
蒙皮	57.53	21.41	44.01	6.758	6.758	24.08
加筋条竖筋	139.89	41.18	58.79	0	0	46.37
加筋条平筋	26.48	19.71	26.48	0	0	21.42
	弯曲刚度系数 (kN·mm)					
	$D_{11}$	$D_{12}$	$D_{22}$	$D_{16}$	$D_{26}$	$D_{66}$
蒙皮	5.621	2.845	3.914	0.8535	0.8535	3.126
加筋条竖筋	34.97	23.09	31.17	10.30	10.30	25.16
加筋条平筋	1.144	0.8516	1.144	0	0	0.9254

又可按式 (2-3) 计算, 蒙皮屈曲时单位长度上的轴压力为

$$\begin{aligned} N_{x,cr} &= \frac{2\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}}} \right] \\ &= \frac{2 \times 3.1416^2 \times 3.914}{90^2} \left( \sqrt{\frac{5.621}{3.914} + \frac{2.845 + 2 \times 3.126}{3.914}} \right) = 0.0336\text{kN/mm} \end{aligned}$$

则按式 (2-3) 计算得到的蒙皮屈曲应力为

$$\sigma_{x,cr} = \frac{N_{x,cr}}{t_1} = \frac{0.0336}{1.125} = 0.0299(\text{kN/mm}^2) = 29.9\text{MPa}$$

以上两种方法的计算结果接近, 仅相差 3.6%。

(2) 加筋层压板的总体屈曲分析和承载能力计算

加筋层压板的总体屈曲载荷按式 (3-6) 计算

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{P_c}{1 + \lambda P_c / (GA)} \\ P_c &= \frac{c\pi^2(EI)}{L^2} \end{aligned}$$

其中,  $L = 465\text{mm}$ , 取  $c = 2.04$ ,  $\lambda = 1.2$ 。

$G$  为加筋条竖筋的等效剪切模量, 按附录 A 中的式 (A-5) 计算

$$G = \frac{A_{66}}{t_2} = \frac{46.37}{2.19} = 21.17 \text{ kN/mm}^2$$

$\bar{A}$  为加筋条竖筋的剖面面积

$$\bar{A} = 15.28 \times 2.19 = 33.46 \text{ mm}^2$$

$(EI)$  为加筋层压板剖面的弯曲刚度，按式 (3-7) 注明的方法近似计算

$$(EI) = \sum_1^3 E_{xkt} b_k (z_k - \bar{z})^2$$

其中，由附录 A 的式 (A-3) 可得： $E_{xkt} = (E_{xt})_k = \left( A_{11} + \frac{2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{22}A_{16}^2 - A_{12}^2A_{66}}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \right)_k$ ，

$k=1, 2, 3$ ，分别表示蒙皮的、竖筋的和平筋的沿  $x$  方向的等效刚度系数。 $(E_{xt})_k b_k$  分别计算如下：

$$\begin{aligned} (E_{xt})_1 b_1 &= \left( 57.53 + \frac{2 \times 21.41 \times 6.758^2 - 44.01 \times 6.758^2 - 21.41^2 \times 24.08}{44.01 \times 24.08 - 6.758^2} \right) \times 450 \\ &= 46.59 \times 450 = 20965.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$(E_{xt})_2 b_2 = 3 \times \left( 139.9 - \frac{41.18^2}{58.79} \right) \times 15.28 = 3 \times 111.06 \times 15.28 = 5091.0 \text{ kN}$$

$$(E_{xt})_3 b_3 = 3 \times \left( 26.48 - \frac{19.71^2}{26.48} \right) \times 26 = 3 \times 11.809 \times 26 = 921.1 \text{ kN}$$

取蒙皮中面作参考轴，计算加筋板剖面的中性轴位置  $\bar{z}$ ，蒙皮、竖筋、平筋剖面中心坐标分别为：

$$z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{2}(16 + 0.72 + 1.125) = 8.9225 \text{ mm}, z_3 = \frac{1}{2}(0.72 + 1.125) = 0.9225 \text{ mm}$$

$$\text{则 } \bar{z} = \left( \sum_1^3 E_{xkt} b_k z_k \right) / \left( \sum_1^3 E_{xkt} b_k \right) = \frac{5091.0 \times 8.9225 + 921.1 \times 0.9225}{20965.5 + 5091.0 + 921.1} = \frac{46274.2}{26977.6} = 1.715 \text{ mm}$$

加筋层压板剖面的弯曲刚度为

$$\begin{aligned} (EI) &= 20965.5 \times 1.715^2 + 5091.0 \times (8.9225 - 1.715)^2 + 921.1 \times (0.9225 - 1.715)^2 \\ &= 326710.0 \text{ kN} \cdot \text{mm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{则 } P_e = \frac{2.04 \times 3.1416^2 \times 326710.0}{465^2} = 30.42 \text{ kN}$$

$$P_{cr} = \frac{30.42}{1 + 1.2 \times 30.42 / (21.17 \times 33.46)} = 28.94 \text{ kN}$$

$$\sigma_r = \frac{P_{cr}}{F}$$

式中  $F$  为加筋层压板的剖面面积

$$F = b_1 t_1 + 3(b_2 t_2 + b_3 t_3) = 450 \times 1.125 + 3 \times (15.28 \times 2.19 + 26 \times 0.72) = 662.8 \text{ mm}^2$$

则加筋层压板的欧拉总体屈曲应力为

$$\sigma_r = \frac{28.94}{662.8} = 0.04365 \text{ kN/mm}^2 = 43.65 \text{ MPa}$$

加筋层压板的破坏应力按式 (3-9) 计算

$$\bar{\sigma}_{\infty} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cc}} \right) \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_r} \right] \bar{\sigma}_{cc}$$

式中： $\sigma_{cr} = 28.8\text{MPa}$ ， $\sigma_r = 43.65\text{MPa}$ ；

$\bar{\sigma}_{cc}$ 为这类加筋层压板的短板的压损破坏应力，因缺乏试验数据，故取 0.75 倍的蒙皮层压板的压缩应力截止值估算

$$\begin{aligned}\sigma_{cc} &= 0.75\varepsilon_u E_{r1} \\ &= 0.75 \times 0.0027 \times \frac{46.59}{1.125} = 0.08386\text{kN/mm}^2 = 83.86\text{MPa}\end{aligned}$$

则加筋层压板的压缩破坏应力为

$$\bar{\sigma}_{cc} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{28.8}{83.86} \right) \frac{28.8}{43.65} \right] \times 83.86 = 47.5\text{MPa}$$

### (3) 计算值与试验结果比较

共做了三件加筋层压板的轴压试验，采取端压的方法加均布压力，两横肋侧向被支持。蒙皮先局部屈曲，后加筋板发生总体失稳破坏。试验结果如下：

三件试验件蒙皮的局部屈曲载荷为 20.0kN，24.0kN 和 25.6kN，平均值为  $P_{cr} = 23.2\text{kN}$ ；

三件试验件的总体失稳破坏载荷为 28.0kN，30.0kN 和 29.0kN，平均值为  $P_{co} = 29.0\text{kN}$ 。加筋层压板的总体失稳破坏应力试验平均值则为

$$\sigma_{co}^s = \frac{P_{co}}{F} = \frac{29.0}{662.8} = 0.0438\text{kN/mm}^2 = 43.8\text{MPa}$$

则加筋层压板的总体失稳破坏应力的计算值（47.5MPa）与试验值（43.8MPa）相差 8.4%。

在计算蒙皮局部屈曲应力的试验值时，值得指出的是，应考虑蒙皮实际所受的轴压载荷。

由于均匀压缩，轴压载荷将按蒙皮和加筋条的压缩刚度比分配，据此可计算蒙皮实际所受的轴压载荷。加筋条间一块蒙皮（ $b_{10} = 90\text{mm}$ ）所受的轴压载荷则为

$$P_{cr}^s = \frac{E_{r1} t_1 b_0}{\sum_1 E_{rk} t_k b_k} P_{cr} = \frac{46.59 \times 90}{26977.6} \times 23.2 = 3.61\text{kN}$$

则蒙皮局部屈曲应力的试验值为

$$\sigma_{cr}^s = \frac{P_{cr}^s}{t_1 b_0} = \frac{3.61}{1.125 \times 90} = 0.0356\text{kN/mm}^2 = 35.6\text{MPa}$$

蒙皮局部屈曲应力的计算值（28.8MPa 和 29.9MPa）分别比试验值（35.6MPa）偏低了 19.1%，16.0%。这是因为计算时蒙皮两侧边是按简支边界条件考虑的，而试验件蒙皮的侧边与加筋条相连，实际支持情况比简支边界条件强，因此计算值比试验值偏低。

由表 3-2，采用有限条元素法屈曲分析软件 BAFLCP 计算的蒙皮局部屈曲载荷为

$$N_{xcr} = 52.63\text{N/mm}$$

注意， $N_{xcr}$ 是相对于整个加筋板的，应按刚度比分配到蒙皮上。则由有限条元素法计算的蒙皮局部屈曲应力为

$$\sigma_{xcr} = \frac{46.59 \times 52.63 \times 450}{26977.6 \times 1.125} = 36.36\text{N/mm}^2 = 36.36\text{MPa}$$

可见，有限条元素法计算的蒙皮局部屈曲应力（36.36MPa）与试验值（35.6MPa）很接近，只相差 2.1%。

## 参 考 文 献

- [1] 陈绍杰. 复合材料设计手册. 北京: 航空工业出版社, 1990
- [2] 铁摩辛柯 S P, 盖莱 J M. 弹性稳定理论. 北京: 科学出版社, 1965
- [3] 李顺林, 薛克兴, 赵渠森, 高树理. 复合材料工作手册. 北京: 航空工业出版社, 1988
- [4] Tong X X, Guan D X, Gao Z H. Experimental and Analytical Investigation on Buckling of the Composite Stiffened Panel under Compression and Shear. ICAS '92 Proceedings of 18th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences. 1992
- [5] Williams F W, Anderson M S. Incorporation of Lagrangian Multipliers into an algorithm for Finding Exact Natural Frequencies or Critical Buckling Loads. Int. J. Mech. Sci., 1983, 25 (8)
- [6] Bushnell D. Nonlinear Equilibrium of Imperfect, Locally Deformed Stringer - Stiffened Panels under Combined In - plane Loads. Comput. Struct., 1987, 27
- [7] Bushnell D. PANDA2 —— Program for Minimum Weight Design of Stiffened, Composite, Locally Buckled Panels. Comput. Struct., 1987, 25
- [8] 童贤鑫. 复合材料加筋叠层板的轴压稳定性分析. 航空学报, 1986, 7 (1)
- [9] 李新祥, 童贤鑫, 关德新. 有限长复合材料加筋板屈曲分析的有限条元法及其应用. 结构强度研究, 1996, (11)
- [10] 孙侠生, 黄琦. 复合材料加筋板壳优化程序 CPANDA 理论与使用手册. 623 所技术报告, 1997
- [11] 范永安. 纵横加筋复合材料矩形层压板结构屈曲分析程序使用说明. 623 所技术报告, 1997



## 第 4 章 复合材料蜂窝夹层结构稳定性分析

### 4.1 概 述

复合材料蜂窝夹层结构具有抗弯刚度较大、且重量较轻的优点，因此，在飞机结构中获得了广泛应用。对于结构高度大、稳定性能要求高的翼面结构中的壁板（如上翼面的蒙皮壁板）采用蜂窝夹层结构取代加筋板结构能明显减轻重量；对于结构高度小的翼面结构（如操纵面）采用全高度蜂窝夹层结构代替梁肋式结构能带来明显的减重效果。在机身结构中可采用剖面高度较小的夹层曲板作机身壳体。

复合材料蜂窝夹层结构在压、剪载荷作用下的主要失效模式可分为局部失效和总体失稳两大类。局部失效包括：复合材料面板失效（面板局部失稳、单层屈曲、面板蜂窝格间屈曲等）、蜂窝芯失效和界面失效，可采用 4.3 节介绍的分析方法计算，计算公式较繁琐，已编制了专门的分析软件 BUCKLSCP，以便于设计者使用。总体失稳可采用有限元法进行分析，可以分析各种形状、各种边界支持条件及各种复杂载荷情况下的蜂窝夹层平板或曲板（包括变高度蜂窝板），在 4.4 节介绍采用有限元法进行总体失稳分析的基本方法及注意事项。在 BUCKLSCP 中还编入了复合材料蜂窝夹层板总体失稳分析的工程计算方法，工程计算方法和 BUCKLSCP 程序在 4.5 节中介绍。

### 4.2 复合材料蜂窝夹层结构主要力学性能参数计算

复合材料蜂窝夹层结构的主要特征参数如图 4-1。

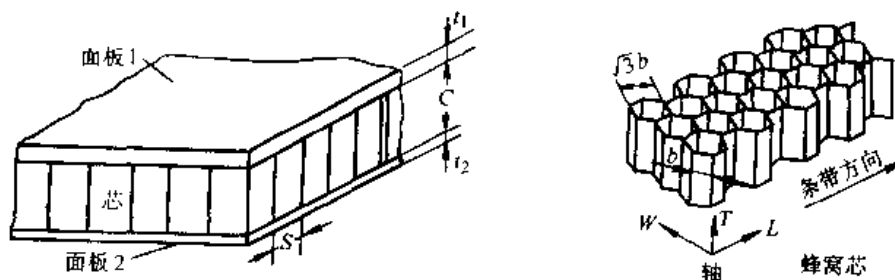


图 4-1 复合材料夹层结构主要参数

#### 4.2.1 复合材料蜂窝夹层板的弯曲刚度

(1) 上下面板材料相同、厚度相同、面板较厚需考虑面板自身弯曲刚度时的复合材料蜂窝夹层板的弯曲刚度系数（单位宽度上的刚度）计算公式为

$$D_i = \frac{E_{fi} \times t_f \times (t_f + c)^2}{2\lambda} + \frac{E_{fi} \times t_f^3}{6\lambda} \quad (i = x, y) \quad (4-1)$$

$$\lambda = 1 - \nu_{xy}\nu_{yx} \quad (4-2)$$

式中： $\nu_{xy}$ ， $\nu_{yx}$ ——面板等效泊松比；

$E_{fi}$ ——面板的等效弹性模量 ( $i = x, y$ )；

$t_f$ ——面板的厚度 ( $t_f = t_1 = t_2$ )。

(2) 上下面板厚度相同、材料相同、面板较薄可忽略面板自身弯曲刚度时的复合材料蜂窝夹层板的弯曲刚度系数 (单位宽度上的刚度) 计算公式为

$$D_i = \frac{E_{fi} \times t_f \times (t_f + c)^2}{2\lambda} \quad (i = x, y) \quad (4-3)$$

#### 4.2.2 复合材料蜂窝夹层板的拉压刚度

上下面板厚度相同、材料相同、不考虑蜂窝芯面内拉压刚度时的复合材料蜂窝夹层板的拉压刚度系数 (单位宽度上的刚度) 计算公式为

$$H_i = 2E_{fi} \times t_f \quad (i = x, y) \quad (4-4)$$

#### 4.2.3 复合材料蜂窝夹层板的剪切刚度

上下面板厚度相同、材料相同、面板较薄时，复合材料蜂窝夹层板的横向剪切刚度系数 (单位宽度上的刚度) 近似计算公式为

$$U_{LT} = \frac{(t_f + c)^2}{c} G_{CLT} \approx (t_f + c) G_{CLT} \quad (4-5)$$

$$U_{WT} = \frac{(t_f + c)^2}{c} G_{CWT} \approx (t_f + c) G_{CWT} \quad (4-6)$$

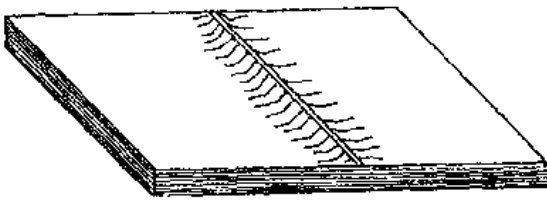
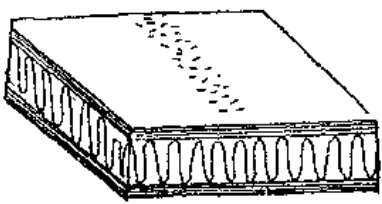
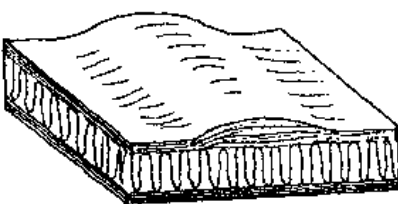
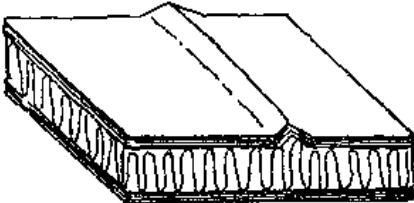
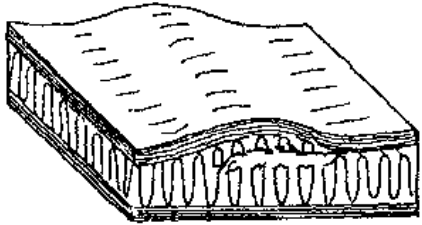
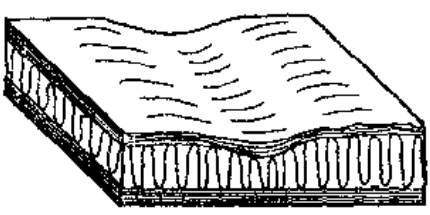
式中： $G_{CLT}$ ， $G_{CWT}$ ——蜂窝夹芯在  $LT$  和  $WT$  面内的剪切模量。

### 4.3 复合材料蜂窝夹层结构的局部失效分析

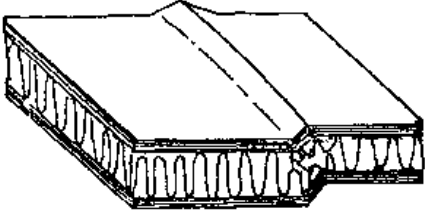
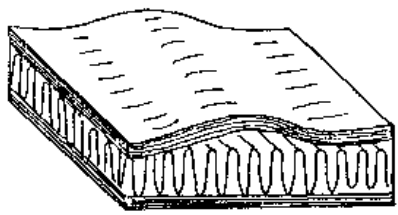
#### 4.3.1 复合材料蜂窝夹层结构的局部失效模式

表 4-1 列出了复合材料蜂窝夹层结构的各种局部失效模式，分三类：复合材料面板失效，蜂窝夹芯失效，蜂窝芯和面板的界面失效。

表 4-1 局部失效模式

种类	项目	示意图	说明
复合材料面板失效	纤维破坏		纤维折断
	面板蜂窝格间屈曲		面板太薄, 蜂窝孔太大, 导致面板起皱
	单层失稳		面板分层
	面板局部失稳		<p>(1) 一般屈曲波长大于蜂窝孔尺寸, 可能产生对夹层中面的对称和反对称起皱</p> <p>(2) 面板可能向里或向外屈曲, 取决于蜂窝芯的压缩强度和面板与蜂窝芯的胶接强度的相对强弱</p>
蜂窝芯失效	蜂窝芯拉伸破坏		蜂窝芯拉伸强度不够, 产生面板向外凸出
	蜂窝芯压缩		蜂窝芯压缩强度不够, 蜂窝夹芯压塌, 产生面板向内凹陷

续表 4-1

种类	项目	示意图	说明
蜂窝芯失效	蜂窝芯剪切皱折		蜂窝芯剪切模量过小，胶粘剂剪切强度过低，产生剪切皱折而最终破坏，有时是总体失稳引起的
界面失效	面板与蜂窝芯脱胶		胶粘剂拉伸强度不够，面板与夹芯间脱胶向外凸出

### 4.3.2 复合材料蜂窝夹层结构的局部失效计算

对正交各向异性面板的蜂窝夹层平板的局部失效分析；计算公式较为烦琐，已编制了专门的分析软件 BUCKLSCP，程序的适用范围见 4.5.2 节。本节仅列出上下面板相对于蜂窝中心线对称的蜂窝夹层板的局部失稳计算公式。

#### 4.3.2.1 复合材料面板单层失稳 (layer instability)

复合材料面板单层失稳计算公式为

$$\frac{\sigma_{jcr}}{G_z} = \xi_j(2 - \xi_j); \quad (j = x, y, xy) \quad \text{当 } \xi_j < 1 \text{ 时}$$

$$= 1; \quad (j = x, y, xy) \quad \text{当 } \xi_j > 1 \text{ 时} \quad (4-7)$$

式中： $\sigma_{jcr}$ ——面板单层屈曲应力，下标  $j = x, y, xy$ ，分别表示沿  $x, y$  方向的压缩屈曲应力及剪切屈曲应力；

$G_z$ ——复合材料面板层间剪切模量；

$\xi_j$ ——刚度比参数，计算公式为

$$\xi_j = \frac{\sqrt{DB_j}}{S_j} \quad (j = x, y, xy) \quad (4-8)$$

$B_j$ ——基础刚度，计算公式为

$$B_j = \frac{L_j b E_z}{t'} \quad (j = x, y, xy) \quad (4-9)$$

$D$ ——弯曲刚度，计算公式为

$$D = \frac{\pi d_f^4 E_f b}{64 W_f} \quad (4-10)$$

$S_j$ ——剪切刚度，计算公式为

$$S_j = \frac{bt'G_z}{L_j} \quad (j = x, y, xy) \quad (4-11)$$

$L_j$  —— 载荷方向铺层有效比例 ( $j = x, y, xy$ ), 按式 (4-12) 至式 (4-14) 计算

$$L_x = \text{SPL0} + \text{SPL9} \times \frac{E_{22C}}{E_{11C}} + 0.5 \times \text{SPL45} \times (1 + 2.5 \times \frac{E_{22C}}{E_{11C}}) \quad (4-12)$$

$$L_y = \text{SPL9} + \text{SPL0} \times \frac{E_{22C}}{E_{11C}} + 0.5 \times \text{SPL45} \times (1 + 2.5 \times \frac{E_{22C}}{E_{11C}}) \quad (4-13)$$

$$L_{xy} = \text{SPL45} \times (1 + \frac{E_{22C}}{E_{11C}}) + 0.25 \times (\text{SPL0} + \text{SPL9}) \times (1 + 2.5 \times \frac{E_{22C}}{E_{11C}}) \quad (4-14)$$

式中:  $E_{11C}$  —— 复合材料单层纵向压缩弹性模量;

$\text{SPL0}$  —— 0 度方向纤维百分比例;

$\text{SPL9}$  —— 90 度方向纤维百分比例;

$\text{SPL45}$  —— 45 度方向纤维百分比例, 计算公式为

$$\text{SPL45} = 0.5 \times (1 - \text{SPL0} - \text{SPL9}) \quad (4-15)$$

$t'$  —— 平均单层厚度;

$b$  —— 板宽;

$E_z$  —— 复合材料面板法向拉伸模量, BUCKLSCP 程序中按式 (4-16) 取值

$$E_z = 0.5 \times (E_{22T} + E_{22C}) \quad (4-16)$$

$E_{22T}$  —— 复合材料单层横向拉伸弹性模量;

$E_{22C}$  —— 复合材料单层横向压缩弹性模量;

$d_f$  —— 纤维直径, 对碳纤维单向带, BUCKLSCP 程序中取值 0.007mm, 也可对程序另外赋值;

$W_f$  —— 纤维间距, 对碳纤维单向带, BUCKLSCP 程序中取值 0.005842mm, 也可对程序另外赋值;

$E_f$  —— 纤维弹性模量, 对碳纤维单向带, BUCKLSCP 程序中取值 255162MPa, 也可对程序另外赋值。

#### 4.3.2.2 面板局部失稳 (laminates local instability)

复合材料蜂窝夹层板的面板局部失稳应力仍按式 (4-7) 计算, 但刚度参数  $D$ ,  $S$  和  $B$  的计算要做如下相应更改。

(1) 基础刚度参数  $B$  计算公式为

$$B = \frac{2E_{cz}}{c} \quad (4-17)$$

式中:  $E_{cz}$  —— 蜂窝芯法向弹性模量。

(2) 弯曲刚度参数  $\bar{D}_j$  ( $j = x, y, xy$ ) 的计算公式为

$$\bar{D}_x = D_{11} \quad (4-18)$$

$$\bar{D}_y = D_{22} \quad (4-19)$$

$$\bar{D}_{xy} = 0.25 (D_{11} + D_{22}) + 0.5 (D_{12} + 2D_{66}) \quad (4-20)$$

式 (4-18) 至式 (4-20) 中刚度系数  $D_i$  计算公式为

$$D_{ij} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{2}{3} Q_{ij}(k-1) \times [(AB1(k-1))^3 - (AB1(k))^3] \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4-21)$$

式(4-21)中  $AB1(k)$  的计算公式为

当  $k=1$  时

$$AB1(1) = \frac{c}{2} + t_1 \quad (4-22)$$

当  $k=2, 3, \dots, N+1$  时

$$AB1(k) = \frac{c}{2} + t_1 - \sum_{i=1}^{k-1} t_i \quad (k = 2, 3, \dots, N+1) \quad (4-23)$$

注: 对于复合材料层压板或上下面板相对于蜂窝芯中心线不对称的蜂窝板的  $AB1(k)$  的定义与式(4-22)和式(4-23)不同, 具体表达式见程序, 此处略。

式中,  $\overline{Q}_{ij}(k), i, j = 1, 2, 6$ , 为复合材料面板第  $k$  铺层的偏轴模量, 计算公式为

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11}(k) = & m(k) \times E_L(k) \times \cos^4 \theta(k) + m(k) \times E_T(k) \times \sin^4 \theta(k) + \\ & 2m(k) \times \nu_{TL}(k) \times E_L(k) \times \cos^2 \theta(k) \times \sin^2 \theta(k) + \\ & 4G_{LT}(k) \times \cos^2 \theta(k) \times \sin^2 \theta(k) \end{aligned} \quad (4-24)$$

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{22}(k) = & m(k) \times E_T(k) \times \sin^4 \theta(k) + m(k) \times E_L(k) \times \cos^4 \theta(k) + \\ & 2m(k) \times \nu_{TL}(k) \times E_L(k) \times \cos^2 \theta(k) \times \sin^2 \theta(k) + \\ & 4G_{LT}(k) \times \cos^2 \theta(k) \times \sin^2 \theta(k) \end{aligned} \quad (4-25)$$

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{66}(k) = & m(k) \times E_L(k) \times \cos^2 \theta(k) \sin^2 \theta(k) + m(k) \times E_T(k) \times \\ & \sin^2 \theta(k) \cos^2 \theta(k) - 2m(k) \times \nu_{TL}(k) \times E_L(k) \times \cos^2 \theta(k) \times \\ & \sin^2 \theta(k) + G_{LT}(k) \times (\cos^2 \theta(k) - \sin^2 \theta(k))^2 \end{aligned} \quad (4-26)$$

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{12}(k) = & m(k) \times E_L(k) \times \cos^2 \theta(k) \sin^2 \theta(k) + m(k) \times E_T(k) \times \\ & \sin^2 \theta(k) \cos^2 \theta(k) + m(k) \times \nu_{TL}(k) \times E_L(k) \times \\ & (\cos^4 \theta(k) + \sin^4 \theta(k)) - 4G_{LT}(k) \times \cos^2 \theta(k) \sin^2 \theta(k) \end{aligned} \quad (4-27)$$

式(4-24)和式(4-27)中  $m(k)$  计算公式为

$$m(k) = (1 - \nu_{LT}(k) \times \nu_{TL}(k))^{-1} \quad (4-28)$$

式中:  $E_L(k)$ ——复合材料面板第  $k$  铺层纵向弹性模量;

$E_T(k)$ ——复合材料面板第  $k$  铺层横向弹性模量;

$G_{LT}(k)$ ——复合材料面板第  $k$  铺层剪切弹性模量;

$\nu_{LT}(k)$ ——复合材料面板第  $k$  铺层纵向泊松比;

$\nu_{TL}(k)$ ——复合材料面板第  $k$  铺层横向泊松比;

$\theta(k)$ ——复合材料面板第  $k$  铺层的铺层角;

$t(k)$ ——复合材料面板第  $k$  铺层厚度;

$N$ ——复材面板层数。

(3) 剪切刚度参数  $S_j (j = x, y, xy)$  的计算公式为

$$S_x = \frac{\overline{D}_x^2}{DEN1} \quad (4-29)$$

$$S_y = \frac{\overline{D}_y^2}{DEN2} \quad (4-30)$$

$$S_{x,y} = \frac{\overline{D}_{x,y}^2}{\sqrt{DEN1 \times DEN2}} \quad (4-31)$$

式(4-29)至式(4-31)中的DEN1、DEN2按式(4-32)至式(4-33)计算

$$DEN1 = \sum_{i=1}^N CA(i)^2 \times t(i) / G_c \quad (4-32)$$

$$DEN2 = \sum_{i=1}^N CB(i)^2 \times t(i) / G_c \quad (4-33)$$

式(4-32)至式(4-33)中的CA(i)、CB(i)按式(4-34)至式(4-35)计算

$$CA(i) = \sum_{k=1}^i \overline{Q}_{11}(k) \times AB2(k) \times t(k) \quad (i=1, N, k=1, i) \quad (4-34)$$

$$CB(i) = \sum_{k=1}^i \overline{Q}_{22}(k) \times AB2(k) \times t(k) \quad (i=1, N, k=1, i) \quad (4-35)$$

式中的AB2(k)计算公式为

当k=1时

$$AB2(1) = \frac{c}{2} + t_f - \frac{t_1}{2} \quad (4-36)$$

当k=2, 3, ..., N时

$$AB2(k) = \frac{c}{2} + (t_f - \sum_{i=1}^{k-1} t(i) - 0.5 \times t(k)) \quad (4-37)$$

注：对复合材料层压板或上下面板相对于蜂窝芯中心线不对称的蜂窝板的AB2(k)的定义与式(4-36)和式(4-37)不同，具体表达式见程序，此处略。

#### 4.3.2.3 面板蜂窝格间屈曲 (face dimpling)

蜂窝夹层结构面板蜂窝格间屈曲应力按经验公式(4-38)计算

$$\sigma_{c1} = 2 \frac{E'_f}{\lambda} \left( \frac{t_f}{S_c} \right)^2 \quad (4-38)$$

式中：E'\_f——面板在受压载荷方向上的等效弹性模量；

S\_c——蜂窝芯格内切圆直径。

对正交各向异性面板，E'\_f按式(4-39)计算，λ按式(4-40)计算

$$E'_f = \sqrt{E_{x_f} E_{y_f}} \quad (4-39)$$

$$\lambda = 1 - \nu_{xy} \nu_{yx} \quad (4-40)$$

式中：E\_{x\_f}, E\_{y\_f}——分别为复合材料面板纵向、横向的等效弹性模量；

\nu\_{xy}, \nu\_{yx}——分别为复合材料面板纵向、横向的泊松比。

#### 4.3.2.4 蜂窝夹芯剪切皱折 (core shear failure)

蜂窝夹芯剪切皱折临界应力按式(4-41)至式(4-43)计算

(1) X方向压缩临界应力计算公式为

$$\sigma_{xcr} = \frac{V_x}{1 + \frac{\delta_0 \times B_T \times \sqrt[4]{B / \overline{D}_c}}{c \times \tau_{LTh}}} \quad (4-41)$$

(2) Y 方向压缩临界应力计算公式为

$$\sigma_{y \text{ cr}} = \frac{V_y}{1 + \frac{\delta_0 \times B_8 \times \sqrt[4]{B / \bar{D}_y}}{c \times \tau_{WTb}}} \quad (4-42)$$

(3) 剪切临界应力计算公式为

$$\sigma_{xy \text{ cr}} = \frac{V_{xy}}{1 + \frac{\delta_0 \times \sqrt{B_7 \times B_8} \times \sqrt[4]{B / \bar{D}_{xy}}}{c \times \sqrt{\tau_{LTb} \times \tau_{WTb}}}} \quad (4-43)$$

式中:  $B, \bar{D}_x, \bar{D}_y, \bar{D}_{xy}$  的定义见式 (4-17) 至式 (4-20)。

式 (4-41) 至式 (4-43) 中参数  $B_7, B_8$  计算公式为

$$B_7 = DD_{11}^2 / DDEN1 \quad (4-44)$$

$$B_8 = DD_{22}^2 / DDEN2 \quad (4-45)$$

式中:  $DD_{11}, DD_{22}$ ——夹层板折算弯曲刚度系数, 计算公式为

$$[DD] = [D] \cdot [B][A]^{-1}[B] \quad (4-46)$$

式中:  $[D]$  矩阵系数计算公式见式 (4-21),  $[B]$  矩阵和  $[A]$  矩阵系数计算公式为

$$A_{i,j} = \sum_{k=2}^{N+1} 2\bar{Q}_{i,j}(k-1) \times [AB1(k-1) - AB1(k)] \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4-47)$$

$$B_{i,j} = \sum_{k=2}^{N+1} \bar{Q}_{i,j}(k-1) \times [(AB1(k-1))^2 - (AB1(k))^2] \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4-48)$$

式中:  $AB1(k)$  的计算同式 (4-22) 和式 (4-23)。

上下面板相对于蜂窝芯中心线对称的蜂窝板的  $DDEN1, DDEN2$  的计算公式为

$$DDEN1 = 2DEN1 + CA(N)^2 \times \frac{c}{G_{CLT}} \quad (4-49)$$

$$DDEN2 = 2DEN2 + CB(N)^2 \times \frac{c}{G_{CWT}} \quad (4-50)$$

式中:  $DEN1, DEN2, CA(N)$  和  $CB(N)$  按式 (4-32) 至式 (4-35) 计算。

注: 上下面板相对于蜂窝芯中心线不对称的蜂窝板的  $DDEN1, DDEN2$  的定义与式 (4-49) 和式 (4-50) 不同, 具体表达式见程序, 此处略;

$\delta_0$ ——面板初始波幅;

$\tau_{LTb}$ ——蜂窝芯法向剪切强度,  $LT$  平面内;

$\tau_{WTb}$ ——蜂窝芯法向剪切强度,  $WT$  平面内;

$V_x$ ——取面板总体失稳临界应力、面板单层失稳临界应力、面板失稳临界应力和面板格间失稳临界应力中最小值,  $X$  方向压缩;

$V_y$ ——取面板总体失稳临界应力、面板单层失稳临界应力、面板失稳临界应力和面板格间失稳临界应力中最小值,  $Y$  方向压缩;

$V_{xy}$ ——取面板总体失稳临界应力、面板单层失稳临界应力、面板失稳临界应力和面板格间失稳临界应力中最小值, 剪切。



#### 4.3.2.5 蜂窝夹芯压塌破坏

蜂窝夹芯压塌临界应力计算公式为

$$\sigma_{jcr} = \frac{V_j}{1 + B \frac{\delta_0}{\sigma_{cc}}} \quad (j = x, y, xy) \quad (4-51)$$

式中:  $\sigma_{cc}$ ——蜂窝夹芯压缩破坏强度;

$V_j, \delta_0$ ——定义同 4.3.2.4 节;

$B$ ——定义同 4.3.2.2 节。

#### 4.3.2.6 蜂窝夹芯拉伸破坏

蜂窝夹芯拉伸破坏临界应力计算公式为

$$\sigma_{jcr} = \frac{V_j}{1 + B \frac{\delta_0}{\sigma_{tc}}} \quad (j = x, y, xy) \quad (4-52)$$

式中:  $\sigma_{tc}$ ——蜂窝夹芯拉伸破坏强度;

$V_j, \delta_0$ ——定义同 4.3.2.4 节;

$B$ ——定义同 4.3.2.2 节。

#### 4.3.2.7 面板与蜂窝夹芯界面脱胶失效

面板与蜂窝夹芯界面失效临界应力计算公式为

$$\sigma_{jcr} = \frac{V_j}{1 + B \frac{\delta_0}{\sigma_{bt}}} \quad (j = x, y, xy) \quad (4-53)$$

式中:  $\sigma_{bt}$ ——蜂窝夹芯面板胶接拉脱强度;

$V_j, \delta_0$ ——定义同 4.3.2.4 节;

$B$ ——定义同 4.3.2.2 节。

#### 4.3.3 例题

已知: 面板铺层  $[0/90/0]$ ; 单层材料性能为:  $E_{11} = 142.0\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 9.8\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 4.3\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.34$ ; 单层厚度  $t = 0.125\text{mm}$ ; 蜂窝夹芯厚度  $c = 5\text{mm}$ ; 蜂窝格子边长尺寸  $b = 3\text{mm}$ 。求面板的蜂窝芯格间屈曲应力。

解:

(1) 计算面板有效弹性模量及泊松比, 得

$$E_{x_f} = 98.5\text{GPa}, E_{y_f} = 54.2\text{GPa}, \nu_{xy} = 0.034, \nu_{yx} = 0.0619$$

(2)  $E'_f = \sqrt{E_{x_f} E_{y_f}} = \sqrt{98.5 \times 54.2} = 73.0664\text{GPa}$

(3)  $\lambda = 1 - \nu_{xy} \nu_{yx} = 1 - 0.0619 \times 0.034 = 0.9979$

(4) 蜂窝芯格间屈曲应力

$$S_c = \sqrt{3b}$$

$$\sigma_{cr} = 2 \frac{E'_f}{\lambda} \left( \frac{t_f}{S_c} \right)^2 = 2 \times \frac{73066.4}{0.9979} \times \left( \frac{0.375}{3 \times \sqrt{3}} \right)^2 = 763\text{MPa}$$

## 4.4 复合材料蜂窝夹层结构总体稳定性分析的有限元法

总体稳定分析中将蜂窝夹层板作为整体考虑，建议采用有限元法，用 MSC/NASTRAN 程序计算。下面介绍使用方法和注意事项。

### 4.4.1 元素的选择

在蜂窝夹层结构有限元分析中，将面板与蜂窝芯子分开处理，面板用板元素，蜂窝芯用“特殊体元”模拟。在节点处，蜂窝芯子体元素与面板板元素的转动自由度不协调，这种不协调对结果无影响。

#### 4.4.1.1 “特殊体元”特征描述

在  $L, W, T$  蜂窝芯子坐标系中（见图 4-1），体元的应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_W \\ \sigma_T \\ \tau_{LW} \\ \tau_{WT} \\ \tau_{TL} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & & & & & & \\ G_{21} & G_{22} & & & & & \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & & & & \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & & & \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & & \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_W \\ \epsilon_T \\ \epsilon_{LW} \\ \epsilon_{WT} \\ \epsilon_{TL} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_L \\ A_W \\ A_T \\ A_{LW} \\ A_{WT} \\ A_{TL} \end{Bmatrix} \Delta T \quad (4-54)$$

式中： $[A_i]$  ——热膨胀系数向量；

$\Delta T$  ——温度差。

刚度系数  $G_{ij}$  中脚标 1~6 分别对应于材料轴  $L, W, T, LW, WT, TL$  方向。在“特殊体元”中， $G_{33} = E_{cz}$ ， $G_{55} = G_{WT}$ ， $G_{66} = G_{LT}$  分别为蜂窝芯子的压缩模量及两个方向的剪切模量，其他  $G_{ij} = 0$ 。为防止数值运算溢出， $G_{11}, G_{22}, G_{44}$  均取值为  $G_{33}, G_{55}, G_{66}$  中最小值的 1%。

$$G_{11} = G_{22} = G_{44} = \min(G_{33}, G_{55}, G_{66}) \times 1\% \quad (4-55)$$

当坐标轴为任意的  $X, Y, Z$  轴情况（即跟  $L, W, T$  不重合时），方程（4-54）应采用张量运算法则对刚度系数进行转换。

#### 4.4.1.2 MSC/NASTRAN 中的元素

面板用 QUAD4 元素及 TRIA3 元素，蜂窝芯子用六面体元 HEXA、五面体元 PENTA 或四面体元 TETRA。对于平面投影为矩形的夹层板，仅用 QUAD4 和 HEXA 元素即可，这同样适用于夹层曲板。

#### 4.4.1.3 元素材料及特性卡的使用

面板为复合材料层压板时，在 MSC/NASTRAN 中，元素性质卡用 PCOMP 卡，与之对应的材料卡用 MAT8 卡。对于蜂窝芯子体元，材料卡用 MAT9，MAT9 中  $G_{ij}$  的为方程（4-54）中规定的值。值得注意的是，在使用元素性质卡及材料卡时，一般要定义材料坐标

系，例如，在 MAT9 卡中确定的  $G_{ij}$  是在坐标系  $LWT$  中的弹性模量，有限元模型网格分割时体元取向是任意的，必须通过 PSOLID 卡中的 CORDM 域定义材料坐标系，使之建立 MAT9 与坐标网格的取向关系，因此，“特殊体元”输出的应力分量（或应变分量），是相对于材料坐标系中的坐标轴中的分量，在复合材料面板中一般也需定义材料坐标系。

#### 4.4.2 有限元分析概述

##### 4.4.2.1 稳定性校核准则

对如图 4-2 所示全高度蜂窝夹层结构，在一般分布的载荷  $P(x, y) = f(x, y)$  作用下进行稳定性校核时，设此结构在载荷  $P(x, y)$  作用下的最小特征值为  $\lambda_1$ ，其稳定性的安全裕度可按式(4-56)计算：

$$MS = \lambda_1 - 1.0 \quad (4-56)$$

通过失稳的模式可确定失稳部位。

##### 4.4.2.2 有限元网格划分原则

(1) 节点布置在面板中面上；

(2) 对于全高度蜂窝夹层结构，当受反对称或不对称载荷时，芯子“特殊体元”从上到下最好用“多层”或“双层”分割，要能够反映面板的失稳模态；

(3) 对于面内载荷（上下对称）的总体屈曲分析，芯子可以“单层”分割；

(4) 稳定分析中分割网点数量要能反映失稳模态。

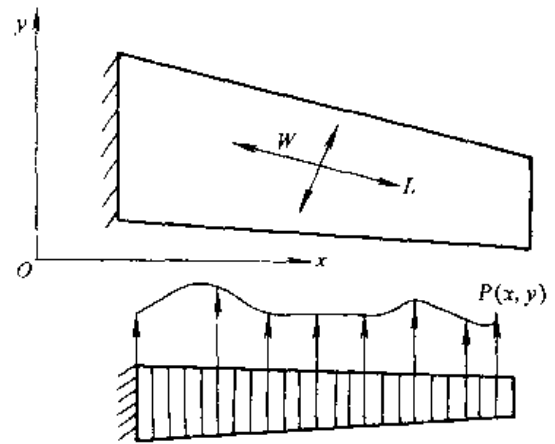


图 4-2 夹层结构及载荷  
蜂窝芯子  $L, W$  与坐标  $x, y$  轴不一致

##### 4.4.2.3 边界条件模拟

边界条件分为简支、固支、自由及弹性支持，以图 4-3 的矩形蜂窝夹层板为例，在上、下面板上：

###### (1) 四边简支

边界： $x=0, a \quad y=0, b$  时  $w=0$

点： $x=0 \quad y=0$  时  $u=v=0$

点： $x=a \quad y=0, b$  时  $v=0$

###### (2) 四边固支

边界： $x=0, a$  时  $w=\theta_y=0$

边界： $y=0, b$  时  $w=\theta_x=0$

点： $x=0 \quad y=0$  时  $u=v=0$

点： $x=a \quad y=0$  时  $v=0$

(3) 其他边界条件（如边界不同时为面支或简支）类似处理；

(4) 弹性支持：在面板各边界点加上弹簧元（CLEAS2）表示弹性支持。

#### 4.4.2.4 载荷施加

将分布载荷分配到面板的各节点上，以图 4-3 中的矩形蜂窝夹层板为例，边上承受均布的双向轴压及剪切载荷  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  (单位长度上的力)，图 4-4 为施加于有限元模型上的节点载荷。

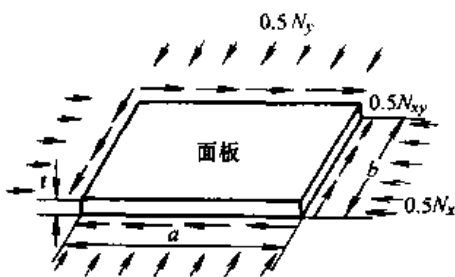
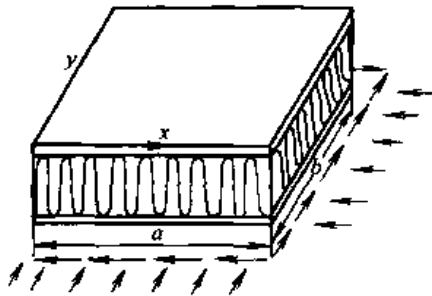


图 4-3 矩形夹层板

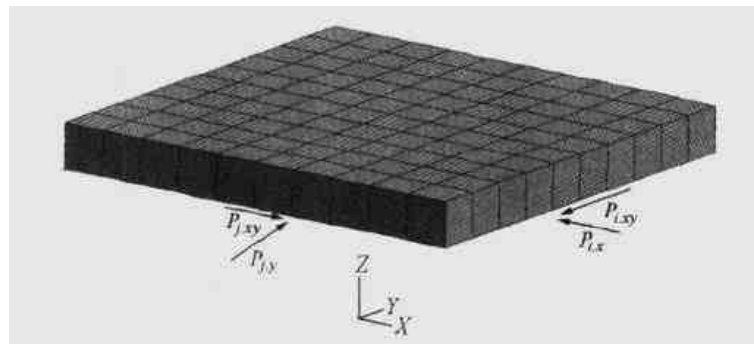


图 4-4 有限元模型节点载荷示意图

分到上、下面板边界节点上的载荷应满足式 (4-57)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=i_0} P_{i,x} = 0.5bN_x \\ \sum_{j=1}^{j=j_0} P_{j,y} = 0.5aN_y \\ \sum_{i=1}^{i=i_0} \sum_{j=1}^{j=j_0} P_{i,xy} = 0.5bN_{xy} \\ \sum_{j=1}^{j=j_0} P_{j,xy} = 0.5aN_{xy} \end{cases} \quad (4-57)$$

若边界上  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  分布不均匀时，分配到各节点上的载荷不等。

#### 4.4.2.5 模型施加载荷的处理技巧

采用有限元前后置处理软件 MSC/PATRAN 对有限元模型施加边界载荷时，可选择下述三种方法：

(1) 方法 1 如果蜂窝夹层板结构有限元模型只有一层体元，受载边可用 PLOAD4 卡施加均布压力。例如双轴压，可在 X 方向施加压力  $\sigma_x$  (MPa)；在 Y 方向施加值为  $\sigma_x \times R_y$ ， $R_y$  为 Y 方向与 X 方向的载荷比  $R_y = \sigma_y / \sigma_x$ 。夹层板的失稳临界载荷计算公式为

$$N_{xcr} = \lambda_1 \times \sigma_x \times (c + t_f) \quad (\text{N/mm}) \quad (4-58)$$

式中： $\lambda_1$  —— 稳定计算的最小特征值，由有限元线性屈曲分析得到。

(2) 方法 2 在上下面板边界上建立虚梁元素, 梁元素之间采用铰接, 在梁元素上通过 PLOAD1 卡实现分布线载荷。例如在上、下面板 X 方向施加相同的分布线载荷  $N_x$  (N/mm), 可为均布也可为非均布线载荷; 在 Y 方向施加值为  $N_x \times R_y$  的载荷,  $R_y$  为 Y 方向与 X 方向的载荷比  $R_y = N_y/N_x$ 。剪切载荷按  $N_x \times R_{xy}$  值施加,  $R_{xy}$  为剪切载荷比  $R_{xy} = N_{xy}/N_x$ 。夹层板的失稳临界载荷计算公式为

$$N_{xcr} = 2 \times N_x \times \lambda_1 \text{ (N/mm)} \quad (4-59)$$

式中:  $\lambda_1$  ——稳定计算的最小特征值, 由有限元线性屈曲分析得到。

(3) 方法 3 根据载荷边界条件, 按照式 (4-57), 用 FORCE 卡以节点载荷形式施加到边界上去。

#### 4.4.3 例题

##### 4.4.3.1 蜂窝夹层平板在轴压下的稳定性计算

蜂窝夹层矩形平板的几何尺寸: 板长  $a = 228\text{mm}$ , 板宽  $b = 228\text{mm}$ , 蜂窝芯厚度  $c = 5\text{mm}$ 。四边简支, 受单向轴压  $N_x$ , 求屈曲载荷  $N_{xcr}$  (N/mm)。

考虑了三种不同面板: 各向同性铝面板、正交各向异性 CFRP 面板和各向异性 CFRP 面板 (面板参数见表 4-2)。

铝面板材料性能:  $E = 67.6\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.33$ ;

复合材料面板的单层材料性能:  $E_{11} = 142.0\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 9.8\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 4.3\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.34$ ;

蜂窝夹芯的材料性能:  $G_{czz} = 0.06\text{GPa}$ ,  $G_{cxy} = 0.0352\text{GPa}$ ,  $E_{cz} = 0.298\text{GPa}$ 。

表 4-2 面板铺层特性

算例	面板材料	面板厚度 (mm)	单层厚度 (mm)	铺层	附注
1	铝	0.65	/	/	面板各向同性, 夹芯 $G_{cxy} = G_{czz} = 60\text{MPa}$
2	铝	0.65	/	/	面板各向同性, 夹芯正交各向异性
3	CFRP	0.375	0.125	{0/90/0}	面板正交各向异性, 夹芯正交各向异性
4	CFRP	0.375	0.125	[45/0/45]	面板各向异性, 夹芯正交各向异性

表 4-3 给出了各种方法的计算值与试验值的比较。有限元模型如图 4-5 所示, 上下面板采用 QUAD4 元素, 蜂窝芯采用 HEXA 六面体元素, 单层网格。

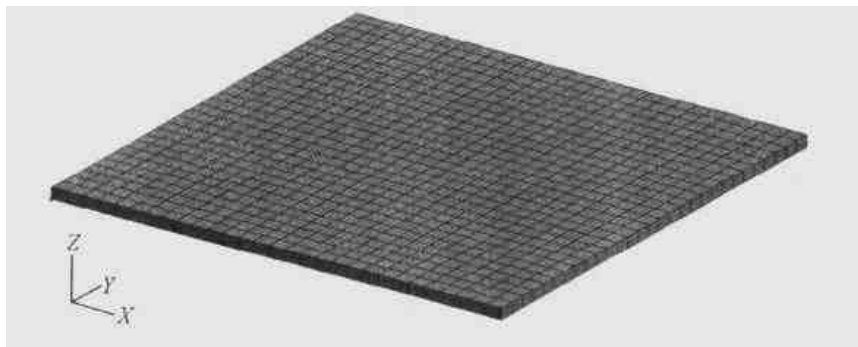


图 4-5 有限元模型

表 4-3 计算结果与试验结果比较

N/mm

计算方法	算例 1	算例 2	算例 3	算例 4
有限元计算值	283.8	238.4	132.4	127.2
BUCKLSCP [3]	319.6	296.1	137.3	/
工程曲线法 [1]	309.4	272.1	241.3	/
实验临界载荷 [2]	/	234	185	161

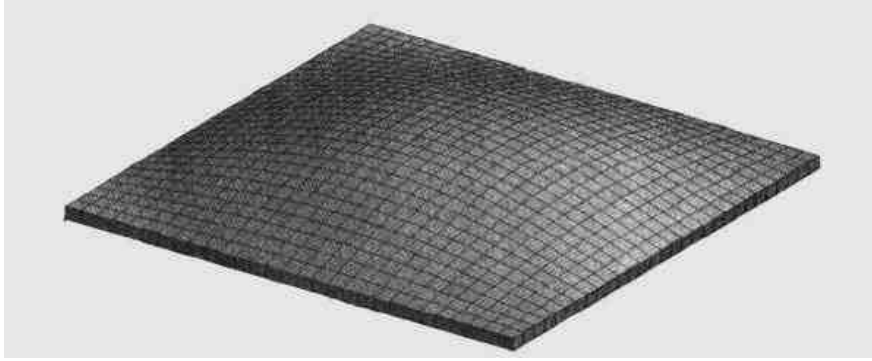


图 4-6 算例 2 的失稳模态图

#### 4.4.3.2 蜂窝夹层平板在剪切载荷下的稳定性计算

蜂窝夹层板的几何尺寸、面板和夹芯参数及材料性能同 4.4.3.1 节中的算例 3。四边简支，承受剪切载荷  $N_{xy}$ ，求屈曲载荷  $N_{xycr}$ 。

采用有限元法进行计算，有限元模型同 4.4.3.1 节中的轴压情况，节点载荷按 4.4.2.5 节中的方法 3 施加单位载荷，图 4-7 为有限元模型网格及边界节点载荷示意图。

计算得到的特征值  $\lambda$  为 714.46，夹层板剪切临界载荷为

$$N_{xycr} = \lambda \times \frac{2}{d} = \frac{2 \times 714.46}{228} = 181.5 \text{ N/mm}$$

式中： $d$ ——节点间距（节点均布）。

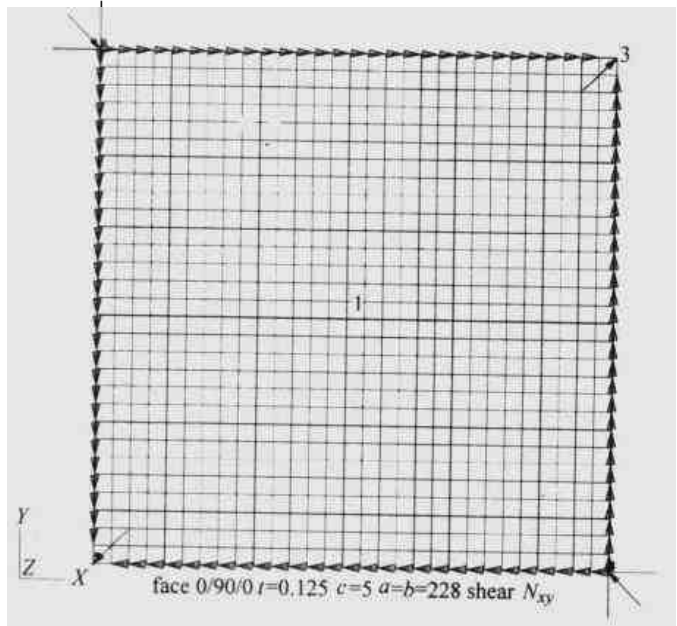


图 4-7 有限元模型施加边界节点载荷

图 4-8 为蜂窝夹层板的剪切总体失稳模态图。

#### 4.4.3.3 蜂窝夹层平板在双轴压下的稳定性计算

蜂窝夹层板的几何尺寸、面板和夹芯参数及材料性能同 4.4.3.1 节中的算例 3。四边简支，承受双轴压载荷  $N_x$  和  $N_y$ ，载荷比  $R_y = N_y/N_x = 0.5$ ，求屈曲载荷。

采用有限元法进行计算，有限元模型同 4.4.3.1 节中的轴压情况，节点载荷按 4.4.2.5 节中的方法 1 施加单位载荷。计算得到的特征值为 15.529，蜂窝夹层平板双轴压临界载荷为

$$N_{xcr} = \lambda_1 \times (c + t_f) = 15.529 \times (5 + 0.375) = 83.5 \text{ N/mm}$$

图 4-9 为蜂窝夹层板在双轴压下的总体失稳模态图。

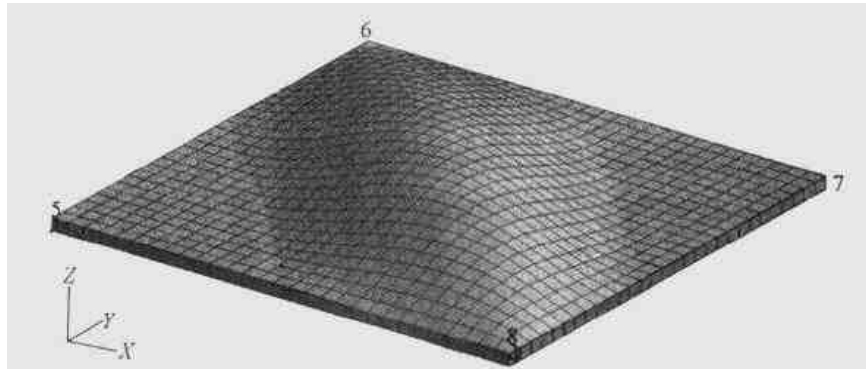


图 4-8 剪切总体失稳模态图

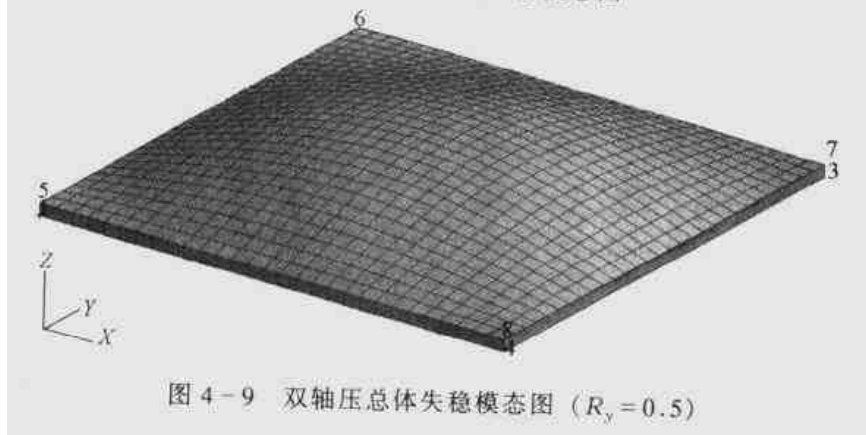


图 4-9 双轴压总体失稳模态图 ( $R_y=0.5$ )

#### 4.4.3.4 蜂窝夹层平板在压剪复合载荷下的稳定性计算

蜂窝夹层板的几何尺寸、面板和夹芯参数及材料性能同 4.4.3.1 节中的算例 3。四边简支，承受压缩和剪切复合载荷  $N_x$  和  $N_{xy}$ ，载荷比  $R_{xy} = N_{xy}/N_x = 0.5$ ，求屈曲载荷。

采用有限元法进行计算，有限元模型同 4.4.3.1 节中的轴压情况，节点载荷按 4.4.2.5 节中的方法 3 施加单位载荷。计算得到的特征值为 445.66，夹层板双轴压临界载荷为

$$N_{xcr} = \lambda \times \frac{2}{d} = \frac{2 \times 445.66}{228} = 113.4 \text{ N/mm}$$

$$N_{yycr} = 56.7 \text{ N/mm}$$

图 4-10 为蜂窝夹层板在压剪复合载荷下的总体失稳模态图。

#### 4.4.3.5 复合材料蜂窝夹层曲板的稳定性计算

复合材料蜂窝夹层曲板的有限元稳定性分析中的建模、边界条件的处理、载荷的施加方法与蜂窝夹层平板类似。仅给出一蜂窝夹层圆柱曲板在单轴压下的稳定性计算算例。

如图 4-11 所示，蜂窝夹层圆柱曲板的几何尺寸为

$R = 305 \text{ mm}$ ， $a = 300 \text{ mm}$ ， $b = 239.5 \text{ mm}$ ， $c = 10 \text{ mm}$ ，面板厚度  $t_f = 0.5 \text{ mm}$ ；

面板材料为铝合金，材料性能为  $E = 67.6 \text{ GPa}$ ， $\nu = 0.33$ ；

蜂窝夹芯材料性能为  $G_{czz} = 0.06 \text{ GPa}$ ， $G_{cyz} = 0.035 \text{ GPa}$ ， $E_c = 0.298 \text{ GPa}$ ；

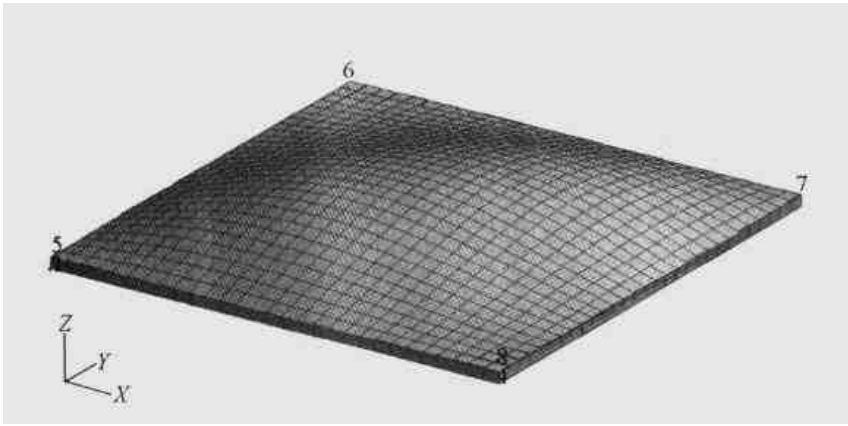


图 4-10 压剪复合总体失稳模态图 ( $R_{xy}=0.5$ )

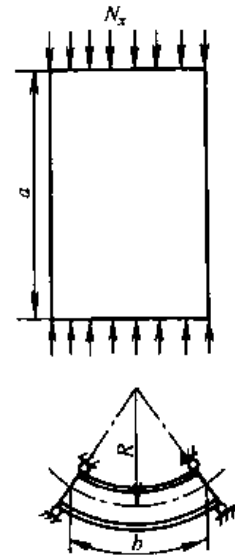


图 4-11 蜂窝夹层圆柱曲板

四边简支，受轴向压缩  $N_x$ ，求屈曲载荷  $N_{xcr}$  (N/mm)。

采用有限元法进行计算，有限元模型如图 4-12 所示，节点载荷按 4.4.2.5 节中的方法 1 施加均布单位载荷，计算得到的特征值为 44.517，蜂窝夹层曲板的屈曲载荷为：

$$N_{xcr} = \lambda(t_c + t_f) = 44.517 \times (9.5 + 0.5) = 445.17 \text{ N/mm}$$

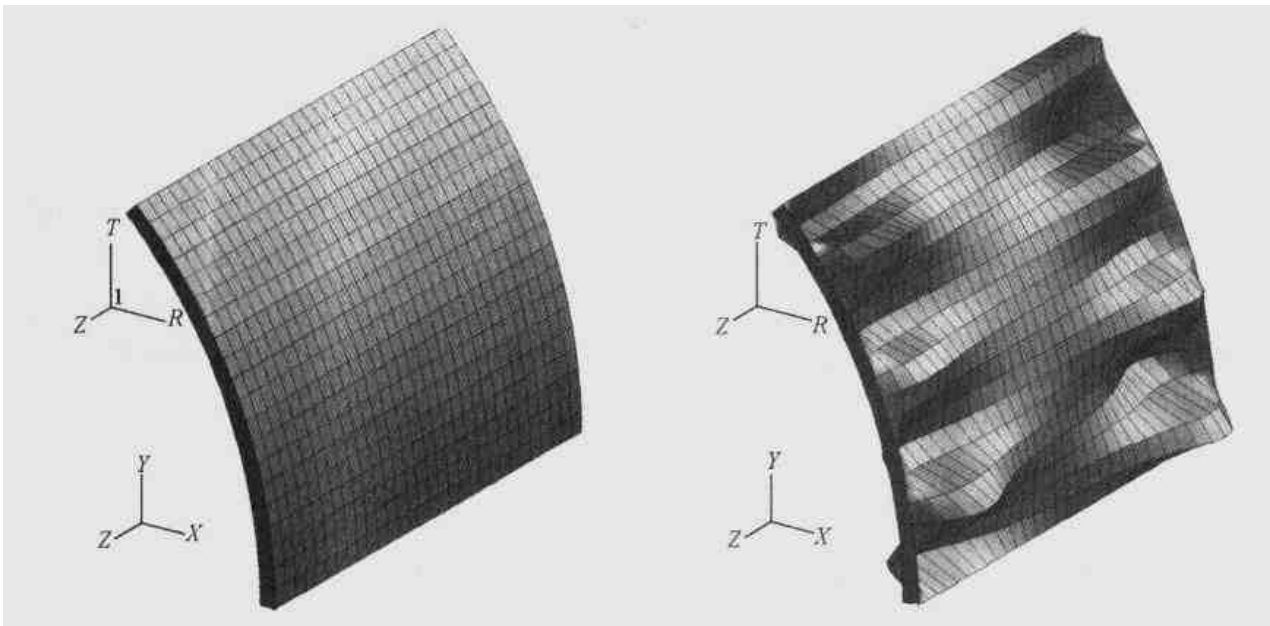


图 4-12 蜂窝夹层圆柱曲板有限元模型

图 4-13 蜂窝夹层圆柱曲板单轴压总体失稳模态图

#### 4.5 复合材料蜂窝夹层板稳定性计算的工程方法及 BUCKLSCP 程序介绍

本章介绍复合材料蜂窝夹层平板的总体稳定性工程计算方法，以及按此方法编制的 BUCKLSCP 程序。



#### 4.5.1 工程计算方法

##### 4.5.1.1 蜂窝夹层平板在轴向压缩载荷作用下的稳定性计算方法

蜂窝夹层平板在轴压  $N_x$  下的屈曲载荷为

$$N_{\text{rcr}} = \frac{\pi^2 (DD_{11} DD_{22})^{1/2}}{b^2} K \quad (4-60)$$

式中:  $N_{\text{rcr}}$ ——单位宽度上的屈曲轴压力;

$a, b$ ——分别为板的长度和宽度(加载边);

$DD_{11}, DD_{22}$ ——分别为复合材料蜂窝夹层板的折算弯曲刚度系数,上下面板相对于蜂窝芯中心线对称的蜂窝夹层板,按公式(4-46)计算;

$K$ ——屈曲系数,是边界条件、刚度及屈曲半波数的函数,计算公式为

$$K(m) = \frac{A_1 + A_2}{1 + A_3 + A_4} \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (4-61)$$

取  $m = 1, 2, \dots, N$ , 由式(4-61)计算  $K(m)$ , 其中的最小值  $K(j)$  即为临界屈曲系数

$$K = \min(K(1), K(2), \dots, K(j), \dots, K(N)) = K(j) \quad (4-62)$$

式(4-61)中  $A_1, A_2, A_3, A_4$  的计算公式为

$$A_1 = B_1 \times C_1 + 2B_2 \times C_2 + \frac{C_3}{B_1} \quad (4-63)$$

取

$$A_5 = C_1 \times C_3 - (B_2 \times C_2)^2 + B_3 \times C_2 \times A_1 \quad (4-64)$$

得

$$A_2 = A_5 \times \left( \frac{V_2}{C_4} + V_1 \right) \quad (4-65)$$

$$A_3 = \frac{V_2 \times (B_1 \times C_1 + B_3 \times C_2)}{C_4} + V_1 \times \left( \frac{C_3}{B_1} + B_3 \times C_2 \right) \quad (4-66)$$

$$A_4 = \frac{V_1 \times V_2 \times A_5}{C_4} \quad (4-67)$$

式(4-63)、式(4-64)和式(4-66)中  $B_1, B_2, B_3$  计算公式为

$$B_1 = \sqrt{\frac{DD_{22}}{DD_{11}}} \quad (4-68)$$

取

$$U_{12} = \frac{DD_{12}}{DD_{22}} \quad (4-69)$$

$$B_6 = DD_{22} \times U_{12} + 2 \times DD_{66} \quad (4-70)$$

得

$$B_2 = \frac{B_6}{\sqrt{DD_{22} \times DD_{11}}} \quad (4-71)$$

$$B_3 = \frac{DD_{66}}{\sqrt{DD_{22} \times DD_{11}}} \quad (4-72)$$

式(4-65)、式(4-66)和式(4-67)中  $V_1$ 、 $V_2$  的计算公式为

$$V_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{DD_{11} \times DD_{22}}}{b^2 \times B_7} \quad (4-73)$$

$$V_2 = \frac{\pi^2 \sqrt{DD_{11} \times DD_{22}}}{b^2 \times B_8} \quad (4-74)$$

式(4-73)和式(4-74)中  $B_7$  和  $B_8$  的计算公式同式(4-44)和式(4-45)。

式(4-63)至式(4-67)中  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  系数与板的边界条件有关, 定义见式(4-75)至式(4-93)。

(1) 四边简支时  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  的计算公式为

$$C_1 = C_4 = \frac{a^2}{m^2 b^2} \quad (4-75)$$

$$C_2 = 1 \quad (4-76)$$

$$C_3 = \frac{m^2 b^2}{a^2} \quad (4-77)$$

式中:  $m$  — 为板沿长度( $x$ )方向的屈曲半波数(下同)。

(2) 承载边简支, 非承载边固支时  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  的计算公式为

$$C_1 = \frac{16a^2}{3m^2 b^2} \quad (4-78)$$

$$C_2 = \frac{4}{3} \quad (4-79)$$

$$C_3 = \frac{m^2 b^2}{a^2} \quad (4-80)$$

$$C_4 = \frac{4a^2}{3m^2 b^2} \quad (4-81)$$

(3) 承载边固支, 非承载边简支时  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  的计算公式为

当  $m=1$  时,

$$C_1 = C_4 = \frac{3a^2}{4b^2} \quad (4-82)$$

$$C_2 = 1 \quad (4-83)$$

$$C_3 = \frac{4b^2}{a^2} \quad (4-84)$$

当  $m \geq 2$  时,

$$C_1 = C_4 = \frac{a^2}{(m^2 + 1)b^2} \quad (4-85)$$

$$C_2 = 1 \quad (4-86)$$

$$C_3 = \frac{m^4 + 6m^2 + 1}{m^2 + 1} \frac{b^2}{a^2} \quad (4-87)$$

(4) 四边固支时  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  的计算公式为

当  $m = 1$  时,

$$C_1 = 4C_4 = \frac{4a^2}{b^2} \quad (4-88)$$

$$C_2 = \frac{4}{3} \quad (4-89)$$

$$C_3 = \frac{4b^2}{a^2} \quad (4-90)$$

当  $m \geq 2$  时,

$$C_1 = 4C_4 = \frac{16a^2}{3(m^2 + 1)b^2} \quad (4-91)$$

$$C_2 = \frac{4}{3} \quad (4-92)$$

$$C_3 = \frac{m^4 + 6m^2 + 1}{m^2 + 1} \frac{b^2}{a^2} \quad (4-93)$$

#### 4.5.1.2 蜂窝夹层平板在剪切载荷作用下的稳定性计算方法

蜂窝夹层平板在剪切载荷  $N_{xy}$  下的剪切屈曲载荷为

$$N_{xycr} = \frac{4}{b^2} \frac{(DD_{11}DD_{22}^3)^{1/4}}{1 + 4\left(\frac{K'}{K} - 1\right)} K_s \quad (4-94)$$

式中:  $N_{xycr}$ ——单位宽度上的屈曲剪力;

$K$ ——屈曲系数, 计算公式同式 (4-61), 但系数  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  的取值不同, 具体数据见程序。

$K'$  用与计算  $K$  同样的方法取值, 但忽略垂直于面板方向的剪切变形 (假设垂直于面板方向的剪切刚度无限大), 此时  $K' = A_1$ , 计算公式为式 (4-63)。

$K_s$ ——剪切屈曲系数, 由曲线拟合法得到, 并满足关系式

$$\frac{1}{r} = \frac{b}{a} \left( \frac{DD_{11}}{DD_{22}} \right)^{1/4} \leq 1 \quad (4-95)$$

$$B_2 = (DD_{22}U_{12} + 2DD_{66}) / (DD_{11}DD_{22})^{1/2} \leq 1 \quad (4-96)$$

$K_s$  的计算由曲线拟合方程得到, 该方程是参数  $B_2$  和  $r$  的函数。

对于  $B_2 > 1$ , 正交各向异性矩形板的剪切屈曲没有显式解。在这种情况下, 需参照无限长板的解。无限长正交各向异性板受面内剪切载荷时的屈曲载荷计算公式为

$$N_{xycr} = \frac{4D \times CC \times \sqrt{DD_{22} \times B_6}}{b^2} \quad (4-97)$$

式中参数的定义如下

$$CC = \frac{B_8}{F_1 + B_8} \quad (4-98)$$

$$F_1 = \frac{4\pi^2 DD_{22}}{b^2} \quad (4-99)$$

在不同的边界条件下, 参数  $D$  的计算表达式不一样, 式 (4-100) 为四边简支边界条

件下的表达式

$$D = 11.7 + \frac{0.532}{B_2} + \frac{0.938}{B_2^2} \quad (4-100)$$

式(4-97)中的其他引用参数同前述公式的定义。

#### 4.5.1.3 蜂窝夹层平板在压剪复合载荷作用下的稳定性计算方法

蜂窝夹层平板在双向轴压和剪切载荷  $N_x$ 、 $N_y$  和  $N_{xy}$  复合作用下的屈曲载荷  $N_{xcr}$  应满足如下相关方程

$$\left(\frac{1 + R_y C_4}{K''}\right)_{\max} \times \frac{b^2}{\pi^2 (DD_{11} DD_{22})^{1/2}} = \frac{1}{N_{xcr}} - \left(\frac{R_{xy}}{N_{xycr}^0}\right)^2 \times N_{xcr} \quad (4-101)$$

式中： $R_y$ ——载荷比， $R_y = \frac{N_y}{N_x}$ ；

$R_{xy}$ ——载荷比， $R_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_x}$ ；

$N_{xycr}^0$ ——为蜂窝夹层平板在剪力  $N_{xy}$  单独作用下的剪切屈曲载荷，由式(4-94)计算得到；

$K''$ ——屈曲系数，计算公式同式(4-61)，但系数  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  的取值根据具体情况确定，具体取值见程序。

求解方程(4-101)即可得到压剪复合载荷下的临界载荷  $N_{xcr}$  和  $N_{ycr} = R_y N_{xcr}$ ， $N_{xycr} = R_{xy} N_{xcr}$ 。

这个相关公式在  $r < 2$  时(见式(4-95))可给出合理的精确结果，而在  $r > 2$  时将给出偏于保守的结果。

### 4.5.2 BUCKLSCP 程序简介

#### 4.5.2.1 BUCKLSCP 程序的适用范围

(1) 适用于正交各向异性复合材料面板的蜂窝夹层板的弹性总体稳定性分析(按4.5.1节的工程计算方法)，也适用于正交各向异性板的弹性总体稳定性分析；

(2) 可对蜂窝夹层板进行局部失效分析(按4.3.2节的方法)。

在总体稳定性分析中，忽略了蜂窝芯的而内刚度，可考虑法向剪应变以及膜应力与弯曲应力的耦合项。

载荷可为板面内单轴压、双轴压和剪切的任意组合，载荷作用于板的正交轴方向。板的边界条件可为：四边简支、四边固支、两边简支和两边固支。

#### 4.5.2.2 BUCKLSCP 程序参数的输入格式

参数输入文件采用卡片式的输入方式，共八张输入卡，本节对输入卡片做简要说明：

(1) 卡片1为标题(100个以内的字符串)。

(2) 卡片2为选择分析内容。

格式： INDEX1, INDEX2, INDEX3, INDEX4, INDEX5

变量描述：

INDEX1: 板的类型 (0-层压板; 1-对称面板的蜂窝夹层板; 2-不对称面板的蜂窝夹层板);

INDEX2: 载荷情况 (0-压缩载荷; 1-剪切; 2-复合载荷 (压缩和剪切));

INDEX3: 边界条件 (0-四边简支; 1-四边固支; 2-加载边简支, 其余固支; 3-加载边固支, 其余简支);

INDEX4: 稳定性分析类型请求 (0-计算压和剪; 1-计算压或剪; 根据 INDEX2 定);

INDEX5: 局部稳定性分析请求 (0-计算局部稳定性; 1-不计算局部稳定性)。

(3) 卡片 3 为几何及载荷描述。

格式: N, B, A, LALB, LSLB

变量描述:

N: 总的铺层数 (小于等于 400 层);

B: 板宽;

A: 板长;

LALB: A 边与 B 边轴压载荷比;

LSLB: 剪切载荷与 B 边压缩载荷之比。

(4) 卡片 4 和卡片 5 为材料编号 1 和材料编号 2 的力学性能 (如果不是同一种材料)。

格式: E11T, E11C, E22T, E22C, G12, G13, NU12T, NU12C

变量描述:

E11T: 纵轴向拉伸模量;

E11C: 纵轴向压缩模量;

E22T: 横轴向拉伸模量;

E22C: 横轴向压缩模量;

G12: 面内剪切模量;

G13: 法向剪切模量;

NU12T: 拉伸泊松比;

NU12C: 压缩泊松比。

(5) 卡片 6 为铺层特性。

格式: MN, THICK, TETA

变量描述:

MN: 复合材料类型 (对应卡片 4 或卡片 5 中材料编号 1 或 2);

THICK: 单层厚度;

TETA: 铺层角。

(6) 卡片 7 为蜂窝芯的材料力学性能。

格式: TC, GC13, GC23, N1, N2

变量描述:

TC: 蜂窝芯厚度;

GC13: 平行于 X 轴的蜂窝芯法向剪切模量;

GC23: 平行于 Y 轴的蜂窝芯法向剪切模量;

N1: 上面板的铺层数;

N2: 下面板的铺层数。

(7) 卡片 8 为局部稳定性计算所需参数, 包括蜂窝芯其他力学数据、蜂窝芯其他几何数据和统计数据。

格式: BBCF, IPW, HCCS, HCM, HTM, HCS, HTS, HSSNB, HSSPB, HCFB, LCS

变量描述:

BBCF: “B”修正系数, 程序中取值 0.754;

IPW: 板初始波幅;

HCCS: 蜂窝格子尺寸;

HCM: 蜂窝芯压缩模量;

HTM: 蜂窝芯拉伸模量;

HCS: 蜂窝芯压缩强度;

HTS: 蜂窝芯拉伸强度;

HSSNB: 蜂窝芯法向剪切强度 (平行 X 轴);

HSSPB: 蜂窝芯法向剪切强度 (平行 Y 轴);

HCFB: 蜂窝芯与面板胶接拉伸强度;

LCS: 面板单层压缩强度。

#### 4.5.3 例题

用 BUCKLSCP 程序对 4.4.3.1 节单轴压算例 3 中的蜂窝夹层平板在单轴压、剪切、双轴压和压剪复合载荷下的稳定性进行了计算, 采用工程计算方法 (BUCKLSCP 程序) 计算的屈曲载荷与采用有限元方法 (MSC/NASTRAN 程序) 计算的屈曲载荷比较见表 4-4。工程计算方法和有限元方法的计算结果基本一致。

表 4-4 结果比较

N/mm

计算方法	单轴压	剪切	双轴压	压剪复合
BUCKLSCP	137.3	185.3	91.5	122.4
NASTRAN	132.4	181.5	83.5	113.4

#### 参考文献

- [1] 李顺林, 复合材料工作手册. 北京: 航空工业出版社, 1988
- [2] Pearce T R A, Webber J P H. Experimental Buckling Loads of Sandwich Panels with Carbon Fiber Faceplates. Aeronautical Quarterly, 1972
- [3] BUCKLSCP 用户手册. 611 所科研资料, 1987

## 第 5 章 复合材料结构后屈曲分析与设计

### 5.1 后屈曲研究概况、意义和研究方法

关于板（壳）结构的屈曲研究已有近百年的历史，而人们开始认识并研究它们的后屈曲行为还是近二三十年的事情。20 世纪 70 年代初期，C.Y.Chia、A.W.Leissa，等将承受轴压的简支薄板在初始屈曲之后还能继续承载的能力称为后屈曲（Post-buckling）行为或后屈曲强度。从此，对结构后屈曲行为的研究蓬勃发展，其目的都是为了如何充分利用结构的后屈曲强度，以减轻结构重量，提高结构效率。随着研究工作的深入，后屈曲的概念和理论，特别是求解结构后屈曲路径的非线性有限元方法得到了很快的发展。20 世纪 80 年代，世界上一些航空发达国家已经开始将复合材料结构的后屈曲理论应用于飞机结构件的分析和设计，但是直到今天，后屈曲分析理论及其应用技术仍不是很成熟，在飞机结构稳定性设计方面有关后屈曲分析与设计的指导性文件和资料还比较少。

#### 5.1.1 屈曲、后屈曲和破坏的概念

过去，设计人员习惯于把线性理论下结构的分支型失稳称为屈曲。然而，工程实际中分支屈曲现象实为罕见，严格地说，它仅出现在某些无几何缺陷的理想结构和受力不偏心的情况，如受轴压的直杆和光板，以及在均匀外压作用下的完整空球壳等情况。因为有一些结构的屈曲状态接近于分支屈曲，因此线性分支屈曲理论还能说明和解决一些实际问题。随着工程技术的发展，人们发现，四边简支薄板承受面内轴压的能力可大大超过线性屈曲载荷，而在均匀轴压作用下的圆柱壳，却在几分之一线性屈曲载荷下就突然破坏了。对此种种现象，线性理论无法解释，因此，人们不得不求助于非线性屈曲理论。近二十年来，以几何非线性理论为基础的屈曲和后屈曲理论，得到了迅速发展，首先是对屈曲的含义有了比较完整和合乎实际的认识，线性屈曲理论认为结构总是在未受载的初始位形（configuration）上达到平衡的，当屈曲产生时，结构的位形从一种平衡状态突然到达另一种平衡状态。图 5-1 (a) 中  $OaE$  为受压平板的线性屈曲示意图。 $\lambda$  和  $q$  分别为载荷因子和横向位移（挠度）分量。 $a$  点为由线性理论得到的分支屈曲点（也称为初始屈曲点），相应的屈曲载荷因子  $\lambda_{cr}$  由线性特征方程确定。这时，板的压缩刚度突然下降，从平板突然跳到曲板（壳）的平衡状态，随之板的挠曲率无限增大而破坏。如果采用几何非线性理论，一开始只需给予平板一个法向的微小干扰，就能够得到一条极为逼近于  $Oa$  的非线性平衡路径。经过  $a$  点之后，上述由线性理论得出的随遇平衡路径  $aE$  是不存在的。实际存在的后屈曲路径  $ab$  由非线性弯曲方程控制， $ab$  呈稳态平衡阶段，在这一阶段，随载荷增加，板的挠曲率和抗弯刚度随之增大，表现出明显的后屈曲强度。当然，后屈曲强度不是无限的，随着结构内部应力水平的提高，或者是由于材料内部逐渐出现破坏，在  $c$  点附近结构发生强度破坏；或者是由于结构变形增大的原因， $c$  点成为刚度极值点而呈现极值型屈曲，致使结构从稳态平衡路径  $abdc$  转

变为非稳态平衡路径  $cd'$ 。顺便要提及的是，结构还有可能发生二次分支屈曲  $\lambda_{cr2}$ ，即结构在达到强度破坏之前的某一点  $d$  处突然出现波形突变，而跳到另一个更高阶的平衡状态，如图 5-1 (a) 中的路径  $abde$ 。但是，二次分支屈曲只发生在极少数特定载荷下的理想板结构中。

按照非线性屈曲理论，一般板（壳）结构的非线性屈曲示意图如图 5-1 (b)，随着载荷的增加，非线性平衡路径逐渐延伸，达到并通过极值点  $a$ ，这个极值点就是非线性屈曲点（通常称极值型屈曲），通过极值点后的平衡路径称为后屈曲路径。从图 5-1 (b) 可见，通过极值点  $a$  后，结构出现软化而卸载，又在经过  $b$  点之后，结构开始转为强化。有些曲板（壳）结构，这种从强化到软化的反复可多次发生，反复中有可能出现位移极值点  $b$ 。经过非线性路径  $Oabc$  中第一个载荷极值点  $a$  的情况称为跳跃（snap-through），经过第二个位移极值点的情况可称为回弹（snap-back）。

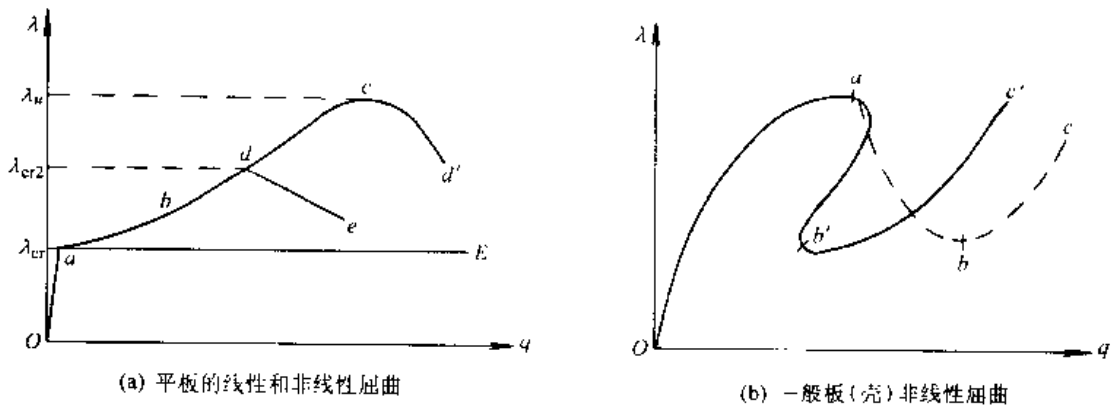


图 5-1 一般板（壳）非线性屈曲和后屈曲

从上述分析可以看出，按照非线性屈曲理论，结构的稳定性问题和强度问题是相互联系在一起的。非线性平衡路径可以准确地把结构的强度和稳定性，以至于刚度的整个变化历程表示得十分清楚。

由于受载结构实际上是在变形后的位置上处于平衡状态的，从加载一开始就呈几何非线性特性，因此，非线性理论更接近于实际情况。

早在 20 世纪初叶，就已奠定了几何非线性力学的理论基础。尽管以后随着航空、航天和原子能等高科技产业的发展，提出了许多用线性理论解决不了的问题，迫切需要非线性理论的指导，但是由于非线性理论方程十分复杂、求解十分困难，一直无法被实际工程采用。20 世纪中期以来，运用非线性力学理论只求解了一些简单的复合材料板/壳结构的非线性弯曲问题。所采用的方法有摄动法、广义 Fourier 级数法、加权残数法（或修正的 Galerkin 法）、动态松弛法、有限差分法、有限条法和有限元法等，所有这些方法可分为两大类，即解析法和数值法。解析法只能求解某些特殊问题，一般来说不能很容易地推广到其他问题，但比较适合于对基本理论和方法的研究，便于掌握一些问题的规律性。数值解法对结构的形状、边界条件、载荷方式的适应性比较强，适合于工程结构分析。由于数值解法需要解析解的验证，因此，两种解法在发展过程中相辅相成、齐头并进。

直到 20 世纪 60 年代，有限元法与数字计算机的出现与迅猛发展为解决非线性领域的问题准备了必要的物质和技术条件。目前，以非线性理论为基础的有限元方法，已成为求解板



壳结构的屈曲、后屈曲及破坏问题最有效的途径，并为全世界结构力学专家和设计工程师们所接受。近二十年来，已陆续推出并不断更新了一批享有声誉的商品软件，如：ABAQUS、ADINA、MSC/NASTRAN、ANSYS、ASKA、MARC等。这些软件中的屈曲分析都以非线性力学理论为基础，采用渐变的过程分析思想，并考虑了多种因素（环境、损伤、破坏等）的影响。这些结构分析软件现已成为现代飞机结构设计中不可缺少的计算工具。

本章介绍非线性有限元方法的理论和列式，并给出一些简单的典型算例。目的在于帮助飞机结构设计师们掌握后屈曲分析中的一些基本概念和处理方法。

### 5.1.2 线性屈曲、非线性屈曲和破坏

#### 5.1.2.1 线性屈曲和非线性屈曲

线性屈曲以小位移、小应变的线弹性理论为基础，不考虑加载过程中结构位形的变化，也就是在外力施加的各个阶段，总是在结构初始位形上建立平衡方程，当屈曲产生时，结构位形突然跳到另一个平衡状态（如图5-1(a)中 $OaE$ 所示）。线性屈曲也称为分支型屈曲，其屈曲载荷由以下线性广义特征值方程确定。

$$([K_0] + \lambda[K_g])\{q\} = 0 \quad (5-1)$$

式中： $[K_0]$ ——结构的线性刚度矩阵；

$[K_g]$ ——结构的几何刚度矩阵；

$\lambda$ ——载荷比例因子；

$\{q\}$ ——横向位移向量。

线性屈曲理论的适用范围窄，而如加载偏心、制造缺陷、复合材料中的拉弯耦合效应、不均匀温度场等因素都将导致线性特征方程不成立。

非线性屈曲理论，是在结构受载过程中，不断变化的结构位形上建立平衡方程的。对于非完善的板或存在拉弯耦合效应的层压板，即使在面内载荷作用下，从加载一开始就出现横向位移，而成为非线性弯曲问题，其控制方程为

$$K_T(q)\Delta q = \Delta P(q) \quad (5-2)$$

式中： $[K_T]$ ——结构在某一增量步上的切线刚度矩阵；

$\Delta P$ ——结构当前的外载增量；

$\Delta q$ ——结构当前的位移增量。

按照非线性屈曲理论，在结构受载的平衡路径中可包含若干个极限点，这类极值点即为非线性屈曲点。通常情况下，由第一个极值点确定结构的屈曲载荷。在结构的非线性分析中，结构的稳定性问题和强度问题是相互联系在一起的，例如当考虑初始缺陷和损伤对结构稳定性影响时，可以从其载荷-位移曲线的全过程的变化规律中进行研究。

#### 5.1.2.2 分析模型

试验表明，复合材料层压板壳结构的屈曲和破坏过程是非常复杂的。例如，在加载过程中，加筋板壳往往蒙皮首先发生局部屈曲，从而引起局部刚度下降和应力重新分布，这样又会出现新的局部屈曲，随着屈曲区域的不断扩大，最后导致结构的整体屈曲，在这一过程中还会诱发材料内部的损伤破坏以及由此引起的刚度折减。因此，必须建立一个比较符合实

际，并有试验根据的分析模型和破坏准则。

1989年美国斯坦福大学 F. K. Chang 等人采用以几何非线性理论为基础，考虑损伤破坏的结构分析模型，运用三维破坏准则研究了横向载荷作用下复合材料柱壳的破坏强度，分析结果与试验结果相当一致。目前，世界各国都已采用了这种以非线性屈曲理论为基础，反映渐变过程的分析模型。从理论上讲，按照这类计算模型只要解法得当，就能够追踪出结构变形过程中完整的非线性平衡路径，包括稳态的和非稳态的；并能够求出载荷极值点和位移极值点。从而可以比较真实地了解结构变形过程中的各种性状，包括刚度软化、刚度硬化和极限破坏载荷等。

### 5.1.2.3 破坏准则

(1) 材料内部破坏准则 经典层压板理论中，假设层间正应力为零，考虑横向剪切效应时，大都采用一阶剪切理论，所求得的横向剪应力分布仅为一种近似，因此，以此来确定是否发生分层破坏是没有意义的。

在层压板壳的分析中，通常认为层间的粘结强度是足够的，可不考虑层间破坏和自由边界效应。在这种情况下，对每一层采用面内二维强度破坏准则。

二维强度破坏准则有十多种，最常用的有：最大应力准则、最大应变准则、Tsai-Hill 准则、Hoffman 准则和 Tsai-Wu 准则等，不同的强度准则适用于不同的材料。当采用某种破坏准则对单层进行判断时，还要建立相应的后继破坏的刚度退化准则。

目前较多地采用 Tsai-Hill 准则，它比较适合玻纤/环氧复合材料，其表达式为

$$(\sigma_1/X)^2 + (\sigma_2/Y)^2 - (\sigma_1\sigma_2/X^2) + (\sigma_6/S)^2 = 1 \quad (5-3)$$

式中：X——单层板沿纤维方向拉伸（或压缩）强度；

Y——垂直纤维方向的拉伸（或压缩）强度；

S——层内剪切强度；

$\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  和  $\sigma_6$ ——每一层的主轴应力和剪应力。

相应的刚度退化准则见表 5-1。

表 5-1 Tsai-Hill 退化刚度准则

破坏准则	破坏形式	单层刚度缩减
$\sigma_1 > X$ 或 $\sigma_2 > X$ 和 $\sigma_1/Y$ 最大	纵向纤维破坏	$Q_{11}$ 所有元素为 0
$\sigma_2 > Y$ 或 $\sigma_1 > Y$ 和 $\sigma_2/Y$ 最大	基体横向开裂	$Q_{12} = Q_{22} = Q_{66} = 0$
$\sigma_6 > S$ 或 $\sigma_1 > S$ 和 $\sigma_6/S$ 最大	基体剪切破坏	$Q_{66} = 0$

要比较准确地求层间应力（包括正应力和剪应力），必须放弃经典层压板理论和一阶剪切理论，而采用精确的高阶理论和相应的有限元列式。求出层间应力后，用三维破坏准则判断层间破坏和层内破坏。在文献[4]中，层内采用 Hashin 破坏准则，层间采用 F. K. Chang 破坏准则。纤维的拉伸破坏准则为

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{X_t}\right) + \frac{1}{S_c^2}(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) \geq 1 \quad (5-4)$$

其中， $\sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{xy}$  和  $\sigma_{xz}$  分别表示层压板每一层沿纤维方向的拉伸正应力、面内横向剪应力和出

平面的横向剪应力； $X_t$  是单层板沿纤维方向的拉伸强度， $S_c$  是由  $[0/90]_c$  的层压板测得的层间剪切强度。

基体的拉伸破坏 ( $\sigma_{yy} + \sigma_{zz} > 0$ ) 准则为

$$\frac{1}{Y_t^2} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \frac{1}{S_c^2} (\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + \frac{1}{S_c^2} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) \geq 1 \quad (5-5)$$

式中： $Y_t$ ——单层板沿垂直纤维方向的拉伸强度。

基体的压缩破坏 ( $\sigma_{yy} + \sigma_{zz} < 0$ ) 准则为

$$\frac{1}{Y_t Y_c} \left( \frac{Y_t Y_c}{4 S_c^2} - 1 \right) (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \frac{1}{4 S_c^2} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \frac{1}{S_c^2} (\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + \frac{1}{S_c^2} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) \geq 1 \quad (5-6)$$

式中： $Y_c$ ——单层板沿垂直纤维方向的压缩强度。

分层准则为

$$\left( \frac{\sigma_{rr}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{rs}}{S_t} \right)^2 \geq 1 \quad (5-7)$$

式中： $\sigma_{rr}$  和  $\sigma_{rs}$ ——分别表示相邻层界面上沿板厚方向的法向和切向应力分量。

材料刚度的缩减程度主要取决于破坏机制。根据 F. K. Chang 和 K. Y. Chang 提出的刚度缩减模式：如基体拉伸和压缩破坏，则在损伤区的  $E_x$ ， $\nu_{xz}$ ， $\nu_{yz}$ ， $\nu_{xy}$  缩减为零；若纤维断裂或界面脱粘，则在损伤区的  $E_y$ ， $\nu_{rx}$ ， $\nu_{yx}$ ， $\nu_{xy}$  缩减为零，面  $E_x$  和  $G_{xy}$  的缩减，可根据 Weibull 分布表达式得到，即

$$\frac{E_x^d}{E_x} = \exp \left[ - \left( \frac{A}{A_0} \right)^\beta \right], \quad \frac{G_{xy}^d}{G_{xy}} = \exp \left[ - \left( \frac{A}{A_0} \right)^\beta \right] \quad (5-8)$$

式中： $E_x^d$ ——拉伸的减缩模量；

$G_{xy}^d$ ——剪切的减缩模量；

$A$ ——由纤维破坏准则预测的损伤区面积；

$A_0 (= \delta^2)$ ——与该层所测的拉伸强度  $X_t$  有关的纤维破坏相互作用区面积。

(2) 结构最终破坏准则<sup>[13]</sup> 结构在外载作用下的最终破坏是指结构不能继续承载或不能维持正常工作状态。最终破坏的判据很难明确定义，不同的结构形式、不同的材料和不同的使用要求有不同的破坏判据。经典线性分析理论将破坏判据分为强度判据和刚度判据两大类。而按照非线性力学理论，普遍采用的破坏判据是将结构变形的几何非线性效应和材料损伤引起的物理非线性效应统一折合为结构刚度降。当结构在当前载荷步上的相对刚度值趋于零，并开始软化而进入卸载状态时，认为结构已丧失了承载能力。故结构最终破坏判据为：

$$|\det[K_T] / \det[K_0]| \leq \epsilon \quad (5-9)$$

式中： $[K_T]$ ——当前状态下的切线刚度矩阵；

$[K_0]$ ——初始状态下的切线刚度矩阵；

$\epsilon$ ——给定精度。

### 5.1.3 几何非线性有限元列式

为了描述结构变形过程中的平衡方程，通常将整个加载过程（变形过程）分成若干个增

量步，每个增量步上结构有特定的位形，以不同的位形为参考位形可建立不同的坐标系。某一时刻的结构平衡方程，可相对于不同位形下的坐标系（如初始坐标系、相邻坐标系或当前坐标系等）来建立，于是，各个力学量的描述也可相对于不同的坐标系，这样就形成了目前在求解几何非线性问题中的各种方法。主要的有 Euler 方法和 Lagrangian 方法两种。Euler 方法是相对于当前坐标系建立平衡方程的，一般用来描述流变体的力学行为。结构分析中一般采用 Lagrangian 方法，其中又有两种表示法，即全局 Lagrangian 法（简称 T.L. 法）和修正 Lagrangian 法（简称 U.L. 法），它们分别是以结构初始位形和前一步的相邻位形作为参考位形建立方程的。

对于板壳结构的中等非线性变形情况（大挠度、小转动），采用 T.L. 法和 U.L. 法均能准确求解。而对于包含大转动的高度非线性问题，用 T.L. 法一般不能准确求解，因为常用的冯·卡门（Von Karman）的大挠度方程只适用于大位移、小转动（从初始位形到当前位形只允许小转动）的情况。而用 U.L. 法可以求解大位移、大转动问题，因为在 U.L. 法求解过程中，每一步的增量位移和转动是相对于相邻坐标系（上一步的结构位形）求出的，只要保证在每一增量步内是小转动的情况，就能够满足冯·卡门方程，而总的转动量则可以是大转动。用 U.L. 法求解中，相邻坐标系的不断更新，包含了转动位移的非线性项，这一点在理论上已有了证明。对于工程结构，通常只允许出现大位移、小转动的情况，故下面以 T.L. 方法为例建立几何非线性有限元的列式。

### 5.1.3.1 增量型平衡方程

采用 T.L. 方法时，相对于初始构形（坐标系）的非线性的几何关系方程为：

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + u_{k,i}u_{k,j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

例如

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad (5-10)$$

如果用  $\Psi$  表示内力和外力矢量的总和，由虚位移原理：结构的外力在虚位移上所作的功等于结构因虚应变所产生的应变能，平衡方程可以写成为

$$d \{ \delta \}^T \{ \Psi \} = \int d \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dv - d \{ \delta \}^T \{ P \} = 0 \quad (5-11)$$

式中： $\{ P \}$  ——所有载荷列阵；

$\{ \sigma \}$  ——应力列阵；

$d \{ \delta \}$  ——虚位移列阵；

$d \{ \epsilon \}$  ——虚应变列阵。

如果采用应变的增量形式

$$d \{ \epsilon \} = [B^*] d \{ \delta \} \quad (5-12)$$

将上式代入 (5-11) 式，并由虚位移的任意性，可消去  $d \{ \delta \}^T$ ，可得到非线性问题的一般平衡方程

$$\Psi(\delta) = \int [B^*]^T \{ \sigma \} dv - \{ P \} = 0 \quad (5-13)$$

在大位移的情况下，应变和位移的关系是非线性的，因此矩阵  $[B^*]$  是  $\{\delta\}$  的函数。为了清楚起见，(5-12) 式可以写成

$$[B^*] = [B_0] + [B_L(\delta)] \quad (5-14)$$

式中： $[B_0]$  ——为线性（小变形）分析中的几何矩阵；

$[B_L]$  ——为非线性（大变形）分析中的几何矩阵。它是由非线性变形部分引起的，一般来说， $[B_L]$  是位移列阵  $\{\delta\}$  的线性函数。

如果应力应变关系仍采用一般的线性弹性关系，即

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (5-15)$$

式中： $[D]$  ——材料的弹性矩阵；

$\{\epsilon_0\}$  ——初应变列阵；

$\{\sigma_0\}$  ——初应力列阵。

方程 (5-13) 可以采用迭代方法求解。如果采用牛顿-拉斐逊方法，必需寻求  $d\{\Psi\}$  和  $d\{\delta\}$  之间的关系。对 (5-13) 式两边取微分，得

$$d\{\Psi\} = \int d[B^*]^T \{\sigma\} dv + \int [B^*]^T d\{\sigma\} dv \quad (5-16)$$

如不考虑初应变和初应力的影响，由式 (5-15) 和式 (5-12) 可得

$$d\{\sigma\} = [D]d\{\epsilon\} = [D][B^*]d\{\delta\}$$

并且从式 (5-14) 得  $d[B^*] = d[B_L]$

所以  $d\{\Psi\} = \int d[B^*]^T \{\sigma\} dv + [K]d\{\delta\}$  (5-17)

这里  $[K] = \int [B^*]^T [D] [B^*] dv = [K_0] + [K_L]$

其中  $[K_0]$  为结构在小位移情况下的线性刚度矩阵，矩阵  $[K_L]$  是由于结构的大位移引起的，称为初始位移矩阵或大位移矩阵。

式 (5-17) 中的第一项，一般地可以写成：

$$\int d[B^*]^T \{\sigma\} dv = [K_s]d\{\delta\}$$

这里的  $[K_s]$  是关于应力水平的对称矩阵，它称为初应力矩阵或几何刚度矩阵。于是，式 (5-17) 可以写成：

$$d\{\Psi\} = ([K_0] + [K_L] + [K_s])d\{\delta\} = [K_T]d\{\delta\} \quad (5-18)$$

式 (5-18) 为结构在大位移情况下的增量平衡方程式， $[K_T]$  即是几何非线性分析中的切线刚度矩阵。可采用各种迭代方法对式 (5-18) 进行求解，直到  $d\{\Psi\}$  足够小。

### 5.1.3.2 几何非线性分析中的层压板单元和梁单元

适合于几何非线性分析的板、梁单元的理论 and 列式，在许多有限元专著中已有详细的论述。

板在大变形状态下，由弯曲变形引起的膜应变不可忽略，板的受力机制近似于壳体，薄膜应力和弯曲应力都是显著的，所以此时板单元也称为板/壳单元。

推导板单元列式中，主要有两种基本理论，一种是经典的 Kirchhoff 理论（又称直法线假定下的薄板理论），一种是 Reissner/Mindlin 理论（又称直而不法假定下的中等厚度板理论，简称 Mindlin 假定）。前者忽略横向剪切变形，后者则计及横向剪切变形。

以位移为模式的 Mindlin 板单元早已为复合材料层压结构分析所采纳，这是因为复合材

料层压结构的横向剪切刚度相对于其他刚度弱得多，即使在结构厚度较薄时，弯曲变形引起的横向剪切效应仍是不可忽略的因素。另一方面，在 Mindlin 板单元的发展进程中，曾经令人困惑的剪切闭锁 (shear locking) 已基本解决，目前解决剪切闭锁的方法有减缩积分法、离散 Kirchhoff 法和假定应变法等。因此 Mindlin 单元同样适用于薄板分析。

与 Mindlin 板相应的梁的变形假设是：变形前垂直于梁中性轴的截面，变形后仍保持为平面，但不一定垂直于其中性轴，而且横截面上有非零的轴向应力和两个剪应力。梁单元的位移和转角可以很大，但仍假设单元应变很小，即假定单元的横截面积不改变。

目前常用的板单元有：矩形单元、任意四边形单元和三角形单元等。任意四边形板单元中常用的有：四结点等参单元和八结点等参单元。三角形位移型板单元也是结构分析中不可缺少的，它不仅列式简单、而且对边界的适应性好，更重要的是在大变形分析中便于模拟曲壳几何和大变形特性。与上述板/壳单元相应的常用梁单元有：三结点等参梁元和二结点位移梁元。

非线性屈曲分析中，要求所采用的单元具有良好的收敛性和可靠性，但对单元精度的要求不一定特别高，因为屈曲是结构的一种整体响应。

近些年来，为了满足壳体结构和箱型截面空间结构的分析需要，新一代带旋转自由度的三角形和四边形板/壳单元应运而生<sup>[16,17]</sup>，它们是通过增加一个旋转自由度，去克服用板单元拟合壳体分析中可能出现的病态。这类单元已经逐渐充实到各著名的商品软件中。

#### 5.1.4 几何非线性问题的解法

##### 5.1.4.1 非线性方程组的解法

采用有限元数值方法求解非线性问题时，最终归结为求解非线性代数方程组。通常采用的求解方法是载荷增量法与 Newton - Raphson 迭代法 (N - R 迭代法) 相结合的混合法。这种方法虽对于求解许多非线性问题十分有效，可以准确地求得结构稳态的非线性平衡路径。然而，在载荷 - 位移曲线的极值点附近，由于切线刚度矩阵接近奇异面很难得到收敛解。

由于板/壳和柔性杆系结构的非线性载荷 - 位移曲线极为复杂，通常的增量/迭代型方法无法通过可能出现的载荷极值点和位移极值点，而这些点在实际工程中又是非常有用的，它们能够反映结构的一些重要特性，如结构在加载过程中刚度的软化和硬化，以及由此引起的跳跃和反弹等现象。因此，近二十年来，求解非线性代数方程组这一研究领域异常活跃，尤其在后屈曲路径跟踪技术方面作出了许多卓有成效的探索。

由 Ricks 和 Wempnor 提出、Crisfield 和 Roma 等人改进的各种弧长法<sup>[7]</sup>是这方面的重要成果，它为结构的载荷 - 位移全过程路径跟踪提供了迄今为止最有效的计算方法，满足了工程结构设计中求解极限承载能力的需要。下面介绍这两种方法。

(1) 常规的增量/迭代型混合法 (Conventional Increment - Iterative Scheme) 载荷增量 / N - R 迭代法的计算格式为

$$\begin{aligned} \{\Delta q_i^j\} &= [K_T(q_i^{j-1})]^{-1} \{P\} - R(q_i^{j-1}) \\ \{q_i^j\} &= \{q_i^{j-1}\} + \{\Delta q_i^j\} \\ \{q_i\} &= \{q_{i,1}\} + \sum_j \{\Delta q_i^j\} \end{aligned} \quad (5-19)$$

其中下标  $i$  表示加载过程中的第  $i$  个增量步，上标  $j$  表示第  $i$  个增量步中的第  $j$  次迭代。

$R(q_i^j)$  为第  $i$  步第  $j-1$  次迭代时结构在当前位移下的不平衡力。

该方法之所以不能通过极值点，是由于在极值点处切线刚度矩阵是奇异的，可能导致解的发散。而且这一方法在同一载荷步中的载荷值保持不变，因此无法通过调整加、卸载达到载荷极值点或位移极值点。

(2) 等弧长法 (Constant Arc - Length Method) 等弧长法就其实质仍然是一种增量和  $N-R$  迭代法相结合的混合法，所不同的是在迭代过程中载荷值是变化的，可以增加也可以减少，决定载荷的增加或减少是取决于一个控制参数（即不是纯载荷又不是纯位移的参数），所以能够处理沿载荷 - 位移路径中的一些特殊情况，如载荷极值点和位移极值点。

但是，追踪实际结构平衡路径是比较复杂和困难的，往往需要对非线性分析理论表达式采取精确、灵活的迭代策略以及对计算控制参数的合理选择，这些都将影响计算结果的积累误差和 CPU 时间。尽管在现有的著名软件中提供了多种弧长法可供选择，但要求使用者具备足够的专业知识和解题的经验才能选择到合适的方法。而且，方法选定之后还有一些初始参数需要经过反复调整后才能确定。

另外，结构设计的另一个任务是求解在给定载荷水平下的结构的变形状态和各种静动力学响应，通常的弧长法就不能适应。J. G. Teng 和 Y. F. Luo 在 1998 年提出了一种能够人为控制预定收敛点的弧长法<sup>[8]</sup>，它能够收敛到预定的载荷水平或其他任何参数的预定值（只要该参数是载荷的函数）。总之，非线性方程组的求解方法仍在发展中，现有的弧长法还不能求解所有的后屈曲路径问题。

#### 5.1.4.2 收敛准则<sup>[7]</sup>

求解非线性方程组时，必须给出迭代收敛准则，不然就无法终止迭代；而且，假如收敛准则选得不合适，还会影响计算精度或效率，甚至使计算失败。

常用的迭代收敛准则有三种：位移收敛准则、不平衡力收敛准则和能量收敛准则。

##### (1) 位移收敛准则

$$(a) \quad \|\epsilon\|_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\Delta q_k}{q_{k,ref}} \right| \quad (5-20)$$

$$(b) \quad \|\epsilon\|_2 = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\Delta q_k}{q_{k,ref}} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-21)$$

$$(c) \quad \|\epsilon\|_3 = \max \left| \frac{\Delta q_k}{q_{k,ref}} \right| \quad (5-22)$$

其中  $N$  为结构总位移自由度个数。

##### (2) 不平衡力收敛准则

$$|\{P\}^T(\{P\} - \{R_i\})| \leq \epsilon |\{P\}| \quad (5-23)$$

(3) 能量收敛准则 将每次迭代后的内能增量（不平衡力在位移增量上做的功）与初始能量增量作比较：

$$|\Delta q_i^T(\{P\} - \{R(q_i^j)\})| \leq \epsilon |\Delta q_i^T(\{P\} - \{R(q_i^1)\})| \quad (5-24)$$

极据经验，以上各准则中  $\epsilon$  可取  $10^{-2} \sim 10^{-5}$ 。

在选择收敛准则时必须注意：当结构硬化严重时，位移的微小变化将引起不平衡力的很大偏差，位移准则就不合适；当结构软化严重时，不平衡力的微小变化将引起位移增量的很

大偏差，不平衡力准则就不合适。比较好的是能量准则，它能同时控制位移增量和不平衡力。

## 5.2 层压板的后屈曲分析

### 5.2.1 层压板的几何非线性弯曲理论

从薄板非线性弯曲理论出发，采用冯·卡门的大挠度假设，得到的复合材料层压板方程是非线性的耦合方程，为了减小求解的复杂性，根据 Berger 的建议，认为薄膜应变第二不变量的弹性能要比第一不变量的平方小得多，可略而不计。薄板弯曲变形无论采用 Kirchhoff 假定（直法线）或 Mindlin 假定（直而不法），板的中间面位移均为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(x, y, z) &= u(x, y) + z\Psi_x(x, y) \\ \bar{v}(x, y, z) &= v(x, y) - z\Psi_y(x, y) \\ \bar{w}(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (5-25)$$

板内各点的应变为

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x \end{Bmatrix} \quad (5-26)$$

层压板每一层中各点的应力为

$$\{\sigma\} = [Q_{ij}] \{\epsilon\} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (5-27)$$

其中  $Q_{ij}$  为刚度系数。层压板截面上的内力为

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \{Q\} = \int \{\tau\} dz \quad (5-28)$$

$$[A_{ij} \quad B_{ij} \quad D_{ij}] = \int Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (5-29)$$

初始位形为  $v_0$  的弹性体，在加载过程中的某一  $\Delta t$  的时间步内，结构从前一步的平衡位形  $v_{n-1}$  变形到当前位形  $v_n$ ，这时增量平衡方程可在初始坐标系下描述

$$\int_{v_0} S_{ij}^n \Delta E_{ij} dv - \int_{S_{\sigma_0}} \bar{T}_i^n \Delta u_i da - \int_{S_{u_0}} S_{ij}^n n_j \Delta \bar{u}_i da = 0 \quad (5-30)$$

其中  $S_{ij}^n$  和  $\Delta E_{ij}$  分别为当前步上的 Kirchhoff 应力和 Green 增量应变，且

$$S_{ij}^n = S_{ij}^{n-1} + \Delta S_{ij}, \quad \Delta E_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad (5-31)$$

其中  $\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i})$   $\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}$ ,  $(i, j = 1, 2, 3)$

对于复合材料层压板壳，设  $M$  为铺层总数， $h_m$  是  $m$  层的厚度，当每层应变很小时，可认为应力应变关系是线性的，故在  $\Delta t$  时间步内，对第  $m$  层有



$$\Delta^m S_{i,j} = {}^m(C_{i,j}^{n,1}) \Delta^m e_{i,j} \quad (5-32)$$

${}^m C_{i,j}^{n,1}$  为第  $m$  层材料性质, 将式 (5-31) 和 (5-32) 代入 (5-30) 并略去高阶项可得非线性增量平衡方程

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \int_{h_{m-1}}^{h_m} \left[ \int_{A_0} \Delta^m e_{k,l} {}^m C_{i,j}^{n,1} \Delta^m e_{i,j} da + \int A_0 {}^m S_{i,j}^{n,1} \Delta^m \eta_{i,j} da \right] dh \\ & = \sum_{m=1}^M \int_{h_{m-1}}^{h_m} \left[ \int_{L_u} \bar{T}_i^n \Delta^m u_i da + \int_{L_u} ({}^m S_{i,j}^{n,1} da + \Delta^m S_{i,j}) n_{i,j} \Delta^m \bar{u}_i da - \int_{A_0} {}^m S_{i,j}^{n,1} \Delta^m e_{i,j} da \right] dh \end{aligned} \quad (5-33)$$

如果用矩阵表示, 按 T.L. 法作一般性推导, 用  $\{\Psi\}$  表示单元上内力和外力矢量的总和, 由虚位移原理经过如 5.1.3.1 中的推导, 可得单元平衡方程

$$d\{\Psi\} = [K_T] d\{\delta\} \quad (5-34)$$

$$[K_T] = [K_0] + [K_L] + [K_e] \quad (5-35)$$

其中  $[K_T]$  为单元的切线刚度阵,  $[K_0]$ 、 $[K_L]$  和  $[K_e]$  分别为线性刚度矩阵、大位移矩阵和初应力矩阵。

### 5.2.2 层压平板的后屈曲特性

#### 5.2.2.1 单向层压平板在轴压下的后屈曲特性<sup>[1]</sup>

一组为玻璃 (GL) 纤维、硼 (BO) 纤维和石墨 (GR) 纤维/环氧树脂的单向层压板以及用作比较的各向同性四边简支板。材料参数列于表 5-2。

表 5-2 弹性常数

材 料	$E_{11}/E_{22}$	$G_{12}/E_{11}$	$\nu_{12}$	$\sigma_c b^2 / \pi^2 E_{11} h^2$
各向同性	1	0.38	0.316	0.3704
玻璃/环氧	3	0.1667	0.25	0.1943
硼/环氧	10	0.033	0.22	0.1069
石墨/环氧	40	0.0150	0.25	0.0916

图 5-2 给出了它们在受单向轴压  $N_x$  时的后屈曲特性曲线 ( $N_x/N_{cr}$  与  $w_c/h$  的关系曲线), 其中  $N_{cr}$  为线性失稳临界压力,  $w_c$  为板中心点挠度,  $h$  为板厚。很明显, 在达到初始屈曲载荷之后, 三种材料单向层压板都有明显的后屈曲强度。在破坏出现之前, 每增加一个单位压缩载荷, 三种复合材料单向层板挠度的增加 (刚度下降) 都超过各向同性材料板, 其中石墨环氧板挠度增加最大, 即刚度下降最快。

对于  $a/b = 1.5$  和  $2.0$  的四边简支板, 其后屈曲性态有相似的曲线, 而这些曲线的斜率, 随  $a/b$  的增加而增大。

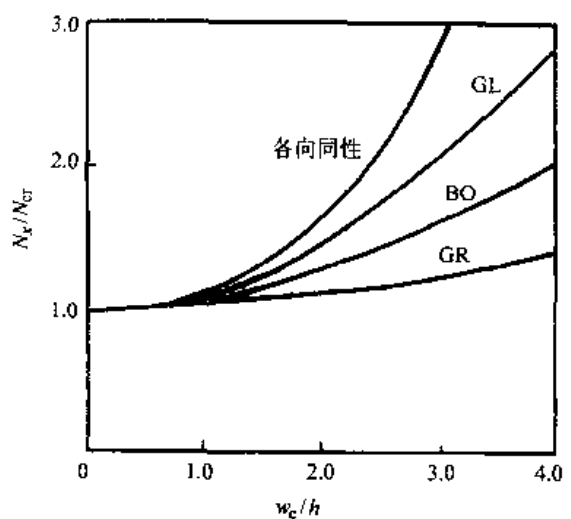


图 5-2 三种纤维单向板和各向同性板的载荷-挠度曲线

### 5.2.2.2 层压平板在轴压下的后屈曲特性

上节中的三种复合材料按  $[\pm 45]_S$  铺设的四边简支层压方板，受单轴压和双轴压作用。图 5-3 中给出了它们在后屈曲阶段的载荷-挠度曲线，图中除特别注明  $N_x = N_y$  的曲线是受双轴压板的挠度曲线外，其余是受单轴压板的挠度曲线，图中中心点挠度为零 ( $w_c = 0$ ) 的轴压力是初始屈曲载荷。由图可见，高模量复合材料 GR 的板在单轴压载荷约为在双轴压载荷的两倍时，产生相同的挠度  $w_c$ 。

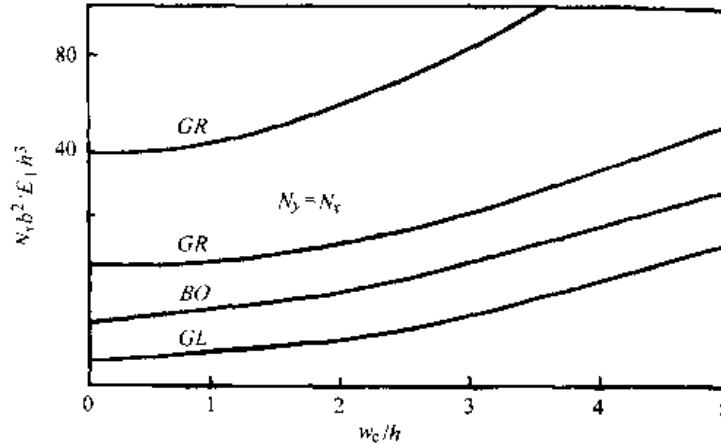


图 5-3 单轴和双轴压力下简支  $[\pm 45]_S$  方板的载荷-挠度曲线

### 5.2.2.3 层压平板在纯剪下的后屈曲特性

铺层为  $[\pm 45]_S$  和  $[\pm 30]_S$  的硼/环氧层压方板受纯剪力，板的四边为可动简支，跨厚比  $a/h = 150$ ，材料性能为： $E_{11} = 980$  GPa， $E_{22} = 98$  GPa， $\nu_{12} = 0.3$ ， $G_{12} = 24.5$  GPa， $G_{23} = 9.8$  GPa。

图 5-4 给出了不同铺层角下层压方板的载荷-挠度曲线。图中虚线为板受正剪时的挠度，实线为板受反剪时的挠度。由图可见，剪力方向对初始屈曲载荷和后屈曲强度有明显的影响，这是因为面内耦合刚度和弯扭耦合刚度在板两对角线方向上不相同所致。而且不同铺层角的层压板在受正剪和反剪时的挠度也不同。可以推断不同长宽比的层压板和不同材料的层压板，它们的正反剪效应也是不相同的。

图 5-5 给出了，按  $45^\circ$  对称铺层而层数不等的层压方板在纯剪力作用下的载荷-挠度曲线。由图可见，在材料、几何尺寸和边界条件相同的情况下，剪力方向效应随着铺层数的增加而减小。图中的正交各向异性层压板，由于耦合刚度等于零，故正剪和反剪的后屈曲效应相同。

### 5.2.2.4 边界转动约束和初始缺陷的影响

图 5-6 中给出了，四边有转动约束的正交铺层 CFRP（碳纤维增强复合材料）方板在轴压力作用下的载荷-挠度曲线，方板具有不同的初始几何缺陷。 $k$  为边界上的转动约束系数，当  $k = 0$  时为四边简支； $k = \infty$  时为四边固支。图中对应每一种边界转动约束 ( $k$  值) 有一对曲线，实线为无初始缺陷板 ( $w_c/h = 0.0$ ) 的挠度曲线；虚线为有初始缺陷板 ( $w_c/h = 0.1$ ) 的挠度曲线， $\bar{w}_c$  为正弦型初始几何缺陷在中心点的最大幅值。由图可见，无初始缺陷的板在面内轴压载荷作用下，是一个特征值问题，而一旦出现初始微缺陷，就立即成为

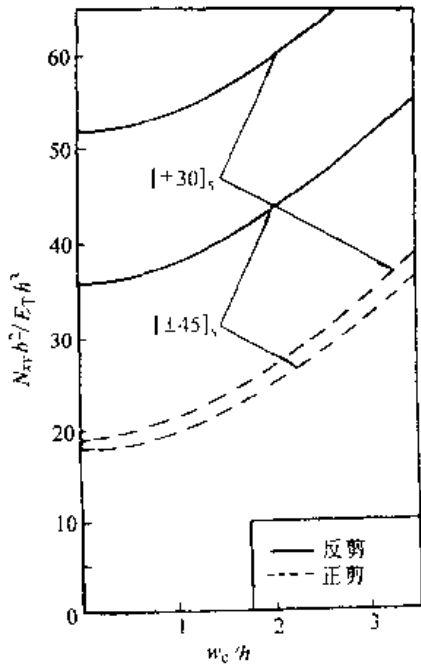


图 5-4 不同铺层角的层压方板在纯剪下的载荷-挠度曲线

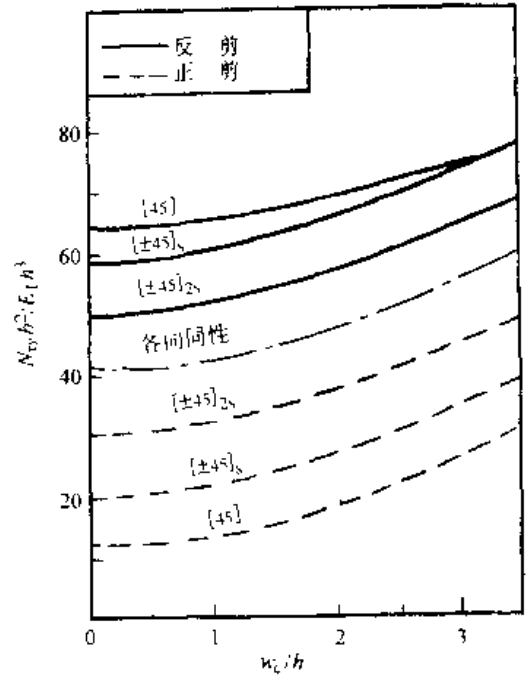


图 5-5 几种 45° 铺层的层压方板在纯剪下的载荷-挠度曲线

一个非线性弯曲问题。

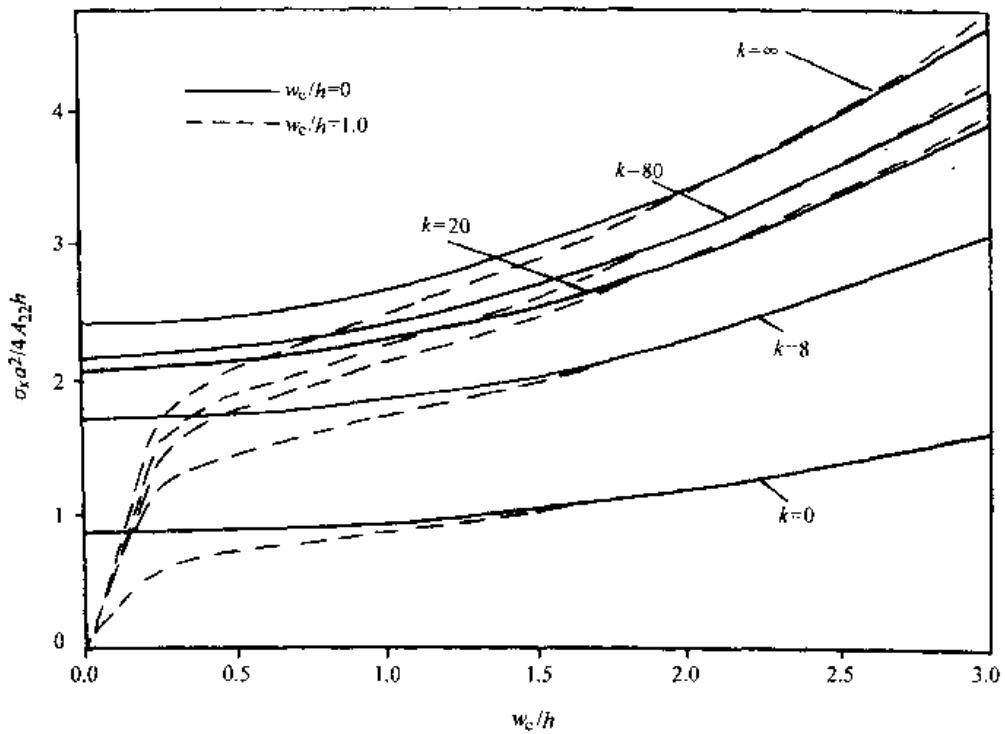


图 5-6 正交铺层的 CFRP 方板在四边转角约束下的载荷-挠度曲线

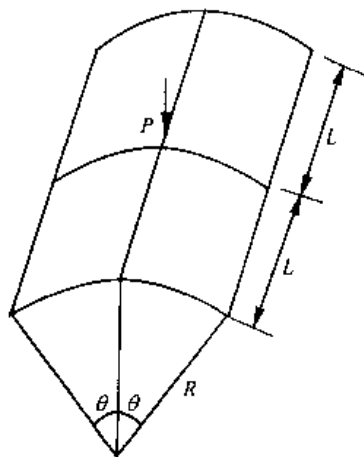
### 5.2.3 层压曲板的后屈曲特性

层压柱壳在法向载荷作用下，整个变形表现为非线性的弯曲过程，一旦发生屈曲，大

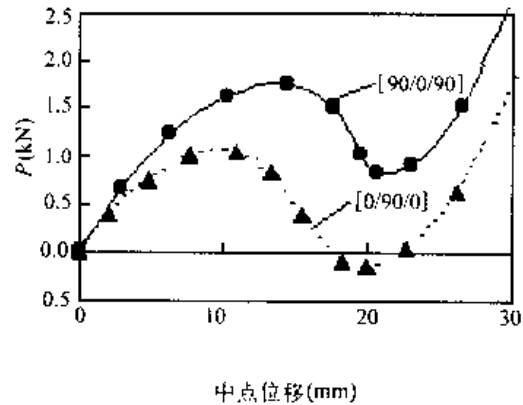
都表现为极值型屈曲。而柱壳受外压或受轴压作用时的屈曲一般为分支型的，它们的屈曲和后屈曲特性比较复杂，在后屈曲阶段往往都出现若干个跳跃（snap-through）的现象。而且，几何形状、边界条件和载荷形式对层压曲板的屈曲和后屈曲特性的影响比对层压平板的影响明显。

### 5.2.3.1 中心点受集中力的层压柱块壳的后屈曲特性

图 5-7 (a) 为中心点受集中力  $P$  的复合材料层压柱壳。几何尺寸为



(a) 复合材料层压柱壳



(b) 载荷-挠度曲线

图 5-7 复合材料层压柱壳受集中力的后屈曲路径

$R = 2540\text{mm}$ ,  $L = 254\text{mm}$ ,  $\theta = 0.1\text{rad}$ 。

铺层情况有两种，分别为  $[0/90/0]$  和  $[90/0/90]$ 。单层材料性能为

$E_{11} = 3.3\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 1.1\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 0.66\text{GPa}$ ,  $G_{23} = 0.44\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ 。

图 5-7 (b) 给出了曲边自由，直边为简支情况的载荷 - (中心点) 挠度曲线。

### 5.2.3.2 层压柱壳在轴压下的后屈曲特性

层压柱壳几何尺寸如图 5-8 中附图所示，直边简支，曲边固支受均匀轴压。材料参数见表 5-3。图 5-8 中给出了由有限元方法和由试验得到的后屈曲平衡路径，可见两者基本吻合。图 5-9 中列出了几种铺层情况下该层压柱壳的后屈曲平衡路径，其中  $[0_8]$  和  $[90_8]$  的初始屈曲载荷仅相差 3.9%，但  $[0_8]$  的后屈曲承载能力远远超过了  $[90_8]$  的。这是由于  $[0_8]$  的层压柱壳屈曲之后在轴向产生了较大的位移所致。

表 5-3 材料参数

	$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}, E_{33}$ (GPa)	$G_{12}, G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}, \nu_{13}$	$\nu_{23}$
图 5-8 结构	130.0	10.0	4.85	3.62	0.31	0.52
图 5-9 结构	181.0	10.3	7.17	7.17	0.28	0.28

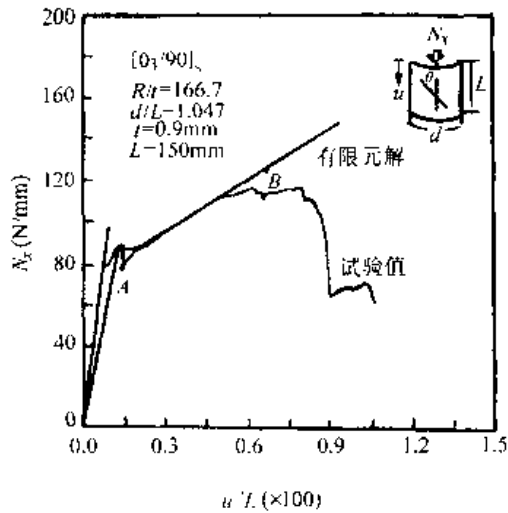


图 5-8 有限元分析和试验得到的 $[0_3/90]_S$ 柱壳后屈曲平衡路径

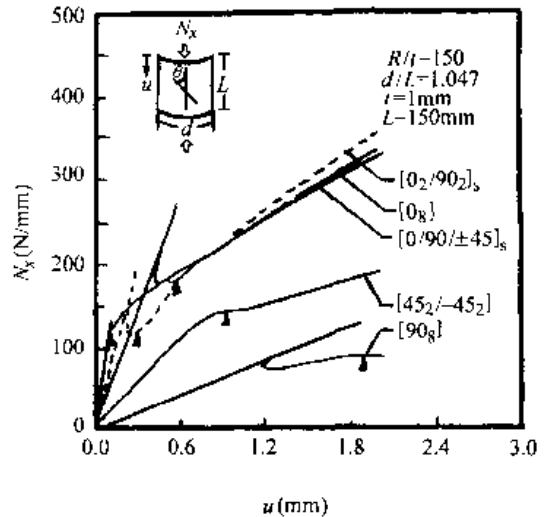


图 5-9 几种铺层情况下柱壳的后屈曲平衡路径

### 5.2.3.3 层压曲板和层压平板的后屈曲特性比较

图 5-10 为硼/环氧 $[45]_S$ 单向层压曲板和相应层压平板在单向轴压力 $\sigma_x$ 作用下的载荷-挠度曲线。层压曲板和层压平板的边长相同且四边均为简支，柱形层压曲板的曲率参数为 $b^2/Rh = 25$  ( $b$ 为平板的边长)。材料性能为： $E_{11}/E_{22} = 10$ ,  $G_{12}/E_{22} = 0.3$ ,  $\nu_{12} = 0.3$ 。从图可看出，层压柱曲板的初始屈曲载荷比相应的层压平板高。初始屈曲之后，层压平板立即进入了强化阶段，即挠度随外载荷增加不断增大，具有继续承载的能力。而层压曲板在初始屈曲后，要经历一段弱化过程，即外载保持不变时挠度仍不断增大，并立即出现弯曲形状的突变（跳跃），这时若不发生断裂和破坏，则曲板还有继续承载的能力。曲板在整个后屈曲阶段可能有一二个或若干个跳跃。此外，有几何缺陷的曲板可能在理论分支点到达之前破坏。

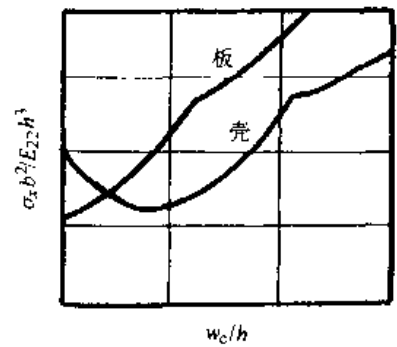


图 5-10 层压曲板和相应的层压平板的载荷-挠度曲线

### 5.2.4 层压板的后屈曲破坏分析

后屈曲破坏分析可以预估层压板的极限承载能力。破坏分析中要考虑非线性弯曲变形引起的刚度降，同时还要考虑材料内部发生的损伤和积累所引起的刚度降，关键是对结构变形过程中的各个增量步上进行正确的应力分析，并选用适当的强度破坏准则和相应的刚度折减准则。

图 5-11 为角铺层层压方板在均匀轴压作用下的后屈曲破坏路径，板的边长 1000mm，板厚 15mm，四边固支，铺层为 $[\theta / -\theta / \theta / -\theta]$ ，单层材料性能为 $E_{11} = 5.48\text{GPa}$ ,  $E_{22} = 1.83\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $G_{12} = 0.879\text{GPa}$ ,  $X_T = X_C = 1.05\text{MPa}$ ,  $Y_T = 2.81\text{MPa}$ ,  $Y_C = 14.06\text{MPa}$ ,  $S = 4.22\text{MPa}$ 。当 $\theta$ 分别为 $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ 时，考虑材料内部损伤破坏，按照 Tsai-Hill 二维破坏准则计算的线性屈曲载荷 $N_{cr}$ 和破坏时的极限载荷 $N_u$ 见表 5-4。由图可见，如果不考虑损伤破坏，得到的后屈曲路径如图中的实线所示，这时层压方板的后屈曲强度似乎是无限的，显然这不符合实际情况。而考虑材料内部损伤的后屈曲路径如图中的虚

线所示，方板在后屈曲阶段很快达到了强度极限。计算表明，三种铺设角的层压板在后屈曲阶段的相对强度储备值 ( $N_u/N_{cr}$ ) 相仿，而破坏过程却差别很大，当  $\theta$  较小时，因主要靠纤维受拉（压）承载，故破坏是逐渐形成的；当  $\theta$  为  $45^\circ$  时，因转变为主要由基体受拉（压）承载，破坏表现为突发性的。

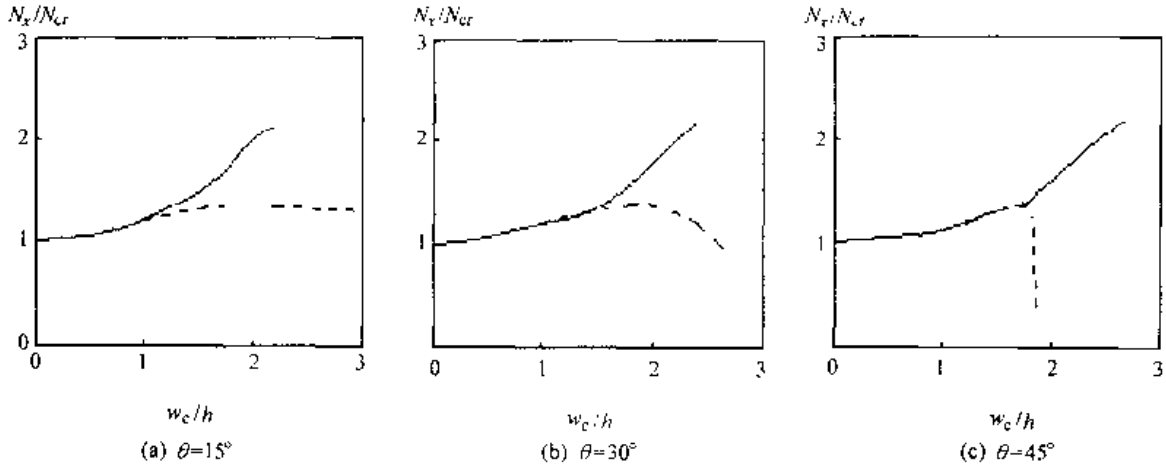


图 5-11 角铺层层压方板的后屈曲破坏路径

表 5-4 不同铺层角方板的  $N_{cr}$  和  $N_u$

$\theta^\circ$	15	30	45
$N_{cr}/h$	2.45	2.71	2.84
$N_u/N_{cr}$	1.33	1.40	1.30

### 5.2.5 层压板的二次分支屈曲<sup>[15]</sup>

早在 20 世纪 70 年代末，Uemura 和 Byon 采用有限元分析和通过试验，对四边简支和四边固支的各向同性方板在轴压下的二次屈曲问题和初始缺陷效应进行了研究。首次证实了二次分支屈曲点的存在。

80 年代初，Kobayashi 等又采用有限元分析和通过试验，对轴压下的碳/环氧四边简支层压方板的二次屈曲和破坏、对纯剪载荷作用下的石墨/环氧四边固支方板的初始屈曲、后屈曲路径和破坏进行了研究，得到了如下对工程实际有益的结论：

无初始几何缺陷、层数较多、拉弯耦合项可以略去的层压方板，在轴压下屈曲后进入后屈曲阶段时，有可能出现二次分支型屈曲，而发生强度破坏。四边固支时层压方板的二次分支屈曲载荷略高于它的初始屈曲载荷，约为 1.3 倍；四边简支时层压方板的二次分支屈曲载荷远高于它的初始屈曲载荷，约为 6~7 倍。

有初始几何缺陷、层数较少、拉弯耦合项不可以略去的层压板受轴压时，加载一开始就产生横向位移，板的变形是一个非线性弯曲过程，不出现分支型初始屈曲和二次屈曲，最终表现为极值型破坏。

只要有剪力作用，层压板在后屈曲阶段不会出现二次分支型屈曲，或者说在达到二次屈曲之前就呈极值型破坏了。

在纯剪载荷作用下，铺层次序对层压板的初始屈曲载荷和破坏载荷均有明显影响。一般来说， $\pm 45^\circ$ 铺层的层压板的初始屈曲载荷和破坏载荷最低。由于复合材料的剪切非线性效应十分显著，应将较多的 $0^\circ$ 和 $90^\circ$ 铺层置于板的外表面。

根据上述研究，工程实际中的层压板不易发生分支型屈曲，更不易发生二次分支型屈曲。

### 5.3 加筋层压板的后屈曲分析

#### 5.3.1 基本假设和计算模型

对加筋层压板分析时一般采用如下假设：

- (1) 由纤维和基体组成的板和加筋在变形过程中始终服从广义胡克定律；
- (2) 弯曲变形符合 Mindlin 假定，即变形前中面的法线在变形后仍为一一直线，但不再是法线；
- (3) 忽略加筋在自身平面内的弯曲刚度。

对加筋层压板建立有限元分析模型时，通常的做法是将其自然地离散为板和梁两种单元，即把筋条作为板单元的边线，这样做的优点是附加在板上的筋条只增加梁单元数而不额外增加板的结点数（自由度数），但网格划分的随意性会受到筋条布置的限制。近来有人提出的加筋板单元，筋条可处于板单元内的任意位置，因而使网格划分不受限制。

#### 5.3.2 加筋层压板的后屈曲特性

如图 5-12 所示，带加固板条的矩形层压板（取自 NASA 报告），长 177.8mm，宽 152.4mm，基板的铺层为  $[\pm 45 / 90 / 0]_{2s}$ ，共 16 层。加固板条位于 ACHJ 区，铺层为  $[\pm 45]_{2s}$ ，共 8 层。单层材料性能为： $E_{11} = 131\text{GPa}$ ， $E_{22} = 13\text{GPa}$ ， $G_{12} = 6.4\text{GPa}$ ， $\nu_{12} = 0.38$ ，单层厚度  $t = 0.14\text{mm}$ 。

AE 边和 FJ 边受均匀轴压力  $N_x$ ，由铅块夹紧；BI 边和 DG 边为简支边界。具体的边界条件如下：

AE 边： $u = v = w = \theta_x = \theta_y = 0$ ；

FJ 边： $v = \theta_x = \theta_y = 0$ ；

BI 边、DG 边： $w = \theta_x = 0$ 。

采用四边形板单元划分为密和稀两种网格。密网格为  $14 \times 14$  如图 5-13 (a)，稀网格为  $11 \times 10$  如图 5-13 (b)。处理加固件时有两种方式：一种方式是将其离散为一系列筋条

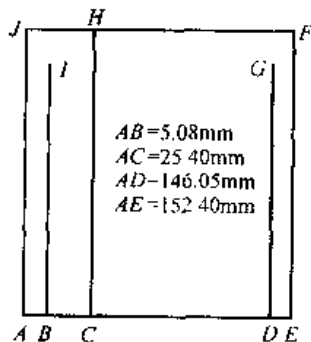
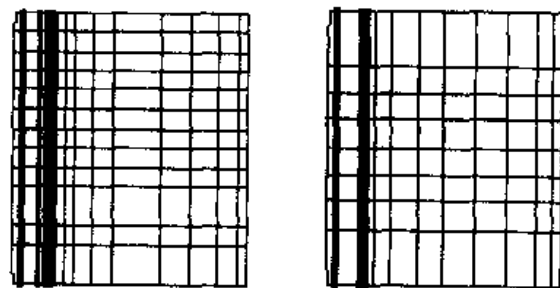


图 5-12 加筋层压板尺寸图



(a) 密网格

(b) 粗网格

图 5-13 加筋层压板网格图

单元，迭加到所在的板单元上；另一种方式是将其处理为基板的附加厚度，于是整个结构作为一块变厚度板，两种处理方式所得结果差别不大。图 5-14 给出了板中心点的载荷-挠度曲线，图中带圆点的实线为按稀网格模型计算的结果；带方点的虚线为按密网格模型计算的结果。两种计算结果基本一致，在不太明显的极值型屈曲之后具有明显的后屈曲强度。图中的三角形点是试验实测的变形路径，理论计算结果与实测数据差别较大。据 NASA 报告分析，是由于层压板试件制造的几何缺陷、试验的边界条件与有限元计算模型的不严格符合，以及轴压载荷沿边界分布不均匀等因素引起的。

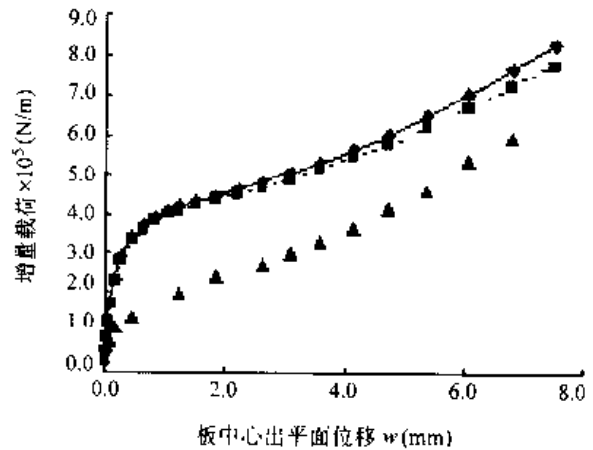


图 5-14 加筋层压板中心点的后屈曲路径

## 5.4 考虑温湿效应的后屈曲分析

高速飞行中气动力加热和发动机工作的热源等都可能使飞机结构处于湿热环境下，由于复合材料的导热性能差，热量不能很快向结构内部传递，往往在受热边界附近产生很大的湿度梯度。试验表明，即使在单纯的热载作用下也可能引起结构的局部屈曲和后屈曲变形。因此，对湿热环境下的复合材料层压结构进行屈曲和后屈曲分析时，先要计算层压结构中的温度分布。温度分布既是位置的函数，又是时间的函数，属大变形情况下的瞬态热传导问题。

本节中给出了层压板的热应力公式，层压梁的热应力公式，增量热平衡方程的有限元列式及典型的考题。关于温度和湿度对材料性能的影响见《复合材料设计手册》第十章。

### 5.4.1 考虑温湿效应的有限元列式

由单层板的湿热应变关系可知，湿和热所导致材料的本构关系在形式上完全一致，因此在以下的推导中仅以热为例。

设由（机械）载荷和温度（热载）变化引起的层压板（梁）第  $k$  层单层板应变增量为  $\Delta\epsilon$ ， $\Delta\epsilon$  可分解为膜应变增量  $\Delta\epsilon$ 、弯曲应变增量  $\Delta\chi$  和剪切应变增量  $\Delta\gamma$ 。

$$\text{即} \quad \{\Delta\epsilon\}_k = \{\Delta\epsilon \quad \Delta\chi \quad \Delta\gamma\}_k^T \quad (5-36)$$

则单层板（梁）的本构关系可写成

$$\{\Delta\sigma\}_k = [E]_k (\{\Delta\epsilon\}_k + \alpha \{\Delta\chi\}_k - \{\alpha\}_k \Delta T) \quad (5-37)$$

式中： $\Delta T$ ——温度变化；

$\{\alpha\}_k$ ——第  $k$  层单层板的热膨胀系数；

$\{\Delta\sigma\}_k$ ——第  $k$  层单层板的应力；

$[E]_k$ ——第  $k$  层单层板的模量。

#### 5.4.1.1 层压板的热应力

$$\text{层压板的膜应变} \quad \Delta\bar{\epsilon} = \{\Delta\epsilon_x \quad \Delta\epsilon_y \quad \Delta\gamma_{xy}\}^T \quad (5-38)$$



$$\text{弯曲应变} \quad \Delta\chi = \{\Delta\chi_x \quad \Delta\chi_y \quad \Delta\chi_{xy}\}^T \quad (5-39)$$

$$\text{横向剪切应变} \quad \Delta\gamma = \{\Delta\gamma_{yz} \quad \Delta\gamma_{xz}\}^T \quad (5-40)$$

将式 (5-38) ~ (5-40) 代入式 (5-37), 并沿板的厚度方向积分, 得出层压板的内力-应变关系

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \\ \Delta Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon \\ \Delta\chi \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta N^{(T)} \\ \Delta M^{(T)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-41)$$

其中,

$$\Delta N = \{\Delta N_x \quad \Delta N_y \quad \Delta N_{xy}\}^T, \Delta M = \{\Delta M_x \quad \Delta M_y \quad \Delta M_{xy}\}^T, \Delta Q = \{\Delta Q_{yz} \quad \Delta Q_{xz}\}^T \quad (5-42)$$

$\Delta N^{(T)}$  和  $\Delta M^{(T)}$  为由温度引起的膜力和弯矩增量

$$\begin{Bmatrix} \Delta N^{(T)} \\ \Delta M^{(T)} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^K \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \{\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_{xy}\}_k [\bar{Q}_{ij}]_k \Delta T dz \quad (5-43)$$

上式中  $K$  为总铺层数,  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$  为第  $k$  层单层板主方向上的热膨胀系数, 由该单层板材料的热膨胀系数经坐标转换后得到。 $(\bar{Q}_{ij})_k$  为该单层板的偏轴模量。式 (5-41) 中  $A, B, D$  和  $S$  分别为层压板的拉伸、耦合、弯曲和横向剪切刚度矩阵, 其中各元素可表示为:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^K \int_{h_{k-1}}^{h_k} (1, z, z^2) (\bar{Q}_{ij})_k dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (5-44)$$

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^K \int_{h_{k-1}}^{h_k} K_i K_j (\bar{Q}_{ij})_k dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (5-45)$$

$K_i, K_j$  为剪切刚度修正系数, 通常情况下取  $K_i = K_j = 5/6$ , 详见参考文献 [25]。

#### 5.4.1.2 层压梁的热应力

层压梁中单层的应变增量

$$\{\Delta\epsilon\}_k = \{\Delta\epsilon_x \quad \Delta\chi_y \quad \Delta\chi_x \quad \Delta\gamma_{xz}\}_k^T \quad (5-46)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_x &= \Delta u_{,x} + (\Delta u_{,x}^2 + \Delta w_{,x}^2) / 2 \\ \Delta\chi_{xy} &= -\Delta\theta_{y,x}, \quad \Delta\chi_x = \Delta\theta_{x,x}, \quad \Delta\chi_{xz} = -\Delta\theta_y - \Delta w_{,x} \end{aligned} \quad (5-47)$$

将式 (5-46) 代入式 (5-44) 和 (5-45), 并沿梁的高度积分, 可得层压梁的内力-应变关系

$$\begin{Bmatrix} \Delta N_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_x \\ \Delta Q_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ \text{对} & & D_{33} & D_{34} \\ & & & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_x \\ \Delta\chi_y \\ \Delta\chi_x \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta N_x^{(T)} \\ \Delta M_y^{(T)} \\ \Delta M_x^{(T)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-48)$$

上式中  $\Delta N_x^{(T)}, \Delta M_y^{(T)}$  和  $\Delta M_x^{(T)}$  与式 (5-41) 中相应项具有同样的意义和表达式。

### 5.4.1.3 增量型平衡方程及求解格式

设在初始位形下单元的体元为  $dV^0$ 、面元为  $dS^0$  单元，第  $l$  和第  $l+1$  载荷步上的变量如表 5-5 所示。

表 5-5 不同时刻的变量

载荷步 (时刻)	Kirchhoff 应力	Green 应变	位移	体积力	边界力	节点位移	温度
$l(t)$	$\sigma^0$	$\epsilon^0$	$u^0$	$f^0$	$p^0$	$q^0$	$T^0$
$l+1(t+\Delta t)$	$\sigma^0 + \Delta\sigma$	$\epsilon^0 + \Delta\epsilon$	$u^0 + \Delta u$	$f^0 + \Delta f$	$p^0 + \Delta p$	$q^0 + \Delta q$	$T^0 + \Delta T$

注：表中 Kirchhoff 应力和 Green 应变分别为相对于初始坐标的应力和应变。

则单元在  $\Delta t$  时间步内的虚功方程为

$$\int_{v_0} [(\sigma^0 + \Delta\sigma)^T \delta\Delta\epsilon - (F^0 + \Delta F) \delta\Delta u] dV^0 - \int_{s_0} (p^0 + \Delta p) \delta\Delta u dS^0 = 0 \quad (5-49)$$

设单元的增量位移

$$\Delta u = N\Delta q \quad (5-50)$$

$N$  为单元位移插值函数，单元增量应变的变分形式为

$$\delta\Delta\epsilon = B\delta\Delta q \quad (5-51)$$

其中  $B = B_{L0} + B_{L1} + B_n = (H + A + \Delta A) G$

且  $B_{L0} = H G$ ,  $B_{L1} = A G$ ,  $B_n = \Delta A G$

这里  $H$  和  $G$  是仅与单元几何尺寸有关的矩阵算子， $A$  矩阵与单元的初位移  $u^0$  有关，设  $\Delta\epsilon^{(M)}$  和  $\Delta\epsilon^{(T)}$  分别为  $\Delta T$  时间增量步内由机械载荷  $\Delta P^{(M)}$  和温度载荷  $\Delta P^{(T)}$  引起的应变增量。

则  $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^{(M)} + \Delta\epsilon^{(T)}$

由  $\Delta\sigma = E(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^{(T)})$ ,  $\Delta\epsilon^{(T)} = \alpha\Delta T$  (5-52)

将式(5-50)~式(5-52)代入式(5-49)，得到单元离散型增量平衡方程为

$$K_T \Delta q = (K_L + K_o) \Delta q = \Delta P - \Delta \int_{v_0} B^T \sigma^0 dV^0 \quad (5-53)$$

当方程(5-53)按增量型  $N-R$  迭代方法求解时，在  $\Delta t$  微小增量步内可忽略几何阵  $B$  中的高阶项  $B_n$ ，即可将  $B = B_{L0} + B_{L1}$  代入上列各式。在  $\Delta t$  时间增量步内，第  $(j+1)$  次迭代的迭代格式为

$$K_T(q_j^i) \Delta q_{j+1} = \Delta P^{i+\Delta} - \Delta \int_{v_0} (B_j^i)^T \sigma_j dV^0 \quad (5-54)$$

其中  $K_T = K_{L0} + K_{L1}(q_j^i) + K_o(q_j^i)$ ,  $q_{j+1}^i = q_j^i + \Delta q_{j+1}$

## 5.4.2 层压板温湿后屈曲效应

### 5.4.2.1 层压平板的温湿后屈曲效应

图 5-15 给出了层压平板承受有温度梯度热载的后屈曲特性。由于层压板上、下表面的温差很大，分析中考虑了沿厚度方向的温度梯度。

层压板的几何参数为  $a/b = 1.0$ ,  $a/h = 100.0$ ; 铺层为  $[-\theta/\theta]_6$ ; 单层材料性能为

$E_{11}/E_{22} = 40.0$ ,  $G_{12}/E_{22} = 0.5$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0 \times 10^{-6}$ ; 层压平板的内、外表面温度分别为  $T_0$  和  $T_1$ 。图 5-15 (a) 和图 5-15 (b) 给出了边界条件为四边简支和四边固支情况下,  $\theta$  为  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  和  $60^\circ$  时层压平板的温度 (热载) - 挠度 (板中心点的位移) 曲线。图中  $T^*$  表示层压平板的最小屈曲热载, 简支边界条件下  $T^* = 263.56$ , 固支边界下  $T^* = 504.16$ 。

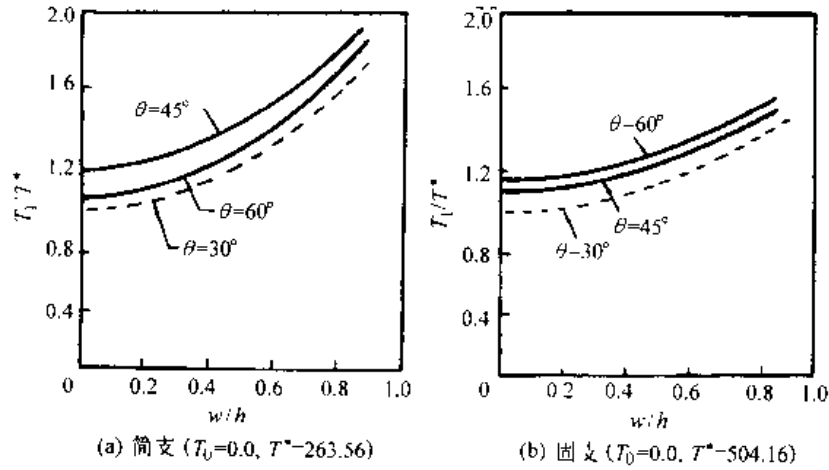


图 5-15 各种铺层角的层压平板的温度 - 挠度曲线

#### 5.4.2.2 层压曲板的温湿后屈曲效应<sup>[19]</sup>

图 5-16 给出了层压曲板承受温度热载的后屈曲特性。

层压圆柱曲板的长度为  $L = 160$  cm, 宽度为  $W = 160$  cm, 板厚  $h = 0.8$  cm, 曲率半径  $R = 800$  cm。有两种铺层: 一种为特殊正交异性铺层  $[0_4]$ ; 另一种为反对称铺层  $[-67.5/67.5/-67.5/67.5]$ 。单层材料性能为  $E_{11} = 138$  GPa,  $E_{22} = 8.28$  GPa,  $G_{12} = 6.9$  GPa,  $\nu_{12} = 0.33$ ,  $\alpha_1 = 0.18 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_2 = 27 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。沿对称边 ( $x = W/2$ ):  $u = w, v = 0$ , 沿对称边 ( $y = L/2$ ):  $v = w, u = 0$ , 沿边界 ( $x = W$ ) 和 ( $y = L$ ):  $u = v = w = 0$ 。

图 5-16 (a) 为特殊正交异性厚曲板的温度 - 挠度曲线。图 5-16 (b) 为反对称铺层层压圆柱曲板的温度 - 挠度曲线。

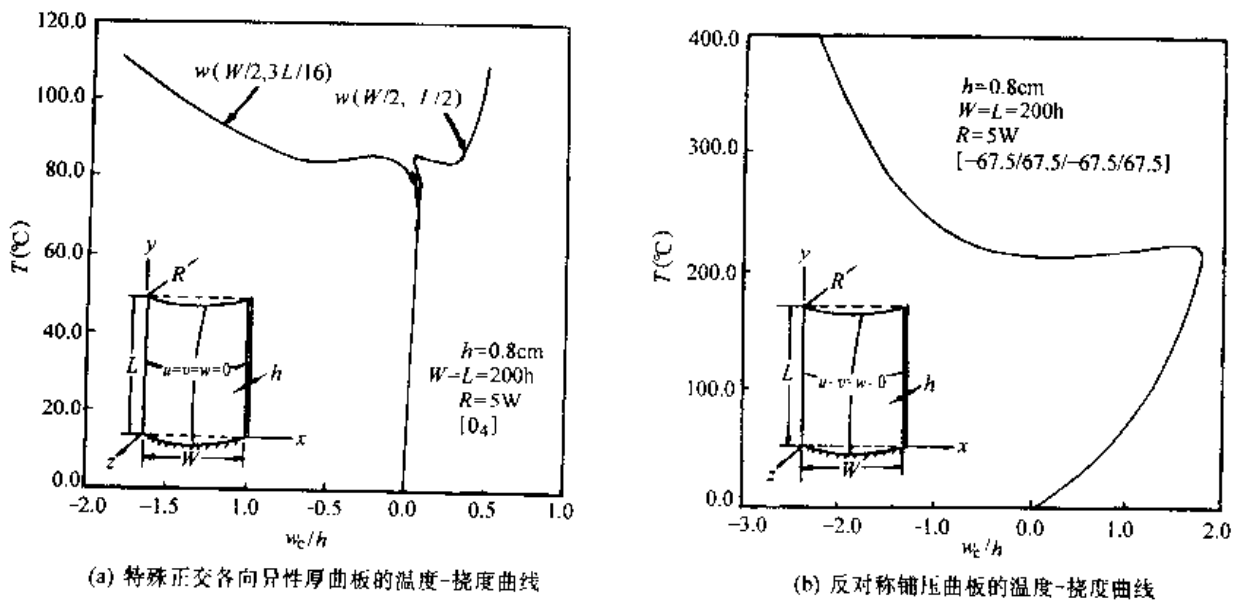


图 5-16 层压曲板热后屈曲的温度 - 挠度曲线

从图 5-15 和图 5-16 可见，无论是复合材料平板还是曲板，温度对其屈曲和后屈曲的影响都十分明显。

## 5.5 含分层层压板（壳）的后屈曲分析

复合材料层压构件在制造和使用过程中常常会出现分层损伤，在轴压下会引起分层屈曲，而使其承载能力大大下降，因此对结构构成潜在威胁。近十年来，层压板壳分层屈曲问题受到国际力学界的密切关注，并取得了许多研究成果。对这一问题的研究方法有解析法和有限元法，计算模型有二维和三维的，采用二维模型的有限元方法比较接近于工程实用。

对于复合材料层压板壳的分层屈曲问题，采用一般的板壳单元直接建立相应的力学模型存在较大困难。这里介绍一种简单、实用的参考面单元模型。这类单元可由一般板壳单元经简单的数学变换得到，由于其节点位置的选择较为灵活，故可直接用于建立分层损伤板壳的有限元模型。

### 5.5.1 分层损伤模型

#### 5.5.1.1 基本假设

(1) 材料为纤维增强复合材料，满足广义胡克定律；(2) 层压板的变形满足 Mindlin 假定，即直而不法假定；(3) 不考虑加载过程中分层的扩展；(4) 不计屈曲时层压板子层间的接触，并允许子层屈曲波形相互嵌入。

#### 5.5.1.2 参考面单元列式<sup>[28,29]</sup>

通常，板/壳单元的节点取在板/壳中面，这类单元称为“原单元”（以下用“0”标识）。但它们不能在厚度方向上直接与（节点不在原单元中而上的）其他单元联接，如有分层的各子层前沿处节点之间的相互联接。过去人们往往采用增加新的位移约束方程或者增加刚臂单元来实现节点之间的联接，这样必然增加问题的复杂性。

根据板/壳变形的直而不法假定，单元的节点不一定要选择在中面上，可以选择在中面法线上任意一点处，而具有表示其余各点位移的能力，这类单元称为“参考面单元”。采用参考面单元的方法则可实现板单元在厚度方向上的联接。

如图 5-17 所示， $1^0 2^0 3^0 4^0$  为原单元， $1^2 3^4$  为参考面单元。设原单元和参考面单元的位移向量分别为：

$$q^0 = \{ q_1^0 \quad q_2^0 \quad \cdots \quad q_i^0 \quad \cdots \quad q_n^0 \} \quad (5-55a)$$

$$q = \{ q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_i \quad \cdots \quad q_n \} \quad (5-55b)$$

设参考面单元节点  $i$  与原单元节点  $i^0$  在厚度方向上的坐标差为

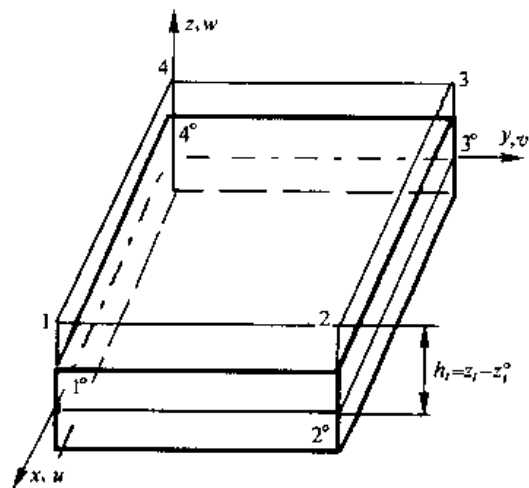


图 5-17 参考面单元

$$h_i = z_i - z_i^0 \quad (5-56)$$

则原单元节点  $i^0$  和参考面单元节点  $i$  的位移向量可分别写为

$$q_i^0 = \{u_i^0, v_i^0, w_i^0, \theta_{x_i}^0, \theta_{y_i}^0\} \quad (5-57a)$$

$$q_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5-57b)$$

根据直而不法假定，两种单元的位移关系为

$$q_i^0 = \bar{T}_{h_i} q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5-58)$$

其中

$$\bar{T}_{h_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -h_i \\ 0 & 1 & 0 & -h_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5-59)$$

设

$$T_h = \begin{bmatrix} \bar{T}_{h_1} & & & 0 \\ & \bar{T}_{h_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{T}_{h_n} \end{bmatrix} \quad (5-60)$$

则两种单元的几何关系为

$$\epsilon_0 = B_0 q_0 = B_0 T_h q \quad (5-61)$$

令  $B = B_0 T_h$

$B_0$  为节点取在板中面上的原单元的几何阵， $B$  为节点取在中面任一点上参考面单元的几何阵。则原单元应力、应变可写为

$$\epsilon_0 = Bq \quad (5-62a)$$

$$\sigma_0 = E\epsilon_0 = EBq \quad (5-62b)$$

由此可得参考面单元的平衡方程：

$$Kq = R \quad (5-63)$$

其中  $K = T_h^T K_0 T_h$        $R = T_h^T R_0$       (5-64)

上式中  $K_0$ 、 $R_0$  和  $K$ 、 $R$  分别为原单元和参考面单元的刚度阵和等效节点力。

由式 (5-62a) 和 (5-62b) 知，参考面单元和原单元有相同的应变场和应力场，因此在力学上是完全等价的。但参考面单元节点位置的选择比较灵活（反映在  $[T_h]$  中），从而深化了板壳单元的概念并拓宽了其适用范围。

如果满足 Mindlin 假设，在单元列式中用  $[B]$  阵替换  $[B_0]$  阵，一般板壳单元就能按照以上步骤，方便地改造为相应的参考面单元。参考面单元能用于分析各种线弹性材料板壳的分层问题，而且这些板壳可包含多个分层损伤。

### 5.5.1.3 分层损伤的有限元模型

含分层损伤的层压板结构如图 5-18 所示。脱层使层压板分为三个区：1—基层，2—上

子层，3—下子层。基层与两子层的联接处称为分层前沿（柱面）。分层前沿的变形仍满足 Mindlin 直而不法假定。

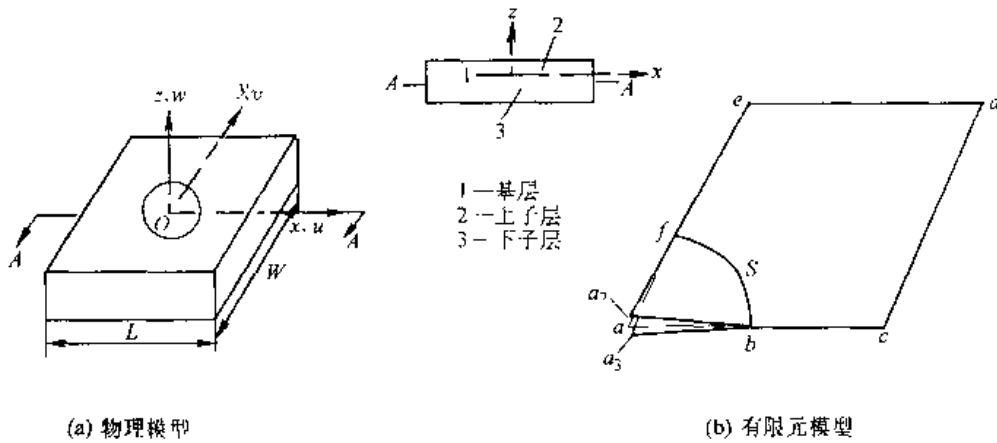


图 5-18 分层损伤板的分析模型

取出层压板在脱层前沿附近的一部分，如图 5-18 (b) 所示，对 1、2、3 区分别划分单元，且置所有节点在分层所在的平面上。注意到节点  $a$  和  $a_2$ 、 $a_3$  在空间的位置是重合的，但它们属于不同的单元，位移是各自独立的，这样可保证分层处各子层的独立变形。三个区域在分层前沿  $S$  上有公共的节点，因而能自然满足子层与子层、子层与未分层区的位移连续条件。按照这种方式，参考而单元可以方便地建立在厚度方向上有多个分层及面内多处分层的有限元模型。

### 5.5.2 含单分层损伤层压板的后屈曲特性<sup>[21]</sup>

#### 5.5.2.1 含穿透分层层压板的后屈曲分析

图 5-19 给出了受轴压  $P$  的含穿透分层层压板的分析结果。层压板铺层为  $[0 // 0 / 0 / 0]$  (双斜杠“//”表示分层位置)、两对边固支。层压板板长  $L = 150\text{mm}$ ，板宽  $W =$

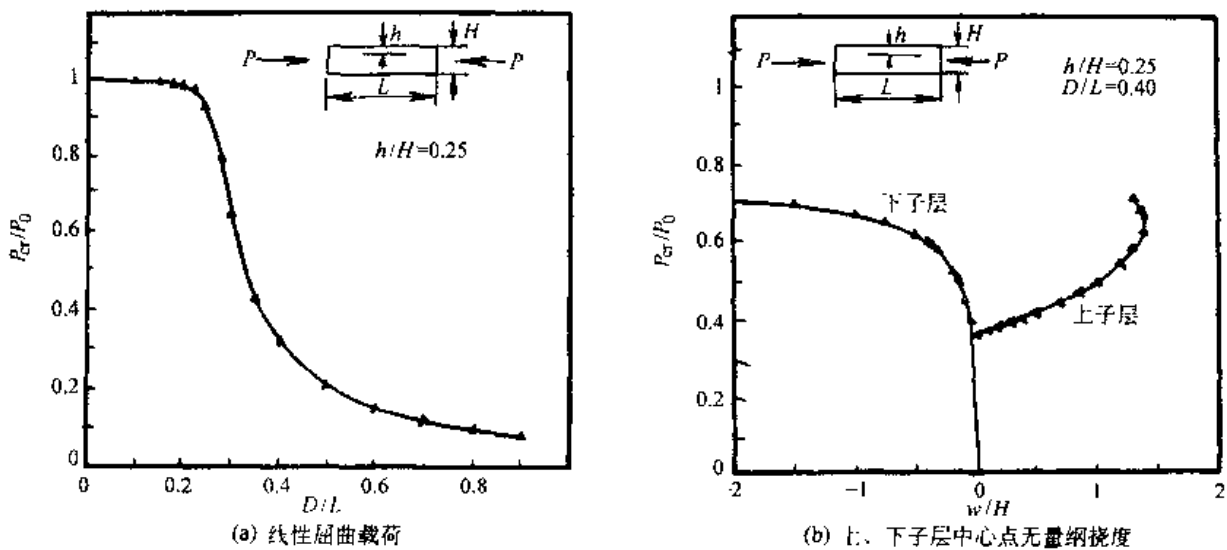


图 5-19 含穿透分层层压板的分析结果

10mm,  $h$  为子层厚度,  $H$  为层压板厚度,  $h/H = 0.25$ 。单层材料性能为:  $E_{11} = 135.4\text{GPa}$ ,  $E_{22} = E_{33} = 9.6\text{GPa}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 4.8\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.31$ ,  $\nu_{23} = 0.52$ , 单层厚  $t = 0.125\text{mm}$ 。

图 5-19 (a) 为含穿透分层的层压板的线性屈曲载荷 ( $P_{cr}/P_0$ ) 随分层尺寸 ( $D/L$ ) 的变化曲线,  $P_{cr}$  为含穿透分层的层压板的线性屈曲载荷,  $P_0$  为理想板 (未分层板) 的欧拉屈曲载荷,  $D$  为分层长度。图 5-19 (b) 为含穿透分层的  $D/L = 0.4$  时, 上、下子层中心点的后屈曲路径。

### 5.5.2.2 含埋藏分层层压板的后屈曲分析

图 5-20 给出了含埋藏分层层压板的分析结果。层压板有两种铺层  $[0//0/0/0]$  和  $[0//90/90/0]$  (双斜杠“//”表示分层位置), 含一个圆形分层, 四边固支, 受轴压  $P$ 。几何尺寸为: 板长  $L = 150\text{mm}$ , 板宽  $W = 150\text{mm}$ 。材料性能同含穿透分层的层压板。

图 5-20 (a) 给出了两种铺层的层压板的线性屈曲载荷 ( $P_{cr}/P_0$ ) 随分层尺寸 ( $D/L$ ) 的变化曲线,  $P_{cr}$  为含埋藏分层的层压板的线性屈曲载荷,  $P_0$  为理想板 (未分层板) 的欧拉屈曲载荷,  $D$  为分层直径。图 5-20 (b) 中给出了两种分层尺寸  $D/L = 0.33$  和  $0.53$  时, 上、下子层中心点的载荷-挠度曲线。

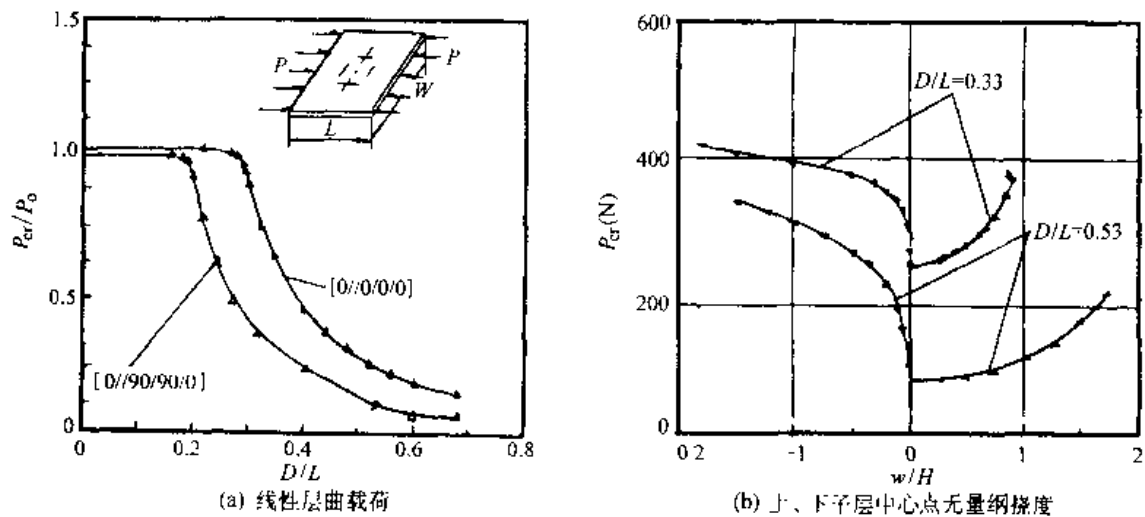


图 5-20 含埋藏分层层压板的分析结果

从图 5-19 (a) 和 5-20 (a) 可见, 含分层层压板结构的线性屈曲载荷, 在分层尺寸较小时几乎不变, 而到达某一临界值之后则急剧下降。因此, 对于有分层层压板结构的安全性, 确定该临界值是十分重要的。

同时, 图 5-19 (b) 和 5-20 (b) 可见, 对有表面分层的子板, 尽管其局部屈曲载荷很低, 但它只是一种局部行为, 不会使整个层压板的面内压缩刚度发生太大变化, 此时层压板仍具有较大的后屈曲强度。

## 5.6 后屈曲分析程序系统 (COMPOSS) 介绍

COMPOSS 是在积累和总结了一系列研究成果的基础上, 我们自行研制的复合材料结构屈曲、后屈曲和破坏分析的专用程序系统<sup>[26,27]</sup>。该程序不仅反映了国内外在非线性结构分析方面最新理论和方法的研究成果, 而且, 其正确性、可靠性得到了许多典型考题的验证,

对于多种实际复合材料薄壁结构和试验件的分析计算结果得到了试验验证。

### 5.6.1 COMPOSS 的功能

可对复合材料薄壁加筋结构进行线弹性的强度和屈曲（分支型）分析、后屈曲路径跟踪、非线性的强度和屈曲（极值型）分析，以及考虑材料内部损伤积累和分层损伤的后屈曲强度和破坏分析，其主要功能如下。

#### 5.6.1.1 静力分析

静力分析主要是用来求解结构在与时间无关或时间作用效果可忽略的静力分析（如集中力/分布力、温度载荷、指定位移等作用下的响应），得出所需的结点位移、结点力、结构内任意一点的应力和应变等。可提供小变形假定下的线性分析和大变形假定下的非线性分析结果。

#### 5.6.1.2 屈曲和后屈曲分析

屈曲分析主要用于研究结构在特定载荷下的屈曲临界载荷以及屈曲模态。包括线性屈曲分析和非线性屈曲分析。

线性屈曲也称为分支型屈曲。当屈曲产生时，结构的构形由一个平衡状态突然跳到另一个平衡状态。

非线性屈曲以大变形理论为基础，包括几何非线性失稳分析和非线性后屈曲分析，在算法上采用先进的微分刚度概念，考虑几何关系中高阶非线性项，能准确跟踪结构中各点的非线性变形路径和较精确地确定相应的失稳临界载荷（通常为极值型），并且能通过载荷极值点和位移极值点（Snap-through and Snap-back）。

#### 5.6.1.3 破坏分析

在非线性分析中，每次迭代后都要对每个单元的每一层应力用破坏准则进行检查，判断该层是否破坏并区分其破坏类型，然后作相应的刚度折减，以形成下一次迭代的单元刚度，继续进行结构的非线性分析。在大变形分析中，可考虑材料内部的局部损伤破坏和积累，并具有记录各加载步上材料损伤情况的功能。假如一个单元的各层都出现了破坏（含不同类型的），则称为穿孔，分析过程中将显示危险单元警告。在每一增量步结束，都要按结构最终破坏准则检查是否达到破坏极限，一旦达到破坏极限，计算立即停止。

### 5.6.2 COMPOSS 的原理和方法

#### 5.6.2.1 分析模型

本程序系统采用的非线性逐步破坏分析模型，同时考虑了结构变形的几何非线性和由局部损伤破坏引起的物理非线性，以及两者的耦合影响。采用这一分析模型可较好地模拟结构受载后的变形破坏过程。

#### 5.6.2.2 线性屈曲和非线性屈曲（参考本章 5.1.2.1）

#### 5.6.2.3 非线性有限元列式（参考本章 5.1.3）

#### 5.6.2.4 求解非线性方程组的方法（参考本章 5.1.4）

COMPOSS 中提供的求解非线性方程组的加速弧长法（Acceleration Arc-length Method）是改进了的 Crisfield 方法。该方法特别适用于复合材料薄壁结构在后屈曲阶段有非稳定区域的求解，不仅可准确地求出分支屈曲点和极值屈曲点，而且可跟踪结构的非稳定阶



段及后屈曲响应。

#### 5.6.2.5 破坏准则

(1) 材料内部损伤破坏准则 在对复合材料层压结构进行非线性屈曲和强度分析的过程中, 每一步都考虑结构内部各层的破坏情况。判别复合材料的失效准则包括: Tsai-Hill 理论, Hoffman 理论和 Tsai-Wu 理论, 和最大应变理论以及相应的退化刚度准则。

(2) 结构破坏准则 结构变形的几何非线性具体反映在结构刚度变化的非线性特性上。由材料内部损伤引起的局部刚度折减也必然导致结构刚度变化。

COMPOSS 中采用刚度降的概念来综合几何、物理非线性和屈曲等因素对结构承载能力的影响。按两个条件判断结构破坏: 首先是结构当前的切线刚度趋于零; 其二是在此极值点之后, 结构软化并进入卸载状态。满足上述两个条件即可认为结构已丧失承载能力, 此时的载荷称为极限载荷。

### 5.6.3 COMPOSS 程序系统的结构特点

#### 5.6.3.1 模块化

根据模块化设计思想, COMPOSS 程序系统由以下五个模块组成: (1) 线性分析模块; (2) 非线性分析模块; (3) 破坏分析模块; (4) 温湿响应模块; (5) 特征方程和非线性方程组求解模块。因此, 随着发展的需要, 容易扩充程序系统的功能和改进算法。

#### 5.6.3.2 单元库

在 COMPOSS 3.0 中, 开发了三种带旋转自由度的复合材料板壳单元: 三角形拟协调板壳单元、四边形等参板壳单元和八结点等参单元; 还开发了一种两结点非协调层压梁单元。采用这些单元可满足现代航空、航天结构的分析需要, 能保证求解的精度和可靠性。

(1) 这些单元可满足薄壁加筋结构离散化(划分网格)的需要, 并可有效地处理网格划分的不连续性, 如板壳单元与筋条连接, 稀网格到密网格的过渡等;

(2) 一旦模型建好后, 就可毫无困难地用于不同类型的分析, 如静力分析, 屈曲分析和破坏分析。

#### 5.6.3.3 前后处理功能和支持平台

前处理部分利用 NASTRAN-FEMAP 软件, 可自动生成网格和数据文件; 后处理部分可在 WIN95-98 环境下利用 EXCEL 软件, 可给出非线性分析过程中结构的变形图和内力分布图, 以及它们的等值线云图。当材料内部开始出现破坏时, 后处理功能能给出结构内部损伤区域和类型图, 以及显示结构的最终破坏形式。

COMPOSS 程序系统已从 DOS 系统移植到 WIN95-98 操作系统下, 利用 C++ 强大的图形功能实现了有限元线程与后处理线程之间的动态数据交换 (DDE) 和实时可视化仿真功能, 能方便、直观地观察当前计算状态和结构的各种力学性态。

## 参 考 文 献

- [1] Chia C Y. Nonlinear Analysis of Plates. New York: McGraw-Hill, 1980
- [2] Leissa Arthur W. A Review of Laminated Composite Plate Buckling. Appl. Mech. Rev. 1987, 40 (5)
- [3] 何君毅, 林祥都. 工程结构非线性问题的数值解法. 北京: 国防工业出版社, 1994

- [4] Chang Fu - Kuo, Zafer Kutlu. Strength and Response of Cylindrical Composite Shells Subjected to out-of-Plate Loadings. *J. Comp. Mater.*, 1989, 23 (1)
- [5] 琼斯 R.M. 复合材料力学. 上海: 上海科学技术出版, 1981
- [6] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method*, Vol2.4ed. New York: McGraw-Hill, 1991
- [7] Clarke Murray J., Hancock Gregory J. A Study of Incremental Iterative Strategies for Nonlinear Analysis. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 1990, 29 (7): 1365 - 1391
- [8] Teng J.G., Luo Y.F. A User - Controlled Arc - length Method for Convergence to Predefined Deformation States. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1998, 14: 51 - 58
- [9] Zhang Y., Matthews F.L. Postbuckling Behavior of Anisotropic Laminated Plates under Pure Shear Combined with Compressive Loading. *AIAA Journal*, 1984, 22 (2): 281 - 286
- [10] Kim J.H., Lee S.W. Geometrically Non - linear Shells. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 1992, 33: 1703 - 1720
- [11] Kweon J.H., Hong C.S. An Improved Arc - Length Method for Postbuckling Analysis of Composite Cylindrical Panels. *Comput. & Struct.*, 1994, 53 (3): 541 - 549
- [12] Leissa Arthur W. Instability Considerations. *Composite Structures Analysis and Design*, 445 - 449
- [13] 朱菊芬, 杨海平. 复合材料层合加筋板后屈曲强度及破坏研究. *航空学报*, 1995, 16 (1): 118 - 122
- [14] 朱菊芬, 杨海平. 求解结构后屈曲路径的加速弧长法. *大连理工大学学报*, 1994, 34 (1): 17 - 22
- [15] 朱菊芬, 汪海, 成万植. 复合材料层合板的二次失稳和破坏研究. *航空学报*, 1991, 12 (9): 42 - 46
- [16] Long Y.Q., Xu Y. Generalized Conforming Quadrilateral Membrane Element with Vertex Rigid Rotational Freedoms. *Comput. & Struct.*, 1994, 52: 749 - 756
- [17] 朱菊芬, 郑罡. 带旋转自由度  $C^0$  类任意四边形板 (壳) 单元. *计算力学学报*, 2000, 17 (3): 287 - 292
- [18] Zhang Qun, Lu Mu, Kuang Wenqi. Application of the Generalized Conforming Flat Shell Element to Geometrical Non - linear Analysis for Composite Stiffened Shell Structures. *Commun. Numer. Mech. Engin.*, 1999, 15: 399 - 412
- [19] Chen L.W., Chen L.Y. Thermal Postbuckling Analysis of Laminated Composite Plates by the Finite Element Method. *Compos Struct*, 1989, 12: 257 - 270
- [20] Madenc E., Barut E. Thermal Postbuckling Analysis of Cylindrically Curved Composite Laminates with a Hole. *Inter J for Num Math in Eng*, 1994, 37 (12): 2073 - 2091
- [21] Kim H.J. Postbuckling Analysis of Composite Laminates with a Delamination. *Comp & Struct*, 1997, 62 (6)
- [22] 崔德刚主编, 章怡宁副主编. 结构稳定性手册. 北京: 航空工业出版社, 1996
- [23] 航空航天工业部科学技术研究院编. 复合材料设计手册. 北京: 航空工业出版社, 1990
- [24] 王震鸣, 杜善义, 张恒, 范赋群主编. 复合材料及其结构的力学设计、应用和评价. 北京: 北京大学出版社, 1998: 162 - 185
- [25] 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学. 北京: 机械工业出版社, 1991
- [26] 朱菊芬, 汪海. 复合材料加筋板壳结构的后屈曲强度及破坏分析程序系统. *计算结构力学及其应用*, 1996, 13 (4): 489 - 493
- [27] 朱菊芬, 郑罡, 汪海, 初晓婷. 复合材料薄壁结构屈曲、后屈曲及破坏分析专用程序系统. 全国第十一次复合材料学术会议论文集. 合肥, 1999.11
- [28] 朱菊芬, 郑罡. 双分层损伤层合板屈曲问题的有限元分析. *航空学报*, 1999, 20 (6)
- [29] 朱菊芬, 郑罡. 层合板壳的分层屈曲分析. *应用数学和力学*, 2000, 21 (3)

## 第 6 章 飞机复合材料结构稳定性的有限元分析

### 6.1 概 述

对飞机结构进行稳定性分析的一般作法是，首先对结构进行总体应力分析，根据分析结果，找出可能出现失稳的部位或构件；然后，对这些可能出现失稳或破坏的部位或构件进行稳定性分析模型“理想化”，求出“理想化”模型的失稳临界应力；最后将失稳临界应力与对应的结构实际应力进行比较，完成稳定性校核。

对于结构形式和受载情况非常复杂，且边界支持条件难以简化为简支或固支的实际飞机结构，分析模型的“理想化”往往受到很大的限制，“理想化”的模型分析结果误差难以预计，因此，常常不能满足工程设计的要求。在这种情况下，建议采用功能较全、适应性较强的有限元分析软件进行稳定性分析。本章将结合几个典型实例，介绍采用有限元分析软件对复杂结构进行稳定性分析时应注意的几个问题，并向读者推荐一种分析处理方法——“局部二次分析法”。

### 6.2 结构稳定性分析中的“局部二次分析法”

#### 6.2.1 “局部二次分析法”简介

“局部二次分析法”的思路是：在总体应力分析的基础上，取出可能出现失稳破坏的部位，建立局部“分析模型”，并对该“分析模型”的边界弹性支持刚度进行模拟，然后对该局部“分析模型”进行有限元稳定性分析。

下面举一个简单的例子来说明“局部二次分析法”的分析步骤。

图 6-1 为一个上表面受压盒段的总体应力分析有限元模型。梁肋之间的蒙皮格子 ABCD 可能出现稳定性破坏，为此，取出蒙皮格子 ABCD 进行二次稳定性分析，具体步骤如下：

- (1) 对盒段进行结构总体应力分析；
- (2) 取出可能出现失稳破坏的部位（蒙皮壁板 ABCD），建立局部“分析模型”；
- (3) 根据总体应力分析结果，模拟局部“分析模型”的弹性支持边界，即由结构总体应力分析得到的蒙皮壁板 ABCD 的边界位移或力换算其边界支持刚度，公式表达式见参考文献[1]；
- (4) 对此局部“分析模型”进行稳定性有限元分析。

局部“分析模型”是沿用总体应力分析时的网格还是进行网格细化，可根据网格布点能否反映分析模型的失稳模态而定。

“局部二次分析法”具有如下特点：

- (1) 突出了分析重点，缩小了解题规模。
- (2) 因为较真实地考虑了考核区域边界的弹性支持条件，因此，采用这种分析方法所得到的分析结果比采用一般工程简化方法所得到的分析结果更接近实际情况。

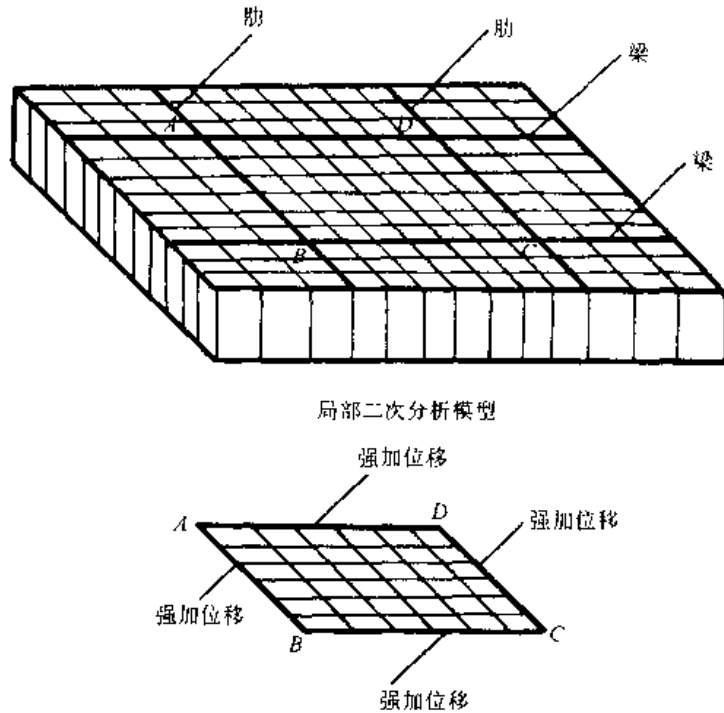


图 6-1 局部二次分析法示例

(3) “局部二次分析法”是在总体应力分析的基础上对局部结构进行的二次稳定性分析的，因此，其数值分析结果的精度与总体应力分析结果的精度基本相同。如果对局部网格进行细化，则可给出更加准确光顺的失稳波形。

(4) “局部二次分析法”给出的不是局部“分析模型”的临界应力，而是校核该结构在此外载情况下是否失稳。

这里值得一提的是，采用这种分析方法时，需要有专门的自动“连接”软件才能提高工作效率，如 SETRAN 软件可提供很好的分析平台<sup>[1,2]</sup>。

### 6.2.2 “局部二次分析法”应用实例

为了说明“局部二次分析法”的应用，图 6-2 给出了各向同性矩形板算例。板的四边为简支，受均布单向轴压  $P_x$  作用。板中间部分 ABCD 的厚度为  $t = 1.0\text{mm}$ ，其余部分的厚度为  $10.0\text{mm}$ 。显然，ABCD 部分将首先发生失稳。板的材料性能为： $E = 72\text{GPa}$ ， $\nu = 0.3$ 。

#### (1) 结构总体应力分析和稳定性分析

采用 MSC / NASTRAN 软件对结构进行总体应力分析，板的网格划分如图 6-3 所示，等分为  $16 \times 14$  单元，按总载荷  $P_x = 8000\text{N}$  计算，均分在每个节点上的载荷为  $533.3\text{N}$ 。

$$P_x = \sum_{i=1}^{15} P_{ix} = 15 \times 533.3 = 8000\text{N}$$

由总体应力分析可得到中间部分 ABCD 边界节点的力和位移。

为了比较起见，对整个结构进行了稳定性分析，其失稳临界特征值为  $\lambda_0 = 2.292$ 。

#### (2) 采用“局部二次分析法”的稳定性分析

取出如图 6-3 中的虚线所示的部分 ABCD。由结构总体应力分析结果可得 ABCD 边界节

点力或位移，据此可得到边界节点的弹性支持刚度，详细过程见参考文献[1]。然后在各边界节点加上由结构总体应力分析得到的力，进行局部二次稳定性分析。由 SETRAN 软件可自动形成 MSC / NASTRAN 块卡并进行稳定性分析。共计算了两种网格划分情况，结果如下：

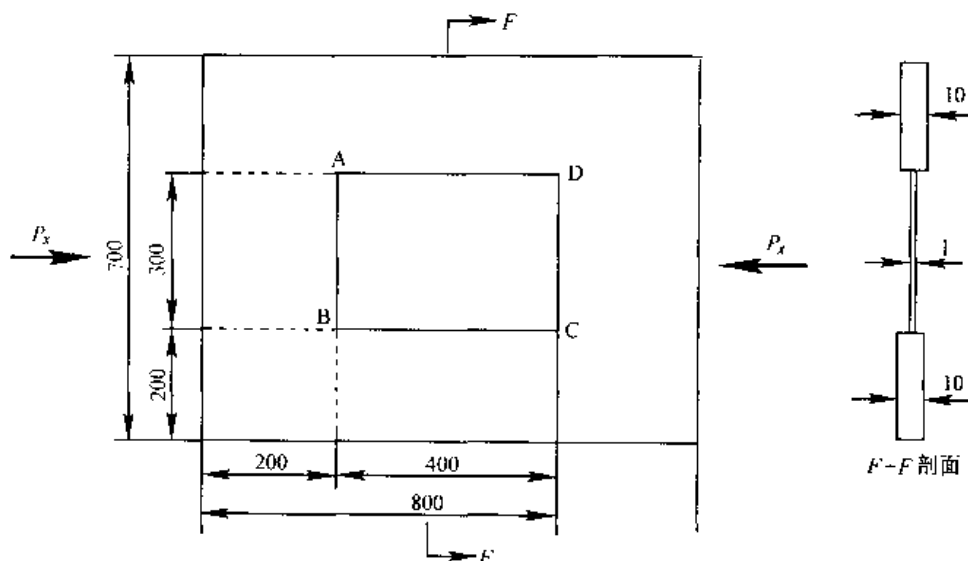


图 6-2 各向同性矩形板算例

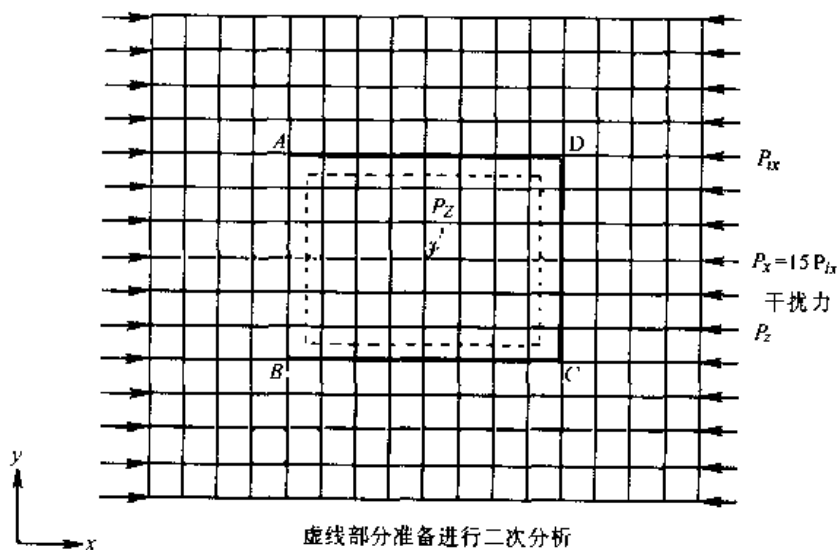


图 6-3 二次分析模型

沿用总体应力分析时的网格划分进行局部二次分析时， $ABCD$  部分的失稳临界特征值为  $\lambda_1 = 2.204$ ；对原来的网格二等分细化后， $ABCD$  部分的失稳临界特征值为  $\lambda_2 = 2.156$ 。

可见，“局部二次分析”结果（ $\lambda_1 = 2.204$  和  $\lambda_2 = 2.156$ ）与整个结构的总体稳定性分析结果（ $\lambda_0 = 2.292$ ）基本一致。

在对大型复杂结构进行稳定性分析时，如果能判断其可能失稳的局部部位，采用“局部二次分析法”对该局部进行分析，则可大大减少分析工作量。但是，在采用此方法时，必须要恰当地建立局部“分析模型”，并对该“分析模型”的边界弹性支持刚度正确地模拟，以保证能获得满意的结果。

## 6.3 结构稳定性分析的有限元素法概述

有限元素法是 20 世纪 50 年代出现的一种功能强大的分析方法。随着计算机技术的迅猛发展,采用有限元方法已编制了各种结构稳定性分析软件,由于其功能强和适用范围广,因此,在飞机结构稳定性分析中得到了日益广泛的应用。

### 6.3.1 适用范围问题

有限元素法可适用如下范围的结构稳定性分析:

(1) 外形复杂、载荷情况复杂和边界支持条件复杂的结构总体和局部稳定性分析,例如,翼面结构和全高度蜂窝结构在压、剪、弯、扭组合载荷下的总体稳定性分析;

(2) 边界支持条件难以模拟、且其影响较大的结构稳定性分析;

(3) 对于复合材料结构,由于其各向异性所带来的刚度参数非常复杂,只有简单的情况才有解析解和工程计算方法,因此,常常需要采用有限元素法进行稳定性分析;

(4) 对于温/湿环境影响、冲击损伤引起的分层屈曲、后屈曲等较复杂的稳定性问题,也只有采用有限元素法才能进行分析。

目前,采用有限元素法形成的稳定性分析软件不少,但因其功能和适用范围各异,使用中要注意选择。

### 6.3.2 有限元分析时需要注意的问题

虽然有限元分析软件的功能较强,但要获得满意的结果,还要求使用者具有一定的工程经验和对计算结果的分析判断能力。一般来说,应注意如下问题:

(1) 应根据所要分析的问题类型,选择合适可靠的分析软件。

(2) 确定合适的分析区域,对所分析区域的周边结构也要进行合理的选取。一般在从结构中截取分析模型时,为了真实模拟周边结构对所选区域的支持,模型中除了应包括要分析的高应力区外,还需要选取部分周边结构,以尽量减小边界条件对内部的影响。

(3) 选取合适的有限单元。应该根据所要分析的结构形式和受力特点,以及各类有限单元的品质,选取合适的分析单元。

(4) 准确模拟实际边界条件。采用有限元法进行结构稳定性分析的最大特点是可以通过选取合适的单元或单元组合,实现解析法所不能实现的复杂程度远远超出简支或固支的各种边界支持条件,如采用弹性杆或弹簧元来模拟边界的真实支持刚度等。

(5) 合理施加模型载荷。有限元模型中的节点载荷一般需要通过一定的换算才能得到。在进行换算时,应与实际受载情况相一致。如:在边界交点处应均匀施加均匀载荷;载荷应沿传力方向按刚度在不同结构元件上进行分配等。

(6) 对计算结果要注意分析和判断,必要时,应辅之相应的试验验证。

### 6.3.3 有限元分析软件

前面各章已经介绍了适用于复合材料层压平板、加筋层压平板、蜂窝夹层板的稳定性分析软件。目前广泛使用的稳定分析软件有:MSC / NASTRAN, ANSYS, MARC 等。国内自行研制开

发的软件有 COMPOSS 等, COMPOSS 软件在屈曲、后屈曲和破坏分析上具有较强的功能。

## 6.4 几种典型飞机结构稳定性有限元分析算例

本节将结合实例,说明采用有限元法对加筋层压平板、带开口的层压腹板梁和多墙翼盒等典型飞机结构进行稳定性分析的全过程。

### 6.4.1 加筋层压平板稳定性分析

图 6-4 为某型飞机机翼上翼面的复合材料加筋层压平板结构,加筋形式为角型。由机翼的总体应力分析结果可知,其最严重的受载情况是压剪复合情况, $x$  方向受均匀轴压力  $N_x$  和面内均匀剪切力  $N_{xy}$  作用,压剪比  $N_{xy}/N_x$  为 1:1.3。为了考核该部位的稳定性和破坏强度,设计了一组试验件进行压剪复合稳定性试验,同时进行稳定性校核。

该试验件的材料为碳纤维增强双马来酰亚胺树脂材料体系,尺寸为  $300(\text{mm}) \times 300(\text{mm})$ ,见图 6-4 (a),两根筋条对称布置,筋条截面形状见图 6-4 (b)。其他参数如下:

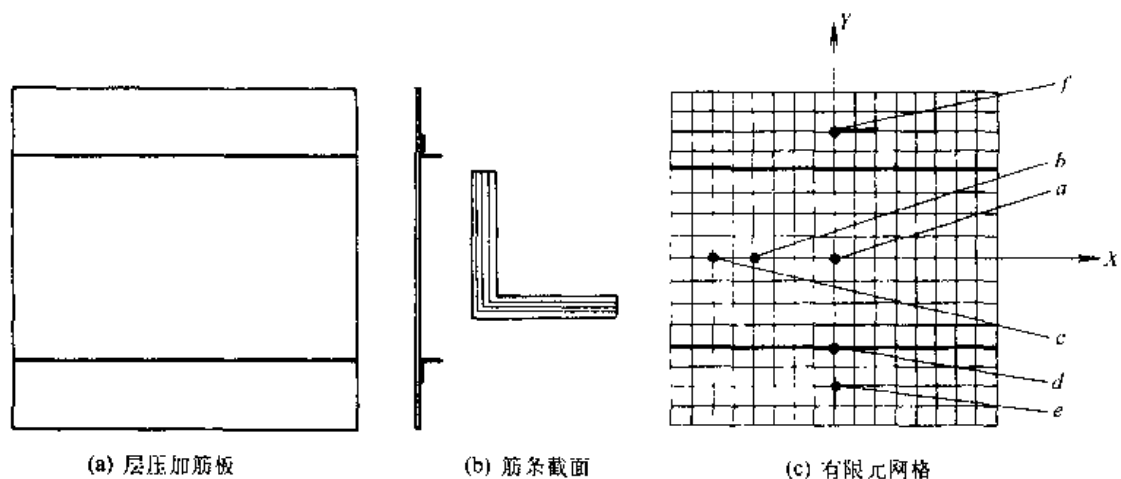


图 6-4 加筋层压板示意图

面板铺层为:  $[45/-45/0/-45/90/45/0]_S$  (共 14 层);

筋条铺层为:  $[45/-45/0/-45/0/45/90/45/0/-45/0]_S$  (共 22 层);

单层厚度为:  $h = 0.119 \text{ mm}$ ;

单层材料性能为:  $E_{11} = 116000 \text{ N/mm}^2$ ,  $E_{22} = 7200 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_{12} = 4100 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu_{12} = 0.33$ ,  $X_t = 1239 \text{ N/mm}^2$ ,  $X_c = 1081 \text{ N/mm}^2$ ,  $Y_t = 38.7 \text{ N/mm}^2$ ,  $Y_c = 189.4 \text{ N/mm}^2$ ,  $S = 89.9 \text{ N/mm}^2$ 。

采用 COMPOSS 软件进行了线性和非线性稳定性分析。有限元计算模型取整个加筋板,分别按四边简支和四边固支两种边界条件(面内可动)进行分析计算。采用四边形板(壳)单元,按  $16 \times 16$  划分网格,共有 256 个板单元和 32 个梁单元,有限元网格划分如图 6-4 (c) 所示。

计算结果见表 6-1 和图 6-5~图 6-8,表 6-1 中还给出了四边简支边界条件下的试验结果。

表 6-1 加筋层压板的计算和试验结果

N / mm

边界条件	四边简支计算值	四边简支试验值	四边固支计算值
线性屈曲载荷 ( $N_c$ )	34.58	33.90	38.26
非线性破坏载荷 ( $N_c$ )	63.43	87.50	41.35

表 6-1 中非线性破坏载荷是根据第五章中所述的 Tsai-Hill 二维准则和有关的结构破坏准则得到的。

图 6-5 和图 6-6 表示在四边简支边界条件下, 按线性屈曲理论 (图 6-5) 和非线性屈曲理论 (图 6-6) 计算得到的结果。图 6-5 (a) 给出了按线性屈曲理论计算得到的加筋板中 a、b、c、d、e、f 各点的载荷-挠度曲线。当载荷  $N_x$  达到临界值 34.58 N/mm 时, 结构发生屈曲, 相应的屈曲波形如图 6-5 (b) 所示。图 6-6 (a) 表示按非线性屈曲理论计算得到的加筋板中 a、b、c、d、e、f 各点的载荷-挠度曲线。图 6-6 (b) ~ 图 6-6 (d) 表示: 随着载荷增大, 加筋板的变形逐渐发展直至破坏过程中关于挠度  $w$  的等高线图。

图 6-7 和图 6-8 表示四边固支边界条件下, 按线性屈曲理论 (图 6-7) 和非线性屈曲理论 (图 6-8) 计算得到的结果。图 6-7 (a) 给出了按线性屈曲理论计算得到的加筋板中 a、b、c、d、e、f 各点的载荷-挠度曲线, 当载荷  $N_x$  达到临界值 38.26 N/mm 时, 结构发生屈曲, 相应的屈曲波形如图 6-7 (b) 所示。图 6-8 (a) 给出了按非线性屈曲理论计算得到的加筋板中 a、b、c、d、e、f 各点的载荷-挠度曲线。图 6-8 (b) ~ 图 6-8 (d) 表示加筋板的变形逐渐发展直至破坏过程中关于挠度  $w$  的等高线图。

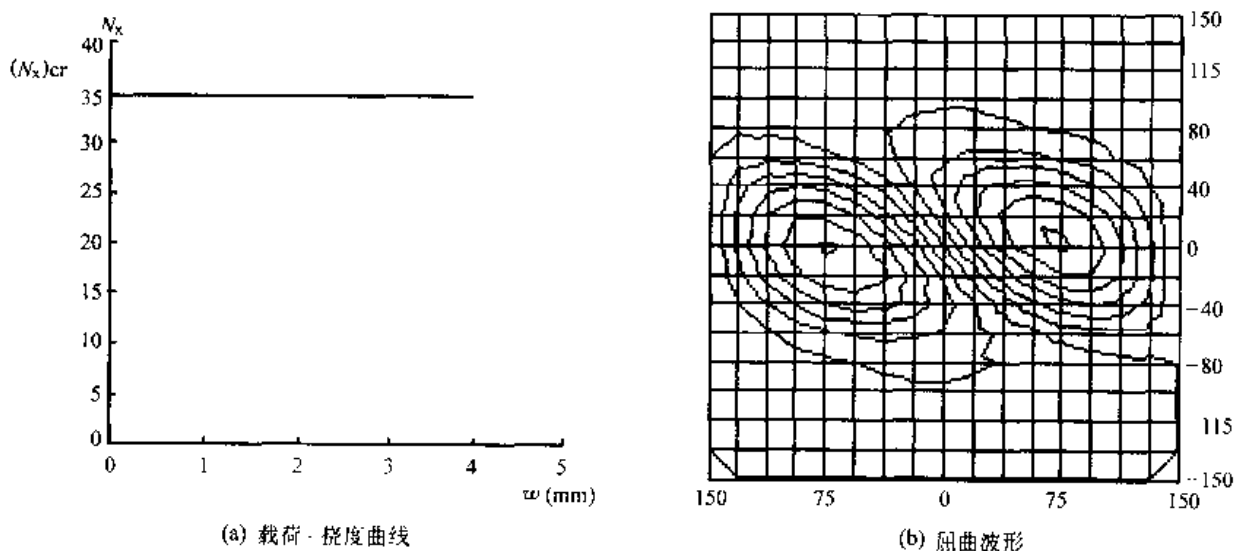


图 6-5 四边简支下加筋板的线性分析结果

由以上计算结果可以看出, 按线性理论和按非线性理论的分析结果存在着明显的差别。如果仔细观察图 6-5 (a) 和图 6-6 (a)、图 6-7 (a) 和图 6-8 (a), 我们可以发现, 图 6-5 (a)、图 6-7 (a) 中的线性屈曲临界载荷值与图 6-6 (a)、图 6-8 (a) 中各点载荷-挠度曲线上的转折点 (变形从慢到快) 的载荷值非常相近。这说明采用线性屈曲理论分析该类问题具有一定的参考价值。

试验研究表明, 加筋板结构在加载 (压/剪载荷) 过程中, 未出现突发性的屈曲破坏。而是随变形逐渐加大, 最终发生强度破坏。也就是说, 在图 6-6 (a) 和图 6-8 (a) 中, 各



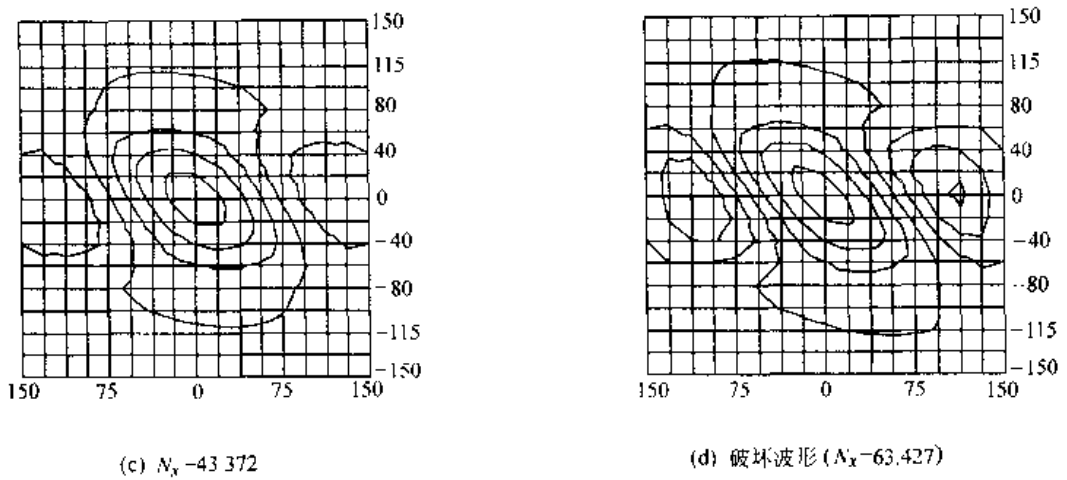
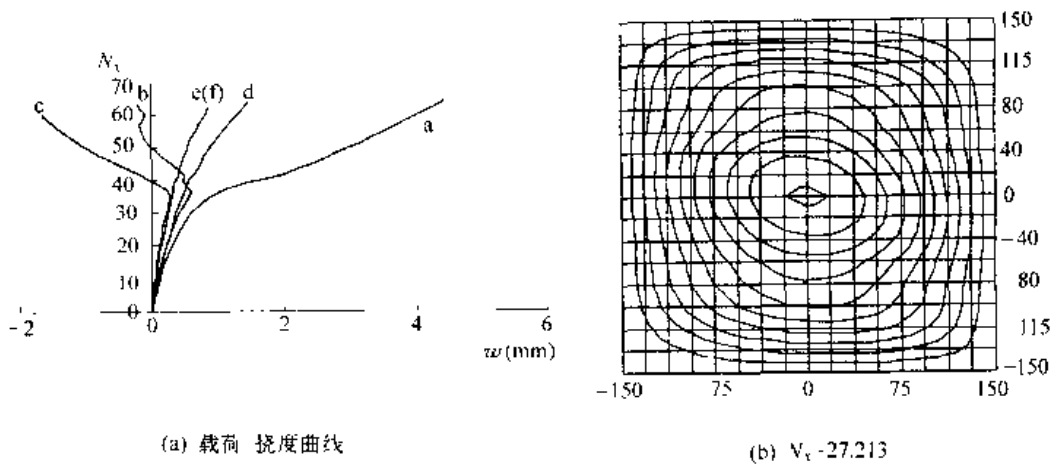


图 6-6 四边简支下加筋板的非线性分析结果

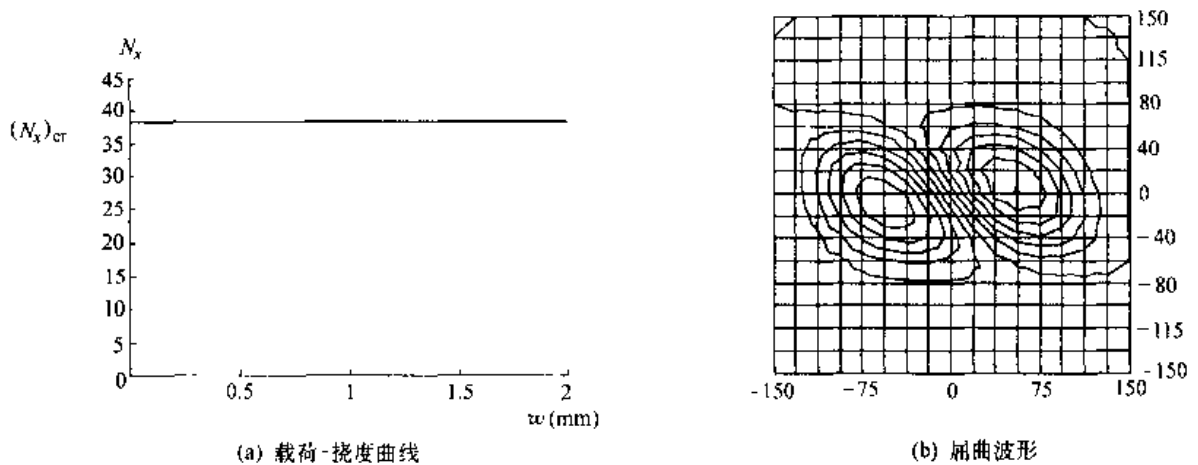


图 6-7 四边固支下加筋板的线性分析结果

条曲线经过转折点后，加筋板结构仍然具有继续承载的能力，这就是加筋板的后屈曲强度。很明显，线性屈曲理论不能反映加筋板结构受载后的全部情况，只有采用非线性屈曲理论才能分析其后屈曲强度，充分挖掘结构的承载能力。

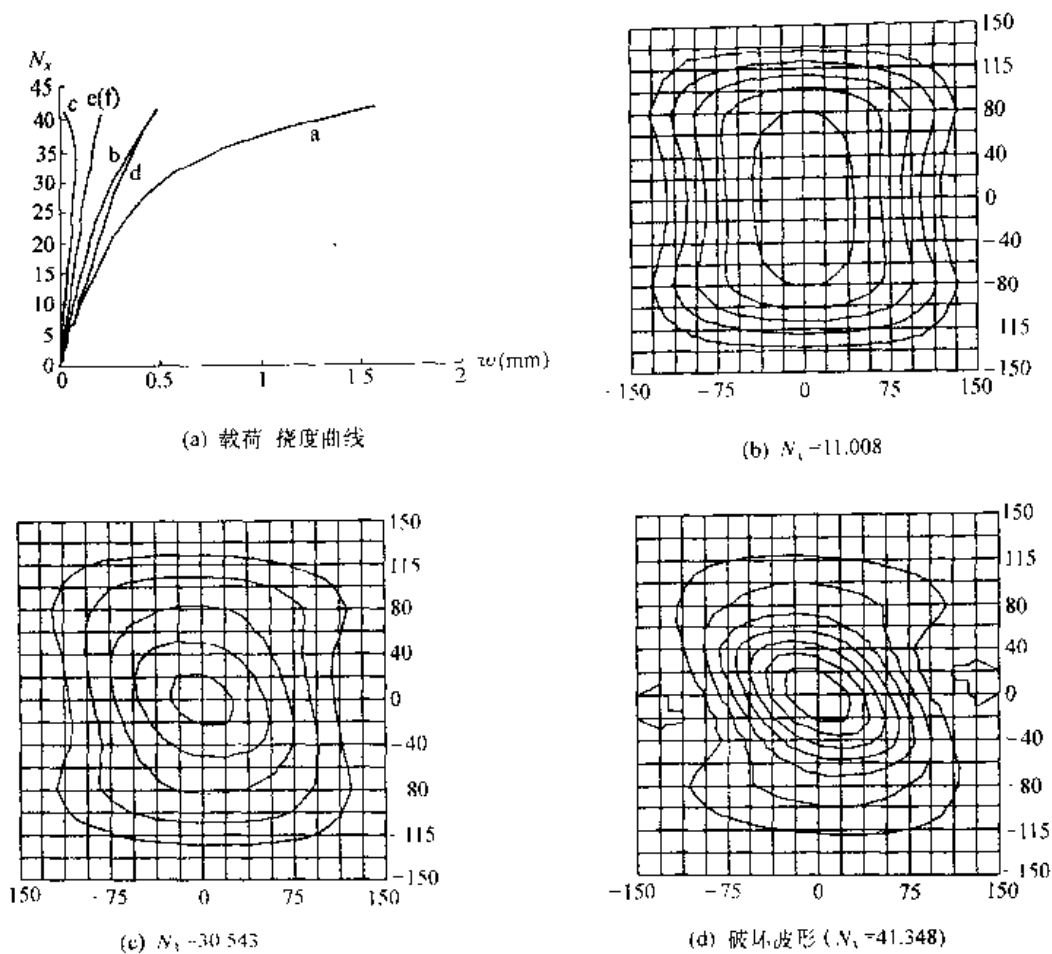


图 6-8 四边固支下加筋板的非线性分析结果

### 6.4.2 带开口的层压腹板梁的稳定性分析

在某型飞机垂尾梁腹板上，为了进行设备安装和维护，需要设计一个开口。为了保证开口区的刚度和承载能力，拟在开口两侧各安排一根筋条，筋条为 T 形。开口设计成带弯边的形式，起一定的加强和支撑作用。由垂尾的总体应力分析结果可知，该开口周围主要承受剪切载荷。梁腹板为 10 层正交铺设的碳纤维织布预浸带。为了了解该部位的稳定性和极限承载能力，需要进行稳定性分析和强度校核。

该复合材料梁腹板的椭圆开口的周边为单排钉连接，可按四边简支边界条件考虑，受纯剪载荷作用，如图 6-9 所示。面板采用 10 层织布（等效为 20 层单向纤维带）。其他参数如下：

单层厚度为：0.18 mm；

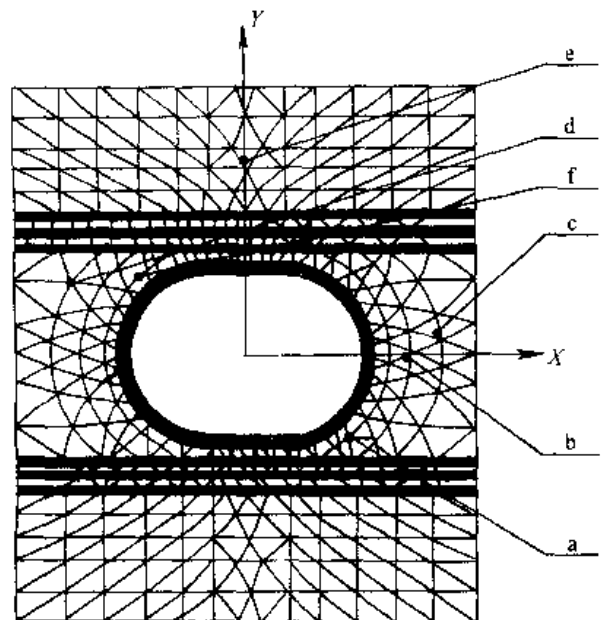


图 6-9 含椭圆开口的加筋层压腹板梁

腹板铺层为：[45/-45/-45/45/90/0/45/-45/-45/45]<sub>s</sub>（共20层）；

单层材料性能为： $E_{11} = 93500\text{N/mm}^2$ ， $E_{22} = 5880\text{N/mm}^2$ ， $G_{12} = 4200\text{N/mm}^2$ ， $\nu_{12} = 0.3$ ， $X_t = 1100\text{N/mm}^2$ ， $X_c = 1000\text{N/mm}^2$ ， $Y_t = 22\text{N/mm}^2$ ， $Y_c = 110\text{N/mm}^2$ ， $S = 49\text{N/mm}^2$ 。

加筋条和弯边的截面刚度列于表6-2。

表6-2 加筋条和弯边的刚度

	EA (N)	EI (N·mm <sup>2</sup> )	GJ (N·mm <sup>2</sup> )	GA (N)
加筋条	5743000	107900000	880300	198300
弯边	2341000	1436000	923600	148500

采用 COMPOSS 软件进行了线性和非线性稳定性分析。计算模型取整个腹板梁，采用三角形板（壳）单元，共划分了556个板单元，124个梁单元。其中加筋条上有86个梁单元，弯边上有38个梁单元。网格在孔边和靠近加筋条及弯边处（应力变化梯度较大的地方）比较密。考虑到结构的对称性，网格划分时也保持了对称性。

计算结果见表6-3和图6-10~图6-12。

表6-3 含椭圆开口复合材料加筋层压腹板梁的计算结果

N/mm

	线性屈曲载荷	非线性破坏载荷
有加筋条	135.95	120.997
无加筋条	45.763	55.338

按线性理论计算得到的屈曲载荷为135.95 N/mm，线性屈曲波形见图6-10。按非线性理论得到a、b、c、d、e、f各点的载荷-挠度曲线见图6-11(a)，结构变形过程中关于挠度w的等高线图见图6-11(b)至图6-11(d)。

从表6-3第1行中可见，对于有加筋的情况，非线性分析得到的破坏载荷较线性屈曲分析得到的屈曲载荷小。因此，如果对此结构采用线性屈曲理论进行设计，将会出现偏于危险的结果。

如果去掉两根加筋条，仅保留孔边的弯边，所得的分析结果见表6-3中第2行和图6-12。由非线性分析得到的破坏载荷较线性屈曲分析得到的屈曲载荷大，约为线性屈曲载荷的1.21倍。因此，如果采用线性屈曲理论进行设计，反而会导致偏于保守的结果。

分析表明，结构的破坏首先从靠近X轴两侧的孔边开始，这是由于开孔在该处的曲率最大，因此对该处结构的削弱也最严重，再加上两条相互平行的加筋条的存在，于是在这一区域出现了严重的应力集中。为了减轻应力集中，提高结构效率，可以考虑减小和调整加筋条的截面尺寸，实现在减轻结构重量的情况下达到同样的结构极限承载能力。

由上述计算分析可见，用解析法或工程方法已经无法解决这类较复杂结构的稳定性分析

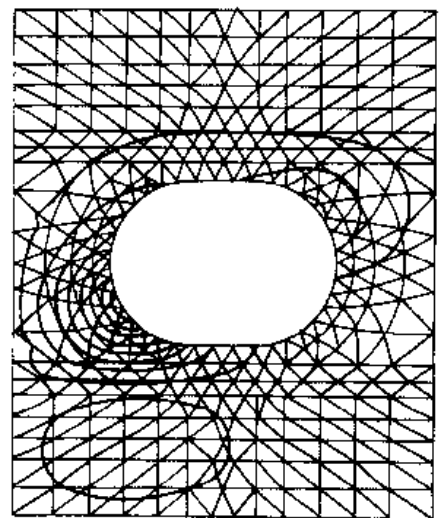
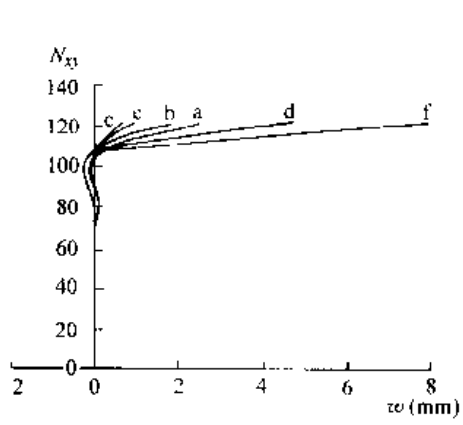
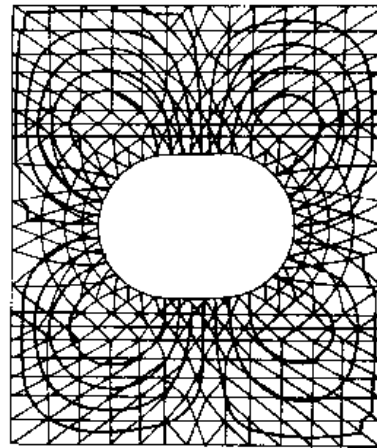


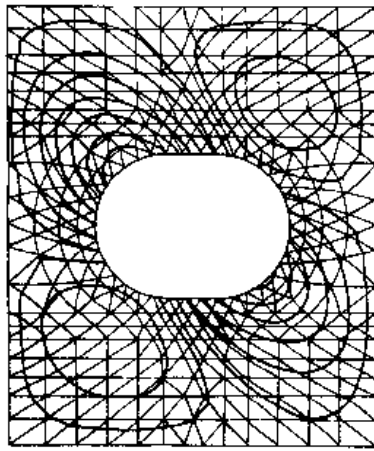
图6-10 有加筋条含椭圆开口的层压腹板梁的线性屈曲波形  
( $N_{cr} = 135.95$ )



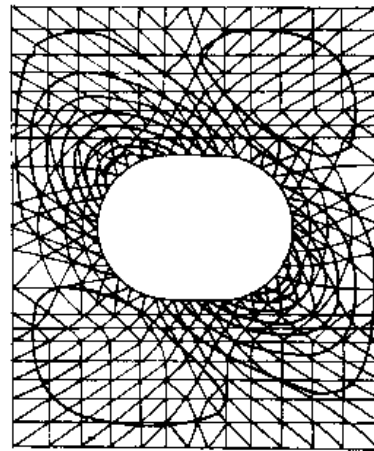
(a) 载荷-挠度曲线



(b)  $N_{xy} = -10.618$

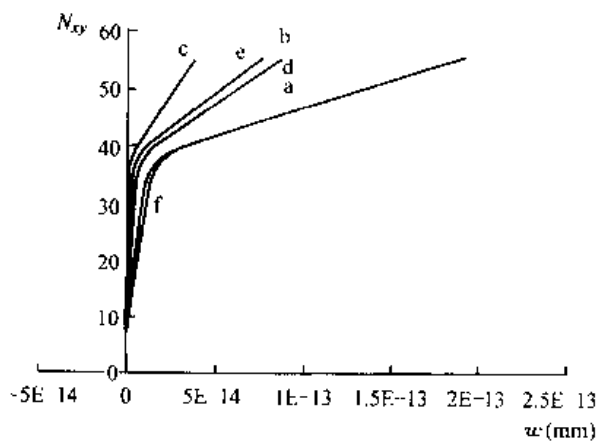


(c)  $N_{x1} = 82.345$

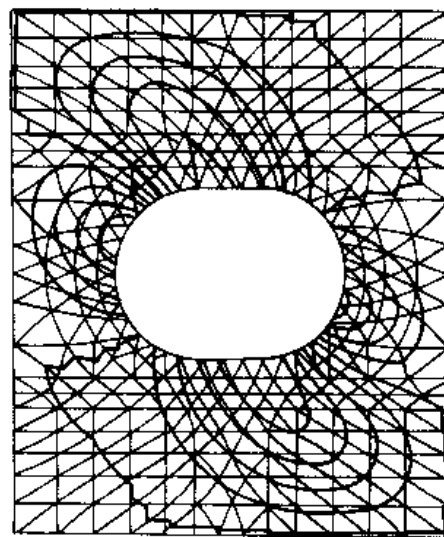


(d) 破坏波形 ( $N_{xy} = 120.997$ )

图 6-11 有加筋条含椭圆开口的层压腹板梁的非线性屈曲分析结果



(a) 载荷-挠度曲线



(b) 破坏波形 ( $N_{xy} = 55.338$ )

图 6-12 无加筋条含椭圆开口的层压腹板梁的非线性屈曲分析结果

问题，只能采用有限元法对其进行分析。而且，如果采用线性屈曲理论进行分析，可能会得到偏于危险或保守的结果，而采用非线性屈曲理论进行分析，得到了比较合理的结果。

### 6.4.3 多墙翼盒结构的稳定性分析方法

多墙翼盒结构的常见失稳或破坏模式主要有四种：① 纵墙之间的翼面蒙皮失稳或破坏；② 纵墙腹板失稳或破坏；③ 纵墙与蒙皮一起发生总体失稳或破坏；④ 纵墙与蒙皮之间的连接处发生局部挠曲、扭转或连接破坏。对多墙翼盒进行设计时，需要根据实际可能承受的载荷种类和大小，以及刚度设计要求，综合考虑以上可能发生的失稳或破坏模式，完成多墙翼盒结构的设计参数选取和稳定性校核。

下面的算例将说明采用有限元法对其进行稳定性分析的过程。

(1) 算例 1 某型飞机在改型打样设计中，决定将原型机翼的梁式结构改为多墙式结构，并适当减小展向肋距，合理设计闭室的几何尺寸，以提高机翼对弯扭复合载荷的承受能力。由于受机翼结构的重量和重心相对于原结构不能有太大变化的限制，要求新设计的多墙式机翼翼盒在重量、重心和多墙总体布局不变的条件下，具有较高的抗失稳能力和极限承载能力。因此，需要对不同的纵墙布局方案进行分析比较，通过优化和全面考虑制造工艺可行性等多方面因素，最终确定满足设计要求的翼盒多墙布局和细节尺寸。

图 6-13 为复合材料纵墙翼盒结构简图，翼盒的一端固支，另一端自由。翼盒的几何尺寸为  $1000(\text{mm}) \times 600(\text{mm}) \times 100(\text{mm}) (L \times b \times h)$ ，其他参数如下：

蒙皮和纵墙的铺层为： $[45/0/-45/0/45/90/45/0/45/0]$ （沿  $y$  轴线方向的铺设角为  $0^\circ$ ）；

单层厚度为： $0.12\text{mm}$ ；

单层材料性能为： $E_{11} = 135000 \text{ N/mm}^2$ ， $E_{22} = 8800 \text{ N/mm}^2$ ， $G_{12} = G_{23} = G_{31} = 4500 \text{ N/mm}^2$ ， $\nu_{12} = 0.33$ 。

作为算例，仅给出了翼盒自由端受均匀轴压  $N_y$  时的分析情况。共进行了如下三种分析计算。

#### ① 四种结构布局方案比较

以结构重量不变为前提（即保持纵墙翼盒结构的横截面面积不变），比较了以下四种结构布局方案：

方案 1：等间距布置墙，使得三个闭室一样大，如图 6-14 (a) 所示；

方案 2：将中间的两个墙分解为对称附在上下蒙皮面板的筋条，为单闭室结构，如图 6-14 (b) 所示；

方案 3：将中间的两个墙向外侧移动，使得中间闭室大，两边闭室小，如图 6-14 (c) 所示；

方案 4：将中间的两个墙合并为中间一个墙，为双闭室结构，如图 6-14 (d) 所示。

采用 COMPOSS 软件进行分析。将盒段划分为 640 个四边形板（壳）单元，图 6-14 (b) 盒段中的筋条划分为 128 个梁单元。

对这四种翼盒结构布局方案的线性屈曲分析计算结果见表 6-4 和图 6-14。

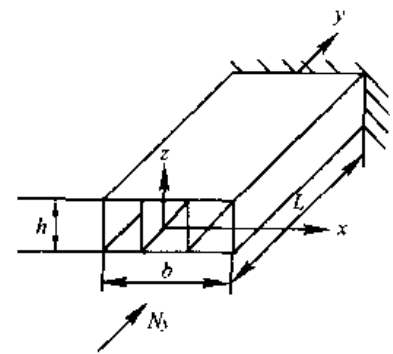


图 6-13 三闭室纵墙翼盒盒段

表 6-4 各种布局的纵墙翼盒结构的线性屈曲载荷

截面形式	(a)	(b)	(c)	(d)
$N_{ycr}$ (N/mm)	49.6	33.8	24.4	23.4

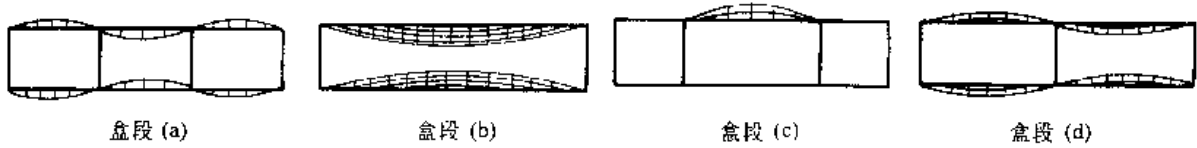


图 6-14 各种翼盒自由端截面的屈曲模态

从表 6-4 可见，截面上各部分的刚度分布均匀合理的翼盒 (a) 的布局可以获得最大的屈曲载荷。从图 6-14 可见，在给定重量或截面面积的情况下，不同布局的纵墙翼盒结构将获得完全不同的初始屈曲模态。

### ② 铺设角的影响

为了研究铺设角的影响，将图 6-14 中翼盒 (a) 的铺层情况改为： $[30/-30]_s$ 、 $[45/-45]_s$ 、 $[90/0]_s$ 、 $[0/90]_s$  四种，且保持蒙皮面板的总厚度不变（子铺层厚度为 0.8mm），其他参数也都不变。四种铺层情况下该翼盒受轴压时的线性屈曲载荷及屈曲模态见表 6-5 和图 6-15。

表 6-5 纵墙翼盒结构 (a) 在各种铺设角下的线性屈曲载荷

铺设角	$[30/-30]_s$	$[45/-45]_s$	$[90/0]_s$	$[0/90]_s$
$N_{ycr}$ (N/mm)	62.7	67.2	45.4	48.2

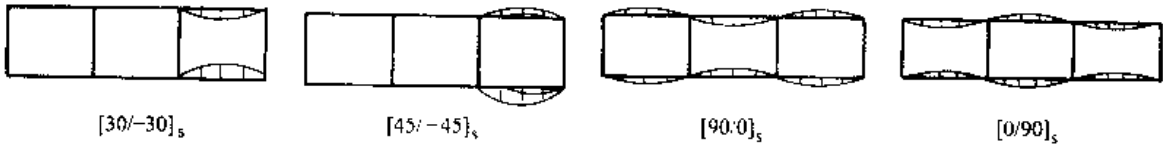


图 6-15 翼盒 (a) 在各种铺设角情况下的屈曲模态

由表 6-5 和图 6-15 可见，在给定结构布局的情况下，改变蒙皮面板的铺设角和铺层顺序可以改变翼盒的屈曲模态和屈曲载荷，改变铺设角和铺层顺序可以使得在几何上对称且受对称载荷的翼盒结构出现不对称的屈曲波形。

### ③ 非线性屈曲分析

翼盒发生了线性局部屈曲不一定会立即破坏，通常仍能够继续承载，翼盒的最终承载能力取决于它的后屈曲强度。图 6-16 (A)、(B) 和 (C) 分别给出了由非线性屈曲分析得到的各种翼盒自由端截面在非线形屈曲前、后的变形图。可以看出，翼盒 (b) 和翼盒 (d) 的变形较大，这是由于翼盒 (b) 的蒙皮面板之间没有限制，而翼盒 (d) 中间的墙较少。翼盒 (b) 的上下蒙皮面板的变形（挠度）不对称是由于蒙皮面板复合材料的耦合效应引起的。盒段 (a) 与盒段 (c) 蒙皮面板的变形（挠度）较小，而且墙均匀分布的盒段 (a) 的蒙皮面板的变形（挠度）也较均匀。

由于在相同载荷下，各种翼盒自由端的蒙皮面板挠度值相差太大，对翼盒后屈曲阶段的行为进行了比较。在给定的载荷范围内，取各种翼盒自由端的上蒙皮面板中的某一点  $P_i$ （点

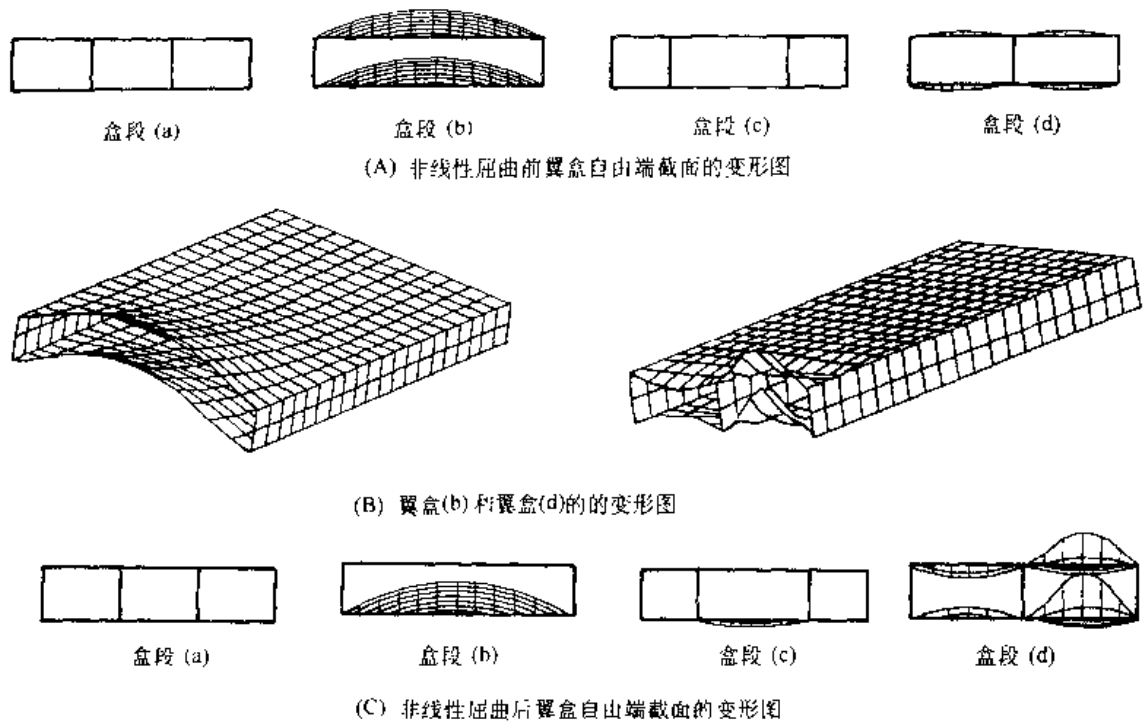


图 6-16 非线性屈曲前后翼盒自由端截面的变形图

的  $x$  坐标不相同) 的挠度进行比较, 图 6-17 给出了四种翼盒在这些点的载荷-挠度 ( $z$  方向位移) 曲线。

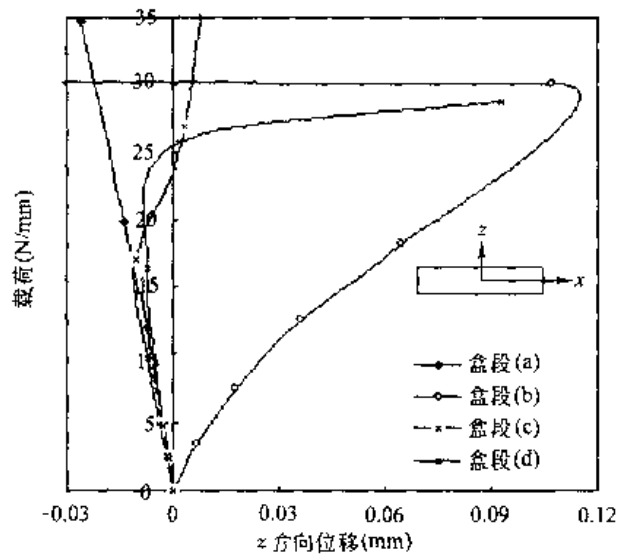


图 6-17 翼盒自由端截面某点的载荷-挠度曲线

( $x_{P_a} = 0.0, x_{P_b} = 250.0, x_{P_c} = 0.0, x_{P_d} = 250.0\text{mm}$ )

图 6-17 中的曲线反映了四种翼盒结构的非线性变形特性, 可以看出, 在给定的载荷范围内, 翼盒 (b)、翼盒 (c) 和翼盒 (d) 的挠度曲线均有一个明显的转折点, 而翼盒 (a) 的挠度曲线基本上是一条直线, 没有明显的转折点。再从曲线转折点的位置可见, 翼盒 (d) 最容易发生屈曲, 翼盒 (b) 次之, 翼盒 (c) 存在不明显的极值屈曲, 翼盒 (a) 属于强度破坏。

为了了解翼盒的整体变形情况, 沿各翼盒  $y$  轴方向取三个点 1、2、3 (它们的  $y$  坐标分

别为 100.0mm, 500.0mm, 800.0mm), 图 6-18 中给出了这三个点的载荷 - 位移 ( $y$  向) 曲线。可见四种翼盒的各点沿  $y$  轴方向的位移大致相当, 且沿  $y$  方向逐渐减小。

多闭室翼盒作为一种空间薄壁结构在轴压载荷作用下最突出的是局部屈曲问题, 但是也不排除强度破坏的情况。上述四种翼盒段结构布局中, 翼盒 (b) 和翼盒 (d) 最容易发生屈曲破坏, 翼盒 (a) 只能发生强度破坏, 翼盒 (c) 有不明显的屈曲产生, 介于屈曲和强度破坏之间。因此, 根据上述分析, 可以选定最后的翼盒的布局形式为 (a)。

表 6-6 中给出了各种翼盒的非线性屈曲载荷。

表 6-6 各种截面翼盒的非线性屈曲载荷

截面形式	(a)	(b)	(c)	(d)
$N_{\text{yer}}$ (N/mm)	—	29.0	18.0	24.0

由上表可见, 只有翼盒 (d) 的非线性屈曲载荷与线性屈曲载荷比较接近, 翼盒 (b) 和翼盒 (c) 的非线性屈曲载荷较线性屈曲载荷低得多。表明线性分支型屈曲理论, 对于微小的屈曲变形情况才有一定的实际意义, 如翼盒 (d)。而对于翼盒 (a)、翼盒 (b) 和翼盒 (c), 则必须采用非线性屈曲理论和强度理论同时进行全面分析。

多闭室翼盒中的纵墙主要起支持上下蒙皮面板的作用, 并可增强结构的整体性, 为此应保证墙板有足够的刚度, 而且纵墙布置得均匀才有利于提高结构的抗屈曲能力。此外, 蒙皮面板上的加强筋条能够有效提高其抗弯刚度和承载能力, 所以, 比较好的多墙结构形式是: 墙要布置得均匀, 而且应在蒙皮面板和墙板上加一些小的加筋条作为扶强材, 以避免蒙皮面板和墙板过早发生局部屈曲。

(2) 算例 2 这是一个实际的翼盒试验件, 受纯弯、纯扭和弯扭组合等多种载荷, 试验前采用 MSC / NASTRAN 对其进行了稳定性校核, 其分析过程与算例 1 类似。限于篇幅, 这里只给出稳定性计算结果的图示说明 (见图 6-19 至图 6-28)。

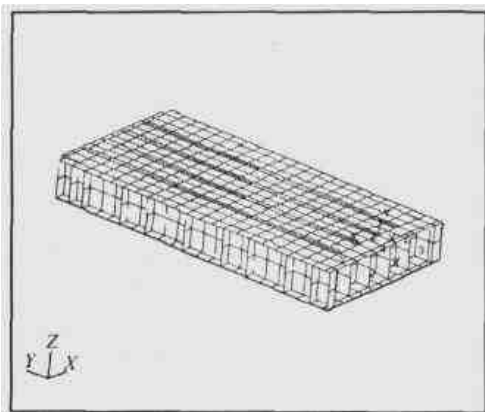


图 6-19 某机翼的多墙翼盒

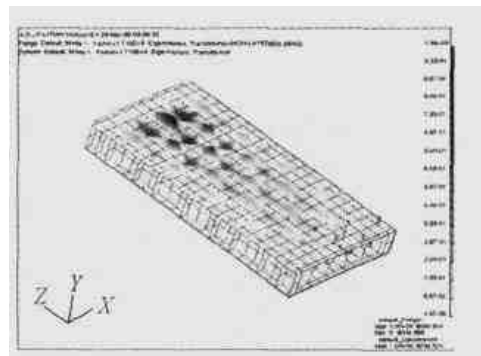


图 6-20 总体失稳波形 (纯弯)

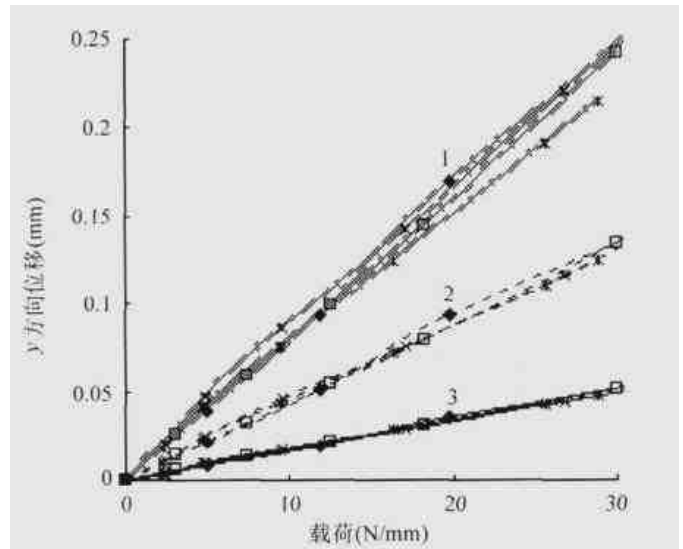


图 6-18 各种翼盒沿  $y$  轴方向的位移



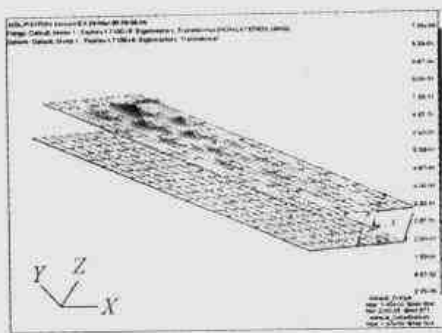


图 6-21 上下壁板失稳波形 (纯弯)

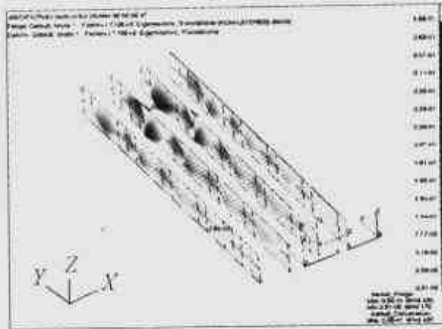


图 6-22 纵墙失稳波形 (纯弯)

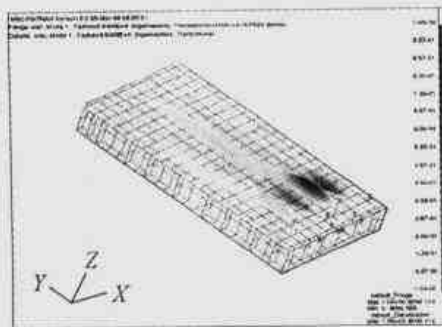


图 6-23 总体失稳波形 (纯扭)

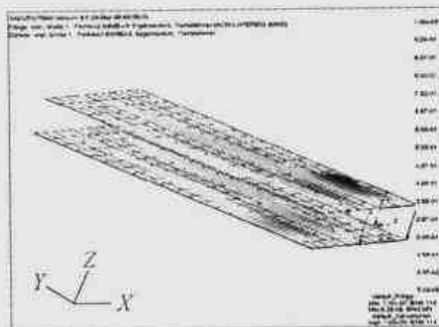


图 6-24 上下壁板失稳波形 (纯扭)

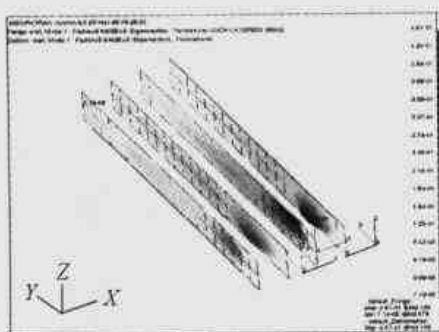


图 6-25 纵墙失稳波形 (纯扭)

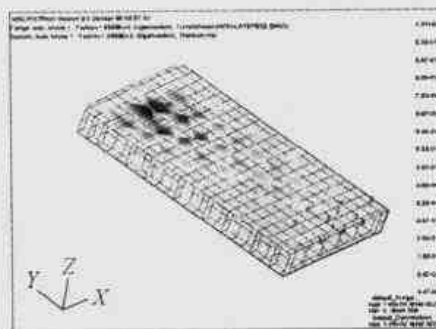


图 6-26 总体失稳波形 (弯扭)

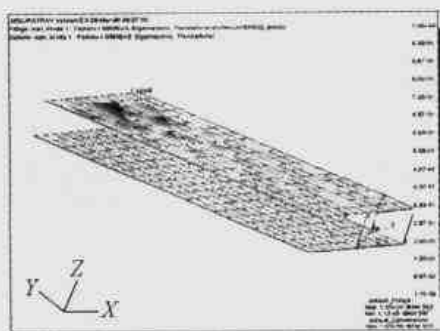


图 6-27 上下壁板失稳波形 (弯扭)

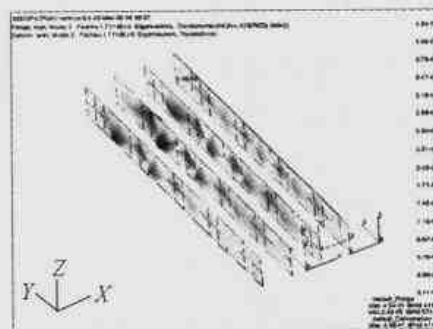


图 6-28 纵墙失稳波形 (弯扭)

### 参 考 文 献

- [1] 敬禄云, 陈业标, 李刚, 汪海. SETRAN 用户手册. 611 所科研报告. 2000
- [2] 陈业标, 敬禄云, 李刚, 汪海. 强度分析系统 SETRAN 简介. 611 所科研报告. 2000

## 第7章 复合材料结构稳定性试验设计及试验技术

### 7.1 概 述

虽然复合材料结构稳定性分析理论已有了长足进展,稳定性分析软件的功能越来越强,基于试验研究的经验公式比较成熟,但都有一定的适用范围;而且,由于稳定性分析时要对所分析的结构进行简化,以及结构的制造工艺质量和材料性能差异的影响,都会给分析结果带来误差,因此,对于受力严重的重要构件和新型结构仍需要进行试验验证和试验研究。

在飞机结构设计研制过程中,根据结构完整性的要求,要进行一系列的结构试验,全面验证飞机结构的强度、刚度、耐久性(疲劳)和损伤容限等。其中,明确规定了稳定性试验的项目。概括起来,在结构初步设计阶段和结构设计阶段,需要进行如下两类稳定性试验:

① 在结构的初步设计阶段,需要进行结构“选型试验”,为确定结构的设计选型提供依据。尤其是对于新的结构型式,要通过选型试验确定结构设计型式的合理性和分析方法的准确性。

② 在结构设计阶段,需要进行结构件的“验证试验”。对于机翼、尾翼和机身上的典型壁板、重要承力盒段和结构形式复杂难于分析的关键部位进行试验验证,以确保结构的使用安全。

本章从设计使用的角度,介绍结构稳定性试验的设计和试验结果的使用,并介绍两项重要的稳定性试验新技术。

### 7.2 稳定性试验设计的技术要求

结构设计分析人员根据飞机型号研制的需要和结构强度计算报告进行稳定性试验设计,即:设计试验件和制定试验任务书。

“试验任务书”是设计方向试验方明确试验技术要求的主要技术文件。“试验任务书”一般应包括如下内容:(1)试验目的;(2)试验依据文件;(3)试验项目;(4)试验载荷和加载程序;(5)试验环境条件;(6)试验件的边界支持条件;(7)应变和变形的测量要求;(8)试验件的损伤制造及检测要求;(9)试验完成状态和要求。对于结构“选型试验”,上述内容可以酌情作适当增减。

对于结构件的“验证试验”,还要求试验方按试验任务书和质量管理有关文件的要求拟定“试验大纲(实施方案)”,提交设计方审核。“试验大纲”应包括:试验载荷、试验件的边界条件和环境条件的实现方法;试验设备;试验安装和调试;试验数据处理;试验质量控制;试验误差分析;对于关键部位的应变、位移测量和损伤的检测方案等内容。

下面介绍制定“试验任务书”的要点:

(1) 试验目的 明确试验性质和要求,即该项试验是属于“选型试验”还是“验证试

验”，规定需要取得的结果和强度结论。

(2) 试验依据文件 一般包括任务来源、结构图纸、试验件图纸、随炉件图纸、强度计算报告和质量管理的有关文件等。

(3) 试验项目 规定试验的各种加载情况、试验件的边界支持条件、试验环境条件和各种试验情况下的试验件数量。由于稳定性试验结果的分散性较大，同一种试验至少要做三件试验。

(4) 试验载荷和加载程序 给定试验设计载荷和加载要求。试验设计载荷有两种取法，一是取理论计算的屈曲载荷，另一是取结构设计要求的极限（设计）载荷。对于受压剪等复合载荷的试验，还应给定压剪载荷的加载比。

加载程序中应规定各试验阶段的加载要求和最大载荷值。每种试验一般都要求进行三个阶段的试验：第一阶段试验，加 0% ~ 30% 的试验设计载荷，主要考察试验件的受力情况、环境条件、夹具、加载设备和测量仪器的运行情况；第二阶段试验，加 0% ~ 67% 的试验设计载荷，一般做三次，以考察试验件应变的重复性和是否发生了屈曲/屈服；第三阶段试验，加 0% ~ 100% 的试验设计载荷，有时需要一直加载到试验件破坏，考核试验件的最大承载能力/屈曲载荷。

(5) 试验环境条件 对于复合材料结构，试验环境条件一般指试验时试验件的环境温度和湿度，除规定环境温度和湿度（吸湿量）外，有时还要规定实现环境条件的方法。

为实现温度环境，一般是将试验件置于温度环境箱中进行试验，在试验件上布置温度测量点进行实时监控。目前有两种方法实现湿度环境，一种方法是将试验件置于专门设计的湿环境箱中，采取喷水雾的方法实现湿度环境条件；另一种方法是将试验件放在水中预先浸泡，用随炉件监控试验件的吸湿量，待达到所要求的吸湿量后，取出试验件立即进行试验。

(6) 试验件的边界支持条件 试验件的边界支持条件对失稳载荷有很大的影响，因此，对试验件边界条件的设计要充分重视。由于试验件所代表的考核部位的周边，在实际结构中一般由翼肋、翼梁、隔框等构件支持，试验时要完全模拟这种实际情况是比较困难的。因此，对于边界条件的要求应与试验技术水平相适应。工程中实现边界条件的方法有两类：

① 采用“过渡段”的方法。过渡段可设计成试验件的一部分，也可另外增加一个“过渡段”。例如：对于翼面上的加筋板试验件，可将其两端各延伸一段，延伸段与考核段之间用模拟翼肋相连，以模拟试验件端部的边界支持条件。又如：做盒段试验时，在试验盒段和支持设备之间增加一个“过渡段”，并在加载端安置“加载过渡段”，以模拟它在实际结构中的边界支持条件。“过渡段”的长度应按圣文南边界参与效应确定。

② 采用直接支持的方法。例如：对于壁板试验件，按其在实际结构中边界支持构件的扭转和弯曲刚度，将边界支持条件简化为“简支”或“固支”，采用直接支持的方法模拟它在实际结构中的边界支持条件。

目前工程试验中，实现“简支”边界条件的方法有：刀口支持、单排螺栓与夹具相连接、螺栓顶压等；实现“固支”边界条件的方法有：双排螺栓与夹具相连接、夹持、端压等。

(7) 应变和变形（位移）测量要求 给出应变和位移测量点在试验件上的位置，以及布片要求（单片或应变花）。对试验件进行应变和位移测量的主要目的是为了判断试验件的屈曲载荷，因此，测量点一定要选在对屈曲变形较敏感的地方，以便于判断屈曲载荷，如：应变和位移测量点应选择屈曲波的波峰或波谷附近；对于受剪切载荷的试验件，当采用“0°

-45°-90°”的应变花进行应变测量时，45°片的纵向应选在受压方向。

有时还需要通过测量的最大应变了解试验件的受力严重情况和局部屈曲后的应力分布情况，需要通过测量的位移数据了解试件的变形情况。此时，应变和位移测量点的位置，要根据结构强度分析的情况确定。

(8) 试验件的损伤制造及检测要求 工程中，一般采用冲击的方法对复合材料试验件制造损伤，模拟试验件含损伤的状况，对试验件进行冲击损伤的位置和冲击能量应根据结构的使用要求及有关规定确定，并应规定对损伤进行检测的要求。

(9) 试验完成状态和要求 明确需要提供的试验结果形式，如：试验报告、试验验证结论、关键试验数据和原始数据，以及现场纪录（照片或录像）等。

### 7.3 稳定性试验件的基本要求

合理设计试验件和保证试验件的制造质量是试验成功的首要条件。

#### (1) 合理设计试验件

前面已指出，稳定性试验可分为两类：在飞机初步设计阶段要进行的结构“选型试验”；在结构设计阶段要进行的结构件的“验证试验”。由于这两个阶段的试验目的不同，因此，设计试验件的要求也不完全相同。

“选型试验”主要是为结构设计选型的确定提供依据，着重于比较结构的设计方案或考核分析方法的准确性。如要求了解：结构布局、几何尺寸、剖面形状、铺层情况、材料性能，甚至包括工艺方法等对稳定性的影响。因此，在这类试验件的设计中，要求变化各种影响参数，试验件可设计得简单、典型化些，以便于试验结果的分析 and 比较。

结构件的“验证试验”是为了考核已设计好了的结构件，验证其强度，确保结构的使用安全。飞机结构中，需要进行稳定性试验的构件是：受压剪复合载荷严重的机翼根部附近的上翼面壁板和尾翼根部附近的壁板、中外翼受压严重的壁板、受剪严重的承力梁腹板和带大开口的梁腹板、受弯扭复合载荷严重的机翼根部翼盒和后机身侧壁板等。因此，对这类构件的试验件的设计要求是，要能代表所考核的结构及其承力特性。试验件的结构形状、几何尺寸、铺层情况、材料性能、工艺方法和边界支持等都应与实际结构一致。

但是，由于飞机结构复杂，试验件不必要完全是实际结构的复制品，可以作适当的简化。简化的原则是：既能代表所考核的实际结构的承力特性，又便于做试验和分析。

以翼面壁板的试验件为例，说明试验件简化设计的情况。

图 7-1 中的机翼，当它受弯扭载荷作用时，其根部附近的上翼面 ABCD 区的壁板处于

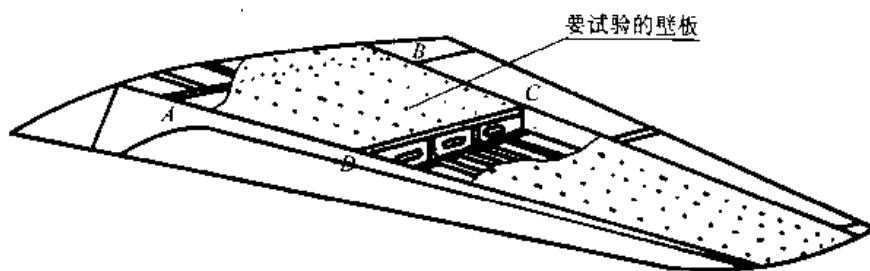


图 7-1 机翼中要进行试验验证的壁板

严重的压剪复合受力状态，需要进行稳定性校核。ABCD 区壁板的实际结构是：形状不是规则的矩形，蒙皮有微曲度，有多根加筋桁条但各个桁条不完全相同，且桁条沿翼展不均匀（不是等剖面的），各个桁条互相之间不完全平行，桁间距不完全相等。目前工程中，一般将它简化设计成“各个加筋桁条相同、各桁条沿纵向等剖面、等间距平行排列的纵向加筋层压平板”的试验件，其平板的几何尺寸、材料、铺层情况和厚度与实际结构中的蒙皮相同，加筋条的剖面形状、几何尺寸、材料、铺层情况与实际结构中的桁条相同（选择一有代表性的桁条），加筋条的间距取桁条间距的平均值，试验件简图如图 7-2 所示。或者按实际结构确定试验件。

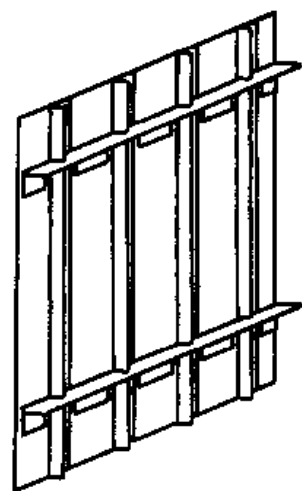


图 7-2 机翼壁板试验件简图

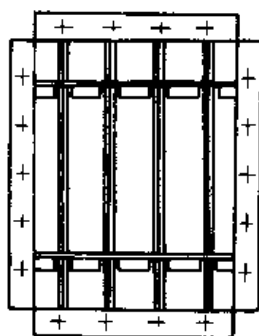
为保证试验顺利进行，在设计试验件的边界时要注意与试验夹具、加载设备的连接和配合，要考虑如何实现边界支持条件，必要时应与试验方共同讨论确定。

仍以翼面壁板的纵向加筋层压平板试验件为例，说明试验件边界的设计。

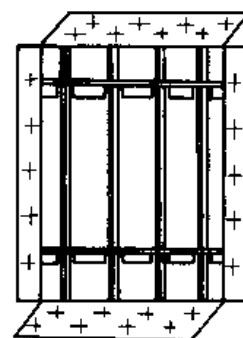
图 7-3 (a) 为加筋层压板的轴压试验件简图。为模拟翼肋对其两端的支持，试验件上下各延伸了一段，中间用 L 形材隔开，模拟两个翼肋。为保证端压时轴压载荷分布均匀和准确，要求加筋板的两端加工得十分平整，而且要求端面与蒙皮表面和桁条的轴线都垂直。试验件的侧边也要根据支持条件设计，若采用“刀口”、“螺栓顶压”和“夹持”等方法实现边界支持条件时，试验件的两侧也要向外延伸一部分，用于与支持夹具相连。图 7-3 (b) 为加筋层压板的剪切试验件简图。目前工程中普遍采用“对角拉伸”的方法加剪力，故试验件四边设计了边框，用于与对角拉伸的夹具相连。为保证连接强度，边框的两面要加垫板，对连接螺栓的孔径、孔间距和孔边距要作强度校核。图 7-3 (c) 为加筋层压平板的压剪复合试验件简图。当采用 7.5 节中介绍的“压剪复合加载装置”做试验时，试验件的四个边框设计得如图中所示，边框的两面用垫板加强以保证连接强度，与加载装置相连的连接螺栓的孔径、孔间距和孔边距等要作强度校核，受压剪端的边框的倾角由压剪加载比确定。



(a) 加筋层压板的轴压试验件简图



(b) 加筋层压板的剪切试验件简图



(c) 加筋层压板的压剪复合试验件简图

图 7-3 加筋层压板试验件示例

此外，前面已指出，由于稳定性试验结果的分散性较大，通常要求每种试验要做三次，即同一种试验件不少于三件。

(2) 保证试验件的制造质量 设计试验件时，一定要明确规定加工质量的要求，并按此

要求进行检查验收。

例如：对于受压的加筋壁板，其蒙皮的初曲度（平直度）、桁条的平直度和桁条与试验件受压端面的垂直度（蒙皮面内），以及试验件受压端面的平度和受压端面与蒙皮表面的垂直度，都对试验结果有较大影响，因此，应规定严格的形位公差；对于与夹具相连的试验件边界上的连接螺栓孔径、孔心距、孔边距要规定配合公差等。

对于层压板的空隙、分层、杂质等要明确无损检测的控制标准。

综上所述，对稳定性试验件的基本要求可以简单地概括为：

① “选型试验”要为结构设计选型提供依据，结构件的“验证试验”是为了验证结构件的强度，以确保结构的使用安全；

② 试验件要能代表所考核的结构及其主要承力特性，以确保试验结果可靠；

③ 对试验件所代表的结构可作适当的简化，以便于试验实施和结果分析；

④ 设计试验件的边界时要注意试验件与试验夹具和加载设备的连接和配合，要考虑如何实现边界支持条件，必要时应与试验方共同讨论确定；

⑤ 明确规定试验件的加工要求和无损检测的控制标准，严格检查验收。

## 7.4 稳定性试验结果的工程应用

由稳定性试验得到的试验数据和结果，需要经过如下的分析和处理后，才能用于指导结构设计。

### 7.4.1 试验结果的有效性确认

对试验件质量、试验实施方案和试验的全过程等要作仔细实时审查，以确认试验结果的可靠性。

(1) 试验实施方案和试验全过程的有效性确认 对试验实施方案中的试验夹具（边界支持条件的模拟）、试验环境条件、加载和测量方法和试验过程中的各个环节要进行审核，检查是否满足了试验任务书的要求。设计人员应到试验现场了解试验加载设备和测量设备的完好性（是否经过标检）、试验支持夹具的合理性，以及试验实施步骤、加载精度、测量数据的合理性和重复性等。

(2) 试验件的有效性确认 首先要确认试验件设计的具体背景，即对需要考核的结构部位的结构形式、几何尺寸、铺层情况、材料性能、受载情况和边界支持条件等是否模拟正确。设计人员应协同质检部门对试验件的制造加工质量认真检查验收，检查是否有制造合格证和无损检测报告等。试验前，应协同试验方对试验件进行初始状态检查，包括无损检测。

(3) 试验结果数据的有效性确认 一般情况下，每个试验都要在低于使用的载荷下进行多次重复试验，以检查试验设备运行情况和加载等是否准确。此时，设计人员应到现场与试验人员共同审查试验数据的合理性，将试验数据与设计分析值进行比较，察看是否合理，各次的重复性是否在误差范围之内等，以确定其可靠性。

### 7.4.2 试验数据的应用

试验数据包括：① 应变测量数据；② 位移测量数据；③ 失稳和破坏载荷；④ 温、湿

环境的测量纪录；⑤ 试验件变形和破坏纪录；⑥ 损伤及其扩展记录。

试验数据处理的主要结果应有：试验件的失稳载荷、破坏载荷、失稳和破坏时的最大应变、复合加载时的受力分布状况、载荷-应变和载荷-位移曲线等。

试验数据的分析处理主要由试验方完成，并编写成试验报告，提供设计方使用。

设计中，对于受压和受压剪复合载荷的结构，常以失稳应变作为控制应变，即要求结构在失稳时的应变低于飞机设计准则中所规定的许用应变。同时还将失稳应变和破坏应变换算成层压板的面内力，提供设计人员备用。

### 7.4.3 试验数据的保留和积累

试验数据都有一定的分散性，在试验报告中，一般不全部罗列各次重复的试验数据，而是经过分析，剔除了不合理的和分散性太大的部分。对于被剔除的分散性大的原始数据要注意保留，以备以后查用，如 20 世纪 90 年代后期出现的小子样预测技术中就需要这些真实分散性的原始试验数据。

试验件破坏的现场记录对于分析结构承力机制和破坏机理、指导改进结构设计具有十分重要的意义，也应注意收集和积累。

## 7.5 壁板的压剪复合试验新技术

飞机翼面结构中，壁板最严重的受力设计情况是在面内轴向压缩和面内剪切复合载荷作用下的稳定性。复合材料加筋层压板在这种受力情况下的稳定性分析比较复杂，往往需要做试验进行验证。因此，壁板在压剪复合加载下的试验是飞机结构件验证试验中的关键项目。

目前，工程上有两种方法可以实现壁板的压剪复合加载试验：

① 第一种方法：取一个包括翼面壁板的盒段，通过对盒段施加弯矩和扭矩，实现对盒段中的一块壁板施加压剪复合载荷。显然，这种方法的试验件的成本很高。

② 第二种方法：对单块壁板直接施加压剪复合载荷。这种方法的技术难度大，但可显著地降低试验件的成本。

本节将介绍一种采用专门装置对单块壁板直接施加压剪复合载荷的方法<sup>[1]</sup>，这种方法已在工程中得到了广泛应用。

如图 7-4 所示，为一个专门设计的对矩形壁板施加压剪复合载荷的装置<sup>[2]</sup>。试验壁板被倾斜一个角度安装在其中，将该装置放在普通压力试验机台面上，通过对装置施加压力的方法，就可对其中的壁板施加压剪复合载荷。

压剪复合加载装置的原理是：矩形壁板

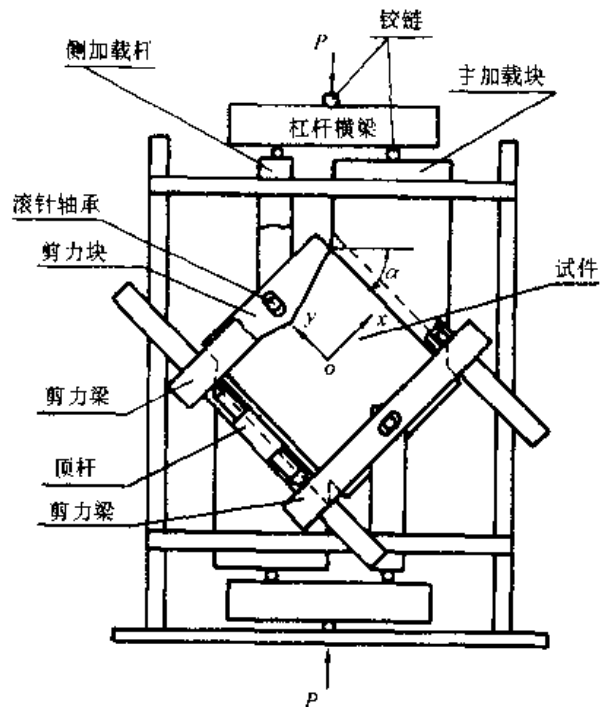


图 7-4 压剪复合加载装置原理简图

受压剪复合载荷的两端与主加载块相连，壁板受剪切载荷的两侧边与剪力块相连。试验机的压力通过杠杆横梁，按杠杆的力臂比分别施加于主加载块和侧加载杆，再由侧加载杆传入剪力块上，通过主加载块对壁板的两端施加压剪复合载荷，通过剪力块对壁板的两侧边施加剪力。剪力梁和顶杆组成的井字形的自身平衡构架，用来消除会传入壁板两侧边的横向分力，只使壁板两侧边受剪。侧加载杆通过滚针轴承与剪力块和剪力梁相连，剪力块上的横向滑槽的作用是使壁板只能受剪力，剪力梁上的纵向滑槽的作用是使横向分力只能传入剪力梁和顶杆组成的井字形的自身平衡构架。

施加在壁板上的压力  $N_x$  和剪力之比  $N_{xy}$ （压剪载荷比），可由壁板的斜置倾角  $\alpha$  控制，按下式计算

$$\frac{N_{xy}}{N_x} = \tan \alpha \quad (7-1)$$

式中： $N_x$ ——壁板端边单位长度上的轴压力；

$N_{xy}$ ——壁板端边和侧边单位长度上的剪力；

$\alpha$ ——壁板端边相对于试验机水平台面的倾角，又称安装角。

当给定压力  $N_x$  和剪力  $N_{xy}$  时，压力试验机的总压力  $P$  可由下式计算

$$P = (N_x B + N_{xy} L) \sqrt{1 + \left(\frac{N_{xy}}{N_x}\right)^2} \quad (7-2)$$

式中： $L$ ——壁板的长度；

$B$ ——壁板的宽度。

若已知试验机的总压力  $P$ ，壁板上的压力  $N_x$  和剪力  $N_{xy}$  由下式计算

$$\begin{aligned} \text{两端边: } N_x &= \frac{\cos^2 \alpha}{L \sin \alpha + B \cos \alpha} P \\ N_{xy} &= \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{L \sin \alpha + B \cos \alpha} P \end{aligned} \quad (7-3)$$

$$\text{两侧边: } N_{xy} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{L \sin \alpha + B \cos \alpha} P$$

试验载荷的相对偏差可按下式估算

$$\epsilon \left( \frac{\Delta N_x}{N_x} \right) = - \left[ \frac{2 \tan^2 \alpha + (B/L) \tan \alpha + 1}{\tan \alpha + B/L} \right] \Delta \alpha - \frac{\tan \alpha}{L \tan \alpha + B} \Delta L - \frac{1}{L \tan \alpha + B} \Delta B + \frac{\Delta P}{P} \quad (7-4a)$$

$$\epsilon \left( \frac{\Delta N_{xy}}{N_{xy}} \right) = \left[ \frac{B/L - \tan^3 \alpha}{\tan^2 \alpha + (B/L) \tan \alpha} \right] \Delta \alpha - \frac{\tan \alpha}{L \tan \alpha + B} \Delta L - \frac{1}{L \tan \alpha + B} \Delta B + \frac{\Delta P}{P} \quad (7-4b)$$

式中： $P$ ——压力试验机的总压力；

$\alpha$ ——壁板在压剪复合加载装置中的安装角；

$L, B$ ——分别为壁板的长度和宽度；

$\Delta \alpha, \Delta P, \Delta L, \Delta B$ ——分别为安装角的、试验机总压力的、壁板长度的和宽度的偏差。

实践表明，当试验件侧边夹具（剪力块）的刚度比试验件的压缩刚度小时，可获得较准确的压剪加载比和满意的试验结果，实际中大都属于这种情况；而当侧边夹具（剪力块）的刚度比试验件的压缩刚度大得多时，即所谓“试验件较弱，夹具太强”的情况，夹具的“边框效应”不可忽视，因此，在设计侧边夹具时要注意与试验件压缩刚度的配合，或在试验结



果分析中加以考虑和剔除。

## 7.6 壁板复合加载试验中的边框效应问题

上节中的“边框效应”主要是指在对壁板压剪复合加载时，与壁板周边相连的夹具（边框）对试验件受力准确性的影响。在壁板压剪复合试验中（见图 7-4），壁板侧边的剪力是靠连于试验件侧边的剪力块（夹具）传入的，由于剪力块与试验件相连，成了试验件的一部分，增加了壁板受压的横剖面面积，因此剪力块将参与受压。当剪力块夹具较强时它从试验件“分走”的压力相当可观，使壁板试验件的轴压力失真，此即“边框效应”。

由上述分析可见，“边框效应”是所有壁板复合加载试验中都存在的一个共同问题，如在拉剪、双向拉伸/压缩等复合加载试验中也存在这个问题。当夹具的刚度与试验件的刚度相比较小时，由“边框效应”引起的加载误差并不大，工程上是可以接受的。否则，要注意加以消除。下面介绍一个经过了试验研究考核的方法。

研究表明，如果使夹具和试验件采取分散连接的方式，并使剪力均匀化，则可消除这种边框效应。图 7-5 示出了壁板侧边的剪力分布情况，由于施加剪力的夹具参与受轴压力，使试验件侧边的剪力改变为图中实线所示，而且使试验件的轴向压力失真。如果将施加剪力的夹具和试验件的连接方式改变成分散连接，并使连接螺栓上的剪力均匀化，则夹具就不会参与受轴压力了，从而可以消除夹具的“边框效应”（图中虚线所示）。值得指出的是，仅仅将夹具和试验件间改变成“分散连接”，不能完全消除边框效应，还应同时使连接螺栓上的剪力均匀化，才能有效地消除“边框效应”的影响。关键是设法使连接螺栓上的剪力均匀化。

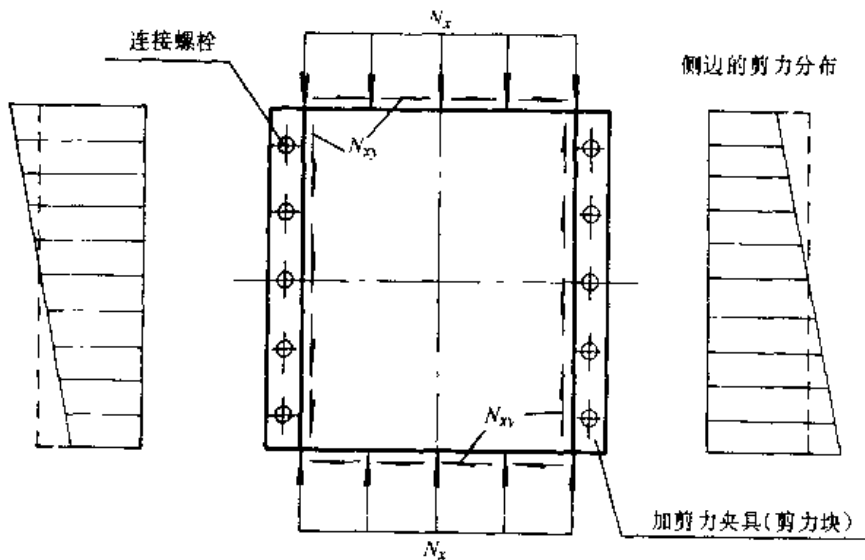


图 7-5 壁板在压剪复合试验中的加载状态

### 参考文献

- [1] 童贤鑫. 压剪复合加载方案及装置. 中国发明专利, 89102131.0, 1992-8
- [2] 黄贤鑫, 关德新, 李新祥, 张阿盈. 一种新的压剪屈曲试验方法和分析方法. 结构强度研究, 1993, (1)

## 附录 A 刚度计算

关于层压结构的刚度计算，在许多专著、教科书和手册中都有介绍。这里根据使用本指南的需要，对有关内容进行了整理和重新推导，供读者参考。

附录中仅介绍工程中普遍采用的复合材料对称层压板和加筋层压板的刚度、等效刚度和等效弹性模量的计算公式。

关于复合材料蜂窝夹层板的刚度计算请见 4.2 节，其复合材料面板（层压板）的刚度、等效刚度和等效弹性模量也可按此附录计算。

在按照各向异性力学理论分析复合材料层压结构时，需要计算沿其结构坐标轴（ $x$  和  $y$  方向）的等效刚度和等效弹性模量。

### A1 层压板的刚度

#### A1.1 一般层压板的刚度系数

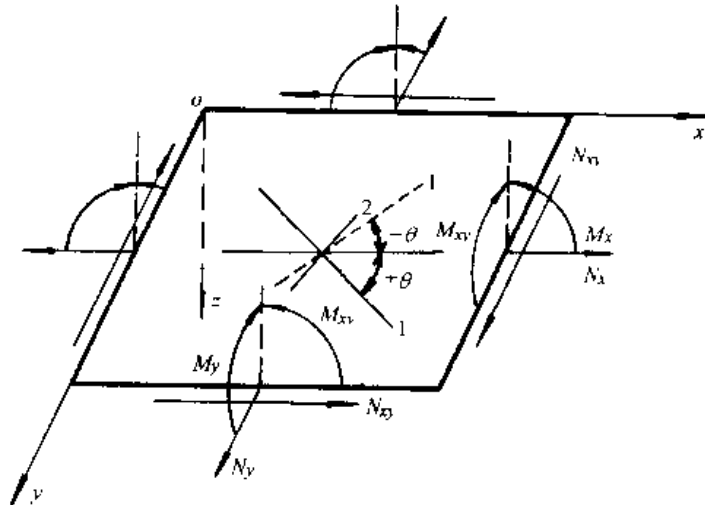


图 A-1 层压板的内力

根据经典层压板理论，层压板的内力 - 应变关系式为

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

式中：

$$N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{x,y} \end{Bmatrix} \quad M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{x,y} \end{Bmatrix}$$

其中  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  分别为层压板剖面单位长度上沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的拉/压力和剪力;  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  分别为层压板剖面单位长度上的绕  $y$  轴和绕  $x$  轴的弯矩和扭矩 (图 A-1)。

式中:

$$\epsilon^0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad k = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

其中  $\epsilon_x^0$ ,  $\epsilon_y^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$  分别为层压板中面沿  $x$  方向和沿  $y$  方向的正应变和剪应变;  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_{xy}$  分别为层压板中面沿  $x$  方向和沿  $y$  方向的曲率和扭(曲)率。

式中:  $A$ ,  $B$ ,  $D$  分别为层压板的面内刚度矩阵、耦合刚度矩阵和弯曲刚度矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$$

其中,  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) 称层压板的“面内刚度系数”;

$B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) 称层压板的“(拉弯)耦合刚度系数”;

$D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) 称层压板的“弯曲刚度系数”。

需要指出的是,在式(A-1)中,  $N$  和  $M$  是作用在层压板剖面的单位长度上的力/力矩,故  $A$ 、 $B$ 、 $D$  对应地为层压板剖面单位长度的刚度,即刚度系数。因此,层压板剖面的刚度等于其刚度系数与剖面宽度的乘积。

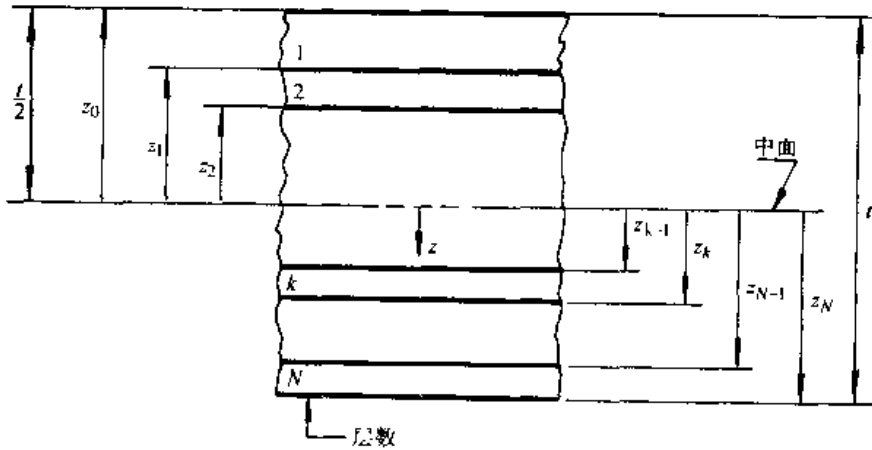


图 A-2 层压板的几何性质

上述刚度系数可按下列式计算

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

式中:  $N$ ——层压板的总层数;

$z_k, z_{k-1}$ ——第  $k$  层和第  $k-1$  层的  $z$  坐标 (图 A-2);

$(\bar{Q}_{ij})_k$ ——第  $k$  层铺层的偏轴模量。

$(\bar{Q}_{ij})_k$  与铺层材料主方向的正轴模量  $Q_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) 和该铺层的铺层角  $\theta$  角有关。设层压板的结构坐标轴为  $x, y$ , 铺层的主方向坐标轴为 1, 2。规定  $x$  轴至 1 轴, 逆时针方向的铺层角  $\theta$  为正, 顺时针方向的铺层角  $\theta$  为负 (在图 A-1 中, 由于  $z$  轴向下,  $x$  轴至 1 轴顺时针方向的铺层角  $\theta$  为正)。

铺层材料主方向的正轴模量  $Q_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) 按下式计算

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{16} &= Q_{26} = 0 \end{aligned}$$

式中:  $E_{11}$ ——铺层沿纤维方向 (1) 的弹性模量;

$E_{22}$ ——铺层垂直于纤维方向 (2) 的弹性模量;

$G_{12}$ ——铺层的剪切模量;

$\nu_{12}$ ——铺层的纵向泊松比, 由 1 方向的载荷引起的 2 方向的应变与 1 方向的应变之比,  $\nu_{12} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ ;

$\nu_{21}$ ——铺层的横向泊松比, 由 2 方向的载荷引起的 1 方向的应变与 2 方向的应变之比,  $\nu_{21} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$ 。

$\bar{Q}_{ij}$  与  $Q_{ij}$  之间的转换关系为:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \end{aligned}$$

### A1.2 对称层压板的刚度系数

对称铺层的层压板的刚度系数中  $B_{ij} = 0$ 。

对称均衡铺层的层压板的刚度系数中  $B_{ij} = 0$  和  $A_{16} = 0, A_{26} = 0$ 。

对称均衡铺层的层压板, 当层数较多时, 其  $D_{16}$  和  $D_{26}$  与  $D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}$  相比很

小, 计算中可以略而不计, 可视为正交各向异性板,  $B_{ij} = 0$ ,  $A_{16} = 0$ ,  $A_{26} = 0$  和  $D_{16} = 0$ ,  $D_{26} = 0$ 。

### A1.3 对称层压板的等效刚度系数和等效弹性模量

#### A1.3.1 对称层压板的等效面内拉伸/压缩刚度系数和剪切刚度系数、等效弹性模量

对称层压板的等效面内拉伸/压缩刚度系数和剪切刚度系数按下式计算:

$$\begin{aligned} (ET)_x = E_x t &= A_{11} + \frac{2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{22}A_{16}^2 - A_{12}^2A_{66}}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \\ (ET)_y = E_y t &= A_{22} + \frac{2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{12}^2A_{66}}{A_{11}A_{66} - A_{16}^2} \\ (GT) = G_{xy} t &= A_{66} + \frac{2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{22}A_{16}^2 - A_{11}A_{26}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \end{aligned} \quad (A-3)$$

对称均衡层压板, 呈面内正交各向异性,  $A_{16} = 0$  和  $A_{26} = 0$ , 上式简化为

$$\begin{aligned} (ET)_x = E_x t &= A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \\ (ET)_y = E_y t &= A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \\ (GT) = G_{xy} t &= A_{66} \end{aligned} \quad (A-4)$$

式中:  $(ET)_x$ ——层压板沿  $x$  方向的等效拉伸/压缩刚度系数;

$(ET)_y$ ——层压板沿  $y$  方向的等效拉伸/压缩刚度系数;

$(GT)$ ——层压板的等效面内剪切刚度系数;

$t$ ——层压板的厚度;

$A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $A_{66}$ ——层压板的面内刚度系数。

对称均衡层压板的等效弹性模量按下式计算:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{t} \left[ A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right] \\ E_y &= \frac{1}{t} \left[ A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right] \\ G_{xy} &= \frac{1}{t} A_{66} \\ \nu_{xy} &= \frac{A_{12}}{A_{22}} \\ \nu_{yx} &= \frac{A_{12}}{A_{11}} \\ \nu_{xy} E_y &= \nu_{yx} E_x \end{aligned} \quad (A-5)$$

式中:  $E_x$ ——层压板沿  $x$  方向的等效拉伸/压缩弹性模量;

$E_y$ ——层压板沿  $y$  方向的等效拉伸/压缩弹性模量;

$G_{xy}$ ——层压板的等效面内剪切模量;

$\nu_{xy}$ ——层压板的泊松比;

$\nu_{yx}$ ——层压板的泊松比。

注意, 本指南中采取大多数专著、教科书和设计手册中对  $\nu_{xy}$  和  $\nu_{yx}$  的规定, 即:  $\nu_{xy}$  为由  $x$  方向的载荷引起的  $y$  方向的应变与  $x$  方向的应变之比,  $\nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$ ;  $\nu_{yx}$  为由  $y$  方向的载荷引起的  $x$  方向的应变与  $y$  方向的应变之比,  $\nu_{yx} = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}$ 。

这个规定与 1990 年出版的《复合材料设计手册》和 1988 年出版的《复合材料工作手册》中的规定不同。

### A1.3.2 对称层压板的等效弯曲刚度系数

单纯弯/扭 ( $M_x = D_x k_x$ ,  $M_y = D_y k_y$ ,  $M_{xy} = D_{xy} k_{xy}$ ) 时, 对称层压板的等效弯曲刚度系数  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  按下式计算:

$$\begin{aligned} D_x &= D_{11} + \frac{2D_{12}D_{16}D_{26} - D_{22}D_{16}^2 - D_{12}^2D_{66}}{D_{22}D_{66} - D_{26}^2} \\ D_y &= D_{22} + \frac{2D_{12}D_{16}D_{26} - D_{11}D_{26}^2 - D_{12}^2D_{66}}{D_{11}D_{66} - D_{16}^2} \\ D_{xy} &= D_{66} + \frac{2D_{12}D_{16}D_{26} - D_{22}D_{16}^2 - D_{11}D_{26}^2}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

式中:  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{66}$ ,  $D_{16}$ ,  $D_{26}$  ——层压板的弯曲刚度系数。

对于层数较多的对称均衡层压板,  $D_{16}$  和  $D_{26}$  与  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{66}$  相比一般很小, 常可忽略, 可视为正交各向异性板, 则式 (A-6) 可近似为

$$\begin{aligned} D_x &= D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}} \\ D_y &= D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \\ D_{xy} &= D_{66} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

## A2 加筋层压板的刚度

加筋板是蒙皮和加筋条组成的组合结构, 虽然有的加筋层压板中加筋条和蒙皮是一次成型的层压结构, 分析中也常常将它们分开处理。

按刚度的定义, 结构的刚度是指结构抵抗外载荷的能力, 其大小等于令结构产生单位 (广义) 变形时, 所需作用的 (广义) 力的大小。当结构在弹性范围内受力时, 由于变形和力之间呈线性关系, 只要保持其组成单元间的变形协调, 作用在它上面的力是可以叠加的, 因此, 在计算结构的刚度时, 可以采用线性叠加的方法, 即, 加筋板的刚度是蒙皮的刚度和加筋条的刚度的叠加。下面将按这一原理推导加筋层压板的刚度。

蒙皮的刚度可直接引用 A1 节中层压板的公式计算, 而加筋条的刚度计算需要另作处理。目前工程中计算加筋条刚度的常用方法是, 将加筋条分解成一系列板条元, 对每个板条元可按层压板计算其刚度, 然后叠加。因此, 这种方法仅适用于薄壁有加筋条, 以及由它组成的加筋层压板。

采用这种方法时, 要注意如下两个使用条件: (1) 加筋板的蒙皮的刚度和加筋条的板条

元的刚度的匹配要基本合理，防止板条元提前局部屈曲，而使计算失效；(2) 用这种方法计算的加筋板的等效刚度系数是指平均分布的刚度，因此对密加筋板较适合。

为了引用 A1 节的计算公式，在下面的推导中，假定组成加筋层压板的各板条元（包括蒙皮）均为对称均衡铺层的层压板。

### A2.1 加筋层压板的面内拉伸/压缩刚度、等效刚度系数和等效弹性模量

对于工程中常用的纵向（沿  $x$  轴向的）加筋层压板，可按下述方法计算面内拉伸/压缩刚度、等效刚度系数和等效弹性模量。

将加筋层压板简化为由一系列板元（ $i=1\sim n$ ）组成的的计算模型，蒙皮的  $i=1$ ，加筋条的  $i=2\sim n$ 。在端部轴压力  $P$  作用下，由于均匀压缩，每个板条元的纵向应变相同，且等于加筋层压板的纵向应变  $\epsilon$ ，即

$$\epsilon = \frac{P}{E_x F} = \frac{p_i}{E_x f_i} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

式中： $P$ ——作用在加筋层压板上的轴压力；

$p_i$ ——作用在第  $i$  个板条元上的轴压力；

$E_x$ ——加筋层压板的等效  $x$  轴向拉伸/压缩弹性模量；

$E_{xi}$ ——第  $i$  个板条元的等效  $x$  轴向拉伸/压缩弹性模量；

$F$ ——加筋层压板的剖面面积； $F = \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n t_i b_i$

$f_i$ ——第  $i$  个板条元的剖面面积； $f_i = t_i b_i$

$t_i$ ——第  $i$  个板条元的厚度；

$b_i$ ——第  $i$  个板条元的宽度。

由上式则得

$$p_i = \frac{E_{xi} f_i}{E_x F} P \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

可见，作用在每个板条元上的力按刚度比分配。

由于

$$P = \sum_{i=1}^n p_i = \frac{P}{E_x F} \sum_{i=1}^n E_{xi} f_i = \frac{P}{E_x F} \sum_{i=1}^n (E_{xi} t_i) b_i \quad (\text{A-8})$$

上式中  $(E_{xi} t_i)$  或写为  $(E_x t)_i$ ，为第  $i$  个板条元的面内刚度系数，由式 (A-4)

$$(E_x t)_i = A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}}$$

#### (1) 加筋层压板的面内拉伸/压缩刚度

由式 (A-8)，则加筋层压板的拉伸/压缩刚度为

$$E_x F = \sum_{i=1}^n (A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}}) b_i \quad (\text{A-9})$$

式中： $A_{11i}$ ， $A_{12i}$ ， $A_{22i}$ ——第  $i$  个板条元的面内刚度系数；

$b_i$ ——第  $i$  个板条元的宽度。

(2) 加筋层压板的等效面内拉伸/压缩弹性模量

若将其作为一等效层压平板, 加筋层压板在  $x$  轴向上的等效拉伸/压缩弹性模量为

$$E_x = \frac{\sum_{i=1}^n (A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}}) b_i}{\sum_{i=1}^n b_i t_i} \quad (\text{A}-10)$$

(3) 加筋层压板的等效面内拉伸/压缩刚度系数

等效层压平板的宽度取加筋层压板的宽度, 则其等效的面内拉伸/压缩刚度系数为

$$(ET)_x = \frac{E_x F}{W} = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n \left( A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}} \right) b_i \quad (\text{A}-11)$$

式中:  $W$ ——加筋层压板的宽度。

对于横向加筋层压板, 其横向拉伸/压缩刚度、等效横向拉伸/压缩弹性模量和等效面内刚度系数, 可按上述类似方法推导。

### A2.2 加筋层压板的弯曲刚度和等效弯曲刚度系数

对于纵向 ( $x$  轴向) 的加筋层压板, 可按下述方法计算弯曲刚度。

将其简化成由一系列板条元 ( $i=1 \sim n$ ) 组成的计算模型。近似按宽板梁处理。则有

$$k_x = \frac{M_x}{EI}$$

式中:  $M_x$ ——作用于加筋层压板的弯矩;

$EI$ ——加筋层压板剖面的弯曲刚度;

$k_x$ ——加筋层压板的弯曲变形 (指  $x$  方向的曲率)。

由于各板条元的变形应与加筋层压板的变形保持一致, 则有

$$\frac{m_{xi}}{(EI)_i} = \frac{M_x}{EI}$$

式中:  $m_{xi}$ ——作用于第  $i$  个板条元的弯矩;

$(EI)_i$ ——第  $i$  个板条元剖面的弯曲刚度;

则 
$$m_{xi} = \frac{(EI)_i}{EI} M_x$$

由上式可见, 作用弯矩  $M_x$  在各板条元上按刚度比分配。

由 
$$M_x = \sum_{i=1}^n m_{xi} = \frac{M_x}{EI} \sum_{i=1}^n (EI)_i$$

得 
$$EI = \sum_{i=1}^n (EI)_i \quad (\text{A}-12)$$

所以, 加筋层压板的弯曲刚度等于各组成板条元的弯曲刚度之和。

注意到在梁的弯曲公式中, 弯曲刚度  $EI$  是指梁的剖面相对于它的中性轴的弯曲刚度。因此, 在计算各组成板条元的弯曲刚度  $(EI)_i$  时, 应进行移轴处理, 即将各板条的弯曲刚度向加筋层压板剖面的中性轴转换。为此, 首先要计算加筋层压板剖面的中性轴的位置、各板条元 (自身) 的弯曲刚度和各板条元向加筋层压板中性轴转换的弯曲刚度。

· 加筋层压板剖面的中性轴的位置



以帽形加筋板为例 (图 A-3), 其剖面中性轴的位置 ( $z_c$  坐标) 按下式确定

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n E_i t_i b_i z_i}{\sum_{i=1}^n E_i t_i b_i}$$

由式 (A-4), 上式可写成

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \left( A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}} \right) b_i z_i}{\sum_{i=1}^n \left( A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}} \right) b_i} \quad (\text{A-13})$$

式中:  $z_c$ ——加筋层压板剖面中性轴距参考轴的距离;

$z_i$ ——第  $i$  个板条元剖面中心至参考轴的距离;

$b_i$ ——第  $i$  个板条元宽度;

$A_{11i}, A_{22i}, A_{12i}$ ——第  $i$  个板条元的面内刚度系数。

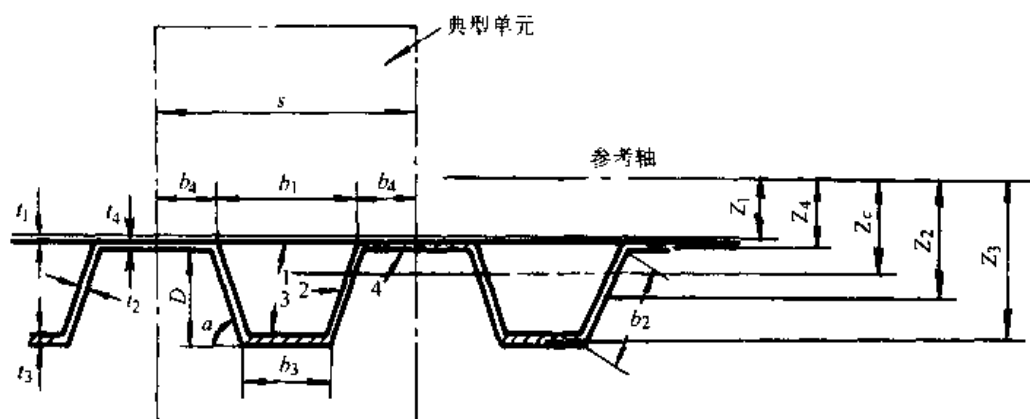


图 A-3 帽形加筋层压板剖面

· 板条元 (自身) 的弯曲刚度 分三种情况考虑

① 当板条元宽度方向平行于中性轴时, 由式 (A-6), 第  $i$  个板条元 (自身) 弯曲刚度为

$$\left[ D_{11i} + \frac{2D_{12i}D_{16i}D_{26i} - D_{22i}D_{16i}^2 - D_{12i}^2D_{66i}}{D_{22i}D_{66i} - D_{26i}^2} \right] b_i \quad (\text{A-14})$$

② 若忽略  $D_{16i}$  和  $D_{26i}$  的影响时, 由式 (A-7), 第  $i$  个板条元 (自身) 弯曲刚度为

$$\left[ D_{11i} - \frac{D_{12i}^2}{D_{22i}} \right] b_i \quad (\text{A-15})$$

③ 当某板条元的宽度方向不平行于中性轴时, 设其与中性轴的夹角为  $\alpha$  (如图 A-3 中的板条元 2), 则这个板条元的 (自身) 弯曲刚度应按下式计算

$$\frac{1}{12} E_x t_i b_i^3 \sin^3 \alpha = \frac{1}{12} \left[ A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}} \right] b_i^3 \sin^3 \alpha \quad (\text{A-16})$$

· 板条元向加筋层压板中性轴转换的弯曲刚度 弯曲刚度的转换值为

$$E_i t_i b_i (z_i - z_c)^2 = \left[ A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}} \right] b_i (z_i - z_c)^2 \quad (\text{A-17})$$

### (1) 加筋层压板的弯曲刚度

由式 (A-12), 加筋层压板的弯曲刚度为各组成板条元的弯曲刚度之和。各条元的弯曲刚度可按式 (A-17) (向中性轴转换的弯曲刚度) 和式 (A-14) / 式 (A-15) / 式 (A-16) (板条元 (自身) 的弯曲刚度) 计算。

例如: 当忽略  $D_{16i}$  和  $D_{26i}$  的影响, 且各板条元均平行于加筋层压板的中性轴时, 加筋层压板的弯曲刚度可写为

$$EI = \sum_{i=1}^n \left[ \left( D_{11i} - \frac{D_{12i}^2}{D_{22i}} \right) b_i + \left( A_{11i} - \frac{A_{12i}^2}{A_{22i}} \right) b_i (z_i - z_c)^2 \right] \quad (\text{A-18})$$

式中:  $D_{11i}, D_{12i}, D_{22i}$ ——第  $i$  个板条元的弯曲刚度系数;

$A_{11i}, A_{12i}, A_{22i}$ ——第  $i$  个板条元的面内刚度系数;

$b_i$ ——第  $i$  个板条元的宽度;

$(z_i - z_c)$ ——第  $i$  个板条元剖面中心至中性轴的距离;

$z_c$ ——加筋层压板剖面中性轴位置 (A-13 式)。

### (2) 加筋层压板的等效弯曲刚度系数 $D_r$

若将加筋层压板作为一等效层压板, 等效层压板的宽度取加筋层压板的宽度, 则

$$D_r = \frac{EI}{W}$$

式中:  $W$ ——加筋层压板的宽度。

对于横向 ( $y$  轴方向的) 加筋层压板, 其弯曲刚度和等效弯曲刚度系数, 可按上述类似方法推导。

以帽形加筋层压板典型单元为例 (图 A-3), 其弯曲刚度  $EI$  和等效弯曲刚度系数  $D_x$  分别为

$$EI = \left[ \left( D_{111} - \frac{D_{121}^2}{D_{221}} \right) s + 2 \left( D_{114} - \frac{D_{124}^2}{D_{224}} \right) b_4 + \left( D_{113} - \frac{D_{123}^2}{D_{223}} \right) b_3 + \frac{2}{12} \left( A_{112} - \frac{A_{122}^2}{A_{222}} \right) b_2^3 \sin^3 \alpha \right] +$$

$$\left[ A_{111} - \frac{A_{121}^2}{A_{221}} \right] s (z_1 - z_c)^2 + 2 \left[ A_{114} - \frac{A_{124}^2}{A_{224}} \right] b_4 (z_4 - z_c)^2 + \left[ A_{113} - \frac{A_{123}^2}{A_{223}} \right] b_3 (z_3 - z_c)^2 +$$

$$2 \left[ A_{112} - \frac{A_{122}^2}{A_{222}} \right] b_2 (z_2 - z_c)^2$$

$$D_x = \frac{EI}{s}$$

### A2.3 加筋层压板的扭转刚度和等效扭转刚度系数

根据自由扭转理论, 薄壁开剖面的棱柱体不能承受扭矩。因此, 工程中可不考虑加筋条为开剖面的加筋板的扭转刚度。

下面仅介绍加筋条为闭剖面的加筋层压板的扭转刚度的计算方法。

设加筋层压板上有  $m$  个闭剖面的薄壁加筋条, 每个加筋条的材料、铺层、几何尺寸都相同。每个“单闭室”均由  $n$  个对称均衡的层压板板条元组成。加筋层压板的扭转刚度则为此  $m$  个“单闭室”的扭转刚度之和。

“单闭室”薄壁剖面棱柱体自由扭转时的扭转刚度为

$$(GJ)_0 = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{Gt}}$$

式中： $\Omega$ ——“单闭室”所围面积的两倍；

$\oint ds$ ——沿单闭室的线积分；

$Gt$ ——单闭室的剪切刚度系数。

则带有  $m$  个单闭室加筋条的加筋层压板的扭转刚度可按下式计算

$$(GJ) = \frac{m\Omega^2}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{A_{66i}}} \quad (\text{A} - 19)$$

式中： $m$ ——加筋条（“单闭室”）的个数；

$\Omega$ ——“单闭室”所围面积的两倍；

$n$ ——组成“单闭室”的板条元个数；

$b_i$ ——组成“单闭室”的第  $i$  个板条元宽度；

$A_{66i}$ ——组成“单闭室”的第  $i$  个板条元的面内刚度系数。

加筋层压板的等效扭转刚度系数为

$$D_{xy} = \frac{(GJ)}{W} \quad (\text{A} - 20)$$

式中： $W$ ——加筋层压板的宽度。

以帽形加筋层压板典型单元为例（图 A-3），组成“单闭室”的板条元为 1、2 和 3， $m=1$ ，其扭转刚度为

$$(GJ) = \frac{[(b_1 + b_3)b_2 \sin \alpha]^2}{\frac{b_1}{A_{661}} + \frac{2b_2}{A_{662}} + \frac{b_3}{A_{663}}}$$

其等效扭转刚度系数为

$$D_{xy} = \frac{[(b_1 + b_3)b_2 \sin \alpha]^2}{\left( \frac{b_1}{A_{661}} + \frac{2b_2}{A_{662}} + \frac{b_3}{A_{663}} \right)}$$

#### A2.4 加筋层压板的面内剪切刚度和等效剪切模量

对于纵向（ $x$  轴向的）加筋层压板，剪切刚度和等效剪切模量的计算方法及其讨论如下。

仍将加筋层压板简化为由一系列板条元（ $i=1 \sim n$ ）组成的计算模型，蒙皮的  $i=1$ ，加筋条的  $i=2 \sim n$ 。

加筋层压板沿  $y$  方向受剪力  $Q$  作用，并且  $Q$  通过加筋层压板剖面的剪心。

令  $Q_i$ ， $N_{xyi}$ ， $\gamma_{xyi}$  分别为第  $i$  个板条元上的剪力、剪流和剪切变形。

假设：加筋层压板在剪力  $Q$  的作用下，其剖面仍为平面，仅绕  $z$  轴产生了  $\bar{\gamma}_{xy}$  的剪切变形（转角）。要保持变形协调，则每个板条元的剪切变形  $\gamma_{xyi}$  应为

$$\gamma_{xyi} = \bar{\gamma}_{xy} \cos \alpha_i \quad (\text{A} - 21)$$

式中:  $\alpha_i$  ——第  $i$  个板条元与剪力方向 ( $y$  轴方向) 的夹角;

$\bar{\gamma}_{xy}$  ——加筋层压板的平均剪切变形;

$\gamma_{xyi}$  ——第  $i$  个板条元的剪切变形。

加筋层压板的平均剪切变形  $\bar{\gamma}_{xy}$  可由下式计算

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{N_{xy}}{(GT)} = \frac{N_{xy}W}{(GT)W} = \frac{Q}{(GT)W} \quad (\text{A-22})$$

式中:  $(GT)$  ——加筋层压板的剪切刚度系数;

$N_{xy}$  ——加筋层压板的平均剪流;

$W$  ——加筋层压板的宽度。

每个板条元的剪切变形  $\gamma_{xyi}$  为

$$\gamma_{xyi} = \frac{N_{xyi}}{(Gt)_i} = \frac{N_{xy}b_i}{(Gt)_ib_i} = \frac{Q_i}{(Gt)_ib_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (\text{A-23})$$

式中:  $(Gt)_i$  ——第  $i$  个板条元的剪切刚度系数;

$b_i$  ——第  $i$  个板条元的宽度;

$N_{xyi}$  ——第  $i$  个板条元的剪流;

$Q_i$  ——第  $i$  个板条元的剪力。

由式 (A-21) ~ (A-23), 则

$$Q_i = \frac{(Gt)_ib_i}{(GT)W} Q \cos \alpha_i \quad (\text{A-24})$$

由

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{Q}{(GT)W} \sum_{i=1}^n (Gt)_ib_i \cos \alpha_i$$

则加筋层压板的剪切刚度系数  $(GT)$  为

$$(GT) = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n (Gt)_ib_i \cos \alpha_i \quad (\text{A-25})$$

加筋层压板的剪切刚度

$$(GF) = (GT)W = \sum_{i=1}^n (Gt)_ib_i \cos \alpha_i \quad (\text{A-26})$$

加筋层压板的等效剪切模量

$$G_{xy} = \frac{(GF)}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n (Gt)_ib_i \cos \alpha_i}{\sum_{i=1}^n b_it_i \cos \alpha_i} \quad (\text{A-27})$$

当每个板条元为对称均衡的层压板时, 由  $(Gt)_i = A_{66i}$ , 则式 (A-25) ~ (A-27) 变为

$$(GT) = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n A_{66i} b_i \cos \alpha_i \quad (\text{A-28})$$

$$(GF) = (GT)W = \sum_{i=1}^n A_{66i} b_i \cos \alpha_i \quad (\text{A-29})$$

$$G_{xy} = \frac{(GF)}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n A_{66i} b_i \cos \alpha_i}{\sum_{i=1}^n b_it_i \cos \alpha_i} \quad (\text{A-30})$$

以图 A-3 帽形加筋层压板典型单元为例，其剪切刚度 ( $GF$ ) 为

$$(GF) = 2A_{664}b_4 + A_{663}b_3 + 2A_{662}b_2\cos\alpha + A_{661}s$$

剪切刚度系数为

$$(GT) = \frac{(GF)}{s}$$

等效剪切模量为

$$G_{xy} = \frac{2A_{664}b_4 + A_{663}b_3 + 2A_{662}b_2\cos\alpha + A_{661}s}{2b_4t_4 + b_3t_3 + 2b_2t_2\cos\alpha + st_1}$$

在使用上述公式时请注意：

(1) 对于加筋条为开剖面的加筋层压板，计算其剪切刚度、等效剪切刚度系数和等效剪切模量时，只需取加筋条中与蒙皮相连的板条元和蒙皮板元进行计算。这是因为不与蒙皮相连的板条元不承受剪力的缘故。

(2) 对于加筋条为闭剖面的加筋层压板，已发现，当组成加筋条的各板条元的剪切刚度不匹配时，加筋板的平剖面变形假设不能严格满足各板条元之间的平衡条件，因此，前面推导的式(A-25) - (A-30)是近似的。(以上面的帽形加筋层压板为例，只有当  $A_{663} = A_{664} = A_{662}\cos\alpha$  时才能严格满足各板条元之间的平衡条件。)

鉴于上述情况，建议在计算加筋层压板的剪切刚度、等效剪切刚度系数和等效剪切模量时，无论是加筋条为开剖面的加筋层压板还是加筋条为闭剖面的加筋层压板，都可以只取蒙皮板元和加筋条中与蒙皮相连的板条元作近似计算。于是，对于图 A-3 帽形加筋层压板的典型单元：

其剪切刚度可近似为

$$(GF) = 2A_{664}b_4 + A_{661}s$$

剪切刚度系数可近似为

$$(GT) = \frac{(GF)}{s}$$

等效剪切模量可近似为

$$G_{xy} = \frac{2A_{664}b_4 + A_{661}s}{2b_4t_4 + st_1}$$

## 参 考 文 献

- [1] 琼斯 R.M. 复合材料力学. 朱颐龄等译校. 上海: 上海科学技术出版社, 1981

## 跋

复合材料层压板壳和蜂窝夹层结构的稳定性分析对于提高结构效率、减轻重量有着重要影响。复合材料的各向异性、铺层可设计性等特点为结构设计提供了许多灵活性，同时又给结构稳定性分析带来了不少新问题。

为满足工程应用需要，航空工业有关的研究所、高校和大连理工大学等单位的工程技术人员、专家教授在这一专业领域进行了大量的设计分析研究、试验研究和开发应用，在总结归纳多年工作经验和研究成果的基础上，编写了《复合材料结构稳定性分析指南》。其内容的系统性、实用性和先进性都比以往出版的设计手册中相关部分有了较大提高。

(1) 系统地总结归纳了飞机结构中复合材料层压板、加筋板和蜂窝夹层结构稳定性的计算方法和分析软件。既给出了线性屈曲的分析方法和软件，又介绍了非线性屈曲的分析方法和软件；在给出设计分析的计算方法同时，又给出了简易可行的压剪复合等验证试验方法。

(2) 所推荐的方法大部分已经过试验考核和型号应用验证，工程实用性强。为便于读者参考使用，各章都给出了应用实例；为适应飞机设计普遍采用有限元分析技术的需要，各章还着重介绍了有限元分析程序及使用方法。

(3) 扼要介绍了非线性后屈曲分析的理论及新近研制的分析软件，它代表目前稳定性分析领域的发展方向，是挖掘结构承载潜力的重要途径之一。另外，还对冲击损伤、温湿环境的影响和二次分支屈曲等新问题的分析方法作了简要介绍。

本“指南”尚存在不足之处：因复合材料构件价格昂贵和研究经费所限，系统的试验研究还不够充分，所提供的试验曲线和经验公式有限；复合材料结构稳定性分析软件不少，但缺乏统一的对比和评估，尚需使用者在应用时鉴别和选择；“指南”着重于计算分析，关于结构选型和优化设计的内容不够。

以上不足之处都有待今后进一步研究和拓展。

李怡宇 朱梅庭

2002.5.20

