时代教育·国外高校优秀教材精选

（原书第2版）

结构理论

Theory of Structures

（美）S.P.铁木辛柯（S.P.Timoshenko）
D.H.杨（D.H.Young）
叶红玲　杨庆生　等译
著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

McGraw Hill Education

ISBN 7-111-16205-6/O-419（课）
封面设计：晓 蒲

Mc Graw Hill Education

http://www.mheducation.com

ISBN 7-111-16205-6
9 787111 162056 >

定价：32.00元

时代教育·国外高校优秀教材精选

结构理论

（原书第2版）

（美）S. P. 铁木辛柯（S. P. Timoshenko）
D. H. 杨（D. H. Young）著

叶红玲　杨庆生　等译
杨庆生　叶红玲　校

机械工业出版社
麦格劳—希尔教育出版集团

S. P. Timoshenko, D. H. Young
THEORY OF STRUCTURES: Second Edition
ISBN 0-07-085807-1
Copyright© 1965, 1945 McGraw-Hill, Inc. All Right Reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.
Simplified Chinese translation edition jointly published by McGraw-Hill Education (Asia) Co. and China Machine Press House.

本书中文简体字翻译版由机械工业出版社和美国麦格劳—希尔教育(亚洲)出版公司合作出版。未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签，无标签者不得销售。
北京市版权局著作权合同登记号：图字 01-2003-6204

本书主要内容涵盖了桁架、刚架、拱和连续梁等结构形式的静力学和动力学。阐述了各种结构在静定和超静定状态下的内力、变形、影响线的分析方法和能量原理；介绍了结构动力学的基础知识和结构理论的最新发展。本书通篇贯穿了理论联系实际、注重工程应用的学术思想；在保持内容完整性和知识系统性的前提下，特别关注工程实际问题的处理。对于工程中经常遇到的结构形式和载荷状况如何建模、如何选取适当的分析方法以及对计算结果的检验和判断等问题，都进行了详细的讨论。本书的知识体系与结构力学教材基本一致。

本书可作为土木工程本科生和研究生学习结构力学、进行结构分析课程的教材，也适合作为工程技术人员的技术书籍。

图书在版编目(CIP)数据

结构理论/(美)铁木辛柯(Timoshenko, S. P.),(美)杨(Young, D. H.)著；叶红玲等译. —北京：机械工业出版社，2005.4

(时代教育·国外高校优秀教材精选)

ISBN 7-111-16205-6

Ⅰ.结… Ⅱ.①铁…②杨…③叶… Ⅲ.结构力学-高等学校-教材 Ⅳ.0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 015079 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑：季顺利 版式设计：张世琴 责任校对：陈延翔
封面设计：饶 薇 责任印制：陶 湛

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2005 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·20.25 印张·501 千字

定价：32.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话(010)68326294
封面无防伪标均为盗版

序

像铁木辛柯独著或同他人合著的其他的力学教科书一样，初版于1945年、再版于1965年的《结构理论》也是一部经典著作。

经典的魅力在于，它的光芒不但不会随年华的流逝而衰减，相反会时时给人以新的照耀。这本《结构理论》作为经典教科书，不仅在于它仍然可以用作土木类专业的教材或参考书，还对于其他专业研读变形体力学的人员给予更多启发。

结构理论或结构力学同材料力学一样，都属于变形体力学的早期发展，学习这门课程的意义是多方面的。首先是力学概念的突破，即由不变形体(质点与刚体)向变形体(弹性体、塑性体、流体等)的升华。如果不是在变形上寻找出路，力学永远也不会走出构件或结构的单纯靠力平衡方程无法求解的困境。

无论超静定的构件或结构，如果不进行受力变形的几何协调方程的研究，就不可能由柳暗走向花明。紧接着变形的研究，必然呼唤对于力与变形(或应力与应变)本构关系的探讨。结构理论的意义就在于把材料力学对构件使用成功的“平衡—变形—本构”三要点的方法论，在结构上作进一步淋漓尽致的发挥和发展。

学习结构理论的另一个意义在于它的工程实用性，铁木辛柯与杨的这本教材充分体现了理论密切联系实际的特点，对于我们从事实实在在的工程结构分析与设计，不仅有直接使用价值，也颇有理念上的深刻启发性。

当今，力学等领域发展的各种数值计算方法均可为工程结构分析乃至优化设计提供有效的服务。从现在的观点看，材料力学实际是关于杆件的变形体力学，结构力学则是杆件体系的变形体力学。如果说二者都是研究天然有限元的变形体力学，那么，有限元方法则是从天然有限元(轴力杆、梁等)向人造有限元(膜、板、壳、块体等)变形体力学的延伸。

从这个角度来看铁木辛柯与杨的《结构理论》，可以看到这本书是颇有前瞻性的。本书在1965年的再版序言里特别强调了结构分析的矩阵法和动载荷计算。话虽简练，却很有远见。

从1945年出版第1版到1965年出版第2版的20年间，力学取得了很多重大造展，为工程和其他学科作出了很大的贡献。其中，在那个时期出现的有限

元方法就以矩阵法为重要工具。无论结构分析的矩阵法还是动力分析，从1965年以后又有了巨大的发展。至今又过去了将近40年，包括有限元方法在内的各种数值计算方法已经获得了广泛的应用，达到了无论科学还是技术须臾都不能离开它们的境界。

不难想象，从1945年到现在的近60年间，这本书为工程界和力学界人才的培养，在结构力学方面作出了极其重要的贡献，因此有理由相信，这本翻译书将为中国相关专业的大学生们提供一本有益的参考书。

也许伴随着计算机技术的不断发展和使用，今后结构理论教材的内容会有更多的取舍和重组，但是基本的原理非但不会减弱，反而还会进一步加强，例如矩阵法、动力分析、能量原理和方法，会对其进行重点阐发。同时，工程的直觉和力学的概念也要更加突出。因此，经典著作会放射出永不泯灭的光芒。

隋允康

写于北京工业大学

译 者 序

由铁木辛柯(S. P. Timoshenko)教授和杨(D. H. Young)教授合著的《结构理论》(1965年，第2版)，作为一本工科结构力学教科书，在世界范围内得到广泛的推崇和认可。面世半个多世纪以来，已经惠及几代读者，被多次以各种语言和版式印制，已经成为本领域内一部名副其实的经典著作。在科学技术飞速发展的今天，愈发显示出它的独特价值。我们相信，本书中文版的问世，将会对读者正确理解和掌握结构力学的知识有所帮助；同时，对我国结构力学教学和科研工作起到借鉴作用。

原书是为工程专业的本科生和一年级研究生编写的一本教材。作者之一——铁木辛柯教授是一位特别注重解决工程实际问题的力学专家。本书通篇贯穿了理论联系实际、注重工程应用的学术思想；在保持内容完整性和知识系统性的前提下，特别关注工程实际问题的处理。本书用大量的篇幅介绍工程问题的模型化和各种分析方法。例如，对于工程中经常遇到的结构形式和载荷状况如何建模、如何选取适当的分析方法以及对计算结果的检验和判断等问题，都进行了详细的讨论。对于结构力学问题的各种研究方法，通过实例详细介绍了分析步骤，并由特殊示例归纳到一般原理，这非常有利于读者特别是初学者学习和掌握本课程的核心知识。

本书主要内容涵盖了桁架、刚架、拱和连续梁等结构形式的静力学和动力学。阐述了各种结构在静定和超静定状态下的内力、变形和影响线的分析方法和能量原理；介绍了结构动力学的基础知识和结构理论的最新发展，特别是对当时刚刚萌芽的计算机分析方法给予了特别关注。本书的知识体系与沿袭至今的结构力学教材基本一致。

本书的编写体系以研究问题的类型为主线展开，根据知识本身的内在联系划分章节，由浅入课，逻辑性强，推理缜密。这样可避免学生陷入学习的死角——只注意方法本身的按步推算，忽略对研究问题的整体把握。作为大学教材，本书的内容编排非常符合循序渐进的学习规律；也适合于包括在校大学生和工程技术人员在内的读者作为自学教材。

本书在翻译时，删除了原书第4章关于空间桁架和第11章桥梁结构分析的内容(本书的第4、5、6、7、8、9章，为原书的第5、6、7、8、9、10章；第10章为原书的第12章。)，因为前者的处理方法与平面桁架基本一致；而后者已经发展成为专门的学科。力和长度等物理量译稿采用了原书中所使用的符号以及英制单位，为了方便读者阅读，我们在书后附加了英制单位与国际单位的换算表。

本书译者分工如下：第1章、第2章、第6章、第7章、第8章、第10章和附录由叶红玲译；前言、第3章、第4章、第5章、第9章由杨庆生译。全部译稿由杨庆生和叶红玲果用互译互校的方法共同校对。隋允康教授为本书翻译撰写了序。研究生李智健、白海波、许芳、王海明、李春江、刘君等参加了文稿的初译，在此一并表示衷心感谢。

由于时间仓促和译者水平的限制，书中可能存在一些不足之处，欢迎广大读者批评指正。

译者

于北京工业大学

原 著 前 言

这是《结构理论》的第2版，和第1版一样，它主要是作为土木工程大学生和一年级研究生的结构分析课程的教材。为达到这个目的，本书非常注重各类结构的分析方法与其基本原理的紧密联系。只有深入地理解这些基本原理，工程师才能成功地将分析方法应用于他们在现代社会面临的经常变化的问题。

本书大略地分为两部分：第1部分处理静定结构；第2部分处理超静定结构。按此安排，前4章依次处理静力学基础（主要是几何静力学）、静定平面桁架、梁与桁架的影响线、静定空间桁架。接下来，第5章和第6章处理弹性系统相关的基本定理及其在梁、桁架位移计算上的应用。再下面的几章依次处理超静定桁架、拱和刚架的分析。最后几章介绍结构分析的矩阵法、筋条悬索桥分析和结构动力学。

在第2版中，前7章基本和第1版保持一致。关于拱和刚架的第8章和第9章则完全重写。基于最小功定理和弹性中心的概念，现在对拱的处理已经简化。加入了使用弹性中心概念分析门式刚架的若干文献。在重写的章节，关于连续梁和刚架分析的斜率—挠度方程的使用已经扩展到非等截面构件系统，并给出许多例题。

自从本书首次问世（1945年）以来，结构分析的两个方面变得非常重要，即公式表示的矩阵方法和动力载荷作用下的结构分析。它们都是非常宽泛的课题，有许多现成的书籍可以参考。这里的第10章和第12章仅是这些课题的介绍，但是我们希望这能鼓励读者在这些方向上继续研究。

致谢（略）

S. P. Timoshenko

D. H. Young

目　　录

序

译者序

原著前言

第 1 章　平面静力学基础 …… 1

1.1　平面汇交力系 …… 1
1.2　三力平衡 …… 3
1.3　平衡方程 …… 6
1.4　内力 …… 8
1.5　索多边形 …… 12
1.6　索多边形的应用 …… 15
1.7　分布力作用下的索曲线 …… 18
1.8　柔性悬索 …… 21
1.9　弯矩图 …… 25
1.10　虚位移原理 …… 29

第 2 章　静定平面桁架 …… 33

2.1　简单桁架 …… 33
2.2　反力 …… 35
2.3　结点法 …… 38
2.4　麦克斯韦(Maxwell)图 …… 40
2.5　截面法 …… 43
2.6　组合桁架 …… 48
2.7　平面桁架的一般理论 …… 52
2.8　复杂桁架：亨尼勃格(Henneberg)方法 …… 56
2.9　虚位移法 …… 60

第 3 章　影响线 …… 64

3.1　移动载荷和影响线 …… 64
3.2　梁支座反力的影响线 …… 68
3.3　剪力影响线 …… 72
3.4　弯矩影响线 …… 76
3.5　带有横梁的主梁 …… 80
3.6　三铰拱的影响线 …… 84
3.7　简单桁架的影响线 …… 87
3.8　复合桁架的影响线 …… 91

第 4 章　弹性体的一般原理 …… 95

4.1　拉伸、扭转和弯曲的应变能 …… 95
4.2　叠加原理 …… 97
4.3　广义形式的应变能 …… 100
4.4　卡氏(Castigliano)第一定理 …… 103
4.5　卡氏(Castigliano)第二定理 …… 106
4.6　最小功原理 …… 110
4.7　互等定理 …… 114

第 5 章　铰接桁架的挠度计算 …… 120

5.1　卡氏(Castigliano)定理的应用 …… 120
5.2　挠度计算的麦克斯韦—莫尔(Maxwell—Mohr)法 …… 123
5.3　图解法求桁架位移 …… 125
5.4　虚载荷法 …… 131
5.5　变异的虚载荷法 …… 135

第 6 章　超静定铰接桁架 …… 141

6.1　概述 …… 141
6.2　带一个冗余杆件的桁架 …… 143
6.3　带多个冗余杆件的桁架 …… 147
6.4　超静定桁架中的装配应力和温度应力 …… 151
6.5　超静定桁架的影响线 …… 155
6.6　超静定空间结构 …… 159

第 7 章　拱与刚架 …… 164

7.1　概述 …… 164
7.2　对称二铰拱 …… 165
7.3　对称无铰拱 …… 169

7.4 无铰刚架 …… 175
7.5 有铰刚架 …… 181
7.6 温度变化和支座沉降的影响 … 183
7.7 环 …… 186

第 8 章 连续梁与刚架 …… 189

8.1 斜率—挠度方程 …… 189
8.2 固端梁 …… 192
8.3 连续梁 …… 195
8.4 变截面梁 …… 199
8.5 变截面连续梁 …… 205
8.6 带等截面杆的简单刚架 …… 212
8.7 带等截面杆的连续刚架 …… 219
8.8 力矩分配法 …… 225
8.9 建筑物刚架分析 …… 231
8.10 带非等截面杆的刚架 …… 234

第 9 章 结构分析的矩阵法 …… 239

9.1 力法和位移法 …… 239
9.2 矩阵代数基础 …… 241
9.3 矩阵方法在平面桁架中的应用 … 246
9.4 连续梁的矩阵分析 …… 253
9.5 拱和刚架的矩阵方法 …… 259
9.6 连续刚架的矩阵分析 …… 264

第 10 章 结构动力学 …… 269

10.1 单自由度系统的自由振动 …… 269
10.2 瑞雷(Rayleigh)法 …… 273
10.3 稳态强迫振动 …… 277
10.4 一个干扰力的通用情况 …… 281
10.5 数值积分 …… 285
10.6 图形积分 …… 289
10.7 轨道静动应力 …… 294
10.8 等截面梁的横向振动 …… 298

附录 …… 302

附录 A 国际单位制单位与英美制单位换算表 …… 302
附录 B 习题答案 …… 304
附录 C 人名对照表 …… 311
附录 D 关键词索引 …… 312

第1章

平面静力学基础

1.1 平面汇交力系

结构理论以静力学理论为基础。在本书中，我们认为读者已经熟悉静力学理论，但是因为静力学理论在分析工程结构问题上的重要作用，还是要复习和回顾一下在工程结构分析中非常有用的部分静力学原理。首先是力**的平行四边形原理**：P_1 和 P_2 两个力，如图 1.1a 中的矢量$\overline{OA}$和$\overline{OB}$，可以合成为一个合力 R，合力由以这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定，如图中矢量$\overline{OC}$。同样，合力也可以通过力三角形得到，如图 1.1b 所示。图 1.1b 中三角形 ABC 与图 1.1a 中的三角形 OAC 是等同的。

如果平面上的几个力作用在同一点 O(见图 1.2a)，总可以合成为过该点的一个合力。这个合力可以通过连续应用力平行四边形法则(见图 1.2a)确定，或者通过力多边形的闭合边来确定(见图 1.2b)。

图 1.1

图 1.2

如果力多边形是闭合的，那么合力为零，即给定力系平衡。因此，如果平面汇交力系是平衡的，则它们的自由矢量组成的力多边形必是闭合的。

上述图形的平衡条件在结构分析中是非常有用的。

举一个简单的例子。如图 1.3a 所示，一重 W 的重物受绳索的拉力作用。选环 O 为自由体，则环 O 在 W、S_1 和 S_2 三个力的作用下达到平衡。力 S_1 和 S_2 的方向沿着绳索，它们的大小称为轴力或拉力。如果重力 W 的大小已知，则拉力 S_1 和 S_2 的大小可以由图 1.3b 所示的封闭的力三角形得到：$S_1 = W\csc\alpha$ 和 $S_2 = W\cot\alpha$。

由于共面的平衡汇交力系组成一个封闭的力多边形，则在任意正交坐标系 x 轴和 y 轴上，这几个力投影的代数和为零。由此我们可以得到熟悉的平衡方程

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0 \qquad (1.1)$$

方程中 X_i 和 Y_i 表示任意一个力 P_i 在 x 轴和 y 轴上的投影，求和时包含了力系中所有的力。上述平衡时的解析条件与闭合的力多边形的几何条件是等价的，但有时应用解析条件更加方便。例如，如图 1.3a 所示，对系统列出平衡方程，可以得到

图 1.3

$$S_1\cos\alpha - S_2 = 0$$

$$S_1\sin\alpha - W = 0$$

从平衡方程可以得到前述的 $S_1 = W\csc\alpha$ 和 $S_2 = W\cot\alpha$。

用上述的几何平衡条件和解析平衡条件对分析铰接桁架的平衡问题是非常有用的。例如图 1.4a 所示，受载荷作用的一个桁架。现分析外载荷 P 作用下桁架中各杆产生的轴力。如果一些杆件为零杆，即杆的内部应力为零，则可以简化力的分析。比如我们选铰链 A 为隔离体(见图 1.4b)，立刻会发现杆 1 与杆 2 为零杆，因为这两个力只有共线才可能平衡，但这两杆不共线。确定杆 2 为零杆后，我们分析铰链 B 的平衡，它上面作用了三个力，有两个力共线。由式(1.1)可得，杆 4 受力为零。最后就只有图中用粗实线画出的杆承受非零的轴向力。用式(1.1)的第二个式子进一步分析铰链 B 的平衡，可得杆 3 受的拉力等于载荷 P。通过分析铰链 C 的平衡，可得到杆 5 和杆 6 的轴力。至此，该桁架的受力分析完成。

图 1.4

习题

1. 求如图 1.5 所示桁架中杆 AC 的拉力 S_1 和杆 AB 的压力 S_2。
2. 为了使混凝土立方体 M 受两轴向的压力作用，使用如图 1.6 所示的铰接杆系统。框架为四方体，斜杆沿四方体的对角线方向。求作用在立方体表面的压力。
3. 指出如图 1.7 所示桁架中的零杆。(a)在 F 点作用垂直载荷 P；(b)在 D 点作用垂直载荷 P。

4. 如图1.8所示，将对角线的方向由AD改为BC，则简单桁架的作用力有何影响？

5. 用实线画出两个简支桁架中的主动杆件，载荷如图1.9所示。

图　1.5

图　1.6

图　1.7

图　1.8

图　1.9

1.2　三力平衡

同一平面上三个相互不平行的力只有汇交于一点才能处于平衡状态。为证明这个结论，参考图1.10，力P和Q为汇交于一点O的任意两个力，那么第三个力S与这两个力平衡的条件是它与这两个力的合力R是大小相等、方向相反且作用在同一条直线上。当然，合力R必汇交于点O。因此，力S也必过汇交点O。

上述的三力汇交定理对于求解在已知力作用下，刚体或结构在支座处的约束反力是非常有用的。例如，起重机如图1.11所示，柱AB由轴承A和B支撑，以使起重机能绕着垂直轴旋转。在垂直载荷P的作用下，起重机在轴承A和B处施加压力，而在起重机的支座处产生了大小相等、方向相反的力作用在起重机上。因此，垂直力P同反力R_A和R_B是三力平衡的。忽略在轴承B处的摩擦，反力

图　1.10

R_B 必定是水平力，于是这两个力（P 和 R_B）的作用线确定了力系的汇交点 O。那么，第三个力 R_A 也必过点 O。因此，依据三力汇交定理建立了作用线 AO。已知力 P 的大小，反力 R_A 和 R_B 的大小可以通过如图 1.11b 所示的闭合的力三角形确定。因为这个三角形相似于图 1.11a 所示的三角形 BAO，我们得到 $R_A=5P/4$ 和 $R_B=3P/4$。

图 1.11

第二个例题，应用三力汇交原理计算反力，并求在铰接杆 1、2、3 上产生的轴力。1、2、3 三杆支撑着水平梁 AB，载荷 P 作用在梁上，如图 1.12a 所示。用反力 S_1、S_2、S_3 代替三根支撑杆。由四个力（P、S_1、S_2、S_3）组成的力系在同一平面内处于平衡状态。为使该力系满足三力平衡的条件，现假定 S_1 和 S_2 暂时由它们的合力 R 来代替。尽管合力方向未知，但是显然合力的作用线过 S_1 和 S_2 的作用线的交点 D。现在，用平衡的三个力（P、S_3 和 R）来代替平衡的四个力。显然，这三个力的汇交点是点 O，通过力 P 和 S_3 的作用线的交点得到点 O。因此，建立第三个力 R 的作用线 DO，并且建立闭合三角形 abc（见图 1.12b）。由该图可以确定力 S_3 和 R 的大小。最后，通过由矢量$\overline{ca}$表示的已知力 R，将其分解成分别沿 S_2 和 S_1 方向的分力$\overline{cd}$和$\overline{da}$，从而求出力 S_2 和 S_1 的大小，并且如果所有的图形按比例建立，则三个反力可以确定。从图 1.12b 中矢量箭头的方向，可推出杆 1 和杆 3 受压，而杆 2 受拉。

工程结构中的一种普通形式是如图 1.13a 所示的三铰拱。在如图载荷 P 作用下，可以应用三力汇交原理求得结构在支座 A 和 B 处的反力。借助于拱顶 C 处的铰链，可推出反力 R_B 必沿着线 BC，与已知力 P 的作用线交于点 O。因此，点 O 是力系的汇交点，由此建立 R_A 的作用线 AO。这样，反力的大小通过如图 1.13b 所示的闭合三角形求得。

如果除了载荷 P，在拱 CB 上作用有载荷 Q，可以应用同样的过程求解。首先应求得只在载荷 P 作用下 A 和 B 处的反力，与前述过程相同。然后，重复同样的过程，找到只在载荷 Q 作用下的反力。于是在 A 和 B 处都有两个反力。在每一个支点处的两个反力的合力就是

图 1.12

图 1.13

在载荷 P 和 Q 同时作用下所求的反力[⊖]。

最后一个例子，考虑由 AC 和 BC 铰接的组合梁，铰接点在 C 点。组合梁由四个铰接杆支撑，如图 1.14a 所示。为求在载荷 P 作用下四个支撑杆产生的轴力 S_1、S_2、S_3 和 S_4，应首先考虑只受三个力作用的梁 BC 的平衡。这三个力是 S_3、S_4 和作用在铰链 C 上的力，铰链 C 上的力表示梁 AC 作用在梁 BC 上的力。已知力 S_3 和 S_4 的作用线确定了三个力的汇交点 D，因此在铰链 C 上的力的作用线是 CD。梁 BC 作用在梁 AC 上的力与梁 AC 作用在梁 BC 上的力是大小相等、方向相反、有相同的作用线。梁 AC 也具有相同条件，除了支撑杆 1 和杆 2 外，第三个支撑杆沿着线 CD。一旦在脑海中有了这样的结论，我们就会看到，当考虑梁 AC 的平衡时，可以完全采用与图 1.12 所示梁的相同分析过程。因此，S_1 和 S_2 合力的作用线 FE 就建立了，如图 1.14b 所示的闭合三角形 abc 也建立起来了。杆 1 和杆 3 受压，而杆 2 和杆 4 受拉。

图　1.14

习题

1. 用三力汇交原理，求简支梁上支点 A 和 B 处的反力，载荷如图 1.15 所示。
2. 用几何法求如图 1.16 所示梁在 A 和 B 处的反力。

图　1.15

图　1.16

注：书中插图未标注尺寸单位者，均为 ft(英尺)，全书统一。

⊖ 拱上有几个力更便利处理的方法将在 1.6 节讨论。

3. 用几何法求如图 1.17 所示梁在 A 和 B 处的反力。
4. 重 W 的等截面直杆靠在水平地面 A 和垂直墙 B 上，绳子 OD 使杆不致倾倒，如图 1.18 所示。忽略在支点处的摩擦，用几何法求 A 和 B 处的反力以及绳子 OD 的拉力。
5. 用几何法求组合结构在支点处的反力 R_A 和 R_B，载荷如图 1.19 所示。
（提示：B 处的反力是水平力）

图 1.17

图 1.18

图 1.19

1.3 平衡方程

一般来说，力的作用线不交于一点的共面力系可以合成为：①一个合力；②一个合力偶；③达到平衡状态。

给定力系 P_1、P_2、P_3 和 P_4，如图 1.20b 所示，这四个力的自由矢量组成一个非封闭的力多边形，该力系最后合成为一个合力，合力的大小和方向由力多边形的封闭边 AE 表示，如图 1.20a 所示。

图 1.20

如果给定力系的自由矢量组成一个封闭的力多边形如图 1.21b 所示，则合力为零，但也可能是一个力偶。在这种情况下，将力任意分解成两组 P_1、P_2、P_3 与 P_4、P_5、P_6，最后得到两个大小相等、方向相反的合力 R_1、R_2，如图 1.21b 中的矢量$\overline{AD}$和$\overline{DA}$，任选力系中的几个力都可以这样去分组。最后，如果合力的作用线如图 1.21a 所示，这两个大小相等方向相反的合力组成一个合力偶。

特殊情况下，如果力的作用线 R_1 与 R_2 共线，如图 1.21a 所示，则合力偶为零，此力系

图　1.21

平衡。因此，平面内力系的平衡条件是力多边形自行封闭且合力偶为零。在封闭的力多边形中，可以推出这些力在任一正交轴上投影的代数和为零。由合力偶为零的条件，借助于Vangnon's法则，也可以推出力系对该平面内任一点的力矩的代数和为零，力系平衡的解析条件表示如下

$$\sum X_i = 0 \qquad \sum Y_i = 0 \qquad \sum M_i = 0 \tag{1.2a}$$

这里 X_i，Y_i 是任意力 P_i 对正交轴的投影，M_i 是这些力对固定点的力矩。注意求和时应包括力系中所有的力。

以上的平衡方程也可以用三个力矩方程表达

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_B = 0 \qquad \sum M_C = 0 \tag{1.2b}$$

A、B、C 是三个任意点，在力的作用平面内这三个点组成一个三角形。

式(1.2)可以广泛运用于结构理论中，尤其是用于确定反作用力和桁架分析。例1，求解简单吊架 ABC 受载荷作用下的约束反力。如图1.22所示，忽略 B 点摩擦，吊梁受到支持力 R_B、X_A 与 Y_A 的作用，其中 X_A 与 Y_A 分别是在 A 点处的水平与竖直方向的未知力。该力系平衡；以 A 点为矩心，用式(1.2a)得到

$$X_A - R_B = 0$$

$$Y_A - P - Q = 0$$

$$R_B c - Pa - Qb = 0$$

由这些公式可以推出：$X_A = R_B = Pa/c + Qb/c$ 与 $Y_A = P + Q$。

图　1.22

第二个例子，桁架载荷如图1.23所示，求杆1、2、3的轴力。这里只考虑桁架的阴影部分 BCD，把与它连接的杆件1、2、3用约束反力代替，得到隔离体如图1.23所示。这是五个力的平衡问题，各个力对平面桁架中任一点的力矩的代数和一定为零。选点 A、D、C 为矩心，由式(1.2b)得到

$$S_1 a - Qa - 2Qa = 0$$

$$\frac{S_3 a}{\sqrt{3}} - Qa = 0$$

$$Qa - S_2 a = 0$$

可得 $S_1 = 3Q$(拉)，$S_3 = \sqrt{3}Q$(压)，$S_2 = Q$(压)。值得注意的是，矩心的选择应尽量使每个方程中只包含一个未知量。

图 1.23

习题

1. 等截面直杆 AE，重量不计，与垂直的墙铰接于 A 点，并由压杆 BD 支撑，如图 1.24 所示。球的重量为 Q，绳子 CF 平行于 AE，B 点和 C 点在同一水平面上，球的半径可由此求出。求 A 点和 B 点的约束反力。
2. 求如图 1.25 所示简单桁架中杆 1、2、3 的轴力。
3. 如图 1.26 所示，求复合结构中支座 A、B 处的水平和铅垂约束反力。
4. 求平面结构中张紧杆 AB 的轴力。支座和载荷如图 1.27 所示。
5. 如图 1.24 所示，如果绳子 CF 被水平绳子 CB 代替，A 点和 B 点的作用力有什么变化？

图 1.24

图 1.25

图 1.26

图 1.27

1.4 内力

在前面的各节中，已经讨论了平面内的刚体在约束和载荷作用下，求解其外约束反力的问题。现在将考虑内力或应力问题。内力是受约束的刚体在外载荷作用下产生的。例如，在

一个平面上的刚体，支座和载荷如图 1.28a 所示。在已知载荷作用下，支座反力为 R_A 和 R_B。通常，通过考虑整体的平衡条件可以确定其反力。这就完全确定了作用于整体上的外部力系。现在，假设用任意横截面 mn 将整体划分成 J 和 K 两个部分，如图 1.28a 所示。显而易见，内部约束力必存在于分开的两个部分，并使这两部分结合在一起。当然，这样的内力总是成对出现在整体的每一个点上，大小相等、方向相反，并且不会被考虑到整体平衡上。鉴于此，取隔离体 K 作为一个自由体(见图 1.28b)，被移走的 J 部分的作用力可以通过作用在自由体 K 上不同质点处的力来表示。这样，就引入了要求解的内力。

虽然作用在截面上的内力的实际分布可能是复杂的，但显而易见，作用于 J 外部的力系必须是静平衡的，且总可以由作用在截面形心处的合力 R 和一力偶 M 共同表示。如图 1.28c 所示，合力 R 可被依次分解成相互垂直的分力 N、V。在截面 mn 上的这三个量 N、V、M 分别被称为法向内力、切向内力和内力矩。如图 1.28 所示的方向通常被认为是正方向。通常，它们的大小取决于选取截面的位置和方向，但是无论如何，在自由体 K 上，它们可以通过三个平衡方程来确定。

图 1.28

现在研究最简单却又是最重要的结构类型：受横向载荷作用的梁在不同截面处的内力。这样的梁通常是等截面直梁，在对称平面上受约束和载荷作用。在这些条件下，用横截面垂直于梁的轴线定义一般状态的内力——轴力、剪力和弯矩。例如，悬臂梁 AB，所受载荷如图 1.29a 所示，在距离自由端 x 处定义一个任意垂直截面 mn，然后根据此截面右半部分自由体的平衡，由式(1.2a)可得到

$$N_x = +P\sin\alpha$$

$$V_x = +P\cos\alpha$$

$$M_x = -Px\cos\alpha$$

从这些表达式看，轴力 N_x 和剪力 V_x 与梁上截面的位置无关，而弯矩 M_x 与 x 的距离成正比。梁上轴力、剪力和弯矩的变化可用图 1.29c 中的各个图表示出来，这些图相应地被称为轴力图、剪力图和弯矩图。

第二个例子，考虑图 1.30a 所示的悬臂梁，沿梁的长度方向作用均布载荷。在这种情况下，距离梁的自由端 x 处截面上的轴力、剪力和弯矩的表达式为

$$N_x = 0 \qquad V_x = +wx \qquad M_x = -\frac{wx^2}{2}$$

相应的图形如图 1.30b 所示。

图 1.29

图 1.30

对于曲梁的情况，我们发现用微分形式来继续研究是非常方便的。例如，有一半径为 R 且有圆形轴线的悬臂梁，所受载荷如图 1.31a 所示。在这种情况下，我们很容易通过极坐标 φ 来表示任意垂直横截面的位置。这样，在图 1.31b 上对自由体应用式(1.2a)，可得

$$N_\varphi = -P\sin\varphi \qquad V_\varphi = +P\cos\varphi \qquad M_\varphi = -PR\sin\varphi$$

图 1.31

最后一个例子为带有外伸端的简支梁，如图 1.32a 所示。在跨度为 l 的梁上作用均布载荷，A 处支座反力为 $wl/2$，在距左端支座距离为 x 处的任意截面上的弯矩为

$$M_x = \frac{wl}{2}x - wx\frac{x}{2} = \frac{wx}{2}(l-x)$$

这样弯矩图是抛物线型的，最大弯矩在跨中(见图 1.32a)，其纵坐标值为 $wl^2/8$。如果忽略梁自身的重量，自由外伸端就没有内力。

如果相同的梁在自由端承受一个集中载荷 P，如图 1.32b 所示，A 处的支座反力为 Pa/l，在 A、B 之间任意截面的弯矩为

$$M_x = -\frac{Pa}{l}x_1$$

其中 x_1 定义为如图 1.32b 所示截面的位置。同样的，距离梁上左边自由端 C 为 x_2 处的任意截面弯矩为

$$M_x = -Px_2$$

图 1.32

这种情况下，弯矩图是由在 B 支座处有共同的最大纵坐标值为 $-Pa$ 的两条直线所组成的。

如果梁同时承受均布载荷和集中载荷，可以简单地通过将图 1.32a 和图 1.32b 的弯矩图叠加，得到相应的弯矩图，如图 1.32c 所示。同样的过程可用于建立剪力图和轴力图。

习题

1. 建立如图 1.33 所示的每一个悬臂梁的剪力图和弯矩图。
2. 建立如图 1.15 ~ 图 1.17 中每一个梁的轴力图、剪力图和弯矩图。
3. 建立如图 1.34 所示的每一个简支梁的剪力图和弯矩图。
4. 建立如图 1.27 所示结构中 BC 梁的轴力图、剪力图和弯矩图。
5. 证明图 1.35 所示的垂直坐标表示三铰拱在半圆拱相应点上的弯矩。三铰拱受力如图 1.35 所示。为了给出相应的弯矩，计算每一个坐标必须乘以的因子。

图 1.33

图 1.34

图 1.35

1.5 索多边形

现在阐述一种解决共面力系的通用几何方法，这种方法比用分析方法来解决 1.3 节中讨论的问题更有实用优势。首先，用一个只有两个力 P 和 Q 的简单例子来说明该方法，如图 1.36a 所示。我们已经知道，力多边形(见图 1.36b)的封闭边矢量 AC 给出了这两个力的合力的大小和方向，但是力作用线的位置仍亟待解决。通常，这可由下面的步骤来完成。在图 1.36b 中任意选一点 O，叫做极点，然后用线 1、2、3 连接力多边形的顶点。这些线叫做射线，就像图中其他线一样，称为自由矢量。例如，在三角形 AOB 内，方向如箭头所示，这样可以认为力 P 是力 1 和 2 的合力。同理，力 Q 可以看作是力 2 和 3 的合力，方向如三角形 BOC 内的箭头所示。现在，参照图 1.36a，如果力 P 和 Q 分别被其两个分力代替，显然力 P 和 Q 的作用不会改变。替代方法如下：首先，在力的作用平面上的任意点 a，我们画平行于射线 AO 的线 ab。过 ab 与力 P 的作用线的交点 b，画平行于射线 BO 的直线 bc；接着，过 bc 与力 Q 的作用线的交点 c，画平行于射线 CO 的直线 cd。用这种方法得到的多边形 $abcd$ 就叫做力 P 和 Q 的索多边形。这个索多边形的顶点都在已知力的作用线上，各边都平行于力多边形的射线。现在假定在 b 点用力 1 和 2 代替力 P，在 c 点用力 2 和 3 代替力 Q，如图 1.36a 所示。这样在 b 点和 c 点的四个力所组成的力系就代替了已知力系 P 和 Q。由于沿 bc 方向的力 2 是一对力，大小相等、方向相反，因此这对力从系统中消掉。这样只剩下力 1 和 3，它们和已知力 P、Q 作用相同。这些力的合力的大小和方向由 1.36b 图中的矢量$\overline{AC}$给出。合力作用线上的一点由沿着索多边形的起始边和终止边的力 1 和 3 的交点 e 来确定，如图 1.36a 所示。

图 1.36

如果我们想象沿着索多边形的边 ab、bc 和 cd，有一条无重的绳索，面定端在 a 和 d，则这条绳于在力 P 和 Q 的作用下平衡。在绳索的 ab 和 bc 段的张力大小等于力 1 和 2 的大小，他们在结点 b 上的作用力和力 P 平衡，同理，在绳索的 bc 和 cd 段的张力与力 Q 平衡。建立的索多边形 $abcd$ 和满足已知力作用的绳子的平衡之间的关系解释了索多边形名字的来源。

上述讨论的几何构建的方法是非常通用的，该方法也可以应用到一些共面力问题上，如图 1.37a 所示的 P_1、…、P_5。首先应从建立力多边形 $ABCDEF$ 开始。选任意一极点 O，画射线 1、2、3、4、5、6，并在力的作用平面内建立平行于这些射线的线 ab、bc、…、fg，这样就得到了如图 1.37 所示的索多边形 $abcdefg$。在这个多边形的每一个顶点上，每一个已知

力 P_1、…、P_5，都由它们的两个分力所代替，如图 1.37b 所示。这些沿着 bc、cd、de 和 ef 的力是成对出现的，大小相等且方向相反，可以从系统中移走。这样，只剩下作用于点 b 和 f 的力 1 和 6，这两个力与已知力 P_1、…、P_5 等效。这些力的合力的大小和方向由力多边形的封闭边 AF 来确定(见图 1.37b)，合力作用线上的一点由沿着索多边形的起始边和终止边的交点 h 来确定，如图 1.37a 所示。

图　1.37

如果力多边形是封闭的，则合力消失。在这种情况下，第一条射线和最后一条射线是重合的。因此，索多边形的第一条边和最后一条边是平行或重合的。在第一种情况下，两个沿着索多边形第一条边和最后一条边的两个力，大小相等、方向相反，表示一个合力偶。第二种情况，这两个力互相平衡，即已知力系平衡。这两种情况如图 1.38 所示。三个大小和方向已知的力 P_1、P_2 和 P_3，其自由矢量组成一个闭合多边形(见图 1.38c)。因此，射线 1 和 4，由第一个矢量$\overline{AB}$的起始端指向最后一个矢量$\overline{CA}$的末端，与射线$\overline{OA}$重合。

如果已知力的作用线如图 1.38a 所示，索多边形的第一条边 ab 和最后一条边 de 是平行的，但不重合。于是，沿着索多边形边的不平衡的力 1 和 4 表示已知力系的合力是一个力偶。

如果已知力 P_1、…、P_3 的力作用线如图 1.38b 所示，索多边形的第一条边和最后一条边重合，沿着这些重合边的力 1 和 4 是大小相等、方向相反、互相平衡的。因此，这种情况下，已知力系平衡。

图　1.38

可以看到，力多边形与索多边形一起使用，平面力系的三种情况完全可以通过几何法来研究。如果力多边形是不闭合的，那么已知力系化简为一个合力。如果力多边形是闭合的，但是索多边形第一条边和最后一条边是平行但不重合的，那么力系化简为一个合力偶。如果力多边形是闭合的，并且索多边形第一条边和最后一条边是重合的，也就是索多边形也是闭合的，那么力系平衡。因此力系平衡的几何条件是：力多边形和索多边形都自行闭合。

［例1］ 确定承载梁 AC 在支座 A 和 B 处的约束反力，如图 1.39a 所示。在图 1.39b 中，从自由矢量$\overline{AB}$表示的载荷 P 开始，并且选择极点 O，可以建立射线 1 和 2，然后画出索多边形相应的两条边 ab 和 bc，如图 1.39a 所示。那么，这个索多边形的闭合边 ac 决定了图 1.39b 中相应的射线 3 的方向，约束反力 R_B 和 R_A 分别由矢量$\overline{BC}$和$\overline{CA}$几何确定。同预想的一样，约束反力 R_A 的方向是向下的。

图 1.39

［例2］ 我们以屋顶桁架 ABC 为例，支撑和载荷如图 1.40a 所示。这里，为求得支座 A 和 B 的约束反力，我们从力多边形 $ABCDEF$ 开始，选择一极点 O，画如图 1.40b 所示的射线 1 到 6。现在，在这种情况下，当建立图 1.40a 所示的索多边形时，应注意铰链 A 是 R_A 作用线上惟一的已知点。因此，必须从这点开始建立索多边形。那么，由于载荷 P 也通过 A 点，则索多边形相应于射线 1 的边消失。否则，用普通方式建立索多边形，我们得到如图 1.40a 所示的闭合边 Ab。之后，我们返回到图 1.40b，可以由射线 7(平行于索多边形的闭合边)和已知垂直方向的力 R_B 的交点得到力多边形的顶点 G。那么，所求约束反力完全可以由如图 1.40b 所示的矢量$\overline{FG}$和$\overline{GA}$确定。

图 1.40

习题

1. 用几何法确定简支梁的约束反力 R_A 和 R_B 的大小，载荷如图 1.34a 所示。
2. 如图 1.27 所示结构，用索多边形确定支座 A 和 B 的约束反力的大小。
3. 用索多边形确定简单桁架中 1、2 和 3 杆的轴力，载荷如图 1.25 所示。
4. 如果铰链 A 是辊轴支座，铰链 B 是固定铰支座，用几何法确定如图 1.40a 所示简单桁架中支座 A 和 B 的约束反力。假定 $AB = 40\text{ft}$，$\angle CAB = \angle CBA = 15°$，$P = 1,000\text{lbf}$。
5. 如图 1.41 所示，用几何法确定支撑梁 AB 的 1、2 和 3 杆的轴力，假定 $P = 1,000\text{lbf}$。

图 1.41

1.6 索多边形的应用

在前面的各节中，我们仅仅在分析一个平面内的力的几何组成和求解反力时，将索多边形作为一种工具面应用。然而，我们已经看到，索多边形自身具有一定的物理意义，即在已知力系作用下，绳索平衡的几何组成。这个概念在一定程度上可以概括成我们假想存在一种既能承受拉力也能承受压力的绳索。因此，举例来说，索多边形 $abcdef$（见图 1.42a）可以看作一个铰接杆系，在 a 和 f 支撑而形成一个拱，在已知力系作用下平衡。有时我们需要建立满足特定条件的索多边形，例如通过 2 个或 3 个给定的点。这个普遍问题可以被简化为如下定理描述：

定理 如果对于一个平面的给定力系在两个不同的极点 O 和 O' 画两个任意的索多边形，则多边形的相应边的交点在平行于两极点连线 OO' 的直线上。

图 1.42

定理证明如下：令 F_1、F_2、F_3…（见图 1.43a）为平面任意力系，令 $ABCDE$…（见图 1.43b）为相应的力多边形，O 和 O' 是两个任意极点，1、2、3、4…和 1′、2′、3′、4′…为相应的射线。然后，由在力系作用平面内的任意两点 a 和 a' 开始，相应于极点 O 和 O' 的两个索多边形 $abcde$…和 $a'b'c'd'e'$…就可以用通常的方式构建。现在按照 1.5 节的讨论，在 b 点（见图 1.43a）将力 F_1 用分力 1、2 来代替，分力由矢量 $\overline{AO}$ 和 $\overline{BO}$ 来表示（见图 1.43b）。同理，在 b' 点，用由矢量 $\overline{BO'}$ 和 $\overline{AO'}$ 表示的分力 2′ 和 1′，作为 F_1 的平衡力。因此，力 1、2、1′ 和 2′（见图 1.43a）是四个平衡力。由此，可以推断出：如果在力系作用平面内的 m 点，用力 1′ 和

1 代替由矢量$\overline{OO'}$表示的合力(见图 1.43b)，而在 n 点处用力 2 和 2′代替由矢量$\overline{OO'}$表示的合力(见图 1.43b)，这两个合力大小相等、方向相反，因此它们必定在同一条直线上。也就是说，两个索多边形相应的第一条边和第二条边上的交点 m 和 n 在两个极点连线 OO'的平行直线上。同理，对于力 F_2，可推断出两个索多边形相应的第二条边和第三条边上的交点 n 和 O，也在两个极点连线 OO'的平行直线上，等等。因此，点 m、n、o、p、q…全部处在平行于 OO'的直线上。定理证明完毕。

图 1.43

过三点的索多边形 借助于上述定理，对于任意平面力系，建立一个索多边形，让其三条边过力系作用面内三点是可能的。如图 1.44a 所示，首先由两个共而力 P 和 Q 开始，我们希望建立一个索多边形，让其三条边分别通过给定点 m、n 和 p。首先我们建立力多边形 ABC，如图 1.44b 所示。然后，不是任意选择一个极点，而是先建立索多边形的两条边 ab 和 bc，让这两个边分别过给定点 m 和 n，如图 1.44a 所示。由具有确定位量的相应索多边形的极点 O 开始可得到所谓的试探索多边形，即有射线 1 和 2(见图 1.44b)的交点开始，分别画通过顶点 A 和 B 平行于试探索多边形的边 ab 和 bc。在极点 O，画射线 3，然后做平行于射线 3 的试探索多边形的相应边 cd，如图 1.44a 所示。通常情况下，试探索多边形的最后一条边不经过给定点 p。然而，从试探索多边形和上而的定理可以很容易地确定给定力 P 和 Q，三条边分别经过给定点 m、n 和 p 的索多边形，这个索多边形就是真正的索多边形。为画出真正的索多边形，必须注意试探索多边形的最初两条边分别经过给定点 m 和 n，因此，真正的索多边形的最初两条边必须也经过这些点。因此，直线 mn(见图 1.44a)必是真正索多边形和试探索多边形的相应的交线。延长试探索多边形的第三条边 cd 到直线 mn 的交点 q，我们得到的真正索多边形第三边必经过这一点。真正索多边形的第三边也必经过点 p，这样可得到如图 1.44a 所示的边 $c'd'$的位置。现在通过力多边形的顶点 C，可画出平行于 $c'd'$的射线 3′，过 O 点画出平行于直线 mnq 的一条直线。两线交点决定了真正索多边形上的极点 O'。画出射线 1′和 2′并构建索多边形 $a'b'c'd'$，如图 1.44a 所示。这个索多边形，正如所期望的那样，三条边分别经过给定的三点 m、n 和 p。

如果在平而内有几个力，并希望构建一个通过给定的 m、n 和 p 三点的索多边形，应首先取 m 和 n 的合力 P，还有 n 和 p 的合力 Q，然后进一步进行分析，如图 1.44 所示。

图　1.44

经过三个给定点的索多边形在确定三铰拱的支反力时有其实用价值，如图 1.45a 所示。首先应用力 P 和 Q 构建一个索多边形 $a'b'c'd'$，其三边分别通过铰链中心 A、C 和 B。索多边形的建立如图 1.45a 所举实例。显然，射线 1′、2′、3′作为矢量时(见图 1.45b)，表示反力 R_A，$R_C=R_C'$ 和 R_B。因此，当反力在点 A、C 和 B 处分别作用时，不论拱是作为整体还是部分，它们都能够满足平衡条件。

图　1.45

习题

1. 长为 l 的绳子 ACB 挂在两垂直的墙之间，如图 1.46 所示。绳子上有一个小滑轮 C，吊一重物载荷 P，滑轮在绳子上无摩擦滚动。当 $l=2a=4b$ 时，求系统平衡时的构成并采用几何方法求解。
2. 起重机的提升缆绳上有一系列的滑轮 a、b、c、d 和 e，如图 1.47a 所示。用绳索作滑轮作用在起重机结点上的力系的索多边形，证明这些力系由多边形 $ABCDEF$ 完全确定，如图 1.47b 所示。
3. 确定如图 1.48 所示平面桁架的上弦杆 $abcdefgh$ 的正确形状，从而当在给定载荷系 P 作用下，所有斜杆是被动杆。当 $l=70$ft、$k=18$ft 时，求相应弦杆力的大小。
4. 过 A、B、C 三点建立索多边形，确定拱肋为半圆弧的三铰拱上支座处的反力，如图 1.49 所示。

图　1.46

5. 系在 A 点的柔顺无重绳索，在 D 点穿过一个滑轮，在自由端承受载荷 P，如图 1.50 所示。带小棍子的刚性杆 BC 两端承受载荷 P 和 Q，沿着绳索杆能自由滚动。忽略摩擦，确定系统的平衡构成。已知数据如下：$a=18\text{ft}$，$b=4\text{ft}$，$c=8\text{ft}$，$P=2Q$。求 BC 杆的压力 S，用几何法完全求解。

图 1.47

图 1.48

图 1.49

图 1.50

1.7 分布力作用下的索曲线

在前面的讨论中已经研究了集中力的各种情况。有时，还需要考虑在分布力作用下的结构的平衡问题。例如，考虑等截面直梁 AB（见图 1.51a），梁的重量沿梁的长度均匀分布。这种分布力完全由载荷集度 q 来定义，q 表示梁单位长度的重量。从几何上，它由矩形 $AabB$ 表示，这称作载荷图。在通常的情况下，载荷并不沿梁的长度均匀分布，这种载荷的分布情况，也能够完全被图 1.51b 的载荷图表示。在这里，每点载荷集度由相应的纵坐标表示。

图 1.51

任何给出的载荷图都能被近似地表示为一系列的梯形单元，如图 1.51b 所示。如果 q 在 Δx 上的载荷集度是均匀的，那么，相应的梯形单元可表示为力 $\Delta P=q\times\Delta x$，且力的作用线过单元形心。用这种方法可以得到一系列平行力，它们的大小由相应的梯形面积来表示；它们对于任一点的

矩，与相应梯形的静矩相同。因此，下面所求的合力由载荷图的总面积表示，力作用线通过载荷图的形心。

我们已经知道，任何共面力系的索多边形可以被看做是在给定力系作用下，两端固定的绳索平衡的可能构型。对于在平面内连续地均布载荷的情况，如上面讨论的，相应的绳索平衡的构型变成一个平滑的曲线，称作索曲线。实际上，这条曲线就表示为在自重下的柔索链，它两端固定、其他部分在重力场中没有支座。这种特殊的曲线叫做悬链线。

让 $MmnN$（见图 1.52a）表示所给的平面内垂直分布载荷的载荷图。为构造一个相应的索曲线，首先将载荷图分成足够小的许多部分，因为足够小，所以不会有很大的误差。并且，每一个小部分都可以看作一个小的梯形。然后，每个梯形都表示成一个垂直载荷，载荷的大小等于梯形的面积，且作用线过形心。于是，可以将连续的分布载荷替换为一些垂直的力 P_1、P_2、…等，并且将这些力用通常的方法构造一个索多边形 $abcdef$。然后，可记下一条与索多边形各边相切的光滑曲线，切点为 g、h、i、j 和 k，这条曲线就是所求的索曲线。

图 1.52

在前面的讨论中，在每个索曲线（见图 1.52a）与相应的载荷图（见图 1.52b）之间，存在以下关系：

1）每条索曲线的切线，在载荷图中都有一条相应的平行线，并且平行线的长度描述了曲线上切点的张力大小。

2）载荷图中最短的直线，叫做极距 H，表示索曲线顶点的张力。同样地，也表示其他点的张力的水平投影。

3）索曲线上的任意两点，射线平行于相应被载重线 AE 截断的切线，是总载荷的一部分，作用在两点之间。

下面举个例子来应用前面讨论的结果。现考虑一个对称的两端铰接的拱 ACB，它受到一个填土载荷的作用，如图 1.53a 所示。在这种情况下，对于载荷图 $AA'B'B$，拱轴线是比较理想的索曲线形式。如果这样，这个拱只受纯压力，没有弯矩[⊖]。由于载荷图由拱轴线的形状决定，因此，反过来，拱轴线的正确形状也受载荷图的影响。很显然，用几何方法来解决这个问题必须作试验和误差分析。

我们开始就注意到，由于结构对称，拱肋的左半部分 AC 与右半部分 BC 形状相同，因此只需要考虑拱肋的一半。如果沿拱肋的跨度作用一个均布载荷，拱肋的轴线的正确形状是一个抛物线。所以采用 $AA'C'C$（见图 1.53b）作为轨迹载荷图是很方便的，且点 A、D、E、F、C 在抛物线和垂直轴线上，C 为顶点。

假定填土重 100lbf/ft^3，考虑垂直于平面图形的单位宽度的拱条。载荷可被表示为载荷

⊖ 在本章讨论中，忽略了轴向压力引起的拱的缩短。

图的四个梯形，且载荷与这几个梯形的面积成比例。实际的数值标在每个梯形的顶部。这些载荷 P_1、…、P_4 的作用线经过相对应的梯形面积的形心。选择任意点 O，由这些力建立多边形(见图 1.53g)，用一般的方法可以建立一个索多边形 $abcdef$(见图 1.53c)，并且应注意所得到的力 P_1、…、P_4 的合力的作用线由索多边形的第一条边和最后一条边的交点 g 决定。很明显，受同样载荷的任何一个索多边形的第一条边和最后一条边必定相交于合力作用线。所以我们能够得到一个索曲线，水平相切于 C 点且过 A 点，现在可以画相应的索多边形的第一条边 ag 和最后一条边 gf(见图 1.53d)，从而决定极点 O_1(见图 1.53g)。有了这个极点，可以画索多边形剩余的边 bc、cd、de。与索多边形相切的曲线(没有画出)，切点为 A、D、E、F、C，是理想索曲线的第一次近似。比较由虚线画出的曲线 $abcdef$(见图 1.53b)，与假定的抛物线 $ADEFC$，可以发现相当大的差异，这就需要做第二次近似。

为了作第二次近似，可用图 1.53d 中的 $AA'C'C$ 作为载荷图，如前所述，得到如图所示的力 P_1'、…、P_4'。每个力的大小，与所对应的梯形的面积成比例，并标在每个梯形的顶部。选择任意极点 O'，建立这些力的力多边形(见图 1.53h)，并画索多边形 $a'b'c'd'e'f'$(见图

图 1.53

1.53e)。索多边形的第一条边和最后一条边的交点 g' 决定载荷 P_1'、…、P_4' 的合力作用线。那么，如前所述，确定相应的过 A 点和水平方向的 C 点的索多边形的极点 O_1'(见图 1.53h)。这个索多边形 $a'b'c'd'e'f'$(见图 1.53f)与 $abcdef$(见图 1.53d)非常接近，由此可以认为得到的曲线 $ADEFC$(见图 1.53f)是所求的索曲线。可以注意到一个很有意思的问题，在特殊情况下，获得的曲线与圆拱的曲线并没有很大区别。

1.8 柔性悬索

在工程结构中，有时会遇到受垂直的分布载荷作用，两端支撑的悬索或链结构。当然，假定索链的平衡形状是受约束索链的索曲线。为了解决这类问题，要得到索链的平衡形状，用解析法比几何法更有效。

对此，参照图 1.54a，图中 $MmnN$ 代表垂直分布载荷，$abcd$ 是一条与极点 O 相应的索曲线，如图 1.54b 所示。在这条索曲线上，选择两个相邻的点 b 和 c，其相应坐标分别定义为 x 和 $x+\mathrm{d}x$，与之相对应的斜率可用下列各式表达

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{和}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

图 1.54

这样，由先前各节所讨论过的关系可以得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan BOE=\frac{BE}{OE} \tag{a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=\tan COE=\frac{CE}{OE} \tag{b}$$

从式(b)中将式(a)减去，可得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=\frac{BC}{OE}=\frac{q\mathrm{d}x}{H}$$

进而简化得到

$$H\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=q \tag{1.3}$$

这个方程为对应于任意极距 H 的索曲线族的微分方程。对于任何特殊分布载荷 q，相应的曲线族可通过这个微分方程的积分得到。下面将进一步详细讨论两种特殊情况下的分布载荷。

沿跨度方向的均布载荷 参照图 1.55a，柔索 ACB，在 A 点和 B 点受到支撑，一垂直载

荷作用其上(未表示)，相对于水平跨度 l 的载荷集度为 q_0。将曲线上的最低点 C 定为坐标原点，建立直角坐标轴 x 和 y，如图 1.55a 所示。f_1 和 f_2 分别为支座 A 和 B 在 y 方向上的坐标，a 和 b 是 x 方向上的坐标。令 $q=q_0=$ 常数，解微分方程(1.3)得

$$y=\frac{q_0x^2}{2H} \tag{1.4}$$

可见，悬索的平衡曲线为在垂直轴上的抛物线。

图 1.55

从悬索任意一段 CD 的平衡条件，可以得到 D 点的拉力 S

$$S=\sqrt{H^2+(q_0x)^2} \tag{c}$$

这表明在悬索的最低点 C 处拉力最小，大小和 H 相等。随着向两端方向逐渐增大，拉力在最高支座处有最大值。

对于悬索端点 A 和 B 处，各自的拉力由式(c)得

$$S_A=\sqrt{H^2+q_0^2a^2} \qquad S_B=\sqrt{H^2+q_0^2b^2} \tag{d}$$

为了确定 a、b 的距离，先确定 A 点和 B 点相对于最低点 C 的位置，然后对 AC 段、BC 段连续应用式(1.4)，并注意到当 $x=-a$ 时，$y=f_1$，当 $x=b$ 时，$y=f_2$。于是可得到

$$f_1=\frac{q_0a^2}{2H},\ f_2=\frac{q_0b^2}{2H} \tag{e}$$

将表达式的第二式减第一式，利用 $f_2-f_1=h$ 可得到

$$2hH=q_0(b^2-a^2)$$

然后，又因为 $a+b=l$，则有

$$a=\frac{l}{2}-\frac{hH}{q_0l} \qquad b=\frac{l}{2}+\frac{hH}{q_0l} \tag{f}$$

注意到，当 $h=0$ 时，也就是说，当两个支撑点在同一水平面上时，有 $a=b=\frac{l}{2}$。

将上述表达式中的 b 代入式(e)中的第二式，便可得到下面计算 H 的方程式

$$H=\frac{q_0l^2}{h^2}\left(f_2-\frac{h}{2}\pm\sqrt{f_1f_2}\right) \tag{g}$$

在式(g)中，减号用于抛物线顶点在支座之间的任何情况；反之，加号用于顶点在两支座同侧时，如图 1.55 所示双点划线 AB。在特殊情况下，当两个支座位于同一水平高度时，即 f_1

$=f_2=f$，$a=b=\frac{l}{2}$，根据式(e)，进一步得到

$$H=\frac{q_0 l^2}{8f} \tag{g'}$$

在大多数实际问题中，跨度 l，挠度 f_1、f_2 和均布载荷 q_0 都是已知的。这样，从式(g)或(g′)中便可以得到最小拉力 H，于是先前所定义的任何量均能很容易地用 H 来计算了。

悬索 CB 段的长度为

$$L=\int_C^B \mathrm{d}s=\int_0^b \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

由图 1.55b 可以看到，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=q_0x/H$，将其代入 L 的表达式得到

$$L=\int_0^b \sqrt{1+\left(\frac{q_0x}{H}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

上式积分后得

$$L=\frac{b}{2}\sqrt{1+\left(\frac{q_0b}{H}\right)^2}+\frac{H}{2q_0}\operatorname{arcsinh}\frac{q_0b}{H} \tag{h}$$

此式同样可以用于计算 AC 段的长度，即将 b 换成 a。

沿悬索方向的均布载荷 在图 1.56a 中，ACB 为一条在自重作用下自由悬挂的处于平衡状态的悬索或链，重量沿绳索本身的长度均匀分布。如前所述，令最低点 C 为曲线的坐标原点，坐标轴为 x 轴和 y 轴。q_0 表示悬索单位长度的重量。s 为 C 点沿曲线到 D 的长度，那么沿 x 方向的载荷集度 q 变为 $q=q_0\mathrm{d}s/\mathrm{d}x$，于是式(1.3)变为

图 1.56

$$H\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=q_0\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

解出

$$y=\frac{H}{q_0}\left(\cosh\frac{q_0x}{H}-1\right) \tag{1.5}$$

这是悬链的方程，可以利用 $\cosh(q_0x/H)$ 的数值表。

CD 段的曲线长度 s 可由微分关系通过积分确定

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{i}$$

这里，由悬索 CD 段的平衡条件(见图 1.56b)，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{q_0 s}{H} \tag{j}$$

将式(j)代入式(i)，然后积分得

$$s=\frac{H}{q_0}\sinh\frac{q_0 x}{H} \tag{k}$$

再由悬索 CD 段的平衡条件，有

$$S=\sqrt{H^2+(q_0 s)^2} \tag{l}$$

将式(k)代入式(l)，得到

$$S=H\cosh\frac{q_0 x}{H}$$

利用式(1.5)，最后变为

$$S=H+q_0 y \tag{m}$$

由此又再次看到在绳索的最低点 C 处拉力 S 最小，大小与 H 相等，并且随着向两端方向逐渐增大，拉力在最高支座处有最大值。

利用式(m)，可得到在 A 点和 B 点处的拉力，各自表示为

$$S_A=H+q_0 f_1,\ S_B=H+q_0 f_2 \tag{n}$$

为了确定 H 的值，对 AC、BC 段连续应用式(1.5)，得到

$$f_1=\frac{H}{q_0}\left(\cosh\frac{q_0 a}{H}-1\right),\ f_2=\frac{H}{q_0}\left(\cosh\frac{q_0 b}{H}+1\right) \tag{o}$$

或者写成

$$a=\frac{H}{q_0}\operatorname{arccosh}\left(\frac{q_0 f_1}{H}+1\right),\ b=\frac{H}{q_0}\operatorname{arccosh}\left(\frac{q_0 f_2}{H}+1\right) \tag{p}$$

将上面最后两个式子相加，并有 $a+b=l$，可得到

$$\frac{q_0 l}{H}=\operatorname{arccosh}\left(\frac{q_0 f_1}{H}+1\right)+\operatorname{arccosh}\left(\frac{q_0 f_2}{H}+1\right) \tag{q}$$

在大多数实际问题中，跨度 l、挠度 f_1、f_2 和悬索单位长度的重量 q_0 都是已知的。因此从式(q)中便可以得到最小拉力 H，这样，先前所定义的悬索的任何量均能轻易地用 H 来计算了。

习题

1. 悬索如图 1.57 所示，承受垂直的总载荷为 $Q=100000\text{lbf}$，该载荷是沿水平跨度 l 的均布载荷。当 $l=100\text{ft}$，$f_1=12\text{ft}$，$h=10\text{ft}$ 时，确定悬索的最大拉力。
2. 悬索如图 1.57 所示，承受垂直的总载荷为 $Q=100000\text{lbf}$，该载荷是沿水平跨度 l 的均布载荷。如果悬索最大的允许拉力为 120000lbf，问当 $l=100\text{ft}$，$h=10\text{ft}$ 时，悬索的跨度应当为多少？
3. 长 100ft 的柔索，每英尺长度的重量为 5lb，在两等高

图 1.57

的端点自由悬挂，跨度为50ft，求跨度中点的挠度。

4. 柔索如图1.57所示，在自重下自由悬挂，已知数据：$l=50\text{ft}$，$f_1=10\text{ft}$，$h=20\text{ft}$，且悬索每英尺的载荷集度 $q_0=10\text{lbf}$，求最大拉力。
5. 求每单位长度有均匀重量的柔索能平衡悬挂时的最短全长 L，如图1.58所示。忽略摩擦，假定滑轮 B 的半径非常小。
6. 参考坐标轴如图1.59所示，完成曲线 AOB 的方程，即由自身定义的载荷图的索曲线。已知直线 $y=-h$，令 wh 为在 O 点的载荷集度。

图 1.58

图 1.59

1.9 弯矩图

在前面的各节中，读者已经知道平面力系的索多边形有着广泛的实际应用。作为进一步的应用，这里将介绍如何应用索多边形画横向载荷作用下梁的弯矩图。

参考图1.60，给定力 P 作用在与极点 O 相应的索多边形的两相邻边 ab 和 bc 上。现在过任一点 C(见图1.60a)，画平行于 P 的一条直线，使之与索多边形的两边交于图示的 d 点和 e 点。那么，这条直线在索多边形两相邻边之间的截距 h 乘以极距 H(见图1.60b)，表示力 P 对点 C 的力矩，即

$$Hh=Pl \tag{a}$$

这里 H 和 P 是力的大小(见图1.60b)，h 和 l 是长度的大小(见图1.60a)。由三角形 bde 相似于三角形 OAB 的事实，立即就可以写出

a)　　b)

图 1.60

$$l:h=H:P$$

这个方程与式(a)等价。

上面的结论也可以应用于更普遍的例子中，图 1.61 所示的同一平面内的平行力系 P_1、P_2、…就是更普遍的例子。例如，假定用一般的方法已经建立了相应于极点 O 的索多边形 $abcdef$。现在过任意矩心 C，画已知力作用线的平行线。然后，这条直线在索多边形两相邻边之间的截距乘以极距，表示包括索多边形这两边上的力对 C 点力矩的代数和。因此，要得到所有力对 C 点力矩的代数和，则取截距$\overline{FG}$乘以极距 H 即可。还有，要获得力 P_1、P_2 对 C 点的力矩和，可用 GL 乘以 H；对于 P_4 对 C 点的力矩用 $FJ\times H$ 等等。力矩的正号或负号对应于截距在两线交点的右边或左边。这个结论可直接由式(a)得到，因为索多边形任意两边的交点决定了这两条边之间的所有力的合力作用线，合力矩总等于所有力之矩的代数和。

图 1.61

现在，参考图 1.62，再次考虑平行力系 P_1、P_2、P_3 和 P_4，可知 $abcdef$ 是相应于极点 O 的索多边形。如果在图示索多边形的第一边 aa' 与其余边上画平行于力的作用线来构造截距，就可得到力矩图。图上任意一点的纵坐标乘以极距 H 表示纵坐标左侧的力对于坐标上任意一点的力矩的代数和。参照图 1.61 的讨论，可直接得出此结论。现在，如果梁受横向载荷作用，并且知道所有力对于任一点的一侧力矩的代数和是一个特定值，就可以把它定义为梁上这一点的弯矩。因此，图 1.62 所示就表示为在 B 端固定，在力 P_1、P_2、P_3 和 P_4 作用下的悬臂梁 AB 的弯矩图。

图 1.62

第二个例子，现在来研究受横向载荷作用的简支梁的情况，如图1.63a所示。在这种情况下，用一般方法画闭合索多边形 *abcde*，其目的是为了求支反力 R_A 和 R_B，而闭合索多边形可以直接被作为梁的弯矩图。用图中的每个纵坐标乘以极距 H 来得到相应的弯矩是必要的。实际上，弯矩图中任意一个纵坐标就是简单的索多边形中的两边之间的截距，两边的交点在对截距一边的所有力的合力的作用线上。

图 1.63

如果梁上有分布载荷作用，就把载荷分成几个有限部分，如图1.64所示。然后用一般方法构造一个闭合的索多边形 *abcdef* 并确定支反力 R_A 和 R_B。要做出梁的弯矩图，描绘出与分布载荷相应的光滑曲线 *apqr* 并取图中所示的纵坐标是必要的。可以看到在这种情况下，弯矩图在截面 *mn* 上符号发生了变化。同前面的例子一样，在得到真实的弯矩之前，如图1.64a所示，表示长度的纵坐标必须乘以表示力的大小的极距 H。

图 1.64

在前面的例子中，为了求梁上支座的支反力构造索多边形，进一步应用于画弯矩图。有时和这种情况相反，通过弯矩图的索多边形有助于求支反力。例如，图1.65a中所示的复合梁，理想的方法是通过几何法求支座 A、B 和 D 处的支反力。梁在给定载荷 P_1、P_2 和 P_3 作用下，用一般方法构造索多边形 *abcde*。在构造射线5和6时，整个系统的闭合索多边形中的相应边 *ef* 和 *fa* 都消失了，但是实际上能够发现梁上铰接点 C 的弯矩为零。在这种条件下，可以得出一个结论，做闭合索多边形的一条边，使之与 R_D 和 R_B 等价，则必过铰接点 C，在

垂直方向上与 cd 边相交，交点 q。因此，画出 ef 边后，再画闭合边 fa。由相应的射线 5 和 6 求出图示的支反力。

图 1.65

习题

1. 用图 1.66 所示的梁构造闭合索多边形，从而得到弯矩图的纵坐标。已知：1in = 1000ft · lbf。
2. 证明图 1.67 所示的索多边形图的阴影部分表示梁 AB 的弯矩图，非阴影部分表示梁 CD 的弯矩图。
3. 画图 1.68 中梁 AB 的弯矩图，载荷单位是 kip。(1kip = 1000lbf)
4. 借助于索多边形，求复合梁在 A、B、E 和 F 处的支反力，载荷如图 1.69 所示。
5. 参考图 1.70 所示载荷的三铰拱，假定选定极点 O，相应的索多边形 $abcde$ 过图示的铰 A、C 和 B，那么证明阴影图的任意纵坐标乘以极距 H 表示相应拱的弯矩。

图 1.66

图 1.67

图 1.68

图　1.69

图　1.70

1.10　虚位移原理

基于力的平行四边形法则，许多静力学问题可用解析法和几何法解决。现在来学习另一种通用的静力学原理，叫做虚位移原理。在特定情况下，用虚位移原理解决问题的方法具有得天独厚的优越性。虚位移原理是普遍适用的，但这里只局限于讨论平面力系下的应用和发展。

首先，我们讨论单个质点在一个平面共点力系 F_1、F_2、…、F_n 作用下的情况，如图 1.71 所示。现在，假想此质点发生任意微小的位移 ds，如图 1.71 所示。那么，力系中的任意力 F_i 在这段位移上做功，这个功是力在位移方向上的投影，表达式为

$$\mathrm{d}sF_i\cos\alpha_i \tag{a}$$

图　1.71

通过定义可以看到，功的正负取决于力的投影方向是否与位移的方向一致，所有力的总功是式(a)的代数和，可以写成如下表达式

$$\sum_{i=1}^{i=n}(\mathrm{d}sF_i\cos\alpha_i) = \mathrm{d}s\sum_{i=1}^{i=n}F_i\cos\alpha_i = \mathrm{d}sR\cos\alpha \tag{b}$$

其中 $R\cos\alpha$ 是合力 R 在位移方向上的投影。由表达式(b)推出力系在质点上任意位移 ds 上所做的总功等于合力在相同位移上所做的功。因此，如果力在位移 ds 的两个正交投影 dx 和 dy 上任意一个方向上做功为零，则可推出合力为零，系统平衡。相反的，如果已知质点平衡，则作用在质点上的所有力在质点上的任意微小位移下，所做功的代数和为零。这就是虚位移原理，有时称为虚功原理。

图　1.72

现在来考虑受部分约束的质点的情况。例如，一个小珠子沿光滑电线滑动，如图 1.72 所示。这种情况下，必须区分作用在质点上的两种力：主动力如 F_1、F_2、…、F_n；被动力如 N，表示由电线施加在小珠子上的力。由平衡条件可推出质点上的所有力(包括主动力和被动力)在任意微小位移上所做的功的代数和必

为零。然而，假设限制了一个与约束相一致的位移，比如在电线上 P 点的切线方向上。那么这个假想的质点的微小位移叫做虚位移，比如可能位移，虚位移用符号 δs 表示。如果电线没有摩擦(理想约束)，约束反力 N 垂直于虚位移 δs，不做功。因此，所有力做的功只与主动力作的功相一致。由此得到结论：对于任意理想约束下的质点，在任意虚位移上，主动力所做功的代数和必为零。被动力根本不需要考虑。

最后来考虑最普遍的质点系的情况。虚位移原理被应用到这样的系统中有特殊的意义。举一质点系的具体实例。现考虑两个放在斜面上的滑块 A 和 B，用一柔性的不可伸长的绳子穿过滑轮，然后相连，如图 1.73 所示。如忽略滑轮和斜面的摩擦，这种系统叫做理想系统。这里再次区分主动力，如重力 P 和 Q，被动力如 N_A、N_B 和 S。然后，应注意被动力有两种，作为整个系统的外力，比如 N_A、N_B；还有系统的内力，比如绳子施加在质点系上的拉力 S。系统的虚位移，比如与约束相一致的位置上的微小改变(包括内力和外力)，将会得到图示每一个质点沿着支撑平面的假想位移 δs。因为绳子不能伸长，所以这些位移必然相等。那么，如果系统平衡，每一个质点平衡，在这样的系统位移上所有力所做的功的代数和必然为零。但是，力 N_A、N_B 垂直于质点移动方向的斜平面，不做功，不需要考虑。更进一步地说，力 S 大小相等，做功符号相反，相互抵消，也可以不考虑。因此，对于任何一个平衡的理想质点系，在任意的虚位移上，所有主动力做功的代数和为零。应用这个结论，可写出

图 1.73

$$-P\sin\alpha\delta x + Q\sin\beta\delta x = 0$$

这里给出了系统的平衡条件

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \tag{c}$$

要通过普遍的平衡方程得到上述结果，可将每一个质点分开考虑，写出

$$-P\sin\alpha + S = 0$$

$$Q\sin\beta - S = 0$$

然后，消掉这两个方程中的 S，可得到条件式(c)。对更复杂的几个质点系来说，后一种方法需要同时写出许多平衡方程，将解决问题的过程变得非常复杂。这种情况下，虚位移原理常常证明是更为实用的。

虚位移原理同样适用于任何理想连接的刚体系。例如，考虑如图 1.74 所示的杆系。为了找到 P 和 Q 之间的平衡关系，应注意到系统的虚位移可以定义为水平杆的一个微小转角 $\delta\theta$。重物 P 和 Q 的重心的相应位移与在平底盘上的位置无关，并且总是大小相等。因此，根据虚位移原理，重物 P 和 Q 为达到平衡必相等。

图 1.74

有时应用虚位移原理也有利于寻求支反力。例如，如图 1.75a 所示，考虑在载荷作用下的简支铰接梁系统。要找到 B 点的支反力，用假想的垂直力 R_B 代替约束，如图 1.75b 所示。这样，可得到一个需要寻找 P 和 R_B 满足平衡关系的非刚性系统。系统的虚位移完全定义为图中标出的

铰链 C 的微小垂直位移 δx。则相应的虚功方程表示为

$$P\frac{x}{a}\delta x - R_B\frac{a}{a+b}\delta x = 0$$

由此得到 $R_B = Px(a+b)/a^2$。用相似的方法可以得到其他支座的支反力。目前这种方法的优点在于一次只需考虑一个支反力且不用考虑系统的内力。也就是说，不需要分离系统来考虑梁上被分离出的每一个自由体 AC、CD 和 DF。

图 1.75

另一个例子，考虑如图 1.76a 所示的简单框架结构。为了找到在 B 点的水平支反力，去掉这个支座的约束并用力 H 代替，如图 1.76b 所示。系统现在是可以移动的，它的几何构成可以由一个坐标 θ 确定。系统的虚位移 A 将被表示为在这个角度上的微小改变 $\delta\theta$。杆 AC 转动的结果，使点 C 相对于 AC 垂直地移动，点 B 为满足系统的剩余约束而水平移动。这意味着杆 CB 绕着瞬心 O 旋转，得到通过 B 的垂直线与 AC 延长线的交点。由于 CB 的旋转，点 D 相对于 OD 垂直移动，点 C、B 和 D 的虚位移变为

$$\delta s_c = a\delta\theta$$

$$\delta s_b = \frac{OB}{OC}a\delta\theta \qquad \text{(d)}$$

$$\delta s_d = \frac{OD}{OC}a\delta\theta$$

图 1.76

因此，虚功方程为

$$-H\frac{OB}{OC}a\delta\theta + P\cos(P,\delta s_d)\frac{OD}{OC}a\delta\theta + Q\cos\theta a\delta\theta = 0$$

可以发现

$$H = \frac{OC}{OB}Q\cos\theta + \frac{OD}{OB}P\cos(P,\delta s_d) \qquad \text{(e)}$$

OC/OB 和 OD/OB 的比值与力 P 的方向和位移 δs_d 的方向之间的夹角 $(P,\delta s_d)$，如果按比例

作图的话，可以从图中求出。

如果从极点 O 开始(见图 1.76c)，可建立矢量$\overline{ob}$、$\overline{od}$和$\overline{oc}$，按一定比例分别得到位移 δs_b、δs_d 和 δs_c，这样得到的图 $obdc$，几何上相似于图形 $OBDC$，因为相应的边是互相垂直的，且它们长度的比率不变。这两张图之间的关系适用于所有在一个平面内的单个刚体的位移情况，$obdc$ 这样的图叫做位移图。借助于位移图，具有一个自由度的系统中的许多点的一系列相应虚位移都可以容易地找到，然后就可以轻松地写出虚功方程了。

习题

1. 参考图 1.41 所示的梁，用虚位移方法，求图示载荷 P 作用下斜杆的拉力 S_2。
2. 简支复合梁 ACB，载荷如图 1.77 所示。用虚位移原理，求垂直杆 1 和杆 2 的轴力。
3. 用虚功原理，计算图 1.69 所示复合梁的 E 点的支反力。
4. 用虚位移原理，求图 1.78 所示载荷作用下，铰接框架在支座 A 和 B 处引起的水平和铅垂支反力。
5. 如图 1.35 所示的半圆三铰拱，建立虚位移图，并求图示载荷 P 作用下的水平推力 H。

图 1.77

图 1.78

第2章

静定平面桁架

2.1 简单桁架

平面桁架是最重要的结构形式之一。通常，由若干在同一平面内的直杆在端点处铰接而成的刚性框架体系称为平面桁架。如图 2.1 所示的两个简单框架就属于平面桁架。图 2.1a 中的矩形框架是由四根端点相互铰接的杆组成的。显然该结构不是刚性的，有可能变形成为如图中双点划线所示的结构。这个结论同样适用于由多于四根杆组成的铰接多边形结构。另一方面，如图 2.1b 所示，由三根在端点相互铰接的杆构成的三角形结构是几何不变体系，也就是说，忽略杆在长度上的小变形，A、B 和 C 三点铰接的相对位置不会改变。因此，这种基本铰接三角形构成的刚性结构是桁架的最简单形式。

如图 2.2a 所示，由一个铰接三角形 ABC 开始，增加杆 AD 和 BD，用销钉固定在 D 点，显然，刚性三角形 ABC 和杆 AD、杆 BD 也排列成三角形形式，于是就得到刚性框架 $ABCD$。同理，如图 2.2b 所示，在刚性结构 $ABCD$ 部分增加杆 DE 和 CE，铰接点为 E，就得到刚性桁架 $ABCDE$。

图 2.1

图 2.2

由于上面讲到的过程可以无限地继续下去，可以推出：首先由一个三杆的基本铰接三角形开始，然后每增加一个新结点，就要增加两根杆连接新结点，这样就形成了一个平面刚性桁架。依据这样的原则组成的桁架称为简单桁架。如图 2.3a 所示的桁架就是简单桁架，三角形 ABC 作为基本单元，然后按照字母顺序，每增加一个结点增加两根杆，依次连接结点 D、E、F 和 G，就组成了一个简单桁架。

在图 2.3b 中，这个简单桁架和前述的规律有微小变化。这种情况不是从一个铰接三角形开始，而是直接从一个刚性基础（比如说垂直的墙）开始，按照字母顺序建立桁架结点，每次在原有系统上增加两根杆。图 2.3b 所示的这种简单桁架不同于图 2.3a 所示的情况，它

必须考虑把基础的作为一个组成部分，然而图 2.3a 所示的刚性桁架不依赖于任何基础。

如图 2.3 所示，从每一个简单桁架的两个变化中，很容易得到，在杆件数 m 和结点数 j 之间存在着一定的关系。在图 2.3a 所示情况中，可以注意到，除了开始的基本铰接三角形 ABC 含有三根杆和三个结点外，其余部分每增加两根杆，增加一个结点。因此可得

$$m-3=2(j-3)$$

即

$$m=2j-3 \tag{2.1a}$$

在第二种情况中，如图 2.3b 所示，没有开始的铰接三角形，上式简化为

$$m=2j \tag{2.1b}$$

在后一种情况里杆件与基础的连接点不能算在结点内。

图 2.3

在布置桁架中的杆件时，在任何情况下的实际形式主要依赖于结构和建筑物的作用。有很多符合各种结构标准的桁架形式，例如图 2.4 所示的桁架就是适合屋顶和桥梁等建筑物的几个典型桁架。在这些例子中，可以用式(2.1a)检验，即杆件数 m 和结点数 j 所满足的关系式，图中交叉的杆件没有连接点表示杆件之间没有连接，可以自由穿越。这些交叉点不能被计算在结点内。如图 2.4c、图 2.4d 所示，尽管仍有铰接点，但焊点和铆钉连接点(见图 2.4a、图 2.4b)在现代刚架结构中是最普遍的连接形式。

本质上，桁架的作用是让横梁在大跨度上承受荷载。在图 2.5 中，用一个简单的低桁架桥为例，分析桁架在这种基础结构中的作用。图中有两个相同的平行桁架支撑在桥墩上，它们之间用桥面连接，可以在上面加荷载。桥面由横梁和纵梁组成，横梁与纵梁通过相应的桁架结点相连，横梁和纵梁互为支撑。从这个建筑物中，可以明显得知，在桥面上施加的所有荷载通过结点只传递到与结点相连的两个桁架上。

图 2.4

图 2.5

桥身自重和加在桥面上的荷载主要在自身平面上引起桁架的弯曲，桁架弯曲的平面如图2.6b所示。这种变形是由每根杆在长度上的小变形造成的，同时小变形还引起杆件相应的拉伸和压缩，即轴力。相应于轴力的轴向应力(单位面积上的轴力)称为杆件的基本应力。

如图2.6c所示，对于有铆接或焊接点的桁架，由于刚结点的存在，则桁架整体的弯曲也会引起单个杆的弯曲，从而产生附加的弯曲应力，称为次应力。次应力是个单独研究的问题。尽管如此，如果杆件仔细布置，把各杆的中心线都交于一点，即结点，则在刚结点原本存在的次应力不会对主应力产生很大的影响。因此，在计算中可以忽略刚结点，而用铰接点代替。这样可以暂时避开解决必须分清是刚结点还是铰接点的问题。

当然，即使桁架是由铰接点连接的，各杆也会因其自重产生一定的弯曲，通常是很微小的，在计算中通常可以忽略，或者用作用在杆件两端结点上的两个相等的集中力代替各杆自重产生的均布力，也就是假定桁架的自重集中在它的结点上。

最后，为了便于分析，把实际的桁架(见图2.7a)用相应的理想桁架(见图2.7b)代替。这种理想桁架是当外力只作用在桁架平面上时，各杆件不计自重且相互间用无摩擦的铰链连接的平面杆系组成的。在这种理想情况下，各杆处在简单的拉伸或压缩状态，且不产生弯曲。这样，加在端点处销钉上的那对力，大小相等、方向相反，且与杆的轴线共线。因此，对于共面平衡力系，在桁架的每个结点上，已知力的作用线，确定内力的大小，称为桁架分析。尽管如此，在考虑用普遍方法分析平面桁架前，应首先考虑平面桁架的支座以及在支座上引起的反力问题。

图 2.6

图 2.7

2.2 反力

任何简单桁架，如图2.3b所示，作为基础的一个完整部分，那么它在自身平面内受到完整约束，并且在结点的外载荷作用下保持平衡。然而，要实现图2.3a中简单桁架在一个平面内的完整约束，我们必须通过增加额外的链杆或其他合适的支座将其联结到基础上。最一般的方法是将一点A遍过面定铰链面定在基础上，如图2.6c所示，这样的约束消除了桁

架移动的所有可能性，只保留了绕 A 点转动的可能性。在这样的旋转中，另一点 B 只能在垂直于直线 AB 的方向上移动。所以，实现桁架在自身平面内的完整约束，没有必要完全固定铰接点 B，只要通过辊轴支座使其在一个方向上自由移动就可以了。如果铰接点 B 的一个自由度与 A 点的旋转是矛盾的，那么按照下面所示辊轴[⊖]来实现平面桁架的约束。

在实际桁架支座处达到理想约束度的实用方式如图 2.8 所示。桁架设计的主要细节是由桁架的尺寸、重量和跨距决定的，这张草图仅给了我们一个大概的设计思想。

桁架在其自身平面内，建立支撑桁架的另外一种通用方法是，通过增加另外的链杆作为桁架的一部分与基础联结。在图 2.9 中，简单桁架 ABC 就是用这种方式通过杆 1、2、3 与基础相联的。一般来说，对于平面桁架的完整约束，总是通过调整三根杆的位置来实现，即这三根杆的轴线既不平行又不相交于一点。证明如下：首先假设图 2.9 中的桁架是通过 AD、BE 两根杆联结在基础上的，这两根杆并不平行。那么桁架的 A、B 两点分别沿着垂直于杆的轴线方向上移动，即相当于桁架绕 G 点旋转。G 点是 AD、BE 杆轴线的交点。第三根杆 CF 只在一个方向上约束 C 点的移动，这与杆绕 G 点旋转矛盾(简单地说，杆 CF 的轴线一定不能相交于 G 点)。显然，这样就实现了桁架在自身平面内的完整约束。

图 2.8

图 2.9

在特殊情况下，桁架被三根相互平行的杆支撑(见图 2.10a)，显而易见，它在横向是可以自由移动的，所以这个桁架没有被完整约束。同理，桁架若是三根杆支撑，这三根杆的轴线相交于一点，那么桁架会绕交点旋转，也是不完整约束。因此，一般而言，一个刚性桁架在自身平面被完整约束的充分必要条件是三根支撑链杆的轴线既不平行也不能相交于一点。

图 2.10

依据充分必要条件，刚性平面桁架的任何支座，只要是超过桁架在自身平面内完整约束所需的最少约束数目，我们定义为冗余支座。例如，在图 2.11a 中，桁架由四根链杆支撑固定，显然，桁架在平面内已经被完整约束，但是，因为不破坏桁架完整约束时，这四根铰链

⊖ 我们假定这种辊轴具有阻止杆件上下移动的特殊轨迹。

的任何一个都可以被取走，所以任何一个都可以被认为是冗余支座。同理可以证明，图 2.11b 中支撑桁架的任意辊轴铰链支座可以认为是冗余支座。但是 DE 杆不是冗余支座，因为没有 DE 杆，桁架在水平方向将可以自由移动。

图　2.11

当简单桁架在平面力系作用下在自身平面内被完整约束时，在支撑点处产生反力。并且主动力和反力构成了平衡力系。这样的力系，满足三个平衡条件，可参见方程(1.2)。因此，我们可以确定不多于三个未知量的力系，这样恰好是平面桁架完全固定所需的约束数目。由此可知，在完整约束的充分必要条件下，受支撑的简单桁架在外力系作用下，完全可以通过静定平衡条件确定支座的反力。基于上述论述，这样的支撑系统称为静定系统。确定这种反力的方法已经在 1.2、1.3、1.5 节中讨论过了。

如果一个刚性平面桁架的支撑系统具有三个以上的约束度，也就是说，如果存在多余约束，像图 2.11 所示那样，则三个静力平衡方程不足以确定所有的未知量，这种系统称为超静定系统。在这样的情况下，外载荷通过桁架的各杆来传递，依据杆的弹性性能被分配在各支座上，并且只有通过考虑这些性能才能确定反力[⊖]。

图 2.10 所示的特殊情况，在同一平面内的支座系统，尽管只有三个约束度，但它也是超静定的。如图 2.10b 所示，作用于桁架的所有主动力的合力过 O 点，因此支撑杆产生的三个支反力也必交于一点，但是对于平面汇交力系只有两个独立的平衡条件，参见方程(1.1)，所以这个问题也是超静定的。另一方面，如果作用于桁架上的所有主动力的合力是一个力偶，或者是一个力不过 O 点，这种情况又不同了。在这样的情况下，如果取 O 点为矩心，由于存在零转矩的力臂，立刻可看到在一些支撑杆上必然产生无穷大的力。因为施加在桁架各杆上的反力，没有其他方法实现关于 O 点的有限转矩，以此来平衡外载荷的合力矩。在这种情况下，实际上是支撑杆发生足够的变形(伸长或缩短)使桁架旋转到一个新的位置，使三个支撑杆的轴线不再交于同一点。因此，平衡系统的最终结构和三个支撑杆相应的作用力，依赖于系统的弹性特性。这样，又得到了一个超静定问题。

习题

1. 求每个桁架上 A 点和 B 点的反力。桁架支撑和载荷如图 2.12 所示。
2. 求每个桁架上 A 点和 B 点的反力。桁架支撑和载荷如图 2.13 所示。
3. 求简单屋顶式桁架上 A 点和 B 点的反力。如图 2.14 所示，两种情况：(1)给定载荷如图中实向量所示；(2) 给定载荷如图中虚向量所示。

⊖ 这个问题在第 6 章详细讨论。

4. 如图 2.15 所示，求桁架中支撑杆 1、2、3 中各杆的轴向力。两种情况：(1) 布置如图 2.15a 所示；(2) 布置如图 2.15b 所示。

5. 如图 2.9 所示，在作用于 K 点的水平载荷作用下，求桁架中支撑杆 1、2、3 中各杆的轴向力。假定 $AJ = AD = 12\text{ft}$，$BC = 10\text{ft}$。

图 2.12

图 2.13

图 2.14

图 2.15

2.3 结点法

现在来详细分析简单桁架 ABC，支座和受力如图 2.16a 所示。由于施加载荷 P，在支座 A、B 处分别引起 $3P/2$ 的垂直支反力，并且在图示垂直方向的平衡力系作用下，整个桁架保持平衡。在本章的 2.1 节中指出，这些外部载荷引起桁架中各杆的轴向力。反过来，每根杆将力作用在杆件两端的铰接点处，并且这两个力大小相等、方向相反且都沿杆的轴线方向。这两个力中任意一个力的大小都表示杆的轴向力，而不考虑这两个力的方向是指向铰接点还是背离铰接点，即不考虑杆件是受压还是受拉。为了避免处理这些内力时出现混乱，我们将给这个结构中的每根杆标上相应的序号，并用 S_i 表示在 i 杆中的轴力大小。

下面从铰链 A 处的平衡开始分析此桁架的受力情况。以铰链 A 作为自由体，如图 2.16a 中圆圈所画隔离体。可以发现，作用其上的力分别有：外反力 $3P/2$ 和杆 1 与杆 2 分别施加的内反力 S_1 和 S_2。我们不知道后两个力的方向是背离还是指向铰链，但是力的作用线是沿着杆轴线的。因此可以构建一个闭合的力三角形，并且力 S_1、S_2 的大小可以按比例由图计算出来。同时，箭头的方向是沿封闭的力三角形首尾相接的。由此我们知道杆 1 受拉，杆 2

受压，这时箭头的方向可以在 A 点画出。

现在再来考虑铰链 F 的平衡。首先用已经求出的指向铰链 F 的反力 S_2 代替杆 2 的作用力。那么，在结点 F 还剩下两个未知力，即杆 3 和杆 4 作用在铰链处的反力。同理，我们不知道这两个力的方向，但是知道它们的力作用线，这样，就能构造如图 2.16c 所示的力多边形。同前述方法一样，从这个闭合的力多边形，可以求出杆 3 和杆 4 的轴力。因此，从力多边形的箭头方向可知两根杆都受压，于是将箭头的方向标注到图 2.16a 中。

图　2.16

接下来考虑铰链 D 的平衡。已知作用在此铰链上的杆 1 和杆 3 的反力，并且再一次剩余两根杆的轴力未知(杆 5 和杆 6)。如图 2.16d 所示，由铰链 D 的闭合力多边形可以求出 S_5 和 S_6。于是，用这种特殊方法就完成了桁架的受力情况分析。由对称性可知，右边各杆的轴力与左边各杆的轴力相同。

如果是理想桁架，在简单桁架的结点上，可以连续应用两个平衡方程式[见式(1.1)]，从而代替上面建立各种力多边形的方法。这种方法通常适用于已知桁架中各杆之间的角度，求解力的投影问题。为说明以上分析方法，让我们考虑简支桁架，载荷如图 2.17 所示。用平衡方程来代替以上的几何法。为方便起见，假设所有杆均受拉力，所有反力方向都背离铰链。自然而然地，正号表示拉力，负号表示压力。例如，假定取铰链 A 为隔离体，受 P、S_1 和 S_2 三个力的作用(见图 2.17)。然后，根据所有的力在正交坐标轴 x 轴和 y 轴上投影的代数和为零，列平衡方程得到

图　2.17

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}S_1 - S_2 = 0$$

$$-P + \frac{1}{2}S_1 = 0$$

可解得 $S_1 = +2P$ 与 $S_2 = -\sqrt{3}P$。因此，杆 1 受 $2P$ 的拉力，杆 2 受 $\sqrt{3}P$ 的压力。在接下来的计算中应用这些结果，同时应当注意符号是完整结果的一部分。

继续研究铰链 B。将所有力投影于同一坐标轴上，平衡方程为

$$+S_2 - S_6 = 0$$
$$-P + S_3 = 0$$

用以前的确定值 $-\sqrt{3}P$ 代替 S_2，由以上方程可求出 $S_3 = +P$ 和 $S_6 = -\sqrt{3}P$（分别受拉和受压）。对于铰链 C，将所有的力投影到图示的正交坐标轴 x'轴和 y'轴上是最方便的。在 x'轴和 y'轴上，平衡方程为

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}S_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}S_5 = 0$$
$$-S_1 - \frac{1}{2}S_3 + \frac{1}{2}S_5 + S_4 = 0$$

将 $S_3 = +P$ 代入上式的第一个方程，可以得到 $S_5 = -P$，由第二个方程可得 $S_4 = +3P$。铰链 D 和铰链 E 的受力分析以及全部桁架的受力分析留给读者作为练习。

前面分析简单桁架的过程称为结点法。对于任意简单桁架，按照 2.1 节给出的准则组成的杆件总是可以应用几何法或者解析法来进行分析的。因为在任何一个桁架的两杆相交处必存在一个结点（后边的结点按规则添加）。因此两杆的轴力可以由结点处的两平衡条件决定，同时两杆被作用在桁架另外两铰链上的反力所代替。那么，必有一个结点处只有两杆的轴力未知（按照规则，下一个结点建立在前一个结点分析的基础上），于是这两个杆的未知轴力被确定。这样，从建立桁架相反的顺序出发，依次分析桁架的每一个结点，在每一个结点处只有两个未知轴力。这个分析过程是轻而易举的。当然，必须指出，在正确分析桁架受力情况之前，须求出支座处的外部支反力。支反力的求解是一个单独的问题。

习题

1. 求解简单桁架每根杆的轴力，支座和载荷如图 2.12a 所示。
2. 对图 2.13 简单桁架的每根杆做受力分析轴力，支座和载荷如图 2.13 所示。
3. 参照如图 2.14 所示座顶桁架结构，对每一种载荷作用情况，做受力分析。
4. 用结点法分析图 2.18 所示的简单桁架。所有的斜杆与水平方向成 45°。
5. 用结点法分析图 2.19 所示的 K 形桁架。所有的斜杆与水平方向成 45°，各杆长度均相等。

图 2.18

图 2.19

2.4 麦克斯韦（Maxwell）图

参考图 2.16，在进行桁架分析时，要在每个铰链处构建一个独立的力多边形。我们注意到每个轴力的矢量出现在两个不同的力多边形中。为了避免这两个矢量重复出现，在一定

条件下，单一力多边形可以叠加形成一个合成图，这个图形称为桁架的 Maxwell 图。例如，如图 2.16 所示的三个力多边形，当它们叠加起来，就形成如图 2.20b 所示的合成图。因为这种叠加减少了必须建立的力多边形的数量，并且使最后的结果更为简洁，所以是比较理想的。然而，为了避免任意一个矢量的重复出现，必须用一种特定的方法来建立这种结构。这正是下面所要研究的内容。

图 2.20

首先以最简单的三角形框架 ABC 为例。在三个外力 P、Q 和 R 作用下，三角形在平面上保持平衡，如图 2.21a 所示。这三个处于平衡状态的力必汇交于一点 D，并且它们的自由矢量必然构建出一个如图 2.21b 所示的闭合三角形。因此，每一个铰链的闭合三角形都可以直接叠加于此三角形上。例如，在△abd 中，矢量$\overline{ab}$、$\overline{bd}$和$\overline{da}$箭头方向一致，它们表示在 A 铰链处平衡的力。同理，在△bcd 和△cad 内部的箭头相一致，他们分别是铰链 B 和铰链 C 的闭合力三角形。因此，在图 2.21b 中，所有力三角形的叠加都很简洁，没有矢量的重复出现。那么，只有使每个力多边形中包含的矢量按照相同的顺序构建才有可能使矢量不重复出现，也就是说力的矢量始终按照同一方向（顺时针或逆时针）环绕相关的铰链。现在，可以注意到基本三角形 abc 是按照 PQR 的顺序来集合外力的，即外力顺时针环绕桁架的顺序。这样，在△abc 上叠加剩余的力多边形结构中，外力环绕铰链的顺序都必须是顺时针方向首尾相接。只有按照相同的过程叠加，才能避免矢量重复出现。例如，如果在铰链 B 和铰链 C 按照顺时针方向排列矢量，在铰链 A 按照逆时针方向排列矢量，则得到的合成图 2.21c 中矢量$\overline{bd}$和$\overline{da}$就会重复出现。

由图 2.21a 和 b 的图形研究表明，它们之间有一定的关系。要确定这两个图形间的关系，假设每个图形都是四面体的平面投影。例如，在图 2.21a 的四面体中，有用小写字母 a、b、c、d 以及顶点 A、B、C、D 标注的面 ACD、ABD、BCD 和 ABC。同理，在图 2.21b 中的四面体有用大写字母 A、B、C、D 和顶点 a、b、c、d 标注的面 abd、bcd、acd 和 abc。这样，在图 2.21a 中的多面体的每个面都有与图 2.21b 相一致的顶点，在图 2.21a 中的多面体的每个顶点都有与图 2.21b 相一致的面，并且它们的每条边互相平行且数量相同。这样

图 2.21

的两个多面体是相互对应的，我们将代表在一个公共平面上投影的两个平面图形叫做可易图形。可易图形的这些点将会在这些力的作用下达到平衡。它遵循了第二个图形中的任意点的力与第一个图形中的闭合多边形的边长成比例这样一个事实。这个事实是 1864 年 Clerk Maxwell 在研究静态可易图形问题的重要性时发现的。因为是 Maxwell 第一个指出了如图 2.20 所示图形中的对应关系，此合成矢量图叫做桁架的 Maxwell 图。在图 2.20a 中的桁架，完整的 Maxwell 图如图 2.20c 所示。在类似的更复杂的情况下，几乎不可能形象化地显示相应的多面体，但只要两个图形满足可易图形的要求，并不影响其结果。

在建立和使用 Maxwell 图来分析桁架时，Bow 符号系统使用起来很方便。在此系统中，作用在桁架结点处的力作用线之间的空间以小写字母表示。那么，任意力用相应的小写字母标注，字母标在被力作用线分割出的空间上。例如简单桁架，支撑和载荷如图 2.22a 所示。按照 Bow 系统，我们在五个外力之间的空间用 a、b、c、d、e 标注，在桁架的杆之间用 f、g、h 标注。这样，从顺时针方向环绕桁架看，左边的第一个载荷 P 为 $\overline{ab}$，第二个载荷 P 为 $\overline{bc}$，C 点的外部反力为 $\overline{de}$，等等。同样，在铰链 C 处的垂直杆的反力是 $\overline{hd}$；在铰链 A 处水平杆的反力是 $\overline{bf}$，等等。

图 2.22

现在来准备分析 Maxwell 图的构建过程(见图 2.22b)。对于受平衡力系作用的桁架，从闭合多边形 $abcde$ 开始。在这个基本多边形中，通过每一个顶点画桁架图中所有相应空间边界线的平行线的线，可易图形就简单完成了。例如，通过 b 和 e，分别画上平行线和倾斜线，让它们分别平行于桁架的 AB 和 AC。由于这两条线也约束 f 的空间，它们的交点决定了可易图形中的顶点 f。那么，通过 f 点和 c 点，分别画垂线和水平线，它们的交点决定了可易图形中的顶点 g。最后，通过 g 和 e 点，再分别画斜线，其交点 h 在直线 ad 上，这是最后确定的一个顶点，至此，Maxwell 图完成。读者会很好地确定桁架中每个铰链各自的力多边形。

在要求确定桁架中给定杆是受拉或受压时，利用 Bow 符号是独具优越性的。例如，在 Maxwell 图中，直线 hd 的长度表示 BC 杆的力的大小。在铰链 B 上顺时针旋转，施加在铰链上的反力用 dh 表示。现在，在 Maxwell 图中，$\overline{dh}$ 矢量向上，表示作用在铰链 B 上是压力。相反，如果在铰链 C 上顺时针旋转，考虑铰链 C 上同样杆的反力，hd 代替 dh，在 Maxwell 图中，$\overline{hd}$ 矢量向下，同前所述，表明作用在铰链 C 上是压力。

图 2.23

习题

1. 建立如图 2.23 所示桁架的 Maxwell 图，求各杆的轴向力。
2. 建立如图 2.18 所示桁架的 Maxwell 图，求各杆的轴向力。

3. 建立如图 2.24 所示桁架的 Maxwell 图，求各杆的轴向力。
4. 建立如图 2.19 所示桁架的 Maxwell 图，求各杆的轴向力。
5. 建立如图 2.25 所示桁架的 Maxwell 图，求各杆的轴向力。

图　2.24

图　2.25

2.5　截面法

现在来讨论另一种分析桁架问题的方法。应用这种方法，有可能求解某些选定杆的轴力，而不必如前两节所述的方法那样，对所有的铰链连续列平衡方程。如图 2.26a 所示桁架，在图示载荷作用下，我们假定只求杆 10、11 和 12 的轴力。代替连续考虑铰链 A、H、B、I、C 和 J 平衡的结点法，我们想象有一截面 mn 将桁架分成两部分，然后考虑截面左半部分的平衡情况。在这个自由体上，在 A 点有一铅垂支反力作用，并有三个铅垂载荷 P 和三个未知力 S_{10}、S_{11}和 S_{12}，这三个未知力表示被截而 mn 截断杆的轴力。当然，这三个力的方向，一定是沿着杆的轴线方向，因此只有力的大小是未知的。于是，此时得到一个平衡的

a)

b)

图　2.26

共面力系，应用方程式(1.2)，可以求解这三个未知力的大小。例如，根据所有力对 D 点力矩的代数和等于零的条件列平衡方程，得到

$$-S_{10}h+Pa+P2a+P3a-\frac{7}{2}P3a=0$$

求得 $S_{10}=-9Pa/2h$，其中负号表示压力，因为前边假设正号表示拉力。同理，取点 J 作为矩心，可以得到 $S_{12}=+4Pa/h$。S_{11}可以很容易地通过所有力在垂直轴上投影的代数和为零确定。因此，列方程为

$$\frac{7}{2}P-3P-S_{11}\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}=0$$

求得 $S_{11}=+P\sqrt{a^2+h^2}/2h$。

这里所用的分析桁架的方法叫做截面法。它的本质是用截面分离出桁架的一部分，从而将要确定的内力，作为分离体部分的外力出现。如前所述，在这个过程中，通常得到一个平衡的共面力系，然后应用方程式(1.2)就可以求解未知力了。这种方法成功与否的关键完全取决于截面的选择。通常情况下，一个截面只能截断三根杆，因为三个平衡方程只能确定三个未知力。然而对于这个准则，也有例外，下面举例说明。

有时，为了得到满意的结果，可能需要多作几个截面或者将结点法和截面法结合起来应用。例如，要求解 K 形简单桁架中杆 1、2、3、4 的内力，如图 2.27a 所示。要完成这些杆的分析，可考虑使用两次截面法和一次结点法。自由体分析如图 2.27b、c、d 所示。首先，连续将点 D 和点 C 作为矩心，可以得到 $S_1=-4Pa/h$ 和 $S_4=+4Pa/h$，如图 2.27b 所示。然

图 2.27

后考虑铰链 E 的平衡(见图 2.27c)，将所有力在水平 x 轴上投影，可以得到杆 2 和杆 3 的力大小相等，但方向相反，即 $S_2 = -S_3$。在图 2.27d 中，只需将所有力在垂直轴上投影，代入前面的条件，可以得到 $S_3 = -S_2 = \frac{1}{4}P\csc\alpha$。

在只用几何法分析桁架时，有时用截面法是非常有利的，而且也是非常简单的。例如，取图 2.28a 中的桁架为例，假设我们希望用几何法来确定杆 1、2、3 的轴力。第一步，考虑整个桁架的受力平衡并做力多边形(见图 2.28b)和相应的索多边形(见图 2.28c)。这样可以得到 A 点和 B 点的支反力。然后，用截面 mn 截取桁架的左半部分，并考虑其平衡条件。若回忆一下在 1.9 节中的讨论就可以知道，被截面 mn 截得的桁架左半部分的所有外力，是一过索多边形中 3 边和 9 边的交点 q 的垂直力 R。因此，在图 2.28b 中，射线 9 和 3 是合力 R 的一部分并且必交于力作用线。因为内力 S_1、S_2、S_3 必须与合力 R 平衡，所以只需确定这三个内力的合力 R'(平衡于力 R)即可，而这三个分力的作用线是已知的(杆 1、2、3 的轴线)。这是一个完全的静定问题，用几何法求解如下。在图 2.28a 中，延长 S_1 的作用线与合力 R 交于点 C。在 C 点，把 R 的平衡力分别分解为沿着线 CD 和 CE 的两个力，并且得到 S_1 和 Q 的大小，如图 2.28d 所示。然后，力 Q 的作用可以传递到点 E 并被分解成沿杆 2 和杆 3 的分力 S_2 和 S_3。最后在图 2.28d 中，忽略力 Q，便得到了 mn 截面左半部分桁架的封闭力多边形。

图　2.28

有时，对桁架的分析可以用一种非常简单的方法，将桁架看作梁，然后应用本书 1.4 节所述的传统弯矩图和剪力图的方法。例如，顶部与底部的弦平行的简单桁架，载荷如图 2.29a 所示。作垂直截面 mn，并根据截面的左半部分桁架写出平衡方程，得到

$$S_1 = -\frac{R_A 4a - P_1 2a}{h} \tag{a}$$

$$S_2 = +\frac{R_A - P_1}{\sin\alpha} \tag{b}$$

$$S_3 = +\frac{R_A 3a - P_1 a}{h} \tag{c}$$

仔细观察这些平衡方程，当把桁架看作梁时，上式的各分子分别代表 E 点的弯矩、截面 mn 处的剪力和 D 点的弯矩，相应的 S_1、S_2 和 S_3 的轴力可以在数量上看成是成比例的。因为用任何不同于 mn 的截面截取桁架可以得到相似的结果，所以可以认为用弯矩图和剪力图完全可以对桁架进行分析。

如果这样，运用图解法解决问题是事半功倍的。首先，确定如图 2.29b 所示的支反力，然后由索多边形得到满意的弯矩图，如图 2.29c 所示。建立剪力图(见图 2.29d)是不费吹灰之力的。如前面 1.9 节所述，桁架上任一点的弯矩可以用封闭的索多边形上相应点的纵坐标乘以极距 H 得到。例如，纵坐标 e_1(见图 2.29c)乘以 H(见图 2.29b)就得到 E 点的弯矩，也就是表达式(a)的分子。当力 H 与因子 e_1/h 相乘，可以直接得到轴力 S_1。同理，当力 H 与因子 e_3/h 相乘，就可以得到轴力 S_3。力 S_2 可以简单地用剪力图中的纵坐标 f_2 与因子 $\csc\alpha$ 相乘得到。

图 2.29

弯矩图和剪力图有时有利于区分桁架中的杆是受拉力还是受压力。一般来说，有平行弦的桁架，当观察到它受正弯矩时，顶部弦杆将受压，底部弦杆将受拉，好像梁上下两侧的纤维。当它受负弯矩时，情况恰好相反。当它受正剪力时，桁架中向右下倾斜的杆件受拉，桁架中向右上倾斜的杆件则受压。当它受负剪力时，情况恰好相反。以上论述的解释可参见图 2.30 所示。压杆用粗实线表示，拉杆用细实线表示。借助下面所示桁架的弯矩图和剪力图，读者可自行验证其结果。

另一个例子如图 2.31 所示。这个桁架承受均匀载荷，根据剪力图(见图 2.31b)看出，对于桁架如图 2.31a 所示的排列，可发现对角杆均受拉，而垂直的杆均受压。而对于桁架如图 2.31c 所示的排列，情况恰好相反。对一个钢质桁架来说，如图 2.31a 的排列相对较好，因为短垂直杆比那些长对角杆能更有效地承受压力，这些长对角杆由于受压容易产生屈曲。

图　2.30

另一方面，对于木质桁架，没有必要考虑因受压产生的屈曲问题，尤其是在铅垂杆使用钢杆的情况下，如图 2.31c 所示的网状排列是较完美的。

图　2.31

习题

1. 如图 2.26 所示，用截面法求解杆 2、5、8 的轴力。假定 $P=10000\text{lbf}$，$a=9\text{ft}$，$h=12\text{ft}$。
2. 用截面法求解桁架 1、2、3 杆中的轴力，如图 2.32 所示。
3. 作图 2.32 中桁架的弯矩图和剪力图。并区分桁架中各杆是受拉还是受压。
4. 如图 2.33 所示，证明自由体第 n 根杆的轴力为 $S_n=-[(n-1)/2]P$。
5. 借助弯矩图和剪力图，区分桁架桥中各杆是受拉还是受压。载荷如图 2.34 所示。

图　2.32

图　2.33

图　2.34

2.6 组合桁架

前面的各节只研究了按本书2.1节的规则组成的简单桁架。另一类平面桁架，由两个或两个以上的简单桁架，按照平面内刚体被完整约束的要求组合而成的桁架，称为组合桁架。例如图2.35所示的桁架，就属于组合桁架。在图2.35a中，两个简单桁架 ADC 与 CEB（图中阴影部分）通过铰链 C 和链杆 DE 连接。而在图2.35b中，两个全等的简单桁架通过三根链杆连接，这三根链杆的轴线不平行也不相交。虽然这两个简单桁架连接成的结构总是几何不变的静定系统，但只用结点法却不能完全分析求解。

例如，图2.36a所示的组合桁架。该桁架由两个简单桁架通过铰链 C 与链杆 DE 连接。在分析这个桁架时，首先要确定作用在支座 A 与 B 处的外支反力，如图2.36b所示。通过结点法，很容易求得杆1、2、3、4的轴力。但是此后，无法再用结点法进一步求解，因为没有一个结点上的未知力少于三个。因此，结点法不再有助于分析阴影部分 $DFCGE$（见图2.36b）的受力情况。为了进一步求解，必须借助于截面法。作截面 mn，考虑截面右半部分桁架的平衡，取 C 点为矩心，得到平衡方程

图 2.35

图 2.36

$$\left(P\sec\alpha+\frac{3}{2}P\right)3a\cos\alpha-Pa\cos\alpha-2Pa\cos\alpha-S_5h=0$$

可解出 $S_5=+(3Pa/h)\left(1+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)$。求得 S_5 后，便可以毫无困难地用结点法完全分析该桁架。

如果建立如图2.37a所示载荷作用下桁架的Maxwell图，就会遇到与上述问题相同的困难。一旦完全建立了如图2.37c所示的粗实线部分，就不能再用常规方法完成可易图形了。因此，为了进一步求解，做截面 mn 如图所示，并作截面右半部分桁架的力多边形 $efghi5e$。

这个力多边形用虚线表示，其建立过程如图 2.28 所示，并且确定了可易图形中的顶点 5。顶点 5 建立后，用细实线表示可易图形其余部分，就可以按照常规方法毫无困难地建立力多边形了。

如图 2.38a 所示的组合桁架，每一个结点上连接的链杆都不少于三个，因此这种情况下，开始时不能用结点法求解。同时又发现一开始也不能用截面法求解，因为无法作出一个截面只截出三根不交于一点的链杆。但是，如果注意到此结构是由两个基本三角形 *AEF* 与 *BCD* 组成，且这两个三角形分别由既不平行也不相交的三根链杆组成，问题就解决了。在求得 *A* 和 *B* 处的支反力之后，可取隔离体三角形 *BCD* 分析，如图 2.38b 所示。这样，就得到一个静定的共面平衡力系，代入方程式(1.2)分析，就可轻松求得三个未知力 S_1、S_2 和 S_3。一旦已知这几个力后，我们就可以用结点法分析其余各杆的受力情况了。

图　2.37

图　2.38

与上述方法不同，还有另一种构造组合桁架的方法，如图 2.39 所示。也就是用单个链杆集结而成的几个简单桁架(阴影部分)，是按照各杆组合为简单桁架的规则连接而成的。显然，任何杆和简单桁架的布置一定组成一个几何不变的静定系统。但是，这样的组合桁架需要用特殊的分析方法。我们已经看到图 2.35 所示的组合桁架不能只用结点法来分析，必须要借助于截面法。类似地，图 2.39 所示的组合桁架，即使将结点法与截面法结合起来也难以充分求解。现在我们考虑应用一种通用的分析方法，它适用于各种情况。

图　2.39

如图 2.39 所示，不难发现此系统中简单桁架的各单元有两个作用。一方面，它们在主桁架中作为单个的杆件，另一方面，它们同时作为副桁架将自身受到的力传给两端的结点。将这两个作用单独考虑，就可以轻松地对系统进行完全分析了。如图 2.40a 所示，假定 *ADE* 是桁架的一部分，它包含副桁架 *CE*，在进行系统分析时，可首先用假想的杆 *CE* 代替副桁架，作用在副桁架上的力 P_1、P_2、…用作用在点 *C* 和点 *E* 的两个静定等效平行力 R_1、R_2 代替，如图 2.40b[⊖] 所示。这种代替，并没有影响副桁架外的任何杆件。因此，这样就可以用以前讨论过的任何方法来继续进行主要桁架的分析了，由此可以得到假想杆的轴力 *S*。对于图 2.40b 的研究可知，作用在铰链 *C* 和铰链 *E* 上的力必须完全代表副桁架作用在桁架其他部分的力。那么，将这些力反作用在副桁架上，就得到如图 2.40c 所示的副桁架的受力。然后，就可以对该系统进行完全分析了。如果在主桁架中有其他副桁架，同理求解。

图 2.40

前述过程的具体应用举例，如图 2.41a 所示。现有一屋顶桁架，它的上弦杆中含有副桁架。首先用静定等效系统代替承载的实际系统，如图 2.41b 所示。这样就可以将副桁架简单地看成单个杆，使结构简化。作系统的 Maxwell 图，将所有主结构的轴向力都按比例大小表示出来，如图 2.41c 所示。然后研究副桁架。以 *AF* 结构为典型例子，外力被分解为两个平衡系统：①载荷 *P* 与两个作用在点 *A* 和点 *F* 的垂直反力；②两个大小相等、方向相反的共线力 S_1，由如图 2.41c 所示的 Maxwell 图确定。在后一种系统作用下，只有上弦杆主动承受力，从图 2.41c 可知上弦杆的轴力。因此，副桁架上其余杆的分析，忽略 S_1 力，只作垂直载荷的 Maxwell 图，如图 2.41e 所示。为了得到组合桁架上任何一根杆上总的受力(见图 2.41a)，我们只需将两个独立的 Maxwell 图的结果简单叠加就可以了。

以上介绍的组合桁架的分析求解方法，有时甚至在不是严格必要的情况下也是有用的。例如图 2.42a 所示桁架，尽管这种情况用该方法分析不必要，但是副桁架的概念却可以有效利用。基于此原因，可以把桁架 *ABC* 作为基本桁架，载荷如图 2.42b 所示。然后，把 *ADE* 与 *BFD* 副桁架叠加到基本结构上，载荷作用如图 2.42c 所示，接着把这两个副桁架看作主桁架，如图 2.42d 所示的主桁架 *ADE*。在主桁架 *ADE* 上有两个更小的桁架，如图 2.42e 所示。最后，我们对图 2.42b、d、e 中的每一个桁架都作简单分析，然后把结果进行叠加，就得到了图 2.42a 中组合桁架的完整分析。

⊖ 任何平面力系总能分解为在作用面内的两个给定点上的两平行部分。

图　2.41

图　2.42

习题

1. 做如图 2.43 所示的组合桁架的完整分析，三角形 *ABC* 和 *DEF* 为等边三角形。
2. 做如图 2.44 所示的组合桁架的完整分析，*ABCDEFGH* 是规则的十二边形的一部分。
3. 做如图 2.45 所示的组合桁架的完整分析，假定 $P=10\text{kip}$。

4. 做如图 2.46a 所示的组合桁架的完整分析，并同图 2.46b 进行比较。

5. 做如图 2.46b 所示的组合桁架的完整分析，并同图 2.46a 进行比较。

图 2.43

图 2.44

图 2.45

图 2.46

2.7 平面桁架的一般理论

现在来研究如何将平面杆系组合成为刚性桁架的一般理论。在本章的 2.1 节中，我们已经知道了用两种方法来解决这类问题。一种方法是，首先将三根杆的两端用铰链连接，形成基本三角形。然后，每增加一个结点，增加两根杆。由此，可得到一个简单桁架（见图 2.3a），杆的数目 m 和结点数目 j 间的关系总满足

$$m = 2j - 3 \tag{2.2a}$$

当然，这种桁架的刚度是对其基础完全独立的。另一种方法是，首先从基础开始，然后在两个相交杆上建立一个结点，如图 2.3b 所示。用这种方法得到的简单桁架，其刚度取决于与基础相连的结点，其杆的数目 m 和结点数目 j 之间的关系式如下

$$m = 2j \tag{2.2b}$$

由本章 2.2 节，可以看出满足第一种条件的任何简单桁架，要满足在一个平面内完整约束的条件，需要增加三根杆或等同于三根杆的情况。然而对于满足第二种条件的任何简单桁架来说，约束已经是完整约束了。因此，无论哪种情况，最终都得到相同的结论：即在一个平面上要满足 j 个销钉的完整约束，必须用 $m=2j$ 个杆或等同的约束将它们与基础相连。

满足前述一般几何不变性条件的许多平面桁架，可以通过用简单桁架中各杆不同的重新排列组合得到。用这种方法，杆的总数和结点总数都不会改变。如图 2.47a 所示的简单桁架，由于组成这个系统的两个简单桁架是由三根既不平行也不相交于同一点的杆连接而成，我们推出，用杆 BH 代替杆 CF，可以得到一个几何不变的桁架，如图 2.47b 所示。关于这个替换，既没有改变杆的总数也没有改变结点总数，但是将一个简单桁架变成了一个组合桁架。

第二个例子，考虑如图 2.48a 所示的简单桁架。用杆 AD 代替杆 CG，得到如图 2.48b 所示桁架。此桁架中杆的排列组合和外力约束仍然满足关系式 $m=2j$，但是它既不符合简单桁架的定义也不符合组合桁架的定义，这样的系统叫做复杂桁架。

图　2.47

图　2.48

不能根据以前的讨论毫无选择地用 $2j$ 个杆连接 j 个结点，从而期望得到一个几何不变系统。条件 $m=2j$ 并不是判断其几何不变的唯一标准。下面再考虑如图 2.47a 所示的简单桁架。如果去掉桁架中间对角杆 FC，就破坏了系统的几何不变性，并引入了两个几何不变的阴影部分有相对位移的可能性。如图 2.47b 所示的杆 BH 阻止了这种变形，因此可以合理地代替杆 FC。实际上，我们已经注意到，现在得到了一个复杂桁架。在另一方面，如果在桁架末端用第二对角杆 CH 代替杆 FC，如图 2.47c 所示，就不能恢复桁架的几何不变性，两个阴影部分之间的相对位移仍旧存在。于是尽管满足 $m=2j$ 的条件，如图 2.47c 所示，但它不是几何不变系统。因此，可以得出结论：必须修改前面的几何不变准则。对于 j 个结点的桁架和基础在同一个平面内的保持几何不变性的相互连接，$2j$ 个杆是必要条件，只有合理布置时，才是充分必要条件。

现在，来考虑关系式 $m=2j$ 更深层的含义。如图 2.49 所示，我们选择任意一个受完整约束的平面桁架（简单桁架、组合桁架、或者复杂桁架），该桁架由 m 个杆和 j 个结点组成，并且载荷只作用在其平面内的结点上。然后，为了对桁架做完整分析，必须确定 m 个杆的轴力。用一对大小相等、方向相反、施加在杆端销钉上的力代替每一个杆，可得到 j 个共面汇交力系，每一个汇交力系存在两个平衡条件[见方程式(1.1)]。因此，我们就得到 $2j$ 个包含 m 个未知轴力的方程；由此可知，如果 $m=2j$，那么未知量数目和静定方程数目是相同，于是除了以后将考虑的特殊情况外，这些方程都有确定解。基于这个原因，任何受完整约束满足条件 $m=2j$ 的平面桁架，是静定桁架。也就是说，杆的轴力可以只由静定方程确定，没有必要考虑系统的弹性变形条件。例如图 2.50a 所示系统，其中 $m=2j$。在载荷 P 作用下，杆 AC 和 AD 是不动的，只是 BC 和 BD 分别承受拉力和压力，其大小可以由铰链 B 的静定方程得到。由于这些内力，BC 将会有轻微延伸，BD 将会缩短；结点 B 会向右下方移动，结点 A 保持静止。因此，加载荷后，距离 AB 会比以前加大，但是系统微小的弹性变形不会影响其内力，可以忽略不计。

图 2.49

如果 $m>2j$，未知量数目就会超过独立的静定方程数目，这些方程就不满足唯一解条件，这种桁架称作超静定桁架。这种情况如图 2.50b 所示，除去附加杆 AB，图 2.50b 与图 2.50a 一样。这种情况下，由于 AB 杆的存在，结点 B 相对于 A 点不能移动，而前一种情况的杆 AB 没有拉紧，于是导致结点 A 有一些移动。因此，P 的部分载荷会传递到结点 A，杆 AC 和 AD 也会移动。载荷 P 在 B 和 A 之间的分配关系取决于各杆的相对刚度。例如，如果杆 AB 比其他四个杆容易变形，B 将会承受大部分的载荷；考虑极限情况，AB 无刚度，B 承受所有载荷，如图 2.50a 所示。另一方面，如果 AB 刚度相对很大，其长度不变，A 和 B 将会移动相同的距离，因此，载荷会被这两个结点平分。由此我们知道，当桁架是超静定桁架时（$m>2j$），内力的分配取决于系统的弹性变形条件，分析桁架时必须考虑变形条件。

如果 $m<2j$（见图 2.50c），系统为几何可变的并且只有在特定的外载荷下才能平衡。也就是说，静定方程数目大于未知轴力数目，根据这些等式可以算出未知量。另外，也增加了外载荷系统一定的限制条件。如图 2.50c 所示，系统在铅垂载荷作用下保持平衡状态，但是，任意横向载荷将会引起框架倒塌。

图 2.50

构造平面桁架的众多规则已经讨论过了，还有一种可能需要讨论——临界状态。例如，桁架的特定结构是几何可变的，然而邻近的结构是几何不变的。有时这些临界状态是不证自明的，有时它们需要证明。第一个例子，考虑简单桁架的临界状态，如图 2.51 所示。桁架(a)和(c)的结构是完全几何不变的，但是位于它们之间的就是临界状态的可能形式(b)。此时，杆 CE 和 DE 是共线的，结点 E 相对于其他结点的移动是由各杆长的微小的变化或者铰链的轻微作用产生的。简而言之，这样的桁架不完全是几何不变的。同样，如图 2.52a 所示的组合桁架，当杆 1、2 和 3 平行时(见图 2.52b)或相交于一点(见图 2.52c)时有临界状态。这后面的两种情况，在两个阴影部分之间有一个限制相对横向平移的自由度。当然，这种情况下的组合桁架的临界状态，完全类似于如图 2.10 所示的不完全几何不变的简支系统。

图　2.51

图　2.52

临界状态的另一个特征是桁架总是超静定的，尽管它满足条件 $m=2j$。思考如图 2.51b 所示简单桁架的临界状态。承受载荷如图 2.53a，此系统类似图 2.50b 的桁架，可由此推出其为超静定桁架。也就是说，被传递到 CD 的 P 的一部分载荷的大小依赖于各杆的相对弹性变形(CD 杆的作用等同于一根杆)。当桁架承受如图 2.53b 所示的载荷时，把铰链 E 看作自由体，为了与外力 P 的铅垂分力平衡，我们看到，杆 CE 和 DE 必须承受无限大的拉力；当然，这是完全不可能的。实际上，由于载荷 P 的作用，系统的所有杆件都有轻微变形，假定允许铰链 E 在一个更低的位置，CE 和 DE 足够倾斜，从而用有限的拉力与载荷 P 平衡。但是，这些伸长和系统平衡的几何组成取决于杆的弹性变形，在分析桁架时，这些变形一定要考虑。因此，桁架是超静定的。

复杂桁架在许多普遍情况下，不是经常能出现临界状态的。例如，如图 2.54b 所示的复杂桁架，有临界状态，然而图 2.54a 所示桁架则没有。这种情况下，检验桁架临界状态的一个普遍方法是考虑当有 j 个结点时，系统的 $2j$ 个平衡方程组成的行列式。如果这个行列式不为零，方程则有惟一解，即在每一个结点上，有且只有一组轴力的值满足平衡条件，且桁架为几何不变和静定的。另一方面，如果行列式为零，则平衡方程的解不惟一，这是桁架有临

图　2.53

图　2.54

界状态的一种迹象。在此，推荐一种判断桁架是否有临界状态的方便方法——零载荷测试法。当桁架不承受载荷时，立刻发现：通过假定所有杆都是固定不动的，在每一个结点上可以得到满足平衡条件的一组可能解，例如零轴力的情况。因此，如果在相同的载荷条件下，可发现不等于零，但在每一个结点也满足平衡条件的另一组值，这样就可以知道桁架有临界状态。

例如，如图 2.51b 所示桁架。在结点上不受外力，我们假定杆 CE、DE 受相同的拉力 S。那么，杆 AC、BD 和 AB 均受相同拉力 S，每个对角杆均受相同压力$\sqrt{2}S$，于是所有结点的平衡条件都满足。因此，在零载荷作用下，杆上所受的力不为零，这就表明桁架有临界状态。因为前面提到的行列式只取决于桁架的几何组成，与载荷的作用无关，所以可以推出：桁架的临界状态是超静定的且与其所承受的载荷无关。

习题

1. 如图 2.55 所示的平面桁架有一个多余杆；也就是，$m=2j-3+1$。如果移走 BE，我们得到简单桁架。如果移走 AB 我们得到什么桁架？那么移走 CD、BD…每一根杆呢？
2. 用零载荷测试法，证明图 2.48b 所示的复杂桁架是静定桁架。
3. 用零载荷法测试图 2.52 所示的组合桁架的临界状态。
4. 对图 2.54 所示的每一个复杂桁架应用零载荷测试法，并且证明(b)有临界状态，而(a)没有。

图 2.55

2.8 复杂桁架：亨尼勃格(Henneberg)方法

在前面的各节中，已经通过结点法和截面法对简单桁架及组合桁架进行了分析。这两种方法对于桁架的分析是非常有用的，可以应用于大多数实际情况下。但是，对于一个复杂桁架，这些基本的分析方法并不能直接应用。当然，在这种情况下，总可以对系统的 j 个结点列 $2j$ 个平衡方程式，然后求解，但是这种方法通常是非常不实用的。Henneberg 第一个提出了分析复杂桁架的有效方法，下面我们来解释 Henneberg 方法。

举一个具体的例子，如图 2.56a 所示，研究受外载荷作用有铰支约束的复杂桁架问题。我们马上看出 A 点和 B 点的约束反力可以求出，但是以后不管用结点法还是截面法都无法对其作进一步分析。然面可以观察到，如果用 BE 杆去代替 AD 杆，就得到一个如图 2.56b 所示的简单桁架。在给定载荷条件下，可以用结点法对这种简单桁架进行完整的受力分析。那么可以假定，这个与已知复杂桁架一致的简单桁架，可对其在两种特殊受载情况下进行完整分析。这两种特殊载荷是：①与已知复杂桁架相同的外载荷(见图 2.56b)；②作用在 A 点和 D 点上的两个大小相等、方向相反的单位载荷(见图 2.56c)。定义 S'_i 为简单桁架在第一种载荷作用下任意杆的轴力(见图 2.56b)，s'_i 为简单桁架在第二种载荷作用下任意杆的轴力(见图 2.56c)。在第二种情况下，如果让 X 的大小代替单位力，显面易见，任意杆件的轴力都很自然的用 s'_iX 代替了 s'_i。最后通过将这两种情况进行叠加，载荷形式如图 2.56d 所示，我们可以得出结论，在桁架中任意杆件的轴力为

$$S_i = S'_i + s'_iX \tag{a}$$

并且对替代杆 BE 应用下标 a，将有

$$S_a = S'_a + s'_a X \tag{b}$$

图　2.56

现在，如果选择 X 的大小使式(b)中 S_a 为 0，则替代杆 BE 失去作用可以被移走。那么，除 AD 杆对于系统其余部分的作用力被力 X 替代以外，图 2.56d 所示的桁架与给定桁架(见图 2.56a)相同。因此可以得出，在式(b)中使 S_a 等于 0 的力 X 的值代表了在杆 AD 中的真实轴力，依此方法，可写出

$$S'_a + s'_a X = 0 \tag{c}$$

得到

$$X = -\frac{S'_a}{s'_a} \tag{d}$$

代入式(d)中 X 的数值，则给定复杂桁架中任何其他杆件的轴力均可通过式(a)求解。

应用相同的过程，我们分析图 2.57a 所示的复杂桁架。这里，为了得到一个简单桁架，有必要用假想的杆 GC 和 HD 分别替换杆 AH 和 BG，如图 2.57b 所示。考虑到这个简单桁架受到三种外载荷情况，如图 2.57b、c、d 所示，很容易利用结点法求出桁架中每根杆件的相应轴力 S'_i、s'_i 和 s''_i。然后用 X 和 Y 分别表示给定复杂桁架中杆 AH 和杆 BG 所受的未知轴力，并且应用叠加原理，就可以得到假想桁架在图 2.57e 所示载荷作用下任意杆的轴力，有

$$S_i = S'_i + s'_i X + s''_i Y \tag{e}$$

图　2.57

分别使用下标 a 和 b 对假想杆 GC 和 HD 加以标示，有

$$S_a = S'_a + s'_a X + s''_a Y$$
$$S_b = S'_b + s'_b X + s''_b Y \tag{f}$$

如前述方法，为了实现给定复杂系统的情况，应用叠加原理，令 S_a 和 S_b 的值等于 0，可得

$$X = \frac{s''_b S'_a - s''_a S'_b}{s'_b s''_a - s'_a s''_b}$$
$$Y = \frac{s'_b S'_a - s'_a S'_b}{s'_a s''_b - s'_b s''_a} \tag{g}$$

只要从方程(g)中求出 X 和 Y 的值，就可从方程 (e)中求出复杂桁架任意杆的轴力。

我们发现，当表达式(d)或者表达式(g)中的分母为 0 时，复杂桁架处于临界状态。当然，这表明这个系统是超静定系统。

作为 Henneberg 方法的具体应用，现在讨论一下如何对图 2.58a 所示复杂桁架进行全面分析。假设 $P = 1000\text{lbf}$，$a = 5\text{ft}$，$h = 9\text{ft}$。首先从相应的简单桁架开始，并做完全分析：①如图 2.58b 所示荷载；②如图 2.58c 所示，沿 AD 作用线有单位载荷。应用结点法对上述情况加以分析，结果分别列在表 2.1 的第二列和第三列中。

图 2.58

表 2.1

杆 (1)	S'_i (2)	s'_i (3)	$s'_i X$ (4)	S_i (5)
1	−500	−0.574	−546	−1046
2	0	−0.749	−714	−714
3	+455	+0.522	+498	+953
4	−391	−0.488	−427	−818
5	0	−0.749	−714	−714
6	+1000	−0.191	−182	+818
7	0	−0.858	−818	−818
8	0	−1.098	−1046	−1046
a	−872	+0.915	+872	0

应用表 2.1 中 S'_i 和 s'_i 的数值，代入式(d)得到

$$X = -\frac{-872}{+0.915}\text{lb} = +953\text{lb}$$

获得 X 值后，将其填入表的第四列。那么，从方程(a)就可计算出已知桁架中各个杆件的轴力，并将其写入第五列。可以注意到，假想杆 a 的受力为 0，这是对计算结果的一个不完全检验。在这种特殊情况下，可以通过观察在第五列中的结果是否满足图 2.58a 中的对称性条件，从而获得进一步检验。

习题

1. 有铰支座并受外载的复杂桁架如图 2.59 所示，求桁架各杆件的轴力。每一个斜杆与水平线夹角均为 30°。
2. 应用 Henneberg 方法，对受铰支约束并有外载作用的复杂桁架进行全面分析，如图 2.60 所示。(提示：只有桁架的 $CDEF$ 部分为复杂桁架形式)
3. 用 Maxwell 图和 Henneberg 方法，对受铰支约束并有外载荷作用的每一个复杂桁架进行全面分析，如图 2.61 所示。
4. 如图 2.62 所示，对受铰支约束并有外载荷作用的复杂桁架进行全面分析。移走 x 杆并用虚线表示的 a 杆代替，将该复杂桁架简化为简单桁架。
5. 如图 2.63 所示，对受铰支约束并有外载荷作用的格构桁架进行全面分析。所有的对角斜杆与水平线夹角均为 45°，每一个小格子为正方形。
   (提示：将桁架降为简单桁架，有必要移走 x 杆和 y 杆，增加 a 杆和 b 杆。)

图　2.59

图　2.60

图　2.61

图　2.62

图 2.63

2.9 虚位移法

在多数情况下，应用1.10节中介绍的虚位移原理分析静定桁架独具优势。为利用虚位移方法求解桁架给定杆的轴力，可以想象移走某杆件，用两个大小相等且方向相反的力 S 取代它，作用在剩余的桁架上。这样，就可以用虚位移法求解只有一个自由度的几何可变系统了。

第一个例子，如图2.64a所示简单桁架，求 AD 杆的轴力。用作用在点 A 与点 D 上的共线力 S 取代杆件，可以得到只有一个自由度的几何可变系统，如图2.64b所示。定义桁架上部微小的水平位移 δ 为系统的虚位移。由图2.64b可知，在虚位移下，每一个实载荷 P_1、P_2、P_3…作功为 $P_i\delta$，作用在 D 上的力 S 作功为 $-S\delta\cos\alpha$。作用在点 A 的力 S 没有作功，因为点 A 无位移。因此，系统的虚功方程为

$$(P_1+P_2+P_3)\delta - S\delta\cos\alpha = 0 \tag{a}$$

得到 $S=(P_1+P_2+P_3)\sec\alpha$。

可用相同的方法求竖直杆 FD 的轴力。用作用在点 D 与点 F 的共线力 S 代替杆件作用，得到几何可变系统，如图2.64c所示。定义桁架上半部的微小转角 $\delta\theta$ 为系统的虚位移。相应地 G 点、E 点和 F 点的虚位移分别为 $2h\delta\theta$、$h\delta\theta$ 和 $a\delta\theta$，虚功方程为

$$P_1 2h\delta\theta + P_2 h\delta\theta + Sa\delta\theta = 0 \tag{b}$$

得到 $S=-(h/a)(2P_1+P_2)$。

图 2.64

从前面的例子中，我们看到：通常情况下，用虚功原理求解桁架任意杆件的虚位移时，必须确定所有主动力作用点上的虚位移。如果在桁架的几乎每一个结点上都有力，那么求解所有必须的虚位移的计算量应当加以考虑。这种情况下，在1.10节中讨论的位移图有益于

分析虚位移。

虽然虚功原理在分析简单桁架与组合桁架时不显其优越性，但它通常在分析解决复杂桁架时得天独厚。举例说明，如图 2.65a 所示的复杂桁架。如果可以成功地运用虚功原理求得某杆的轴力后，桁架剩余部分的分析用结点法便迎刃而解。在这里，选择杆 FC 分析，用作用在 F 点和 C 点的共线力 S 代替杆件，得到几何可变系统，如图 2.65b 所示。系统的虚位移图如图 2.65c 所示(虚位移图的建立参见 1.10 节)。在相应的力 S、P_1、P_2(见图 2.65b)上应用虚位移$\overline{oe}$、$\overline{oc}$、$\overline{od}$，或是它们的投影 c、a、b(见图 2.65c)，列出虚功方程

$$Sc - P_1 a - P_2 b = 0$$

得到

$$S = \frac{P_1 a + P_2 b}{c}$$

当然，虚位移图必须按比例建立，并且 a、b、c 的距离是从图中量出的。

a)　　b)　　c)

图　2.65

除了如图 2.65c 所示的虚位移图法，还有另一种几何方法来确定去除某杆件后的桁架铰链一系列的可能位移。为说明这种方法，下面首先分析图 2.66 所示的简单例子。这里，有几何不变 $\triangle ABC$ 由两链杆铰支，以至系统有一个自由度。系统的虚位移可用绕瞬心 O 旋转的微小角位移 $\delta\theta$ 表示，铰链 A、B、C 相应的线位移用$\overline{AA_1}$、$\overline{BB_1}$和$\overline{CC_1}$表示，它们分别与半径 OA、OB 和 OC 成比例且垂直于半径。如果每一个位移向量顺时针旋转 90°，在相应的半径上就得到点 A'、B'和 C'。由于 AA': BB': $CC' = OA$: OB: OC，且 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相应边平行，所以 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似。这一结论适用于所有单自由度刚性平面图形的虚位移分析。与上述过程相反，得到这样一个结论：通过假定一个结点的虚位移，然后建立如图 2.66 所示$\triangle A'B'C'$一样的相似形，可以得到任一单自由度刚性平面系统结点的相应虚位移。

图　2.66

例如，如图 2.64 所示简单桁架。假定铅垂杆件 BD 被移走，如图 2.67a 所示，这时桁架绕铰链 A 旋转，定义在铰链 D 上，垂直于 AD 的任意线位移 δs_d 为系统的虚位移。将虚位移向量顺时针旋转 90°，在线 AD 上得到点 D'。现在，其他各结点相应位移很容易通过建立 $AD'C'F'E'H'G'$图，使图上各边分别平行于给定桁架得到。这样，GG'表示 G 点位移大小，HH'表示 H 点位移大小，等等。如果桁架的 AD 杆被移走(见图 2.67b)，系统的虚位移定义

为 D 点任意水平位移 δs_d，如前所述，我们得到图示相似图形 $ABC'D'E'F'G'H'$。

前面的方法也适用于求解复杂桁架的情况。例如，如图 2.65b 所示桁架，我们定义系统的虚位移为图 2.68 上 AB 杆向右旋转的任意线位移 δs_b，将虚位移向量旋转 90°，在 AB 杆上得到 B'点。在刚性杆 BE 上，E 点的相应虚位移定义为 EE'，EE'是通过画平行于 BE 的双点划线 $B'E'$得到的。有了相应于 B 点假设位移的 E 点位移，便可得到相应的 D 点位移，定义为 DD'。DD'可以通过画 $E'D'$平行于刚性杆 ED 得到。最后，C 点的位移，表示为 CC'，通过分别画平行于 BC 和 DC 的平行线 $B'C'$和 $D'C'$得到。

图 2.67

图 2.68

得到桁架上所有结点的虚位移后，那么未知力 S 可通过如前所述系统的虚功方程求得。这时，所有图上的虚位移都在原来真实方向上旋转了 90°。作用在各结点上力的相应虚功，通过分别求 E'、D'、C'的力矩得到。例如，力 P_1 在 E 点的真实位移上所做的虚功等于 P_1 对 E'点的力矩，等等。用这个结论，可以得到求 S 的方程

$$-\sum P_i d_i + Sd = 0 \tag{c}$$

得到

$$S = \frac{\sum P_i d_i}{d} \tag{d}$$

在这里需要指明的是，如果所有的距离，比如 BB'、EE'、…等等，以相同的比例减小和增大，那么式(d)中 S 值不会改变。因此，对于任意图形 $AB'C'D'E'F'$中的各边分别平行于图形 $ABCDEF$ 各边的情况都可以用上面的式(c)。

如图 2.68 所示例子，几何法对于分析复杂桁架的临界状态是非常有用的。参考式(d)，发现图 2.68 中的桁架，如果距离 d 为 0，也就是线 FC'和 FC 重合，只有一种超静定形式。可以归纳总结如下：如果移走桁架中的任意杆，图形如 $AB'C'D'E'F'$(见图 2.68)所示，定义了剩余系统相应各结点的虚位移，其所有边(包括被移杆)平行于已知给定图形，那么这桁架有临界状态，是超静定的。图 2.69 中给出了两个实例。

图 2.69

习第

1. 用虚位移方法，求复杂桁架中 x 杆的轴力 S_x，支撑和载荷如图 2.70 所示。
2. 用虚位移方法，证明复杂桁架如图 2.54a 所示是完全几何不变的，然而如图 2.54b 中的桁架不是完全几何不变的。
3. 检验如图 2.71 所示每一个复杂桁架是几何不变的，并指出其中有临界状态的桁架。
4. 研究如图 2.72 所示格栅桁架，证明该桁架有一种临界状态。
5. 证明如图 2.54a 所示的静定复杂桁架，如果在中心处引入一个铰链，将变为超静定桁架。

图　2.70

图　2.71

图　2.72

第3章

影 响 线

3.1 移动载荷和影响线

一般的工程结构特别是桥梁经常要承受各种移动载荷的作用，如火车、汽车等。为了区别于如结构自重这类恒载荷，我们将这一类可移动载荷称为活载荷。一般来说，恒载荷的大小和作用位置不变化，而活载荷，尽管大小保持不变，但可以作用在结构的不同位置上。关于活载荷，最常见的一个例子是铁路桥梁的设计，要考虑火车通过轮子传递的载荷。图 3.1 表示的是一个 213t 的机车牵引一列每英尺 3t 的均匀重量的列车通过桥梁，这个特殊的载荷体系称为标准列车载荷或 Cooper's E-60 载荷。车轮按照从左到右的顺序进行编号，其轮距如图 3.1 所示。轮距始终保持固定不变，这样整个载荷系统就可以作为整体移动。轮正上方的数字代表集中载荷，单位 kip/rail(千磅力/轨)或 tf/track(吨力/车)[⊖]。

图 3.1

下面所示表格是 Cooper's E-60 载荷弯矩表，表中包含有上述标准列车的相关数据。除了图 3.1 给出的信息外，弯矩表的前两行表示从列车体系中某一端起到各个轮间的距离；第三、四行表示从一端起到指定轮间载荷的逐次求和，其中包括指定轮的载荷；第五行给出轮①之后到指定轮的所有载荷(其中包含指定轮本身的载荷)对轮①为矩心的力矩和。这样，轮①后的所有载荷，一直到轮⑧(包含轮⑧)对轮①所求力矩和，其值为 4040kip · ft。表中其余行表示任意指定轮和此轮之前的任意一个载荷对指定轮所求力矩和。例如，轮③、…、⑮对以轮⑮为矩心所求力矩和为 12500kip · ft。我们沿着轮⑮垂直向下到达表的底部，然后水平向左移至轮③下方，在表中找到所得数值 12500。对于弯矩表的使用我们将在以后的讨论中举例说明。

⊖ tons/track 改为 tf/track(吨力/车)。

弯 矩 表

	15 ∠1	30 2	30 3	30 4	30 5	19.5 6	19.5 7	19.5 8	19.5 9	15 ∠10	30 11	30 12	30 13	30 14	19.5 15	19.5 16	19.5 17	19.5 18
	8′	5′	5′	5′	9′	5′	6′	5′	8′	8′	5′	5′	5′	9′	5′	6′	5′	5′
轮距	0	8	13	18	23	32	37	43	48	56	64	69	74	79	88	93	99	104
	109	101	96	91	86	77	72	66	61	53	45	40	35	30	21	16	10	5
载荷	15	45	75	105	135	154.5	174	193.5	213	228	258	288	318	348	367.5	387	406.5	426
	426	411	381	351	321	291	271.5	252	232.5	213	198	168	138	108	78	58.5	39	19.5
力矩	0	240	630	1,170	1,860	2,485	3,205	4,040	4,980	5,820	7,740	9,810	12,030	14,400	16,100	17,930	19,850	21,900
	24,550	22,900	19,900	17,000	14,270	11,700	10,190	8,790	7,500	6,310	5,510	4,160	2,965	1,915	1,015	605	292.5	97.5
	22,400	20,850	17,980	15,250	12,670	10,240	8,830	7,530	6,340	5,240	4,520	3,325	2,275	1,375	624	312	97.5	
	20,400	18,900	16,170	13,600	11,150	8,880	7,570	6,360	5,270	4,280	3,630	2,580	1,680	932	332	117		
	18,050	16,650	14,120	11,720	9,470	7,370	6,180	5,090	4,110	3,230	2,680	1,808	1,088	518	97.5			
	16,220	14,900	12,500	10,250	8,150	6,200	5,110	4,120	3,240	2,460	1,980	1,260	690	270				
	13,100	11,900	9,780	7,800	5,970	4,290	3,370	2,550	1,850	1,245	900	450	150					
	11,500	10,400	8,410	6,580	4,900	3,370	2,555	1,830	1,227	720	450	150						
	10,060	9,030	7,200	5,520	3,990	2,605	1,885	1,262	755	345	150							
	8,770	7,810	6,130	4,600	3,220	1,992	1,368	842	432	120								
	6,950	6,110	4,670	3,380	2,240	1,248	780	410	156									
	5,240	4,520	3,325	2,275	1,375	624	312	97.5										
	4,280	3,630	2,580	1,680	932	332	117											
	3,230	2,680	1,808	1,088	518	97.5												
	2,460	1,980	1,260	690	270													
	1,245	900	450	150														
	720	450	150															
	345	150																
	120																	

3,000lb/ft

载荷 Cooper's E-60

两个 213-t 发动机

在每轨上的弯矩是 ft-kip 或者每车上的弯矩是 ft-ton

在每轨上的载荷是 kip 或者每车上的载荷是 tf

比例 1″=20′

在活载荷作用下，结构的分析要注意两个主要问题，而这两个问题在恒载荷作用下不会遇到。第一，动载荷对于结构有动态效应，容易发生共振、震荡或其他负面效应；第二，即使是动载荷作用下的纯静态效应，也会随着载荷位置的变化而变化。为了实现最大应力，有必要考虑结构中移动载荷的位置。在这里考虑的只是第二个问题[⊖]。

有时通过观察我们就能够判断出载荷的最不利位置。另外的一些情况下，必须借助于数学上的极大值准则和反复试验来得出结果。然而，如果利用影响线，这些问题就会大大简化。影响线利用图形表示结构上单个移动载荷位置的变化对某些量的影响，如支反力、弯矩、剪力和挠度。例如，图 3.2a 所示的悬臂梁，在这根梁的设计中，应该注意面定端的弯曲应力，因为此处是危险截面。因此，利用 A 点的弯矩随着梁上载荷 P 的位置变化而变化得到的图形，将有助于确定载荷的最不利位置。图形绘制方法如下：首先，使载荷作用在梁上距自由端为 x 的任一位置，那么固定端 A 的弯矩为

$$M_A = -P(l-x)$$

其中与 P 相乘的因子 $-(l-x)$ 称为 M_A 的影响系数。由于 M_A 是 x 的线性函数，可以用直线 ab 表示其图形，如图 3.2b 所示[⊖]。这条直线称为 A 点的弯矩影响线，相应的图形 abo 称为影响图。注意不要混淆了梁的弯矩影响图和弯矩图。弯矩图的竖距表示在面定载荷作用下对应截面处的弯矩值；影响图的竖距表示一个因子，相应作用载荷必须乘以该因子，才得到固定截面上的弯矩。弯矩图的竖距量纲为力×长度，而弯矩影响图的竖距量纲为长度，如图 3.2b 所示。因此，只有乘以载荷 P 才能得到合理的力矩量纲。而图 3.2b 的竖距也可以看成单位载荷作用于某个位置，引起 A 点的弯矩。我们经常使用这种表示方法。

图 3.2

从图 3.2 所示影响图中，很快可以看出要想在 A 点产生最大弯矩，载荷 P 的位置应该作用于产生最大竖距的位置，即梁的自由端，所得 A 点的弯矩为 $-Pl$。在这种特殊的情况下，利用影响图很容易得出这样的结论。但对于更为复杂的体系，会发现利用影响图能够提供更为有利的帮助。例如，对于作用有集中载荷的体系，如图 3.2c 所示，其中 y_1、y_2、y_3 表示载荷系作用于梁上某一位置时影响线的竖距。由简单的静态分析可以得到 A 点对应的弯矩为

$$M_A = (P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3) \tag{a}$$

由于竖距 y_1、y_2、y_3 随着载荷体系的右移而增加，可以看出，在这种情况下将 P_3 作用于梁的自由端时，将得到载荷的最不利位置。利用相应的 y_1、y_2、y_3 的值，可从方程(a)中得到 A 点要求解的最大弯矩。

⊖ 结构上活载荷的动力问题参考第 10 章。

⊖ 如果影响系数为负，我们就取影响线下方的竖距。

如果用 R 表示 P_1、P_2、P_3 的合力，而 y_c 表示相应的影响线的竖距，则

$$Ry_c = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 \tag{b}$$

要证明这一点，只需证明合力对任一点的力矩等于其分力对该点之力矩的代数和。根据以上原理及 y_1、y_2、y_3、y_c 与它们到梁的固定端的距离成比例即可直接得到方程(b)。如果影响线是直线，那么可以用合力来代替载荷系，就像方程式(b)所示。这对于一个受复杂载荷的结构，可以根据以上方法确定最不利位置，例如图 3.1 所示的标准列车载荷。

影响线图也可有效地用于解决均匀分布的活载荷问题。例如当梁的一部分作用有均布载荷 q 时，可以计算悬臂梁固定端的弯矩，如图 3.3a 所示。把这样的载荷看成一系列无穷小的集中载荷 $q\mathrm{d}x$，作用在距离梁的自由端 x 处，利用与上述三个载荷情况相同的推导，可以得出 A 点处总的弯矩为

$$M_A = \int_0^a qy\mathrm{d}x \tag{c}$$

其中 y 是对应 x 坐标的影响线的竖距。由

$$\int_0^a qy\mathrm{d}x = q\int_0^a y\mathrm{d}x = q[\text{area}]_0^a$$

可得到结论：作用有局部均布载荷的梁，A 端的弯矩只需通过相应部分的影响图面积乘以分布载荷的密度 q 就可得到。这是非常有用的。这样仅仅通过观察均布载荷作用的梁的影响图，就能够确切地得到指定截面的最不利弯矩。当然，如图 3.3 所示的例子中，当整个梁上作用均布载荷时，A 点处产生最大负弯矩。

如上所述，我们可以绘制结构上随载荷位置变化而变化的任何量的影响线。作为例子，AB 梁的约束方式如图 3.4a 所示，如果在梁上作用一个图示集中载荷 P，它在拉杆 CD 中引起的拉力为

$$S = P\frac{x}{a}\sec\alpha$$

其中 $(x/a)\sec\alpha$ 是影响系数，乘以载荷 P 得到对应杆的拉力 S，S 是关于 x 的线性函数，相应的影响线如图 3.4b 所示。可以看到当 x 从 0 到 l 变化时，影响系数从 0 变化到 $(l/a)\sec\alpha$。

在前面的两个例子中，影响线恰好为直线，但事实并非都是如此。如图 3.5 所示一个弯

图 3.3

图 3.4

曲刚度为 EI、自由端挠度为 δ 的均匀悬臂梁的影响线。载荷 P 作用在距固定端 x 处，其挠度为

$$\delta = P\left[\frac{x^3}{3EI} + \frac{x^2}{2EI}(l - x)\right]$$

显然影响系数不是 x 的线性函数，因此影响线为图 3.5b 所示曲线。要注意曲线竖距的量纲为长度/力，如 in/lbf(英寸/磅力)。因此，只有与载荷 P 相乘，才能得到挠度 δ 的量纲(长度)。对于小挠度，梁上作用的几个载荷互不影响。我们很快可以得出结论，对于如图 3.5 所示的载荷自由端的挠度为

$$\delta = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 \qquad \text{(d)}$$

其中 y_1、y_2、y_3 分别是对应于载荷 P_1、P_2、P_3 位置的影响线的竖距。这时由于影响线的非线性特征，方程式(b)不再适用。

图 3.5

3.2 梁支座反力的影响线

利用影响线通常有助于确定简单梁的支座反力。例如，对于图 3.6a 所示简支梁，在距简支梁右端 x 处作用一载荷 P，则 A 点和 B 点的支座反力为

$$R_A = P\frac{x}{l} \qquad R_B = P\left(1 - \frac{x}{l}\right) \qquad \text{(a)}$$

这里取支座反力向上为正。因子 x/l、$1 - x/l$ 是影响系数，用影响线 oa 和 ba 来表示，如图 3.6b 和 c 所示。影响系数和 P 相乘得到相应的支座反力。

利用影响线和上一节的方法，能够得到任意给定载荷系下梁的支座反力。例如，有一组集中载荷 P_1、P_2、…作用于梁上，y_1、y_2、…是 R_A 的影响线中与它们相对应的竖距(见图 3.6b)，支座反力可以写作

$$R_A = \sum(P_i y_i) \qquad \text{(b)}$$

同理，用 y'_1、y'_2、…表示 R_B 的影响线对应的竖距(见图 3.6c)，得到

$$R_B = \sum(P_i y'_i) \qquad \text{(b')}$$

图 3.6

如果梁的部分跨作用有集度为 q 的均布载荷，那么利用 q 乘以载荷对应的影响线图的面积就会得到各支座反力。这样，对于从 B 点到跨中作用有均布载荷的梁(见图 3.6d)，其支反力为

$$R_A = q\frac{1}{4}\frac{l}{2} = \frac{1}{8}ql \qquad R_B = q\frac{3}{4}\frac{l}{2} = \frac{3}{8}ql$$

其中$\frac{1}{4}\frac{l}{2}$、$\frac{3}{4}\frac{l}{2}$分别为图 3.6b、c 所示的阴影部分的面积。

对于外伸简支梁(见图 3.7a)，当梁上作用有移动载荷 P 时，求解支座反力的表达式(a)仍然成立。然而当 x 的值从 0 变化到 $l + a$ 时，得到图 3.7b、c 所示的影响线。当 x 的值

在 l 和 $l+a$ 之间变化时，我们看到 R_A 的影响系数大于 1，而 R_B 的影响系数为负值。但是，它们的和仍是常数，等于单位 1。R_B 的负竖距仅仅表示当载荷位于外伸段时，支座反力方向向下。

当载荷 P 为单位载荷时，表达式(a)中的影响线系数 x/l、$1-x/l$ 从数值可以看作是 A 点和 B 点产生的支座反力。可以用一种简便的方法来绘制支座反力的影响线。首先让我们回顾一下图 3.7c 中支座反力 R_B 的影响线，假设 B 点作用一单位载荷，显然反力 R_B 大小为 1。当单位力作用在 A 点，B 点的支座反力为 0。这样，由得到的关键点 a、b，以及支座反力是 x 的线性函数，连接关键点得到直线 bac，即影响线图。

上述过程也可以应用于更为复杂的情况，那可能会涉及到支座反力的解析表达式。例如对于复合梁 ACD，支撑方式如图 3.8a 所示。为了绘出 A、B、D 点垂直支反力的影响线，我们作如下分析：首先确定 A 点的支反力，要注意当单位载荷先后作用于点 A 和点 B 时，A 端的支座反力分别为 1、0。然后连接关键点 a、b，能够画出直线 abc，如图 3.8b 所示。当单位载荷移动到 D 点时，支反力 R_A 也为 0。然后连接直线 cd，绘出整个影响线。同样的方法可以应用于 R_B(见图 3.8c)和 R_D 的影响线(见图 3.8d)。

图 3.7

图 3.8

对于图 3.6 和图 3.7 这样的简支梁，分析支座反力的影响线没有多大的必要，但对于图 3.8 所示的较为复杂结构，影响线分析则大有益处。在这种情况下，从影响线图我们能够清晰地知道支座反力达到最大值时指定载荷作用于梁上的位置。例如：在均布载荷作用下，当载荷仅作用于梁的 BD 段之间时，A 点的支座反力具有向上的最大值。还有一点是显而易见的，作用于梁的 AC 段上的载荷对 D 点支座反力没有影响。为了求得 B 点的最大支座反力，尽量在整个梁上布满载荷，或者采取其他措施。

图 3.9

利用 1.10 节讨论的虚位移原理，能够较为方便地绘出支座反力的影响线。如图 3.9a 所示的简支外伸梁 ABC，为了采用虚位移原理求得 A 点的支座反力，可先去掉 A 点约

束并用垂直力 R_A 来代替，如图 3.9b 所示。这样仅剩下可以绕固定铰 B 自由转动的刚性杆 AC。用线性位移 $\overline{AA'}$表示 A 点的虚位移[⊖]，得到梁轴线上其他所有各点的位移，用双点划线 $A'C'$所对应的竖距表示。因此，虚功方程写作

$$R_A\overline{AA''} - Py = 0$$

因此求得

$$R_A = P\frac{y}{AA'} \tag{c}$$

其中 y 是载荷 P 作用点的位移，从表达式(c)中如果取 $AA'=1$，我们就认为双点划线 $A'C'$是支座反力 R_A 的影响线。B 点左侧的负竖距表示当载荷作用在外伸梁上时，支座反力方向向下。

以上求解过程可以应用于更为复杂的例子中，如图 3.10a 所示，这是一个具有四个支座的静定复合梁 AG。为了画出 C 点垂直支座反力的影响线，我们仅去掉 C 点的约束，使 C 点发生正的位移(方向相上)$\overline{CC'}$，如图 3.10b 所示。取$\overline{CC'}=1$，虚线的竖距构成的新的轮廓，表示相应的 R_C 的影响系数。同样，若去掉 G 点相应的约束，在该点施加一个正的单位位移就得到 R_G 的影响线，如图 3.10c 双点划线所示。由此我们可以看出，要得到任意静定反力的影响线，只需去除相应的约束，然后在该点处代之以一个正向单位位移，那么形成的新的轮廓图就是所求点的影响线。对余下的 B 点和 D 点的支座反力可以采用相同的方法画出影响线，这留给读者作为练习。

至此，我们已经讨论了绘制支座反力影响线的几种方法。在不同的活载荷系统下，如何应用这些方法进行梁的分析，可用一个例子来说明。为此，取一个简单的外伸梁，如图 3.11a 所示。假定想要求在标准火车载荷作用下(见图 3.1)B 点产生的最大支座反力，利用 R_B 的影响线(见图 3.11b)，可知当轮②作用于图示 C 点时，得到列车的临界位置。也就是说当列车从右到左缓慢驶过桥梁，轮①已经离开桥而轮②恰恰位于桥末端 C 点时，支座反力 R_B 将达到最大值。这样，就解决了载荷位置的问题，接下来要考虑的是在给定的载荷作用下计算 R_B 的值。这里包括两种计算方法：一种是首先绘出影响线系数 y_2、y_3、y_4、…，然后分别乘以相应的轮载荷，利用本节中所述式(b)求得

图 3.10

图 3.11

⊖ 实际上，位移是无限小的圆弧，我们可认为与其垂直投影相同，因此用 AA'代替 AA''。

$$R_B = \sum (P_i y_i) \tag{d}$$

另一种更简便更准确的方法是，只要一选定载荷的临界位置，就完全放弃影响线，而将所有的力对 A 点求矩，其力矩代数和为 0，计算得到 R_B 的值。因此，用 $\sum M_A$ 表示梁上所有载荷对 A 点的力矩和，得到

$$R_B = \frac{\sum M_A}{l} \tag{e}$$

方程(e)的数值计算可以利用 Cooper's E-60 载荷弯矩表变为非常简单的形式。要使用这个表，首先写出表达式(e)的等价形式

$$R_B = \frac{\sum M_9 + (\sum P_i)x}{L} \tag{e'}$$

其中 $\sum M_9$ 指梁上所有的载荷对轮⑨的力矩和，$\sum P_i$ 指梁上的合力值，x 指 A 与轮⑨之间的距离。直接采用弯矩表上的数值，取 $l = 30\text{ft}$，$x = 2\text{ft}$，如图 3.11a 所示。得到

$$R_B = \frac{4520 + 198 \times 2\text{kip}}{30} = 163.5\text{kip}$$

现在所讨论的桥梁由两个平行的梁组成，且只有一个列车，那么每根梁承受的载荷等于一条轨道所承受的载荷。

习题

1. 如图 3.12 所示，CD 杆支撑水平梁 AB，画出 CD 杆轴力的影响线。
2. 如图 3.13 所示，画出支撑梁 ABC 的杆件 AF、BE、BD 的轴力影响线。
3. 如图 3.14 所示，画出简支梁的 A、B 点支座反力的影响线。用标准列车载荷(Cooper's E-60)计算 R_B 的最大可能值，其中 $a = 10\text{ft}$，$l = 30\text{ft}$，$b = 12\text{ft}$。
4. 如图 3.15 所示，画出复合梁的 A、C、D 支座反力的影响线。标准列车载荷位于什么位置时，R_A 达到最大值？如果 a、b 和 l 取值与习题 3 相同，那么 R_A 的最大值是多少？
5. 画出如图 3.16 所示体系 A、B、C 的支座反力影响线。

图 3.12

图 3.13

图 3.14

图 3.15

图 3.16

3.3 剪力影响线

对于如图 3.17a 所示简支梁，指定截面 mn 的剪力影响线的绘制如下：当载荷 P 作用在截面 mn 的右侧时，该截面的剪力为正，数值上等于支座反力 R_A。同样，当载荷 P 作用在截面 mn 的左侧时，剪力为负，数值上等于支座反力 R_B。因此，只需取支座反力 R_A 和 $-R_B$ 影响线的阴影部分就可以得到 mn 处的剪力影响线，如图 3.17b 所示。当单位载荷作用在梁上某个位置时，指定截面 mn 的剪力等于图中与该位置对应的竖距值。如果单位力从左向右移动通过此截面时，剪力会发生突变，从最大正值 b/l 突变到最大负值 a/l。

图 3.17

从影响线图 3.17b 可以看到，在单个载荷 P 作用下，当载荷 P 作用于哪个截面时，则哪个截面就会出现最大剪力(在理论上,距截面一侧有一微小距离)。同样在分布载荷作用下，当载荷在指定截面和远端之间连续分布时，则数值最大的剪力也出现在此截面处。剪力的大小可以由载荷集度 q 与梁上载荷作用处的剪力影响线的面积的乘积得到。如图 3.17 所示，截面 mn 到支座 B 点分布有均布载荷，则截面 mn 对应的剪力为

$$V_{mn} = q\frac{b}{l}\frac{b}{2} = \frac{qb^2}{2l}$$

在绘制梁的剪力影响线时，也可以用虚位移原理。为了说明这一点，下面来讨论如图 3.18a 所示外伸简支梁。假如要求解截面 mn 的剪力，首先考虑解除截面 mn 处的横向约束，代之以剪力 V，如图 3.18a 所示。同时，假定截面 mn 上弯曲约束保持不变。为了满足这些条件，在截面 mn 处用两个链杆 mm'、nn'来代替长度为 dx 的梁单元，如图 3.18b 所示。这就防止了两边的梁发生相对转动角位移，同时允许产生小的相对横向位移，如图 3.28c 所示。

这样，在体系中引入一个自由度，并定义图示产生的很小相对位移 δ 为虚位移，如图 3.18d 所示[1]。要注意梁的两边发生位移后仍保持平行。可以得到结论：变形后的体系必须满足条件 $om:on = a:b$，这样整个影响线的轮廓就确定了。由于在位移过程中，只有剪力 V 和载荷 P 做功，

图 3.18

[1] 应该明白所讨论的问题是无限小位移，这里为了阐明图形变化我们将挠度夸大了。

虚功方程写作

$$V\delta - Py = 0$$

或者

$$V = P\frac{y}{\delta} \tag{a}$$

其中比率 y/δ 表示截面 mn 的剪力影响系数。因此，取竖向值 $\delta = 1$ 时，图 3.18d 中的图形就是影响线的形状。

上述求解过程具有普遍的适用性，可用于较为复杂的结构。如图 3.19a 所示复合梁，假定要求绘制截面 mn 的剪力影响线。如用常规的静态方法必须先求出所有的支座反力，这就需要很大的工作量。而用虚位移原理的方法进行求解则可以忽略求支座反力。运用这个方法，只需使截面 mn 发生单位横向位移，其他约束(内部和外部)保持不变。相应的体系轮廓线如图 3.19b 所示，这就是截面 mn 的剪力影响线。利用得到的图形，很容易就能确定给定载荷作用于梁上什么位置时，此截面的剪力值最大。当均布载荷如图 3.19c 分布时，截面 mn 取得最大负剪力值。

图 3.19

对于受到一组集中载荷作用的梁，如图 3.1 所示标准列车载荷，在指定截面上的最大剪力的载荷作用并不是很明显。然而，利用影响线，可能得到已知条件下确定最不利载荷位置的一般原则。当一组集中载荷在梁上移动时，通过对已知截面剪力的变化情况进行分析直接得到这些原则。为了论证这一点，假设一列标准火车载荷从右到左通过简支梁，如图 3.20a 所示。这时通过影响线看到，截面 mn 的剪力值逐步增加，直到轮①到达该截面处。同时，在载荷作用下的影响系数在数量和大小上也不断增加。当轮①通过该截面时，剪力突然下降，其下降的数值等于该轮上的载荷。随着列车继续向左移动，

图 3.20

如图 3.20b 所示，轮①处影响线的正竖距继续增大，而负竖距继续减小，因此 mn 截面正剪力继续逐步增加。这种情形一直延续到轮②到达此截面，这时剪力又有一个突降，然后又产生一个逐步的增加。这意味着有多少轮就会出现多少次剪力极大值，每一次都出现在某轮通过此截面时。因此，确定已知截面的最大剪力的第一准则是：载荷系的放置必须保证有一个轮恰好位于这个截面上。

为了确定哪一个载荷应该放在指定截面上，才能获得最大剪力，我们首先将第一个轮放在截面上，然后判断每一个轮向前移动时剪力的变化。在载荷向前移动的过程中，剪力的增加总量为

$$\Delta V = \Delta R_A - \Delta P \tag{3.1a}$$

其中 ΔR_A 是向前移动引起反力 R_A 的增量，ΔP 是截面左边总载荷的增量。如果表达式(3.1a)为正，就表明随着载荷的前移截面的剪力不断增加。继续重复这一过程直到表达式(3.1a)变号，这就意味着此时已经超越了剪力最大的位置。因此，把表达式(3.1a)的变号作为判定最大剪力的第二准则。

在上面的讨论中，如果在载荷前移过程中，没有其他轮进入或离开梁，那么可以用非常简单的方法计算 ΔR_A 和 ΔP。假定载荷的移动从如图 3.21a 的位置移到图 3.21c 所示的位置，从 R_A 的影响线(见图 3.21b)，我们着到如果 W 是梁上总载荷的合力，a 是载荷向前移动的距离，R_A 的变化为

$$\Delta R_A = Wa\tan\alpha = \frac{Wa}{l} \tag{b}$$

其中 $\tan\alpha = 1/l$ 是影响线的斜率。如果没有载荷离开梁段，ΔP 可以简化为通过截面的载荷 P_n。这样一来，表达式(3.1a)写作

$$\Delta V = \frac{Wa}{l} - P_n \tag{3.1b}$$

这个表达式的变号可以作为最大剪力的第二准则。

图 3.21

如果有载荷进入或离开梁段会使 ΔR_a 的计算复杂化。在图 3.22 所示的例子中，W 是列车在移动前梁上所有载荷的合力，Q'是进入梁段距离为 b 的载荷，P'是离开 A 点距离为 c 的载荷。当一组载荷从图 3.22a 所示的位置向前移动到图 3.22c 所示的位置时，R_A 的变化为

$$\Delta R_A = \frac{Wa}{l} - P'\left(1 + \frac{c}{l}\right) + \frac{Q'b}{l} \tag{c}$$

在表达式(c)中，假如我们认为支座左端的外伸梁足够长，可以来承受离开 A 点的载荷 P'，第一项 Wa/l 表示 R_A 的增加；第二项是对没有外伸梁情况的简单修正；第三项表示由于载荷 Q'(不包含在 W 内)作用于梁上引起 R_A 的增加。

载荷 P'离开梁段也会影响截面左侧梁的总载荷的增加，有

$$\Delta P = P_n - P' \tag{d}$$

将表达式(c)和式(d)代入方程(3.1a)得到

$$\Delta V=\frac{Wa}{l}-P_n-\frac{P'c}{l}+\frac{Q'b}{l} \tag{3.1c}$$

由于 c/l 和 b/l 的比值通常比 1 小很多，而且这两项符号相反，在表达式(3.1c)中最后两项可以忽略不计，这样就得到了与表达式(3.1b)完全相同的形式。

应用上述准则，来确定图 3.23 所示的简支梁在 Cooper's E-60 载荷作用下截面 mn 处的最大剪力。开始轮①位于该截面，随着轮②继续向前移动，由方程(3.1b)得到

图 3.22

图 3.23

$$\Delta V=\left(\frac{213\times 8}{70}-15\right)\text{kip}=+9.34\text{kip}$$

ΔV 为正，剪力继续增加。如果开始将轮②放在该截面处，轮③继续向前移动。那么由方程(3.1b)得到

$$\Delta V=\left(\frac{228\times 5}{70}-30\right)\text{kip}=-13.7\text{kip}$$

ΔV 为负，剪力在第二次移动时已经减少，所以轮②放在该截面处，此时将得到截面的最大剪力，如图 3.23b 所示。接下来利用公式[⊖]，$V=R_A-15$，来计算最大剪力。为了计算 R_A，利用 3.1 节中的弯矩表得到

$$V=\frac{M_{10}+228\text{kip}\times 2\text{ft}}{70\text{ft}}-15\text{kip}=\left(\frac{6950+456}{70}-15\right)\text{kip}=90.8\text{kip}$$

值得注意的是，上述求解过程中，如利用方程(3.1a)作为最大剪力准则，只适用于没有外伸的简支梁。在许多更为复杂的结构中，通常需要画出影响线，并以此为指南来选择载荷的最不利位置。

⊖ 假定轮②恰恰在截面的右侧。

习题

1. 简支梁跨度为 20ft，在标准列车载荷作用下试确定最大剪力以及最大剪力所在的截面位置。
2. 一简支梁跨度为 90ft，试画出距左端支座 20ft 处截面的剪力影响线，若梁上作用有 Cooper's E-60 载荷，如何移动载荷才能得到该截面的最大剪力，并求出最大剪力值？
3. 外伸简支梁总长为 44ft，其中支座间跨度为 32ft，末端外伸臂为 12ft，绘出距任意一端距离为 22ft 处截面的剪力影响线。若梁上作用有 Cooper's E-60 载荷，如何移动载荷才能得到该截面的最大剪力，并求出最大剪力值。
4. 假定梁上作用有 6kip/ft 的均布活载荷和 2 kip/ft 的均布恒载荷，试求如图 3.15 所示复合梁支座 D 处所能达到的最大的支座反力。其中 $l=30$ft，$a=10$ft，$b=30$ft。
5. 绘出图 3.15 的体系中铰 B 点的剪力影响线。并求出在 Cooper's E-60 载荷作用下，铰接处产生的最大剪力值。如果作用有集度为 6kips/ft 均布活载荷时铰接处的最大剪力值为多少？（利用第 4 题的数据）

3.4 弯矩影响线

在影响线中具有重要实际意义的一个问题是梁上指定截面的弯矩变化或者移动载荷系在梁上的位置变化。例如，考虑动载荷 P 作用下的简支梁 AB，如图 3.24 所示。在这个例子中我们认为只要载荷作用于指定截面 mn 的右侧，则截面 mn 的弯矩为 $R_A a$。同理，当载荷作用于指定截面左侧的任一位置时，截面 mn 的弯矩为 $R_B b$。在上面的两种情况下弯矩均为正。这样，就像绘制剪力影响线的方法一样，由支座反力 R_A 和 R_B 的影响线可以直接绘出指定截面 mn 的弯矩影响线。对于截面右侧的梁段，利用 R_A 的影响线，其竖距乘以长度 a。同样，对于截面左边的梁段，利用 R_B 的影响线，其竖距乘以长度 b。这样就可以绘出完整的截面 mn 的弯矩影响线，如图 3.24b 所示阴影部分三角形 acb。由此看出，弯矩影响线的竖距量纲为长度。任一竖距与载荷 P 的乘积得到弯矩的量纲（力×长度）。

图 3.24

由图 3.24b 所示的图形，可以看到影响线的最大竖距出现在截面 mn 处，大小为 ab/l。这样一来，在单个集中载荷 P 的作用下，当载荷放在截面 mn 处时，得到最大弯矩，相应弯矩值为 Pab/l。在均布载荷作用下，当载荷布满整个梁段时截面获得最大弯矩。因为影响线的面积为 $ab/2$，则相应的最大弯矩值为 $qab/2$，其中 q 为载荷集度。如果我们取 $a=b=l/2$，就会得到熟悉的表达式 $ql^2/8$。

梁的弯矩影响线也可以利用虚位移原理得到。例如：对于外伸的简支梁，如图 3.25a 所示。要想画出截面 mn 的弯矩影响线，首先假定用一个理想铰来代替截面梁单元，如图 3.25b 所示。理想铰允许梁的两端产生相对转动，如图 3.25c 所示，同时保证了抗剪能力和纵向拉力不变。因此，体系具有一个自由度，如图 3.25d 所示。然后，在这个可转动的体系

的任意一点施加载荷 P，并在铰上施加一对等值反向的力偶 M，如图 3.25d 所示。显然，在假定的平衡体系中，P 和 M 之间的关系就是要求的载荷 P 和初始梁截面 mn 上的弯矩之间的关系，如图 3.25a 所示。通过体系中假定的虚位移，如图 3.25d 所示，对应的虚功为零，能够找到它们之间的关系，有

$$M\delta\theta - Py = 0$$

其中 $\delta\theta$ 是两段梁之间的总角位移，y 是载荷 P 作用点处的垂直位移。从虚功方程，可以得到

$$M = \frac{Py}{\delta\theta}$$

可以看到，长度 $y/\delta\theta$ 是截面 mn 的弯矩影响系数。因此，图 3.25d 中的图形就是影响线的形状，只需将垂直值按 $1:\delta\theta$ 扩大，就能得到弯矩的确定值。如果 $\delta\theta = 1/10\text{rad}$，那么扩大因子就是 10。

图 3.25

上述结论具有普遍性，因此也可以用于一些更为复杂的结构。如图 3.26a 所示复合梁，要画出截面 mn 的弯矩影响线。为了实现这一步，在截面处引入一个假想铰 BE，BE 梁的两段之间发生一个相对转角，如图 3.26b 所示，截面 mn 在正弯矩作用下沿着同一方向做正功。相应的体系变形，表示要求的影响线与其约束作用相一致，其影响系数可以直接由此测量得到。

利用图 3.26b 所示影响线，很快就得到了截面 mn 获得最大弯矩时已知载荷的位置。例如，在单个集中载荷 P 作用下，当载荷位于铰 B 处时最大负弯矩出现。面在均布活载荷作用下，当 AC 和 DF 跨布满均布载荷时，是载荷的最不利条件，它在截面 mn 处产生最大负弯矩值。

图 3.26

现在考虑当指定截面产生最大可能弯矩时，一组集中载荷如标准列车载荷在简支梁上的位置。首先，画出截面 mn 的弯矩影响线 ACB，如图 3.27 所示，使一系列集中载荷 P_1、…、P_n 从右向左沿梁段移动。载荷处于任意位置上，如图所示，截面弯矩可以通过各个载荷产生的力矩和求得。有

$$M = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \cdots + P_ny_n \tag{a}$$

其中 y_1、y_2、…是图示的影响系数。现在假定载荷向左移动一个微小距离 δx，那么相应截

面弯矩的改变为 δM，可以用表达式(a)中各项 $P_i y_i$ 单独变化的代数和来表示。R_1 表示截面左侧的载荷总和，R_2 表示截面右侧的载荷总和，则弯矩变化 δM 表示如下

$$\delta M = \delta x(R_2 \tan \alpha_2 - R_1 \tan \alpha_1) \tag{b}$$

其中 α_1 和 α_2 分别是 AC 和 BC 线的斜率，如图 3.27 所示。由于 $\tan \alpha_1 = b/l$，$\tan \alpha_2 = a/l$，表达式(b)可以写为

$$\delta M = \frac{ab}{l}\delta x\left(\frac{R_2}{b} - \frac{R_1}{a}\right) \tag{c}$$

图 3.27

在此表达式中，R_2/b 和 R_1/a 项分别表示梁左段与右段的平均载荷。因此，从表达式(c)可以得出结论：只要满足下式，截面弯矩将随着载荷的左移而继续增大，即

$$\frac{R_2}{b} > \frac{R_1}{a} \tag{3.2}$$

也就是说梁右段的载荷平均值要大于左段平均值。反之，弯矩将随着载荷的左移开始下降。

如果在载荷左移过程中，一个新的载荷从右侧进入梁段，R_2/b 将增加，而 R_1/a 保持不变。因此，要想使截面 mn 达到最大弯矩，载荷应该继续向左移动。同样，如果截面左边一个载荷离开梁段，R_1/a 将减小，R_2/b 仍保持不变，载荷还应该继续向左移动。由此我们得到如下结论：一个载荷进入梁的右段或离开梁的左段，并不违反上一章中得到的结论，对截面 mn 获得最大弯矩的载荷位置的确定也不重要。另一方面，每次当一个载荷通过截面 mn 时，R_1/a 突然增大，同时 R_2/b 突然减小，与表达式(3.2)恰恰相反。由此可以得出结论：当一些载荷作用在截面 mn 时，截面处将产生最大弯矩。当此载荷通过截面时，表达式(3.2)变号，此时的载荷就是产生最大弯矩的载荷。

当一组载荷整体从右到左通过梁段时，也许表达式(3.2)会出现几次变号。这表明此截面弯矩值数次达到极大值，就如同 3.3 节中对剪力的分析一样。在那种情况下，必须求出每一次的极大值(某一载荷作用于此截面)，从中选出最大的一个作为设计依据。下面举例来论证这些观点。

在如图 3.28 中，有一个短梁 AB，在 Cooper's E-60 载荷作用下(参考图 3.1)，要求确定 1/3 点处的弯矩最大值。当轮②恰好位于截面右侧时(见图 3.28a)，表达式(3.2)写作

图 3.28

$$\frac{120}{20} > \frac{15}{10}$$

当轮②恰好位于截面左侧时，有

$$\frac{90}{20} = \frac{45}{10}$$

上面的等式表示当轮②通过这个截面，截面弯矩保持不变，直到轮①恰好离开梁段。当轮③到达截面处时(见图 3.28b)，表达式(3.2)改变为

$$\frac{109.5}{20} > \frac{30}{10}$$

这表明弯矩仍在增加，但是当轮③通过截面后，式(3.2)改变为

$$\frac{79.5}{20} < \frac{60}{10}$$

此时弯矩开始变小。因此，1/3 点处出现弯矩最大值时，载荷位于如图 3.28b 所示位置。利用 3.1 节的弯矩表很容易得到相应的弯矩值为 $M = 556.5\text{kip} \cdot \text{ft}$。

绝对最大弯矩 前面讨论的是，为了使指定截面达到最大弯矩，如何布置梁上的已知载荷体系。接下来要讨论的是确定特殊的梁截面的方法——在该截面处最大弯矩大于其他任意截面。也就是说，当已知载荷系在梁段上移动时，梁的最大弯矩值是多少？在什么位置？产生最大弯矩值的截面称为危险截面，此截面的最大弯矩称为绝对最大弯矩值。当然，对于截面均匀的梁，此时的弯矩值应当作为设计的依据。

为了建立绝对最大弯矩的加载准则，下面讨论图 3.29a 所示的梁。在梁上尽量施加最大的载荷，通过观察得到绝对最大弯矩。这些载荷作用于梁上任何假定位置，最大弯矩出现在由于载荷的作用剪力发生变号的位置。假定这个载荷为 P_i，如图 3.29 所示，用 R 表示梁上所有载荷的合力，x 是合力 R 到支座 B 的距离。同时，M 代表 P_i 左侧所有的力对 P_i 作用点的力矩和，用 a 表示 R 与 P_i 的距离，如图 3.29a 所示。利用这些符号，载荷 P_i 作用下的弯矩为

$$M_P = \frac{Rx}{l}(l - x - a) - M \qquad \text{(d)}$$

图 3.29

接下来，假定没有任何载荷进入或离开梁段，x 发生微小的变化，那么在允许范围内 M_P 是 x 的连续函数。当 $dM_P/dx = 0$ 时，函数取最大值。表达式为

$$\frac{R}{l}(l - 2x - a) = 0$$

由此得到

$$l - x - a = x \qquad \text{(e)}$$

上式表明当载荷 P_i 到一端的距离与所有载荷的合力到梁上另一端的距离相等时，M_P 为绝对最大弯矩。前面的结论可以通过下面的准则加以总结：对于作用有一组集中载荷的简支梁，其最大弯矩发生在剪力变号的位置；在这些载荷作用下，梁的中点恰好平分载荷 P_i 和所有载荷的合力 R 之间的距离，这个弯矩就是绝对最大弯矩。

使用上述绝对最大弯矩准则要注意，一组已知载荷在梁上移动，当不同的轮载通过梁中部时，可能会出现几次绝对弯矩极大值。然而，试验表明出现绝对最大弯矩的截面，即危险截面，总是在中点附近。因此，可以首先认为产生最大弯矩的载荷位于中点位置，以减少计算量。然后，稍微移动载荷以满足绝对最大弯矩准则，最后求出弯矩值。许多实际问题中，不必作进一步的研究，上述得到的值就是绝对最大弯矩的最可能值。

习题

1. 简支梁 AB 跨度为 60ft，在标准 Cooper's E-60 列车载荷作用下，试确定：(1)梁中点处的最大弯矩；(2)1/3 点处最大弯矩？
2. 长为 30ft 外伸梁，其跨度长 24ft，悬臂长 6ft，试确定标准列车载荷作用下的最大弯矩值：(1)24ft 跨长的中点处；(2)悬臂支撑点处。
3. 试确定在图 3.30 所示载荷作用下简支梁的绝对最大弯矩，并与梁中点处的最大弯矩进行比较。
4. 在标准 Cooper's E-60 列车活载荷作用下，试确定跨度为 46ft 的简支梁的绝对最大弯矩。
5. 试确定图 3.31 所示体系中梁 CD 产生的绝对最大弯矩。

图 3.30

图 3.31

3.5 带有横梁的主梁

在桥梁结构中经常使用一些大跨度梁，活载荷并不直接作用于主梁上，如图 3.32a 所示。主梁 AB 在 a、b、c、…点支撑着若干横梁(floor beam)，这些横梁又支撑着一系列纵梁(stringer) ab、bc、cd、…。两个横梁之间的主梁部分称为梁段(panel)。a、b、c、…点称为段点(panel point)。从上述结构中可知作用于纵梁上的载荷 P 通过两个相应结点传到主梁。载荷在两个结点之间的分布对 A 和 B 处的支座反力没有影响，且它们的影响线与没有横梁时主梁的影响线相同。然而对于剪力影响线和弯矩影响线和前面讨论的情况略有不同。

图 3.32

首先看一下剪力影响线。由于载荷通过结点

传递到主梁，可见在任意梁段上无论载荷 P 作用于纵梁的哪个位置，任一主梁段的剪力恒定不变。毫无疑问，可以用所谓的梁段内的剪力来代替这段梁中的任意指定横截面的剪力。根据这种思想，下面来讨论如图 3.32a 所示主梁 cd 梁段内的剪力影响线的绘制。当载荷 P 作用到结点 c 左侧的任一位置时，cd 梁段的剪力为负，数值上等于 R_B。若载荷 P 作用于 d 点右侧任一位置时，梁段内剪力为正，且等于 R_A。因此，对于 de 和 ac 梁段，可以直接利用 R_A 和 R_B 的影响线 $d'e'$和 $a'c'$，如图 3.32b 所示。

使载荷 P 作用于梁段 cd 上距 d 点为 x 的任一位置，在 c 点和 d 点相应的结点载荷分别为

$$P_c = P\frac{x}{d} \qquad P_d = P\frac{d-x}{d} \tag{a}$$

其中 d 为梁段长，如图 3.32a 所示。利用相应的影响系数 y_c、y_d，得到这一梁段的剪力为

$$V = y_c P\frac{x}{d} + y_d P\frac{d-x}{d} \tag{b}$$

这个表达式是 x 的线性函数，当 $x=0$ 时，$V=Py_d$；当 $x=d$ 时，$V=Py_c$。因此，为了绘出载荷作用在梁段 cd 内的剪力影响线，只需要用直线将 c'和 d'相连即可，如图 3.32b 所示。同理，可以得到 ab 梁段的剪力影响线，如图 3.32c 所示。

为了绘出带有横梁的主梁上某一指定截面 mn 的弯矩影响线，可以采用上述相似的方法。我们注意到当载荷 P 作用于 d 点右侧的任一位置时，得到截面 mn 弯矩为 $R_A a$，而当载荷 P 作用于 c 点左侧的任一位置时，得到截面 mn 的弯矩为 $R_B b$。因此，对于没有横梁的主梁，只需利用相应的支座反力 R_A 和 R_B 的竖距分别乘以 a 和 b，就得到要求的影响线 $a'c'$和 $e'd'$，如图 3.33b 所示。现在将载荷作用于梁段 cd 内距 d 点为 x 的任一位置，如前所述，利用表达式(a)求得 c 和 d 点的载荷。利用得到的数据以及已经得到的影响线系数 y_c 和 y_d，得到截面 mn 的弯矩为

图 3.33

$$M_{mn} = y_c P\frac{x}{d} + y_d P\frac{d-x}{d} \tag{c}$$

像表达式(b)一样，表达式(c)也是 x 的线性函数。当 $x=0$ 时，有 $M_{mn}=Py_d$；当 $x=d$ 时，有 $M_{mn}=Py_c$。所以只要连接直线 $c'd'$就构成了截面 mn 完整的弯矩影响线，如图 3.33b 所示。

通常认为任何带有横梁的主梁的影响线都可以直接由相应的不带横梁的主梁影响线得到。对不带横梁的主梁，只需要用直线连接所讨论梁段的影响线末端的点即可。这样做的依据是，如果载荷施加在任一结点，那么载荷将直接传给主梁，而当载荷作用于梁段内的任意位置时，指定截面的剪力和弯矩随载荷位置的变化面变化。

对于带有横梁的主梁，集中载荷在梁上的位置怎样变化，才能产生最大效应，这一问题无须过多讨论。既然梁段端部的剪力总大于中间部分的剪力，图 3.32c 所示状态下的影响线和弯矩影响线具有相同的形式，则可以利用 3.4 节讨论的指定截面最大弯矩原则来进行求

解。由于载荷通过结点传递，所以实际弯矩最大值处应在结点处。因此，所研究的指定截面最大弯矩准则同样适用，而不必考虑绝对最大弯矩的问题。

下面通过一个例子来论证带有横梁的主梁在活载荷作用下的最大弯矩值和最大剪力值的计算。假设图 3.34a 表示单轨平面铁路桥梁，跨度为 88ft，将其分为四个等距梁段，如图 3.34a 所示，假设活载荷为标准 Cooper's E-60 活载荷。

图 3.34

对于端部梁段的剪力，可得到如图 3.32c 所示的影响图，并且利用式(3.2)的变号条件作为最大值准则。当轮④恰好位于结点 b 右侧时(见图 3.34a)，表达式(3.2)写作

$$\frac{273}{66} > \frac{75}{22}$$

当轮④恰好位于结点 b 左侧时，有

$$\frac{243}{66} < \frac{105}{22}$$

因此看出，当轮④通过这个截面时，式(3.2)变号，也就是说将轮④放在结点 b 时，末端梁段 ab 将出现最大剪力，相应的剪力值为

$$V_{ab} = R_A - P_a$$

其中 R_A 是 A 点的支座反力，P_a 是 a 点的结点载荷。利用 3.1 节 Cooper's E-60 载荷作用弯矩表可得

$$R_A = \frac{13100 + 348 \times 5}{88}\text{kip} = 168.5\text{kip}$$

$$P_a = \frac{720}{22}\text{kip} = 32.7\text{kip}$$

所以有

$$V_{ab} = (168.5 - 32.7)\text{kip} = 135.8\text{kip}$$

当轮⑫放在 c 点时，结点 c 出现最大弯矩(见图 3.34b)。因为当轮⑫通过梁中点时，条件式(3.2)发生下列变化

$$\text{从}\frac{180}{44} > \frac{123}{44}\text{到}\frac{150}{44} < \frac{153}{44}$$

同时 A 点的支座反力值(见弯矩表)为

$$R_A = \frac{11700 + 291 \times 4 + 12 \times 2}{88}\text{kip} = 146.3\text{kip}$$

C 点的弯矩为

$$M_c = (146.3 \times 44 - 2605)\text{kip} \cdot \text{ft} = 3840\text{kip} \cdot \text{ft}$$

利用前面得到的最大剪力和最大弯矩值，可以在主梁上选出一个关键截面，对产生的应力进行详细的分析。

有时要求得到活载荷作用下，带有横梁的主梁中间段的剪力最大值。在那种情况下，载荷的放置准则表述如下：参考图 3.35，假定当一个标准列车从右到左通过梁段，剪力最大值出现在梁段 bc 内。这里用 W 表示梁上力的合力，x 表示合力到 B 点的距离。同理，用 W' 表示梁段 bc 内所有载荷的合力，x' 表示合力到 c 点的距离。由静力学可知，梁段 bc 内的剪力为

图 3.35

$$V_{bc} = \frac{Wx}{l} - \frac{W'x'}{d} \qquad \text{(d)}$$

如果载荷向左移动 Δx，剪力变为

$$V'_{bc} = \frac{W}{l}(x + \Delta x) - \frac{W'}{d}(x' + \Delta x) \qquad \text{(e)}$$

可以看到剪力的变化为

$$\Delta V = \left(\frac{W}{l} - \frac{W'}{d}\right)\Delta x \qquad \text{(f)}$$

只要表达式为正，即

$$\frac{W}{l} > \frac{W'}{d} \qquad (3.3)$$

当载荷从右到左移动时，梁段 bc 内的剪力将继续增加。因此，只有当条件式(3.3)变号时 V_{bc} 达到最大值。从图 3.35 可以看出当某一轮恰恰进入梁段 bc 时，梁段内出现最大值。由此可知，当某轮进入梁段 bc 时，条件式(3.3)发生变号，梁段 bc 内出现最大值。

习题

1. 如图 3.34 所示，当标准 Cooper's E-60 列车载荷位于主梁何处时，梁段 bc 内产生剪力最大值，并求剪力最大值。
2. 如图 3.34 所示，在标准 Cooper's E-60 列车载荷作用下，求主梁结点 b 的最大弯矩值。
3. 标准 Cooper's E-60 列车载荷通过主梁，如图 3.34 所示，试确定由此产生的纵梁最大支座反力(结点载荷)。
4. 在标准 Cooper's E-60 列车载荷作用下，求跨中最大活载荷弯矩。如图 3.35 所示，其中 $l = 50\text{ft}$，$d = 10\text{ft}$。并比较 c 点和 d 点的最大弯矩。
5. 如图 3.36 所示，当标准 Cooper's E-60 列车载荷通过梁跨时，试确定主梁 AB 上产生的最大活载荷剪

图 3.36

力和弯矩。

3.6 三铰拱的影响线

要讨论三铰拱的影响线，首先我们看一下不对称拱结构 ACB（见图 3.37a），假设拱上直接作用有竖向移动载荷 P。那么在支座 A、B 处产生水平方向和垂直方向的支座反力，如图 3.37a 所示。将所有力对 A 点和 B 点求矩，令力矩代数和为零，得到垂直反力 R_A 和 R_B，它们与跨度为 l 的简支梁的支座反力相同。用 H' 表示 AB 方向的分量，也就是所有力在水平方向的投影，这些分量大小相等、方向相反。H' 的水平投影称为拱的水平推力，用 H 表示，即 $H = H'\cos\alpha$。为了求出 H 的值，取拱的 AC 段为隔离体，以铰 C 为矩心求力矩代数和为 0，可得

$$R_A a - H' f \cos\alpha = 0$$

其中 f 是拱高，如图所示。从这个方程中可得

$$H'\cos\alpha = H = R_A \frac{a}{f} \qquad \text{(a)}$$

图 3.37

分析可知，$R_A a$ 是跨度为 l 的简支梁距左端为 a 处产生的截面弯矩，由此可得当载荷 P 沿拱移动时，水平推力 H 总是和相应的简支梁弯矩成正比。因此，要得到水平推力 H 的影响线，只需将简支梁结构在 C 点的弯矩除以相应的影响线的竖矩 f 即可，如图 3.37b 所示。

如果拱上作用有铅垂载荷系，用前面介绍的求简支梁 C 点处的最大弯矩准则[参看 3.4 节中方程(3.2)]，可以求出使 H 达到最大值时载荷的位置。当铅垂载荷沿拱跨均匀分布时，只需用载荷集度 q 乘以其影响线 acb 的面积，就能得到水平推力。在这种情况下，影响线的竖距为纯数值，面积 acb 的量纲为长度，与载荷集度 q 乘积的量纲为力。

现在来绘制不对称拱横截面 D 处的弯矩影响线，如图 3.38a 所示。如果这个截面与支座反力 R_A 的距离为 c，则此时的弯矩为

$$M'_d = R_A c - H y_d \qquad \text{(b)}$$

表达式右边第一项表示跨度为 l 的简支梁相应的截面弯矩，第二项代表水平推力 H 引起的弯矩。因此，可以用简支梁弯矩的影响线竖距减去 H 的影响线竖距乘以 y_d（见图 3.37b）得到 M_d 的影响线，相减得到的结果用如图 3.38b 所示阴影部分表示出来。另外，还可以用一种更为简洁的形式来表示影响线，以水平线 ab 为基准绘出竖距，如图 3.38c 所示。为了得到简化的图形，应注意当铅垂载荷通过 E 点时，e 点的弯矩值为零，E 点为 BC 和 AD 的交点（见图 3.38a）。由下列事实可知当载荷 P 通过点 E 时，点 A 的总反力显然通过 D 点，M_d 等于 0。当铅垂载荷通过点 D 和点 C 时，进一步观察 d 点和 c 点的图形。在图形左侧直线 ced 的左端竖距一定等于 c，简化后的图形如 3.38c 所示。

当垂直载荷 P 作用于拱时（见图 3.39a），截面 D 产生的剪力方程表示为

$$V_d = R_A\cos\phi - H'\sin(\phi-\alpha) = R_A\cos\phi - H\frac{\sin(\phi-\alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{(c)}$$

其中 ϕ 是 D 点中心线的切线和水平线的夹角，α 是水平线和 AB 线之间的夹角，如图 3.39a 所示。表达式(c)右侧第一项表示 D 点相应简支梁剪力与 $\cos\phi$ 的乘积，第二项表示水平推力 H 引起的剪力。因此，D 点的剪力影响图竖距是由简支梁剪力影响线竖距与 $\cos\phi$ 的乘积减去推力 H 与 $\sin(\phi-\alpha)/\cos\alpha$ 的乘积得到的，差值用如图 3.39b 所示阴影部分的面积表示出来。在这种情况下，直线 BC 与通过 A 点且与水平方向成 ϕ 角的直线相交于 E 点，当铅垂载荷通过 E 点时影响线上 e 点竖矩为零，这样就得到影响图的简单形式。当载荷 P 通过点 E 时，还得到 A 点支座反力的合力平行于 D 点的切线。因为点 e 为零点以及梁左端处直线 ced 的竖距为 $\cos\phi$，则可以很容易画出图 3.39c。

图 3.38

图 3.39

我们经常要设计这样的拱，像前面讨论的一样，不让活载荷直接传给拱肋，而是将活载荷作用于一组由拱支撑的横梁结构上，如图 3.40a 所示。在这种情况下，载荷仅仅通过结点 I、J、K、…传给拱。这种结构与带有横梁的主梁的影响线形式相同(参考 3.5 节)，即首先画出不带横梁的拱的影响线，然后用直线连接所讨论的梁段端部影响线的点。例如：要得到如图 3.40a 所示拱的水平推力 H 的影响线，首先绘出当载荷 P(见图 3.37b)直接作用与主梁时的影响线 acb，如图 3.40b 所示。然后用直线连接影响线上与结点 J、K 相应的 j、k 点，如图 3.37b 所示。这样就得到了所求的水平推力 H 的影响系数，用图形 $ajkb$ 的竖距来表示。正如方程(a)中所述，H 和简支梁 C 点的弯矩成正比，而其中 C 点在梁段 JK 内，因此这一过程是正确的。如果横梁被安置于 C 点，铰 C 成为一个结点，H 的影响线与载荷 P 直接作用于拱轴时相同。

拱截面 D 处的弯矩影响线可以用类似的方法得到，如图 3.40c 所示。在这个图形中首先认为活载荷直接传递到拱轴(比较图 3.38b)，画出图形 acd 和 adb 部分，然后用直线连接与

结点 I、J、K 对应的影响线上的点 i、j、k 点和 i、j 点得到要求的影响线。影响线的阴影部分的竖距表示截面 D 点处的弯矩影响系数。

截面 D 处的剪力影响线也可以由同样的过程得到，如图 3.40d 所示。应该注意的是由于拱轴的曲率，CD 板上的剪力不是常数，这与带有横梁的主梁情况相同。

简单三铰拱得到的表达式(a)、(b)、(c)也适用于外伸拱，如图 3.41a 所示。根据方程(a)，拱水平推力 H 的影响线可以通过相应复合梁 $D'F'G'E'$ 在 C 点处的弯矩影响线的竖距除以 f 得到，如图 3.41b 所示结构。为了绘制该影响线，我们引入虚位移法，在 c 点(对应 C 点)产生一个相对角位移 $n\delta\theta$，如图 3.41c 所示，$aa'=a/f$，$bb'=b/f$。得到的阴影部分的竖距表示拱的水平推力 H 的影响系数。N 点处的弯矩影响线图可用同样的方法得到，如图 3.41d 所示。这里 $df_1n_1g_1e$ 表示复合梁中 N' 处的弯矩影响线，如图 3.41b 所示。而 $dfcge$ 表示前面得到的 H 的影响线的竖距与 y_n 的乘积。同样根据方程式(b)，将图 3.41a 拱结构中得到的 N 点处的影响线叠加得到的竖距的差值就是 N 点处的弯矩影响线。用类似的方法可以得 N 点处的剪力影响线示意图。

图 3.40

图 3.41

习题

1. 对称三铰拱 $l=60\text{ft}$，$f=8\text{ft}$，试画出水平推力 H 的影响线。(1)当整个拱上作用有 $q=1\text{kip/ft}$ 的均布载荷时利用影响线求 H 的值；(2)若拱上作用有标准列车载荷(Cooper's E-60)，拱顶 C 是结点，求由此产生的最大 H 值。

2. 假设拱的形状为抛物线，如图 3.38a 所示，拱顶为点 C，$a=b=l/2$，即拱关于 C 点对称。若拱上作用有集度为 q 的均布活载荷，求 D 点的最大正弯矩值，注意活载荷只作用于 AE 段。已知：$l=60\text{ft}$，$f=15\text{ft}$，$c=15\text{ft}$，$q=1\text{kip/ft}$。
3. 参看图 3.39，假定结构如上一个问题所述为对称抛物线，跨度 $l=60\text{ft}$，拱高 $f=15\text{ft}$，拱上作用有密度为 $q=1\text{kip/ft}$ 的均布活载荷，试求 D 点处($c=l/4$)的最大剪力值。假设载荷直接传给拱。
4. 如图 3.42 所示，跨度为 l 的对称半圆形三铰拱，拱上直接作用有集度为 $q=1\text{kip/ft}$ 的均布活载荷。试绘出水平推力 H、弯矩 M_d、剪力 V_d 的影响线，并求出各量的最大值。其中 $l=60\text{ft}$，$\phi=30°$。
5. 绘出拱 N 点处的剪力影响线和 M 点处的弯矩影响线，如图 3.41 所示。

图 3.42

3.7 简单桁架的影响线

在桁架的设计中，往往要求确定活载荷作用下每根杆的最不利位置，然后求出各杆相应的轴力。运用影响线将有助于桁架的分析。首先以图 3.43a 所示桁架中的杆件为例，假设所有的载荷都是通过横梁传到下弦结点 A、C、D、…。为了绘制上弦杆如 EF 的轴力影响线，我们假定垂直载荷 P 作用在桁架上，并取截面 mn 如图所示。取截面左侧为隔离体，以 D 为力矩中心，将力矩方程写作

$$R_A a + S_1 h_1 = 0$$

或者

$$S_1 = -\frac{R_A a}{h_1} \qquad \text{(a)}$$

从这个表达式，可以看出压力 S_1 和 D 点弯矩 $R_A a$ 成正比，$R_A a$ 是相应的跨度为 l 的承载简支梁上 D 截面的弯矩。当载荷 P 作用在 D 点左侧时，结论同样成立。因此可得：用简支梁 AB 在 D 截面处的弯矩影响线的竖距除以 $-h$，得到 S_1 的影响线。在图 3.43b 中，abd 是杆 EF 的轴力影响线。用该影响线的竖距 y 乘以载荷 P，竖矩是无量纲的，可得到 S_1 对应的值。同样，如果均布载荷作用在整个跨上，那么相应的轴力 S_1 可以用载荷集度 q 乘以影响图 abd 的面积得到。采用求解简支梁在 D 点的最大弯矩的方法，可以得到在标

图 3.43

准列车载荷系(见图 3.1)作用下，S_1 的最大值。

下弦杆如杆 CD 的轴力影响线的绘制也是如此。在这个例子中，把 E 作为矩心。力 S_3 与相应的简支梁在该点的弯矩成正比。因此，用跨度为 l 的简支梁在 E 点的弯矩影响线的竖距除以 h_3，就能得到所求的影响线，如图 3.43c 所示，还要注意到影响系数是正的，这意味着杆 CD 受拉。

现在我们来讨论图 3.43a 所示桁架斜杆 ED 的轴力影响线的绘制。首先认为载荷 P 作用于结点 D 的右侧，取截面 mn 左侧的 G 点为矩心，使截面 mn 左侧的力对点 G 所求力矩的代数和为 0。有

$$S_2 = \frac{R_A c}{h_2} \tag{b}$$

因此，只要载荷 P 作用于 D 点右侧时，将 R_A 的支座反力影响线竖距乘以 c/h_2 就能得到 S_2 的影响线竖距。利用这种方法可以得到所求影响线的 bd 段，如图 3.43d 所示。当载荷 P 位于结点 C 的左侧时，则考虑桁架的右侧平衡，利用对 G 点的力矩方程可得

$$S_2 = -\frac{R_B(l+c)}{h_2} \tag{c}$$

因此，只要载荷 P 作用在 C 点的左侧，S_2 的影响线竖距就可以通过 R_B 的影响线的竖距乘以 $-(l+c)/h_2$ 得到。在图 3.43d 中，延长直线 ac 得到 b 点的竖距为 $-(l+c)/h_2$。当载荷 P 点作用于 C、D 之间时，受力与带有横梁的主梁相同。由此可得，只需用直线连接已经得到的 c 点和 d 点就能得到完整的影响线图形。我们看到斜杆的影响线与带有横梁的主梁中间段的剪力影响线形式相似(见图 3.32b)。轴力 S_2 是拉力或压力决定于活载荷的位置。例如：在集度为 q 的均布活载荷作用下，要想得到 ED 杆的最大拉力，只能将载荷作用于梁上 gb 段内。然后用 q 乘以三角形 gbd 的面积，可以得到所对应的 S_2 的值。同样，只有均布载荷作用于梁上 ag 段时，ED 杆才会产生最大压力。在一组集中载荷作用下，如标准列车载荷，要想求得 S_2 的最大值，需采用与求解带有横梁的中间主梁段内最大剪力同样的方法。

桁架中竖杆影响线的求法通常采用与上述斜杆类似的方法进行求解。例如，如果我们想要求桁架中竖杆 DE 的轴力 S 的影响线，如图 3.44a 所示，作截面 mn，然后以 G 作为矩心。当载荷 P 分别作用 I 点右侧和 D 点左侧时，分别列出 mn 截面的左、右两侧的平衡方程为

$$S = -\frac{R_A c}{a} \quad 和 \quad S = R_B \frac{l+c}{a} \tag{d}$$

从中可以得出所求的轴力 S 的影响线，对支座反力 R_A 和 R_B 进行修正即可得到，如图 3.44b 所示。

图 3.44

在绘制桁架影响线时，虚位移法也经常用到。如图 3.45a 所示的桁架，假定活载荷传给下弦杆的结点上。要想得到桁架 EF 杆的影响线，首先去掉 EF

杆，代之以一对大小相等、方向相反的压力 S 作用在桁架的剩余部分。这样得到具有一个自由度的体系，在两个用阴影部分表示的刚体之间形成一个能够相对转动的铰。体系的虚位移用直线 adb 来表示（如图 3.45b 所示），竖距表示当两个刚体发生相对角位移 $\delta\theta$ 时，桁架的下弦杆上各点产生的竖向挠度。如果 y 表示载荷 P 的作用点处产生的挠度，Δ 表示在假定的虚位移作用下 EF 杆缩短的距离。虚位移方程写作

$$S_1\Delta + Py = 0$$

或者

$$S_1 = -\frac{Py}{\Delta} \qquad \text{(e)}$$

图 3.45

从表达式(e)中可以看出 S_1 和 y 成正比，因此挠度线 adb 就是要求的影响线的大致形状，只需要用图形中的竖距 y 除以 $-\Delta$ 就能得到影响系数的比例值。这样由影响线的 bd 段图形可以写作 $y = xa\delta\theta/l$，也可以写作 $\Delta = \delta\theta h_1$。因此当载荷 P 作用于 D 点右侧时，影响系数为

$$-\frac{y}{\Delta} = -\frac{xa}{h_1 l}$$

在图 3.45c 中，S_1 的真实影响线对应的 $b'd'$段延伸线上在 $x = l$ 处时，竖距为 a/h_1；同理，桁架左侧 $a'd'$段延伸线上 b 点处的竖距为 b/h_1。利用同样的方法还可以画出下弦杆的影响线。

利用虚位移方法，要想得到斜杆 ED 的影响线，首先我们用图 3.46a 所示的力 S_2 代替杆 ED。那么可用两个刚体的相对角位移 $\delta\theta$ 表示系统的虚位移，刚体为图示阴影部分。这样一来刚体绕矩心 G 发生相对旋转，支座点 A 和 B 不发生竖向移动。要想得到影响线，首先去掉 B 点的支座，那么整个桁架作为刚体绕铰 A 转动。转动导致相应的下弦杆发生竖向虚位移，如图 3.46b 中直线 ab'所示。我们看到当 b 移至 b_1 时，矩心由 g 变为 g_1。现在若保持桁架左边静止不动，右边桁架绕 g_1 旋转 $\delta\theta$ 角度，这时点 B 回到初始位置，即图 3.46b 所示，b_1 回到 b 点。下弦杆影响线最终图形用 $acdb$ 表示出来，如图 3.46b 所示，在假设的虚位移状态下，y 表示载荷 P 对应的铅垂位移，虚功方程写作

图 3.46

$$S_2\Delta + Py = 0$$

或者

$$S_2 = -\frac{Py}{\Delta} \tag{f}$$

其中 Δ 如前所述，表示 ED 杆的缩短量，对应于 $\delta\theta$。同时可以看到 S_2 和 y 成比例，这就得到所求 S_2 的影响线的大致图形 $acdb$。

对于影响系数 $-y/\Delta$，我们由图 3.46b 得到

$$-y = c\delta\theta\frac{x}{l} \quad 和 \quad \Delta = \delta\theta h_2$$

因此，桁架的右侧的影响系数为

$$-\frac{y}{\Delta} = \frac{x}{l}\frac{c}{h_2}$$

真实影响线对应的 $b'd'$段延伸线上 $x=l$ 处，竖距为 c/h_2；同理，$a'c'$段的延伸线上 b 点处的竖距为 $-(l+c)/h_2$。比较图 3.46c 和图 3.43d，可以看到在桁架结构中用虚位移的方法求影响线与前面方法相同。

在桁架的分析中，我们经常利用影响线来确定活载荷的最不利位置，然后不必再参考这些图形，计算杆件的相应轴力。为此，我们不必求出具体的影响系数值，而只需绘出影响线的大致形状，而利用虚位移法可很容易做到这一点。

习题

1. 如图 3.43 所示，若活载荷作用于下弦结点，试确定：(1) 在 $q=1$kip/ft 均布载荷作用下 CD 杆的最大可能轴力；(2) 在标准 Cooper's E-60 载荷作用下 ED 杆的最大可能轴力。其中 $l=120$ft，$h_2=18$ft，$c=30$ft。
2. 使用截面法，绘制图 3.32 所示桁架轴力 S_1、S_2、S_3 的影响线，若活载荷作用于上弦结点，试求在 $q=1$kip/ft 的均布活载荷的作用下这些轴力的最大可能数值，其中 $a=10$ft。
3. 利用虚位移法，分别绘出如图 3.47 所示桁架中 CD 和 DE 杆的轴力 S_1、S_2 的影响线。当 $q=1$kip/ft 的均布活载荷作用在上弦结点，求这些轴力的最大可能值。
4. 假设活载荷作用于上弦结点，试绘出图 2.27 所示简单桁架中间竖杆的影响线。求在 $q=1$kip/ft 的均布活载荷作用下轴力最大值。其中 $a=10$ft，$h=12$ft。
5. 绘制如图 3.48 所示简单桁架结构中，中间杆件 S 的轴力影响线。其中 $\phi_1=60°$，$\phi_2=45°$。

图 3.47

图 3.48

3.8 复合桁架的影响线

带有子单元体的复合桁架(见图 3.49a)可以看作由一些基本的简单桁架(见图 3.49b)和一些辅助桁架(见图 3.49e)构成。当体系作用有恒载荷时，我们首先确定基本桁架各杆的轴力，然后再与辅助桁架中相应杆的轴力代数相加(见 2.6 节)。绘制复杂桁架影响线的方法也是如此，首先得到图 3.49e 所示辅助桁架的各杆影响线。这些影响线表示在图 3.49f、图 3.49g 和图 3.49h 中，分别对应铅垂杆件、水平杆件和斜杆。有了这些辅助图形，就能很容易地画出复合桁架的影响图。例如，下面考虑 CD 杆。对于基本桁架(见图 3.49b)中对应的杆件，其影响图用图 3.49c 所示的三角形 $a_1c_1b_1$ 表示。然后将图 3.49g 的竖距叠加到图 3.49c 的竖距上。由于$\frac{1}{2}\tan\phi=\frac{1}{2}d/h$，将线 a_1c_1 延伸到 e_1 点，然后用直线连接点 e_1 和 d_1，就得到了所求影响线，如图 3.49c 所示。用这种方法得到的图形 $a_1e_1d_1b_1$ 表示给定复合桁架中 CD 杆的影响线。

要想得到复合桁架中斜杆下端 FD 的影响线，首先我们画出基本桁架中对应斜杆的影响图 $a_2c_2d_2b_2$(见图 3.49d)，然后在此图形基础上叠加辅助桁架的影响线(见图 3.49h)。这样就得到了阴影部分图形 $a_2e_2d_2b_2$(见图 3.49d)，其竖距表示给定复合桁架中 FD 杆的影响系数。结构中斜杆的上段、铅垂杆件以及上弦杆的影响线与基本桁架结构对应的杆件的影响线

图 3.49

相同。因此，图 3.49d 中图形 $a_2c_2d_2b_2$ 可以用作复合桁架中 GF 杆件的影响线。

对于图 3.49a 所示复合桁架的例子，图 3.49c 和图 3.49d 可以直接用上一节中所讲的截面法得到。如果载荷 P 作用子结点 D 的右侧，我们取截面 mn 桁架左侧部分为平衡结构(见图 3.49a)，得到的影响线 b_1d_1 和 b_2d_2 与基本桁架影响线相同。同理，如果载荷 P 作用于结点 D 点的左侧时，我们取截面 mn 桁架右侧部分为平衡结构，得到影响线 a_1e_1 和 a_2e_2，然后用直线连接剩余的 e_1d_1 和 e_2d_2 段完成图形绘制，e_1d_1 和 e_2d_2 段是载荷作用于 ED 段内桁架的影响线。

对于如图 3.50a 所示复合桁架，可以将图 3.50b 所示的复合梁作为相应的基本体系，这样就能很容易地画出各杆的影响线。例如对于桁架上弦杆 CD 的影响线图，取如图所示截面 mn，并列出以 E 点为矩心的弯矩平衡方程。当载荷 P 作用于下弦杆任一位置时，用复合梁在 E'点(见图 3.50b)的弯矩除以 $-h$ 就能得到 CD 杆的轴力 S。因此，用复合梁 E'点弯矩影响线的竖距(见图 3.50c)除以 h 就能得到要求杆件的轴力 S 的影响线。复合桁架中各下弦杆的影响线可以同样的方法得到。

对于斜杆 DE，取研究截面 mn，并以 G 点为矩心(见图 3.50a)列出弯矩平衡方程，可以得到轴力 S_1。如果载荷 P 作用于结点 K 右侧，由平衡方程得到

$$S_1 = -\frac{R_A c}{h_1} \tag{a}$$

我们看到 S_1 对应的影响线可以用图 3.50b 所示复合梁的支座反力 R_A 影响线的竖距乘以 $-c/h_1$ 得到图形 $jhbk$，如图 3.50d 所示。如果载荷 P 作用于 E 点左侧，我们考虑截面 mn 右侧力矩平衡，得到

$$S_1 = R_B \frac{l+c}{h_1} \tag{b}$$

图 3.50

因此，将复合梁的支座反力 R_B 影响线竖距(见图 3.50b)乘以 $(l+c)/h_1$，得到所求影响线 *ife*，如图 3.50d 所示。当载荷 P 作用于 EK 段内时，连接 *ek*，画出 S_1 影响线 *ifekhj*。

我们注意到，图 3.51a 所示三铰拱上作用有竖向载荷，由于横向水平推力 H 的存在，点 A 和点 B 的支座反力不同于简支桁架 AB 的支座反力。这样，首先计算简支桁架的轴力 ζ_i，然后在其上叠加由于水平推力 H 引起的附加轴力，即可得到系统任一杆件轴力 S_i。因此，对于如图 3.51a 所示体系有

$$S_1=\zeta_1+H\frac{f_d}{h_1}\qquad S_2=\zeta_2-H\frac{h}{h_2}\qquad S_3=\zeta_3-H\frac{h}{h_3}$$

从以上这些表达式中，可以看出，要得到三铰拱中任一杆轴力 S_i 的影响线，只需求出简支桁架 ζ_i 相应的影响线，然后再叠加 H 影响线的修正值，如图 3.51b 所示。例如在图 3.51c 中，竖距为负值的图形 *adb* 表示简支梁的轴力 ζ_1 的影响线，*acb* 表示 H 的影响线竖距乘以 f_d/h_1 得到的图形。两个图形叠加得到的阴影部分的图形就是三铰拱桁架中轴力 S_1 的影响线。S_2 和 S_3 的影响线也可用同样的方法求得，分别如图 3.51d 和图 3.51e 所示。

图 3.51

习题

1. 绘出图 3.52 所示复合桁架各杆轴力 S_1、S_2、S_3 的影响线。
2. 绘出图 2.34 所示复合桁架中 S_1、S_2、S_3 和 S_4 的影响线，桁架高为 15ft，结点距为 15ft，在 Cooper's E-60 载荷作用下求 S_1 的最大值。
3. 参看图 3.51，在 $q=1$kip/ft 均布载荷作用下，试确定拱产生的水平推力 H 的最大值。其中 $l=120$ft，$f=20$ft，求在标准列车载荷作用下水平推力 H 的最大值。
4. 绘出三铰拱竖杆 AK 的影响线，如图 3.51a 所示，在 $q=3$kip/ft 的均布载荷作用下，产生的压力最大值，假设 $l=120$ft，$f=20$ft，$h=30$ft 和 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$。

图 3.52

5. 建立如图 3.53 所示结构轴力 S_1、S_2、S_3 的影响线。提示：先建立简单桁架中 S_1、S_2、S_3 的影响线，然后，根据水平推力 H 作用的结果进行变形分析，如图 3.51c 所示。

图 3.53

第4章

弹性体的一般原理

4.1 拉伸、扭转和弯曲的应变能

在一定程度上，所有的结构都是弹性体，而且在外加载荷的作用下会发生微小的变形。任何结构，例如桁架和拱结构，其外形在有载荷和无载荷条件下会有微小的不同。如果结构是静定的，这种外形上的极其微小的变化对它的几何特性没有多大的影响，因此，在计算内力时使用加载前的结构外形是完全合理的。然而，在超静定系统中，即使是微小的变形，对内力的分配也会起很大的作用，因此，必须考虑其微小的变形。下面我们来集中研究在外力作用下各结构单元的变形关系。

在弹性极限范围内，大部分结构都能被看作是理想弹性的，可以假设符合胡克定律。对于等截面杆受简单拉伸作用的情况(见图 4.1a)，这意味着载荷—挠度曲线 Oa 是直线，如图 4.1b 所示。在逐渐增大的拉力 P 作用下，图示杆伸长，力 P 做功，功以应变能的形式储存在杆件中。为了计算这种应变能，可以认为在力 P 作用下杆件伸长了 δ_1，如图 4.1b 中的 b 点所示。如果在 b 点再增加一个 dP_1，杆件相应的伸长增量为 $d\delta_1$，则作用在杆件上的外力 P_1 做功为 $P_1 d\delta_1$，做功的大小就是图中阴影部分矩形 $bcde$ 的面积，而作用在微小位移 $d\delta_1$ 上的增量 dP_1 所做的功可以忽略掉，因为这个功是二阶微量。在拉力 P 由零开始逐渐增加到最终值的过程中，力 P 所做的总功应为上述微面积(见图 4.1b)的总和，即图中三角形 Oag 的面积。在拉伸过程中，存储在杆件中的应变能用 U 表示，即

图 4.1

$$U = \frac{P\delta}{2} \tag{a}$$

另外，长为 l、横截面积为 A、弹性模量为 E 的等截面杆的伸长量为

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \tag{b}$$

可以把式(a)中的应变能表示成为 P 的函数或伸长量 δ 的函数，因此应变能有如下两种

表示方法

$$U=\frac{P^2 l}{2AE} \tag{4.1a}$$

$$U=\frac{AE\delta^2}{2l} \tag{4.1b}$$

等截面圆轴(见图 4.2a)的扭转应变能可以通过扭转试验得到有关数据。图 4.2b 表示了扭矩 T 和对应的扭转角 ϕ 之间的关系。可以看出，在弹性范围内，扭转角与扭矩是成比例的，即直线 Oa。另外，当扭转角 ϕ 增加一个微量 $d\phi$ 时，图中阴影微元面积表示扭矩对 $d\phi$ 做的功，当扭矩逐渐由零增加到 T 时，扭矩做的功可以用图中三角形 Oab 的面积表示。这个功等于在扭转过程中储存在轴内的应变能。于是得到

$$U=\frac{T\phi}{2} \tag{c}$$

对于圆轴的扭转角，使用已知公式

$$\phi=\frac{Tl}{C} \tag{d}$$

式中 l 表示轴的长度，C 代表抗扭刚度，可得到

$$U=\frac{T^2 l}{2C} \tag{4.2a}$$

或

$$U=\frac{\phi^2 C}{2l} \tag{4.2b}$$

上面第一个公式中，应变能表示成扭矩 T 的函数，第二个公式中表示成扭转角 ϕ 的函数。

对于等截面直杆在主平面内纯弯曲的情况(见图 4.3a)，两端的相对转角 θ 与弯矩成正比，如图 4.3a 所示。因此可以得到弯曲应变能，即弯矩 M 做的总功

图 4.2

图 4.3

$$U=\frac{M\theta}{2} \tag{e}$$

转角 θ 可以表示为

$$\theta=\frac{Ml}{EI} \tag{f}$$

式中 l 表示梁的长度，EI 为弯曲刚度，我们可以用下面两种方式来表示应变能

$$U=\frac{M^2 l}{2EI} \tag{4.3a}$$

或

$$U=\frac{\theta^2 EI}{2l} \tag{4.3b}$$

同样可以看到，应变能既可以表示为(作用力)弯矩 M 的函数，又可以表示为(变形)转角 θ 的函数。

在对称平面内受横向(弯曲)载荷作用下的等截面梁，弯曲和剪切变形都产生应变能。然而，对于通常比例的梁，其剪切应变能与弯曲应变能相比很小，在结构分析中可以不计。在只考虑弯曲变形情况下，应用方程(4.3)，仅仅用 $\mathrm{d}x$ 来代替 l，用 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ 来代替 θ/l，这样，对于一个微段，它的应变能为

$$\mathrm{d}U=\frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI} \tag{g}$$

$$\mathrm{d}U=\frac{EI}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{h}$$

这样，要得到全梁的应变能，我们只需要在梁的长度 l 上对式(g)和式(h)积分即可。特别注明，对于小变形，$\theta\approx\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，得到的应变能为

$$U=\int_0^l\frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI} \tag{4.4a}$$

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x \tag{4.4b}$$

如果惯性矩 I 可以表示为 x 的已知函数，那么这两个公式可适用于变截面梁。

习题

1. 两根同样的等截面梁，一根两端简支，另一根两端固定，在梁的中点处受同样大小的横向集中力作用，求它们的应变能的比值。
2. 一根木质悬臂梁，它的矩形截面宽5in、高8in，梁长为6ft，在截面上受均布载荷200lbf/ft，计算梁的应变能。($E=1.5\times10^6$psi)
3. 比较一个等截面圆轴在受到同样大小扭矩和弯矩的条件下，圆轴的应变能比值。(假设 $T=M,E=2.5G$)

4.2　叠加原理

图　4.4

现在我们考虑同时受几个载荷作用的结构杆件，如图4.4所示。在这种情况下，如果杆件是等截面的而且材料服从胡克定律，则伸长量可以表示为

$$\delta=\frac{(P_1+P_2+P_3)l_1}{AE}+\frac{(P_2+P_3)(l_2-l_1)}{AE}+\frac{P_3(l_3-l_2)}{AE}=\frac{P_1l_1}{AE}+\frac{P_2l_2}{AE}+\frac{P_3l_3}{AE} \tag{a}$$

这个等式可以看作是外力的线性函数。例如，等式右边的第一部分伸长量 P_1l_1/AE 仅是力 P_1 的单独作用。同样第二、三部分伸长量分别仅受到 P_2、P_3 的单独作用。这样，我们可以看到总伸长量是各分力单独作用下的伸长量

之和。

第二个例子，考虑在横向载荷 P_1、P_2、P_3 作用下的简支梁 AB 的弯曲(见图 4.5a)。计算梁的挠度时，我们考虑图 4.5b 中的共扼梁 ab，其载荷为弯矩面积 $acdeb$。在一定比例下，共轭梁的弯矩可以给出真实梁的挠度。现在，从简单的静力考虑，总弯矩的面积 $acdeb$ 是图中虚线所围的各个三角形面积之和，这些三角形分别表示各个分力作用下的弯矩图。那么，共轭梁上总的虚载荷就是对应于作用在梁 AB 上的分力 P_1、P_2、P_3 的各自的虚三角载荷之和。同理，在计算共轭梁任意截面内的弯矩时，可得出，由合力 $acdeb$ 产生的矩等于各个三角形载荷产生的矩之和。因此，真实梁 AB 的任意截面的挠度等于分力 P_1、P_2、P_3 各自作用在同一截面时产生的挠度之和。更进一步，因为后者的挠度与对应的力成比例，我们可以得到这样的结论，在梁 AB 的任意截面上的总挠度都可以表示为力 P_1、P_2、P_3 的线性函数，而且是同一截面上各分力分别产生的挠度之和。

如果挠度是作用力的线性函数，在组合作用力的情况下，上述结论是正确的。而且我们可以得到任一点的总挠度都是各个分力分别单独作用产生的挠度之和。这就是叠加原理。

在通常状态下，挠度和作用力的线性关系完全建立在结构材料符合胡克定律的假设基础上。然而，在某些情况下这种假设本身也是不充分的，即使材料确实符合胡克定律，挠度与作用力也不一定是线性函数的关系。例如，当一根杆同时受轴向力和横向力作用时就是这种情况。再如，考虑如图 4.6a 所示梁 AB 的弯曲，可以得知，在力 P 作用下产生的挠度不再与力成比例。具体表示如下

$$\delta \approx \frac{Pl^3}{48EI}\frac{1}{1-S/S_{cr}} \tag{b}$$

式中第一因式表示横向载荷单独作用时产生的挠度，第二个因式表示轴向压力 S 对这个挠度的影响。这个影响的大小由 S/S_{cr} 的比值决定，其中 $S_{cr}=\pi^2EI/l^2$ 表示梁在图形平面上屈曲的临界载荷。由于 S 与 P 成比例，表达式(b)不再是载荷的线性函数，而且 δ 与 P 也不再是线性关系。用图表示这种关系，得到图 4.6b 所示曲线，从图中可以看到挠度与载荷不再是比例关系。当压力接近临界值时，挠度增加得非常快，这样，当我们把载荷 P 加大一倍时，挠度的增加大于一倍。因此，叠加原理也不再成立。

图 4.5

图 4.6

两根完全相同的水平杆铰接在一起(如图 4.7a 所示)是叠加原理不成立的另一个例子。在铅垂载荷 P 作用下的杆有一定的伸长量，铰 C 要下降一定距离 $\overline{CC_1}=\delta$。假定这个挠度非常小，得到每根杆的微小转角 α 和拉力 S 的值为

$$\alpha \approx \frac{\delta}{l} \tag{c}$$

$$S \approx \frac{P}{2\alpha} \tag{d}$$

现在研究每杆的相对伸长，可以得到

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{l^2+\delta^2}-l}{l} \approx \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{l^2}$$

根据胡克定律，相对伸长量是

$$\varepsilon = \frac{S}{AE}$$

于是可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{l^2} = \frac{S}{AE} = \frac{P}{2\alpha AE} = \frac{Pl}{2\delta AE} \tag{e}$$

其中

$$\delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \tag{f}$$

$$P = \frac{\delta^3 AE}{l^3} \tag{g}$$

于是我们可以看到，尽管材料服从胡克定律，挠度 δ 与载荷也不再是比例关系。这种情况与前面所提的情况有所不同。在这里随着挠度的增加系统的刚性变得越来越大，图 4.7c 中的曲线表示了 δ 与 P 之间的关系。2.7 节中讨论的临界变形系统特性是典型的例子。

同理，对于简单拉伸，图 4.7c 中的面积 $OabcO$ 表示载荷 P 对挠度 δ 所做的功，它等于存储在杆 AC 和杆 CB 中的应变能。把图中用阴影条表示的单元面积相加，就可得到应变能的表达式

$$U = \int_0^{\delta} P\mathrm{d}\delta = \frac{AE}{l^3}\int_0^{\delta}\delta^3\mathrm{d}\delta = \frac{AE\delta^4}{4l^3} \tag{4.5a}$$

或者

$$U = \frac{lP^3}{4\sqrt[3]{AE}} \tag{4.5b}$$

图　4.7

在这些表达式中，应变能不再是位移或力的二次函数。

通过研究图 4.6 和图 4.7 中例子的特点，我们看出外力的作用明显受到系统微小变形的影响。如果只有轴向力 S 的作用，S 只对轴 AB 有压缩作用，如图 4.6 所示。然而，当还有横向载荷 P 作用时，S 不仅产生压缩还有附加的弯曲作用。在图 4.7 所示的情况下，杆中的拉力 S 与变形有关，并与产生的挠度成反比。经常会遇到这种情况：外力对系统的作用受系统中产生的小变形的影响，应力和变形不再是作用力的线性函数，因此叠加原理也不再成立。因此，可以得出这样的结论，如果要应用叠加原理，则材料必须符合胡克定律，但这一个条件是不充分的，我们还必须考虑外力的作用是否受结构微小变形的影响，如果这种影响比较大且必须考虑，在计算内力或应力时，叠加原理就不再适用。

4.3 广义形式的应变能

在 4.1 节中，我们得到一根弹性杆的应变能表达式是外力或位移的二次函数。假设叠加原理成立，则在所有的弹性系统中可以得到相同的结论。例如，图 4.8a 所示的弹性体受到外力 P_1、P_2、P_3、…的作用。由于储存在弹性体内的应变能与力的最终大小有关而与作用的顺序无关，因此可以假设所有的力同时作用，而且以相同的比例增长。那么，如果叠加原理成立，则位移是力的线性函数，并且在加载过程中，与力以相同比例增长。在计算任意力 P_n 做的功时，我们不关心作用点的总位移，而只关心此力的作用方向上的位移分量，用 δ_n 表示位移的这个分量。在假定的缓慢加载过程中，δ_n 与 P_n 以同样的比例增加，两者之间的数值关系可以用图 4.8b 中的图表示。因此，可以得到这样的结论：载荷 P_n 做的功为 $P_n\delta_n/2$。所有外力做的总功，即储存在变形体内的应变能，可以通过把所有分力各自作用时所做的功相加而得，即

$$U=\frac{1}{2}(P_1\delta_1+P_2\delta_2+P_3\delta_3+\cdots) \tag{4.6}$$

支座反力 R_A、R_B、R_C 没有出现在这个表达式中，因为对于图 4.8 描述的支座情况，它们做的功为零。

图 4.8

由于位移 δ_1、δ_2、…是力 P_1、P_2、…的齐次线性函数，如果把这些函数代入到式(4.6)中，则应变能就可以表示为外力 P_1、P_2、…的二次齐次函数。同样，如果把力表示成位移的线性函数，当代入到式(4.6)中，则应变能也可以表示成位移 δ_1、δ_2、…的二次齐次函数。

这两种应变能的表示方法在进一步讨论中非常有用。

应该指出，前面得到的应变能函数的次数和齐次性是在叠加原理成立的条件下得出的。如果叠加原理不成立，则应变能就不再是力或位移的二次函数。这可从上一节的方程(4.5)中看出。

应变能表达式(4.6)可以通过广义力的概念进一步推广。广义力是指可以用一种符号定义的一组静态相关的力。例如，考虑图4.9a所示杆的轴向伸长，作用在杆件轴线上的是一组大小相同、方向相反的力，用一个符号P我们就可以完全定义这组平衡力。另外，对于如图4.9b所示受纯弯曲作用的情况，可以用一个符号M来表示受一组大小相等方向相反的力偶作用下的平衡系统，而对于图4.9c所示梁受横向力作用的情况，可以用作用力P的大小来完全定义这个三力作用下的平衡系统。上面这几种情况我们都用一个符号来定义一组力，这组力就是广义力。

图　4.9

在应用广义力时，我们必须把位移广义化，如图4.8所示。当处理单个力时，我们已经指出由于力的做功只与分力有关，所以我们只关注分力方向的位移而不考虑作用点的合位移。这样，如果δ_n是P_n在作用点沿其作用方向产生的位移分量，则认为δ_n是P_n的位移。如果这个位移增加微量$\Delta\delta_n$，则力P_n做的功表示为

$$P_n\Delta\delta_n \tag{a}$$

现在应用广义力的概念，相对应的广义位移是广义力产生的，而且广义力对广义位移的增量也可以做功。例如，考虑图4.9a所示的简单拉伸。我们看到杆AB可以通过首先平移到A_1B_1'，再绕点A_1旋转到新的位置A_1B_1。在整个位移过程中，这个大小相等方向相反的两个力系不做功。只有当杆有一定伸长量δ时，力才做功。这个伸长量就是广义力P对应的广义位移。如果$\Delta\delta$是伸长量δ的增量，则广义力P做的功的大小为$P\Delta\delta$，这个表达式与单个力作用情况下的表达式(a)相似。对于图4.9b所示的纯弯曲情况，这对力偶所做的功可以用杆两端的相对转角θ来定义。因此，这个转角必须作为广义力对应的广义位移。这个广义力表示一组大小相等方向相反的力偶。如果θ得到一个增量$\Delta\theta$，则力偶矩M做功为$M\Delta\theta$，我们又一次得到与式(a)相似的表达式。对于图4.9c中受横向载荷作用的情况，当梁和支座作为一个刚体整体移动时，P、R_A和R_B这组力并不做功。只有当梁发生弯曲且点C垂直于AB运动时，这组力才会做功。在这种情况下点C相对于轴线AB的挠度δ看作是广义位移。

有时候，与一个选定的广义力对应的广义位移可能不明显。例如，图4.10所示的均布载荷作用下的简支梁，如果把载荷集度q看作是广义力，则所对应的广义位移就是图中弦AB和挠度曲线间的面积。为了表示清楚，给梁轴线上每点的挠度y增加微量Δy，微元力$q\mathrm{d}x$作用在对应的附加位移上的功表示为$q\mathrm{d}x\ \Delta y$。则总力做的功为

图　4.10

$$q\int_0^l \Delta y\mathrm{d}x \tag{b}$$

观察积分 $\int_0^l \Delta y\mathrm{d}x$，它是弦 AB 和梁轴线的挠度曲线之间面积的增量。可以看出，这个面积可以定义为对应于广义力 q 的广义位移。在这种情况下需要特别指出的是当广义力的量纲是力/长度，则对应的广义位移的量纲是长度的平方。这样它们的乘积就有正确的功的量纲。由于广义力在相应广义位移的增量上做功的表达式与集中力做功时的表达式(a)有相同的形式，于是，可以有这样的结论：在逐渐加载过程中，广义力做的总功的表达式与集中力作用时的表达式有相同的形式，且等于广义力最终值与相应广义位移最终值乘积的一半。这意味着如果力和位移是广义的，对单独力导出的表达式(4.6)也可适用。

下面是表达式(4.6)应用的一个例子，如图4.11所示等截面简支梁，力 P 作用在梁的中点，力偶 M_A、M_B 分别作用在梁两端，计算梁的应变能。在这种情况下，作用在梁上的力系可表示为三个广义力，也就是说，力 P 与它对应的反力，力偶 M_A、M_B 与它们相应的反力偶，相应的广义位移为力作用点处的挠度 δ 和梁端的转角 θ_A、θ_B，从表达式(4.6)得到，储存在梁内的总应变能为

图 4.11

$$U=\frac{1}{2}(P\delta+M_A\theta_A+M_B\theta_B) \tag{c}$$

用已知表达式来表示挠度曲线，可得到

$$\begin{aligned}\delta&=\frac{Pl^3}{48EI}+\frac{M_Al^2}{16EI}+\frac{M_Bl^2}{16EI}\\ \theta_A&=\frac{Pl^2}{16EI}+\frac{M_Al}{3EI}+\frac{M_Bl}{6EI}\\ \theta_B&=\frac{Pl^2}{16EI}+\frac{M_Al}{6EI}+\frac{M_Bl}{3EI}\end{aligned} \tag{d}$$

把这些值代入表达式(c)，得到

$$U=\frac{l^3}{96EI}\left(P^2+\frac{6}{l}PM_A+\frac{6}{l}PM_B+\frac{16}{l^2}M_A^2+\frac{16}{l^2}M_B^2+\frac{16}{l^2}M_AM_B\right) \tag{e}$$

可以看出，应变能是广义力的二次齐次函数。

由方程(d)解出 P、M_A 和 M_B，并把它们代入式(c)中，也可得到应变能是广义位移的二次齐次函数。

习题

1. 考虑图4.11所示梁，求解储存在梁内的应变能的一般表达式，假定 $P=0$。(1)表示为梁端弯矩 M_A、M_B 的函数；(2)表示为转角 θ_A 和 θ_B 的函数。
2. 一根长为 l 的细钢筋条，抗弯刚度为 EI，钢筋条在端面外加力矩的作用下被弯成一个整圆，计算储存在环内的应变能。
3. 一根长为 l 的等截面弹性梁，两端固定，横向力 P 作用在梁的中点，在力作用点处的挠度为 δ。假定梁轴的挠度曲线是余弦曲线的一个整波形。计算储存在梁内的应变能。

4. 用表达式(4.6)和广义力的概念计算图 4.10 所示梁内储存的应变能。

5. 一个弹性体在静水压力下均匀收缩。如果压力 p 看作是广义力，则求相对应的广义位移。

4.4　卡氏(Castigliano)第一定理

在 1.10 节讨论过的应用在理想连接的刚体系统中的虚位移原理可以引伸到弹性系统中，这时只需考虑内力和外力做的虚功。如图 4.12 所示，我们把弹簧联结在一起的质点系统作为一弹性系统模型，弹簧代表不同质点间的弹性约束。尽管没有在图上表明，但我们假设有一些适当的弹簧可以抵抗质点的相对转动和滑动以及直线距离的直接改变。在外加载荷的作用下，模型发生弹性变形，而且，弹簧会对图 4.12b 中的诸多质点施加内力。这样，就得到了一个非常复杂的平衡力系。可以在这个系统中应用虚位移原理。

用 P_1、P_2、…表示作用在物体上的外力，用 δ_1、δ_2、…作为相应位移，我们可以通过任意系列的位移 δ_1、δ_2、…的位移变化量 $\Delta\delta_1$、$\Delta\delta_2$、…来定义虚位移，由虚功原理得

$$\sum P_i \Delta\delta_i + \Delta T = 0 \tag{a}$$

式中 ΔT 表示内力在质点虚位移上做的功。由于我们假定了一个弹性体，则质点间的弹簧服从胡克定律。正因为这样，内力在图 4.12b 中的质点虚位移上做的功等于弹簧内的应变能变化，但符号相反，即

$$\Delta T = -\Delta U \tag{b}$$

用 $-\Delta U$ 代替方程(a)中的 ΔT，可以得到

$$\sum P_i \Delta\delta_i - \Delta U = 0 \tag{c}$$

图　4.12

为了计算增量 ΔU，应变能首先表示成位移 δ_1、δ_2、…的函数，然后，用通常的方式，U 的增量表示为位移增量的函数

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta_1}\Delta\delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \delta_2}\Delta\delta_2 + \frac{\partial U}{\partial \delta_3}\Delta\delta_3 + \cdots \tag{d}$$

在应用虚位移原理时，我们可以选择最适合求解所给问题的特殊位移。例如，可以假设只有载荷 P_n 相对应的位移 δ_n 有虚位移，而位移 δ_1、δ_2、…保持不变。在这种情况下，除 $\Delta\delta_n$ 外，$\Delta\delta_1$、$\Delta\delta_2$、…全为零，U 的增量表达式(d)变为

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta_n}\Delta\delta_n \tag{e}$$

把式(e)代入式(c)中，得到

$$P_n\Delta\delta_n-\frac{\partial U}{\partial\delta_n}\Delta\delta_n=0$$

消去 $\Delta\delta_n$，变为

$$\frac{\partial U}{\partial\delta_n}=P_n \tag{4.7}$$

这个方程表明：如果一个变形弹性体内的应变能表示成位移 δ_1、δ_2、…的函数，这个函数对任意选定位移求偏导数就得出相应的作用力。这就是卡式(Castigliano)第一定理。这个定理虽然是由集中力推出的，但同样适用于广义力和相对应的广义位移。

图 4.13

下面看一个应用方程(4.7)的实例。图 4.13 所示的是一个有三根杆的对称系统，它们通过结点 D 铰接在一起，受到图示的力的作用。用 δ 表示铰 D 处的垂直位移，我们可以看到当直杆的伸长量为 δ 时，斜杆的伸长量为 $\delta\cos\alpha$。假定三根杆的横截面积和弹性模量相同，则系统的应变能为

$$U=\frac{AE}{2l}(\delta^2+2\delta^2\cos^3\alpha) \tag{f}$$

应用方程(4.7)可以得到

$$\frac{AE\delta}{l}(1+2\cos^3\alpha)=P \tag{g}$$

可以得到铅垂杆的轴力

$$S=\frac{AE\delta}{l}=\frac{P}{1+2\cos^3\alpha} \tag{h}$$

因此，可以用卡氏第一定理解决超静定问题。

从卡氏第一定理的推导过程可以看出，这个定理的应用与叠加原理无关，惟一要求就是弹性系统。正因为这样，这个定理更多的应用是在 4.2 节中讨论的叠加原理不成立的情况。作为这种类型的例子，我们再次研究图 4.7 所示的两杆问题，δ 表示作用力 P 对应的挠度，则每根杆的伸长量为

$$\Delta l=\sqrt{l^2+\delta^2}-l\approx\frac{\delta^2}{2l} \tag{i}$$

应用方程(4.1b)，得出系统应变能是位移 δ 的函数，即

$$U=2\left(\frac{AE}{2l}\Delta l^2\right)=\frac{AE\delta^4}{4l^3} \tag{j}$$

应该指出应变能不是 δ 的二次函数。然而，应用方程(4.7)，通过微分发现

$$\frac{AE\delta^3}{l^3}=P$$

由此得到

$$\delta=l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \tag{k}$$

这个结果与 4.2 节中得到的式(f)相同。

作为最后一个例子，研究一下如图 4.14 所示的两端简支的梁柱，它同时受到压力 S 和

横向力 P，要求出在力 P 作用方向下的挠度 δ，为了简化问题，假定挠度曲线可用半个正弦波准确表示，即

$$y=\delta\sin\frac{\pi x}{l}$$

图　4.14

于是，系统的形状完全由 δ 来定义，则弯曲应变能[⊖]为

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{EI\pi^4\delta^2}{4l^3} \tag{l}$$

由式(l)可以看到，梁的两端收缩量为

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2\delta^2}{4l} \tag{m}$$

为了得到对应于位移 δ 的广义力，先定义一个值，这个值与 $\Delta\delta$ 相乘可得到对应的虚功。若 δ 增加 $\Delta\delta$，则所做的功为

$$P\Delta\delta+S\Delta\lambda=\left(P+S\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\delta}\right)\Delta\delta$$

因此，对应 δ 的广义力为$\left(P+S\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\delta}\right)$，应用表达式(l)和(m)，方程(4.7)变为

$$\frac{EI\pi^4}{2l^3}=P+S\frac{\pi^2\delta}{2l}$$

可以得到

$$\delta=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}\frac{1}{1-Sl^2/\pi^2EI} \tag{n}$$

由于数值因子 $\pi^4/2=48.7$，因此我们可看出这个等式的近似结果与 4.2 节的方程(b)非常相似。

习题

1. 如图 4.13 中的超静定系统中，若铅垂杆的横截面积为 A，斜杆的横截面积为 $A/2$，求解铅垂杆中的拉力 S。
2. 等截面梁两端固定，抗弯刚度为 EI，在中点受到横力 P 的作用。假定挠曲线可以用余弦曲线准确表示为：$y=\frac{\delta}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)$，计算载荷作用方向下的挠度 δ。
3. 如图 4.15 中所示，一根刚性梁由三个竖直的弹性杆支撑。每根支撑杆的横截面积为 A，弹性模量为 E，但中间杆的长度为另两杆的一半。计算在水平力 P 作用下产生的横向挠度 δ，假定 δ 相应于结构的整体尺寸来说是个微小量。

图　4.15

⊖ 由于纵向压缩保持不变且与 δ 无关，因此不必考虑纵向压缩的应变能。

4.5 卡氏(Castigliano)第二定理

在前面，我们应用的应变能表达式是位移的函数，并发现这个函数对任一广义位移的偏导数可得到相应的广义力。现在研究一下应变能的表达式是外力的函数的情况，并假定叠加原理成立。在这种情况下应变能是外力的二次齐次函数。应变能对任一外力的偏导数，就等于沿该力作用方向的位移，这便是卡氏第二定理。

为了验证这个定理，下面来研究图 4.8a 中受力 P_1、P_2、P_3、…作用下的弹性体。在这些力的作用过程中，产生了变形，弹性体内储存的应变能为 U。如果只给其中一个力 P_n 一个增量 ΔP_n，弹性体内会产生一定的附加变形，应变能 U 的相应增量为

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial P_n}\Delta P_n$$

因此，总的应变能为

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n}\Delta P_n \tag{a}$$

现在，假定不是在力 P_1、P_2、P_3、…作用后引入小增量 ΔP_n，而是颠倒这个顺序。先作用无穷小的力 ΔP_n，然后再作用力 P_1、P_2、P_3、…。由于无穷小的力产生无穷小的位移，它们做的功是个二阶微量，可以忽略不计。更进一步，在随后 P_1、P_2、P_3、…作用过程中，应用叠加原理，可以发现这些力做的功没有受力 ΔP_n 的影响，而且与前面的功有相同的值 U。同时，作用力 ΔP_n 在 P_1、P_2、P_3、…产生的位移 δ_n 上做的功为 $\Delta P_n\delta_n$，在这种情况下，系统的总功，即储存在弹性体内的应变能为

$$U + \Delta P_n\delta_n \tag{b}$$

由于储存在弹性体的应变能的大小与力的作用次序无关，于是得到表达式(a)等同于表达式(b)。这样得到

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n}\Delta P_n = U + \Delta P_n\delta_n$$

可以从中得到

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n \tag{4.8}$$

于是定理得到了证明。

在图 4.8a 中，P_1、P_2、P_3、…为集中力，但是如果这些力是广义力，且 δ_1、δ_2、δ_3、…是它们相对应的广义位移，这个定理的推导仍然成立。这样就可以说，应变能对广义力的偏导数就是相应的广义位移。

在卡氏第二定理的推导中，设想只给其中一个力增加一个任意小量，而不改变其他力，我们假定这种情况是可能的。这样就可以独立地研究这些力。由于静定反作用力的数值与 P_1、P_2、P_3、…有关，而且可以从静定平衡方程中得到，所以静定反作用力不满足这种情况。从这个讨论中可以发现，在方程(4.8)中的应变能一定能表示成独立静外力的函数。例如，研究图 4.16 中的两根梁。两种情况下作用有同样大的力 R 和力矩 M，因为静力平衡，

可以得到 $M=Rl$。这样，应变能可以表示为如下两种形式[⊖]之一

$$U=\frac{R^2l^3}{6EI} \tag{c}$$

或者

$$U=\frac{M^2l}{6EI} \tag{d}$$

如果我们用表达式(c)，对于图4.16a所示的悬臂梁情况，把 R 看作独立的外力，把 M 看作反作用力。表达式(c)对 R 求偏导数得

$$\frac{\partial U}{\partial R}=\frac{Rl^3}{3EI}$$

这就是 B 端固定的悬臂梁在 A 端的挠度。如果应用表达式(d)，在图4.16b中所示的简支梁中，假定 M 是独立的外力，R 是反作用力，将式(d)对 M 求偏导数得

$$\frac{\partial U}{\partial M}=\frac{Ml}{3EI}$$

这就是简支梁中 B 端的转角。这个例子说明了应变能表示为独立的作用力函数的重要性。

卡氏第二定理在计算梁的挠度方面非常有用。例如，如图4.17a所示的悬臂梁，在端点受一个力和一个力偶作用而发生弯曲。在任意截面的弯矩为

图　4.16

图　4.17

$$M=M_A-Px \tag{e}$$

由式(4.4a)可知，储存在梁内的应变能为

$$U=\int_0^l\frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI} \tag{f}$$

这个表达式对 P 求导可得到沿 P 方向的位移，即悬臂梁 A 端的挠度 δ。

因此，可以得到

⊖ 这两个公式可以由应变能的广义表达式(4.4a)求出。

$$\delta=\frac{\partial U}{\partial P}=\int_0^l\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\int_0^l(M_A-Px)(-x)\mathrm{d}x=\frac{Pl^3}{3EI}-\frac{M_Al^2}{2EI}\tag{g}$$

表达式(f)对广义力 M_A 求偏导可得到对应的位移，例如悬臂梁 A 端的转角 θ_A 为

$$\theta_A=\frac{\partial U}{\partial M_A}=\int_0^l\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\int_0^l(M_A-Px)(1)\mathrm{d}x=\frac{M_Al}{EI}-\frac{Pl^2}{2EI}\tag{h}$$

在卡氏定理的应用中，我们不需要计算出作为外力函数的应变能的最终表达式，而是使用应变能的一般表达式(f)，只有在式(g)和式(h)的积分符号下的微分计算完成以后再代入 M 的值。利用这种方法，特别是在多个外力作用时，就可以大大简化计算。

需要指出的是，在计算中引入的偏微分 $\partial M/\partial P$ 和 $\partial M/\partial M_A$ 有非常简单的意义。第一个偏导数表示弯矩对力 P 的变化率。在图 4.17b 中，可以认为它是单位力作用在梁端时的弯矩图。第二个偏导数表示弯矩 M 对 M_A 的变化率，参见图 4.17c。应用微分符号 M'_P 和 M'_M，可以简化位移的表达式

$$\delta=\frac{1}{EI}\int_0^l MM'_P\mathrm{d}x\tag{i}$$

$$\theta_A=\frac{1}{EI}\int_0^l MM'_M\mathrm{d}x\tag{j}$$

图 4.18

在每种情况下，我们必须对梁的实际弯矩与对应的单位载荷弯矩的乘积在整个梁上积分。这个结论可引伸应用到各种力作用下的梁。在图 4.18a 中的简支梁，受均布载荷 q 的作用，在中间处受集中力 P 的作用，图 4.18b 表示的是微分 $\partial M/\partial P$，中间的挠度为

$$\delta=\frac{1}{EI}\int_0^l MM'_P\mathrm{d}x=\frac{2}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}x+\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right)\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{Pl^3}{48EI}+\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

可以看出，应用卡氏定理可以求出对应于任意作用力的位移，但有时我们需要求出没有相应外力作用的地方的位移。在这种情况下，可以附加一个假想的微小力，这个微小力不会影响真实的位移，这样对应变能求这些附加力的导数就可以得到所要求的位移。以图 4.17a 中的悬臂梁为例，假设要求梁中点处的挠度。由于中点处没有力，我们可以假设一个微小力 Q 作用在中点处，则相应的挠度为

$$\delta_1=\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial Q}\mathrm{d}x\tag{k}$$

由于附加力 Q 很小，我们利用表达式(e)中 M 的式子，而弯矩 M 对力 Q 的变化率 $\partial M/\partial Q$，可通过图 4.17d 中单位载荷的弯矩图 nmp 得到。把这些值代入表达式(k)中，得

$$\delta_1=-\frac{1}{EI}\int_{l/2}^l(M_A-Px)\left(x-\frac{l}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{5Pl^3}{48EI}-\frac{M_Al^2}{8EI}$$

作为最后一个例子，研究一下圆截面的细长圆弧悬臂梁，如图 4.19 所示。轴线是以 R 为半径的 1/4 圆弧，并在水平面内。铅垂力 P 作用在 A 点，这时，杆发生弯曲和扭转。对任意截面，用角坐标 ϕ 可以定义一个弯矩

$$M_\phi=PR\sin\phi\tag{l}$$

图 4.19

和扭矩

$$T_\phi = PR(1-\cos\phi) \tag{m}$$

那么，忽略弯曲中的剪切变形，系统中总应变能为

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M_\phi^2 R}{2EI}\mathrm{d}\phi + \int_0^{\pi/2} \frac{T_\phi^2 R}{2GJ}\mathrm{d}\phi \tag{n}$$

为了求出力 P 相应的挠度 δ，有

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{R}{EI}\int_0^{\pi/2} M_\phi \frac{\partial M_\phi}{\partial P}\mathrm{d}\phi + \frac{R}{GJ}\int_0^{\pi/2} T_\phi \frac{\partial T_\phi}{\partial P}\mathrm{d}\phi \tag{o}$$

将等式(l)与式(m)中 M_ϕ、T_ϕ 的值及其导数代入上式，并积分得

$$\delta = \frac{\pi PR^3}{4EI} + \frac{PR^3}{4GJ}(3\pi - 8) \tag{p}$$

应该明确地指出，我们是在叠加原理的基础上推导卡氏第二定理的，因此应变能 U 的表达式必须是作用力的二次齐次函数。如果叠加原理不成立，U 不是作用力的二次函数，那么卡氏第二定理不成立。为了验证这个观点，研究一下图 4.7 的例子，这种情况下的应变能由表达式(4.5b)给出，它不是 P 的二次函数，对 P 求偏导，得到

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{Pl^3}{AE}}$$

这个结果仅是 4.2 节中式(f)所求得的真实挠度的 1/3。在这种情况下通过把应变能 U 表示为位移 δ 的函数，并应用卡氏第一定理，可得到正确结果。

习题

1. 利用卡式第二定理求解长为 l 的简支梁 AB 在端点处的相对转角，抗弯刚度为 EI，作用有集度为 q 的均布载荷。

   提示：在梁的两端引入相等的附加微小力矩 M_ϕ，利用应变能 U 对 M_ϕ 求导。

2. 如图 4.20 所示，$ABCD$ 是连续的正方形刚架，A 端固定，如果三杆有相同的抗弯刚度 EI，只考虑弯曲变形，求 D 的竖直位移。

3. 如图 4.21 所示，连续刚架 ABC 在 A 点铰接，在 C 点有辊轴支座。如果两杆有相同的长度 l 和抗弯刚度 EI，求 C 点的水平位移。

图　4.20

图　4.21

4. 如图 4.22 所示，弧形悬臂梁与作用力 P 在同一平面，求自由端 A 处的水平位移 δ_h 和铅垂位移 δ_v，假设梁的横截面的尺寸与半径 r 相比非常小，这样在计算弯曲应变能时就可以应用直梁的计算公式(4.4a)，忽略轴向应力和切应力对应变能的影响。
5. 如图 4.23 所示的弧形悬臂梁，圆的半径为 R，梁所对的圆心角为 α，在自由端作用有轴力 N、剪力 Q 和弯矩 M，全都在图示平面内。试推导出弹性曲线 A 点的切线转角的一般公式。

图 4.22

图 4.23

4.6 最小功原理

在前面的各节中，我们已经研究过卡氏第二定理在静定系统中的应用，而且发现任何一点的位移都可以通过应变能对相应的力求导而得到。在超静定系统中应用该原理，由于系统的应变能是一些在作用点不引起任何位移的反力或内部约束的函数，所以应变能对这些多余反力或内部约束的导数必须为零。因此，如果我们用 X、Y、Z、…表示这些多余反力，且叠加原理成立，就有

$$\frac{\partial U}{\partial X}=0 \quad \frac{\partial U}{\partial Y}=0 \quad \frac{\partial U}{\partial Z}=0 \quad \cdots \tag{4.9}$$

在这里 U 是 X、Y、Z、…的二次函数，等式(4.9)是应变能函数 U 的最大值或最小值条件。对 U 二次求导，如果导数为正，则我们就可以得到 U 的最小值。这就意味着结构在力作用下会发生变形并保持它的最小应变能(作用力做的功)。这就是所谓的最小功原理。它在分析静不定系统中非常有用。我们只是简单地导出多余力的应变能函数表达式，而且可以从表达式(4.9)中求出这些多余反力的值。可以看出有多少个多余反力就有多少个方程。

以图 4.24 为例，B 端固定，A 端为辊轴支座，受到均布载荷的作用，求未知反力 Y_A、Y_B、M_B。在这种情况下，我们只有两个静力学方程

$$\sum Y=0 \qquad \sum M=0 \tag{a}$$

这个问题是静不定的。选定 A 端的铅垂反力 Y_A 为多余反力，就可以得到图 4.24b 所示简单悬臂梁，这里面定端的反力表示为 Y_A 的函数。现在，对这个系统应用最小功原理，可以得到

图 4.24

$$\frac{\partial U}{\partial Y_A}=\frac{\partial}{\partial Y_A}\int_0^l\frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI}=\frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial Y_A}\mathrm{d}x=0 \tag{b}$$

将下列方程

$$M=Y_Ax-qx^2/2,\frac{\partial M}{\partial Y_A}=x$$

代入式(b)，得到

$$\int_0^l\left(Y_Ax-\frac{qx^2}{2}\right)x\mathrm{d}x=\frac{Y_Al^3}{3}-\frac{ql^4}{8}=0 \tag{c}$$

可得到反力为

$$Y_A=\frac{3}{8}ql$$

可以用不同方法来求解这个问题，我们用图 4.24c 中的简支梁来代替前面的系统，用反力矩 M_B 作为多余力。然后应用最小功原理，则求解 M_B 值的方程为

$$\frac{\partial U}{\partial M_B}=\frac{\partial}{\partial M_B}\int_0^l\frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI}=\frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial M_B}\mathrm{d}x=0 \tag{d}$$

在任意截面上的弯矩可用 M_B 表示为

$$M=\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_B}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2}$$

从中得到

$$\frac{\partial M}{\partial M_B}=-\frac{x}{l}$$

把这些值代入等式(d)中，得到

$$\int_0^l\left[\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_B}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2}\right]\frac{x}{l}\mathrm{d}x=0$$

得到

$$M_B=\frac{ql^2}{8}$$

有时候，我们不选支座反力，面是选择结构两个相邻部分的内力作为超静定系统的计算值。在这种情况下，最小功原理仍然成立而且能很好地利用。以图 4.25a 所示的对称矩形刚架为例，通过对称水平面 mn 取一个平面，研究上半部分结构平衡，可用竖直力$\frac{P}{2}$和力偶 M_0 来表示下半部分的作用[⊖]。$\frac{P}{2}$与 M_0 不能由静力平衡方程求解。由变形对称性，如图 4.25b 所示，可知 M_0 作用的横截面不能发生转动。因此，刚架上半部

图　4.25

⊖ 由对称性可知，在 mn 平面上无剪力作用。

分中的应变能对 M_0 的导数必须为零。如前所述，认为在这个静不定系统中，M_0 值使应变能达到最小值。

在计算应变能时，我们忽略了轴向应力对应变能的影响，而且假定在弯曲变形中忽略轴力的影响。那么，可以得到 AB 部分的弯矩为 M_0，而 BC 部分的弯矩为 $M_0-\frac{Px}{2}$，于是刚架上半部分的应变能为

$$U=\frac{M_0^2h}{2EI}+\frac{1}{EI_1}\int_0^{l/2}\left(M_0-\frac{Px}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

利用最小功原理，可以得到

$$\frac{\partial U}{\partial M_0}=\frac{M_0h}{EI}+\frac{2}{EI_1}\int_0^{l/2}\left(M_0-\frac{Px}{2}\right)\mathrm{d}x=0$$

整理上式得

$$M_0=\frac{Pl}{8[1+(h/l)(I_1/I)]}$$

从上式中可以看出，如果水平杆的横截面惯性矩 I_1 远大于竖直杆的惯性矩 I，M_0 就会变得很小，而且水平杆的弯曲状态与简支梁受弯曲时的受力状态相近。另一方面，如果 I_1 小于 I，则 M_0 与梁端弯矩 $\frac{pl}{8}$ 接近。

图 4.26a 中的圆环作为另一个例子，力 P 作用在圆环竖直直径方向上，求弯矩 M_0。如前面图 4.25 中所示的矩形结构情况，分析上半圆环的平衡，得出

$$\frac{\partial U}{\partial M_0}=\frac{1}{EI}\frac{\partial}{\partial M_0}\int_0^{\pi r/2}M^2\mathrm{d}s=0 \qquad (e)$$

图 4.26

把下列式子代入式(e)

$$M=M_0-\frac{Pr}{2}(1-\cos\phi) \qquad \frac{\partial M}{\partial M_0}=1$$

得到

$$\int_0^{\pi/2}\left[M_0-\frac{Pr}{2}(1-\cos\phi)\right]\mathrm{d}\phi=0$$

从中得到

$$M_0=\frac{Pr}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=0.182Pr \qquad (f)$$

为了得到圆环竖直直径方向的伸长量，我们在图 4.26a 中看到力 P 为圆环直径伸长量 δ 相应的广义力。因此，这个伸长量 δ[⊖] 为

$$\delta=\frac{\delta U}{\delta P}=\frac{2}{EI}\frac{\partial}{\partial P}\int_0^{\pi/2}M^2r\mathrm{d}\phi=-\frac{4r}{EI}\int_0^{\pi/2}\left[M_0-\frac{Pr}{2}(1-\cos\phi)\right]\frac{r}{2}(1-\cos\phi)\mathrm{d}\phi$$

把上面等式(f)中的 M_0 的值代入上式得

⊖ 在这个计算中，我们假定，由轴向应力和切应力产生的应变能与弯曲应变能相比，可以忽略不计，这只适用于细环状态下。

$$\delta = -\frac{Pr^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(\cos\phi - \frac{2}{\pi}\right)(1-\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{Pr^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right) = 0.149\frac{Pr^3}{EI} \tag{g}$$

计算如图 4.27 所示两端铰支的拱在竖直载荷作用下受到的推力 H，是最小功原理的又一种应用。竖直方向反力 V_A、V_B 可以通过静定平衡的一般方法得到。但水平推力 H 是静不定系统中的量，为了求得它，我们必须应用最小功原理，即

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 0 \tag{h}$$

图　4.27

在平面拱情况下，轴向应力产生的应变能非常重要，与弯曲变形产生的应变能相比不能忽略，因此，可以得到

$$U = \int_0^s \frac{M^2\mathrm{d}s}{2EI} + \int_0^s \frac{N^2\mathrm{d}s}{2AE} \tag{i}$$

式中，M 是弯矩，N 是任意横截面的轴力。拱的轴线的长度为 s。任意横截面内的弯矩都由两部分组成，一部分表示弯矩 M_0，同简支梁的计算一样($H=0$)；另一部分表示由推力 H 引起的弯矩。因此，可得到

$$M = M_0 - Hy \tag{j}$$

y 表示图 4.27 中拱的轴线的纵坐标。对于平面拱，轴力 N 可以等同于推力 H，这是足够准确的。于是

$$U = \int_0^s \frac{(M_0 - Hy)^2\mathrm{d}s}{2EI} + \int_0^s \frac{H^2\mathrm{d}s}{2AE}$$

把上式代入式(h)中，得

$$-\int_0^s \frac{(M_0 - Hy)y\mathrm{d}s}{EI} + \int_0^s \frac{H\mathrm{d}s}{AE} = 0$$

从中可求得

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y\mathrm{d}s}{EI}}{\int_0^s \frac{y^2\mathrm{d}s}{EI} + \int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{AE}} \tag{k}$$

如果力和拱的大小已知，这就是计算 H 的一般公式。

如果拱的材料是均匀的，横截面相同。E、I 和 A 作为常量可以从积分符号内提出并约掉，于是得到

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y\mathrm{d}s}{\int_0^s y^2\mathrm{d}s + i^2\int_0^s \mathrm{d}s} \tag{l}$$

公式中 i 为横截面对形心轴的惯性半径，分母中第二项表示轴向应力对 H 值的影响，如果这个影响被忽略掉，可得

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y \mathrm{d}s}{\int_0^s y^2 \mathrm{d}s} \tag{m}$$

对于抛物线拱的情况，如果作用力沿水平跨度均匀分布，我们就可以得到求解 H 的一个特别简单的表达式，此时

$$y = \frac{4fx}{l^2}(l - x)$$

$$M_0 = \frac{qx}{2}(l - x)$$

代入式(m)中，得

$$H = \frac{ql^2}{8f}$$

这里 f 就是图中所示的竖直方向的拱高。

习题

1. 两端固定的梁受到均布载荷的作用，各部分有相同的抗弯刚度 EI，应用最小功原理，求两端的弯矩 M_A、M_B。
2. 如果上题中的梁受到的力是沿梁的长度逐渐增大的，载荷集度符合线性规律 $q = q_0 x/l$，则这时梁两端的弯矩 M_A、M_B 为多少？
3. 按照图 4.24a，用集中力代替均布力的作用，P 作用在离 A 点距离为 c 处，求解反力矩 M_B。
4. 如图 4.24a 中所示，如果在 A 端作用的是力矩 M_A，而不是图中的均布力，用最小功原理证明，B 端相应的力矩减为 $M_B = -M_A/2$。
5. 两端铰结的半圆拱的跨度为 l，在拱顶处作用有竖直向下的力 P，如果只考虑弯曲应变能的影响，计算拱的水平推力 H。假设抗弯刚度 EI 是各处相同的。

4.7 互等定理

让我们看一个简单的例子，一个受弯的悬臂梁，研究它的两种受力状态：(1)如图 4.28a 所示，在自由端受力 P 作用；(2)如图 4.28b 所示，力 Q 作用在任意点 C。第一种情况下，C 点的挠度由下列方程给出

$$\delta_C = \frac{Pc^2}{6EI}(3l - c) \tag{a}$$

图 4.28

第二种情况下，C 点的挠度相当于计算长为 c 的悬臂梁的端挠度，挠度为 $Qc^3/3EI$，梁的 AC 部分保持直线，挠度曲线在 C 点的切线为 AC 直线，斜率为 $Qc^2/2EI$。这样，在 A 点的总挠度为

$$\delta_A = \frac{Qc^3}{3EI} + \frac{Qc^2}{2EI}(l - c) = \frac{Qc^2}{6EI}(3l - c) \tag{b}$$

比较式(a)和式(b)，当 $P=Q$ 时，两者的挠度相等。也就是说，作用在 A 点的力 P 在 C 点产生的挠度，等同于作用在 C 点的力 P 在 A 点产生的挠度。对于更一般的情况，当 P、Q 不等时，挠度(a)和挠度(b)不再相等。但是，力 P 在表达式(b)中所表示的位移上做的功，相当于力 Q 在表达式(a)所对应位移上做的功，即

$$P\delta_A = Q\delta_C$$

现在研究在两种不同受力状态下弹性体的一般情况。如图 4.29a 所示，第一种情况受力 P_1、P_2 作用，第二种情况受力 P_3、P_4 作用(见图 4.29b)。我们规定在第一种受力情况下，1、2、3、4 点在沿力方向的位移为 δ'_1、δ'_2、δ'_3、δ'_4。第二种受力情况下，位移为 δ''_1、δ''_2、δ''_3、δ''_4。现在，假定四个力同时作用，而且满足叠加原理。通过叠加原理得到的点 1、2、…沿力 P_1、P_2 方向的位移分别为 $\delta'_1+\delta''_2$、$\delta'_2+\delta''_2$、…，则变形体内的总应变能为

图　4.29

$$U=\frac{1}{2}[(\delta'_1+\delta''_1)P_1+(\delta'_2+\delta''_2)P_2+(\delta'_3+\delta''_3)P_3+(\delta'_4+\delta''_4)P_4] \tag{c}$$

应变能的大小与力的作用次序无关。例如，我们假定 P_1、P_2 先作用，则相应的应变能为

$$\frac{1}{2}(P_1\delta'_1+P_2\delta'_2) \tag{d}$$

然后再作用 P_3、P_4，由于叠加原理成立，在 P_3、P_4 作用过程中产生的位移不受先前 P_1、P_2 的影响，而且等同于前面定义的位移 δ''_1、δ''_2、δ''_3、δ''_4。在逐步加载过程中，P_3、P_4 做的功为

$$\frac{1}{2}(P_3\delta''_3+P_4\delta''_4) \tag{e}$$

同时，前面作用的力 P_1、P_2 在位移 δ''_1、δ''_2 上做功等于

$$P_1\delta''_1+P_2\delta''_2 \tag{f}$$

把表达式(d)、(e)、(f)相加，就可以得到总的应变能，这个应变能同表达式(c)相等，可以得到

$$P_1\delta''_1+P_2\delta''_2=P_3\delta'_3+P_4\delta'_4 \tag{4.10}$$

等式表明，第一种情况下的力在第二种情况下的力引起的位移上做的功，等于第二种情况下的力在第一种情况下的力引起的位移上做的功，这就是互等定理。

前面互等定理的推导也同样适用于广义力的情况，例如，可以研究图 4.30 所示的两种不同受力情况下的悬臂梁。在梁端受到力 P 的情况下，A 端的转角为

$$\theta_A=\frac{Pl^2}{2EI}$$

同样，在力偶 M 的作用下，A 端的挠度为

图　4.30

$$\delta_A = \frac{Ml^2}{2EI}$$

可以看出 θ_A、δ_A 的值满足互等定理，例如

$$M\theta_A = P\delta_A$$

另一个例子，如图 4.31 所示的等边三角形刚性板，由相同横截面积 A 的三根竖直杆和三根斜杆支承，直杆和斜杆在底部铰接。一种情况是力 W 作用在板的中心(见图 4.31a)，另一种情况是力偶 M 作用在板面上(见图 4.31b)。由于 W 的作用，竖直杆压缩了 $Wh/3AE$。由于斜杆的长度没有发生变化，竖直杆的压缩受结构的另一个侧面的变形影响(见图 4.31c)。因此，刚性板会发生转动。计算转角 θ 时，我们可以看出，铰结点 m_1 和 n_1 的中点 s_1 沿 m_1n_1 移动了 $Wh^2/3AEl$。s 点离板的中心 O 的距离为$\frac{l}{2\sqrt{3}}$；把 s 点的位移除以这个距离就可以得到板的转角 θ，即

$$\theta = \frac{Wh^2}{3AEl}\frac{2\sqrt{3}}{l} = \frac{2Wh^2}{AE\sqrt{3}l^2} \tag{g}$$

作为图 4.31b 中载荷的作用结果，不但可以得到板的扭转，而且还有直杆的位移。为了顺利计算，可以用同时作用在三角形板的三个边的相等的力组成的静定平衡系统来代替力偶 M。这样，由于

$$3P\frac{l}{2\sqrt{3}} = M$$

可以得到

$$P = \frac{2M}{l\sqrt{3}}$$

如图 4.31d 所示，每个力 P 在相应的竖直杆上都产生一个压力 Ph/l。因此，板的竖直位移

图 4.31

δ 为

$$\delta = \frac{Ph^2}{lAE} = \frac{2Mh^2}{l^2AE\sqrt{3}} \tag{g'}$$

对照第一种情况下力的转角式(g)和第二种情况下竖直方向的位移表达式(g′)，应用互等定理可以得到

$$M\theta = W\delta$$

互等定理在作多余反力的影响线方面尤其有用。例如，如图 4.32a 所示的有三个支座的梁，研究一下中间支座点上的多余反力 Y_C 的变化，随着运动载荷 P 的作用点位置 x 的变化，Y_C 也在发生变化。在应用互等定理时，我们会经常比较两种不同受力下给定结构的受力情况。第一种情况如图 4.32a，施加真实载荷，第二种情况如图 4.32b，移去载荷 P，用单位力来代替 Y_C 的作用。第二种情况是静定系统，可以用下列方程来定义挠曲线 AC 部分

图　4.32

$$y = \frac{(1\text{lb})l_2x}{6(l_1+l_2)EI}[(l_1+l_2)^2 - l_2^2 - x^2] \tag{h}$$

右边 BC 部分也有类似的表达式，在等式(h)中代入 $x = l_1$，可以得到单位载荷的挠度

$$\delta_C = \frac{(1\text{lb})l_1^2l_2^2}{3(l_1+l_2)EI} \tag{i}$$

现在运用互等定理先计算图 4.32a 中相对应的力在图 4.32b 中相对应的位移上做的功，这个功显然是

$$Y_C\delta_C - Py$$

然后，计算图 4.32b 中的力在图 4.32a 中对应的力的位移上做的功，可以发现这个功为零，因为图 4.32b 中的单位力在图 4.32a 中相应的位移为零。因此，由互等定理得

$$Y_C\delta_C - Py = 0$$

从中得到

$$Y_C = \frac{Py}{\delta_C} = \frac{3P(l_1+l_2)EI}{(1\text{lb})l_1^2l_2^2}y \tag{j}$$

从等式可以看出，当载荷 P 沿着梁 AB 运动时，C 点反力的变化率跟 C 点在单位力作用下 y 的挠曲线 ACB 的变化率相同。于是，这个挠度曲线可以作为反力 Y_C 的影响线。有了这条影响线，就可以用下面的等式求出在任意 P_1、P_2、P_3、…作用下的反力 Y_C

$$Y_C = \frac{1}{\delta_C}(P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \cdots)$$

在式中 y_1、y_2、…表示影响线 ACB 对应于力 P_1、P_2、…的坐标。

如果想得到图 4.32a 中在梁的中间支座 C 上弯矩 M_C 的影响线，先从该处把梁截断，并在此处加一对大小相等、方向相反的力偶矩 M_C 作用，如图 4.33a 所示。所对应的单位载荷如图 4.33b 所示。利用互等定理

图 4.33

$$M_C(\theta_1+\theta_2)-Py=0$$

得到

$$M_C=P\frac{y}{\theta_1+\theta_2}$$

把已知的 θ_1、θ_2 和 y 的式子代入，可以得到左边梁的影响系数为

$$\frac{x(l_1^2-x^2)}{2l_1(l_1+l_2)} \tag{k}$$

如果把 l_1、l_2 的下标对调，而且 x 定义为距 B 点的距离，那就可以得到右边梁的同样形式的影响系数。

如果影响线的解析表达式的推导对前面的例子不适用，但可以通过对真实结构模型的实验而求出影响线。例如，我们想得到图 4.34a 中的两端铰接的拱的水平推力 H 的影响线。如图 4.34b 中在附加力作用状态下，假定支座 B 可动，而施加如图 4.34b 所示的大小相等、方向相反的单位力的作用。用 δ 表示在虚载荷状态下 B 支座的水平位移，用 y 表示 C 点的竖直位移。由互等定理

$$H\delta-Py=0$$

图 4.34

可以得到

$$H\approx\frac{Py}{\delta}$$

这个结果跟前面得到的等式(j)非常相似。因此，我们称在如图 4.34b 状态下，用比率 y/δ 来表示推力 H 的影响系数。很明显，通过制作一个拱的模型，并施加如图 4.34b 所示的载荷，这个影响系数可以通过测量挠度 y 和 δ 的值来得到。

当系统有多个冗余的超静定量时，由实验得出的影响线结论很有用。在如图 4.35a 所示的两个固定支座的矩形结构中，有三个冗余约束。移走 B 点的支座，用反力代替。就可以得到如图所示的三个超静定量 H、V、M_b。为了利用试验得到的影响线求得每个量，必须利用一个结构模型，在每种情况下都给模型中 B 点一个所求的力在 B 点产生的位移。例如要求得反力 H，给模型中 B 端一个水平位移 δ。通过这样一个适当的约束可以阻止横截面发生竖直位移和角位移。用这种方法可以得到如图 4.35b 所示的变形。我们用 H'、V'、M'_B 来表示在 B 点得到位移 δ 时的力。在图 4.35a 和 b 所示状态下应用互等定理，只有真实力 P、H

在虚拟状态下对应的位移(见图 4.35b)不为零，H'、V'、M'_B 在图 4.35a 中对应的位移都为零。于是，可得到

$$H\delta - Py = 0$$

从中得到

$$H = \frac{Py}{\delta}$$

图　4.35

这样又一次得到 H 的影响系数是用挠度 y 除以位移 δ，而且这些值都可以从实验模型上测得。V 和 M_B 的影响线可以用同样的方法测得。为了得到 V 的影响线，我们给模型中 B 端一个竖直方向的位移，并同时限制它的水平位移和转动角度。在 M_B 的情况下，我们必须给 B 端一个角度并限制它的水平位移和竖直位移。这两种情况下，挠度值的测量给出了计算影响线所需要的数值。

习题

1. 如图 4.32 所示的梁，用表达式(k)计算中间支座上的最大弯矩 M_C。$l_1 = 40\text{ft}$，$l_2 = 20\text{ft}$，$P = 1000\text{lbf}$。
2. 利用互等定理，对固端梁 AB，导出固端弯矩 M_A 影响系数的表达式。当载荷 P 放置在梁的什么位置时，这个固端弯矩取最大值？
3. 参考图 4.36a，利用互等定理，对梁上的载荷 P 的任意位置，导出竖直反力 R_B 的表达式。梁的均匀抗弯刚度为 EI。
4. 参考图 4.36b，利用互等定理，对梁上的载荷 P 的任意位置，导出竖直拉杆 BC 的拉力 S 的表达式。梁的均匀抗弯刚度为 EI；拉杆的弹性模量为 E，长度为 l，横截面积为 A。
5. 参考图 4.36c，利用互等定理，对梁上的载荷 P 的任意位置，导出斜拉杆 BC 的拉力 S 的表达式。梁的均匀抗弯刚度为 EI；拉杆的弹性模量为 E，横截面积为 A。

图　4.36

第5章

铰接桁架的挠度计算

5.1 卡氏(Castigliano)定理的应用

在4.5节中讨论过的卡氏定理，很适合用于桁架挠度的计算，尤其是只求少量结点的位移时。以图5.1a所示桁架为例，桁架上作用有P、Q和R三个垂直载荷，并假定只需求出下弦杆上中间结点B的铅垂挠度。为此，我们必须推导出桁架应变能的表达式，该式是关于已知载荷P、Q和R的函数，然后计算这个表达式对作用于结点B处力Q的偏导数。对等截面杆组成的静定铰接桁架，应变能的表达式是非常简单的。用S_i表示实际载荷在第i杆产生的力(见图5.1a)，那么，在这根杆中储存的应变能是

$$\frac{S_i^2 l_i}{2A_i E} \tag{a}$$

式中，l_i为i杆的长度，A_i为i杆的横截面积。应用表达式(a)，对于桁架中所有杆求和[⊖]，得

$$U = \Sigma \frac{S_i^2 l_i}{2A_i E} \tag{5.1}$$

图 5.1

对载荷Q求偏导，注意式(5.1)中只有参数S_i与Q有关。因此，常微分求出的挠度形式如下

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial Q} = \Sigma \frac{S_i l_i}{A_i E} \frac{\partial S_i}{\partial Q} \tag{b}$$

式中，导数$\partial S_i/\partial Q$为任意杆件i杆中的力S_i对载荷Q的变化率。若把桁架上的载荷看成是单位力(见图5.1b)，很容易就能求出这个导数的大小。用s_i表示单位力在i杆中产生的力，显然，导数$\partial S_i/\partial Q$等于s_i:1，则式(b)中挠度δ可写成如下形式

$$\delta = \Sigma \frac{S_i l_i}{A_i E} s_i \tag{5.2}$$

⊖ 假设所有杆件材料相同，且弹性模量E为常量。

其中因子 $S_i l_i / A_i E$ 为第 i 杆在实际载荷作用下的伸长量。s'_i 是比值 $s_i : 1$ 的简写，它们可用如图 5.1b[⊖]所示的虚载荷法对每根杆件进行求解。因为在这种情况下桁架是静定的，如果各杆件的尺寸和弹性模量 E 均已知，很容易计算 S_i 与 s'_i，然后应用方程(5.2)可求出挠度 δ。

举例如下。假设 $P = Q = 16000\text{lbf}$，$R = 8000\text{lbf}$，由表 5.1 第 2 列查出各杆的长度。从表中第 4、5 列可查到 S_i 与 s'_i 的值，结合第 3 列的已知横截面积，可以得到第 6 列的值。应用方程(5.2)，对最后一列求和，乘以 10^3 后除以 E，得到要求的挠度 δ，假设其为钢结构桁架，$E = 30 \times 10^6\text{psi}$，得

$$\delta = \frac{5170 \times 10^3}{30 \times 10^6}\text{in} = 0.1723\text{in}$$

表 5.1 中的计算由四个主要的数值构成，其中三个数值的计算由一般滑移法则给出，在实践中有相当高的精度。

表　5.1

i	l_i/in	A_i/in^2	S_i/lbf	s'_i	$\frac{S_i s'_i l_i}{A_i 10^3}$	$s''_i l_6$	$\frac{S_i l_i}{A_i} s''_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	250	6	-27500	-0.625	716.0	0.625	-2387
2	150	3	16500	0.375	309.4	-0.375	-1031
3	200	2	16000	0	0	0	0
4	150	3	16500	0.375	309.4	-0.375	-1031
5	250	2	7500	0.625	585.9	0.625	1953
6	300	4	-21000	-0.750	1181.0	0	0
7	250	2	12500	0.625	976.6	-0.625	-3.255
8	150	3	13500	0.375	253.1	0.375	844
9	200	2	8000	0	0	0	0
10	250	6	-22500	-0.625	585.9	-0.625	1953
11	150	3	13500	0.375	253.1	0.375	844

如果要求结点 B 的水平位移，在实际载荷 P、Q、R 上加一个无穷小力 T(图 5.2a)。然后，由导数 $\partial U / \partial T$ 得到所求的水平位移如下

$$\delta = \sum \frac{S_i l_i}{A_i E} \frac{\partial S_i}{\partial T} \qquad \text{(c)}$$

由于 T 是一个无穷小力，S_i 的值与表 5.1 第 4 列的值相同。由图 5.2b 所示的载荷条件，可以求出 S_i 对 T 的变化率，即导数 $\partial S_i / \partial T$。对后者的载荷条件，只有杆 2 和杆 4 是有效杆。式(c)中只有两项不为 0，于是得到要求的水平位移

$$\delta = \frac{S_2 l_2}{A_2 E} + \frac{S_4 l_4}{A_4 E} = 2\,\frac{16500 \times 150}{3 \times 30 \times 10^6}\text{in} = 0.055\text{in}$$

图　5.2

⊖ 在进一步讨论中，总是用 s'_i 表示 $s_i : 1$，但要切记，在使用它时，要把它当作一个纯粹的数字，称为杆 i 的影响数。

显然，这个值是杆 2 和杆 4 伸长量的总和。

有时当桁架产生挠曲时，要求出桁架上某根杆的转角，则这些角度也可用卡氏定理求出。以图 5.1a 所示桁架为例说明整个计算过程，求解杆 6 在载荷 P、Q 和 R 作用下产生的转角。如图 5.3a 对应于这个转动的广义力是力偶 M，这表明当杆 6 在图示平面内转动时，这组力才产生作用。

图 5.3

如果这杆平行移动或沿杆伸长，并保持方向不变，那么两个大小相等方向相反且垂直于杆轴线的力将相互抵消。因为广义力 M 与杆 6 的转动相对应，通过计算偏导数$\partial U/\partial M$，可求出转角。若用式(5.1)代替 U，则转角为

$$\theta=\frac{\partial U}{\partial M}=\sum\frac{S_i l_i}{A_i E}\frac{\partial S_i}{\partial M} \qquad \text{(d)}$$

假定力偶 M 无穷小，力 S_i 的值与前述相同，见表 5.1 中第 4 列。导数$\partial S_i/\partial M$ 表示力 S_i 对力偶 M 的变化率。在桁架施加单位力偶，如图 5.3b 所示，然后计算这个力偶在桁架各杆上产生的力 s'_i，可以求出这个导数值

$$\frac{\partial S_i}{\partial M}=\frac{s''_i}{1}$$

因为方程的左边是力除以力矩，所以偏导数$\partial S_i/\partial M$ 的量纲是[长度$^{-1}$]，由式(d)，求出的 θ 角是一个无量纲量。

如上所述，用单位力比用载荷 $1/l_6$ 更简单(见图 5.3b)，然后用相应的轴力 $s''_i l_6$ 除以长度 l_6 得到导数$\partial S_i/\partial M$ 的值。对于假定的数据，用单位力代替 $1/l_6$ 计算出 $s''_i l_6$ 的值(见图 5.3b)，已经在表 5.1 第 7 列中给出。由该列和第 2 到 4 列数值，可计算出表中的第 8 列值。将这些数求和再除以 E，由方程(d)，可解出所求转角 θ 的值。对钢结构，有

$$\theta=\frac{1}{E}\sum\frac{S_i l_i}{A_i}s''_i=-\frac{2110}{30\times10^6}\text{rad}=-70.3\times10^{-6}\text{rad} \qquad \text{(e)}$$

负号表示杆 6 的旋转方向与图 5.3b 中单位力偶的方向相反。

卡氏定理可用来计算桁架挠曲时两结点间距离的变化。假设在 P、Q 和 R 的作用下，求结点 D 和 F 之间距离的变化(见图 5.4a)。很明显，对应于这个距离变化的广义力是一对沿 DF 方向大小相等的力 T，那么，由卡氏定理可得

$$\delta=\frac{\partial U}{\partial T}=\sum\frac{S_i l_i}{A_i E}\frac{\partial S_i}{\partial T} \qquad \text{(f)}$$

如果再次假定 T 是一个无穷小力，S_i 是由实际载荷 P、Q 和 R 产生的。通过计算各杆在单位力作用下产生的力(见图 5.4b)，可求出导数$\partial S_i/\partial T$ 的值。

图 5.4

回顾前面几个例子，可以看到在每个实例中，只需

对桁架作两个简单的静定分析：一个是在实际载荷作用下进行分析；另一个是在虚构的单位力或对应于要求的挠度或位移的广义力的作用下进行分析。那么，应用表格和方程(5.2)作几个简单的计算，就可以容易求出要求的挠度。

习题

1. 如图5.4所示桁架在载荷P、Q和R的作用下，使用表5.1中的数据，计算DF距离的变化值。
2. 如图5.5a所示，桁架每根杆的横截面积$A_i=1\text{in}^2$，弹性模量$E=10\times10^6\text{psi}$，$a=10\sqrt{2}\text{in}$，$P=10000\text{lbf}$。求结点C的水平位移δ_C。
3. 如图5.5b所示简单桁架为一个正方形结构$ABCD$，其边长为10in，对角杆AC水平。在力$P=10000\text{lbf}$的作用下，求垂直距离BD的减小量δ。每根杆的横截面积$A_i=1\text{in}^2$，弹性模量$E=30\times10^6\text{psi}$。

图 5.5

4. 如图5.6所示简单桁架，每根杆件横截面积$A_i=2\text{in}^2$，$E=30\times10^6\text{psi}$，求结点D的垂直位移。
5. 如图5.7所示简单桁架，各杆件横截面积$A_i=8\text{in}^2$，$E=30\times10^6\text{psi}$，求辊轴支座B的水平位移。

图 5.6

图 5.7

5.2 挠度计算的麦克斯韦—莫尔(Maxwell—Mohr)法

要说明麦克斯韦—莫尔(Maxwell—Mohr)法，首先分析图5.8a所示桁架，在已知载荷P和Q的作用下，计算结点C的铅垂位移δ。这个位移是由桁架各杆变形后产生的微小位移之和。要求的是由单杆[⊖]伸长产生的结点C处的位移，比如说，如图5.8b所示系统中的杆CD。去掉杆CD，并用一个单位力代替实际载荷作用在结点C上，用这个方法可得到一个包含两个刚体的可动系统。图中阴影部分代表两刚体，且能相对转动。要保持系统的平衡，必须加上力s'_i。这些力代替了除去的杆CD对于桁架阴影部分的作用，且等于作用在结点C的

⊖ 其他杆件被认为是刚性的，且长度不变。

单位载荷在杆 CD 产生的力。现在，分析一个简单的几何问题，考虑由结点 C、D 之间距离的微增量 Δl_i 引起的结点 C 的挠度 $\Delta\delta$。解决这个问题，需要引入虚位移原理，由于点 C 上的单位力和 s'_i 与支座反力平衡，对所假定的小位移，这个平衡力系所做的功为 0。因此有

$$1\Delta\delta - s'_i\Delta l_i = 0 \qquad \text{(a)}$$

方程中没有出现支座反力，因为支座 A 不移动，支座 B 移动方向垂直于 B 点的反力，所以支座反力不做功。由方程(a)，得

图 5.8

$$\Delta\delta = \Delta l_i \frac{s'_i}{1} \qquad \text{(b)}$$

不难看出，用结点 C、D 之间距离的变化值 Δl_i 乘以$\frac{s'_i}{1}$，可以求出结点 C 的位移。基于这种关系，现在分析图 5.8a 所示载荷的实际情况。使用前面用过的记号，这种情况下的杆 CD 是第 i 杆，伸长量是$\frac{S_i l_i}{A_i E}$。由关系式(b)，可求出由 i 杆的伸长引起结点 C 的位移为

$$\Delta\delta = \frac{S_i l_i}{A_i E}\frac{s'_i}{1} \qquad \text{(c)}$$

同理，分析其他杆件，并把相应的小位移加起来得到结点 C 的实际位移

$$\delta = \sum \frac{S_i l_i}{A_i E} s'_i = \sum \Delta l_i s'_i \qquad \text{(d)}$$

可以看出，若求桁架任意结点的位移，就必须求出桁架的所有杆件在实际载荷作用下的伸长量 Δl_i，以及作用在该结点上的单位载荷产生的力 s'_i(见图 5.8b)，这两种计算对于静定桁架都很简单，也可以如前所述(见表 5.1)用表格形式求出。

比较式(d)和式(5.2)，可以看出用麦克斯韦—莫尔法求出的位移在形式上也可通过卡氏定理得到。这里再次给出的推导过程使人更容易掌握问题的纯几何特性。很明显，式(d)中位移并不是惟一由各杆长度变化量 Δl_i 引起的。有时各杆的伸长量是由某个特定的温度变化而产生的。假定 α_i 是线胀系数，t_i 是温度升高值，则杆的相应伸长量为 $\alpha_i t_i l_i$，有时用一些机械装置可以改变杆件长度，如松紧螺旋扣，其对于桁架挠度的影响可由式(d)计算。假定 Δl_i 已知，把桁架中各种不同原因产生的挠度叠加[⊖]，可将式(d)推广为

$$\delta = \sum\left(\frac{S_i l_i}{A_i E} + \alpha_i t_i l_i + \Delta_i\right) s'_i \qquad (5.3)$$

在这个式子中，不仅考虑了各杆的弹性伸长，而且还考虑了由温度变化以及某些特殊装置产生的伸长。

有时，不仅要求出桁架各杆长度变化产生的挠度，还要求出因支座的微小位移产生的挠

⊖ 假定叠加原理包含实际桁架中产生的小变形。

度。由方程(5.3)很容易求出这些附加的挠度。假定支座上的铰链通过一些虚杆与固定基础连接，虚杆长度的变化与支座的已知位移一致。把这些虚杆的位移与式(5.3)给出的位移加起来，就能得出支座的已知位移对挠度的影响。举个例子，分析一个不对称的三铰拱(见图 5.9a)，并计算铰 C 在载荷 P_1、…、P_4 作用下产生的水平位移。温度升高 t，支座微小位移的分量为 ξ_1、η_1 和 ξ_2、η_2，在图中以放大比例标出。假定铰 A 和 B 分别用两根虚杆与固定基础连接，一根垂直、一根水平。可以认为 ξ_1、η_1 和 ξ_2、η_2 代表这些杆的微小缩短量。那么，再分析同样的三铰拱，假定一个水平单位力作用在铰 C 上(见图 5.9b)，并计算由单位力产生的反力 V_1、H_1、V_2、H_2 和杆的内力 s'_i。现在应用式(5.3)可得到铰 C 的水平位移如下

图　5.9

$$\delta = \sum\left(\frac{S_i l_i}{A_i E} + \alpha t l_i\right)s'_i + \xi_1 H_1 + \eta_1 V_1 - \xi_2 H_2 - \eta_2 V_2$$

这个式子中的求和部分包括了三铰拱的所有实杆，后四项分别对应四根虚杆。因为位移 ξ_1、η_1、ξ_2、η_2 表示杆的缩短，所以在这些位移前都加上负号。同时给反力 V_1、H_1 加上负号，因为从图 5.9b 中这些反力的方向可看出，它们表示虚杆中的压力。

习题

1. 如图 5.9 所示，桁架在温度均匀升高 70℉ 的情况下计算铰 C 位移的垂直分量。假设所有杆都是钢制的，它们的温度线胀系数 $\alpha = 0.0000065(\text{in/in})/℉$ 和 $a = 10\text{ft}$。
2. 如图 5.9 所示，三铰拱桁架的每根杆的横截面积 $A_i = 2\text{in}^2$，弹性模量 $E = 30 \times 10^6\text{psi}$，$a = 10\text{ft}$。施加载荷 $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 10000\text{lbf}$，如果除这些施加的载荷外，支座 B 相对 A 有下沉量 $\xi_1 = \eta_1 = 0$，$\xi_2 = \eta_2 = 0.01\text{ft}$，并且温度下降 40℉，计算铰 C 的垂直位移。

5.3　图解法求桁架位移

由前一节的讨论可以看出，分析计算桁架位移时要求考虑作用在每个待求结点的特殊载荷。如果要求解很多结点的位移，那么按前述方法计算将会很烦琐。而用图解法求位移则简单多了[⊖]。举个简单的例子，如图 5.10a 所示，结点 A 通过杆 1 和 2 与结点 B、C 连接起来，已知结点 B、C 的位移 BB' 和 CC' 以及杆 1、杆 2 的长度变化，求结点 A 的相应位移。首先假定各杆在点 A 分开，并分别平移到 $A'B'$ 和 $A''C'$ 处，而 BB' 和 CC' 表示结点 B、C 的已知位移。在这些新的位置，保持结点 B' 和 C' 不动，并给出杆的另一端的位移 $A'A'_1$ 和 $A''A''_1$，在图中用粗实线表示。变化后的位移等于杆的已知长度变化量，也就是说 $A'A'_1$ 是杆 1 的已知伸长

⊖ 这种求桁架位移的图示法称为 williot 图。

量，$A''A_1''$ 是杆 2 的已知缩短量。现在，为了使结构闭合，以 B' 点为中心旋转杆 $B'A_1'$，以 C' 为中心，旋转杆 $C'A_1''$，这样才能结合 A_1' 和 A_1'' 找到共同点。因为研究的范围是小变形和小转角，点 A_1' 和 A_1'' 随杆旋转所画出的圆弧可以用垂线 $A_1'A_1$ 和 $A_1''A_1$ 代替。两垂线的交点 A_1 就是点 A 的新位置。那么矢量$\overline{AA_1}$就是结点 A 的所求位移。

图 5.10

相对于杆的长度，杆的伸长量与结点的位移是非常小的。因此，表示这些量时必须放大比例并用另一个图表示出所有这些量，见图 5.10b。以 O 为极点，用选定的比例作出结点 B、C 的已知位移 OA'和 OA''。然后，从点 A'和 A''画出矢量 Δl_1 和 Δl_2，用粗实线表示，二者代表杆 1 和 2 的长度变化量。应注意这些变化量的符号，杆 1 是伸长，因此 Δl_1 的方向是由 B 指向 A，杆 2 是缩短，于是 Δl_2 的方向是由 A 指向 C。最后，在矢量 Δl_1 和 Δl_2 的终点上作垂线交于 A_1，OA_1 即为结点 A 的所求位移。注意到图 5.10b 中的位移与图 5.10a 中的$AA'A_1'A_1A_1''A''$部分相同。如果需要的话，作图时比例可以再取大一点。图 5.10b 表示图 5.10a 中简单结构 BAC 的 Williot 图。

前述方法可用来作所有简单桁架的位移图，这些桁架是按 2.1 节中给出的规则组成。举第一个例子，见图 5.11a 中桁架，假定各杆承受压力而长度变化 Δl_i。图 5.11b 中“+”表示伸长，“-”表示缩短。我们从结点 C 的位移开始分析，C 通过杆 1 和 2 分别与 A、B 相连，A、B 是固定的，如图 5.11c 所示，点 a、b 与极点 O 重合。然后从点 a、b 开始，以一个适当的比例作出矢量 Δl_1 和 Δl_2，分别表示杆 1 的伸长和杆 2 的缩短。在两个矢量的终点作垂线相交于点 c，$\overline{Oc}$即为铰 C 的位移，现在图中有了点 a 和 c，要求解结点 D 的位移，D 点通过杆 3 和杆 5 分别与 A、C 相连。从 a 点作矢量 Δl_3 表示杆 3 的伸长量，从 c 点作矢量 Δl_5 表示杆 5 的缩短量，然后对两个矢量作垂线相交于点 d，$\overline{Od}$即为结点 D 的位移。同理，可求出点 E 位移，最后求出点 F 位移，于是得到如图 5.11c 所示的完整 Williot 图，从中可以按比例求出桁架每个结点的位移。

a)

杆	Δl_i/in
1	+0.05
2	−0.05
3	+0.10
4	−0.10
5	−0.05
6	+0.05
7	+0.05
8	−0.05

b)

c)

图 5.11

举第二个例子，见图 5.12a 所示简支桁架，由已知载荷先计算出在力 P 作用下所有杆产生的长度变化 Δl_1、…、Δl_7。因为系统是静定的且所有参数已知，故这些计算很容易。现从固定结点 A 开始分析。首先假定杆 AE 在变形过程中保持水平。因此，结点 E 只有一个水平位移且等于杆 2 的伸长量 Δl_2。知道结点 A 和 E 的位移，就能求出连接杆 1 和杆 4 的结点 B 的位移，像前例那样作图，先任意选一极点 O(见图 5.12b)，并标上点 a'和 e'，它们分别对应于结点 A 和 E。因为 A 是固定的，所以 a'与极点 O 重合。矢量$\overline{Oe'}$等于杆 2 的伸长量 Δl_2，方向由 A 指向 E，表示杆的伸长。从点 a'和 e'沿着正确的方向画出矢量 Δl_1 和 Δl_4，分别代表杆 1 的缩短和杆 4 的伸长。在两个矢量的终点分别作垂线相交于点 b'，$\overline{Ob'}$就是铰 B 的位移，现在图上有了点 e'和 b'，即可确定 c'点的位置和结点 C 的位移$\overline{Oc'}$。点 C 通过杆 3 和杆 5 分别与 B、E 相连，依次从点 e'和 b'可画出矢量 Δl_3 和 Δl_5，分别代表杆 3 的缩短量和杆 5 的伸长量，然后过这两个矢量的终点作垂线，二者的交点可确定点 c'的位置。同理继续作图，最后可得到图中最后一个点 d'。从极点 O 到 e'、b'、c'和 d'作出的矢量代表桁架相应铰位移的大小和方向。缩小比例，就可以画出桁架变形后的形状，如图 5.12b 细实线所示。

因为假设杆 AE 保持水平，桁架的变形形状 $AB'C'D'E'$不满足支座 D 的条件，支座 D 只能水平移动，而从图 5.12b 中的图解法得到的位移 DD'不是水平的。为了满足支座 D 的条件，必须使桁架绕铰 A 旋转一个角度，如图 5.12a 双点划线所示。则 D'点会到达水平线 AD 上。用此法满足两支座的条件后，把图 5.12b 中求出的位移与旋转产生的位移几何相加，就得到两铰的真实位移。这些旋转位移按如下方法求出：由于桁架变形形状 $AB'C'D'E'$与初始

图　5.12

形状非常接近，故可假定在绕铰 A 的旋转过程中有很高的准确性，即铰 D' 垂直于 AD 移动，铰 C' 垂直于 AC 移动等等。因此，这些位移的大小与半径 AD、AC 成比例。很明显，所求点 D 的旋转位移等于图 5.12b 中用矢量 $\overline{Od'}$ 表示的位移 DD' 的垂直分量。求出了 D' 的旋转位移，其他铰点的位移也能从图 5.12c 得到，图 5.12c 中的 Od'' 等于图 5.12b 中 Od' 的垂直分量。利用图 $Ob''c''d''e''$ 和图 $ABCDE$ 几何相似，但旋转 90°，可以得到其他点的旋转位移。矢量 $\overline{b''O}$、$\overline{c''O}$、$\overline{d''O}$ 和 $\overline{e''O}$ 表示桁架中所有铰的旋转位移。由几何相似，这些矢量垂直相应的半径并与半径的长度成比例。那么，图 5.12c 中的矢量 $\overline{b''O}$ 垂直图 5.12a 中的半径 AB，并有 $b''O:AB=d''O:AD$，矢量 $\overline{c''O}$ 垂直半径 AC，并有 $c''O:AC=d''O:AD$ 等等。要简化图 5.12b 中附加于已知位移的旋转位移，将图 5.12c 叠加到图 5.12b 上，则极点 O 重合，如图 5.12d 所示。那么，铰 B、C、D、E 的总位移可用矢量 $\overline{b''b'}$、$\overline{c''c'}$、$\overline{d''d'}$ 和 $\overline{e''e'}$ 表示。明白了这一点，我们以铰 B 为例进行分析，它的位移对应于图 5.12a 中的双点划线部分，也是图 5.12b 中的矢量 $\overline{Ob'}$，铰 B 的旋转位移由矢量 $\overline{b''O}$ 给出，因此这两个位移几何相加即是铰 B 的真实位移矢量 $\overline{b''b'}$。同理，可求出其他铰的位移[⊖]。

若桁架有很多杆，而分析方法不变，还像在图 5.12 那样从支座开始作位移图，这些线会延伸到离极点 O 很远处，这个图就变得不好用了。在这种情况下，若从桁架的中部开始作图，可得到一个很紧凑的图，并可减少画图时无法避免的错误。以图 5.13a 中的桁架为例，从杆 AB 开始，假设铰 A 固定，铰 B 只能垂直运动，从位移图(见图 5.13b)可知点 a' 与 O 重合，点 b' 在 O 的上方且距离为 Ob'，Ob' 等于杆 1 的伸长量 Δl_1。有了点 a' 和 b'，可以用同样的方法得出和其他铰相关的点，如图 5.12 所示。

图 5.13

⊖ 校正 Williot 图的方法满足支座条件归功于 Otto Mohr，校正后的图称为 Williot-Mohr 图。

考察 AB 杆右边的桁架，在示意图 5.13b 中可得到点 c'、d' 和 e'。而对桁架左边部分可得到点 f'、g' 和 h'。如果变形时 AB 杆保持不动，则由 O 点指向这些点的矢量分别为桁架各铰的位移。图 5.13a 中双点划线表示桁架相应的变形。由于对杆 AB 的假设完全是任意的，所以它得到的位移不能满足支座要求：铰 H 不能移动和铰 E 只能水平位移的条件。要满足这两个条件，就必须作两个附加移动。首先把已变形的桁架整体平移 $H'H$ 距离。这样，满足了左支座 H 的条件。然后把桁架绕铰 H 做一个旋转，使点 E' 正好到达水平线 HE 上，如图 5.13a 所示。当桁架整体平移时，所有铰点都具有相同的位移，即图 5.13b 中的 $\overline{h'O}$，这个位移必须与前面得到的位移几何相加。这样，以点 h' 作极点，而不是用 O 点极点（见图 5.13b），很快就能求出位移。例如，把平移距离 $\overline{h'O}$ 与前面求出的结点 E 的位移 $\overline{Oe'}$ 叠加，得到矢量 $\overline{h'e'}$。对其他铰点会得到相似的结论，因此用点 h' 取代 O 作极点，可完成所求的平移位移 $\overline{h'O}$ 的几何相加。完成这步之后，可以用矢量 $\overline{h'e'}$ 代表铰 E 的位移。现在要满足支座 E 的条件，就必须绕铰 H 旋转桁架。旋转量是铰 E 的旋转位移 $\overline{e''h'}$，当它与 $\overline{h'e'}$ 几何相加时，便得到铰 E 的水平总位移 $\overline{e''e'}$（见图 5.13b）。桁架剩余铰点的相应旋转位移可通过作出与图 $e''h''f''b''c''$ 几何相似的桁架的形状，得出矢量 $\overline{a''a'}$、$\overline{b''b'}$、$\overline{c''c'}$、…即为桁架铰点的真实位移。

求出了铰点的总位移，通过投影很快得到如图 5.13c 所示多边形 $h_0g_0a_0d_0e_0$ 下弦杆结点位移的垂直分量。对桁架来讲，这个多边形叫挠度多边形。

从前面几个例子可以看出，对于简单桁架，要作出所有杆件长度变化量的位移图不是很困难。如果继续作图，只需重复每个新铰点。如果是复杂或复杂形状的静定桁架，必须考虑一些其他的因素，这将通过最后一个例于来说明。为此，看一个复合屋顶桁架的例于，如图 5.14a 所示，在拉杆上标出“+”，在压杆上标上“-”。要作这个桁架的位移图，先不考虑右边的腹杆，并把 FGH 看作是一个三角形。这意味着暂时把 FG、GH、FH 各看作一根杆，若把各杆的组合构件的已知变化长度代数相加，就可以得到它们的长度变化量。用这个方法能很快作出简单桁架的位移图。画这个位移图是以铰 B 保持不动为条件，且 BC 杆保持方向不变，如图 5.14b 所示。点 b 与极点 O 重合，画 Oc 平行于 BC 且 Oc 等于该杆的的已知缩短量，这样可得到点 c。同理，最后得到点 a 和点 h。$\overline{Oa}$ 和 $\overline{Oh}$ 分别表示支座 A 和 H 的位移。现在要满足真实支座的条件，整体平移桁架，平移量为 $\overline{aO}$，这样铰 A 与固定支座重合，然后再绕这个支座旋转桁架，直到 H 到达通过 A 的水平线（见图 5.14a）。前面已经解释过了，用 a 代替 O 作极点，可以得到平移位移的几何相加量。铰 H 的旋转位移是垂直的，大小为 $h'a$，当把 $h'a$ 加上位移 $\overline{ah}$ 时，使得铰 H 的合成位移 $\overline{h'h}$ 成为水平。那么，其他铰点的相应旋转位移也可求出，和前面一样，画图 $a'b'f'g'h'$ 几何相似于旋转 90° 的桁架。如图 5.14b 所示，在这个图上由原始点指向相应新点的矢量分别代表铰 A、B、C、D、E、F、G、H 的真实位移。

要完成这个问题，就必须考虑 I、J、K 的位移，这几个位移在前面作图中被忽略了。为此，按常规方法，作桁架右半部分的位移图，假设铰 G 保持不动且 GI 杆的方向保持不变，如图 5.14c 所示。从图中可求出铰 F 和 H 的位移 $\overline{Of}$ 和 $\overline{Oh}$。当然，这两个位移与图 5.14b 中已经求出的两铰的真实位移不一样，因为开始作图时是根据关于铰 G 和 I 作出的任意假设。要改正这个图，首先得平移右半部分桁架 $\overline{f'O}$ 长度，这样 $\overline{f'O}+\overline{Of}=\overline{f'f}$，如图 5.14b 所示。若在图 5.14c 中把 f' 当作一个新极点，上述平移变得很简单。接着，绕 F 旋转右半部分桁架，直到铰 H 达到它的真实水平位移 $\overline{h'h}$（见图 5.14b）。那么在图 5.14c 中的矢量 $\overline{f'h'}$ 代表要

图 5.14

求出的铰 H 绕 F 的旋转位移。还有利用几何相似于右半桁架 $FGHIJK$ 的图 $f'g'h'i'j'k'$，可求出其他铰的相应旋转位移。注意，图 5.14c 中矢量$\overline{f'h'}$应该与图 5.14a 中弦杆 FH 正交，这一点可以用来检查作图的正确性。

最后，按比例作出原始点到相应新点的矢量，可以求出桁架所有铰点的真实位移。即，结点 D 的真实位移可以用图 5.14b 中的矢量$\overline{dd'}$表示，结点 I 的真实位移可以用图 5.14c 中的矢量$\overline{i'i}$表示，等等。

习题

1. 如图 5.15 所示简单桁架，各杆受轴力 1000lbf 时，其横截面伸长(或缩短)0.01in。画出 Williot 图并求结点 E 位移的水平和垂直分量。
2. 画出简单桁架的 Williot-Mohr 图，其支座与承受载荷情况如图 5.16 所示。假设每根杆的轴向应变为 0.001。为获得最大精度，开始作图时应假定结点 D 固定，杆 DC 应保持垂直，求铰点 D 最后的垂直位移。

图 5.15

图 5.16

3. 画图 2.18 所示简单桁架的 Williot 图，假设每根杆的轴向应变为 0.001。
4. 画图 2.19 所示的简单桁架的 Williot 图。假设每根杆的轴向应变为 0.001。

5. 画图2.45所示复杂桁架的Williot-Mohr图。条件：每个下弦杆结点上受垂直载荷P。各杆的横截面积相同，且各杆轴向应变为0.001。（提示：首先，对每半个桁架画一个分开的位移图，假定左半桁架上结点C固定，杆CD保持方向不变，而右半桁架上结点E固定，杆EF保持方向不变。）

5.4 虚载荷法

在前几节描述求位移的图解法中，如果桁架由很多杆件组成，此法会使结果变得不准确，随着图表运算的增多，绘图误差不可避免会迅速增加，尤其是在各线几乎平行的情况下，还要求它们之间的交点。在实际应用中通常只需知道桁架弦杆结点的铅垂位移。用虚载荷法可以解决这个问题，这与它应用于计算梁挠度很相似。以图5.17a所示桁架为例，假设在给定载荷P_1、P_2、…的作用下，所有杆的伸长量均已知，那么，由任意一杆的伸长Δl_i来计算结点的垂直位移，比如说CD杆，可利用5.2节中讲过的方法。于是，任意结点m（见图5.17b）的位移δ_m可用下面方程求出

图 5.17

$$\delta_m = \Delta l_i \frac{S'_i}{l} \tag{a}$$

方程中S'_i是由结点m的单位力在杆CD产生的轴力。因为除杆CD外，所有杆都被看作是刚性的，见图5.17b的阴影处。桁架的两部分作刚体移动，以铰m为中心相对旋转，很明显，所有结点的垂直位移由图5.17c中的amb图中相应的纵坐标给出。注意到点m上的单位力在杆CD上产生的轴力S'_i等于点m上的弯矩除以距离h，由方程(a)，可得出结论，即图5.17c中的位移图可看作是下列虚载荷作用在虚梁AB上的弯矩图，即

$$\frac{\Delta l_i}{h} \tag{b}$$

如图5.17d所示，用同样的方法可以求出桁架中任一根弦杆的长度变化Δl_i产生的位移。现在，用叠加法把每个结点看作简支梁受式(b)定义的虚载荷[⊖]在相应横截面的弯矩，可以计算出桁架因所有弦杆长度变化而发生的位移。关于虚载荷的符号问题，注意到任意一根上弦杆的缩短，或是任意一根下弦杆的伸长都会使桁架产生向下的挠度，这表示上弦杆的缩短或是下弦杆的伸长意味着虚载荷是向下的或正的。

现在，分析腹杆长度变化对桁架挠度的影响。如果只有一根杆，比如说图5.18a中桁架

⊖ 正如所见，这些载荷都是纯数字，并且相应的弯矩量纲为长度。

的杆 DE，长度变化量为 Δl_i，用方程(a)求出图 5.18b 中结点 m 的位移。随后，对所有结点应用这个方程，可得到如下结论：用 Δl_i 乘以图 5.18c 所示杆 DE 影响线图相应的纵坐标，可求出这些结点的位移。要画出影响线图，应注意单位力作用在结点 E 左边的任何位置，力 S'_i(见图 5.18b)都可由下面方程求出

$$S'_i = \frac{x}{l}\frac{a}{r} \qquad \text{(c)}$$

方程中距离 a 和 r 在图中已标出，如果单位力作用于结点 D 的右边，则力 S'_i 可由下面方程求出

$$S'_i = \frac{l+a}{r}\left(\frac{x}{l}-1\right) \qquad \text{(d)}$$

那么，S'_i 的影响图为图 5.18c 所示的形状。用图上的纵坐标乘以 Δl_i，可得到 DE 杆(见图 5.18d)长度变化 Δl_i 使桁架产生的挠度。在这种情况下，影响图的形状如图 5.18c 所示，图 5.18d 中的阴影面积可看作是简支梁的弯矩图。梁承受载荷的情况如图 5.18e 所示，这些载荷包括两个虚载荷 P 和 Q，它们可由梁端的反力条件求出，有

图 5.18

$$R_A = \frac{a\Delta l_i}{rl} \quad 和 \quad R_B = -\frac{(a+l)\Delta l_i}{rl}$$

从而有

$$P = \frac{\Delta l_i}{r}\frac{l_2}{l_3} \quad 和 \quad Q = \frac{\Delta l_i}{r}\frac{l_1}{l_3} \qquad \text{(e)}$$

式中 l_1、l_2、l_3 是图 5.18e 中所示的距离。可以计算在载荷 P 左边梁上某点的弯矩，且该点距支座 A 为 x(见图 5.18c)，作为验证，这个弯矩等于式(c)乘以 Δl_i

$$M = \frac{a}{r}\frac{x}{l}\Delta l_i$$

同理，载荷 Q 右边梁的弯矩等于式(d)乘以 Δl_i，这意味着图 5.18e 中梁的弯矩图与图 5.18d 中位移图相同。那么，可以得出结论，通过对每根腹杆引入由式(e)定义的两个虚载荷，利用叠加法，计算承受虚载荷的相应简支梁的弯矩，就能求出桁架因所有腹杆长度变化而产生的挠度。

关于虚载荷 P 和 Q 的表达式(e)可作如下简化：过腹杆 DE 的端点作垂线(见图 5.18b)，由几何相似，可以看出 $h_1/r = l_3/l_2$ 和 $h_2/r = l_3/l_1$，把这些值代到式(e)中，可得

$$P = \frac{\Delta l_i}{h_1} \quad 和 \quad Q = \frac{\Delta l_i}{h_2} \qquad \text{(f)}$$

无论在什么情况，利用影响图纵坐标的符号都可以很快判断这些虚载荷的方向。这个规则也

说明，在弦杆和腹杆被如图 5.18b 所示的 *ss* 截面切断后，如果轴力的符号相同，作用在腹杆两端的虚载荷方向向下。若轴力的符号相反，虚载荷作用方向向上。

要说明这个方法，分析图 5.19a 所示桁架。桁架上各杆的长度和横截面积在表 5.2 中已列出。当大小为 24000lbf 的载荷作用在结点 q 上时，表 5.2 给出了各杆的轴力及其伸长量。要求出弦杆因相应的长度变化产生的挠度，首先由式(b)计算虚载荷，因为弦杆都是平行的，所以所有的 h 值都等于 60in。将这些虚载荷(见图 5.19b)的值乘以 $E/1000$(见表 5.2)。假设这些载荷作用在简支梁 AB 上(见图 5.19c)，作用点上的弯矩除以 $E/1000$，就得出桁架相应结点上的位移。举例如下：对于点 p，简支梁上相应的弯矩为

$$M = (20.19 \times 180 - 4.37 \times 120 - 6.42 \times 60)\,\text{lbf} \cdot \text{in}$$
$$= 2725\,\text{lbf} \cdot \text{in}$$

因此，结点 p 由于弦杆弹性变形产生的位移是

$$\delta = \frac{1000M}{E} = \frac{1000 \times 2725}{30 \times 10^6}\text{in} = 0.0908\text{in}$$

图 5.19

为了要计算因腹杆弹性变形产生的位移，将方程(f)中求出的虚载荷作用在每根腹杆的端点上，则方程(f)中的距离 h_1 和 h_2 等于 $60/\sqrt{2} = 42.4\text{in}$。所有这些载荷的大小及其正确符号在表 5.2 中已列出，求和后，得出图 5.19d 中桁架的虚载荷。对于 p 点，这些作用在虚梁横截面上的载荷所产生的弯矩是

$$M = (13.33 \times 180 - 21.44 \times 60)\,\text{lbf} \cdot \text{in} = 1113\,\text{lbf} \cdot \text{in}$$

还有，桁架 p 点相应的位移是

$$\delta_1 = \frac{1113 \times 1000}{30 \times 10^6}\text{in} = 0.0371\text{in}$$

把 δ_1 和前面求出的位移 δ 相加，得到点 p 的总位移为

$$\delta_p = \delta + \delta_1 = 0.128\text{in}$$

表　5.2

i	l/in	A/in^2	S	$\frac{\Delta l E}{1000}$	结点处的虚载荷 × $E/1000$				
					m	n	p	q	s
1	84.8	3.66	-11310	-262	6.18				
2	120	3.66	8000	262	4.37				
3	84.8	3.66	11310	262	-6.18	6.18			
4	120	4.98	-16000	-385		6.42			
5	84.8	2.48	-11310	-385		-9.08	9.08		
6	120	3.66	24000	785			13.08		
7	84.8	2.48	11310	385			-9.08	9.08	
8	120	4.98	-32000	-771				12.85	
9	84.8	3.66	22620	524				12.36	-12.36
10	120	3.66	16000	524					8.73
11	84.8	3.66	-22620	-524					12.36

在上述关于腹杆对挠度影响的讨论中，分析的腹杆都不是铅垂的，现在要把这个方法推广到铅垂的腹杆。以图 5.20a 中桁架为例，考察铅垂杆 CD。应用前面的推理，首先假定 CD 杆相对于铅垂状态有微小倾斜，如图中虚线所示。然后应用以前的推理，利用方程(e)可以求出作用在腹杆端点的虚载荷。现在，假设倾斜角无穷小并趋向零，方程(e)中的 r、l_2、l_1 等于图 5.20a 中的距离 c，而 l_3 趋向于零。那么，两个虚载荷趋向于无穷大，但它们的差值等于 $\Delta l_i/r$，接近于 $\Delta l_i/c$ 的值。还有它们关于结点 C 的力矩接近 $(\Delta l_i/l_3)l_3=\Delta l_i$，虚梁相应的弯矩图如图 5.20b 所示。弯矩图在虚力偶 Δl_i 作用点处的不连续性表示下弦杆上结点 C 的位移大于上弦杆结点 D 的位移，差值等于铅垂杆 CD 的伸长量 Δl_i。

图 5.20

现在分析铅垂杆 EF(见图 5.20a)。可以看到杆 EF 长度的变化对桁架的挠度没有很大的影响。若忽略 EF 杆的存在可求出结点 F 的位移，为了求出结点 E 的位移，只需用点 F 的位移加上杆件 EF 的伸长。

要求出中间铅垂杆 MN 长度变化产生的挠度，分析 MN 杆的影响图(见图 5.20c)[⊖]。把影响图的竖距乘以 Δl_i，根据方程(a)，可得到如图 5.20d 所示桁架下弦杆的挠度线，这根挠度线可看作是虚梁 AB 承受如图 5.20e 所示载荷的弯矩图。

从这个讨论可以看出，铅垂腹杆的长度变化使桁架产生的挠度，可作为某个虚载荷产生的弯矩求出。这个弯矩在每种特殊情况下都能很快求出。

举一个处理铅垂腹杆的具体例子，考察图 5.21a 所示桁架，并假定载荷关于桁架对称分布。在桁架左边，拉杆和压杆在图中分别用“+”和“-”标出。每根杆的单位伸长或缩短，应力的大小等于 1/2000。首先考虑弦杆产生的挠度，并应用式(b)求虚载荷，可求出虚梁上的载荷如图 5.21b 所示，对于斜杆，用式(f)有

$$P=Q=\frac{1}{1000}$$

这些虚载荷在斜杆的下端点作用方向向下，在上端点作用方向向上。求和后，得到如图 5.21c 所示载荷。

现在来分析铅垂杆并使用图 5.20b 中描述的求解方法，我们发现虚梁上的相应载荷由图 5.21d 所示的虚力偶组成。弯矩在每个力偶的作用点处有一个突变量 0.036in，即铅垂杆的

⊖ 假设单位载荷沿着桁架在下弦杆移动。于是，可求出这根下弦杆的挠度。

缩短量。通过计算虚力偶作用点左边的弯矩，可求出桁架的下弦杆上结点的位移。计算相同点右边的弯矩可求出上弦杆结点的位移。分析下弦杆的位移，如图5.21e所示。这个载荷在端点处产生的反作用力等于1/2000，并且，对应于下弦杆结点的弯矩与图5.21d中虚力偶产生的弯矩相同。最后，要得到图5.21a中桁架下弦杆任意结点的总位移，必须结合图5.21b、c和e所示的虚载荷。中点的挠度，可按如下方法求出

$$\delta=\left(\frac{4.5}{1000}\times 360-\frac{4}{1000}\times 180+\frac{1}{1000}\times 360+\frac{1}{2000}\times 360\right)\text{in}$$
$$=(0.9+0.36+0.18)\text{in}=1.44\text{in}$$

它包含三部分位移，下弦杆产生的0.9in，斜杆产生的0.36in，垂直杆产生的0.18in。

图 5.21

习题

1. 参考图5.19所示桁架，如果大小为24kip的载荷作用在结点p上，而不是结点q上，计算p点的位移，桁架的所有数据使用表5.2。
2. 参考图5.21所示桁架，铅垂载荷$P=10$kip作用点C，求下弦杆每个结点的位移。假设每根杆的横截面积都是1in^2，$E=30\times 10^6$psi。

5.5 变异的虚载荷法

关于求解桁架一根弦杆上结点位移的问题，分析弦杆即可求解。如果弦杆是一根水平直线，则解法相当简单。以图5.22a中桁架为例，要求上弦杆结点的铅垂位移，很明显，假如知道了上弦杆中所有杆的长度变化以及在桁架偏移中各杆的旋转角，就完全可以确定这些铅垂位移。因为上弦杆是一条水平直线，它上面杆件的长度变化只会引起上弦杆结点的水平位

移。那么这些结点的铅垂位移只和上弦杆的旋转有关。在计算这些旋转时，假定桁架中所有杆的长度变化均已知。那么，在后面能看到，每个三角形的角度相应改变量就容易计算出来。对于弯矩，假定一个上结点(见图 5.22a)的角度 ϕ_1、ϕ_2 和 ϕ_3 的改变量均已求出，这些改变量的总和记为 $\Delta\theta_m$，偏移后两根弦杆在 m 点的夹角。为了求相应上弦杆的挠度，如图 5.22b 所示，假定 $\Delta\theta_m$ 为正，结点 m 左边弦杆任意点的位移等于 $\Delta\theta_m l_2 x/l$，而对于 m 右边弦杆的任意点，其位移为 $\Delta\theta_m l_1(l-x)/l$。现在，可以看出这些位移表达式与图 5.22c 所示的简支梁由虚载荷 $\Delta\theta_m$ 产生的弯矩表达式相同。因此，通过计算上弦杆的结点 j 的 $\Delta\theta_j$ 并应用叠加法，得到的简支梁承受虚载荷 $\Delta\theta_j$ 的弯矩即是所求挠度。

图 5.22

现在研究一种计算三角形角度改变量的方法，条件是三角形三条边的长度变化量已知。因为研究的是非常小的伸长量，则在 5.3 节中讨论过的 Williot 图在此会有作用。以图 5.23a 中的 ΔABC 为例，它的三条边长为 l_1、l_2 和 l_3，高为 h，在 ΔABC 三条边长的改变量 Δl_1、Δl_2 和 Δl_3 已知的情况下，求三个角的改变量。要完成这项工作，假定结点 A 固定，且 AB 杆保持水平方向不变，然后，求出由 Δl_1、Δl_2 和 Δl_3 引起的顶角 C 的位移 $\overline{CC'}$，画出如图 5.23b 所示的一般 Williot 图，图中 ρ_1 和 ρ_2 分别代表图 5.23b 中垂线 $\overline{C_1C'}$ 和 $\overline{C_2C'}$ 的长度，则在图 5.23a 中 B 和 A 相应的角度 α_1 和 α_2 的改变量是[⊖]

$$\Delta\alpha_1 = \frac{\rho_2}{l_2} = \frac{\rho_2 \sin\alpha_1}{h} \quad 和 \quad \Delta\alpha_2 = \frac{\rho_1}{l_1} = \frac{\rho_1 \sin\alpha_2}{h}$$

记住，三角形三个角的总和是 180°，可得出点 C 所要求的角度 α_3 的改变量为

$$\Delta\alpha_3 = -(\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) = -\frac{\rho_2 \sin\alpha_1 + \rho_1 \sin\alpha_2}{h} \tag{a}$$

表达式右边的分子表示图 5.23b 中垂线 ρ_1 和 ρ_2 的水平投影之和 b，求出 b 值并除以高度 h，得角 α_3 的减小量。

表达式(a)可用一个简单的解析式代替，这对于数值计算非常有用。要注意到 b 的长度等于图 5.23b 中长度 $\overline{C_2C_3}$ 和 $\overline{C_1C_3}$ 的水平投影之和，且它们的铅垂投影分别为 $\overline{D_2D_3}$ 和 $\overline{D_1D_3}$，因此

$$b = \overline{D_2D_3}\cot\alpha_1 + \overline{D_1D_3}\cot\alpha_2 \tag{b}$$

注意到图 5.23b 中 $\triangle OC_3B$ 与图 5.23a 中 $\triangle ABC$ 相似，我们得到 $OD_3 = h\Delta l_3/l_3$，那么

$$\overline{D_2D_3} = \overline{OD_2} - \overline{OD_3} = \Delta l_2 \sin\alpha_1 - \frac{h\Delta l_3}{l_3} = h\left(\frac{\Delta l_2}{l_2} - \frac{\Delta l_3}{l_3}\right)$$

⊖ 长度 l_1 和 l_2 的微小变化量 Δl_1 和 Δl_2 在这些式子中忽略不计。

图　5.23

$$\overline{D_1D_3}=\overline{OD_1}-\overline{OD_3}=\Delta l_1\sin\alpha_2-\frac{h\Delta l_3}{l_3}=h\left(\frac{\Delta l_1}{l_1}-\frac{\Delta l_3}{l_3}\right)$$

把这些值代入(b)中，得

$$b=h\left(\frac{\Delta l_2}{l_2}-\frac{\Delta l_3}{l_3}\right)\cot\alpha_1+h\left(\frac{\Delta l_1}{l_1}-\frac{\Delta l_3}{l_3}\right)\cot\alpha_2$$

另外，方程(a)变成

$$\Delta\alpha_3=-\frac{b}{h}=\left(\frac{\Delta l_3}{l_3}-\frac{\Delta l_2}{l_2}\right)\cot\alpha_1+\left(\frac{\Delta l_3}{l_3}-\frac{\Delta l_1}{l_1}\right)\cot\alpha_2 \tag{c}$$

根据上面的介绍，对各杆的应力，可记为

$$\sigma_1=E\frac{\Delta l_1}{l_1}\qquad \sigma_2=E\frac{\Delta l_2}{l_2}\qquad \sigma_3=E\frac{\Delta l_3}{l_3}$$

最后可用下面的简单形式来代表方程(c)

$$E\Delta\alpha_3=(\sigma_3-\sigma_2)\cot\alpha_1+(\sigma_3-\sigma_1)\cot\alpha_2 \tag{d}$$

显然，式中 α_3 的变化量通过恰当的下标改变可用于 α_2 和 α_1 的变化量，因此有

$$\left.\begin{aligned}E\Delta\alpha_1&=(\sigma_1-\sigma_2)\cot\alpha_3+(\sigma_1-\sigma_3)\cot\alpha_2\\E\Delta\alpha_2&=(\sigma_2-\sigma_1)\cot\alpha_3+(\sigma_2-\sigma_3)\cot\alpha_1\\E\Delta\alpha_3&=(\sigma_3-\sigma_2)\cot\alpha_1+(\sigma_3-\sigma_1)\cot\alpha_2\end{aligned}\right\}\quad(5.4)$$

如果桁架中杆件的应力均为已知，则这三个方程为计算桁架中所有三角形角度变化提供了一个简单方法。使用这些方程式，只需记住 σ_1、σ_2 和 σ_3 分别代表相对于角 α_1、α_2 和 α_3 的各杆应力就可以了。

要描述这个虚载荷法应用中的细节，再看一个前面章节的例子，见图 5.24a，计算下弦杆上结点 n 和 q 的垂直位移。表 5.3 中前三列分别列出了各杆的长度 l_i、横截面积 A_i 和载荷产生的轴力 S_i。在这之后，在表中第四列为单轴应

图　5.24

力的值 $\sigma_i = S_i/A_i$。现在，应用方程(5.4)中第一个方程并注意到 $\cot\alpha_2 = 0$ 和 $\cot\alpha_3 = 1$，得

$$E\Delta\alpha_1 = (-3090 - 2186) \times 1 = -5276$$

表 5.3

杆	l_i/in	A_i/in^2	S_i/lbf	σ_i/psi	虚载荷 × E				
					n	q	m	p	s
1	84.8	3.66	-11310	-3090	-5276				
2	120.0	3.66	8000	+2186			+4372		
3	84.8	3.66	11310	+3090				+6302	
4	120.0	4.98	-16000	-3212	-4954				
5	84.8	2.48	-11310	-4560		-11120	-1348		
6	120.0	3.66	24000	+6560				+13120	
7	84.8	2.48	11310	+4560	-2000				+10985
8	120.0	4.98	-32000	-6425		-23590			
9	84.8	3.66	22620	+6180				+12605	
10	120.0	3.66	16000	+4372					+8744
11	84.8	3.66	-22620	-6180		-10552			
合计					-12230	-45262	+3024	+32027	+19729

这值已在表中 n 的下面列出来了。同理，可以求出 $E\Delta\alpha_4$，$E\Delta\alpha_7$，$E\Delta\alpha_5$，$E\Delta\alpha_8$ 和 $E\Delta\alpha_{11}$，这些值也在表中 n 和 q 下面列出。因为这些角度的改变量均为负值，即角度是减小的，于是得出位移是向下的。把这些再和 n、q 点的角度改变量加起来，可以得到图 5.24b 所示共轭梁上相应点的虚载荷。那么，要求结点 n 和 q 的位移，只需简单计算在共轭梁上相应点的弯矩。取 $E = 30 \times 10^6$psi。用这个方法有(见图 5.24b)

$$\delta_n = \frac{23240}{30 \times 10^6}120\text{in} = 0.093\text{in} \qquad \delta_q = \frac{34250}{30 \times 10^6}120\text{in} = 0.137\text{in}$$

如果求形状是多边形的弦杆的位移。比如，图 5.22a 中的下弦杆，就必须考虑如图 5.25a 所示链杆的挠度。由链杆之间角度变化引起的挠度可用直杆的方法计算出来。为了展现这个过程，假定结点 m 处两链杆之间的夹角减小 $\Delta\theta_m$，而其他角度保持不变。要求出相应挠度，先假定链杆上的 Am 部分保持不动，面 Bm 部分围绕铰 m 旋转，且端点 B 转过一小圆弧 $r\Delta\theta_m$，圆弧的垂直投影为 $l_2\Delta\theta_m$，旋转之后，结点 m 左边的铅垂位移为零，而结点 m 右边位移向上，为

$$y = -l_2\Delta\theta_m \frac{x - l_1}{l_2} \qquad \text{(e)}$$

要满足右支座 B 位移为 0 的条件，现在把链杆当作一刚体围绕结点 A 旋转，旋转量是结点 B 的铅垂位移且等于 $l_2\Delta\theta_m$，则其他结点相应的铅垂位移可由下面的方程求出

图 5.25

$$y = l_2 \Delta\theta_m \frac{x}{l} \tag{f}$$

把这些位移和前面求出的位移叠加起来，可得出结论：表达式(f)给出了链杆 Am 部分的总铅垂位移，而 mB 部分最终的位移是

$$y = -l_2 \Delta\theta_m \frac{x - l_1}{l_2} + l_2 \Delta\theta_m \frac{x}{l} = \Delta\theta_m l_1 \frac{l - x}{l} \tag{g}$$

式(f)和式(g)与前面求直弦杆的式子相同(见 5.5 节)，因此，由各杆夹角变化引起的结点的铅垂位移可以求出，和以前一样，需要计算简支梁承受虚载荷 $\Delta\theta_m$ 的弯矩。

除了角度变化 $\Delta\theta_m$ 产生的位移之外，还有杆长度变化产生的位移，如图 5.25a 所示，考察杆 i，假设它与水平线夹角为 ϕ_i 而且一伸长量为 Δl_i，假定杆链左边部分不动，对于右边部分，由伸长量 Δl_i 引起的垂直位移等于

$$y = -\Delta l_i \sin\phi_i \tag{h}$$

为了把结点 B 转回到水平线 AB 上，现在把杆链当作一刚体围绕结点 A 旋转一个角度为 $\Delta l_i \sin\phi_i / l$，那么杆链左边部分由伸长量 Δl_i 引起的最终位移是

$$y = \Delta l_i \sin\phi_i \frac{x}{l} \tag{i}$$

对右边部分，把式(h)与式(i)的位移加起来，得

$$y = \Delta l_i \sin\phi_i \frac{x}{l} - \Delta l_i \sin\phi_i = -\Delta l_i \sin\phi_i \frac{l - x}{l}$$

这些位移在图 5.25b 中已经标出。图中的阴影部分与图 5.25c 所示的虚载荷的弯矩图相同，因此由链杆长度变化引起的附加位移，可通过计算受铅垂虚载荷作用的简支梁的弯矩得出，即

$$\frac{\Delta l_i \tan\phi_i}{l_i} \quad 和 \quad -\frac{\Delta l_i \tan\phi_i}{l_i} \tag{j}$$

它们作用于每一根杆的两个端点。在这些式子中，当 Δl_i 为正号表示伸长。沿着杆链由 A 到 B，若杆 i 围绕轴 AB 逆时针旋转，则 ϕ_i 取正。

现在回到图 5.24 的例子，继续计算上弦杆结点的铅垂位移。分析杆 1 和杆 11 以及两根水平杆 4 和杆 8，它们形成了附加于支座 A 和 B 的杆链体系。应用表 5.3 中的数据和方程(5.4)，与前面分析下弦杆一样，可以准确计算出上弦杆角度的变化。由方程(5.4)计算出的这些变化为 $E\Delta\alpha_2$、$E\Delta\alpha_5$、$E\Delta\alpha_3$、$E\Delta\alpha_6$、$E\Delta\alpha_9$、$E\Delta\alpha_7$ 和 $E\Delta\alpha_{10}$。在表 5.3 中的 m、p、s 下面均已列出，通过求和可求出结点 m、p 和 s 对应的虚载荷。

考虑到链杆长度的变化，对杆 1 和杆 11，应用式(j)得到点 m 和 s 上附加虚载荷的大小为

$$\frac{E\Delta l_1}{l_1} = \sigma_1 = 3090 \quad 和 \quad \frac{E\Delta l_{11}}{l_{11}} = \sigma_{11} = 6180 \tag{k}$$

把这些虚载荷加上表 5.3 中那些已求出的虚载荷，得到图 5.24c 所示共轭梁的最终载荷。那么，结点 m、p 和 s 上所要求的垂直挠度作为共轭梁的虚弯矩，即

$$\delta_m = \frac{25410}{30 \times 10^6} 60\text{in} = 0.051\text{in}$$

$$\delta_p = \left(\frac{25410}{30\times10^6}180 - \frac{6110}{30\times10^6}120\right)\text{in} = 0.128\text{in}$$

$$\delta_t = \frac{38610}{30\times10^6}60\text{in} = 0.077\text{in}$$

习题

1. 用虚载荷法，求简支梁上结点 C 的铅垂挠度，梁的载荷情况如图 5.26 所示，每根杆的横截面积 $A_t = 1\text{in}^2$，弹性模量 $E = 30\times10^6\text{psi}$。
2. 用虚载荷法，求简支梁上结点 C 和 D 的铅垂挠度，梁的载荷情况如图 5.27 所示。每根杆横截面积 $A_t = 1\text{in}^2$，弹性模量 $E = 30\times10^6\text{psi}$。

图 5.26

图 5.27

3. 如图 5.28 所示桁架上的载荷关于中间垂直杆 CD 对称，使每根有效杆有一个单位轴向应变 0.001。应用虚载荷法，求结点 C 的铅垂挠度。

图 5.28

4. 如图 5.29 所示桁架上每根杆杆长为 10ft，横截面积为 3in^2，弹性模量 $E = 30\times10^6\text{psi}$，若作用力 $P = 30\text{kip}$，用虚载荷法求下弦杆上结点 C 和 D 的铅垂挠度。
5. 如图 5.30 所示桁架上每根杆的横截面积 $A_t = 5\text{in}^2$，弹性模量 $E = 30\times10^6\text{psi}$，用虚载荷法，求下弦杆上结点 C、D、E 的铅垂挠度。

图 5.29

图 5.30

第6章

超静定铰接桁架

6.1 概述

在第2章已经讲到，在一个平面内任何铰接的桁架如果是由 j 个结点用 $m=2j$ 个杆件同基础相连，通常是几何不变的静定桁架。如果杆件的数目超过了 $2j$ 个，$2j$ 个静力学联立方程则不足以解出所有杆的内力，这种桁架被称为超静定桁架。超过了 $2j$ 个满足充分必要条件的几何不变桁架的杆件称为冗余杆件。带一个冗余杆的简单桁架例子如图6.1a所示。在图中，三根同一平面的杆件由单个铰链 C 同基础相连。为简便起见，假定两个斜杆是完全相同的，所以系统关于垂直轴 CD 对称。如果一个垂直的载荷 P 加在图示 C 点，则在每一根杆中都将产生轴力，但是对于铰接点 C，只能列两个平衡方程

$$\sum X = 0 \text{ 和 } \sum Y = 0 \tag{a}$$

很明显这个桁架有一个冗余杆，是超静定系统。也就是说，只要认为杆件是完全几何不变的，就可以假定垂直杆的拉力为任意值 X（见图6.1b），然后由方程(a)求出每一根斜杆的拉力

$$S=\frac{1}{2}(P-X)\sec\alpha \tag{b}$$

为了求出力 X 的真实值，现在必须考虑杆的弹性变形。这里用 δ 表示中间杆的伸长量，从图6.1b中可以看到每个斜杆的相应伸长量必须为[⊖]

图 6.1

⊖ 这个关系假定杆的弹性伸长量与整个结构相比是非常小的。

$$\delta' = \delta\cos\alpha \tag{c}$$

现在利用式(b)求每根斜杆的轴力。分别用 A 和 A_0 表示杆的截面积，条件式(c)可以写成如下形式

$$\frac{(P-X)l}{2\cos^3\alpha AE} = \frac{Xl}{A_0E}$$

从而解出

$$X = \frac{P}{1+2(A/A_0)\cos^3\alpha}$$

利用式(b)和 X 值，可以计算每根斜杆相应的轴力 S 值。至此，桁架分析完成。

回顾前面的解题步骤，为解决给定的超静定问题，必须首先要撤掉冗余的杆 CD，用一个力 X 施加在剩余的静定系统上。然后，这个系统(见图 6.1b)按照通常的静定方程进行分析，所有的轴力都用未知量 X 表示出来。最后，为求出 X 的真实值，通过杆的弹性变形建立补充方程(c)。

同样的步骤可以应用在更复杂的情况下。首先正确地选择一些杆件作为冗余杆，并撤掉这些冗余杆，得到一个静定系统，称此静定系统为基本系统。然后，这个基本系统可以应用前面章节中已经讨论过的方法来进行分析，并且能很容易地求出各杆轴力和所有结点位移。特别感兴趣的是，相应于撤掉的冗余杆的结点之间距离的变化量，显然这些变化量必须等于在实际桁架中相应于冗余杆长度的变化量。因为有许多冗余杆，按照这个方法，就能得到许多类似于式(c)的方程，并且从这些方程可以得到冗余杆的内力。那些没被撤掉的杆的内力可以从静定方程中解得。

从以上讨论中可知，这样选择冗余杆比较合适：即在撤掉冗余杆之后，能够得到一个几何不变的静定桁架。例如图 6.2 所示超静定结构，这个桁架本身有 14 个杆，此外还必须考虑用一个垂直支撑杆代替桁架右端的可移动支座，用两个杆代替桁架左端的不可移动支座，这样一共有 17 个未知力。然而桁架结点数目的 2 倍是 16，因此就能得到具有一个冗余杆的桁架。可选择桁架中间对角线上的一个杆作为冗余杆，但是不能选择桁架其他部分对角线上的杆作为冗余杆，因为撤掉这样的杆，就得到一个几何可变系统。

图 6.2

在图 6.3 中，给出了另一个只有一个冗余杆的桁架例子。在这种情况下，可以选择任意一个支撑杆作为冗余杆，但是不能选择杆 DE，因为在撤掉杆 DE 之后，得到的是一个具有临界状态的系统。也就是说，在支撑 A 和 B 处，具有两个几何不变的阴影部分，它们像三铰拱一样通过铰链 C 连接在一起。但是铰链 C 在直线 AB 上，当其他杆件没有改变任何长度时，C 点有相当大的垂直移动。当然，除了撤消支撑杆中的任意杆之外，还有其他撤消杆的方法。例如撤掉杆 CF 可以得到一个基本结构，一个普通的三铰拱，其中铰链 E 不在 AB 直线上。因此这种情况下就不会有临界状态，如果需要选择冗余杆，杆 CF 就可以作为冗余杆。

图 6.4 表示了另一个带一个冗余杆的系统。在这种情况下，可以选择杆 AB 或杆 CD 作为冗余杆。但是不能选择杆 CE 作为冗余杆，因为在撤掉杆 CE 后，得到的是一个几何不变

的框架 ACF，而这个框架由三个交于一点的杆 AB、CD 和 EF 同基础相连。很明显，这样的系统是几何可变的。

图　6.3

图　6.4

6.2　带一个冗余杆件的桁架

作为带一个冗余杆系统的第一例子，首先考虑图 6.5a 所示的三个支座的桁架。选择中间支座 C 作为冗余单元。去掉这个支座，得到了一个容易分析的静定简单桁架(见图 6.5b)。那么，中间支座的冗余支反力 X 可以通过结点 C 在载荷 P_1、P_2 和 P_3 与反力 X 的联合作用下的变形必为零这个条件来确定。利用表达式(6.2)作为变形条件，可得到

$$\sum \Delta l_i s_i' = 0 \tag{a}$$

这里 $\Delta l_i = S_i l_i / A_i E$ 表示在载荷 P_1、P_2 和 P_3 与冗余反力 X 作用下，任意杆 i 的伸长量，s_i 是应用图 6.5c 所示的单位荷载[⊖]得到的，表示由作用在 C 处的单位荷载在任意杆 i 上产生的力。在计算式(a)中 Δl_i 的值时，杆 i 上的力 S_i 通过下式给定

$$S_i = S_i' + s_i' X \tag{b}$$

这里 S_i' 是由已知载荷 P_1、P_2 和 P_3 作用在如图 6.5b 所示的简单桁架上，在任意杆 i 上产生的力，$s_i' X$ 表示由反力 X 在同一杆上产生的力，那么任意杆 i 所求的伸长量为

$$\Delta l_i = \frac{(S_i' + s_i' X) l_i}{A_i E} = (S_i' + s_i' X)\rho_i \tag{c}$$

图　6.5

这里

$$\rho_i = \frac{l_i}{A_i E} \tag{d}$$

将式(c)代入式(a)可得到

$$\sum (S_i' + s_i' X)\rho_i s_i' = 0 \tag{e}$$

⊖ 在 C 点的荷载方向是竖直向上的，因此我们认为冗余反力在这个方向上是正的。

解得

$$X = -\frac{\sum S_i' s_i' \rho_i}{\sum (s_i')^2 \rho_i} \tag{6.1}$$

这就是冗余反力 X 的值，给定的超静定桁架中各杆的轴力可通过方程(b)得到。至此，分析完成。可以看到，超静定桁架问题被简化为图 6.5b、c 所示的两个静定桁架问题。桁架中所有杆的 S_i'、s_i'和 ρ_i 可以列表，如表 6.1 所示。那么，借助这个表，就能很容易地计算方程(6.1)中的求和值了。

表 6.1

i	l_i/in	A_i/in^2	$\rho_i \times 10^6$/(in/lb$f$)	S_i'/lb$f$	s_i'	$(s_i')^2$	$S_i' s_i' \rho_i \times 10^6$	$(s_i')^2 \rho_i \times 10^6$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	324	11.5	0.940	-4000	+0.59	0.35	-2220	0.329
2	227	11.8	0.641	-3000	+0.50	0.25	-962	0.160
3	292	9.0	1.081	+3900	-0.65	0.42	-2740	0.454
4	259	11.5	0.750	0	-1.16	1.35	0	1.012
5	263	9.0	0.974	-3800	+0.47	0.22	-1740	0.214
6	220	11.8	0.621	-6200	+1.00	1.00	-3850	0.621
7	277	9.0	1.026	+3950	-0.64	0.41	-2600	0.421
8	234	11.5	0.678	+3150	-1.60	2.56	-3420	1.735
9	216	9.0	0.800	-2750	+0.30	0.09	-660	0.072
10	216	11.8	0.610	-8600	+1.43	2.04	-7500	1.244
11	270	9.0	1.000	+3200	-0.55	0.30	-1760	0.300
12	223	11.5	0.646	+6200	-2.05	4.20	-8210	2.712
13	192	9.0	0.711	-1150	+0.03	0.00	-24	0
14	216	11.8	0.610	-9700	+1.60	2.56	-9470	1.560
15	277	9.0	1.026	+1400	-0.23	0.05	-330	0.051
16	216	11.5	0.626	+8600	-2.43	5.90	-13080	3.694
							-117，132	29.158
17	180	9.0	0.667	-250	-0.14	0.02	+23	0.013
Σ							-117109	+29.171

第二个例子，考虑如图 6.6a 所示超静定桁架。这种情况下的支反力可以由静定方程计算出来，但是因为桁架中有一个冗余杆，所以所有杆的力不能单独由静定方程确定。将垂直杆 BC 当作冗余杆。那么去掉这个冗余杆之后，就得到一个简单静定桁架(见图 6.6b)。另外，由于已知作用在桁架上的载荷 P_1、P_2 和 P_3，所以两个大小相等且方向相反的力 X 将会代替图示去掉的杆。根据在静定桁架的结点 B 和 C 之间的距离变化量必须等于实际桁架中的垂直杆 BC 长度变化量这个条件，将会得到力 X 的大小。BC 间距离的变化量是静定桁架中所有杆变化量的总和，为 $\sum \Delta l_i s_i'$，并且 Δl_i 通过下列方程给定

$$\Delta l_i = (S_i' + s_i' X)\rho_i \tag{f}$$

这里，S_i'表示给定载荷 P_1、P_2 和 P_3 作用下在任意杆 i 上产生的力，如前所述，s_i'是应用图 6.6c 所示的单位荷载得到的。

那么，计算 X 的方程变为

$$\sum (S_i' + s_i'X)\rho_i s_i' = -X\rho_0 \tag{g}$$

这里

$$\rho_0 = \frac{l_0}{A_0 E} \tag{h}$$

定义为冗余杆 BC 的原伸长量。方程(g)右端的负号是按照图 6.6c 中单位载荷的方向给定的。依据这个方向，BC 杆的缩短表示为正号，表示 BC 杆受压，解方程(g)中的 X，可得到

$$X = -\frac{\sum S_i' s_i' \rho_i}{\sum (s_i')^2 \rho_i + \rho_0} \tag{6.2}$$

图 6.6

在这个例子中，又一次看到计算冗余杆的力 X 是通过将系统分解为两个静定问题来解决的：(1)计算力 S_i'；(2)计算力 s_i'。当求出这些力，并且通过给定桁架的尺寸确定了量 ρ_i 和 ρ_0 后，就很容易计算方程(6.2)的总和了。

在前述的每一个例子中，均利用表达式(6.2)作为位移计算的基础。然而，通过应用 4.6 节讨论的最小功原理也可以得到相同的结论。基于最小功原理，图 6.5 所示 C 点的冗余力 X 的值必须使超静定系统的总应变能最小。如果应用表达式(b)中所有杆的力，则桁架的总应变能为

$$U = \sum \frac{(S_i' + s_i'X)^2 l_i}{2A_i E}$$

上述表达式关于 X 的微分为零，并且利用表达式(d)的定义，得到

$$\sum (S_i' + s_i'X)\rho_i s_i' = 0$$

这与前面得到的表达式(e)是相一致的，从而导出了方程(6.1)。同理，图 6.6 所示超静定桁架的总应变能为

$$U = \sum \frac{(S_i' + s_i'X)^2 l_i}{2A_i E} + \frac{X^2 l_0}{2A_0 E}$$

这里的求和包括基本系统的所有杆件(见图 6.6b)。上述表达式关于 X 的微分为零，并且利用表达式(d)和(h)的定义，就能得到前面的表达式(g)和导出方程(6.2)。

作为数据运算的具体实例，现考虑载荷如图 6.7 所示的两铰拱，计算水平推力 X 的大小。结构的所有尺寸如图 6.7 所示，表 6.1 的第二列给出了每个杆的长度，表中也给出了每根杆的横截面积 A_i，伸长量 ρ_i，假定 $E = 30 \times 10^6$ psi 以及轴力 S_i'和 s_i'[⊖]。利用表中的数据和方程(6.1)的求和式，可得到

⊖ 通过去掉在 B 点水平推力，对于得到的静定基本系统建立 Maxwell 图，就可以很容易求出所有的轴力。

$$X = -\frac{-117109}{29.171}\text{lbf} = 4015\text{lbf}$$

图 6.7

习题

1. 求如图 6.8a 所示超静定桁架的水平推力 X，图中给出了尺寸，所有杆的横截面积如下：$A_1 = A_4 = 5\text{in}^2$，$A_2 = A_5 = 3\text{in}^2$ 和 $A_3 = 2\text{in}^2$。
2. 求如图 6.8b 所示桁架的冗余水平杆的轴力，这个杆的横截面积为 A_6，假定其他杆与前一题有相同的尺寸。

图 6.8

3. 求如图 6.9a 所示超静定桁架的所有杆的轴力，假定所有杆的横截面积相等。
   (提示：取冗余杆为对角杆 6，它的轴力为 X)
4. 求图 6.5a 中未知力 X 的大小，已知 $P_1 = P_2 = P_3 = 10\text{kip}$。桁架中水平杆和垂直杆的横截面积为 $A_i = 1\text{in}^2$，对角杆的横截面积为 $A_i = \sqrt{2}\text{in}^2$。所有杆具有相同的弹性模量，板为正方形。
5. 图 6.10 所示超静定桁架的所有杆有相同的横截面积 $A_i = 1\text{in}^2$ 和相同的弹性模量 E，已知作用于图示的载荷为 20kip，求冗余杆 CD 的轴力 S_x。

图 6.9

图 6.10

6.3 带多个冗余杆件的桁架

在前面章节中用于分析带一个冗余杆件的超静定桁架问题的方法也可以推广到分析带两个或多个冗余杆件的桁架中。作为第一个例子，首先讨论如图6.11a所示的带有两个冗余支座的简单桁架。去掉支座，用约束反力 X 和 Y 代替并画在图上，这样就得到了一个静定系统。在这个系统中除了给定载荷 P_1、P_2 和 P_3 外，还有反力 X 和 Y 作用其上。现在，通过结点 C 和 D 的变形必为零，来求这两个反力 X 和 Y 的大小。求出变形后，利用式(6.2)得到如下方程

$$\sum \Delta l_i s_i' = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum \Delta l_i s_i'' = 0$$

其中 s_i' 和 s_i'' 是分别应用图6.11b、c所示的单位载荷得到。Δl_i 表示系统中各杆的实际伸长量，是由给定载荷 P_1、P_2 和 P_3 与未知反力 X 和 Y 作用在系统上产生的。如前所述，给定载荷 P_1、P_2 和 P_3 作用在基本系统的任意杆 i 上产生的力被表示为 S_i'。利用图6.11b、c所示的单位载荷得到的冗余反力 X 和 Y，在同样杆上产生的力分别等于 $s_i'X$ 和 $s_i''Y$。因此，在任意杆 i 上产生的总力为

$$S_i = S_i' + s_i'X + s_i''Y \qquad \text{(b)}$$

并且相应的伸长量为

$$\Delta l_i = (S_i' + s_i'X + s_i''Y)\rho_i$$

图 6.11

将其代入方程(a)中，就可以得到如下两个计算 X 和 Y 的方程

$$\left.\begin{aligned}\sum (S_i' + s_i'X + s_i''Y)\rho_i s_i' = 0\\ \sum (S_i' + s_i'X + s_i''Y)\rho_i s_i'' = 0\end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

或者

$$\left.\begin{aligned} X\sum(s_i')^2\rho_i + Y\sum s_i's_i''\rho_i &= -\sum S_i's_i'\rho_i \\ X\sum s_i's_i''\rho_i + Y\sum(s_i'')^2\rho_i &= -\sum S_i's_i''\rho_i \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

把 S_i'、s_i'、s_i''和 ρ_i 写成列表的形式，可以很容易地计算式(d)的和，并且通过求解方程，求出 X 和 Y 的值。然后将 X 和 Y 代入式(b)，就可以计算出桁架中所有杆的内力。从上述的讨论中可知，分析带两个冗余支座的系统其实是转化为分析三个静定问题，求 S_i'、s_i'、s_i'' 的值。

计算冗余反力的方程(c)也可通过最小功原理得到。图 6.11a 所示系统的总应变能为

$$U = \frac{1}{2}\sum(S_i' + s_i'X + s_i''Y)^2\rho_i$$

使上述表达式关于 X 和 Y 的微分等于零，就能得到式(c)。

第二个例于，将考虑如图 6.12a 所示的超静定桁架。这个桁架含有 83 根杆。加上系统中 6 个支座的约束反力，总共有 89 个未知力。结点数目的 2 倍是 86。因此，该系统有三个冗余杆件。由于这些冗余约束，因此选择两水平杆 ab、cd 和支座 D 的水平约束作为冗余杆件。去掉这些冗余杆件，并用力 X、Y 和 Z 代替，于是得到一个由三个简单桁架组成的静定系统，如图 6.12b 所示。在这个静定系统中，将给定载荷 P_1、P_2 和 P_3 作用在杆上产生的力表示为 S_i'。如前所述，利用图 6.12c、d、e 所示的单位载荷法，可以求得冗余反力 X、Y 和 Z 在相同系统的杆件上所产生的力。相应的任意杆 i 上产生的轴力分别表示为 $s_i's_i''$和 s_i'''。于是给定系统中任意杆 i 的总力为

图 6.12

$$S_i = S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z \tag{e}$$

现在，当支座 D 的水平位移为零时，根据结点 a 和 b 与结点 c 和 d(见图 6.12b)之间距离的变化量必须等于杆 ab 和杆 cd(见图 6.12a)长度的变化量这个条件，得到三个冗余力 X、Y 和 Z 的值。ρ_x 和 ρ_y 表示冗余杆 ab 和 cd 的伸长因子，利用式(6.2)计算位移。前面的条件用以下方程表示为

$$\begin{aligned}
&\sum (S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z)\rho_i s_i' = -X\rho_x \\
&\sum (S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z)\rho_i s_i'' = -Y\rho_y \\
&\sum (S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z)\rho_i s_i''' = 0
\end{aligned} \tag{f}$$

根据图 6.12c、d 所示的单位载荷方向，对应杆 ab 和杆 cd 的缩短表示位移的正向，即冗余杆 ab 和 cd 受压，因此式(f)中的前两式右端为负号。如果把基本系统(见图 6.12b)中所有杆的 s_i'、s_i''、s_i'''和 ρ_i 的值列表表示，那么式(f)中的求和就可以计算出来，并且得到三个带数值系数的线性方程，由此可以求出三个冗余未知力 X、Y 和 Z。

由上述分析得知，随着冗余力数目的增加，所求的静定方程的数目也随之增加，问题的分析变得也越来越复杂。有时会发现当每个方程中仅含有几个冗余力时，虽然总未知量很多，但这样的方程却可以容易求解。为此，举一个例子，如图 6.13a 所示，带五个冗余杆的桁架，选择每个方格中的对角杆作为冗余杆，并用冗余力 X、Y、Z、…表示这些杆在剩余桁架上的作用。于是得到一个静定的简单桁架，载荷如图 6.13b 所示，该桁架作为基本系统。这个系统很容易分析，任意杆 i 的力表示为

$$S_i = S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z + \cdots$$

式中 S_i'表示为由给定载荷 P_1、P_2 和 P_3 作用在基本系统的任意杆 i 上产生的力，如前所述，利用图 6.13c、d 所示的单位载荷，得到 s_i'、s_i''、s_i'''、…。考虑这些载荷，可看到在每种情况下，单位载荷只在组成相应方格的各杆中产生轴力。因此，如图 6.13c 所示，可得出结论：只有由粗实线画出的第一个方格中的各杆件的轴力 s_i'不等于零。同样，如图 6.13d 所示，除了如图中粗实线画出的杆件之外，其他杆件的轴力 s_i''等于零，等等。由前所述，现在考虑确定冗余力的方程。根据简单桁架(见图 6.13b)中结点 A 和 B 之间距离的变化量等于实际桁架中冗余杆件 AB 长度的变化量(见图 6.13a)，写出第一个方程。显然，杆 AB 长度的变化量依赖于桁架第一个方格中的各杆变形，其他杆的力只依赖于给定载荷 P_1、P_2 和 P_3 以及冗余力 X、Y。剩余的冗余力不影响第一个方格中的各杆件，所以不予考虑。因此，第一个方程变为

图　6.13

$$\sum_{i=1}^{i=5} (S_i' + s_i'X + s_i''Y)\rho_i s_i' = -X\rho_x \tag{g}$$

此方程包含两个未知量，即 X 和 Y，并且求和时仅包含第一个方格中的五根杆件。对于剩下

的其他杆件，不存在 s_i'。

根据结点 C 和 D(见图 6.13b)距离的变化量等于整个桁架中对角杆 CD(见图 6.13a)的长度的变化量，可以得到第二个方程。其中杆 CD 长度的变化量只依赖于桁架中第二个方格中各杆的变形(见图 6.13b)，反过来，这些变形又只依赖于作用在第二个方格上的横向载荷 P_1、P_2 和 P_3，冗余力 Y 和邻近方格的冗余力 X 和 Z。因此，第二个方程变为

$$\sum (S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z)\rho_i s_i'' = -Y\rho_y \tag{h}$$

式中的求和包含第二个方格的全部杆件，这个方程包含三个未知量 X、Y 和 Z。

同理，对于第三、第四个方格也列写类似方程。同式(g)一样，第五个方程中只包含两个未知量。因此，可得到系统的五个方程，其中两个方程各含有两个未知量，其余三个方程各含有三个未知量。这样，这个方程组很容易求解。这种方程类似于分析连续梁的三弯矩方程，并且应用同样的方法可以求解。

在分析带多个冗余杆件的超静定系统中，连续近似法有时是一种非常有效的方法。例如在上述系统中，对于未知量 X、Y、Z、…为获得第一次近似值 X_1、Y_1、Z_1、…假设每个方格中的作用力均分到两个对角杆上。然后，应用方程(g)、(h)、…，并且注意到最重要的条件是如 $\sum (s_i')^2$、$\sum (s_i'')^2$、…等的各项平方和的系数。在剩余系统中用一次近似值 X_1、Y_1、Z_1、…代替未知量 X、Y、Z、…，于是得到如下方程

$$\left.\begin{aligned} &\sum S_i's_i'\rho_i + \left[\sum (s_i')^2\rho_i + \rho_x\right]X + \sum s_i's_i''\rho_i Y_1 = 0 \\ &\sum S_i's_i''\rho_i + \sum S_i's_i''\rho_i X_1 + \left[\sum (s_i'')^2\rho_i + \rho_y\right]Y + \sum s_i''s_i'''\rho_i Z_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

每个方程仅含有一个未知量，很容易求解。用这样的方法，可以得到未知力的第二次近似值 X_2、Y_2、Z_2、…。然后，在式(i)中用新的数值代替 X_1、Y_1、Z_1、…，再次计算 X、Y、Z、…，于是可以得到更加接近未知量的近似值。通常这种计算方式的收敛速度非常快，以致三次近似值就可以满足所有实际工程的需要。

习题

1. 计算如图 6.14 所示桁架中，中间支座 C 和 D 的冗余反力，已知载荷 $P = 20000\text{lbf}$。桁架中的所有杆都是一样的。
2. 如果将辊轴支座 C 和 D 用与桁架内其他杆一样的垂直杆代替，重新求解上述问题。
3. 载荷如图 6.15 所示，求解超静定桁架中支座 G 的垂直反力 X 的大小。桁架的尺寸如图 6.15 所示，每个杆的横截面积是 $A_i = 2\text{in}^2$，弹性模量 $E = 30 \times 10^6\text{psi}$。

图 6.14

图 6.15

4. 在载荷作用下，如果支座 G 下降 0.3in，重新求解上述问题。
5. 对如图 6.13 所示超静定桁架做完全分析，已知 $P_1 = P_2 = P_3 = 20\text{kip}$，$l = 45\text{ft}$，$h = 12\text{ft}$。假定每根弦杆的截面积是 3in^2，每根对角杆是 1.5in^2，每根垂直杆是 1in^2。所有的杆有相同的弹性模量 E。

6.4 超静定桁架中的装配应力和温度应力

从 6.1 节超静定桁架的初步讨论中，显而易见，冗余杆的长度必须满足特定的几何要求。桁架的形状和所有结点之间的相互距离完全由基本系统中各杆件的长度来定义。因此，如果杆件的长度精确等于两结点之间的距离时，杆件才可以自由地置于结点间。否则，杆件不能恰当的装配。只有利用初始的拉伸或压缩，杆件才可以被强迫放入初始系统中。在这种情况下，通常将在各杆中产生的轴力叫做装配力。甚至在没有外载荷的作用下，这种内力也是存在的。因此，为了得到每个杆总的受力，必须将装配力与外载荷引起的轴力相叠加。

举一个简单例子，如图 6.1a 所示超静定系统，假定铰链 C 和 D 之间的距离与斜杆的长度之间出现了一些小的误差，装配后测量斜杆的长度，要比垂直杆伸长了 Δ，那么装配垂直杆时，必须拉长垂直杆。因此装配后，由于残留一些自身的张力，使铰链 C 受到向上的拉力，从而使斜杆受压。如果 X 表示垂直杆拉力的大小，装配后，斜杆的压力等于 $X/(2\cos\alpha)$，铰链 C 向上的相应位移是 $Xl/(2AE\cos^3\alpha)$。由结点 C 的垂直位移与垂直杆的伸长量必须等于长度的初始变化量 Δ 这个条件，可以求力 X 的大小。因此

$$\frac{Xl}{2AE\cos^3\alpha}+\frac{Xl}{A_0E}=\Delta$$

这里 A_0 表示垂直杆的横截面积，A 表示斜杆的横截面积。从这个方程，可得到

$$X=\frac{\Delta AE}{l\left(\frac{1}{2}\sec^3\alpha+A/A_0\right)}$$

相似的推理可被应用到更复杂的超静定桁架中去。例如，考虑如图 6.6a 所示桁架，由于杆件的长度不精确导致装配力。令 Δ_i 表示杆 i 长度的误差，如果杆件变长认为是正的，令 Δ_0 表示冗余杆 BC 长度的误差。利用式(6.3)，可以求得误差 Δ_i 对于基本系统(图 6.6b)的铰链 B 和 C 之间的距离的影响，上述提到的 B 和 C 之间的距离要比理论设计值缩小

$$\sum \Delta_i s_i' \tag{a}$$

考虑这个误差，并且也考虑冗余杆 BC 长度的误差 Δ_0，那么在把杆 BC 放入结点 B 和 C 之间以前，BC 必须产生一些压力。那么，装配完之后，冗余杆在结点 B 和 C 上产生推力，并且使整个桁架有装配力。如果 X 表示冗余杆的装配力[⊖]，基本系统各杆件相应的伸长量为 $s_i'X\rho_i$。由于这些杆的伸长，BC 的距离缩小，其缩小量为 $\sum(s_i')^2X\rho_i$。这个距离的变化与冗余杆的伸长 $X\rho_0$ 的和数值上必须等于基本系统 BC 间距离和冗余杆 BC 的长度之间的初始变化量。因此，可得到

⊖ 拉力为正。

$$\sum (s_i')^2 X\rho_i + X\rho_0 = -\left(\sum \Delta_i s_i' + \Delta_0\right) \tag{b}$$

等式右端的负号是按照当 X 为拉力时为正号确定的。括号内的表达式表示杆 BC(见图 6.6b)的距离比冗余杆 BC 的长度缩小了多少。解方程求得 X 为

$$X = -\frac{\sum \Delta_i s_i' + \Delta_0}{\sum (s_i')^2 \rho_i + \rho_0} \tag{6.3a}$$

如果加上桁架的横向载荷产生的力，冗余杆的总力变为

$$X = -\frac{\sum (S_i'\rho_i + \Delta_i) s_i' + \Delta_0}{\sum (s_i')^2 \rho_i + \rho_0} \tag{6.3b}$$

如果冗余力是外约束反力，可以用同样的方法计算装配力。例如，如图 6.5a 所示桁架，假定中间支座高出了一个量 Δ_0。如前所述，Δ_i 表示杆 i 长度的误差。由于这些误差，基本系统(见图 6.5b)的结点 C 向上升高了 $\Delta_i s_i'$，这里 s_i' 是应用图 6.5c 所示的单位荷载得到的。所求反力通过由 X 产生的基本系统向上的变形量等于 $\Delta_0 - \sum \Delta_i s_i'$ 这个条件得到。因此

$$\sum X(s_i')^2 \rho_i = \Delta_0 - \sum \Delta_i s_i' \tag{c}$$

并且得到

$$X = \frac{-\sum \Delta_i s_i' + \Delta_0}{\sum (s_i')^2 \rho_i} \tag{6.4a}$$

将上面的力加上原来作用在桁架上的横向载荷产生的力[参见式(6.1)]，可得到中间支座的总反力

$$X = -\frac{\sum (S_i'\rho_i + \Delta_i) s_i' - \Delta_0}{\sum (s_i')^2 \rho_i} \tag{6.4b}$$

如果中间支座放置时高出了一个量 Δ_0，就可以简单地把方程中的这个量加上负号。

计算装配力得到的方程也可以应用于计算超静定桁架中由于温度变化引起的力。如果杆 i 的温度在桁架特定的均匀温度下，升高了 t_i，杆长增加了 $\alpha_i t_i l_i$，这里 α_i 表示杆的线胀系数。同样，将杆件的热伸长量作为前面讨论过的长度误差 Δ_i，就很容易计算出超静定桁架的热应力。例如，如图 6.6a 所示的桁架，应用式(6.3a)，可求得冗余杆 BC 由于温度变化产生的力为

$$X = -\frac{\sum \alpha_i t_i l_i s_i' + \alpha_0 t_0 l_0}{\sum (s_i')^2 \rho_i + \rho_0} \tag{6.5}$$

当处理带多个冗余杆的超静定桁架时，外载荷综合效应的计算、杆件长度误差、温度的改变、支座的放置等等，变得非常复杂。运用系统化方法来进行分析是十分理想的。现在不参考任何特殊系统来说明这种方法。

给定一个超静定系统，首先选择冗余杆件并标注冗余力 X_a、X_b、X_c、…、X_z，相应的总体位移为 Δ_a、Δ_b、Δ_c、…、Δ_z。那么，随着去掉所有的冗余杆件，在外载荷和代替冗余杆件的单位载荷作用下，对剩余的基本系统进行简单的静定分析。利用这些数据，对于不同

原因引起的所有位移，比如外载荷、长度误差、热效应等等，都能利用在第 6 章已经讨论的处理变形问题的方法很容易地计算出来。令 Δ_u'、Δ_u''、Δ_u''、…表示冗余力 X_u 下对应的不同位移，令 δ_{uv} 表示单位载荷作用在 X_v 位置上引起的 X_u 处相应的位移。最后，令 Δ_u 表示相应于冗余力 X_u 的已知位移。那么，通过叠加，就能得到相应于每个冗余力的所有位移的代数和等于已知的总位移 Δ_u。因此，可以写出如下方程组，类似于式(b)和式(c)

$$\left.\begin{aligned}\Delta_a' + \Delta_a'' + \cdots + X_a\delta_{aa} + X_b\delta_{ab} + \cdots + X_z\delta_{az} = \Delta_a \\ \Delta_b' + \Delta_b'' + \cdots + X_a\delta_{ba} + X_b\delta_{bb} + \cdots + X_z\delta_{bz} = \Delta_b \\ \Delta_z' + \Delta_z'' + \cdots + X_a\delta_{za} + X_b\delta_{zb} + \cdots + X_z\delta_{zz} = \Delta_z\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

这个线性代数方程称为超静定桁架系统的“叠加方程”，方程的解给出了所涉及的 z 个冗余杆件的力的大小。

为了举例说明式(6.6)的应用，观察带两个冗余杆件的桁架，如图 6.16a 所示。选择杆 CF 和支座 B 作为冗余杆件，杆 CF 的力用 X_a(拉力，正)表示，用 X_b 表示支座的反力(压力，向上)。那么，相应于 X_a 的正位移是距离 CF 的减小，相应于 X_b 的正位移是结点 B 向上变形。在载荷 P 和代替每个冗余杆件的单位载荷作用下，基本系统的三个静定分析如图 6.16b、c、d 所示。分析的结果记录在表 6.2 的第 3 ~ 5 列。表的第 2 列给出了杆件的长度。每个杆的横截面积是 $A = 3.33\text{in}^2$，弹性模量为 $E = 30 \times 10^6\text{psi}$；那么 $AE = 10^8\text{lbf}$。每根杆的线胀系数是 $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}(\text{in/in})/°\text{F}$。由于给定载荷 P 的综合影响，必须求 X_a 和 X_b 的大小。温度的均匀增长是 $\Delta t = 50°\text{F}$，冗余杆件 CF 的长度误差是 $\Delta l_a = -0.10\text{in}$(也就是说，杆太短)，支座 B 放置的变化是 $\Delta_b = -0.05\text{in}$。

图　6.16

表 6.2

杆 (1)	l_i/in (2)	S_i'/kip (3)	s_i' (4)	s_i'' (5)	$S_i's_i'l_i$ (6)	$S_i's_i''l_i$ (7)	$s_i'l_i$ (8)	$s_i''l_i$ (9)	$(s_i')^2l_i$ (10)	$(s_i'')^2l_i$ (11)	$s_i's_i''l_i$ (12)
1	100.0	+10.00	+1.000	0.000	+1000	0	+100	0	+100	0	0
2	100.0	0	+1.000	0.000	0	0	+100	0	+100	0	0
3	141.4	-14.14	-1.414	0.000	+2828	0	-200	0	+283	0	0
4	141.4	0	-1.414	0.000	0	0	-200	0	+283	0	0
5	100.0	+10.00	-1.000	0.000	-1000	0	-100	0	+100	0	0
6	100.0	-20.00	-1.000	+1.000	+2000	-2000	-100	+100	+100	+100	-100
7	141.4	0	+1.414	0.000	0	0	+200	0	+283	0	0
8	141.4	+14.14	+1.414	-1.414	+2828	-2828	+200	-200	+283	+283	-283
Σ					+7656	-4828	0	-100	+1532	+383	-383

首先计算由各种原因引起的相应于 X_a 和 X_b 的位移。利用 5.2 节中的式(5.3)与表 6.2 中的数据，则有

$$\Delta_a' = \sum \frac{S_i's_i'l_i}{AE} = +76560 \qquad \Delta_b' = \sum \frac{S_i's_i''l_i}{AE} = -48280$$

$$\Delta_a'' = \sum \alpha\Delta t l_i s_i' = 0 \qquad \Delta_b'' = \sum \alpha\Delta t l_i s_i'' = -32500$$

$$\delta_{aa} = \sum \frac{(s_i')^2 l_i}{AE} = +15.32 \qquad \delta_{ba} = \sum \frac{s_i''s_i'l_i}{AE} = -3.83$$

$$\delta_{ab} = \sum \frac{s_i's_i''l_i}{AE} = -3.83 \qquad \delta_{bb} = \sum \frac{(s_i'')^2 l_i}{AE} = +3.83$$

所有的数值单位是微英寸。

从计算过程中可推出冗余杆 CF 长度的全局减小量为

$$\Delta_a = -\frac{X_a l_a}{AE} - \alpha\Delta t l_a - \Delta l_a$$

或者用给定的数据

$$\Delta_a = -X_a - 32500 + 100000$$

支座 B 的最后位移为

$$\Delta_b = -50000$$

因此，式(6.6)变为

$$76560 + 15.32X_a - 3.83X_b = -X_a - 32500 + 100000$$

$$-48280 - 32500 - 3.83X_a + 3.83X_b = -50000$$

化简得

$$16.32X_a - 3.83X_b = -9060$$

$$-3.83X_a + 3.83X_b = +30780$$

由联立方程组可得

$$X_a = +1740\text{lbf},\ X_b = +9780\text{lbf}$$

习题

1. 如图 6.16 中所示桁架，利用式(6.6)和表 6.2 的数据，求在载荷 $P=10\text{kip}$ 作用下，长度没有误差、没有温度变化、支座 B 位置没有改变的情况下，冗余力 X_a 和 X_b 的大小。
2. 如果温度下降量为 $\Delta t=-50°\text{F}$，冗余杆因太短造成的变化量为 $\Delta l_i=-0.05\text{in}$，支座 B 位置的变化量为零时，重新计算上题。
3. 如图 6.17 所示，求冗余杆 x 的轴力 X。已知垂直载荷 $P=10\text{kip}$，温度均匀上升 $\Delta t=60°\text{F}$，冗余杆 x 长度的误差是 $\Delta l_x=-0.05\text{in}$(太短)。每根杆的横截面积为 $A_i=1\text{in}^2$，弹性模量为 $E=30\times10^6\text{psi}$，线胀系数是 $\alpha=6.5\times10^{-6}(\text{in/in})/°\text{F}$。
4. 如图 6.18 所示桁架，已知下列数据：$P=10\text{kip}$，$l=100\text{in}$。所有杆为铝杆，$E=10\times10^6\text{psi}$，$\alpha=10\times10^{-6}(\text{in/in})/°\text{F}$。每根水平和铅垂杆的横截面积是 1in^2，每个对角杆的横截面积是 $\sqrt{2}\text{in}^2$。计算由于载荷 P 作用，冗余杆 x、y、z 中轴力 X、Y 和 Z 的大小。
5. 如果上题中，除了应用载荷 P 外，桁架中各杆温度的均匀增长为 $\Delta t=+50°\text{F}$。冗余杆 x 的长度的误差变化量是 $\Delta l_x=+0.10\text{in}$(也就是说，杆太长)。重新求解上题。

图　6.17

图　6.18

6.5　超静定桁架的影响线

在前面的章节中，我们已经讨论过在固定载荷作用下超静定桁架的分析。如果需要处理移动载荷作用问题，并且必须考虑载荷作用的位置，比如桥梁问题，应用影响线是非常有利的。通常，利用 4.7 节讲过的互等定理和桁架的挠曲线，可以极大地简化超静定桁架影响线的建立。互等定理的一般表示为式(4.10)，并且应用互等定理来建立影响线可以通过以下几个例子说明。

首先来看第一个例子，有一个冗余支座的桁架如图 6.19a 所示，假定移动载荷被传递到最下端弦杆的结点上。取中间支座的支反力 X 作为冗余力，并对图 6.19a 和图 6.19b 所示的两种载荷情况应用互等定理，构建力的影响线。第一种情况：单位载荷作用在给定桁架的 m 点上，在中间支座 C 上产生支反力 X。第二种情况：去掉中间支座，在结点 C 上加一个单位载荷。第二种情况是静定的，而且很容易计算所有杆的轴力和伸长量。有了这个伸长量，就可以通过 5.5 节讨论过的虚载荷法计算下弦杆结点的变形量。分别用 δ_m 和 δ_c 表示在这种情况下的结点 m 和 C 的变形。那么，可以得知如图 6.19a 所示的力在如图 6.19b 所示位移上的功等于 $1\times\delta_m-X\delta_c$，并且图 6.19b 上的力在图 6.19a 的相应位移上的功为零，式(4.10)变为

$$1\times\delta_m-X\delta_c=0$$

于是得到

$$X = 1\frac{\delta_m}{\delta_c} \qquad \text{(a)}$$

因此，如图 6.19a 所示，对于在任意位置的移动单位载荷作用下，中间反力 X 是与图 6.19b 中桁架的相应结点的变形成正比。将这些变形都除以变形 δ_c，可以得到反力 X 的影响线 acb 的竖距，如图 6.19c 所示。利用影响线，有移动载荷 P_1、P_2、P_3、…作用的任意系统的冗余力 X 都能通过如下方程得到

$$X = \sum y_m P_m$$

有了冗余力 X 的影响线，利用第 3 章研究静定桁架的方法，很容易得到其他量的影响线图。比如，反力 R_A 的影响线图。对于任意位置的单位载荷，由静定方程得到反力

$$R_A = 1\frac{l - x_m}{l} - X\frac{l_2}{l} \qquad \text{(b)}$$

方程右端的第一项表示简支梁在 A 和 B 的反力，而第二项代表中间反力 X。因此，通过在已建立的简支梁 AB 的影响线的竖距中减去按比例 l_2/l 缩小的影响线 acb 的竖距，得到所求影响线的竖距。也可以通过画如图 6.19c 所示的一条 bcd 直线，然后再按比例缩小阴影部分的竖距来完成。

图 6.19

显然，从简支梁在点 A 和点 B 的弯矩中，减去由于中间反力作用引起的弯矩 Xl_2x_m/l，可以得到过结点 m 的弯矩。因此，为了得到在 m 点的弯矩的影响线，应首先作 X 的影响线 acb，然后在图上叠加如图 6.19d 所示的三角形 adb。除直线 bde 在 a 点用竖距 l/l_2 代替应有的竖距 x_m 之外，三角形 adb 代表简支梁在 m 点的弯矩的影响线。所以，为了得到简支梁在 m 点弯矩的影响系数，三角形 adb 的竖距必须乘以 $x_m l_2/l$。然而，为了得到由 X 作用而产生的弯矩，只有乘以 X 影响线的竖距才能得到相同的影响系数。因此，在图 6.19d 中，当阴影面积的竖距乘以 $x_m l_2/l$ 时，才表示所求的 m 点弯矩的影响系数。

同样的图解也可以作为与铰 m 相对的桁架的上弦杆 nq 的轴力的影响线。为了求杆 nq 的内力，只能用 m 点的弯矩除以距离 h_m，并且改变它们的符号。因此，杆 nq 的影响线是由图 6.19d 所示的阴影面积乘以系数 $-x_m l_2/h_m l$ 得到的。同理，也可以建立下弦杆的影响线。

现在，观察如图 6.19a 所示的杆 np。如果单位力作用在结点 m 的右侧，就应考虑桁架左半部分的平衡。由桁架左半部分上所有力对于 O 点的弯矩，求得 np 杆的力为

$$S = -R_A\frac{h}{h_n} \qquad \text{(c)}$$

因此，对于结点 m 右侧载荷的位置，S 的影响线可以通过应用如图 6.19c 所示计算 R_A 时用

过的相同的阴影面积得到。除此之外，竖距必须乘以 $-l_2h/lh_n$。当单位载荷作用在桁架 pm 左侧，距离 A 点为 x 处，代替式(c)得到 S 的如下方程

$$S=-R_A\frac{h}{h_n}+1\frac{h+x}{h_n} \tag{d}$$

图 6.19e 中画出了所有需要建立的影响线。对于刚才提到的 m 点的右跨，应用图 6.19c 所示的相同面积。然而对于 pm 左侧的部分，必须考虑式(d)右边的第二项。这样，应用第 3 章(参见 3.7 节)介绍过的知识，画 oaf 线，从而解决了该问题。直线 oaf 和 ocb 之间的竖距乘以系数 l_2h/lh_n，就得到了式(d)右边的第二项。所以图 6.19e 所示的阴影面积的竖距乘以系数 l_2h/lh_n，就得到了所求杆 np 的轴力的影响系数。这个竖距的正确符号很容易由式(c)和式(d)来确定，并且在图 6.19e 中标明。

第二个例于，考虑如图 6.20a 所示的两铰拱，并把水平推力 H 作为冗余力。那么，为了建立力 H 的影响线，在如图 6.20a、b 所示的两种载荷条件应用互等定理。第一种情况，一个沿上弦杆运动的单位载荷，作用在 k 点；第二种情况，去掉冗余约束，加上一对大小相等方向相反的单位力。第二种情况是静定的，可以计算出所有杆的伸长量。借助这些伸长量，应用式(5.2)就可以求得 AB 距离的增长量 δ_h，而且通过应用 5.5 节讨论过的虚载荷法就可以求得上弦杆结点的挠度。通过这种方法得到如图 6.20c 所示的挠曲线。现在应用互等定理，得到

$$-H\delta_h+1\times\delta_k=0$$

因此有

$$H=1\frac{\delta_k}{\delta_h}$$

通过除以上弦杆结点的挠度，得到所求 H 的影响线的竖距。这条线是由如图 6.20d 所示的多边形 acb 得到的。得到冗余力的影响线后，应用第 3 章所讲的方法，就可以得到任何其他量的影响线。例如，在图 6.20d 中画出了相对于 m 点的弯矩的影响线。借助于这个弯矩的影响线，就很容易得到弦杆轴力的相应影响线。

现在，考虑中间杆 mn 的轴力 S 的影响线(见图 6.20b)，过杆 mn 做截面 pq。考虑桁架左半部分的平衡，可得

$$S=S_0-H\frac{y_i}{h_i}=\frac{y_i}{h_i}\left(S_0\frac{h_i}{y_i}-H\right) \tag{e}$$

这里，S_0 表示当 $H=0$ 时 mn 杆的力，距离 y_i 和 h_i 如图 6.20b 所示。通过如图 6.20e 所画

图　6.20

的线 ae 和 bd，可得到量 S_0h_i/y_i 的影响线 $afgb$。从 S_0h_i/y_i 中减去力 H 的影响线的竖距，得到图 6.20e 所示的阴影面积。这个面积的竖距再乘以 y_i/h_i 就得到了力 S 的影响系数。同理，可以建立其他中间杆的影响线。

对于带两个冗余杆的系统，例如，如图 6.21a 所示的有四个支座的桁架。假定移动载荷被传递到下弦杆的结点上，那么选择中间支座的反力 X 和 Y 作为冗余力。另外，实际载荷条件如图 6.21a 所示。应考虑两种情况，如图 6.21b、c 所示，即去掉中间支座，分别在结点 C 和结点 D 加上单位力。这两种情况是静定的，可以应用虚载荷法分别计算每种情况的下弦杆的挠度。当单位载荷作用在结点 C 时，令 δ_{cc}、δ_{cd} 和 δ_{cm} 分别表示结点 C、D 和 m 的挠度，令 δ_{dc}、δ_{dd} 和 δ_{dm} 分别表示单位载荷作用在结点 D 时在相同结点上产生的挠度。假定支座 C 和 D 在单位载荷作用下，没有铅垂位移，如图 6.21a 所示。对图 6.21a、b 应用互等定理，得到

$$-X\delta_{cc}-Y\delta_{cd}+1\times\delta_{cm}=0 \qquad (f)$$

同理，考虑图 6.21a、c，得到

$$-X\delta_{dc}-Y\delta_{dd}+1\times\delta_{dm}=0 \qquad (g)$$

图 6.21

由互等定理可知 $\delta_{cd}=\delta_{dc}$，解方程(f)和(g)，得到冗余力 X 和 Y 的如下表达式

$$X=\frac{\delta_{dd}}{\delta_{cc}\delta_{dd}-\delta_{cd}^2}\delta_{cm}-\frac{\delta_{cd}}{\delta_{cc}\delta_{dd}-\delta_{cd}^2}\delta_{dm} \qquad (h)$$

$$Y=\frac{\delta_{cc}}{\delta_{cc}\delta_{dd}-\delta_{cd}^2}\delta_{dm}-\frac{\delta_{cd}}{\delta_{cc}\delta_{dd}-\delta_{cd}^2}\delta_{cm} \qquad (i)$$

当单位载荷沿着桁架改变位置时(见图 6.21a)，在式(h)和式(i)中，只有量 δ_{cm} 和 δ_{dm} 改变了大小，其余的量保持不变。令

$$\frac{\delta_{dd}}{\delta_{cc}\delta_{dd}-\delta_{cd}^2}=C_1 \qquad \frac{\delta_{cc}}{\delta_{cc}\delta_{dd}-\delta_{cd}^2}=C_2 \qquad \frac{\delta_{cd}}{\delta_{cc}\delta_{dd}-\delta_{cd}^2}=C_3 \qquad (j)$$

得到

$$X=C_1\delta_{cm}-C_3\delta_{dm} \qquad (k)$$

$$Y=C_2\delta_{dm}-C_3\delta_{cm}$$

由已经建立的如图 6.21b、c 所示的载荷的挠度曲线，可以计算式(j)中的常数 C_1、C_2 和 C_3。式(k)右端的表达式可由图 6.21d、e 表示。并且由阴影面积的竖距，可以得到所求冗余力 X 和 Y 的影响系数。有了这些影响线，就很容易得到桁架(见图 6.21a)中任意杆的轴力的影响线。为此，任意杆的力 S_i 可以表示为如下形式

$$S_i=S_i'-s_i'X-s_i''Y \qquad (l)$$

这里，S_i'表示去掉冗余支座时各杆的力，s_i'和s_i''分别为在图6.21b、c中所示的单位载荷作用下在同样杆上的影响数[⊖]。因此，当求任意杆轴力的影响线时，只要把建立起来的各个简支梁的影响线竖距和$s_i'X$、$s_i''Y$图的竖距组合起来就可以了。后者的图解很容易通过图6.21d、e阴影面积的竖距图乘以影响数s_i'和s_i''得到。

习题

1. 如果荷载作用在下弦结点上，建立如图6.22所示的桁架的冗余力X_c的影响线。每个杆有相同的横截面积$A_i=4\text{in}^2$和相同的弹性模量E，在列车标准荷载Cooper'sE-60下，利用这个影响线，求X_c的最大值。
2. 利用上题的数据，建立如图6.22所示桁架中杆EF的轴力S的影响线。借助于这个影响线，求列车标准载荷Cooper'sE-60下S的最大值。
3. 如果用垂直的钢杆CD(没有显示)代替如图6.22所示的在C处的刚性支座，杆的横截面积$A_0=4\text{in}^2$，长$l_0=10\text{ft}$，其他数据同第1题。重新求解X_c的最大值。

图 6.22

4. 如果活载作用在下弦结点上，建立如图6.23所示桁架中冗余杆CD的轴力X的影响线。每个杆有相同的横截面积$A_i=4\text{in}^2$和相同的弹性模量E，杆CD长6ft。用这个影响线，在列车标准载荷Cooper'sE-60下，求X的最大值。
5. 如果$a=60\text{in}$，$h=80\text{in}$，建立如图6.24所示桁架中杆mn的轴力X的影响线。每根杆有相同的AE值，假定移动载荷应用在下弦结点上。

图 6.23

图 6.24

6.6 超静定空间结构

若一个空间结构中有n个结点和大于$3n$的杆件(包括支撑杆或者等效杆)，静定方程的数目不足以求得所有杆件的未知轴力，那么这个系统是超静定系统。在分析超静定系统时，必须考虑杆件的弹性变形。这可以应用前面学过的解决平面桁架的方法来完成。现举例说明

⊖ s_i'和s_i''的影响数不要与定义的影响系数相混淆。

在空间系统中如何应用这种方法。这里考虑一个简单的系统，如图 6.25 所示的单一结点 A 通过四个杆与基础相连。这种系统有一个冗余杆。为了定义此结构，假设所有杆都是相同的，且长度 $l=5\text{ft}$，杆 1 和杆 3 位于水平面 ABD 内，杆 2 和杆 4 位于垂直平面 ACE 内，截得角度为 $\angle BAD$。在 A 点的力 P 作用于垂直平面内，与平面 BCD 平行，且与垂直杆 AE 的夹角为 45°。在此选择杆 AE 作为冗余杆，并且用 X 表示 AE 杆轴力。那么，其他杆上的力可由下面方程得出

图 6.25

$$S_i = S_i' + s_i'X \tag{a}$$

这里 S_i'表示在基本系统的任意杆 i 上由载荷 P 产生的力。基本系统是指去掉冗余杆 AE 之后的系统。s_i'表示任意杆 i 的影响数。在基本系统的结点 A 加垂直单位载荷，可以得到这些影响数，并且计算出各杆的相应轴力。为得到冗余力 X，应用最小功原理，得到的应变能表达式为

$$U = \sum \frac{S_i^2 l_i}{2A_iE} + \frac{X^2 l_0}{2A_0E} = \frac{1}{2}\left(\sum S_i^2\rho_i + X^2\rho_0\right) \tag{b}$$

这里的求和是对基本系统中的所有杆求和。对上述表达式关于 X 微分，并使其等于零，得

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \sum S_i s_i'\rho_i + X\rho_0 = 0 \tag{c}$$

可以看到，在这种情况下，所有的杆件 ρ_i 都相同。求解上式，然后替换式(a)中的 S_i，得到

$$X = -\frac{\sum S_i' s_i'}{\sum (s_i')^2 + 1} \tag{d}$$

S_i'和 s_i'值以及所有求解 X 必需的计算均已在表 6.3 中列出。如果载荷 P 等于 1t，那么式(d)有

$$X = -\frac{2.95}{5.165}\text{t} = -0.570\text{t}$$

最后，利用式(a)得到 S_i 的值，如表 6.3 中最后一栏所示。

应用 5.2 节讨论过的 Maxwell-Mohr 方法也可以求解式(c)的 X。在这种情况下，相应于单位载荷的力在实际位移上所做的功等于零。若考虑到温度的改变和杆长度的可能误差，必须用 $S_i\rho_i + \alpha t_i l_i + \Delta_i$ 代替 $S_i\rho_i$，用 $X\rho_0 + \alpha t_0 l_0 + \Delta_0$ 代替 $X\rho_0$，然后代入式(c)，于是得到方程

$$\sum (S_i\rho_i + \alpha t_i l_i + \Delta_i)s_i' + X\rho_0 + \alpha t_0 l_0 + \Delta_0 = 0$$

求得

$$X = -\frac{\sum (S_i'\rho_i + \alpha t_i l_i + \Delta_i)s_i' + \alpha t_0 l_0 + \Delta_0}{\sum (s_i')^2\rho_i + \rho_0} \tag{6.7}$$

这个公式可以用来计算带一个冗余杆的任意铰接的空间结构的冗余力。只有在必要时才扩充到基本系统中所有杆的求和。如果忽略项包括温度 t_i 和长度误差 Δ_i，则式(6.7)与式(d)相一致。

表　6.3

i	S_i'/t	s_i'	$S_i's_i'$/t	$(s_i')^2$	S_i/t
1	$-5\sqrt{2}/6$	$-\frac{5}{6}$	0.983	0.694	-0.705
2	$5\sqrt{2}/6$	$\frac{5}{3}$	1.967	2.777	0.230
3	0	$-\frac{5}{6}$	0	0.694	0.475
4					-0.570
Σ			2.95	4.165	

作为更复杂一点的例子，下面讨论如图 6.26 所示的空间结构，水平力 $P=1$t。这个结构由 12 个结点和 39 根杆组成。因此，该结构有三个冗余杆。选择三个水平对角杆作为冗余杆，分别用 X、Y 和 Z 表示冗余力。去掉冗余杆后，就可得到静定基本系统，如图 6.27 所示。在载荷 $P=1$t 的作用下，基本系统中各杆的力 S_i' 见表 6.4 的第二栏。现在考虑单位载荷作用在基本系统上，如图 6.27a～c 所示，并且计算影响数 s_i'、s_i''、s_i'''，计算结果已在表 6.4 的第 3～5 栏给出。给定结构上任意杆 i 的力（见图 6.26）表达式如下

$$S_i = S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z$$

并且将式(6.6)化简为下面三个方程来计算冗余力

$$\left.\begin{aligned}\sum s_i'(S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z)\rho_i + X\rho_x &= 0\\ \sum s_i''(S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z)\rho_i + Y\rho_y &= 0\\ \sum s_i'''(S_i' + s_i'X + s_i''Y + s_i'''Z)\rho_i + Z\rho_z &= 0\end{aligned}\right\}\quad (e)$$

图　6.26

a)　　b)　　c)

图　6.27

在这些方程中，用 ρ_x、ρ_y 和 ρ_z 表示三个冗余对角杆的伸长率。当然，冗余力的大小依赖于杆横截面积的尺寸。例如，假设所有杆的伸长率是相等的，在式(e)中消去 ρ，那么式(e)中的所有系数通过对表 6.4 中的第 6～14 栏求和得到，这样，式(e)最后变为

$$\left.\begin{aligned}88X+47Y+15Z&=-22\sqrt{2}\\47X+32Y+11Z&=-12\sqrt{2}\\15X+11Y+8Z&=-4\sqrt{2}\end{aligned}\right\}\qquad(f)$$

从而解得

$$X=-0.2327\sqrt{2}\ \mathrm{t}\quad Y=-0.0215\sqrt{2}\ \mathrm{t}\quad Z=-0.0341\sqrt{2}\ \mathrm{t}$$

表 6.4

i (1)	S_i' (2)	s_i' (3)	s_i'' (4)	s_i''' (5)	$(s_i')^2$ (6)	$(s_i'')^2$ (7)	$(s_i''')^2$ (8)	$S_i's_i'$ (9)	$S_i's_i''$ (10)	$S_i's_i'''$ (11)	$s_i's_i''$ (12)	$s_i's_i'''$ (13)	$s_i''s_i'''$ (14)
1	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$1/\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$-1/\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	$1/\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\sqrt{2}$	1	0	0	1	0	0	$\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
7	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$1/\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
8	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	$1/\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	$-1/\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	-1	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
14	0	$1/\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
16	0	$1/\sqrt{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	$3/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$3/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0
18	$\sqrt{2}$	1	1	0	1	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	1	0	0
19	-2	$-3/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0
20	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
21	0	$3/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0
22	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
23	0	$-3/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0
24	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
25	-1	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
26	0	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
27	0	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
28	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0

（续）

i (1)	S_i' (2)	s_i' (3)	s_i'' (4)	s_i''' (5)	$(s_i')^2$ (6)	$(s_i'')^2$ (7)	$(s_i''')^2$ (8)	$S_i's_i'$ (9)	$S_i's_i''$ (10)	$S_i's_i'''$ (11)	$s_i's_i''$ (12)	$s_i's_i'''$ (13)	$s_i''s_i'''$ (14)
29	2	$5/\sqrt{2}$	$3/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
30	$\sqrt{2}$	1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1
31	-3	$-5/\sqrt{2}$	$-3/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$15/\sqrt{2}$	$9/\sqrt{2}$	$3/\sqrt{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
32	0	-1	-1	-1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
33	0	$5/\sqrt{2}$	$3/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
34	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
35	0	$-5/\sqrt{2}$	$-3/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
36	0	-1	-1	-1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
Σ					87	31	7	$22\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	47	15	11

习第

1. 如图6.28所示，简单空间桁架由两个平面$ABCD$和$ABEF$组成，它们通过点C、D、E和F与垂直墙面相连，其中面$ABCD$为水平平面。所有杆均有相同的横截面面积A和相同的弹性模量E。计算在图示结点A处施加垂直载荷$P=1\text{kip}$时，在冗余杆x产生的冗余力X。
2. 若温度均匀上升到50°F，求在空间桁架的冗余杆x(见图6.28)上引起多大的热力X_i？各杆的线胀系数为$\alpha=6.5\times10^{-6}(\text{in/in})/°\text{F}$，$A_i=1\text{in}^2$，$E=30\times10^6\text{psi}$。
3. 如图6.29所示，超静定球铰空间桁架，其模式为金字塔型，尺寸为$a=10\text{ft}$，$h=16\text{ft}$，E、F、G、H分别为边AI、BI、CI、DI的中间结点。一个水平力$P=10\text{kip}$，作用力平行于AB，作用在图示I点处。计算冗余杆x和y上的轴力X和Y的大小，假定冗余杆y有长度误差$\Delta_y=-0.01\text{ft}$，即这个杆太短。所有杆均有相同的横截面面积$A_i=4\text{in}^2$和相同的弹性模量$E=30\times10^6\text{psi}$。基础点A、B、C、D是固定的。

图　6.28

图　6.29

第7章

拱与刚架

7.1 概述

任何在平面内弯曲、端部受支撑且载荷主要为直接压力的梁或肋，可以称作拱。假设肋弯曲的平面对于每一横截面也是对称平面且外力只作用在此平面内。在这些条件下，拱的变形也只在此对称平面内，拱的变形变为二维问题。如果拱的截面对于这个平面不是对称的或载荷与平面正交，这时受载的拱会产生扭转，这种情况则不宜认为是拱。引起这种扭转的情况在以下的讨论中不予考虑。

在第1章已经讨论过了几个静定的三铰拱的例子。这里只考虑超静定的拱，例如，图7.1a和图7.1b分别表示二铰拱和无铰拱。对这样的超静定拱，无论是铰支还是固支，其本质是端点A和B在载荷作用下不能移动；否则，就不能展现拱的真正作用了[○]。图7.1a所示的一端高于另一端的拱称作非对称拱，反之图7.1b所示的拱称作对称拱。在拱轴线上的最高点C称为拱顶，过支撑点的直线AB称为拱线。支撑点间的水平距离称为拱的跨距，用l表示，从拱的轴线到拱线的最大垂直距离称为拱高，用f表示。

图 7.1

二铰拱(见图7.1a)表示有一个冗余反力的结构。由子支撑点是固定的，所加载荷在两端点均产生水平和垂直方向的反力。这样，具有四个未知反力，面计算时只有三个静定方程。要得到第四个方程，必须考虑拱的变形。例如，可以把水平反力H_B作为冗余力，它的大小取决于使铰B水平位移为零的条件。

○ 由于支撑条件差而使拱支座易屈服从而导致许多拱结构发生破坏。

对无铰拱(见图7.1b)，有六个反力，四个分力及两个端部的力矩。把力 R_A、H_A 和力矩 M_A 作为冗余力，那么这些量的大小取决于使 A 端相应的位移和转角为零的条件。

分析超静定拱问题的一般方法可应用卡氏第二定理和虚功原理，这两个定理在第4.5节和4.6节中已经分别讨论过。这需要首先建立拱在载荷下总应变能的表达式。为此，考虑图7.2中的一个拱的微元，且分别用 M、V 和 N 定义任意横截面位置的弯矩、剪力和轴力，并以图示方向为正向。因为横截面的厚度 h 与拱轴线的曲率半径 r 相比较小，所以可以用弯矩的应变能表达式

$$U_M = \int_0^s \frac{M^2 \mathrm{d}s}{2EI} \tag{a}$$

这近似于直梁，其中 s 表示拱中心线的长度，I 表示横截面的惯性矩。图7.2中由剪力 V 引起的应变能与弯矩引起的应变能相比通常很小，可以忽略。最后，对轴力的应变能，有

$$U_N = \int_0^s \frac{N^2 \mathrm{d}s}{2AE} \tag{b}$$

其中，s 表示拱中心线的长度，A 表示截面的面积。因此，忽略了拱轴线曲率和剪切变形的影响，得到拱肋总应变能的表达式为[⊖]

图 7.2

$$U = \int_0^s \frac{M^2 \mathrm{d}s}{2EI} + \int_0^s \frac{N^2 \mathrm{d}s}{2AE} \tag{7.1}$$

在大多实际情况中，截面面积 A 和惯性矩 I 随拱长度的变化而变化，这种变化必须在进行积分计算之前考虑进来。特殊的变化类型将在后边的例子中考虑。

7.2 对称二铰拱

现在考虑图7.3所示受任意垂直载荷作用的两铰拱。选择推力 H 为冗余反力，应用最小功原理，有

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \int_0^s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial H}\mathrm{d}s + \int_0^s \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial H}\mathrm{d}s = 0 \tag{a}$$

图 7.3

用 M' 和 N' 分别表示当 H 不作用且铰 B 可以水平自由移动时拱的弯矩和轴向压力。那么完整的弯矩和轴力的表达式为

$$M = M' - H(f - y) \qquad N = N' + H\cos\phi \tag{b}$$

其中 f 表示拱高，ϕ 表示中心线的切线与 x 轴的夹角。把表达式(b)及它们关于 H 的导数代入式(a)中，得

⊖ 包含剪切变形与拱轴线曲率的影响有更复杂的应变能表达式，基于这更精确的表达式，结果表明：对于平常比例的拱，式(7.1)在实际应用中已经足够精确。

$$-\int_0^s \frac{M' - H(f-y)}{EI}(f-y)\,\mathrm{d}s + \int_0^s \frac{N' + H\cos\phi}{AE}\cos\phi\,\mathrm{d}s = 0 \tag{c}$$

求解 H，得

$$H = \frac{\int_0^s (M'/EI)(f-y)\,\mathrm{d}s - \int_0^s (N'/AE)\cos\phi\,\mathrm{d}s}{\int_0^s [(f-y)^2/EI]\,\mathrm{d}s + \int_0^s [(\cos^2\phi)/AE]\,\mathrm{d}s} \tag{7.2a}$$

式(7.2a)适用于在任意载荷条件下任意形状的对称二铰拱。对通常比例的拱，式(7.2a)中分子的第二项远小于第一项，可以忽略。

对于特殊情况，假设拱轴线是由如下方程定义的抛物线

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} \qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+(8fx/l^2)^2}} \tag{d}$$

并且截面面积和惯性矩变化的表达式为

$$A = \frac{A_0}{\cos\phi} \qquad I = \frac{I_0}{\cos\phi} \tag{e}$$

其中 A_0 和 I_0 为拱顶 C 的截面面积和惯性矩。最后，假设垂直均布载荷集度 q 作用在拱上，有

$$M' = \frac{ql^2}{8}\left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \qquad N' = qx\sin\phi \tag{f}$$

应用式(d)和式(f)，式(7.2a)中的每个积分很容易求出来，忽略分子的第二项积分，得到最后结果

$$H = \frac{ql^2}{8f} \times \frac{1}{1+\beta} \tag{7.2b}$$

其中

$$\beta = \frac{15}{32} \times \frac{l}{f^2} \times \frac{I_0}{A_0}\arctan\frac{4f}{l} \tag{g}$$

式(7.2b)中的第一个因子表示均布载荷下三铰拱的推力，乘以系数 $1/(1+\beta)$ 得到两铰拱的推力。

另一种两铰拱(见图 7.3)的对称变形是由温度均匀变化引起的。定义 t 为拱的温度相对于其在两端点固支下自由放置时的温升，α 为材料的线胀系数。在自由膨胀的情况下，拱的跨度会增加 αtl。实际情况下，拱的端部受到约束，推力 H 需要改变大小以抵消自由膨胀量 αtl。应用卡式定理，得

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \alpha tl \tag{h}$$

方程的左边可以从式(c)中使 $M' = N' = 0$ 得到。然后求解 H，得

$$H = \frac{\alpha tl}{\int_0^s [(f-y)^2/EI]\,\mathrm{d}s + \int_0^s [(\cos^2\phi)/AE]\,\mathrm{d}s} \tag{7.3a}$$

由式(d)和式(e)定义的抛物线形拱，有

$$H = \frac{15EI_0}{8f^2 l} \times \frac{\alpha tl}{1+\beta} \tag{7.3b}$$

对矩形截面拱，拱顶热应力的最大和最小值为

$$\sigma_{\substack{\min\\ \max}} = -\frac{H}{A_0} \mp \frac{6Hf}{A_0 h} = -\frac{15}{8} \times \frac{Eh^2}{12f^2} \times \frac{\alpha t}{1+\beta}\left(1 \pm \frac{6f}{h}\right) \tag{7.3c}$$

可见热应力的大小随比率 h/f 的增加面快速增加，这对于厚平拱是非常重要的。

为得到对称两铰拱推力 H 的影响线，可应用互等定理。比较图 7.4a 和图 7.4b 中两种工况，推出

$$Pv + H\Delta = 0$$

其中 v 以向下为正。得出

$$H = -P\frac{v}{\Delta} \tag{i}$$

要画出影响线需要计算图 7.4b 中由单位载荷作用产生的位移 Δ 和 v。位移 Δ 可将式(7.3)中 αtl 简单替换为 Δ 且使 $H=1$ 得到，因而

$$\Delta = \int_0^s \frac{(f-y)^2}{EI}\mathrm{d}s + \int_0^s \frac{\cos^2\phi}{AE}\mathrm{d}s \tag{j}$$

计算挠度 v 时，将拱的右半部分看作在 B 点受水平单位力作用且在 C 点固支的悬臂梁，如图 7.5 所示。定义 v_B 和 v_D 分别为 B 点和 D 点的垂直挠度，我们由如下方程得到需要的位移 v

$$v = v_D - v_B \tag{k}$$

图 7.4

图 7.5

挠度 v_D 可以通过卡式定理求解。在 D 点取无限小的纵向力 Q，对应变能表达式关于力 Q 求微分，得

$$v_D = \int_C^B \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q}\mathrm{d}s + \int_C^B \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial Q}\mathrm{d}s \tag{l}$$

杆 CD 部分的弯矩和压力的表达式为

$$M = -[1(f-y) + Q(x_D - x)] \quad N = 1\cos\phi - Q\sin\phi$$

如果令 $Q=0$，得到杆 DB 段的表达式。将 M 和 N 的正确表达式及它们关于 Q 的导数代入式(l)，并使 $Q=0$，有

$$v_D = \int_C^D \frac{(f-y)(x_d-x)}{EI}\mathrm{d}s - \int_C^D \frac{\cos\phi\sin\phi}{AE}\mathrm{d}s \tag{m}$$

在式(m)中令 $x_D = l/2$，可得到 v_B，且式(k)最终变为

$$v = -\int_C^B \frac{(f-y)(l/2-x)}{EI}\mathrm{d}s + \int_C^D \frac{(f-y)(x_d-x)}{EI}\mathrm{d}s + \int_D^B \frac{\cos\phi\sin\phi}{AE}\mathrm{d}s \tag{n}$$

利用式(n)及式(j)，对每一特殊情况都可以计算推力 H 影响线的竖距 v/Δ。

举例来说，考虑由式(d)和式(e)定义的抛物线拱。那么，由式(7.3a)得

$$\Delta = \frac{8}{15}\frac{lf^2}{EI_0}(1+\beta)$$

考虑式(n)中的第二个积分项，有

$$\int_C^D \frac{(f-y)(x_D-x)}{EI}\mathrm{d}s = \frac{f}{EI_0}\int_0^{x_D}\left(1-\frac{4x^2}{l^2}\right)(x_D-x)\mathrm{d}x = \frac{fx_D^2}{EI_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x_D^2}{3l^2}\right)$$

式(n)中的第一个积分式可以通过令 $x_D = l/2$ 而得到。第三个积分式通常很小，可以忽略。这样，近似地有

$$v = -\frac{5}{48}\frac{fl^2}{EI_0} + \frac{fx_D^2}{EI_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x_D^2}{3l^2}\right)$$

影响线的竖距可以用下式定义

$$-\frac{v}{\Delta} = \frac{15}{8(1+\beta)}\left(\frac{5}{48}\frac{l}{f} - \frac{x_D^2}{2fl} + \frac{x_D^4}{3fl^2}\right) \tag{7.4}$$

在图 7.6b 中，影响线用曲线 $a_1b_1c_1$ 表示。借助这条线，可以很容易地建立任意截面 D 上的弯矩和轴力的影响线。用 M' 定义跨距为 l 的简支梁 AB 的弯矩，用距离 a、b、c 定义 D 点的位置，对于任意位置的移动载荷 P，拱的横截面 D 处的弯矩为

$$M = M' - Hc = c\left(\frac{M'}{c} - H\right)$$

弯矩 M 可以通过图 7.6c 中阴影部分的竖距乘以 c 得到，阴影部分的竖距表示 M'/c 影响线和 H 影响线竖距的差值。

对任意位置移动载荷的轴力，有

$$N = H\cos\phi - V'_D\sin\phi = \cos\phi(H - V'_D\tan\phi)$$

其中 V'_D 是简支梁在 D 处的剪力。N 可以通过图 7.6d 所示阴影部分的竖距乘以 $\cos\phi$ 得到，阴影部分的竖距表示 H 影响线和 $V'_D\tan\phi$ 影响线竖距的差值。

图 7.6

习题

1. 对称两铰圆弧拱如图 7.7a 所示。中心线的半径为 r，对应的中心角为 2α。截面面积 A 与

惯性矩 $I=Ak^2$ 都是沿拱长度上的常数。应用卡式第二定理，试推导由于推力 H 的作用弦长 AB 的减少量 Δ 的一般表达式。

2. 如图 7.7a 所示，如果铰支端 A 和 B 被约束，试求由均布垂直载荷集度 q 的作用在拱上产生的推力 H 的大小。应用式(7.2)，忽略分子的第二项。
3. 如图 7.7b 所示的圆弧拱，如果铰支端 A 和 B 被约束，拱的线胀系数为 α_t，试求温度均匀升高 t 时产生的推力 H 的大小。

图 7.7

7.3 对称无铰拱

一般情况下，无铰拱结构拥有三个冗余量。可以把所选拱横截面上的弯矩、剪力和轴力作为冗余量。对于对称拱而言，横截面选在拱顶 C 较为有利。那么，如果作用在拱上的载荷也是对称分布的，则拱顶处剪力为零。这样就只需考虑两个冗余量：拱顶处的弯矩 M_C 和轴力 N_C，如图 7.8a 所示。这些冗余量可以根据最小功原理得出，如下式

$$\frac{\partial U}{\partial M_C}=2\int_0^s\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_C}\mathrm{d}s=0$$
$$\frac{\partial U}{\partial N_C}=2\int_0^s\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial N_C}\mathrm{d}s+2\int_0^s\frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial N_C}\mathrm{d}s=0 \tag{a}$$

其中 s 表示图 7.8 所示 CB 的弧长，也就是拱轴线全长的一半。

图 7.8

用 M' 和 N' 表示在任意横截面上只由外载荷作用所产生的弯矩和轴力，在任意横截面 D 处总的弯矩和轴力为

$$M=M_C+N_Cy+M' \qquad N=N_C\cos\phi+N' \tag{b}$$

把式(b)及其对 M_C 和 N_C 的导数带入式(a)，得

$$M_C\int_0^s\frac{\mathrm{d}s}{EI}+N_C\int_0^s\frac{y\mathrm{d}s}{EI}=-\int_0^s\frac{M'}{EI}\mathrm{d}s$$
$$M_C\int_0^s\frac{y\mathrm{d}s}{EI}+N_C\int_0^s\frac{y^2\mathrm{d}s}{EI}+N_C\int_0^s\frac{\cos^2\phi}{AE}\mathrm{d}s=-\int_0^s\frac{M'y}{EI}\mathrm{d}s-\int_0^s\frac{N'\cos\phi}{AE}\mathrm{d}s \tag{c}$$

当拱的尺寸和外载荷类型已知时，冗余量 M_C 和 N_C 的大小可以用式(c)计算出来。

如果将坐标原点由拱顶 C 移到 O 点，如图 7.8b 所示，则式(c)可被简化。选择距离 d，使新的纵坐标 $y_1 = y - d$ 满足条件

$$\int_0^s \frac{y_1 \mathrm{d}s}{EI} = \int_0^s \frac{y-d}{EI}\mathrm{d}s = 0 \tag{d}$$

可得

$$d = \frac{\int_0^s (y\mathrm{d}s/EI)}{\int_0^s (\mathrm{d}s/EI)} \tag{7.5}$$

这样定义的 O 点称为拱的弹性中心。如果把它作为原点，用 $y_1 + d$ 代替 y 并代入式(c)，并注意到 $\int_0^s (y_1/EI)\mathrm{d}s$ 项消失，可得

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= M_C + H_0 d = -\frac{\int_0^s (M'\mathrm{d}s/EI)}{\int_0^s (\mathrm{d}s/EI)} \\ H_0 &= N_C = -\frac{\int_0^s (M'y_1/EI)\mathrm{d}s + \int_0^s [(N'\cos\phi)/AE]\mathrm{d}s}{\int_0^s (y_1^2/EI)\mathrm{d}s + \int_0^s [(\cos^2\phi)/AE]\mathrm{d}s} \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

如果假设有一刚性支架 CO 连接到拱的横截面 C，并引入作用在支架端点 O 处静平衡系统的 M_0 和 H_0 来代替 M_C 和 N_C，也可以得到相同的结果。此时，可选 M_0 和 H_0 作为冗余量，之后运用最小功原理可直接得出式(7.6)。由此，可以得到式(7.6)的两个独立方程，从而确定 M_0 和 H_0 的大小。

借助互等定理可以发现弹性中心 O 有简单的物理意义。即作用在 O 点的力 H_0 在横截面 C 处将不会产生旋转；同理，弯矩 M_0 在 O 点将不会产生水平位移。

现在假设对称无铰拱温度均匀升高。以 H_0 和 M_0 作为冗余量(见图 7.8b)，随着温度的升高，可以发现 H_0 的大小必定能抵消点 C 处的水平位移 $\alpha tl/2$。因此，在对称结构中，在拱顶 C 的横截面处没有转角变形。由此，根据卡氏第二定理，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial M_0} &= \int_0^s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0}\mathrm{d}s = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial H_0} &= \int_0^s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial H_0}\mathrm{d}s + \int_0^s \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial H_0}\mathrm{d}s = \frac{\alpha tl}{2} \end{aligned} \tag{e}$$

其中

$$M = M_0 + H_0 y_1 \qquad N = H_0\cos\phi \tag{f}$$

把式(f)及其导数带入式(e)中，可得 $M_0 = 0$ 及

$$H_0 = \frac{\alpha tl/2}{\int_0^s (y_1^2\mathrm{d}s/EI) + \int_0^s [(\cos^2\phi\mathrm{d}s)/AE]} \tag{7.7}$$

由此可以看出，对任何对称无铰拱，如果给定拱的尺寸和温度变化量，受均匀温度变化面产生的推力很容易计算出来。

在推导式(7.6)时，假设拱上承受对称载荷，在这种情况下，拱顶横截面处剪力为零。现在来考虑一下反向对称加载的情况，如图 7.9a 所示。由拱的对称性，可以推断力 P 在拱

顶 C 右侧与在 C 左侧产生的弯矩和轴向压力是数值相等而方向相反的。这意味着当这两个力 P 同时作用时，拱顶处的弯矩和轴力将为零，这时只需考虑横截面 C 处的剪力 V_0，如图 7.9b 所示。根据最小功定理计算这个冗余量，得

$$\frac{\partial U}{\partial V_0} = 2\int_0^s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial V_0}\mathrm{d}s + 2\int_0^s \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial V_0}\mathrm{d}s = 0 \tag{g}$$

由于拱的两半部分的应变能相等，只需从 C 到 B 积分并把结果乘以 2，由图 7.9b 得

$$M = V_0 x_1 + M' \qquad N = -V_0\sin\phi + N' \tag{h}$$

代入式(g)中，得

$$\int_0^s \frac{V_0 x_1 + M'}{EI} x_1 \mathrm{d}s - \int_0^s \frac{-V_0\sin\phi + N'}{AE}\sin\phi \mathrm{d}s = 0$$

由此可得

$$V_0 = \frac{-\int_0^s (M' x_1/EI)\mathrm{d}s + \int_0^s [(N'\sin\phi)/AE]\mathrm{d}s}{\int_0^s (x_1^2/EI)\mathrm{d}s + \int_0^s [(\sin^2\phi)/AE]\mathrm{d}s} \tag{7.8}$$

当已知拱的尺寸时，由式(7.8)就可以计算出在每一种反对称载荷情况下所产生的剪力 V_0。

a) b)

图 7.9

解决了对称和反对称的加载问题，可将一般载荷情况分解为对称和反对称载荷的两部分来求解。图 7.10 是几种特殊情况。下面介绍用这种方法来处理一般载荷问题。

a) b) c)

图 7.10

现在用互等定理来构造对称无铰拱的影响线。为了构造推力 H_0 的影响线，必须比较一下图 7.11a 所示实际载荷情况和图 7.11b 所示假想载荷情况。第一种情况，在 D 点有垂直载荷 P 及在拱顶的未知冗余力 M_0、H_0 和 V_0[⊖]。第二种情况，载荷 P、冗余量 M_0 和 V_0 被去掉，

⊖ 要更清楚地显示这些力，在拉伸杆 OC 之间留一小段距离，如图 7.11a 所示。

用两个反向对称的单位载荷代替 H_0。由于特殊选定点 O[见式(7.5)]，单位力在横截面 C 处将不产生转角。这些横截面只会产生大小为 $2u_0$ 的移动而不会产生相对转动和相对滑动。冗余弯矩 M_0 和冗余剪力 V_0 在图 7.11b 所示单位载荷作用下而产生的相应位移上所做的功为零。由互等定理可知

$$H_0 2u_0 + Pv_d = 0$$

由此可得

$$H_0 = -P\frac{v_d}{2u_0} \tag{7.9a}$$

由卡氏第二定理可计算出图 7.11b 所示单位载荷所引起的位移 u_0 和 v_d

$$u_0 = \int_C^B \frac{y_1^2}{EI}\mathrm{d}s + \int_C^B \frac{\cos^2\phi}{AE}\mathrm{d}s$$

$$v_d = -\int_C^B \frac{y_1(x_1 - x_d)}{EI}\mathrm{d}s + \int_C^B \frac{\cos\phi\sin\phi}{AE}\mathrm{d}s \tag{7.9b}$$

在任何特殊情况下，当拱的形状和尺寸已知时，即可求出式(7.9b)的位移，再将结果带入式(7.9a)，就可以得到冗余量 H_0 的影响系数。

图 7.11

类似地，冗余弯矩 M_0 和冗余剪力 V_0 的影响线都可得到。对于弯矩 M_0，可将实际载荷条件(见图 7.11a)与假想情况(见图 7.11c)进行比较。在后一种情况下，单位弯矩在 O 点不产生相对位移，只在横截面 C 产生相对于其他横截面为 2θ 的转角。这是因为图 7.11a 所示实际载荷 H_0 和 V_0 在图 7.11c 所示假想载荷下产生的相应位移上所做的功为零，而 M_0 的功为 $M_0(2\theta_0)$。同时，在实际的连续拱中，没有相应于虚拟单位弯矩的相对位移，弯矩作功为零。那么互等定理有

$$M_0 2\theta_0 + Pv_d = 0$$

解得

$$M_0 = -\frac{Pv_d}{2\theta_0} \tag{7.10a}$$

由此可以看出，只要计算出图 7.11c 所示假想载荷产生的位移 v_d 及 θ_0，就可以得出 M_0 的影响线的竖距。为此，再次运用卡氏第二定理，可得

$$\theta_0 = \int_C^B \frac{\mathrm{d}s}{EI}$$

$$v_d = -\int_D^B \frac{x_1 - x_d}{EI}\mathrm{d}s \tag{7.10b}$$

为求得 V_0 的影响线，可将实际载荷情况(见图 7.11a)与假想载荷情况(见图 7.11d)进

行比较。可见后者在拱顶横截面上只产生了 $2v_0$ 的相对滑动，而未产生转动和分离，由互等定理得出

$$-V_0 2v_0 + Pv_d = 0$$

由此，得

$$V_0 = P\frac{v_D}{2v_0} \tag{7.11a}$$

要计算图 7.11d 中单位载荷所产生的位移 v_D 和 v_0，再次运用卡氏定理，得

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= -\int_C^B \frac{x_1^2}{EI}\mathrm{d}s - \int_C^B \frac{\sin^2\phi}{AE}\mathrm{d}s \\ v_d &= -\int_D^B \frac{x_1(x_1 - x_d)}{EI}\mathrm{d}s - \int_D^B \frac{\sin^2\phi}{AE}\mathrm{d}s \end{aligned}\right\} \tag{7.11b}$$

可以看出，在以上的三种情况中，所求影响线的竖距与图 7.11b～d 所示单位载荷在拱上所产生的垂直挠度 v_D 成比例。

作为一个特例，现在讨论如下无铰抛物线拱的影响线。抛物线拱的中心轴线由下式定义

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} \tag{i}$$

并且横截面的变化满足

$$A = \frac{A_0}{\cos\phi} \qquad I = \frac{I_0}{\cos\phi} \tag{j}$$

从式(7.5)出发，可以得出拱的弹性中心在如下距离处，即

$$d = \frac{\int_0^{l/2} y\mathrm{d}x}{\int_0^{l/2}\mathrm{d}x} = \frac{f}{3} \tag{7-12}$$

把弹性中心作为坐标 x_1、y_1 的原点，有 $x_1 = x$ 及 $y_1 = y - d$。

对于 H_0 的影响线，利用式(7.9a)，其中 u_0 和 v_d 的值由式(7.9b)给出。对于 H_0 的一阶近似来说，可以忽略式(7.9b)中包含 ϕ 的第二项。有了这种简化，可得

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \int_0^{l/2} \frac{y_1^2\mathrm{d}x_1}{EI_0} = 2\frac{f^2 l}{45EI_0} \\ v_d &= -\int_0^{l/2} \frac{y_1(x_1 - x_d)\mathrm{d}x_1}{EI_0} = -\frac{fl^2}{48EI_0}\left(1 - \frac{4x_d^2}{l^2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{7-13}$$

将这些值代回式(7.9a)，得

$$H_0 = \frac{15Pl}{64f}\left(1 - \frac{4x_d^2}{l^2}\right)^2 \tag{7-14}$$

对于 M_0 的影响线，利用式(7.10a)和式(7.10b)，后者变为

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= \int_0^{l/2} \frac{\mathrm{d}x_1}{EI_0} = \frac{l}{2EI_0} \\ v_d &= -\int_{x_d}^{l/2} \frac{(x_1 - x_d)\mathrm{d}x_1}{EI_0} = -\frac{l}{2EI_0}\left(\frac{l}{2} - x_d\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{7-15}$$

将这些值代入式(7.10a)，得

$$M_0 = \frac{P}{2l}\left(\frac{l}{2} - x_d\right)^2 \tag{7-16}$$

有了 M_0 的这种表达式，由下式可得到在拱顶 C 上的弯矩 M_C

$$M_C = M_0 - H_0 d \tag{k}$$

对于 V_0 的影响线，再次忽略包含 ϕ 的第二项，式(7.11a)变成

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \int_0^{l/2} \frac{x_1^2 \mathrm{d}x_1}{EI_0} = -\frac{l^3}{24EI_0} \\ v_d &= -\int_{x_d}^{l/2} \frac{x_1(x_1 - x_d)\mathrm{d}x_1}{EI_0} = -\frac{1}{EI_0}\left(\frac{l^3}{24} + \frac{x_d^3}{6} - \frac{l^2 x_d}{8}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7-17}$$

利用式(7.11)，给出

$$V_0 = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{4x_d^3}{l^3} - \frac{3x_d}{l}\right) \tag{7-18}$$

图 7.9c，图 7.10c，图 7.11c 中分别绘出了 H_0、M_0 及 V_0，其影响线分别如图 7.12a、b、c 所示。拱顶 C 处由式(k)给出的弯矩 M_C 的影响图如图 7.12d 所示。

比较各种不同形状的拱表明，由式(i)和式(j)定义的拱，相当大的形状偏差对影响线的竖距只产生很小的影响。这意味着可以利用抛物线拱的影响线对其他形状的拱进行近似分析。但是在计算静载或温度变化产生的应力时，应用这些影响线在数值上会导致相当大的误差。这些误差产生的原因可以由图 7.12d 所示影响线中看出。例如，假设静载 ql 是沿跨度方向的均布载荷，在拱顶处的弯矩 M_C 由影响图中三部分阴影面积的代数和乘以 q 得到。显然，得到的这个和的精度要远远低于单个已知的 H_0 和 M_0 的影响线的竖距的精度。

图 7.12

习题

1. 用式(7.7)推导出由式(i)和式(j)确定的无铰抛物线拱在温度均匀升高 t 时，其推力 H_t 的一般公式。材料的线胀系数为 α，且 $\sqrt{I_0/A_0} = k_0$ 为拱顶横截面的回转半径。
2. 利用图 7.12 所示由式(i)和式(j)确定的无铰抛物线拱的影响线，计算在沿整个跨度的填土重量静载下拱顶 C 处的弯矩 M_C。假设填土重量为 $w$lbf/ft^3，拱肋宽为 1ft。
3. 求无铰圆弧拱所定义的弹性中心 O 位置的距离 d，如图 7.13 所示。假设拱肋的横截面积 A 和惯性矩 I 沿长度方

图 7.13

向为常数。

4. 利用式(7.6)中的第一式并参照图 7.13 所示无铰圆弧拱，计算在整个跨度上均布载荷集度 q 作用下的冗余弯矩 M_0。

5. 利用式(7.7)并参照图 7.13 所示无铰圆弧拱，计算由温度均匀升高而产生的推力 H_0 的大小。线胀系数为 α，横截面的回转半径为 $\sqrt{I/A}=k$。

7.4 无铰刚架

先前从拱推导出来的表达式也可以用来计算刚架中的冗余力(超静定力)，如图 7.14、图 7.15 所示。这种情况下，可以忽略受轴力影响的项，从而得到简化。如果观察到拱在静载荷作用下，中心线通常非常接近于压力线，并且由轴力产生的应力和最大弯曲应力大小具有相同的数量级，就知道这种简化是合理的。因此，表示轴力作用的项可能具有重要的实际意义。刚架中，压力线通常远离中心线，轴力的影响相比弯矩而言可以忽略。这种简化后，得到

$$\left.\begin{aligned} R_0\int_0^s x_1y_1\frac{\mathrm{d}s}{EI}+H_0\int_0^s y_1^2\frac{\mathrm{d}s}{EI} &= -\int_0^s M'y_1\frac{\mathrm{d}s}{EI} \\ R_0\int_0^s x_1^2\frac{\mathrm{d}s}{EI}+H_0\int_0^s x_1y_1\frac{\mathrm{d}s}{EI} &= -\int_0^s M'x_1\frac{\mathrm{d}s}{EI} \\ M_0\int_0^s\frac{\mathrm{d}s}{EI} &= -\int_0^s M'\frac{\mathrm{d}s}{EI} \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

在刚架分析的每一个特殊例子中，可以首先定义弹性中心的坐标。然后，把弹性中心当成 x_1y_1 轴的坐标原点，计算式(7.19)中的积分。假想质量 $\mathrm{d}s/EI$ 和 $M'\mathrm{d}s/EI$ 沿刚架的中心线分布，可以看到上面提到的每一个积分都有一个简单的物理意义。例如，第一个式子左边第一个积分项是分布假想质量 $\mathrm{d}s/EI$ 的惯性积，第二个积分项是同一质量关于 x_1 轴的惯性矩，等式右边的积分项代表分布假想质量 $M'\mathrm{d}s/EI$ 关于 x_1 轴的静矩。如果刚架是由等截面杆构成，积分的计算变得更加简单。

现在举一个等截面刚架的例子，如图 7.14a 所示。假设 $l=2h$，$c=h$。在支座 A 处的冗余反力 R_A、H_A、M_A 可以用作用在弹性中心 O 的静态等效反力 R_0、H_0 和 M_0 代替，如图 7.14b 所示。然后计算弹性中心的坐标 a 和 b。在这个例子中，EI 是常数，可以删掉，由此推出弹性中心与刚架中心线的质心重合。因此

$$\int_0^s \mathrm{d}s = h+l = 3h \qquad \int_0^s x\mathrm{d}s = \frac{l^2}{2} = 2h^2$$

$$-\int_0^s y\mathrm{d}s = lh+\frac{h^2}{2} = \frac{5}{2}h^2$$

可以得出：$a=2h/3$ 和 $b=-5h/6$。消掉常系数 $1/EI$，式(7.19)左边积分为

图 7.14

$$\left.\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_0^s y_1^2 \mathrm{d}s = \frac{lh^2}{36} + \frac{h^3}{12} + \frac{hh^2}{9} = \frac{1}{4}h^3 \\ I_{y_1} &= \int_0^s x_1^2 \mathrm{d}s = \frac{l^3}{12} + \frac{lh^2}{9} + h\frac{4h^2}{9} = \frac{4}{3}h^3 \\ I_{x_1y_1} &= \int_0^s x_1 y_1 \mathrm{d}s = -l\frac{h}{6}\frac{h}{3} - h\frac{2h^2}{9} = -\frac{1}{3}h^3 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

在计算式(7.19)右端的积分时，可以看到 M' 表示当去掉冗余量 M_0、R_0 和 H_0 时刚架的弯矩。因而 M' 可由如图 7.14b 所示的阴影三角形表示。这里认为当弯矩是使刚架向外凸弯曲时为正值。因此，相应的结果和假想的分布质量的静矩 $M'\mathrm{d}s$ 为

$$\int_0^s M'\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}Ph^2 \quad \int_0^s M'x_1\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}Ph^3 \quad \int_0^s M'y_1\mathrm{d}s = \frac{Ph^3}{12} \tag{b}$$

把式(a)和式(b)代到式(7.19)中，得到

$$-4R_0 + 3H_0 = -P \quad 8R_0 - 2H_0 = 3P \quad 6M_0 = Ph$$

从而得到

$$M_0 = \frac{Ph}{6} \qquad H_0 = \frac{P}{4} \qquad R_0 = \frac{7P}{16}$$

利用这些冗余量的值，整个刚架的弯矩图很容易画出来，如图 7.14a 所示。可通过弯矩面积的代数和必为零来部分检验弯矩图，这是因为刚架的两个固定端 A 和 B 之间不能有相对转动。

前面分析拱的式子，也可以用来分析刚架。然而，这些式子，尽管在计算非对称拱的影响系数时是有用的，但是对在静载荷作用下的刚架分析却没有优势。解式(7.19)中的三个未知数要比在非对称刚架结构中决定主轴的方向简单得多。因此，研究更复杂的问题只会用到式(7.19)。

第二个例子，受对称载荷作用的等截面对称刚架，如图 7.15a 所示。这种情况下，可以马上推知弹性中心 O 在对称轴上，它到 x 轴的距离为 $2l/3$。然后以弹性中心 O 为原点，显然 x_1y_1 轴是主轴，消掉常系数 $1/EI$，得到

$$I_{x_1y_1} = 0 \qquad I_{x_1} = \int_0^s y_1^2\mathrm{d}s = \frac{l^3}{3} \qquad I_{y_1} = \int_0^s x_1^2\mathrm{d}s = \frac{7l^3}{12} \tag{c}$$

图 7.15

外载荷 P 产生的弯矩 M' 由图 7.15b 所示的阴影面积来表示，可以得到

$$\int_0^s M'\mathrm{d}s = -\frac{5}{8}Pl^2 \quad \int_0^s M'y_1\mathrm{d}s = \frac{1}{24}Pl^3 \quad \int_0^s M'x_1\mathrm{d}s = -\frac{7}{24}Pl^3 \tag{d}$$

把式(c)和式(d)的值代入式(7.19)，得

$$H_0 = \frac{P}{8} \qquad R_0 = \frac{P}{2} \qquad M_0 = \frac{5Pl}{24} \tag{e}$$

用这些值就可以很容易地画出刚架完整的弯矩图，如图 7.15a 所示。

讨论图 7.15 的对称刚架结构，用到由非对称刚架结构推出的式(7.19)。利用对称条件，对称载荷用式(7.6)较好，而对于反对称载荷则用 7.3 节由对称拱导出的式(7.8)更有利。忽略径向力的影响，这些式子变成如下形式。

对于对称载荷

$$\left.\begin{aligned} &M_0\int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{EI} = -\int_0^s M'\frac{\mathrm{d}s}{EI} \\ &H_0\int_0^s y_1^2\frac{\mathrm{d}s}{EI} = -\int_0^s M'y_1\frac{\mathrm{d}s}{EI} \\ &V_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

对于反对称载荷

$$\left.\begin{aligned} &H_0 = M_0 = 0 \\ &V_0\int_0^s x_1^2\frac{\mathrm{d}s}{EI} = -\int_0^s M'x_1\frac{\mathrm{d}s}{EI} \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

这两种情况，是取拱顶处的横截面(见图 7.8 和图 7.9)为坐标原点，在半拱上进行积分的。

作为一个例子，来考虑先前对称刚架结构受非对称载荷的情况，如图 7.16a 所示。把这个问题分解为受对称载荷和反对称载荷两种情况，如图 7.16b、c 所示，得出

图 7.16

$$-\int_0^s M'\mathrm{d}s = \frac{Pc^2}{4} + \frac{Pcl}{2}$$

$$-\int_0^s M'y_1\mathrm{d}s = -\frac{Pc^2l}{12} + \frac{Pcl^2}{12}$$

$$-\int_0^s M'x_1\mathrm{d}s = \frac{Pc^2}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{c}{3}\right) + \frac{Pcl^2}{4}$$

把这些值代入到式(7.20)和式(7.21)，得

$$M_0=\frac{Pc^2}{6l}+\frac{Pc}{3}\qquad H_0=-\frac{Pc^2}{2l^2}+\frac{Pc}{2l}$$

$$V_0\approx\frac{6Pc^2}{7l^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{3l}\right)+\frac{6Pc}{7l}$$

因为 $c=l/3$，那么结果为

$$M_0=\frac{7Pl}{54}\qquad H_0=\frac{P}{9}\qquad V_0=\frac{61P}{189}$$

相应的弯矩图如图 7.16a 所示。

前面讲的例子都是相同 I 值的等截面刚架的情况。对于不同 I 值的等截面杆构成的刚架，可以毫无困难地用同样的方法来处理。为说明这种情况，来看一个例子，如图 7.17 所示。对称刚架结构，A 端和 B 端固定，承受均布载荷集度 q 作用。两个支撑杆的截面惯性矩为 I_1，横梁的截面惯性矩为 I_0，$I_1=3I_0$。式(7.19)乘以 EI_0 就可以把问题简化成一个等截面刚架问题。用这种方法，可以用沿着支撑杆分布的假想质量 $\mathrm{d}sI_0/I_1$ 和 $M'\mathrm{d}sI_0/I_1$ 来代替以前的 $\mathrm{d}s$ 和 $M'\mathrm{d}s$，从而弥补 I_1 和 I_0 之间的差别。

图 7.17

为举例说明实际计算过程，假设刚架的数值如图 7.17a 所示。那么，沿中心线分布的假想质量 $\mathrm{d}sI_0/I_1$ 的和变为

$$\left(2\sqrt{5^2+12^2}+\frac{1}{3}\times2\times12\right)\mathrm{ft}=34\mathrm{ft}$$

相同质量对 x 轴的静矩为

$$\left(2\times13\times14.5+\frac{1}{3}\times2\times12\times6\right)\mathrm{ft}^2=425\mathrm{ft}^2$$

因此，弹性中心的坐标，为

$$a=12\mathrm{ft}\qquad b=\frac{425}{34}\mathrm{ft}=12.5\mathrm{ft}$$

现在，在刚架的 A 处截断，得到作用于弹性中心 O 的冗余单元系统，如图 7.17b 所示[⊖]。假想质量关于主轴 x_1，y_1 的惯性矩为

⊖ 利用对称性，可留下 A 点已知的垂直力 $ql/2$ 并用 O 点的弯矩($M_0-ql^2/4$)代替 M_0 来补偿。

$$I_{x_1}=\left[2\left(\frac{13\times5^2}{3}+\frac{4\times12^2}{3}\right)-34(0.5)^2\right]\text{ft}^3=592.2\text{ft}^3$$

$$I_{y_1}=\left[2\left(4\times12^2+\frac{13\times12^2}{3}\right)-34(0.5)^2\right]\text{ft}^3=2400\text{ft}^3$$

利用 M' 弯矩图的纵坐标，如图 7.17b 所示，现在来考虑沿斜边 KD 和 DL 中心线分布的假想质量 $M'\mathrm{d}sI_0/I_1$。这些质量的重心分别在点 F 和点 E，如图 7.17b 所示。那么，式(7.19)的右端项积分，再乘以 EI_0，变为

$$-\int_K^L M'y_1\mathrm{d}s=\left(\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}26\times2\frac{5}{8}\right)\text{ft}^4=3276q\text{ft}^4$$

$$-\int_K^L M'x_1\mathrm{d}s=0$$

$$-\int_K^L M'\mathrm{d}s=\left(-\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}26\right)\text{ft}^3=1248q\text{ft}^3$$

把已经得到的数值解与代替 M_0 的($M_0-ql^2/4$)一起代入式(7.19)，得到

$$H_0=\frac{3276q}{592.2}=5.532q\text{ft}$$

$$M_0-\frac{ql^2}{4}=-\frac{1248q}{34}=-36.71q\text{ft}^2$$

根据这些冗余量的值，在横截面 A、K、G、D(见图 7.17a)处的弯矩为

$$M_A=(-36.71+5.532\times12.5)q\text{ft}^2=+32.44q\text{ft}^2$$

$$M_K=(-36.71+5.532\times0.5)q\text{ft}^2=-33.94q\text{ft}^2$$

$$M_G=(-36.71-5.532\times2+54)q\text{ft}^2=+6.23\text{qft}^2$$

$$M_D=(-36.71-5.532\times4.5+72)q\text{ft}^2=+10.40q\text{ft}^2$$

刚架左半部分相应的弯矩图如图 7.17a 所示。

对于具有非等截面杆的刚架，可以通过使用假想载荷 $\mathrm{d}sI_0/I_1$ 和 $M'\mathrm{d}sI_0/I_1$ 来代替先前的 $\mathrm{d}s$ 和 $M'\mathrm{d}s$，把问题简化成具有等截面惯性矩 I_0 的刚架。

习题

1. 矩形刚架 $ADFB$ 在 A 端和 B 端固支，水平杆 DF 上受均布载荷，如图 7.18 所示。AD、FB 两杆的截面惯性矩为 I_1，DF 杆的截面惯性矩为 I_0。如果 $h/l=\frac{3}{4}$，$I_0=2I_1$，计算 D 处的弯矩，并画出刚架的弯矩图。

图 7.18

2. 刚架尺寸与图 7.17a 相同，刚架左边受到沿垂直轴线分布的水平均布载荷作用，如图 7.19a 所示。计算弹性中心 O 处的冗余量 H_0、M_0 和 V_0，并画出整个刚架的弯矩图。
(提示：把载荷分成对称和反对称分别作用，如图 7.19b、c 所示，使用由对称刚架导出的式(7.13)与式(7.14)，进而进行分析)
3. 尺寸如图 7.20 所示的非对称刚架，刚架左边受到沿垂直轴线分布的水平均布载荷作用，

图 7.19

左边支撑杆的惯性矩为 I_0，其他杆的惯性矩如图所示。计算弹性中心 O 处的冗余量 H_0、M_0 和 R_0，并画出整个刚架的弯矩图。（提示：为简化计算式(7.19)右端项的积分，不是在 A 处断开而是在 B 处断开）

4. 等截面圆形拱在 A 处和 B 处固支，受到沿垂直轴线均匀分布的水平载荷作用，如图 7.21 所示，拱的尺寸如图，计算弹性中心 O 处的冗余量 H_0、M_0 和 R_0，并画出拱的弯矩图。

图 7.20

图 7.21

5. 图 7.22 所示的等截面刚架在 A 处和 B 处固支，受到沿垂直轴线均匀分布的水平载荷作用，求支座 A 和 B 处的反力并画出刚架的弯矩图。

图 7.22

7.5 有铰刚架

如果刚架或者拱具有一个铰支座，如在支座 A 处，如图 7.23 所示，则 A 处不存在弯矩，只有两个冗余量——A 处反力的两个分量 R_A 和 H_A。假定 A 铰是不能移动的，只考虑弯曲变形能，则计算 R_A 和 H_A 的式子变为

图 7.23

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial R_A} &= \int_0^s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}\mathrm{d}s = 0\\ \frac{\partial U}{\partial H_A} &= \int_0^s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial H_A}\mathrm{d}s = 0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

刚架任意截面的弯矩为

$$M = R_A x + H_A y + M' \tag{b}$$

这里 M' 跟以前一样，表示当 R_A 和 H_A 不起作用时由载荷产生的弯矩。把式(b)代入式(a)，得到

$$\left.\begin{aligned}R_A\int_0^s \frac{xy}{EI}\mathrm{d}s + H_A\int_0^s \frac{y^2}{EI}\mathrm{d}s &= -\int_0^s \frac{M'y}{EI}\mathrm{d}s\\ R_A\int_0^s \frac{x^2}{EI}\mathrm{d}s + H_A\int_0^s \frac{xy}{EI}\mathrm{d}s &= -\int_0^s \frac{M'x}{EI}\mathrm{d}s\end{aligned}\right\} \tag{7.22a}$$

可以看到这些方程左端的积分式表示沿刚架中心线分布的假想质量 $\mathrm{d}s/EI$ 关于 x、y 轴的惯性矩和惯性积。右端的积分式表示假想质量 $M'\mathrm{d}s/EI$ 的静矩。实际应用中，通常在式(7.22a)两边同乘以一个常系数 EI_0，得式

$$\left.\begin{aligned}R_A\int_0^s \frac{I_0}{I}xy\mathrm{d}s + H_A\int_0^s \frac{I_0}{I}y^2\mathrm{d}s &= -\int_0^s \frac{I_0}{I}M'y\mathrm{d}s\\ R_A\int_0^s \frac{I_0}{I}x^2\mathrm{d}s + H_A\int_0^s \frac{I_0}{I}xy\mathrm{d}s &= -\int_0^s \frac{I_0}{I}M'x\mathrm{d}s\end{aligned}\right\} \tag{7.22b}$$

这些式于对等截面刚架和由等截面杆构成的刚架变得特别简单。

举一个例子。A 点铰支 B 点固支的刚架，载荷沿水平跨度均匀分布，如图 7.24a 所示。x 轴和 y 轴如图，并假设 $I_1 = 2I_0$，得出式(7.22b)左边积分的如下数值解

$$I_x = \int_0^s \frac{I_0}{I}y^2\mathrm{d}s = 34293.5\mathrm{ft}^3$$

$$I_y = \int_0^s \frac{I_0}{I}x^2\mathrm{d}s = 43960.3\mathrm{ft}^3$$

$$I_{xy} = \int_0^s \frac{I_0}{I}xy\mathrm{d}s = -32199.6\mathrm{ft}^3$$

计算式(7.22b)右边的积分，并且 $M' = -qx^2/2$，所以

$$-\int_0^s \frac{I_0}{I}M'y\mathrm{d}s = -536610q\mathrm{ft}^4$$

$$-\int_0^s \frac{I_0}{I}M'x\mathrm{d}s = 832750q\mathrm{ft}^4$$

把以上积分的数值代入式(7.22b)，得

$$H_A = 6.85q\text{ft} \qquad R_A = 23.96q\text{ft}$$

相应的弯矩图如图 7.24b 所示，$q = 1\text{kip/ft}$。

图 7.24

图 7.25 所示的受对称载荷作用的对称刚架，只有一个未知量，即推力 H。以铰链 D 处为坐标原点，然后进行运算，计算 H 的式子变为

$$H\int_D^B \frac{I_0}{I}y^2\mathrm{d}s = -\int_D^B \frac{I_0}{I}M'y\mathrm{d}s \tag{c}$$

然后根据图中给出的尺寸，得到

$$\int_D^B \frac{I_0}{I}y^2\mathrm{d}s = 4932\text{ft}^3$$

刚架右半部分 M' 的弯矩图如图 7.25 所示，并且得出

$$-\int_D^B \frac{I_0}{I}M'y\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\times 3\times 18\times 21P = 567P\text{ft}^3$$

将这些积分值代入式(c)，得

$$H = \frac{567P}{4932} = 0.115P$$

刚架左半部分相应的弯矩图如图 7.25 所示，假设 $P = 1\text{kip}$。

有两个铰支的刚架，只有一个冗余量，计算它除了静力方程只需要一个方程。例如，如图 7.26 所示的等截面对称刚架。在托架 E 处传给刚架一个力偶 M_0，求这种情况下的推力 H。去掉支座 A，把推力 H 看成冗余量，它的大小可以从下面的方程求出

图 7.25

图 7.26

$$\frac{\partial U}{\partial H}=\int_A^B\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial H}\mathrm{d}s=0 \tag{d}$$

这表明铰链 A 和 B 之间的距离在刚架变形过程中保持不变。任何横截面的弯矩为

$$M=Hy+M' \tag{e}$$

EI 为常数，从式(d)得出

$$H\int_A^B y^2\mathrm{d}s=-\int_A^B M'y\mathrm{d}s \tag{f}$$

利用图中的尺寸数据，得到上式左边的积分为

$$\int_A^B y^2\mathrm{d}s=27529\mathrm{ft}^3$$

为计算右边的积分，注意到 $M'=M_0x/l$，得到

$$-\int_A^B M'y\mathrm{d}s=\frac{1}{2}M_0 26\left(24+\frac{10}{3}\right)+\frac{1}{8}M_0 26\left(\frac{10}{3}\right)=344.5M_0\mathrm{ft}^2$$

最后，将两个积分后的数值代入式(f)并求解 H，得

$$H=\frac{344.5M_0}{27529}=0.01251M_0\mathrm{ft}^{-1}$$

利用式(e)中 H 值，我们可以计算刚架任何横截面的弯矩。

习题

1. 非对称刚架结构，A 处铰支，B 处固支，尺寸如图 7.27 所示。试求在水平跨度上作用均布载荷 $q=1\mathrm{kip/ft}$ 时，A 处的冗余反力 R_A 和 H_A。
2. 如上题，在 D 点受垂直集中力 $P=10\mathrm{kip}$ 时，求 R_A 和 H_A。

图 7.27

7.6 温度变化和支座沉降的影响

具有冗余约束的刚架不能随温度变化而自由伸缩，这样导致了热应力的产生。下面分析两端固支刚架的热应力(见图 7.28)。假设把支座 A 处的约束去掉，则刚架就可以自由伸展，然后来确定弹性中心 O 处的热位移 u_t、v_t 和 θ_t[⊖]。由于温度变化而产生的冗余量 H_0、M_0 和 R_0，它们的大小使热位移消失，计算它们，可以得出下式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial H_0}&=\int_0^s\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial H_0}\mathrm{d}s=-u_t\\ \frac{\partial U}{\partial R_0}&=\int_0^s\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_0}\mathrm{d}s=+v_t\\ \frac{\partial U}{\partial M_0}&=\int_0^s\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0}\mathrm{d}s=-\theta_t\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

注意到没有载荷作用到刚架上，此时，有

⊖ 沿 x_1、y_1 轴的正向的位移 u_t 和 v_t 为正；θ_t 顺时针为正。

图 7.28

$$M = M_0 + H_0 y_1 + R_0 x_1 \tag{b}$$

式(a)变成

$$\left.\begin{aligned} R_0\int_0^s \frac{x_1 y_1}{EI}\mathrm{d}s + H_0\int_0^s \frac{y_1^2}{EI}\mathrm{d}s &= -u_t \\ R_0\int_0^s \frac{x_1^2}{EI}\mathrm{d}s + H_0\int_0^s \frac{x_1 y_1}{EI}\mathrm{d}s &= +v_t \\ M_0\int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{EI} &= -\theta_t \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

其中 s 是刚架中心线的全长。

现在我们把这些一般式应用到特殊的例子中，如图 7.17 所示的对称刚架。假设刚架的温度均匀升高 t，得出[⊖]

$$u_t = -\alpha t l \qquad v_t = 0 \qquad \theta_t = 0$$

因此，$R_0 = M_0 = 0$，并且只需从式(7.23)的第一式求出 H_0。然后让这个式子乘以 EI_0，利用 I_{x_1} 的值，得出

$$H_0 = \frac{\alpha t l E I_0}{592.2}$$

例如，对混凝土

$$\alpha = 6\times10^{-6}(\text{in/in})/°\text{F} \qquad E = 2.88\times10^5\,\text{kip/ft}^2$$

假设 $t = 60°\text{F}$，$I_0 = 0.1728 ft^4$，得

$$H_0 = 0.7261\,\text{kip}$$

有了推力 H_0，可以容易计算出弯矩和由假定的温度变化而引起的应力。

在图 7.16 所示的非对称刚架结构中，温度均匀变化产生的位移 u_t 和 v_t，所以为计算 H_0 和 R_0，必须用式(7.23)中的前两式。这里注意到 x_1 和 y_1 并不是主轴，所以式(7.23)中的惯性积并没有消失。

当考虑混凝土缩水对冗余反力大小的影响时，存在与热应力相似的问题。缩水量依赖于好多因素，但考虑它的影响相当于温度均匀下降 60°F，可以得到一个满意的近似。

有时在超静定刚架中附加应力是由于支座沉降引起的。如果沉降量已知，则相应的冗余反力的大小可由式(7.23)求出。再来看如图 7.17 所示的刚架，假定支座 A 处有一垂直沉降量 Δ。如果 R_0 作用在弹性中心 O 将会产生一个向下的位移 Δ，因此先前计算出来的垂直反

⊖ 假想杆 AO 不改变其长度，由于温度均匀变化，所以没有转动，A 点和 O 点的位移相同。

力因等价于 R_0 而消失。力的大小可以从式(7.16)的第二式求出，用 Δ 代替式中的 v_t。方程两边同乘以 EI_0，得到

$$R_0 = \frac{\Delta EI_0}{I_{y_1}}$$

例如

$$\Delta = 0.75\text{in} = 0.0625\text{ft} \qquad E = 288000\text{kip/ft}^2 \qquad I_0 = 0.1728\text{ft}^4$$

利用给出的 I_{y_1} 的值，得到

$$R_0 = \frac{0.0625 \times 288000 \times 0.1728}{2400}\text{kip} = 1.296\text{kip}$$

方向向下。

支座移动的另一个例子，可以考虑先前刚架在支座 A 逆时针旋转一个小角度 θ，如图 7.29 所示。要求对应于转动的冗余力 H_0、R_0 和 M_0，注意到刚性杆 AO 在 O 端不仅旋转了 θ 角，且在 x_1，y_1 方向上有位移

$$u = -a\theta \qquad v = -\frac{l\theta}{2}$$

图 7.29

代入这些值(注意符号)到式(7.23)，并同乘以 EI_0，得

$$H_0 I_{x_1} = -\theta a EI_0 \qquad R_0 I_{y_1} = \frac{\theta l}{2} EI_0 \qquad M_0 A = -\theta EI_0$$

例如

$$\theta = 0.005 \qquad E = 288000\text{kip/ft}^2 \qquad I_0 = 0.1728\text{ft}^4$$

利用给出的 I_{x_1}、I_{y_1} 的值，得到

$$H_0 = -\frac{0.005 \times 12.5 \times 49770}{592.2}\text{kip} = -5.252\text{kip}$$

$$R_0 = +\frac{0.005 \times 12 \times 49770}{2400}\text{kip} = 1.244\text{kip}$$

$$M_0 = -\frac{0.005 \times 49770}{34}\text{kip} \cdot \text{ft} = -7.318\text{kip} \cdot \text{ft}$$

有了这些量，可以很容易地计算刚架任意截面的弯矩。例如，在支座 A 处有

$$M_A = (-7.318 - 5.252 \times 12.5 - 1.244 \times 12)\text{kip} \cdot \text{ft} = -87.89\text{kip} \cdot \text{ft}$$

相应的弯矩图如图 7.29 所示。

习题

1. 参照如图 7.20 所示的非对称刚架结构，用已经给出的数据，计算当温度均匀升高 $t = 40°\text{F}$ 时冗余量 H_0 和 R_0 的大小。假设线胀系数 $\alpha = 6 \times 10^{-6}(\text{in/in})/°\text{F}$，$E = 288000\text{kip/ft}^2$，$I_0 = 0.1728\text{ft}^4$。
2. 画出图 7.20 所示刚架的弯矩图，显示出在支座 A 处 1in 的垂直沉降量的影响。数据同上题。

7.7 环

在前面各节中关于拱和刚架的分析方法也适用于封闭环。如图 7.30a 所示的环，在已知相互平衡的力系 P_1、P_2、P_3、…作用下，表示有三个冗余反力的结构。可以把任意截面 A 的轴力、剪力及弯矩看成冗余量。然后假定环在这个截面断开，刚性杆 AO 连接截面的一端，另一端固定，如图 7.30b 所示。假设假想质量 ds/EI 沿环的中心线分布，弹性中心 O 的位置可以确定。然后，如前所述，用作用在弹性中心 O 的力 H_0、M_0、R_0 的静等效系统代替作用在截面 A 上的力。这些冗余力的大小由无铰刚架导出的式(7.12)确定。

第一个例子，如图 7.31a 所示的矩形对称刚架。首先在 A 处断开，推出弹性中心 O 在刚架的对称轴上，定义

图 7.30

图 7.31

$$\frac{I_0}{I_1}=\alpha \qquad \frac{I_0}{I_2}=\beta$$

有

$$\int_0^s \frac{I_0}{I}\mathrm{d}s = l + 2\beta h + \alpha l \qquad \int_0^s \frac{I_0}{I}y\mathrm{d}s = \beta h^2 + lh$$

这里 s 代表环中心线的全长。最后，从弹性中心到刚架顶端的距离为

$$b=\frac{\beta h^2 + lh}{l(1+\alpha)+2\beta h}$$

有了弹性中心的位置，得到

$$\int_0^s \frac{I_0}{I}y_1^2\mathrm{d}s = l(h-b)^2 + \frac{\beta h^2}{6} + \frac{1}{2}\beta h(h-2b)^2 + \alpha l b^2$$

弯矩 M' 由图 7.31b 所示的外力产生，得到

$$\int_0^s \frac{I_0}{I}M'\mathrm{d}s = Pc^2 + 2\beta Pch + \alpha Pcl$$

$$\int_0^s \frac{I_0}{I}M'y_1\mathrm{d}s = \beta Pch(h-2b) - \alpha Pclb + Pc^2(h-b)$$

$$= Pc[\beta h(h-2b) - \alpha lb + c(h-b)]$$

把这些积分的值代入到式(7.19)中，并同乘以 EI_0，得

$$M_0 = -Pc\frac{c+2\beta h+\alpha l}{l(1+\alpha)+2\beta h}$$

$$H_0 = -Pc\frac{\beta h(h-2b)-\alpha lb+c(h-b)}{l(h-b)^2+\beta h^3/6+\frac{1}{2}\beta h(h-2b)^2+\alpha lb^2}$$

有了 M_0 和 H_0 的值，很容易就可以计算出刚架任意横截面的弯矩并画出弯矩图。

第二个例子，仍是上面的矩形刚架，受到横向载荷 $P/2$ 的作用，如图 7.32a 所示。在 C 和 D 处的外反力如图。在截面 AB 断开，外载荷产生的弯矩 M' 由如图 7.32b 所示的阴影面积表示。因为这个载荷在 A 点不会产生轴力和弯矩，所以只有一个冗余量 R_0，利用式(7.19)的第二个式，并同乘以 EI_0 来计算冗余量的大小。计算该式的积分为

$$\int_0^s \frac{I_0}{I}x_1^2\mathrm{d}s = \frac{l^2}{12}[6\beta h + l(1+\alpha)]$$

$$\int_0^s \frac{I_0}{I}M'x_1\mathrm{d}s = \frac{Phl}{12}(l+3\beta h)$$

得到

$$R_0 = -P\frac{h(l+3\beta h)}{l[6\beta h+l(1+\alpha)]}$$

有了 R_0 的值，对任意给定尺寸的刚架，很容易画出弯矩图的形状，如图 7.32c 所示。

图 7.32

最后一个例子，等截面的椭圆环受到均匀内压集度 p 的作用，如图 7.33 所示。在截面 AB 断开，由对称性可知截面的剪力为零，轴力为 pa。因此，只需要考虑一个冗余量 M_0。把轴力 pa 作为外力作用在 A 点，可得到在任意截面 D 处的弯矩 M'

$$M' = \frac{1}{2}p(x_1^2+y_1^2-a^2)$$

则式(7.19)的第三式中的积分变为

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \alpha b \qquad \int_0^s M'\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}pa^2\alpha b + \frac{1}{2}p\beta a^2 b$$

其中，α 和 β 是依赖于椭圆 a/b 的值的常数，表 7.1 给出了不同 a/b 值时 α 和 β 的大小。则 M_0 可以由下式

图 7.33

得出

$$M_0 + pa^2 = -\frac{1}{\alpha b}\int_0^s M'\mathrm{d}s = \frac{1}{2}pa^2 - \frac{1}{2}\frac{p}{\alpha b}\beta a^2 b$$

表 7.1

	a/b							
	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
α	2π	5.97	5.67	5.38	5.11	4.85	4.60	4.39
β	2π	6.65	7.18	7.93	9.09	10.94	14.24	21.31

习题

1. 画出图 7.31 所示刚架的弯矩图，$\alpha=\beta=1$，$l=h$。
2. 等截面圆环在沿铅垂直径 DE 的力 P 作用下，如图 7.34 所示。求 A 处和 D 处弯矩的大小。

图 7.34

第 8 章

连续梁与刚架

8.1 斜率—挠度方程

图 8.1a 所示的刚架结构通常是由等截面直杆组成的，其中等截面直杆被看做端部受弹性约束的梁。例如 ab 杆可以被分离出来，如图 8.1b 所示，其端部弹性约束由反力矩 M_a 和 M_b 代替。这样，问题就简化为承受横向载荷和杆端弯矩的简支梁问题。在这样的载荷条件下，梁产生弯曲，其端部切线转过图示很小的角度 θ_a 和 θ_b。为将来更深入的讨论，建立这些转角、杆端弯矩以及横向载荷之间的分析关系是非常有用的，这种关系一般称为斜率—挠度方程，现在来考虑它们如何导出。

图 8.1

假定梁在主平面内弯曲，忽略其剪切变形[⊖]，任意横截面弹性曲线的曲率由以下公式给出

$$\frac{1}{r}=\frac{M}{EI} \tag{a}$$

其中 M 代表弯矩，EI 表示横截面的抗弯刚度。运用这个方程，将梁的纵向轴定为 x 轴并将向下定为 y 轴正向，如图 8.1b 所示。同时假定梁的挠度很小，这样每一个弹性线微元的长度可以等于其在 x 轴投影的长度 $\mathrm{d}x$。这样，弯曲之后两相邻横截面的转角 $\mathrm{d}\phi$ 为

$$\mathrm{d}\phi=\frac{\mathrm{d}x}{r}=\frac{M\mathrm{d}x}{EI} \tag{b}$$

根据这个表达式，端部切线的转角可以由以前在桁架分析中用过的虚载荷法算出。例如，如图 8.2a 所示，令曲线 def 表示为受横向载荷的简支梁 AB 的弯矩图。如果假定梁只有一个无穷小单元 $\mathrm{d}x$ 是弹性的，其余的单元为绝对刚性，则弹性曲线 acb 如图 8.2b 所示。这条线简单地由两个直线部分 ac 和 cb 组成，两线之间的夹角 $\mathrm{d}\phi$ 由式(b)确定。因为这样的挠度，从图中可以看出，梁左端转过的无穷小转角，为

⊖ 对通常比例的刚架，这个影响非常小。

$$d\theta_a = \frac{l-x}{l}d\phi \tag{c}$$

设顺时针转动为正，则式(c)的符号为正。梁端 b 沿逆时针方向转动，则相应的转角为

$$d\theta_b = -\frac{x}{l}d\phi \tag{d}$$

式(c)和式(d)有一个非常简单的解释。假想一简支梁，如图 8.2c 所示，承受虚载荷为 $d\phi = Mdx/EI$，那么式(c)和式(d)表示在虚载荷作用下梁端部的剪力。

利用梁的一个微元弯曲得到的端部转角，可以将式(c)和式(d)在梁的整个长度上求和得到总的转角，即

$$\left.\begin{aligned}\theta_a &= \int_0^l \frac{l-x}{l}d\phi = \int_0^l \frac{l-x}{l}\frac{Mdx}{EI}\\ \theta_b &= -\int_0^l \frac{x}{l}d\phi = -\int_0^l \frac{x}{l}\frac{Mdx}{EI}\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

注意到 Mdx 是弯矩图中条单元的面积，如图 8.2a 所示，并且 EI 对等截面梁是常数，可推出：为得到这种梁端部的转角，我们只需把弯矩图面积 $AdefB$ 作为虚载荷，然后用在这个载荷作用下在梁端部的剪力除以 EI 就可以了。

例如，一均布载荷作用的梁，弯矩图是一抛物线状(见图 8.3a)的区域，其面积为

$$A = \frac{2l}{3}\frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{12}$$

如果将这面积看成虚载荷，相应的支反力为 $ql^3/24$，可得

$$\theta_a = \frac{ql^3}{24EI} \qquad \theta_b = -\frac{ql^3}{24EI} \tag{f}$$

距右支座距离为 c，在一集中载荷 P 作用下的梁，弯矩图面积由如图 8.3b 所示的三角形表示。将这个三角形的面积视为虚载荷，得到支座处的转角

$$\theta_a = \frac{Pc(l^2-c^2)}{6lEI} \qquad \theta_b = \frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6lEI} \tag{g}$$

图 8.2

图 8.3

现在考虑受一对力偶作用的简支梁 AB 弯曲的具体情况，如图 8.4a 所示。在以后的讨论中，这对力偶被称为杆端弯矩，我们用符号 M_{ab} 和 M_{ba} 表示，两个下标表示梁的端部，如图 8.4a 所示。顺时针的杆端弯矩为正。这意味着按照弯矩符号规定的惯例，杆端弯矩 M_{ab} 与作用在 A 点的弯矩是相同的，而杆端弯矩 M_{ba} 与作用在 B 点的弯矩大小相同方向相反。开始只有弯矩 M_{ab} 作用的情况（见图 8.4b），相应的弯矩图是三角形（见图 8.4c），可得

$$\theta_a = \frac{M_{ab}l}{3EI} \qquad \theta_b = -\frac{M_{ab}l}{6EI} \tag{h}$$

当 M_{ba} 单独作用时，可以得到相似的公式。将这两个杆端弯矩的作用叠加（图 8.4a），得到

$$\theta_a = \frac{M_{ab}l}{3EI} - \frac{M_{ba}l}{6EI} \qquad \theta_b = \frac{M_{ba}l}{3EI} - \frac{M_{ab}l}{6EI} \tag{8.1a}$$

求解这两个关于 M_{ab} 和 M_{ba} 的方程，得

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l}(2\theta_a + \theta_b) \qquad M_{ba} = \frac{2EI}{l}(2\theta_b + \theta_a) \tag{8.1b}$$

如果端部切线的转角 θ_a 和 θ_b 已知，则由这两式可以算出杆端弯矩。

现在来讨论更一般的情况，两杆端弯矩同时作用并有横向载荷作用，如图 8.5a 所示。杆端弯矩单独作用时的转角公式由式（8.1a）给出。要得到由横向载荷引起的转角公式，我们来考虑图 8.5b 所示的相应弯矩图。用 c 和 d 表示梁端点到穿过弯矩图面积的质心 C 的垂直距离，并且 A 表示面积的大小，由虚载荷产生的端部支反力为

图　8.4

图　8.5

$$R_A = \frac{Ac}{l} \qquad R_B = \frac{Ad}{l}$$

相应的转角为

$$\theta_a = \frac{Ac}{EIl} \qquad \theta_b = -\frac{Ad}{EIl} \tag{i}$$

将上式与由杆端弯矩［见式（8.1a）］引起的转角方程进行叠加，可得如下总的转角方程

$$\left.\begin{aligned} \theta_a &= \frac{M_{ab}l}{3EI} - \frac{M_{ba}l}{6EI} + \frac{Ac}{EIl} \\ \theta_b &= \frac{M_{ba}l}{3EI} - \frac{M_{ab}l}{6EI} - \frac{Ad}{EIl} \end{aligned}\right\} \tag{8.2a}$$

解这些方程，得到 M_{ab} 和 M_{ba} 如下

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_a + \theta_b) - \frac{2A}{l^2}(2c - d) \\ M_{ba} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_b + \theta_a) + \frac{2A}{l^2}(2d - c) \end{aligned}\right\} \tag{8.2b}$$

由这些公式，如果已知端部转角以及由横向载荷引起的弯矩图，杆端弯矩可以容易地算出。

有时，一个梁的支座的总位移，除了弯曲，还有作为刚体产生的转动。用 θ_{ab} 表示刚体的转角，沿顺时针方向为正。端部总的转角方程为

$$\left.\begin{aligned} \theta_a &= \frac{M_{ab}l}{3EI} - \frac{M_{ba}l}{6EI} + \frac{Ac}{EIl} + \theta_{ab} \\ \theta_b &= \frac{M_{ba}l}{3EI} - \frac{M_{ab}l}{6EI} - \frac{Ad}{EIl} + \theta_{ab} \end{aligned}\right\} \tag{8.3a}$$

求解杆端弯矩的方程，得

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_a + \theta_b) - \frac{2A}{l^2}(2c - d) - \frac{6\theta_{ab}EI}{l} \\ M_{ba} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_b + \theta_a) + \frac{2A}{l^2}(2d - c) - \frac{6\theta_{ab}EI}{l} \end{aligned}\right\} \tag{8.3b}$$

式(8.1)到式(8.3)即为所求的斜率—挠度方程，该方程广泛应用于刚架分析中。

8.2 固端梁

由前一节得出的斜率—挠度方程，可以很容易地分析各种超静定梁的情况。这里只讨论几种与刚架分析相联系的特殊情况。首先从一端固定一端铰支的梁开始分析，如图 8.6a 所示。假设主动杆端弯矩 M_{ab} 的大小已知，要求固定端 B 处产生的被动杆端弯矩 M_{ba}，以及主动弯矩 M_{ab} 和转角 θ_a 之间的关系。注意到梁的固定端 B 不发生转动，因此，把 θ_b 代入式(8.1a)中的第二个式，可得

$$M_{ba} = \frac{1}{2}M_{ab} \tag{a}$$

这说明当主动弯矩 M_{ab} 作用在 A 端时，在固定端 B 将得到大小等于 $\frac{1}{2}M_{ab}$ 的被动弯矩 M_{ba}。后一弯矩特别有利于刚架分析，称为传递弯矩。

用 $\theta_b = 0$ 代入到式(8.1b)中的第一式，得到

$$M_{ab} = \frac{4EI}{l}\theta_a \tag{b}$$

如果转角 θ_a 已知，我们可以从这个公式很容易地计算出 M_{ab}。

图 8.6

非常有趣的是如果梁的两端均为简支，杆端弯矩 M_{ab} 与转角 θ_a 之间的关系为

$$M_{ab}=\frac{3EI}{l}\theta_a \tag{c}$$

这说明在利用 θ_a 计算 M_{ab}时，若 B 端为一铰链，它相当于将梁的抗弯刚度 EI 减为 $3EI/4$。

现在来考虑横向载荷作用，注意到受均布载荷的梁(见图 8.6b)，被动杆端弯矩 M_{ba}可由式(8.2a)的第二式得到，将下式代入这个方程

$$M_{ab}=0 \qquad \theta_b=0 \qquad A=\frac{ql^3}{12} \qquad d=\frac{l}{2}$$

得

$$M_{ba}=\frac{ql^2}{8}$$

注意到这个杆端弯矩的值与简支梁中点的弯矩大小相同。

如果集中力 P 作用于梁上(见图 8.6c)，相应简支梁的弯矩图由如图 8.6d 所示的三角形表示，得到

$$A=\frac{Pcf}{2} \qquad d=\frac{l+f}{3}$$

若 $\theta_b=0$ 及 $M_{ab}=0$，则方程(8.2b)的第二式为

$$M_{ba}=\frac{3Ad}{l^2}=\frac{Pf(l^2-f^2)}{2l^2}$$

如果梁的固定端 B 有垂直向下的位移 Δ 而不发生转动，由这个位移产生的杆端弯矩 M_{ba}可利用式(8.3b)得到。将 $M_{ab}=0$，$\theta_b=0$，$A=0$ 及 $\theta_{ab}=\Delta/l$ 代入这些方程的第一式，可得

$$\theta_a=\frac{3}{2}\frac{\Delta}{l}$$

将这些值代入方程(8.3b)的第二式，得

$$M_{ba}=-\frac{3EI}{l}\frac{\Delta}{l}$$

在后面的刚架分析中将用到这些结果。

两端固定的梁(图 8.7a)，受到任意横向载荷作用，可利用式(8.2b)来计算超静定杆端弯矩。将 $\theta_a=\theta_b=0$ 代入这些方程，得到

$$M_{ab}=-\frac{2A}{l^2}(2c-d) \qquad M_{ba}=\frac{2A}{l^2}(2d-c) \tag{8.4a}$$

对任意给定横向载荷，可画出相应简支梁的弯矩图，如图 8.7b 所示，利用其面积 A 与到形心 C 的距离可将 c 和 d 计算出来。将这些量代入式(8.4a)中，得到所求的杆端弯矩。由横向载荷产生的杆端弯矩称作固端弯矩，在以后的讨论中用符号 m_{ab} 和 m_{ba}来表示，当它们顺时针作用时为正。可推出 m_{ab}与梁 A 端的杆端弯矩相等，而 m_{ba}与 B 处的杆端弯矩数值上相等而符号相反。

图　8.7

沿梁整个长度上作用均布载荷的情况，$A=ql^3/12$，$c=d=l/2$，式(8.4a)变为

$$m_{ab}=-\frac{ql^2}{12} \qquad m_{ba}=\frac{ql^2}{12} \tag{8.4b}$$

距支座 B 端距离为 e 处作用集中载荷 P 的情况，弯矩图为三角形(见图 8.6d)，得 $A=Pfe/2$，$c=(l+e)/3$，$d=(l+f)/3$，把这些值代入式(8.4a)，得

$$m_{ab}=-\frac{Pe^2f}{l^2}\qquad m_{ba}=\frac{Pef^2}{l^2}\tag{8.4c}$$

因为距离 e 为任意值，固端弯矩的值很容易计算出来。

现在来考虑一端固定的梁由于支座不相同的沉降而产生的弯曲。例如，假设 B 端沉降位移为 Δ，A 端固定不动。同时假设梁的两端在发生位移的同时没有发生转动。那么用式(8.3b)计算由位移产生的杆端弯矩。把 $\theta_a=\theta_b=0$，$A=0$ 代入到这些式子中，并注意到 $\theta_{ab}=\Delta/l$，得

$$M_{ab}=M_{ba}=-\frac{6EI\Delta}{l^2}=-\frac{6EI}{l}\theta_{ab}\tag{8.5}$$

引入符号 $k=EI/l$，称作梁的“抗弯系数”，用 m 表示固端弯矩，可将斜率—挠度方程写为如下形式

$$\left.\begin{aligned}M_{ab}&=2k(2\theta_a+\theta_b)+m_{ab}-6k\theta_{ab}\\M_{ba}&=2k(2\theta_b+\theta_a)+m_{ba}-6k\theta_{ab}\end{aligned}\right\}\tag{8.6}$$

这些公式在刚架分析中应用广泛，以后将会讨论。为以后参考，对承受不同横向载荷的梁 AB，其固定端弯矩公式记录在下面的表 8.1 中。前两种情况我们已计算过了，即式(8.4b)与式(8.4c)。其余情况的验证留给读者做练习。

表 8.1

固端形式	弯矩
	$m_{ab}=-\frac{ql^2}{12}\qquad m_{ba}=+\frac{ql^2}{12}$
	$m_{ab}=-\frac{Pe^2f}{l^2}\qquad m_{ba}=+\frac{Pef^2}{l^2}$
	$m_{ab}=-\frac{q}{12l^2}[d^3(4l-3d)-e^3(4l-3e)]$ $m_{ba}=+\frac{q}{12l^2}[f^3(4l-3f)-e^3(4l-3e)]$
	$m_{ab}=-\frac{q_0l^2}{20}\qquad m_{ba}=+\frac{q_0l^2}{30}$
	$m_{ab}=-\frac{5}{96}q_0l^2\qquad m_{ba}=+\frac{5}{96}q_0l^2$
	$m_{ab}=+\frac{Md}{l^2}(2c-d)$ $m_{ba}=+\frac{Mc}{l^2}(2d-c)$

8.3　连续梁

从 8.1 节推出的式(8.2a)，有利于分析连续梁。从梁的左端开始，用 0、1、2、…表示连续支座，用 l_1、l_2、…表示跨长，用 I_1、I_2、…表示截面惯性距，假设每一跨均为常数。这样，我们认为任意相邻两跨 l_n 和 l_{n+1} 如图 8.8a 所示，并画受横向载荷作用的简支梁的弯矩图，如图 8.8b 所示。这些图的面积由 A_n 和 A_{n+1} 表示，形心 C_n、C_{n+1} 的位置分别由到两端的距离 c_n、d_n 及 c_{n+1}、d_{n+1} 确定。考虑到每一跨的弯曲，我们不仅必须要考虑横向载荷的作用还要考虑相邻跨间的作用，这个作用由杆端弯矩表示。跨 l_n 上弯矩的大小由 $M_{n-1,n}$ 及 $M_{n,n-1}$ 表示，跨 l_{n+1} 上的弯矩由 $M_{n,n+1}$ 及 $M_{n+1,n}$ 表示，如图 8.8c 所示。计算这些弯矩的方程可以在弹性曲线的连续性基础之上得出。由于这种连续性，跨 l_n 右端的转角 $\theta_{n,n-1}$ 必须等于跨 l_{n+1} 左端的转角 $\theta_{n,n+1}$。这些转角由式(8.2a)给出，有

图　8.8

$$\left.\begin{aligned}\theta_{n,n-1}&=\frac{M_{n,n-1}l_n}{3EI_n}-\frac{M_{n-1,n}l_n}{6EI_n}-\frac{A_nd_n}{l_nEI_n}\\ \theta_{n,n+1}&=\frac{M_{n,n+1}l_{n+1}}{3EI_{n+1}}-\frac{M_{n+1,n}l_{n+1}}{6EI_{n+1}}-\frac{A_{n+1}c_{n+1}}{l_{n+1}EI_{n+1}}\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

现在引入支座处的常规弯矩 M_{n-1}、M_n 及 M_{n+1}，从而代替杆端弯矩。由假设的杆端弯矩的正向(8.1 节)以及确定弯矩符号的惯例，有

$$M_{n-1,n}=+M_{n-1}\qquad M_{n+1,n}=-M_{n+1}$$
$$M_{n,n+1}=+M_n\qquad M_{n,n-1}=-M_n$$

式(a)变为

$$\left.\begin{aligned}\theta_{n,n-1}&=-\frac{M_nl_n}{3EI_n}-\frac{M_{n-1}l_n}{6EI_n}-\frac{A_nd_n}{l_nEI_n}\\ \theta_{n,n+1}&=\frac{M_nl_{n+1}}{3EI_{n+1}}+\frac{M_{n+1}l_{n+1}}{6EI_{n+1}}+\frac{A_{n+1}c_{n+1}}{l_{n+1}EI_{n+1}}\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

让两转角方程相等，得

$$M_{n-1}\frac{l_n}{I_n}+2M_n\left(\frac{l_n}{I_n}+\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right)+M_{n+1}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}=-\frac{6A_nd_n}{I_nl_n}-\frac{6A_{n+1}c_{n+1}}{I_{n+1}l_{n+1}}\tag{8.7}$$

这就是著名的三弯矩方程。可以对连续梁的每一中间支座写出这样的方程；如果梁的端部为简支，方程的个数等于支座处超静定弯矩的个数。因此，所有未知量可由这些方程得出。

如果梁的左端在 O 点固定，还有一个附加条件，即梁的左端不发生转动。由前面的符

号，意味着 θ_0 消失。利用式(8.2a)的第一式，这个条件变为

$$\frac{M_{0,1}l_1}{3EI_1}-\frac{M_{1,0}l_1}{6EI_1}+\frac{A_1c_1}{l_1EI_1}=0$$

再次引入常规弯矩，代替杆端弯矩，得

$$2M_0+M_1=-\frac{6A_1c_1}{l_1^2} \tag{8.8}$$

由此可见固定端引进了一附加的弯矩 M_0，但同时得到一附加式(8.8)。因此，未知量的个数还是等于方程的个数。如果梁的右端固定，则可写出与式(8.8)类似的方程。

有时，可利用在三个连续支座处包含未知的横截面转角的方程，代替三弯矩方程(8.7)。再次考虑两段连续跨(见图 8.8c)，利用方程(8.6)计算第 n 个支座处的杆端弯矩，得

$$M_{n,n-1}=2k_n(2\theta_n+\theta_{n-1})+m_{n,n-1}-6k_n\theta_{n,n-1}$$
$$M_{n,n+1}=2k_{n+1}(2\theta_n+\theta_{n+1})+m_{n,n+1}-6k_{n+1}\theta_{n,n+1}$$

然后，注意到 $M_{n,n-1}=-M_{n,n+1}$，有

$$2k_n\theta_{n-1}+4\theta_n(k_n+k_{n+1})+2k_{n+1}\theta_{n+1}=-(m_{n,n-1}+m_{n,n+1})+6(k_n\theta_{n,n-1}+k_{n+1}\theta_{n,n+1}) \tag{8.9}$$

这称为三转角方程。

应用三弯矩方程(8.7)第一个例子，下面来考虑在每跨上承受均布载荷的梁。如果 q_n 为跨 l_n 的载荷集度，有

$$c_n=d_n=\frac{l_n}{2} \qquad A_n=\frac{q_nl_n^3}{12}$$

对于跨 l_{n+1} 我们得到相似的表达式。则方程(8.7)变为

$$M_{n-1}\frac{l_n}{I_n}+2M_n\left(\frac{l_n}{I_n}+\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right)+M_{n+1}\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}=-\frac{q_nl_n^3}{4I_n}-\frac{q_{n+1}l_{n+1}^3}{4I_{n+1}} \tag{8.10a}$$

例如，有五个支座，端点为简支的等截面梁。这里 $M_0=M_4=0$，中间支座处的弯矩 M_1、M_2、M_3 可由方程(8.10a)计算出来，即

$$2M_1(l_1+l_2)+M_2l_2=-\frac{q_1l_1^3}{4}-\frac{q_2l_2^3}{4}$$

$$M_1l_2+2M_2(l_2+l_3)+M_3l_3=-\frac{q_2l_2^3}{4}-\frac{q_3l_3^3}{4}$$

$$M_2l_3+2M_3(l_3+l_4)=-\frac{q_3l_3^3}{4}-\frac{q_4l_4^3}{4}$$

如果每段跨度相等，$l_1=l_2=l_3=l_4=l$，则有

$$\left.\begin{aligned}M_1&=-\frac{l^2}{224}(15q_1+11q_2-3q_3+q_4)\\M_2&=-\frac{l^2}{224}(-4q_1+12q_2+12q_3-4q_4)\\M_3&=-\frac{l^2}{224}(q_1-3q_2+11q_3+15q_4)\end{aligned}\right\} \tag{8.10b}$$

例如，$q_2=q_3=q_4=0$，只有 q_1 不为 0，得到图 8.9a 所示情况。在这种情况下，中间支座处

的弯矩，由方程(b)得出 $M_1=-\frac{15}{224}q_1l^2$，$M_2=+\frac{1}{56}q_1l^2$，$M_3=-\frac{1}{224}q_1l^2$。相应的弯矩图如图 8.9b 所示。

如果梁在整个长度上集度相同(图 8.9c)，$q_1=q_2=q_3=q_4=q$，由方程(b)给出

$$M_1=-\frac{3}{28}ql^2 \qquad M_2=-\frac{1}{14}ql^2 \qquad M_3=-\frac{3}{28}ql^2$$

相应的弯矩图如图 8.9d 所示。

如果集中载荷 P_n 作用在跨 l_n 上(图 8.10a)，面积 A_n 由图 8.10b 所示三角形表示，得到

$$A_n=\frac{P_ne_nf_n}{2} \qquad c_n=\frac{1}{3}(l_n+e_n) \qquad d_n=\frac{1}{3}(l_n+f_n) \tag{c}$$

图　8.9

图　8.10

在计算式(8.7)右端项时必须利用作用在梁上的每一集中力的表达式。

对于受集中力的例子，我们来考虑五支座的等截面梁，载荷如图 8.11a 所示。由对称性得出 $M_1=M_3$，我们只能写出两个方程。载荷和距离在图中标明，得 $A_1=\frac{405}{2}\text{ft}^2$，$c_1=d_1=9\text{ft}$，$A_2=360\text{ft}^2$，$c_2=d_2=\frac{21}{2}\text{ft}$。代入到式(8.7)，得

$$78M_1+21M_2=-\frac{6\times405}{4}-\frac{6\times360}{2}$$

$$21M_1+84M_2+21M_1=-6\times360$$

由此得出

$$M_1=-17.0\text{t}\cdot\text{ft} \qquad M_2=-17.2\text{t}\cdot\text{ft}$$

利用这些值，可绘出图 8.11b 所示弯矩图。

当中间支座的弯矩已经计算出来，支座反力可由静平衡方程得出。考虑支座 n(见图 8.12)，分别计算由跨 l_n 和跨 l_{n+1} 弯曲产生的反力 R_n，并将两反力求和。因此，可从图 8.12a 推出反力 R_n 的第一部分为

$$R_n' + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} \tag{d}$$

图 8.11

图 8.12

习题

1. 求两段连续梁中间支座的弯矩 M_1，如图 8.13a 所示，梁为等截面，并在第一段受均布载荷，$l_2 : l_1 = \alpha$。
2. 若 $I_2 : I_1 = \gamma$，求解上题。
3. 图 8.13b 所示的连续梁，求 M_0 和 M_1。假设沿梁的整个长度方向为等截面，载荷集度为 q。
4. 若两端固定(见图 8.13c)，沿梁的整个长度方向为等截面，求解上题。
5. 四个支座等截面梁，载荷如图 8.14a 所示。求载荷集度为 q 时支座的弯矩。
6. 若中间段受载荷，求解上题。如图 8.14b 所示。
7. 若梁的两端固定，且 $\beta = 1$，求解上题。

图 8.13

图 8.14

8.4　变截面梁

通常，特别在钢筋混凝土结构中，梁在它们支座附近加厚，以免在梁与柱结合处产生凹入尖角。这种情况将引起托肩如何影响在加载情况下的端部转角问题。要计算这些转角，用 8.1 节式(e)。这些方程同乘以和同除以梁均匀部分的惯性矩 I_0，得

$$\left.\begin{aligned}\theta_a &= \int_0^l \frac{l-x}{l}\frac{M}{EI_0}\frac{I_0}{I}\mathrm{d}x \\ \theta_b &= -\int_0^l \frac{x}{l}\frac{M}{EI_0}\frac{I_0}{I}\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

用这种方式问题将梁简化成均匀柔性刚度 EI_0 的梁。考虑到截面的变化，只需用 MI_0/I 代替 M。这将意味着虚载荷由修改的弯矩图给出，由每一横截面的弯矩同乘以 I_0/I 得出。

例如，图 8.15a 所示的情况。带有加固端的梁，由作用在中间的载荷 P 下发生弯曲。修改的弯矩图由图 8.15b 中的阴影面积表示。沿着梁的加强部分，长度为 λl，弯矩图 acb 的纵坐标按常比率 $I_0:I_1$ 减少。如果我们将梁端部由图 8.15b 所示阴影面积表示的虚载荷产生的剪力除以 EI_0，可以得出梁的两端部转角。可以看出由于梁的端部加强，当我们用修改的弯矩面积代替弯矩面积 acb，这些转角随着虚载荷的消失面以同比率消失。假如 $\lambda=1/4$，$I_0/I_1=1/2$。虚载荷按 7:8 的比例减少，对具有均匀柔性刚度 EI_0 的梁，转角将以八分之一的值消失。

图 8.16 所示的情况，比值 I_0/I 沿托肩长度方向变化，代替图 8.15b 中的直线 ad 和 eb，将得到确定的曲线。我们通常根据这些曲线用足够的精度，把托肩的长度 λl 分成几部分，计算每段的比率 I_0/I。自然地，修改后弯矩图的形状依赖于托肩的形式。例如带有直托肩的矩形梁(见图 8.16b)在 A 端的力偶 M_{ab} 作用下弯曲。弯矩图为三角形，如图 8.16c 所示。由于梁深随距离 ξ 线性增加，I 与深度的立方成正比，得

图　8.15

图　8.16

$$I = I_0\left[1 + \left(\sqrt[3]{\frac{I_1}{I_0}} - 1\right)\frac{\xi}{\lambda l}\right]^3 \tag{8.12}$$

其中 I_1 为支座处的惯性矩。例如，$I_1/I_0 = 10$，$\lambda = 0.3$，可得到比率 I_0/I 的值，由表 8.2 中第 3 行给出。相应的修改后弯矩图由图 8.16c 中阴影部分表示。把这个面积看成虚载荷，利用方程(8.11)，我们可以计算出梁的端部转角。

为了用辛普森法则描述这种计算过程，我们从梁的 AD 部分开始。方程(8.11)中第一个积分号下相应的函数值由表 8.2 中第 5 行给出。因此梁的 AD 部分对 A 点整个转角的贡献 θ_a' 为

$$\theta_a' = \int_0^{0.3l}\frac{l-x}{l}\frac{M}{EI_0}\frac{I_0}{I}\mathrm{d}x = \frac{M_{ab}}{EI_0}\int_0^{0.3l}\frac{(l-x)^2}{l^2}\frac{I_0}{I}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{M_{ab}}{EI_0}\frac{0.3l}{4\times 3}[0.4900 + 4(0.2807 + 0.1318) + 2(0.1842) + 0.1000]$$

$$= 0.0652\frac{M_{ab}l}{EI_0}$$

表 8.2

(1)	$\frac{\xi}{\lambda l}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	(4)	$\frac{(l-x)^2}{l^2}$	0.4900	0.6006	0.7225	0.8556	1.0000
(2)	$\frac{l-x}{l}$	0.7000	0.7750	0.8500	0.9250	1.0000	(5)	$\frac{(I_0/I)(l-x)^2}{l^2}$	0.4900	0.2807	0.1842	0.1318	0.1000
(3)	$\frac{I_0}{I}$	1.0000	0.4673	0.2549	0.1540	0.1000							

对梁的 FB 段用相同的方式处理，得到

$$\theta_a'' = \frac{M_{ab}}{EI_0}\int_{0.7l}^{l}\frac{(l-x)^2}{l^2}\frac{I_0}{I}\mathrm{d}x = 0.0049\frac{M_{ab}l}{EI_0}$$

沿着中间段 DF，横截面为常数，得

$$\theta_a''' = \frac{M_{ab}}{EI_0}\int_{0.3l}^{0.7l}\frac{(l-x)^2}{l^2}\mathrm{d}x = 0.1053\frac{M_{ab}l}{EI_0}$$

A 点整个转角为

$$\theta_a = \theta_a' + \theta_a'' + \theta_a''' = 0.1754\frac{M_{ab}l}{EI_0}$$

用相同的方法处理方程(8.11)的第二项，可得到梁右端的整个转角

$$\theta_b = -0.1266\frac{M_{ab}l}{EI_0}$$

对于带有直线的或抛物线托肩的梁，可以对方程(8.11)中的积分项进行精确积分。然而，计算将非常繁杂且耗时。为了简化对变截面梁的分析，在实际应用中对经常遇到的那些形状的托肩，θ_a 和 θ_b 的表达式中数值因子的值都有特制的表格。例如，对于带有直线或抛物线托肩的对称梁，在杆端弯矩 M_{ab} 和 M_{ba} 作用下 A 点和 B 点的转角很容易从下面方程计算出来

$$\left.\begin{aligned}\theta_a &= C_1\frac{M_{ab}l}{EI_0} - C_2\frac{M_{ba}l}{EI_0}\\ \theta_b &= C_1\frac{M_{ba}l}{EI_0} - C_2\frac{M_{ab}l}{EI_0}\end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

其中，常数 C_1 和 C_2 可从表 8.3 中得到。

表　8.3

λ	$\frac{I_0}{I_1}$	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02
(a) 直线托肩的梁(图 8.16b)													
0.50	C_1	0.251	0.173	0.140	0.121	0.107	0.099	0.089	0.078	0.071	0.064	0.056	0.047
	C_2	0.141	0.106	0.091	0.082	0.076	0.071	0.065	0.059	0.055	0.050	0.045	0.040
0.40	C_1	0.264	0.198	0.171	0.154	0.144	0.136	0.127	0.117	0.112	0.106	0.099	0.091
	C_2	0.147	0.125	0.115	0.108	0.104	0.100	0.096	0.092	0.089	0.086	0.083	0.072
0.35	C_1	0.271	0.212	0.187	0.172	0.162	0.155	0.147	0.138	0.133	0.128	0.122	0.114
	C_2	0.151	0.138	0.126	0.121	0.117	0.114	0.111	0.107	0.105	0.103	0.100	0.096
0.30	C_1	0.278	0.226	0.204	0.191	0.182	0.175	0.168	0.160	0.156	0.151	0.145	0.139
	C_2	0.155	0.142	0.136	0.132	0.129	0.127	0.124	0.121	0.120	0.118	0.116	0.113
0.25	C_1	0.286	0.241	0.222	0.210	0.203	0.197	0.191	0.184	0.180	0.176	0.171	0.165
	C_2	0.158	0.149	0.144	0.142	0.139	0.138	0.136	0.134	0.133	0.132	0.130	0.128
0.20	C_1	0.294	0.257	0.241	0.231	0.225	0.220	0.215	0.209	0.206	0.202	0.198	0.193
	C_2	0.161	0.155	0.152	0.150	0.149	0.148	0.147	0.145	0.144	0.143	0.142	0.141
0.15	C_1	0.303	0.274	0.261	0.254	0.249	0.245	0.241	0.237	0.234	0.231	0.228	0.224
	C_2	0.163	0.160	0.158	0.157	0.156	0.156	0.155	0.154	0.154	0.153	0.153	0.152
(b) 抛物线托肩的梁(图 8.16a)													
0.50	C_1	0.273	0.213	0.186	0.170	0.159	0.150	0.141	0.130	0.123	0.116	0.108	0.097
	C_2	0.151	0.132	0.122	0.115	0.111	0.107	0.103	0.098	0.094	0.090	0.086	0.080
0.40	C_1	0.283	0.233	0.210	0.196	0.187	0.180	0.172	0.162	0.157	0.151	0.143	0.134
	C_2	0.156	0.143	0.136	0.132	0.129	0.126	0.123	0.120	0.117	0.115	0.112	0.107
0.35	C_1	0.289	0.243	0.223	0.210	0.202	0.195	0.188	0.179	0.175	0.169	0.162	0.154
	C_2	0.158	0.148	0.143	0.139	0.137	0.135	0.133	0.130	0.128	0.126	0.123	0.120
0.30	C_1	0.294	0.254	0.236	0.225	0.218	0.212	0.205	0.198	0.193	0.188	0.182	0.175
	C_2	0.160	0.153	0.149	0.146	0.144	0.143	0.141	0.139	0.137	0.136	0.134	0.131
0.25	C_1	0.300	0.266	0.250	0.241	0.234	0.229	0.224	0.217	0.213	0.209	0.204	0.197
	C_2	0.162	0.157	0.154	0.152	0.151	0.149	0.148	0.147	0.146	0.144	0.143	0.141
0.20	C_1	0.306	0.278	0.265	0.257	0.252	0.248	0.243	0.237	0.234	0.231	0.226	0.221
	C_2	0.164	0.160	0.158	0.157	0.156	0.155	0.154	0.153	0.153	0.152	0.151	0.150
0.15	C_1	0.312	0.291	0.281	0.274	0.270	0.267	0.263	0.259	0.257	0.254	0.250	0.246
	C_2	0.167	0.163	0.162	0.161	0.161	0.160	0.159	0.159	0.159	0.158	0.158	0.157

如果对于给定形状的梁没有现成的表格，常数 C_1 和 C_2 必须由上面方程计算出来。这两个常数完全由对称梁的刚度决定，称为转角系数。

如果除了杆端弯矩外还有横向载荷作用在梁上，同时支座还有一定的位移，则梁端转角的一般表达式变成

$$\left.\begin{aligned}\theta_a &= C_1\frac{M_{ab}l}{EI_0} - C_2\frac{M_{ba}l}{EI_0} + \frac{Ac}{EI_0 l} + \theta_{ab}\\ \theta_b &= C_1\frac{M_{ba}l}{EI_0} - C_2\frac{M_{ab}l}{EI_0} - \frac{Ad}{EI_0 l} + \theta_{ab}\end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

其中，Ac/l 和 $-Ad/l$ 为修改后的弯矩图面积 A 在端部产生的剪力，如图 8.15b 所示，θ_{ab} 为由支座位移产生的梁的转角。

对方程(8.14)求解杆端弯矩 M_{ab} 和 M_{ba}，得

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= \frac{EI_0}{l}\left(\frac{C_1\theta_a}{C_1^2-C_2^2}+\frac{C_2\theta_b}{C_1^2-C_2^2}-\frac{C_1+C_2}{C_1^2-C_2^2}\theta_{ab}\right)-\frac{A}{l^2}\frac{cC_1-dC_2}{C_1^2-C_2^2} \\ M_{ba} &= \frac{EI_0}{l}\left(\frac{C_2\theta_a}{C_1^2-C_2^2}+\frac{C_1\theta_b}{C_1^2-C_2^2}-\frac{C_1+C_2}{C_1^2-C_2^2}\theta_{ab}\right)-\frac{A}{l^2}\frac{cC_2-dC_1}{C_1^2-C_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

然后引进符号

$$\frac{EI_0}{l}=k \qquad \frac{C_1}{C_1^2-C_2^2}=k_{bb} \qquad \frac{C_2}{C_1^2-C_2^2}=k_{ab} \tag{b}$$

观察到方程(a)中的最后一项代表当 $\theta_a=\theta_b=\theta_{ab}=0$ 时的杆端弯矩，即固端弯矩，我们可以用下面的简化形式把方程重新写为

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= k(k_{bb}\theta_a+k_{ab}\theta_b-(k_{bb}+k_{ab})\theta_{ab})+m_{ab} \\ M_{ba} &= k(k_{ab}\theta_a+k_{bb}\theta_b-(k_{bb}+k_{ab})\theta_{ab})+m_{ba} \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

这就是变截面对称梁的斜率—挠度方程。对于等截面梁的情况，有 $C_1=\frac{1}{3}$，$C_2=\frac{1}{6}$，$k_{bb}=4$，$k_{ab}=2$，方程(8.15)正好与先前的式(8.6)相一致。

为简化由式(8.15)计算杆端弯矩，对常数 k_{bb} 及 k_{ab} 都制定了表格，图 8.17 和图 8.18 是其中两个例于。集中载荷及均布横向载荷的固端弯矩的值对不同类型的托肩都制定了表格。

图 8.17

在所有前面的讨论中，假设梁都是对称的。对非对称梁的情况，常数 C_1、C_2 及 C_3 需要定义其弹性属性。在这种情况下，在一般载荷条件下 A 和 B 两端的转角为

$$\begin{aligned} \theta_a &= C_1\frac{M_{ab}l}{EI_0}-C_2\frac{M_{ba}l}{EI_0}+\frac{Ac}{EI_0l}+\theta_{ab} \\ \theta_b &= C_1\frac{M_{ba}l}{EI_0}-C_2\frac{M_{ab}l}{EI_0}-\frac{Ad}{EI_0l}+\theta_{ab} \end{aligned} \tag{8.16}$$

求解关于 M_{ab} 和 M_{ba} 的方程，引进符号

$$\frac{C_1}{C_1C_3-C_2^2}=k_{bb} \qquad \frac{C_2}{C_1C_3-C_2^2}=k_{ab} \qquad \frac{C_3}{C_1C_3-C_2^2}=k_{aa} \tag{c}$$

得

图　8.18

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= k[k_{aa}\theta_a + k_{ab}\theta_b - (k_{ab} + k_{aa})\theta_{ab}] + m_{ab} \\ M_{ba} &= k[k_{ab}\theta_a + k_{bb}\theta_b - (k_{bb} + k_{ab})\theta_{ab}] + m_{ba} \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

这就是变截面非对称梁的斜率—挠度方程。对于对称梁，有 $C_3 = C_1$，$k_{aa} = k_{bb}$，则方程(8.17)与先前得到的方程(8.15)相同。

举例说明式(8.16)及式(8.17)的应用，我们来考虑带有抛物线托肩的非对称梁，B 端固定，A 端简支，如图 8.19a 所示。假设在 A 端有主动杆端弯矩 M_{ab}，相应的 B 端的被动杆端弯矩 M_{ba} 可由方程(8.16)的第二式计算出来。设方程中 $\theta_b = 0$ 并注意到这种情况没有横向载荷和支座沉降，得

$$M_{ba} = \frac{C_2}{C_3} M_{ab}$$

相类似地，利用方程(8.17)，得

$$M_{ba} = \frac{k_{ab}}{k_{aa}} M_{ab}$$

式中系数

$$C_{ab} = \frac{C_2}{C_3} = \frac{k_{ab}}{k_{aa}} \tag{d}$$

图　8.19

表示所施加弯矩由 A 端传送到 B 端的系数，称为传递系数。用相同的方法，可以表示从铰支端 B 到面定端 A 的传递系数

$$C_{ba} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{k_{ab}}{k_{bb}} \tag{e}$$

这些传递系数在托肩梁的分析中非常有用，已经制作了不同托肩形状的表格。

如图 8.19a 所示的载荷情况梁 A 端的转角可由方程(8.16)计算出来。注意到这种情况没有横向载荷和支座沉降且 $\theta_b = 0$，得

$$\theta_a = \frac{C_1C_3 - C_2^2}{C_3}\frac{l}{EI_0}M_{ab}$$

可见转角 θ_a 与系数成反比

$$s_{ab} = \frac{C_3}{C_1C_3 - C_2^2} = k_{aa} \tag{f}$$

这称为梁 A 端的刚度系数。类似的，可得 B 端的刚度系数为

$$s_{ba} = \frac{C_1}{C_1C_3 - C_2^2} = k_{bb} \tag{g}$$

如果梁承受横向载荷(图 8.19b)，固定的被动弯矩 M_{ba} 可由方程(8.17)得到。如果代入 $\theta_b = M_{ab} = \theta_{ab} = 0$ 到这些方程，它们简化为

$$kk_{aa}\theta_a = -m_{ab}$$

$$M_{ba} = kk_{ab}\theta_a + m_{ba}$$

然后消掉 θ_a 并利用式(d)，有

$$M_{ba} = -\frac{k_{ab}}{k_{aa}}m_{ab} + m_{ba} = -C_{ab}m_{ab} + m_{ba} \tag{8.18}$$

可见对于每一种特定载荷情况，被动弯矩 M_{ba} 可利用固端弯矩及传递系数表格中的值很容易计算出来。

作为具体数值算例，绘制如图 8.19b 所示梁 M_{ba} 的影响线。对不同比率 x/l 的几个值，确定了载荷 P 在梁上的位置，固定端弯矩 m_{ab} 及 m_{ba} 的值由上面表 8.4 的第 1 行及第 2 行所示。从表格也可以算出梁的传递系数为 $C_{ab} = 0.618$。由这些数据绘制的 M_{ba} 的影响线如图 8.19c 所示。

表 8.4

	x/l					
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	
m_{ab}	-0.0958	-0.2148	-0.1752	-0.0665	-0.0032	$\times Pl$
m_{ba}	0.0025	0.0443	0.1370	0.1881	0.0954	$\times Pl$
M_{ba}	0.062	0.177	0.245	0.229	0.097	$\times Pl$

最后，让我们来概括一下先前讨论的托肩中产生的不同常数之间的关系。首先，介绍了转角系数 C_1、C_2、C_3，以及对于特殊形状托肩这些值的计算。紧接着，讲了系数 k_{bb}、k_{ab}、k_{aa}，它们出现在斜率—挠度方程中，并由式(c)确定。

在讨论一端固定、一端简支的梁中引入了传递系数的概念，它们由式(d)、(e)确定。同时，我们遇到了与同一问题相联系的刚度系数的概念，它们由式(f)、(g)确定。

可见所有导出的系数可由转角系数 C_1、C_2、C_3 表示。然面，在波特兰水泥协会的表格中，给出了传递系数及刚度系数，而并没有给出转角系数。在这种情况下，使用表格中的值，转角系数可以很容易地由下面的方程计算出来

$$C_1 = \frac{1}{s_{ab}} \times \frac{1}{1 - C_{ab}C_{ba}} \qquad C_3 = \frac{1}{s_{ba}} \times \frac{1}{1 - C_{ab}C_{ba}} \qquad C_2 = \frac{1}{s_{ab}} \times \frac{C_{ba}}{1 - C_{ab}C_{ba}} = \frac{1}{s_{ba}} \times \frac{C_{ab}}{1 - C_{ab}C_{ba}} \tag{8.19}$$

习题

1. 带有直托肩的对称梁(见图 8.20)，$I_0/I_1=0.20$，托肩的长度为 $\lambda l=l/4$。如果梁的两端固定，计算固定端的弯矩：(a)受到均布的载荷集度为 q 的横向载荷作用时；(b)在梁中点处受到集中载荷 P 的作用时。
2. 上题所描述的托肩梁中，如果右端支座 B 相对于 A 端有位移 $\Delta=1$ in，求杆端弯矩。假设跨长为 $l=16$ ft。
3. 假设图 8.20b 中的对称梁在 B 端固定，A 端简支，如果主动杆端弯矩 M_{ab} 作用在 A 端，计算被动杆端弯矩 M_{ba}。

图　8.20

4. 如果图 8.20b 所示梁承受均布载荷集度 q 的作用，且 $M_{ab}=0$，计算 B 端被动杆端弯矩 M_{ba}。其他数据为 $\lambda=0.3$，$I_0/I_1=0.1$。
5. 假设图 8.19b 中的非对称梁承受均布载荷集度 q 的作用，计算梁固定端 B 的被动杆端弯矩 M_{ba}的大小。转角系数的值为 $C_1=0.201$，$C_2=0.146$，$C_3=0.237$。

8.5　变截面连续梁

在讨论变截面连续梁时，首先研究具有两个连续跨的问题(见图 8.21)，并且定义 θ_0、θ_1、θ_2、…为支座处横截面的转角。取跨的左端并应用式(8.17)的第二式，可得到[⊖]

图　8.21

$$M_{n,n-1}=k_n[k_{n-1,n}\theta_{n-1}+k_{n,n}^{n}\theta_n-(k_{n,n}^{n}+k_{n-1,n})\theta_{n-1,n}]+m_{n,n-1} \tag{a}$$

同理，将式(8.17)的第一式应用于右端跨，有

$$M_{n,n+1}=k_{n+1}[k_{n,n}^{n+1}\theta_n+k_{n,n+1}\theta_{n+1}-(k_{n,n+1}+k_{n,n}^{n+1})\theta_{n,n+1}]+m_{n,n+1} \tag{b}$$

现在，观察支座 n，必须有

$$M_{n,n-1}=-M_{n,n+1}$$

我们得到三转角方程

$$\begin{aligned}&k_nk_{n-1,n}\theta_{n-1}+(k_nk_{n,n}^{n}+k_{n+1}k_{n,n}^{n+1})\theta_n+k_{n+1}k_{n,n+1}\theta_{n+1}\\&=k_n(k_{n,n}^{n}+k_{n-1,n})\theta_{n-1,n}+k_{n+1}(k_{n,n+1}+k_{n,n}^{n+1})\theta_{n,n+1}-m_{n,n-1}-m_{n,n+1}\end{aligned} \tag{8.20a}$$

此方程适用于每一个中间支座。若梁的两端，即 O 端和 m 端固定，则 $\theta_0=\theta_m=0$，那么方程(8.20a)就足以求出所有未知量。如果梁的 O 端简支，杆端弯矩 M_{01}为零，由式(8.17)的第一式，得

⊖ 由于支撑点 n 既属于跨 n、也属于跨 $n+1$，我们用符号 $k_{n,n}^{n}$和 $k_{n,n}^{n+1}$来区分 $k_{n,n}$的两个值。

$$0 = k_1[k_{00}\theta_0 + k_{01}\theta_1 - (k_{01} + k_{00})\theta_{01}] + m_{01} \tag{8.20b}$$

同理，如果 m 端为简支，则由式(8.17)的第二式，得

$$0 = k_m[k_{m-1,m}\theta_{m-1} + k_{mm}\theta_m - (k_{mm} + k_{m-1,m})\theta_{m,m-1}] + m_{m,m-1} \tag{8.20c}$$

因此，在任何情况下，各截面的转角 θ_0、θ_1、θ_2、…均可通过方程(8.20)的所有公式求出。有了这些角度值，所有杆端弯矩值就可通过式(8.17)的斜率—挠度方程计算出来。至此，分析完成。

代替三转角方程，我们也能推导出三弯矩方程。因此，我们将式(8.16)写成如下形式

$$\theta_a = C_1\frac{M_{ab}l}{EI_0} - C_2\frac{M_{ba}l}{EI_0} + \gamma_a + \theta_{ab}$$

$$\theta_b = C_3\frac{M_{ba}l}{EI_0} - C_2\frac{M_{ab}l}{EI_0} - \gamma_b + \theta_{ab} \tag{c}$$

这里

$$\gamma_a = \frac{Ac}{EI_0 l} \quad \gamma_b = \frac{Ad}{EI_0 l} \tag{d}$$

其中量 γ_a 和 $-\gamma_b$ 分别表示只在横向载荷作用下，梁两端的转角。由式(8.17)，利用固端弯矩，我们得到它们的大小为

$$\left.\begin{aligned}\gamma_a &= \frac{l}{EI_0}(-C_1 m_{ab} + C_2 m_{ba})\\ \gamma_b &= \frac{l}{EI_0}(C_3 m_{ba} - C_2 m_{ab})\end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

由于许多特殊情况下的固端弯矩已经列表求出，其中常数 C_1、C_2、C_3 可由式(8.19)求得，应用上面的公式，可以很容易求得 γ_a 和 γ_b 的值。

现在，考虑两相邻跨 n 和 $n+1$，并且写出转角 θ_n 的表达式，我们得到

$$C_3^n\frac{M_{n,n-1}l_n}{EI_0^n} - C_2^{n+1}\frac{M_{n-1,n}l_n}{EI_0^n} - \gamma_n^n + \theta_{n,n-1}$$

$$= C_1^{n+1}\frac{M_{n,n+1}l_{n+1}}{EI_0^{n+1}} - C_2^{n+1}\frac{M_{n+1,n}l_{n+1}}{EI_0^{n+1}} + \gamma_n^{n+1} + \theta_{n,n+1}$$

引入定义

$$\frac{EI_0^n}{l_n} = k_n \quad \frac{EI_0^{n+1}}{l_{n+1}} = k_{n+1}$$

并且注意到 $M_{n,n-1} = -M_{n,n+1}$，我们得到

$$-\frac{C_2^n}{k_n}M_{n-1,n} + \left(\frac{C_3^n}{k_n} + \frac{C_1^{n+1}}{k_{n+1}}\right)M_{n,n-1} + \frac{C_2^{n+1}}{k_{n+1}}M_{n+1,n} \tag{8.22a}$$

$$= \gamma_n^n + \gamma_n^{n+1} - \theta_{n,n-1} + \theta_{n,n+1}$$

这就是变截面连续梁的三弯矩方程。它可以被应用于梁的各个中间支座，因此对于简支梁的情况，未知弯矩的数目等于方程数。如果梁两端均固定，则有两个附加的未知弯矩 M_{01} 和 $M_{m,m-1}$ 以及两个附加的约束条件，即在端点 O 和 m 处端截面转角为零。利用式(8.16)，约束条件表示如下

$$\left.\begin{aligned} &C_1^{\,1}\frac{M_{01}l_1}{EI_0^{\,1}}-C_2^{\,1}\frac{M_{10}l_1}{EI_0^{\,1}}+\gamma_0^{\,1}+\theta_{01}=0\\ &C_3^{\,m}\frac{M_{m,m-1}l_m}{EI_0^{\,m}}-C_2^{\,m}\frac{M_{m-1,m}l_m}{EI_0^{\,m}}-\gamma_m^{\,m}+\theta_{m-1,m}=0\end{aligned}\right\}\tag{8.22b}$$

因此，式(8.22)的所有方程又一次表示有足够的方程数去计算所有的超静定弯矩了。

现在，举例说明应用三转角方程(8.20)来分析三跨桥梁，桥梁所受载荷如图 8.22a。在大跨度情况下，桥梁通常由变深度的肋加强的等厚度板组成。因此，我们必须分析 T 形截面梁。通过查表，计算矩形截面梁，然后我们用等效的矩形截面梁换算成 T 形截面梁，矩形截面梁在支点处的高度由下式给出

$$h_1=h_0\sqrt[3]{\frac{I_1}{I_0}}\tag{e}$$

图　8.22

其中 I_0 和 I_1 分别表示 T 形截面梁在跨度中点和支座处的形心惯性矩。等效矩形截面梁托臂的形状与实际肋条的形状相同。这样，抛物线型托臂 $\lambda l=l/2$，高度 $h_0=2.5\text{ft}$，$h_1=2.5\text{ft}$。由第一跨开始，利用波特兰水泥相关表，我们得到如下常数

C_{01}	C_{10}	s_{01}	s_{10}	m_{01}	m_{10}
1.260	0.266	6.45	30.58	$-0.0439ql_1^2$	$0.1622ql_1^2$

那么将这些变常数代入式(8.20)，得

$$k_{00}=s_{01}=6.45\quad k_{01}=k_{10}=C_{01}k_{00}=1.26(6.45)=8.12$$

$$k_{11}^{\ \mathrm{I}}=s_{10}=30.58\quad m_{01}=-56.9\text{kip}\cdot\text{ft}\quad m_{10}=210.2\text{kip}\cdot\text{ft}$$

对于第二跨，我们再次查表得

C_{12}	C_{21}	s_{12}	s_{21}	m_{12}	m_{21}
0.784	0.784	22.83	22.83	$-0.1099ql_2^2$	$0.1099ql_2^2$

并且将这些常数代入式(8.20)，得

$$k_{11}^{\ \mathrm{II}}=s_{12}=22.83\quad k_{12}=C_{12}k_{11}^{\ \mathrm{II}}=0.784(22.83)=17.89$$

$$k_{22}^{\ \mathrm{II}}=s_{21}=22.83\quad m_{12}=-570\text{kip}\cdot\text{ft}\quad m_{21}=570\text{kip}\cdot\text{ft}$$

对于第三跨，表中给出

C_{23}	C_{32}	s_{23}	s_{32}	m_{23}	m_{32}
0.266	1.260	30.58	6.45	$-0.1622ql_3^2$	$0.0439ql_3^2$

并且将这些常数代入式(8.20)，得

$$k_{22}^{\text{III}}=s_{23}=30.58 \quad k_{23}=k_{32}=C_{23}k_{22}^{\text{III}}=0.226(30.58)=8.13$$

$$k_{33}=s_{32}=6.45 \quad m_{23}=m_{32}=0$$

故对于上述问题，方程(8.20)可写成如下表达式

$$\begin{aligned}
k_1(k_{00}\theta_0+k_{01}\theta_1) &= -m_{01}\\
k_1k_{01}\theta_0+(k_1k_{11}^{\text{I}}+k_2k_{11}^{\text{II}})\theta_1+k_2k_{12}\theta_2 &= -m_{10}-m_{12}\\
k_2k_{12}\theta_1+(k_2k_{22}^{\text{II}}+k_3k_{22}^{\text{III}})\theta_2+k_3k_{23}\theta_3 &= -m_{21}-m_{23}\\
k_3(k_{23}\theta_2+k_{33}\theta_3) &= -m_{32}
\end{aligned} \tag{f}$$

现在注意到

$$k_1=\frac{EI_0}{l_1} \quad k_2=\frac{EI_0}{l_2}=\frac{k_1}{2} \quad k_3=\frac{EI_0}{l_3}=k_1$$

我们将式(f)除以 k_1，代入数值，对于变常数，我们得到

$$6.45\theta_0+8.12\theta_1=\frac{56.9}{k_1}$$

$$8.12\theta_0+\left(30.58+\frac{1}{2}\times 22.83\right)\theta_1+\frac{1}{2}\times 17.89\theta_2=\frac{-210.2+570}{k_1}$$

$$\frac{1}{2}\times 17.83\theta_1+\left(\frac{1}{2}\times 22.83+30.58\right)\theta_2+8.13\theta_3=\frac{-570}{k_1}$$

$$8.13\theta_2+6.45\theta_3=0$$

求解方程组，得

$$\theta_0=-\frac{10.46}{k_1} \quad \theta_1=\frac{15.33}{k_1} \quad \theta_2=-\frac{22.24}{k_1} \quad \theta_3=\frac{27.95}{k_1}$$

最后，将转角值和常数值代入上述方程的(a)和(b)，可得

$$M_{10}=-M_{12}=[-8.12(10.46)+30.58(15.33)+210.2]\text{kip}\cdot\text{ft}=594\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{21}=-M_{23}=\left\{\frac{1}{2}[17.89(15.33)-22.83(22.24)]+570\right\}\text{kip}\cdot\text{ft}=453\text{kip}\cdot\text{ft}$$

相应的弯矩图如图 8.22b 所示。

现在再用三弯矩方程(8.22)来解决同样的问题(见图 8.22)。首先，应用式(8.19)，计算出每一段跨的转角系数 C_1、C_2、C_3 的值，然后，利用式(8.21)，量 γ_a 和 γ_b 可用表 8.5 计算。

表 8.5

跨度	C_1	C_2	C_3	γ_a	γ_b
Ⅰ	0.2330	0.0620	0.0492	$0.0203ql^3/EI_0$	$0.0107ql^3/EI_0$
Ⅱ	0.1140	0.0893	0.1140	$0.0223ql^3/EI_0$	$0.0223ql^3/EI_0$
Ⅲ	0.0492	0.0620	0.2330		

代入数据，三弯矩方程(8.22a)变为

$$(0.0492+2\times 0.114)M_{10}+2\times 0.0893M_{21}=0.0107ql_1^2+2\times 0.0223ql_2^2$$

$$-0.0893M_{12}+\left(0.114+\frac{1}{2}0.0492\right)M_{21}=0.0223ql_2^2$$

用常规符号的弯矩代替杆端弯矩

$$M_{10} = -M_1 \quad M_{21} = -M_2 \quad M_{12} = M_1$$

那么对于给定 l_1 和 l_2 的值，有

$$M_1 = -590\text{kip}\cdot\text{ft} \quad M_2 = -450\text{kip}\cdot\text{ft}$$

在计算的精度范围内，用三弯矩方程求得的结果与前面由三转角方程(见图 8.22b)求得的结果是一致的。

第二个例子，研究如图 8.23a 所示的四跨桥梁的影响线的建立。这根梁有对称的抛物线托臂 $\lambda l = l/2$，所有跨的最小深度 $h_0 = 30\text{in}$，中间支座的深度为 $h_1 = 69\text{in}$，$h_2 = 75\text{in}$，$h_3 = 69\text{in}$，梁的两端为简支。利用与前面例子相同的表格和公式，我们得到如图 8.23a 所示的斜率—挠度方程的常数。

为建立在支座处弯矩的影响线，我们首先从加载的第一跨开始。将第一跨分成 10 等份，然后在每个分割点处连续加集中载荷，并计算在支点处的弯矩。对于这种载荷条件的任意一段，三转角方程可写成如下形式

$$k_1(k_{00}\theta_0 + k_{01}\theta_1) = -m_{01}$$

$$k_1k_{01}\theta_0 + (k_1k_{11}^{\mathrm{I}} + k_2k_{11}^{\mathrm{II}})\theta_1 + k_2k_{12}\theta_2 = -m_{10}$$

$$k_2k_{12}\theta_1 + (k_2k_{22}^{\mathrm{II}} + k_3k_{22}^{\mathrm{III}})\theta_2 + k_3k_{23}\theta_3 = 0$$

$$k_3k_{23}\theta_2 + (k_3k_{33}^{\mathrm{III}} + k_4k_{33}^{\mathrm{IV}})\theta_3 + k_4k_{34}\theta_4 = 0$$

图　8.23

$$k_4(k_{34}\theta_3 + k_{44}\theta_4) = 0$$

其中

$$k_1 = \frac{EI_0}{l_1} \quad k_2 = k_3 = \frac{k_1}{1.374} \quad k_4 = k_1$$

其他常数由图 8.23a 得出。

在求解这个方程组时，首先由第一个方程求出 θ_0 的值，然后将其代入第二个方程，得到

$$\left.\begin{aligned}\left(-k_1\frac{k_{01}^2}{k_{00}} + k_1k_{11}^{\mathrm{I}} + k_2k_{11}^{\mathrm{II}}\right)\theta_1 + k_2k_{12}\theta_2 &= \frac{k_{01}}{k_{00}}m_{01} - m_{10}\\ k_2k_{12}\theta_1 + (k_2k_{22}^{\mathrm{II}} + k_3k_{22}^{\mathrm{III}})\theta_2 + k_3k_{23}\theta_3 &= 0\\ k_3k_{23}\theta_2 + (k_3k_{33}^{\mathrm{III}} + k_4k_{33}^{\mathrm{IV}})\theta_3 + k_3k_{34}\theta_4 &= 0\\ k_4(k_{34}\theta_3 + k_{44}\theta_4) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

由最后一个方程，可以计算出 θ_3/θ_4 的比值。然后将这个比值代入第三个方程，求出 θ_2/θ_3 的比值，再将 θ_2/θ_3 的比值代入到第二个方程，求出 θ_1/θ_2。可以看到所有比值均与第一跨的载荷位置无关，并且很容易的通过图 8.23a 所示的常数求得。有了这些比值，便可利用式(g)的第一个方程计算 θ_1 的值。显然，θ_1 与方程右端项表达式的大小成正比。式(g)第一个方程的右端项可以经查表求得，给出的表对应于第一跨的每一个载荷位置。由以上叙述及图 8.23 中给定的常数值，可得

$$\frac{\theta_4}{\theta_3} = -0.886 \quad \frac{\theta_3}{\theta_2} = -0.479 \quad \frac{\theta_2}{\theta_1} = -0.432$$

由式(g)中第一个方程，得

$$\theta_1 = \frac{0.0703}{k_1}(0.886m_{01} - m_{10}) \tag{h}$$

表 8.6 给出了载荷在不同位置时的固端弯矩，对于在式(h)中插入的量可以由表插值得到。

表 8.6

$\frac{x}{l_1}$	$\frac{m_{01}}{Pl_1}$	$\frac{m_{10}}{Pl_1}$	$\frac{0.886m_{01}-m_{10}}{Pl_1}$	$\frac{\theta_1k_1}{Pl_1}$	$\frac{M_1}{Pl_1}$	$\frac{M_2}{Pl_1}$	$\frac{M_3}{Pl_1}$
0.1	-0.077	0.019	-0.087	-0.0061	-0.047	+0.021	-0.008
0.3	-0.121	0.130	-0.238	-0.0167	-0.128	+0.057	-0.023
0.5	-0.079	0.237	-0.307	-0.0216	-0.165	+0.074	-0.030
0.7	-0.026	0.231	-0.254	-0.0179	-0.136	+0.061	-0.024
0.9	-0.002	0.095	-0.094	-0.0068	-0.052	+0.023	-0.009

有了转角的比值和 θ_1 的值，从式(a)、(b)中，我们就可以得到支座处弯矩的值，这里给出

$$M_{12} = k_2(k_{11}^{\mathrm{II}}\theta_1 + k_{12}\theta_2) = k_2\theta_1\left(k_{11}^{\mathrm{II}} + k_{12}\frac{\theta_2}{\theta_1}\right) = M_1$$

$$M_{23} = k_3(k_{22}^{\mathrm{III}}\theta_2 + k_{23}\theta_3) = k_3\theta_2\left(k_{22}^{\mathrm{III}} + k_{23}\frac{\theta_3}{\theta_2}\right) = M_2$$

$$M_{34} = k_4(k_{33}^{\mathrm{IV}}\theta_3 + k_{34}\theta_4) = k_4\theta_3\left(k_{33}^{\mathrm{IV}} + k_{34}\frac{\theta_4}{\theta_3}\right) = M_3$$

其中 M_1、M_2、M_3 为支座处弯矩。从以上方程可以得出

$$M_1 = k_2\theta_1(15.5 - 11.8 \times 0.432) \quad M_2 = -0.450M_1 \quad M_3 = +0.181M_1$$

现在，利用上述计算的 θ_1 的值，很容易得到在支座处的弯矩。这些值在表 8.6 中的最后三列中给出。到此为止，对于第一跨中载荷在不同位置的情况，计算全部完成。

现在研究梁的第二跨载荷。为了说明问题，我们使用三弯矩方程(8.22)，而不是使用三转角方程(8.20)。首先利用方程(8.19)计算 C_1、C_2、C_3，这些数值已列入表 8.7 中。然后利用式(8.21)计算 γ_a 和 γ_b，即

$$\left.\begin{aligned}\gamma_a &= \frac{1}{k_2}(-0.141m_{12} + 0.101m_{21})\\ \gamma_b &= \frac{1}{k_2}(+0.133m_{21} - 0.101m_{12})\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

表　8.7

Span	C_{ab}	C_{ba}	s_a	s_b	k	C_1	C_2	C_3
Ⅰ	0.888	0.417	4.92	10.47	1.374	0.323	0.135	0.152
Ⅱ	0.758	0.717	15.54	16.47	1.0	0.141	0.101	0.133
Ⅲ	0.717	0.758	16.47	15.54	1.0	0.133	0.101	0.141
Ⅳ	0.417	0.888	10.47	4.92	1.374	0.152	0.135	0.323

利用常数值，三弯矩方程(8.22)变为

$$\left(\frac{0.152}{1.374} + 0.141\right)M_{10} + 0.101M_{21} = -0.141m_{12} + 0.101m_{21}$$

$$-0.101M_{12} + (0.133 + 0.133)M_{21} + 0.101M_{32} = 0.133m_{21} - 0.101m_{12}$$

$$-0.101M_{23} + \left(0.141 + \frac{0.152}{1.374}\right)M_{32} = 0$$

代入弯矩

$$M_1 = -M_{10} = M_{12} \quad M_2 = -M_{21} = M_{23} \quad M_3 = -M_{32}$$

解上述方程，我们得到第二跨中任意位置载荷的弯矩值

$$M_1 = -0.200m_{21} + 0.464m_{12}$$

$$M_2 = -0.500m_{21} + 0.240m_{12}$$

$$M_3 = -0.400M_2$$

现在，利用提供的表中的固端弯矩，在支座处的弯矩很容易计算出来。得到的这些弯矩值列于表 8.8。

由此可以看出，三弯矩方程大大简化了计算。对于简支端，这里只计算了三个冗余量。然而，若利用三转角方程求解，则在支座处必须计算五个未知转角。若梁的两端为固定端，则利用三转角方程求解要优于三弯矩方程的求解。

现在，我们已讨论了集中载荷对两跨梁第一段的作用。利用梁的对称性和这些结果足以去建立所有四跨梁的影响线。M_1 和 M_2 的影响线分别如图 8.23b、c 所示。

表 8.8

x/l	m_{12}	m_{21}	M_1	M_2	M_3
0.1	$-0.092Pl_2$	$0.006Pl_2$	$-0.044Pl_2$	$-0.025Pl_2$	$+0.010Pl_2$
0.3	$-0.203Pl_2$	$0.065Pl_2$	$-0.107Pl_2$	$-0.081Pl_2$	$+0.033Pl_2$
0.5	$-0.163Pl_2$	$0.182Pl_2$	$-0.112Pl_2$	$-0.130Pl_2$	$+0.052Pl_2$
0.7	$-0.055Pl_2$	$0.214Pl_2$	$-0.069Pl_2$	$-0.120Pl_2$	$+0.048Pl_2$
0.9	$-0.004Pl_2$	$0.094Pl_2$	$-0.021Pl_2$	$-0.048Pl_2$	$+0.019Pl_2$

8.6 带等截面杆的简单刚架

简单刚架的分析，如同前面各节中讨论过的一样，也是利用 8.1 节中得到的斜率—挠度方程。本节讨论的刚架，与前述分析一样，我们也做了相同的简化，即忽略了轴力对刚架变形的影响。

例如，下面考虑在 A 点和 C 点铰接的对称刚架 ABC，载荷如图 8.24a 所示。忽略杆 BC 由于轴向压缩而引起的缩短，则在结点 B 没有位移，并且可以利用如方程(8.2)形式的斜率—挠度方程。对于 AB 杆，利用式(8.2a)，得到

$$\theta_B = \frac{M_{ba}l}{3EI} - \frac{ql^3}{24EI}$$

对于 BC 杆

$$\theta_B = \frac{M_{bc}l}{3EI}$$

上两式的角度相等并且可以看到，由结点 B 平衡，即 $M_{ba} = -M_{bc}$，得到

$$\frac{2M_{bc}l}{3EI} = -\frac{ql^3}{24EI}$$

由于杆端弯矩 M_{bc}与弯矩 M_B 相等，我们得到

$$M_B = \frac{ql^2}{16}$$

相应的弯矩图如图 8.24b 所示。

图 8.24

应该注意的是结点 B 的连续性条件被应用于推导三弯矩方程，我们建议在刚架分析时同样应用这个方程。将刚架 ABC 看成一个两跨的连续梁并且应用三弯矩方程[见式(8.7a)]，可直接得到

$$4M_B l = -\frac{ql^3}{4}$$

这里 M_B 值与前述计算值相同。

有了弯矩 M_B 的大小，从静力学方程便可得到 AB 杆和 BC 杆的轴向压力以及相应的刚结点 B 的微小位移，这个微小位移在上述分析中被忽略。在引入二杆附加转角的基础上，使用这个位移，可以修正先前用式(8.3a)得出的 M_B。这个修正值通常很小，在多数实用计算中可以被忽略。

例如，图 8.25 所示载荷的对称刚架，没有侧向移动，并且三弯矩方程可以应用于计算刚结点 B 和 C 的弯矩。利用式(8.7)，由对称性知 $M_B = M_C$，可以得到

$$2M_B\left(\frac{hI_2}{I_1} + l\right) + M_B l = -\frac{3Pl^2}{8} \tag{a}$$

定义

$$\alpha = \frac{h}{l} \quad \frac{I_2}{I_1} = \gamma$$

得到

$$M_B = M_C = -\frac{3Pl}{8} \times \frac{1}{2\alpha\gamma + 3} \tag{b}$$

相应的弯矩图如图 8.25b 所示。

图　8.25

如果没有对称性，受载的刚架上部将会发生侧向移动，并且在计算刚结点的弯矩时，必须考虑这种位移。例如，如图 8.26a 所示，刚架上作用不对称载荷 P。为应用三弯矩方程求解该问题，首先我们假定有图示水平力 H，其大小足以阻止刚架的侧向移动。然后，依前所述，可从下面的三弯矩方程得到刚结点 B 和 C 的弯矩 M'_B 和 M'_C

$$\left.\begin{aligned} 2M'_B\left(\frac{h}{I_1} + \frac{l}{I_2}\right) + M'_C\frac{l}{I_2} &= -\frac{Pe(l^2 - e^2)}{I_2 l} \\ M'_B\frac{l}{I_2} + 2M'_C\left(\frac{l}{I_2} + \frac{h}{I_1}\right) &= -\frac{Pe(l-e)(2l-e)}{I_2 l} \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

当求得弯矩 M'_B 和 M'_C 后，可由静力学方程计算得到作用在横梁 BC 上的轴向力。假定弯矩 M'_B 和 M'_C 为正，这些力在图 8.26 中被标出。由平衡条件得到

$$H - \frac{M'_B}{h} + \frac{M'_C}{h} = 0$$

并且约束刚架侧向移动的力为

$$H = -\frac{M'_C - M'_B}{h} \tag{d}$$

当没有水平约束力 H 时，为得到弯矩 M_B 和 M_C 的值，考虑如图 8.26c 所示的附加问题。显然，通过将这个问题的解与如图 8.26c 所示的解进行叠加，就可以得到所求弯矩。对于图 8.26c 所示的情况，B 点和 C 点的弯矩，记为 M''_B 和 M''_C。可得到

$$\begin{aligned} M_B &= M'_B + M''_B \\ M_C &= M'_C + M''_C \end{aligned} \tag{e}$$

图 8.26

刚架在这种情况下的弯曲有非常简单的属性，因为由刚架的对称性，铰链 A 和 D 的水平反力必须等于 $H/2$。因此，

$$M''_B = -M''_C = -\frac{hH}{2}$$

将 H 的值代入(d)，得到

$$M''_B = -M''_C = -\frac{M'_C - M'_D}{2} \tag{f}$$

并且方程(e)给出

$$M_B = M_C = \frac{M'_B + M'_C}{2} \tag{g}$$

将方程(c)相加，可得弯矩 M'_B 和 M'_C 的和，这里给出

$$M'_B + M'_C = -\frac{3Pe(l-e)}{l[3+2(h/l)(I_2/I_1)]}$$

因此，所求解为

$$M_B = M_C = -\frac{3Pe(l-e)}{2l[3+2(h/l)(I_2/I_1)]} \tag{h}$$

在上述例子中，我们把两个如图 8.26a 和 c 所示的分离问题的解叠加，得到了所求解。在这两个问题的第一个问题中，限制了侧向移动，对于第二个问题，只考虑了侧向移动的影响。

但是，通过用斜率—挠度方程，能直接写出所有必要的方程，从而求解刚结点处的弯矩以及刚架的侧向位移。例如，对称刚架如图 8.27a 所示，假定在载荷 P 作用下，刚架上部有一向右的侧向位移 Δ。那么定义

$$k_1 = k_3 = \frac{EI_1}{l_1} \quad k_2 = \frac{EI_2}{l_2} \quad \theta = \frac{\Delta}{l_1} \tag{i}$$

我们写出如下斜率—挠度方程[见式(8.6)]

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= 2k_1\theta_b - 6k_1\theta \\ M_{ba} &= 4k_1\theta_b - 6k_1\theta \\ M_{bc} &= 2k_2(2\theta_b + \theta_c) + m_{bc} \\ M_{cb} &= 2k_2(2\theta_c + \theta_b) + m_{cb} \\ M_{cd} &= 4k_1\theta_c - 6k_1\theta \\ M_{dc} &= 2k_1\theta_c - 6k_1\theta \end{aligned}\right\} \tag{j}$$

这里所有的杆端弯矩都是用 θ_b、θ_c 和 θ 表示的。对于这些值的确定，首先注意到

$$M_{ba} = -M_{bc} \quad M_{cb} = -M_{cd}$$

将(j)式代入上式后，变为

$$\begin{aligned} 4(k_1 + k_2)\theta_b + 2k_2\theta_c &= 6k_1\theta - m_{bc} \\ 2k_2\theta_b + 4(k_1 + k_2)\theta_c &= 6k_1\theta - m_{cb} \end{aligned} \tag{k}$$

为了得到第三个方程，在通过刚架的两个垂直杆传递的水平力作用下，考虑横梁 BC 的平衡。由杆端弯矩作用在竖直杆 AB 上(见图 8.27b)，可推断出在 A 点和 B 点必有水平剪力

a)　　b)　　c)

图　8.27

$$H = \frac{M_{ba} + M_{ab}}{l_1} \tag{l}$$

同理，对于 CD 部分，可得到

$$H_1 = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{l_1} \tag{m}$$

由梁 BC 的平衡条件，可推出

$$H + H_1 = \frac{l}{l_1}(M_{ba} + M_{ab} + M_{cd} + M_{dc}) = 0$$

将式(j)中的杆端弯矩代入上式，可得

$$\theta_b + \theta_c = 4\theta \tag{n}$$

由方程(k)和(n)，可确定 θ_b、θ_c 和 θ 三个量。他们分别为

$$\left.\begin{aligned}\theta_b &= -\frac{m_{bc}+m_{cb}}{2(k_1+6k_2)}+\frac{m_{cb}-m_{bc}}{4(2k_1+k_2)}\\ \theta_c &= -\frac{m_{bc}+m_{cb}}{2(k_1+6k_2)}-\frac{m_{cb}-m_{bc}}{4(2k_1+k_2)}\\ \theta &= -\frac{m_{bc}+m_{cb}}{4(k_1+6k_2)}\end{aligned}\right\} \tag{o}$$

对于图 8.27 所示载荷，可得到固端弯矩

$$m_{bc}=-\frac{Pe^2f}{l_2^2}\quad m_{cb}=-\frac{Pf^2e}{l_2^2}$$

方程(o)变为

$$\left.\begin{aligned}\theta_b &= \frac{Pef(e-f)}{2l_2^2(k_1+6k_2)}+\frac{Pef}{4l_2(2k_1+k_2)}\\ \theta_c &= \frac{Pef(e-f)}{2l_2^2(k_1+6k_2)}-\frac{Pef}{4l_2(2k_1+k_2)}\\ \theta &= \frac{Pef(e-f)}{4l_2^2(k_1+6k_2)}\end{aligned}\right\} \tag{p}$$

将这些值代入式(j)，可得

$$\left.\begin{aligned}M_{ab} &= -\frac{Pef(e-f)}{2l_2^2(1+6k_2/k_1)}+\frac{Pef}{2l_2(2+k_2/k_1)}\\ M_{bc} &= -M_{ba}=-\frac{Pef(e-f)}{2l_2^2(1+6k_2/k_1)}-\frac{Pef}{l_2(2+k_2/k_1)}\\ M_{cb} &= -M_{cd}=-\frac{Pef(e-f)}{2l_2^2(1+6k_2/k_1)}+\frac{Pef}{l_2(2+k_2/k_1)}\\ M_{dc} &= -\frac{Pef(e-f)}{2l_2^2(1+6k_2/k_1)}-\frac{Pef}{2l_2(2+k_2/k_1)}\end{aligned}\right\} \tag{q}$$

利用这些公式，可算出杆端弯矩，并且可以作出荷载 P 在任一位置时的弯矩图。由此看出各弯矩只由比值 k_2/k_1 决定，而与这些量的值无关。例如，$l_1=15\text{ft}$，$l_2=30\text{ft}$，$k_1=k_2$，$f=10\text{ft}$，$P=10\text{kip}$。那么由式(q)，可得到

$$M_{ab}=9.52\text{kip}\cdot\text{ft}\quad M_{bc}=-23.8\text{kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_{cb}=20.6\text{kip}\cdot\text{ft}\quad M_{dc}=-12.7\text{kip}\cdot\text{ft}$$

弯矩图如图 8.27c 所示。

为计算刚架上部的侧向位移 Δ，我们可以用方程(p)的最后一个关于转角 θ 的表达式。因此

$$\Delta=l_1\theta=\frac{Pef(e-f)l_1}{4k_1l_2^2(1+6k_2/k_1)} \tag{r}$$

由此可见，为得到 Δ 的数值，不仅需要比值 k_2/k_1，而且还需要 k_1 的值。假设 $E=288\ 000\text{kip/ft}^2$，$I_1=0.80\text{ft}^4$，那么

$$k_1=\frac{288\ 000\times0.80}{15}$$

并且由方程(r)，可得 $\Delta=0.0093\text{in}$。

在计算没有侧向约束的刚架的挠度时，经常使用下面的过程：首先假定没有侧向位移，计算杆端弯矩和剪力。然后假设有一特定的侧向位移，比如说 $\Delta=1\text{in}$，并且计算相应结点

的杆端弯矩和剪力。因为侧向位移的值是任意的，所以计算出的剪力值不能平衡对于有水平约束的刚架计算出的剪力。但是由于剪力与假定的 Δ 值成正比，对每一种特殊情况，可容易地找到一个数值系数，该系数与假定的 Δ 值相乘，使刚架达到所求的平衡。为了阐明这种计算方法，考虑非对称刚架，如图 8.28a 所示。首先考虑刚架受侧向约束并且假定 $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}k_3 = k$，由(8.6)式的斜率—挠度方程，得到杆端弯矩的下列表达式

图　8.28

$$\left.\begin{aligned} M'_{ab} &= 2k\theta_b + m_{ab} \\ M'_{ba} &= 4k\theta_b + m_{ba} \\ M'_{bc} &= 2k(2\theta_b + \theta_c) + m_{bc} \\ M'_{cb} &= 2k(2\theta_c + \theta_b) + m_{cb} \\ M'_{cd} &= 8k\theta_c + 4k\theta_d = 6k\theta_c \end{aligned}\right\} \qquad (s)$$

$$0 = 2\theta_d + \theta_c \quad \theta_d = -\frac{1}{2}\theta_c$$

那么，由条件

$$M_{ba} = -M_{bc} \quad M_{cb} = -M_{cd}$$

可得

$$\left.\begin{aligned} 4\theta_b + \theta_c &= -\frac{m_{ba} + m_{bc}}{2k} \\ \theta_b + 5\theta_c &= -\frac{m_{cb}}{2k} \end{aligned}\right\} \qquad (t)$$

代入 $l_1 = l_2 = 2l_3 = 20\text{ft}$，$P = 2Q = 20\text{kip}$。有

$$m_{ab} = -19.2\text{kip}\cdot\text{ft} \quad m_{ba} = 28.8\text{kip}\cdot\text{ft}$$
$$m_{bc} = -57.6\text{kip}\cdot\text{ft} \quad m_{cb} = 38.4\text{kip}\cdot\text{ft}$$

并且方程(t)给出

$$\theta_b = -\theta_c = \frac{4.8}{k} \quad \theta_d = \frac{2.4}{k}$$

利用结点的转角值，由方程(s)可得

$$\begin{aligned} &M'_{ab} = -9.6\text{kip}\cdot\text{ft} \quad M'_{ba} = -M'_{bc} = 48.0\text{kip}\cdot\text{ft} \\ &M'_{cb} = -M'_{cd} = 28.8\text{kip}\cdot\text{ft} \end{aligned} \qquad (u)$$

由垂直杆传到水平梁 BC 的水平力为

$$H = \frac{10\times 12}{20} + \frac{M'_{ab} + M'_{ba}}{l_1} = 7.92\text{kip}$$

$$H_1 = \frac{M'_{cd}}{l_3} = -2.88\text{kip}$$

这些水平力，如图 8.28b 所示，并不平衡，并且若无水平约束，水平杆 BC 将向右移动。

计算的第二步，去掉侧向约束和载荷 P 与 Q，假设 BC 梁向右移动 $\Delta = 0.1\text{ft}$。那么杆的各转角为

$$\theta_1=\frac{\Delta}{l_1}=\frac{1}{200}\quad \theta_2=0\quad \theta_3=\frac{\Delta}{l_3}=\frac{1}{100}$$

因此，斜率—挠度方程(8.6)变为

$$\left.\begin{aligned}M''_{ab}&=2k\theta_b-6k\theta_1=2k\theta_b-0.03k\\M''_{ba}&=4k\theta_b-6k\theta_1=4k\theta_b-0.03k\\M''_{bc}&=2k(2\theta_b+\theta_c)\\M''_{cb}&=2k(2\theta_c+\theta_b)\\M''_{cd}&=4k(2\theta_c+\theta_d)-12k\theta_3\end{aligned}\right\}\tag{v}$$

$$0=4k(2\theta_d+\theta_c)-12k\theta_3\quad \theta_d=\frac{1}{2}\theta_c+\frac{3}{2}\theta_3$$

将上面的杆端弯矩代入下面的条件

$$M''_{ba}=-M''_{bc}\quad M''_{cb}=-M''_{cd}$$

可得

$$4\theta_b+\theta_c=0.015$$
$$\theta_b+5\theta_c=0.030$$

由此解得

$$\theta_b=0.00237\quad \theta_c=0.00552$$

并且方程(v)给出

$$M''_{ab}=-0.0253k\quad M''_{ba}=-M''_{bc}=-0.0205k\quad M''_{cd}=-M''_{cb}=-0.0269k\tag{w}$$

作用在梁 BC 上的相应的轴力如图 8.28c 所示。由于位移的大小 $\Delta=0.1$ft 是任意的，所以通常这些力无法平衡图 8.28b 先前计算出的力。为了达到平衡，将假设的位移 Δ 乘以系数 x。此时图 8.28c 所示的轴力也要乘以 x，并且平衡条件变为

$$(0.00229k+0.00269k)x=(7.92-2.88)\text{kip}=5.04\text{kip}$$

由此可得

$$x=\frac{5.04}{0.00498k}$$

相应于刚架的实际侧向位移，实际的杆端弯矩将通过式(w)的值乘以 x 得到

$$M''_{ab}=xM''_{ab}=-25.6\text{kip}\cdot\text{ft}$$
$$M''_{ba}=-M''_{bc}=xM''_{ba}=-20.75\text{kip}\cdot\text{ft}$$
$$M''_{cd}=-M''_{cb}=xM''_{cd}=-27.2\text{kip}\cdot\text{ft}$$

将式(u)给出的弯矩进行叠加，可得实际杆端弯矩如下

$$M_{ab}=-9.6-25.6=-35.2\text{kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_{ba}=-M_{bc}=27.25\text{kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_{cd}=-M_{cb}=-56.0\text{kip}\cdot\text{ft}$$

有了这些杆端弯矩，如果要求画刚架的弯矩图，就可以画出来了。

习题

1. 画图 8.29 所示的对称刚架在对称荷载下的弯矩图。已知数据：$P=150$kip，$l=12$ft，$h=30$ft，$c=3.5$ft，$I_0/I_2=2$，$I_1/I_2=1/2$。

2. 对称刚架如图 8.25 所示，A 端和 D 端为固定端，代替集中载荷 P，沿梁 BC 有均布载荷，载荷集度为 q，当 $I_1=I_2$ 时，求各杆的杆端弯矩。
3. 如果 $q_0=0$，求图 8.30 所示刚架的弯矩 M_B。

图　8.29

图　8.30

4. 如果 $P=0$，求图 8.30 所示刚架的弯矩 M_B。
5. 如果梁 BC 沿着跨度的右半部分有均布载荷，刚架能自由移动，求图 8.26 所示刚架的弯矩 M_B 和 M_C。
6. 如果刚架侧向位移被约束，A 端和 D 端为固定端，求图 8.26 所示刚架中 A、B、C 和 D 各点的弯矩。
7. 如果沿着梁的右半部分有均布载荷，仍然求解上述问题。
   (提示：在上题的答案中，用 qde 代替 P，并从 0 到 $l/2$ 进行积分。)

8.7　带等截面杆的连续刚架

在前面各节中，我们研究了直接应用斜率—挠度方程来求解的一些简单刚架。在工程实际中，我们经常遇到如图 8.31 所示的系统。这些刚架比以前研究的刚架更复杂，并且在列出必要方程之前，需要作一些初步讨论。为此，我们将系统分成两组。在第一组中，包括图 8.31a 所示的刚架类型。因为铰链 a 是固定铰链，所有结点的位移被限制，只能考虑所有结点的转动。图 8.31b 中所示的情况，梁的 a 和 f 两端都可以在水平方向自由移动。因此由于杆件受弯，所以产生侧向移动。如图 8.31c 所示的刚架也产生侧向移动。在第二组的刚架分析中，计算通常分为两个步骤：第一步，假设由于一些约束的作用，侧向移动受到限制，只考虑结点的转动；第二步，单独研究侧向移动的影响。

图　8.31

在限制了侧向移动的刚架分析中推导出的方程中，取如图 8.31c 所示的结构，并且考虑典型结点 a，该结点通过杆 1、2、3、4 与周围的结点 b、c、d、e 相连。用 k_1、k_2、k_3、k_4 表示各杆的刚度系数，用 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 表示各杆的转角。可以得出在结点 a 相交的各杆的杆端弯矩[见式(8.6)]

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= 2k_1(2\theta_a + \theta_b) + m_{ab} \\ M_{ac} &= 2k_2(2\theta_a + \theta_c) + m_{ac} \\ M_{ad} &= 2k_3(2\theta_a + \theta_d) + m_{ad} \\ M_{ae} &= 2k_4(2\theta_a + \theta_e) + m_{ae} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

方程右端项的最后一项表示由作用在杆上的外力产生的固端弯矩。在每一种特定载荷下，这些固端弯矩很容易计算出来，或者通过查表求得。

式(a)中的杆端弯矩表示在杆上的作用，同样的弯矩，但是方向相反，则表示在结点 a 上的作用，并且由结点的平衡条件我们推导出

$$M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} + M_{ae} = 0 \tag{b}$$

那么将式(a)中的弯矩代入上式，将得到结点 a 的下列平衡方程

$$\begin{aligned} &4(k_1 + k_2 + k_3 + k_3 + k_4)\theta_a + 2k_1\theta_b + 2k_2\theta_c + 2k_3\theta_d + 2k_4\theta_e \\ &= -(m_{ab} + m_{ac} + m_{ad} + m_{ae}) \end{aligned} \tag{8.23a}$$

刚架的每一个结点都可以写出这样的方程，有多少个未知的转角，就有多少个这样的方程。所以，问题就简化为求线性代数方程组的解。解这个系统，我们得到转角的数值，然后代入式(a)，便可以计算出刚架所有杆件的杆端弯矩了。

在上述式(8.23a)的推导中，我们考虑了结点 a 有四个杆件相交，并且得到一个含有五个未知数的方程。结点只有三个杆件相交，将有四个未知数。对于结点 c 的情况，只能得到四个未知数，因为杆 cf 在 f 点固定，转角 θ_f 为零。如果在 f 点是铰链，除了杆端弯矩 M_{fc} 不为零，转角 θ_f 也不为零，可得到方程

$$0 = 2k_6(2\theta_f + \theta_c) + m_{fc}$$

因此

$$\theta_f = -\frac{1}{2}\theta_c - \frac{m_{fc}}{4k_6}$$

并且得到

$$M_{cf} = 2k_6(2\theta_c + \theta_f) + m_{cf} = 3k_6\theta_c - \frac{1}{2}m_{fc} + m_{cf}$$

结点 c 的平衡方程转化为

$$\begin{aligned} &4\left(k_5 + \frac{3}{4}k_6 + k_7 + k_2\right)\theta_c + 2k_2\theta_a + 2k_7\theta_h + 2k_5\theta_g \\ &= -\left(m_{ca} + m_{cg} + m_{ch} + m_{cf} - \frac{1}{2}m_{fc}\right) \end{aligned} \tag{8.23b}$$

将式(8.23b)与前面推导的式(8.23a)相比，可以看到，在考虑像结点 c 这样的平衡时，在远端处为铰支，用修正的刚度系数 $k' = \frac{3}{4}k$ 代替 k(见 8.2 节)。也就是说，修正的固端弯矩为

$$m'_{cf} = m_{cf} - \frac{1}{2}m_{fc}$$

上式适用于一端固定的杆和在式(8.23b)右端项中出现的其他简支形式。

上述方程式对于分析求解没有侧向移动的刚架是充分的。当刚架具有侧向移动时，我们仍需考虑分析的第二步。在第二步中，我们忽略了外载荷，只考虑由于刚架的侧向移动引起的各杆的转动。有如下方程形式

$$M_{mn}=2k(2\theta_m+\theta_n)-6k\theta_{mn}$$

在考虑结点平衡时，得到与式(8.23)类似的方程。惟一不同之处是方程右端的固端弯矩被替换了，例如 m_{mn} 被替换成 $-6k_i\theta_{mn}$。

下面来考虑图8.32a所示的情况，作为无侧向移动的连续刚架的分析实例。由于梁的两端在 a 和 c 固定，没有侧向移动，框架变形完全由转角 θ_b、θ_c、θ_d 决定。式(8.23a)形式的三个必要方程为

$$\left.\begin{aligned}&4(k_1+k_2+k_5)\theta_b+2k_2\theta_c=-(m_{ba}+m_{bc}+m_{bf})\\&4(k_2+k_3+k_6)\theta_c+2k_2\theta_b+2k_3\theta_d=-(m_{cb}+m_{cd}+m_{cg})\\&4(k_3+k_4+k_7)\theta_d+2k_3\theta_c=-(m_{dc}+m_{de}+m_{dh})\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

如果结构尺寸和作用载荷大小给出，可以计算出 k_i 和 m_{mn} 的数值。并且从方程(c)中得到三个与连续梁相同形式的线性数值方程，例如，假定

$$\left.\begin{aligned}&k_1=k_4\quad k_2=k_3=k_5=k_6=k_7=\frac{1}{2}k_1\\&l_1=l_4=h=l\quad l_2=l_3=2l\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

并且对于在 ae 整段梁上作用有载荷集度为 q 的均布载荷，有

$$\left.\begin{aligned}&m_{ab}=m_{de}=-m_{ba}=-m_{ed}=-\frac{ql^2}{12}\\&m_{bc}=m_{cd}=-m_{cb}=-m_{dc}=-\frac{ql^2}{3}\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

当然，对于没有横向载荷的立柱是没有固端弯矩的。那么式(c)变为

$$\left.\begin{aligned}&8k_1\theta_b+k_1\theta_c=\frac{ql^2}{4}\\&\theta_b+6\theta_c+\theta_d=0\\&k_1\theta_c+8k_1\theta_d=-\frac{ql^2}{4}\end{aligned}\right\}\tag{f}$$

可得到

$$\theta_b=-\theta_d=\frac{ql^2}{32k_1}\quad\theta_c=0$$

当然 $\theta_c=0$ 可以提前由对称性推导出来，并且式(f)的解出也稍微简化。有了转角，像上述式(a)一样，我们可得到方程的固端弯矩，并且得到

$$M_{ab}=-M_{ed}=-\frac{ql^2}{48}\quad M_{ba}=-M_{de}=\frac{5ql^2}{24}$$

$$M_{bc}=-M_{dc}=-\frac{13ql^2}{48}\quad M_{cb}=-M_{cd}=\frac{35ql^2}{96}$$

$$M_{bf}=-M_{dh}=\frac{ql^2}{16}$$

知道了这些杆端弯矩，就很容易画出刚架的弯矩图。

如果在 a 和 e 处(见图 8.32a)用固定铰链代替固定端，侧向移动再次受到约束，但是，对结点 b、d 用式(8.23b)，对结点 c 用式(8.23a)，那么代替式(c)，得到

$$\left.\begin{aligned}(3k_1+4k_2+4k_5)\theta_b+2k_2\theta_c&=-\left(m_{ba}+m_{bc}+m_{bf}-\frac{1}{2}m_{ab}\right)\\4(k_2+k_3+k_6)\theta_c+2k_2\theta_b+2k_3\theta_d&=-(m_{cb}+m_{cd}+m_{cg})\\(4k_3+3k_4+4k_7)\theta_d+2k_3\theta_c&=-\left(m_{dc}+m_{de}+m_{dh}-\frac{1}{2}m_{ed}\right)\end{aligned}\right\}\tag{g}$$

这些方程在每一种特定情况下很容易求解。

现在考虑刚架侧向自由移动的情况。例如，如图 8.32b 所示的刚架，假定只在前两跨有均布载荷。这种情况下，问题可以分为两步解决。首先，在 a 结点有侧向约束，利用式(g)和式(d)，我们得到方程组

图 8.32

$$7k_1\theta_b+k_1\theta_c=\frac{5ql^2}{24}$$

$$k_1\theta_b+6k_1\theta_c+k_1\theta_d=-\frac{ql^2}{3}$$

$$k_1\theta_c+7k_1\theta_d=0$$

从而解出

$$\theta_b=0.0388\frac{ql^2}{k_1}\quad\theta_c=-0.0635\frac{ql^2}{k_1}\quad\theta_d=0.00908\frac{ql^2}{k_1}$$

现在，利用类似于式(a)的方程，计算所有的杆端弯矩。对于立柱，可得到

$$M_{bf}=2M_{fb}=2k_1\theta_b\quad M_{cg}=2M_{gc}=2k_1\theta_c$$
$$M_{dh}=2M_{hd}=2k_1\theta_d$$

那么，立柱上部相应的剪力为(见图 8.27b 中的方向)

$$H_{bf}=\frac{3k_1\theta_b}{h}\quad H_{cg}=\frac{3k_1\theta_c}{h}\quad H_{dh}=\frac{3k_1\theta_d}{h}$$

并且方向为从左向右为正，则所有传递到梁的水平力为

$$\frac{3k_1}{h}(\theta_b+\theta_c+\theta_d)=-0.0156\frac{3ql^2}{h}\tag{h}$$

负号表示这个力的方向从右向左，并且为防止侧向移动，作用在点 a 的力 H 必须如图 8.32b

所示。

在第二步计算中，我们忽略外力，只考虑侧向移动的影响。假定梁 ae 向左移动了一个 Δ，我们得出框架的 1、2、3…各杆的转角如下

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$$

$$\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta = -\frac{\Delta}{h}$$

梁的斜率—挠度方程有如下形式

$$M_{mn} = 2k(2\theta_m + \theta_n) \quad M_{nm} = 2k(2\theta_n + \theta_m)$$

对于立柱，斜率—挠度方程形式为

$$\left.\begin{aligned} M_{mn} &= 2k(2\theta_m + \theta_n) - 6k\theta \\ M_{nm} &= 2k(2\theta_n + \theta_m) - 6k\theta \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

那么按照前面的解释，写出结点 b、c、d 的平衡方程，得到方程

$$(3k_1 + 4k_2 + 4k_5)\theta_b + 2k_2\theta_c = 6k_5\theta$$

$$4(k_2 + k_3 + k_6)\theta_c + 2k_2\theta_b + 2k_3\theta_d = 6k_6\theta$$

$$(4k_3 + 3k_4 + 4k_7)\theta_d + 2k_3\theta_c = 6k_7\theta$$

按照前面给定的式(d)的几何比例，这些方程为

$$\left.\begin{aligned} 7\theta_b + \theta_c &= 3\theta \\ \theta_b + 6\theta_c + \theta_d &= 3\theta \\ \theta_c + 7\theta_d &= 3\theta \end{aligned}\right\} \tag{j}$$

由此可解出 θ_b、θ_c、θ_d。立柱的杆端弯矩将由方程(i)求出，得到

$$M_{bf} = 2k_1\theta_b - 3k_1\theta \quad M_{fb} = k_1\theta_b - 3k_1\theta$$

$$M_{cg} = 2k_1\theta_c - 3k_1\theta \quad M_{gc} = k_1\theta_c - 3k_1\theta$$

$$M_{dh} = 2k_1\theta_d - 3k_1\theta \quad M_{hd} = k_1\theta_d - 3k_1\theta$$

求出立柱的杆端弯矩值后，计算作用在梁 ae 上的水平力

$$H_{bf} = \frac{M_{bf} + M_{fb}}{h} = \frac{3k_1(\theta_b - 2\theta)}{h}$$

$$H_{cg} = \frac{3k_1(\theta_c - 2\theta)}{h} \quad H_{dh} = \frac{3k_1(\theta_d - 2\theta)}{h}$$

那么作用在梁上的总的水平力是(方向从左向右为正)

$$H = H_{bf} + H_{cg} + H_{dh} = \frac{3k_1}{h}(\theta_b + \theta_c + \theta_d - 6\theta) \tag{k}$$

为得到求 $\theta_b + \theta_c + \theta_d$ 的和，将式(k)与式(j)相加得到

$$\theta_b + \theta_c + \theta_d = \frac{9}{8}\theta$$

那么由式(k)，得出

$$H = -\frac{3k_1}{h} \times \frac{39}{8}\theta = \frac{3k_1}{h^2}\frac{39}{8}\Delta$$

将上述结果和假定侧向约束得到的式(h)的解，代入梁 ae 的平衡条件，得到侧向移动 Δ

$$-0.0156\frac{3ql^2}{h} + \frac{3k_1}{h^2} \times \frac{39}{8}\Delta = 0$$

由这个方程我们得到

$$\frac{\Delta}{h} = -\theta = \frac{ql^2}{312k_1}$$

已知 θ 的值，现在我们由式(j)得到

$$\theta_b = \theta_c = \theta_d = -\frac{ql^2}{832k_1} \tag{l}$$

由于这些角度已知，相应于刚架的侧向移动的杆端弯矩很容易求解出来。至此，第二步计算完成。

为了得到全部的杆端弯矩，对于有侧向约束的刚架，必须将先前计算的由侧向移动产生的弯矩叠加。例如，假设 $q = 1\text{kip/ft}$ 且 $l = 12\text{ft}$，利用在第一步分析中计算得到的转角 θ_b、θ_c、θ_d，得到

$$\left.\begin{aligned} M'_{ba} &= 34.8\text{kip}\cdot\text{ft} \quad M'_{bc} = -46.0\text{kip}\cdot\text{ft} \\ M'_{cd} &= -17.0\text{kip}\cdot\text{ft} \quad M'_{cb} = 35.3\text{kip}\cdot\text{ft} \\ M'_{de} &= -6.57\text{kip}\cdot\text{ft} \quad M'_{de} = 3.92\text{kip}\cdot\text{ft} \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

利用式(l)中的角度，作为侧向移动的结果，可得到

$$M''_{ba} = M''_{bc} = M''_{cb} = M''_{cd} = M''_{de} = M''_{de} = -\frac{3ql^2}{832} = -0.519\text{kip}\cdot\text{ft} \tag{n}$$

将式(m)和式(n)的弯矩相加，得到梁的总弯矩。可以看到在这种情况下，侧向移动对杆端弯矩只有很小的影响。

习题

1. 画图 8.33a 所示梁 bac 在均布载荷作用下的弯矩图。b 端和 c 端为固定端，梁和柱连接处 a 为刚性连接。假定刚性系数 $k_2 = k_3 = 0.8k_1$，并且载荷 $q = 1\text{kip/ft}$。

图 8.33

2. 计算图 8.34 所示刚架在载荷 P 和 Q 作用下产生的弯矩。已知数据如下：$h = l = 16\text{ft}$，$f = 6\text{ft}$，$k_1 = k_2$。

3. 两跨的固定刚架如图 8.35 所示，有水平均布载荷作用其上，载荷集度为 q，如果 $h=l=12\text{ft}$ 且 $q=1\text{kip/ft}$，画刚架的弯矩图。所有杆的刚度系数都为 k。
4. 画如图 8.36 所示的对称三层刚架在水平载荷作用下的弯矩图。每个杆的刚度系数如图所示，单位：kip · ft。注意最底层的立柱在 a 和 h 为铰链连接。

图　8.34

图　8.35

图　8.36

8.8　力矩分配法

在前面各节中我们看到带刚结点的刚架结构分析需要求解线性代数方程组。有时这些方程与连续梁分析的三弯矩方程有相同形式并很容易求解。然而，在很多情况下，得到的是更加复杂的方程组，它们的解也很麻烦。在这种情况下，连续近似的方法可能更胜一筹。这里介绍的这种理想的特殊方法叫力矩分配法。它有一个简单的物理意义并在超静定刚架结构分析中广泛应用。

为描述其过程，考虑如图 8.37 所示结构。前面已经指出，带四个固定端的刚架的变形完全由结点 a 的转角 θ_a 定义，并且这个角度的求解只需一个方程。为了列出这个方程，观察到作用在结点 a 上的弯矩的总和必须为零。因此

$$M_{ab}+M_{ac}+M_{ad}+M_{ae}=0 \tag{a}$$

现在，利用斜率—挠度方程，得到 a 点的杆端弯矩

$$\left.\begin{aligned} M_{ab}&=4k_1\theta_a+m_{ab} \quad & M_{ac}&=4k_2\theta_a+m_{ac}\\ M_{ad}&=4k_3\theta_a+m_{ad} \quad & M_{ae}&=4k_4\theta_a+m_{ae}\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

图　8.37

利用上述表达式，式(a)变为

$$4\theta_a(k_1+k_2+k_3+k_4)=-(m_{ab}+m_{ac}+m_{ad}+m_{ae})=M_a$$

这里，引入标记 M_a 表示与固端弯矩总和相反的弯矩。由这个式子，得

$$\theta_a=\frac{M_a}{4(k_1+k_2+k_3+k_4)} \tag{8.24}$$

把式(8.24)代入式(b)，得

$$\left.\begin{aligned}
M_{ab} &= m_{ab} + \frac{k_1}{k_1+k_2+k_3+k_4}M_a \\
M_{ac} &= m_{ac} + \frac{k_2}{k_1+k_2+k_3+k_4}M_a \\
M_{ad} &= m_{ad} + \frac{k_3}{k_1+k_2+k_3+k_4}M_a \\
M_{ae} &= m_{ae} + \frac{k_4}{k_1+k_2+k_3+k_4}M_a
\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

可以看到在结点 a 处的每个杆端弯矩由两部分组成：

(1) 固端弯矩，它在各个特定载荷工况下可以容易地计算出或者从表中查到。

(2) M_a弯矩的一部分，它可以把结点 a 处的固端弯矩求代数和而得到，但符号相反。该力矩表示被约束时在结点 a 上作用的反力矩的和，称作结点的不平衡力矩。我们从式(c)可以看到由于结点 a 的转动，不平衡力矩按刚度系数 k_1、k_2、…的比例在结构单元中自行分配。比例关系为

$$\left.\begin{aligned}
r_{ab} &= \frac{k_1}{k_1+k_2+k_3+k_4} \quad r_{ac} = \frac{k_2}{k_1+k_2+k_3+k_4} \\
r_{ad} &= \frac{k_3}{k_1+k_2+k_3+k_4} \quad r_{ae} = \frac{k_4}{k_1+k_2+k_3+k_4}
\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

式(c)中与不平衡力矩 M_a相乘的部分称为分配系数，用 r_{ab}、r_{ac}、…表示。可以看出分配系数的大小与载荷无关，并且当结构尺寸已知时很容易算出，还可以看出计算过程中仅仅引入了刚度系数 k 的比率。因此可以用任何这些系数的比例代替其准确数值。

随着不平衡力矩和分配系数概念的引入，可以用一种更加紧凑的形式来重新写出如图 8.37 所示的问题的解，并且给出有助于下面讨论的物理解释。首先假设 a 点被某种约束固定而不能转动，计算或者从做好的表格中得出固端弯矩。在结点 a 所有弯矩的总和表示防止其转动在结点上施加的约束力矩，松开结点等价于施加不平衡力矩，其大小与约束力矩相等，方向与其相反。不平衡力矩在交于结点 a 的各部分间按分配系数[见式(d)]的比例进行分配。那么，结点 a 处的最终杆端弯矩是将前边由式(c)计算的固端弯矩和分配力矩相叠加得到的。

式(c)给出了结点 a 的杆端弯矩。考虑杆件远端的杆端弯矩，看出当分配力矩 $r_{ab}M_a$作用于杆 1 的 a 端时，大小为$\frac{1}{2}r_{ab}M_a$ 的力矩传递到杆的另一个末端 b。b 端最终的杆端弯矩为

$$M_{ba} = m_{ba} + \frac{1}{2}r_{ab}M_a$$

其他杆件的远端弯矩可用相似的方法计算得到。

前面讨论中，是假设在 a 相交的所有杆件的远端都是固定的。如果其中的 1 个杆件，比如杆 1，在 b 点铰接，就必须考虑不平衡力矩 M_a的分配，并且在计算分配系数[见式(d)]时引入修正刚度系数 $3k_1/4$ 来代替 k_1(见 8.2 节)。同时指出如果远端 b 是铰接(见 8.7 节)，必须采用修正的固端弯矩

$$m'_{ab} = m_{ab} - \frac{1}{2}m_{ba}$$

前面在分析如图 8.37 所示刚架结构用到的力矩分配过程很简单，因为只有结点 a 是可以自由转动的。然而这个方法可以很容易地扩展到几个结点都可以转动的更普遍的例子中去。举例说明，重新考虑如图 8.32a 所示的结构，首先假设三个结点 b、c、d 都被约束，因此可以计算固端弯矩和不平衡力矩 $\boldsymbol{M}_b$、$\boldsymbol{M}_c$ 和 $\boldsymbol{M}_d$。现在放松结点 c，根据式(c)把不平衡力矩 $\boldsymbol{M}_c$ 在杆件 2、3、6 上分配。因此，对于结点 c 的起始固端弯矩，加上了修正量

$$M'_{cb} = r_{cb}\boldsymbol{M}_c \quad M'_{cd} = r_{cd}\boldsymbol{M}_c \quad M'_{cg} = r_{cg}\boldsymbol{M}_c \tag{e}$$

在放松 c 结点的过程中，临近结点 b、d 和 g 被看作是固定的。因此，大小为 $M'_{cb}/2$，$M'_{cd}/2$，$M'_{cg}/2$ 的力矩被分别传递到杆件 2、3、6 的远端，在远端这些传递的力矩必须同这些杆的固端弯矩代数相加。再考虑下一个结点 b，我们必须分配力矩 $\boldsymbol{M}_b - M'_{cb}/2$，其中的第二项表示从前面结点 c 传递过来的力矩。因而，在结点 b 的分配力矩为

$$\left.\begin{aligned} M'_{ba} &= r_{ba}\left(\boldsymbol{M}_b - \frac{1}{2}M'_{cb}\right) \\ M'_{bc} &= r_{bc}\left(\boldsymbol{M}_b - \frac{1}{2}M'_{cb}\right) \\ M'_{bf} &= r_{bf}\left(\boldsymbol{M}_b - \frac{1}{2}M'_{cb}\right) \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

结点 d 的分配力矩的相似方程也可以写出。所有这些力矩表示对初始计算的固端弯矩的第一次修正。为了得到第二次修正，再次从结点 c 开始。

在放松结点 b 和 d 的过程中，力矩 $M'_{bc}/2$ 和 $M'_{dc}/2$ 被传递到结点 c，并且大小为 $-\frac{1}{2}(M'_{bc} + M'_{dc})$ 的不平衡力矩也相应产生了。分配这个力矩，得到了结点 c 杆端弯矩的第二次修正值。然后就可以计算结点 b 和结点 d 杆端弯矩的修正值，并在放松结点 c 的过程中，分配这些结点上产生的不平衡力矩。为了计算第三次修正值，可再次从结点 c 开始，步骤同前。连续修正值必须计算到小的可以忽略不计。通过把所有后续修正值加到第一次近似值上，最后得到有足够精度的杆端弯矩。

回顾所描述的连续近似的方法，我们看到计算过程包含对不平衡力矩分配的重复简单计算和将力矩传递到邻近结点的过程。在每种特定情况下，首先假定除了铰接端的所有结点都被约束，然后在这个假设基础上计算结构所有杆件的固端弯矩。每个带正负号的结点弯矩的总和，就是不平衡力矩。对于每个结点，也计算出相交于结点的各杆件的分配系数。在前期工作完成后，首先要找到不平衡力矩最大的结点。放松该结点，将力矩分配到相交于该结点的各杆件上。在前面的例子中，该结点是指结点 c，通过式(e)完成对力矩 $\boldsymbol{M}_c$ 的分配。现在把力矩传递到相邻结点，增加结点的不平衡力矩使之大小等于传递过来的力矩，并带负号。用类似于式(e)的方程再次分配得到的总和。当所有结点的力矩分配完成时，通过在先前的固端弯矩上增加分配力矩，得到杆端弯矩的第二次近似。为得到第二次修正值，可重复力矩分配过程，但是这次仅仅分配保留在第一轮计算之后的传递力矩，依此类推。

由于我们总在重复相同的简单计算，则没有必要写出先前讨论的方程，而是按照结构轮廓图中正确的次序来计算。举例来说，如图 8.38 所示的连续梁。假定在支座 a、b 和 c 处，梁的横截面不能转动，在支座 d 处可以自由转动，得到面端弯矩，单位是 kip-feet，如与图

相对应的表中第一行数据。计算分配系数时，假定 $k_{ab}=k_{bc}=\frac{9}{8}k_{cd}$，有

$$r_{ba}=r_{bc}=\frac{k_{ab}}{k_{ab}+k_{bc}}=0.5$$

$$r_{cb}=\frac{k_{cb}}{k_{cb}+\frac{3}{4}k_{cd}}=0.6 \quad r_{cd}=\frac{\frac{3}{4}k_{cd}}{k_{cb}+\frac{3}{4}k_{cd}}=0.4$$

在这次计算中，观察到杆 cd 的 d 端可以自由转动，在算式中引入$\frac{3}{4}k_{cd}$代替 k_{cd}。分配系数的计算值显示在表格中。现在从结点 c 开始，该结点的不平衡力矩是

$$-(24.0-48.0)=+24\text{kip}\cdot\text{ft}$$

按照分配系数 r_{cd} 和 r_{cb} 在杆件 cd 和 cb 间分配力矩，可得到结点 c 的分配力矩，等于 +9.6kip·ft和 +14.4kip·ft。再考虑结点 b，发现该结点的固端弯矩互相平衡，仅仅需要考虑 -7.2kip·ft 的力矩，其大小等于放松结点 c 产生的传递力矩 7.2kip·ft，符号与之相反。该力矩又被单元 bc 和 ba 等分，得到在结点 b 的分配力矩各自等于 -3.6kip·ft。现在考虑结点 a，看到结点 a 固定，可以推断出作用于结点 b 的 -3.6kip·ft 的修正力矩在固定端产生了 -1.8kip·ft 的传递力矩。所有重分配的力矩显示在图 8.38 的第二和第三行，这些修正值下固的粗水平线说明第一轮计算循环完毕。第二轮循环我们还是从结点 c 开始。考虑到放松结点 b 产生的 -1.8kip·ft 的传递力矩，在结点 c 就有了 +1.8kip·ft 的不平衡力矩。把该力矩在单元 cd 和 cb 间分配，则得到 +0.72kip·ft 和 +1.08kip·ft 的修正值。现在考虑结点 b，必须分配的力矩等于传递力矩 +0.54kip·ft 的相反值，即 -0.54kip·ft，该力矩也给出了两个为 -0.27 的修正值。最后在固定端得到 -0.14 的修正值。我们看到这个修正值已经很小了，可以限定计算在两次循环以内。第三轮计算也显示在图中，双线下给出了杆端弯矩的最后结果，大小等于最初的固端弯矩和所有修正值的总和。

图 8.38

第二个例子，考虑图 8.32b 所示的连续刚架。首先假定刚架侧向位移受到约束，也设定结构各参数同式(d)一致，$l=12\text{ft}$，$q=1\text{kip/ft}$。有了这些数据，可以计算分配系数，如图 8.39 所示。先来计算固端弯矩，假定结点 b、c 和 d 被约束，结点 a 和 e 铰接。力矩的计算数值如图 8.39 的表中第一个水平线上方给出。从结点 c 开始对不平衡力矩分配，因为该点的不平衡力矩值达到最大。在结点 c 的分配结果的在第二个水平行和 cg 列右边的第二个竖

列中给出。现在考虑结点 b 和 d 的力矩分配为结点 b 和 d 上的第三个水平行和 bf 和 dh 列右边的数据。这就完成了第一轮的计算，结果是图 8.39 所示带下划线的数据。第二轮计算还是从结点 c 开始，c 点有不平衡力矩 $-(5.43+1.15)$。c 点第二轮分配的结果和 b、d 点第二轮分配的结果一起，再次在表中由下划线表示出来。表中也记录了第三轮计算循环，第三轮计算仅仅对杆端弯矩作了很小的修正；因此，我们推导完该轮计算后，把初始计算的固端弯矩和给出的所要求的杆端弯矩的所有修正值求和后，记到表中的双线下。这与前面通过斜率—挠度方程直接求解得到的数值结果相同。

图　8.39

连续近似的方法还可应用到侧向自由移动的连续刚架中。还考虑如图 8.32b 所示的例子，立柱的杆端弯矩在横梁 ae 产生了从右到左的水平剪切作用，方程为

$$-\frac{3}{2}\frac{M_{bf}+M_{cg}+M_{dh}}{h}=\frac{-11.9+18.30-2.62}{8}=561\text{lbf} \tag{g}$$

为防止水平移动，必须施加大小相等从左到右的水平外力。如果没有这样的力，刚架就会侧向自由移动，刚架将向左移动适当的量以使立柱顶部产生的剪力足以平衡上面计算的力，见式(g)。在讨论只有侧向位移产生的杆端弯矩和剪力时，必须首先假定结点 b、c 和 d 在移动过程中不转动。接下来，在立柱 bf、cg 和 dh 的杆端将产生杆端弯矩 $-6k_{bf}\theta_{bf}$，$-6k_{cg}\theta_{cg}$ 和 $-6k_{dh}\theta_{dh}$[见 8.7 节中方程(i)]。在我们的算例中，因为所有立柱的刚度系数和转角都相等，所以所有杆端弯矩都相等。由于事先不知道位移的大小，开始计算时先假定杆端弯矩大小为

$$6k_{bf}\theta_{bf}=6k_{cg}\theta_{cg}=6k_{dh}\theta_{dh}=-1.000\text{kip}\cdot\text{ft}$$

相应的杆端弯矩在图 8.40 所示第一个垂直线右列。可以看出，结点 b、c、d 处有等于 1000kip · ft 的不平衡力矩。按照通常方法分配力矩，最后得到杆端弯矩的数值写到双线下。有了这些力矩值，当计算立柱的剪力，发现作用在梁 ae 段的总水平力方向从右到左，大小是

$$3\frac{(0.875+0.750)\text{kip}\cdot\text{ft}}{12}=406\text{lbf}$$

可以看出，为了平衡式(g)给出的水平力，必须采用以下数值代替先前假定值 1kip · ft

$$6k_{bf}\theta_{bf}=6k_{cg}\theta_{cg}=6k_{dh}\theta_{dh}=-1.000\times\frac{561}{406}\text{kip}\cdot\text{ft}=-1.38\text{kip}\cdot\text{ft}$$

图 8.40

因而，通过将图 8.40 给出的值乘以系数 -1.38，得到由于侧向位移引起的杆端弯矩。这样，可得到

$$M_{ba}=M_{bc}=M_{cb}=M_{cd}=M_{dc}=M_{de}=-0.375(1.38)=-0.518\text{kip}\cdot\text{ft}$$

这个结果与前面通过结点平衡方程直接求解得到的结果[见 8.7 节中方程(n)]相同。

习题

1. 使用力矩分配法，构建图 8.41a 所示连续梁的弯矩图表。假定 $P=40\text{kip}$，刚度系数如图中所示。
2. 用力矩分配法，构建图 8.41b 所示连续梁的弯矩图表。假定 $P=16\text{kip}$，$q=2\text{kip/ft}$，惯性矩是 $I_1=I_2=\frac{27}{32}I_3$。

图 8.41

3. 使用力矩分配法，计算图 8.42a 所示刚架结构的所有杆端弯矩，假定所有杆件刚度都为 EI。
4. 如图 8.42b 所示的刚架结构，加载后梁的固端弯矩是 $m_{bc}=-20.0\text{kip}\cdot\text{ft}$，$m_{cb}=+24.0\text{kip}\cdot\text{ft}$，$b$ 点修正后的固端弯矩是 $m'_{ba}=m_{ba}-\frac{1}{2}m_{ab}=+50.0\text{kip}\cdot\text{ft}$。不同杆件的刚度系数如图所示，有 $k=1000\text{kip}\cdot\text{ft}$。试计算刚架侧向移动的大小。
5. 如图 8.43a 所示的简单刚架对所有三个杆件有刚度 $EI=10\times10^6\text{lbf}\cdot\text{in}^2$，$l=100\text{in}$。立柱在 a 和 d 处固定。试计算作用在 c 点的水平力 $P=60.0\text{lbf}$ 引起的侧向位移的大小。
6. 如图 8.43b 所示的刚架底端 a 点受到弹性约束，所以每受到 30kip·ft 的 M_{ab} 力矩作用就

图　8.42

图　8.43

转过 0.0001rad，使用力矩分配法，求出由于垂直载荷 $P=10$kip 作用而产生的杆端弯矩的大小。

8.9　建筑物刚架分析

在建筑物刚架设计中，通常必须分析如图 8.44 所示的这类复杂结构。问题的解通常分成两部分：①假设没有侧向位移，计算垂直载荷产生的杆端弯矩；②加上侧向位移后，计算侧向力和竖直载荷一起产生的杆端弯矩。

图　8.44

假设没有侧向位移，就采用前一节所讲的力矩分配法，利用已知尺寸的杆件，计算相交于每个结点的各杆件的分配系数和实际载荷产生的固端弯矩。当准备工作结束以后，利用前一节中已经讨论过的方法对不平衡力矩进行分配。

如果载荷只作用在单跨梁上，认为当结点距离受载跨越来越远时，杆端弯矩迅速减小。利用这个事实，可简化计算，只取邻近受载杆件的部分结构进行计算，而不必计算整体刚架。例如，如图 8.44 所示，载荷只作用在 ab 跨。如果只考虑图 8.45a 给出的部分刚架，假设上端结点 m、n、o，底端结点 e、f、g 以及结点 d 都固定，可以得到该问题的近似解。假设固端弯矩和分配系数的数值如图，第一轮计算结果用粗线在图中第二行和第三行画出。图中也显示出了第二轮和第三轮的

计算结果，最后的杆端弯矩结果在双线下给出。

如果要求结点 a 和 b 处更为精确的杆端弯矩，结点 m、n、e、f 的转角对杆端弯矩的影响必须予以考虑。图 8.45b 给出了这个计算过程。由前面计算得出杆端弯矩 $M_{ab}=-13.14$，$M_{ae}=+7.89$，$M_{am}=+5.26$ 开始，那么图中标注在第一行的数字为结点 m 和 e 处的传递力矩，分别为 +2.63 和 +3.95。因此，结点 m 和 e 处有不平衡力矩 -2.63 和 -3.95。放松这些结点，假设 $r_{ma}=1/3$，$r_{ea}=3/13$，分配这些力矩并发现力矩在结点 a 处为 -0.44 和 -0.46，如第二行竖线所示。通过分配结点 a 处对应的不平衡力矩 +(0.46 +0.44)，最终可得到结点 a 处的正确杆端弯矩，记于双划线下。同理，可得结点 b 处的杆端弯矩。在结构没有侧向位移的假设下，计算出所有立柱的杆端弯矩的数值之后，再来计算作用在建筑物每层的水平力。

图 8.45

下面将用一个简单的例子解释如何计算水平力产生的杆端弯矩。如图 8.46 所示是一个对称的三层受载刚架。首先讨论图 8.47 所示的三个辅助问题，假设每个问题中只有一层存在相对水平位移。如图 8.47a 所示，首先假设刚架的上部有水平位移，没有任何弯曲的。要产生这样的位移，必须在 b 点加上适当的水平力。并且在结点 b 和 f 施加防止这些结点任何转动的力矩。如果 Δ_1 是这个位移的大小，那么第一层柱顶的杆端弯矩为

$$M_{ba}=M_{fe}=-3k_{ab}\frac{\Delta_1}{h_1}$$

为了进一步计算，假设这些力矩的数假为 $M_{ba}=M_{fe}=-9\text{kip}\cdot\text{ft}$。现在假设框架结点的任何侧向位移被特殊约束阻止，放松结点

图 8.46

图　8.47

b、f。在计算由结点转动产生的杆端弯矩时，从对称性观察到横梁的中间有拐点。假设拐点处存在铰链，并且如图 8.48a 所示，只考虑一半框架。这样，如图 8.47 所示的那些正比于横梁刚度系数的数字必须乘以 2，这些数值的 3/4 被用来计算分配系数。图 8.48a 标出了这些系数值。由 b 点开始计算，假设 b 点不平衡力矩为 9kip · ft，通常可得所有杆端弯矩，它们被写在图 8.48a 所示的双划线下。有了这些力矩，通过静力学方程很容易得出所有立柱的剪力和作用在横梁上的水平力。图 8.47a 给出了单位为 kip 的这些水平力。综上所得，水平力必须作用在结点 b、c、d 处，以保持刚架在放松结点后处于给定位移的位置。图 8.47a 给出了这些力。

考虑图 8.47b 的问题，假设在结点 b、c、g、f 作用适当的水平力和力矩，使上层刚架对下层刚架有相对位移，因而只有立柱 bc 和 fg 承受弯曲。假如 Δ_2 表示水平位移，那么立柱的杆端弯矩为

$$M_{bc}=M_{cb}=M_{fg}=M_{gf}=-6k_{bc}\frac{\Delta_2}{h}$$

给定这些力矩一个任意值，比如 −10kip · ft，并且假设刚架在位移后的位置没有侧向移动，放松结点并像通常一样计算杆端弯矩和水平剪力。图 8.48b 给出了这些力矩，产生假想水平位移 Δ_2 需要的剪力和水平力如图 8.47b 所示。图 8.47c 中的问题可以用相同的方法解决。假设立柱 cd 和柱 gh 的杆端弯矩为 −6kip · ft，我们分别得到如图 8.48c 和图 8.47c 所示的端部或杆端弯矩和水平剪力值。

在解决了图 8.47 中的三个补充问题后，可结合这些解得到图 8.46 所示水平力作用的结果。显然，假如在补充问题中假定的位移 Δ_1、Δ_2、Δ_3 以一定的比例改变，相应的水平力以同样的比例改变。现在假设位移是 $\Delta_1 x$、$\Delta_2 y$、$\Delta_3 z$，并且选择数值 x、y、z，使对应于这些位移的水平力叠加后等于实际水平力。为此，只要用图 8.47a、b、c 中给出的水平力分别乘以 x、y、z，叠加后得到的合力等于图 8.46 所示的实际水平力。于是得到方程组

$$\begin{aligned}0.051x-0.392y+1.184z&=4\\-0.521x+2.386y-1.576z&=8\\1.336x-2.229y+0.417z&=8\end{aligned}\qquad\text{(a)}$$

解出 $x=26.61$，$y=13.63$，$z=6.75$。要计算如图 8.46 所示刚架中各杆的实际杆端弯矩，必须对图 8.48a、b、c 给出的力矩分别乘以 x、y、z，然后叠加得到结果

图 8.48

$$M_{ba} = (-6.928 \times 26.61 + 1.882 \times 13.63 - 0.202 \times 6.75)\text{kip} \cdot \text{ft} = -160.1\text{kip} \cdot \text{ft} \quad \text{(b)}$$

要校核结果，观察到例子中总的水平载荷(4+8+8)kip·ft=20kip·ft 被两个支座 a 和 e 均分。因此，M_{ba}的真实值为(−10×16)kip·ft=−160kip·ft。利用相似于式(b)的方程，可得立柱的剩余杆端弯矩如下：$M_{bc}=-25.3$kip·ft，$M_{ch}=-46.7$kip·ft，$M_{cd}=-7.8$kip·ft，$M_{dc}=-16.1$kip·ft。

这里已经分析了(见图 8.46)三层框架，但该方法可用子分析任意层数的框架。随着层数的增加，类似于式(a)的平衡方程组自然也随之增加，所需要的计算量也将随之变大。然而，要得到一个满意的近似解，不必同时考虑刚架的所有层。假设某层在离变形层越来越远时，该层侧向变形对杆端弯矩的影响将迅速消失。因此，每次只需考虑三个连续层，就能得到满意的近似解。在分析如图 8.44 所示的建筑物框架结构的侧向变形时，由结构的顶端入手，先考虑上面三层。假设从上数第三层的立柱的中点存在铰链，就得到与图 8.46 相似的问题。在求解了与式(a)类似的三个平衡方程后，就能计算出所有杆端弯矩。这种方法得出的结果虽然不精确，但对于顶层是足够准确的。接着可以除去顶层，用已算出的力和力矩代替顶层，作用在刚架的其他剩余部分上。接着假设从顶上数第四层的立柱的中点存在铰链，再考虑接下来的三个连续层。以下依次类推。

8.10 带非等截面杆的刚架

前面各节讲到的带等截面杆的刚架的力矩分配法可以推广到带变截面杆的刚架的分析中。使用这种方法，我们必须做三项工作，每项工作中都必须考虑横截面的变化。这三项工作是：①计算固端弯矩；②计算分配系数；③计算传递系数。

下面以图 8.49 为例说明解题过程。这是一个由跨比为 3:4:3 三跨连续梁组成的高速公路桥，连续梁上带有与等截面立柱刚性相连的直线托肩。要求画弯矩图，其中的均布载荷 $q=1\text{kip/ft}$ 分布在前两段跨度上。利用表，先求出每杆的弹性属性，ab 杆在 b 端有长 $0.4l_1$ 的托肩，厚 $4.5\text{ft}=1.5h_0$。这些比例可以从下表中找到

传递系数		刚度系数		固端弯矩	
C_{ab}	C_{ba}	s_{ab}	s_{ba}	m_{ab}	m_{ba}
0.996	0.403	5.180	12.82	$-0.0541ql^2$	$0.1554ql^2$

观察到 ab 跨在 a 点铰接，用下面方程给出的修正刚度系数 s'_{ba} 代替刚度系数 s_{ba}，得

$$s'_{ba}=s_{ba}(1-C_{ab}C_{ba})=12.82(1-0.996\times0.403)=7.67$$

图　8.49

由式(8.18)，修正的固端弯矩为

$$m'_{ba}=m_{ba}-C_{ab}m_{ab}=(0.1554+0.0541\times0.996)ql_1^2=576.9\text{kip}\cdot\text{ft}$$

至于对称的中间跨 bc 段，从下表中得出

C_{bc}	C_{cb}	s_{bc}	s_{cb}	m_{bc}	m_{cb}
0.753	0.753	14.27	14.27	$-0.1074ql_2^2$	$+0.1074ql_2^2$

除了由于没有侧向载荷作用在 cd 段上，并且固端弯矩将消失外，cd 段与 ab 段有相同的特性。因此，对 cd 段来说，有

C_{cd}	C_{dc}	s_{cd}	s_{dc}	m_{cd}	m_{dc}
0.403	0.996	12.82	5.180	0	0

观察到 d 端为铰链。就像对 ab 段那样处理，我们使用修正刚度系数 $s'_{cd}=s'_{ba}=7.67$。

考虑到垂直立柱，假设 be 和 cg 部分的柔性刚度无穷大。由下表可知

C_{bf}	C_{fb}	s_{bf}	s_{fb}
0.480	0.715	5.82	4.57

既然立柱底端为铰链，应用到每部分，修正刚度系数为

$$s'_{ch}=s'_{bf}=s_{bf}(1-C_{bf}C_{fb})=6.82(1-0.480\times0.715)=4.48$$

第一、三跨用刚度系数 k

$$k_1=k_2=\frac{EI_0}{l_1}=1$$

对于中间跨

$$k_2=\frac{EI_0}{l_2}=\frac{3}{4}$$

对于竖直立柱，有

$$k_4=k_5=\frac{EI_0}{h}=\frac{52.5}{36}=1.46$$

为计算分配系数，要注意观察等式给出的变截面梁杆端弯矩 M_{ab} 与相应转角 θ_a 之间的关系为

$$M_{ab}=\theta_a\frac{EI_0}{l_n}s_{ab}=\theta_a k_n s_{ab}$$

因此，分配系数与 ks 值成比例。结点 b 的相关数值为

$$k_1=1\quad s_{ba}=7.67\quad k_1s_{ba}=7.67$$
$$k_2=0.75\quad s_{bc}=14.27\quad k_2s_{bc}=10.70$$
$$k_4=1.46\quad s_{bf}=4.48\quad k_4s_{bf}=6.54$$

可知 $\sum k_t s_{mn}=24.91$，则分配系数变为

$$r_{ba}=\frac{7.67}{24.91}=0.308$$

$$r_{bc}=\frac{10.70}{24.91}=0.429$$

$$r_{bf}=\frac{6.54}{24.91}=0.263$$

利用对称性，可知结点 c 有相同值。

有了分配系数，就可以利用力矩分配法计算杆端弯矩。图 8.50 给出了计算表格。我们由固端弯矩开始计算，相应数值被标在横梁 $abcd$ 下第一条水平线上。力矩分配由结点 c 开始，此处不平衡力矩最大。利用前面计算的分配系数，不平衡力矩 $M_c=-526.3$ 的分配结果是

$$M'_{cb}=-526.3\times0.429\text{kip}\cdot\text{ft}=-225.8\text{kip}\cdot\text{ft}$$
$$M'_{cd}=-526.3\times0.308\text{kip}\cdot\text{ft}=-162.1\text{kip}\cdot\text{ft}$$
$$M'_{cf}=-526.3\times0.263\text{kip}\cdot\text{ft}=-138.4\text{kip}\cdot\text{ft}$$

图　8.50

这些被分配的力矩被标在如图 8.50a 所示结点 c 下的第二行和如图 8.50b 所示立柱 ch 的顶部。力矩 $C_{cb}M'_{cb}=-0.753\times225.8=-170.0$ 将被传递到在结点 b 上，其不平衡力矩为

$$(-576.9+526.3+170.0)\text{kip}\cdot\text{ft}=119.4\text{kip}\cdot\text{ft}$$

力矩分配的结果如图 8.50a 所示。结点 b 下的第三行和如图 8.50b 所示立柱 bf 顶部。结点 b、c 处分配力矩下的粗线表明第一轮力矩分配完成。

为了进一步修正，继续由结点 c 入手，c 处已经分配的力矩为 38.6kip · ft。在 c 点分配的不平衡力矩为 −38.6kip · ft，b 点产生不平衡力矩 +12.5kip · ft。当结果第二行粗线标在结点 b、c 处时，第二轮计算完成。进一步计算显示，修正量迅速减小。四轮过后，修正量可忽略。加上最初的固端弯矩和所有连续修正量，可得出最后的杆端弯矩，标在图 8.50 中。图 8.49b 画出了对应的弯矩图。

另一个用力矩分配法分析带变截面杆刚架的例子是考虑前面图 8.22 中的对称三跨桥。用已给出的弹性常数，注意到支座 0 和 3 处有铰链，由前例得出

$$s'_{10}=s_{10}(1-C_{10}C_{01})=20.34$$

$$m'_{10}=m_{10}-C_{01}m_{01}=281.9\text{kip}\cdot\text{ft}$$

因此，计算分配系数时要用到的常量是

单元	k	s	ks
01	1.0	20.34	20.34
12	0.5	22.83	11.42

分配系数变为

$$r_{10}=\frac{20.34}{31.76}=0.640\quad r_{12}=\frac{11.42}{31.76}=0.360$$

图 8.51 给出了所有计算的连续修正量。可以看出，四轮以后，得到的结果与前面结果相一致。

0
0.64
1
0.36
0.36
2
0.64
3
+281.9
−569.7
−160.8
+287.1
+161.5
−35.7
+22.9
+12.8
−2.8
+1.8
+1.0
−0.2
+0.1
+0.1
+593.8
+569.7
−205.1
−364.6
+126.6
−45.6
−81.0
+10.1
−3.6
−6.4
+0.8
−0.3
−0.5
−452.5

图 8.51

第9章

结构分析的矩阵法

9.1 力法和位移法

前几章介绍过的关于超静定系统的分析方法主要分为两类。例如第7章拱和刚架的分析过程如下：首先，解除所有的多余约束用相应的冗余力(或弯矩)代替，然后基于结构应变能的考虑，运用最小功原理确定力的大小。第6章超静定桁架的分析也采用同样的方法。这种一般性方法称为力法。

第8章对于连续梁和框架的分析方法有所不同，首先计算的是结点的转角(位移)，然后考虑冗余力。应用三转角方程分析连续梁也是同样的方法。这种方法称为位移法。

为了解释两种方法的区别，我们来举一个例子。如图9.1所示超静定桁架由铰接于A点的五根斜杆支撑，上端为固定铰链连接，其中荷载P用P_x和P_y表示，由于A点连接的杆数多于平衡方程的数目，显然是超静定结构。一般来说，在同一平面内，若A点连接n个杆件，则冗余杆件数为$n-2$。为了用力法确定相应的冗余力X_1、X_2、X_3、…、X_{n-2}，我们把系统的应变能看作这些力的函数，应用最小功定理获得必要方程

图 9.1

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial X_2}=0,\quad \cdots,\quad \frac{\partial U}{\partial X_{n-2}}=0 \tag{a}$$

每个方程都涵盖了所有的冗余力，所以随着杆件数目的增加，方程组(a)的解会变得越来越复杂。

为了解决同样的问题，纳维(Navier)提出了位移法。例如图9.1所示的系统，如果知道荷载P在A点引起的水平位移和垂直位移，系统的变形就完全确定了。假设这些位移很小，任意杆件i的伸长为

$$\Delta l_i = v\sin\alpha_i - u\cos\alpha_i$$

杆的相应轴力为

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{EA_i}{l_i}(v\sin\alpha_i - u\cos\alpha_i) \\ &= \frac{EA_i}{h}(v\sin\alpha_i - u\cos\alpha_i)\sin\alpha_i \end{aligned} \tag{b}$$

现在列出铰结点 A 的两个平衡方程

$$
\begin{aligned}
v\sum_{i=1}^{i=n} A_i\sin^2\alpha_i\cos\alpha_i - u\sum_{i=1}^{i=n} A_i\cos^2\alpha_i\sin\alpha_i &= \frac{P_x h}{E} \\
v\sum_{i=1}^{i=n} A_i\sin^3\alpha_i - u\sum_{i=1}^{i=n} A_i\sin^2\alpha_i\cos\alpha_i &= \frac{P_y h}{E}
\end{aligned}
\tag{c}
$$

从这个方程中能计算出每种情况下的未知量 u 和 v，然后将 u 和 v 代入表达式(b)，求出系统中任意杆件的轴力 S_i。从这个问题不难看出，直接考虑系统的位移可以从实质上简化问题。即使有大量的独立杆件，由于方程个数与杆件的数目无关，我们只须求解这两个方程[见方程(c)]。

同理，直接考虑位移可以简化多支座的连续梁的分析，如果我们拆除所有中间部分的约束，相应的反力 X_1、X_2、X_3、…作为冗余力，最小功原理将满足方程组(a)。每个方程都包括了所有未知量。因此，随着支座数增加，问题会变得非常复杂。若把连续梁上每个跨度看作是两端简支的梁，分别计算每段梁两端的转角，这样做非常有利于解决问题，利用中间相邻铰接点处的转角相同的条件得到三转角方程(或三弯矩方程，见 8.3 节)。这些方程都比式(a)简单，因为每个方程中的未知量都不多于三个。

另一个例子介绍的是如何利用位移法大幅度简化问题。如图 8.37 所示的系统，在 a 点四个杆件刚性连接，杆端固定，忽略杆件轴力的影响，这个系统有七个冗余力。为了确定其解，利用最小功原理可以列出七个方程。再者，考虑结构位移会大大简化问题。位移完全由外载荷在结点 a 处产生的转角 θ_a 决定。求出该角的大小[见方程(8.24)]，所有的杆端弯矩都可以用挠度方程计算出来。因此，如果首先考虑位移，我们只需根据 a 点的弯矩平衡建立一个方程。

但是，对于超静定系统的分析，我们不能仅根据前面的讨论就说位移法优于力法。例如，一个简单桁架有一个多余支反力和十个结点(见图 6.5)，使用上述位移法就比较困难，而用第 6 章介绍的力法就很简单。

在处理高次超静定系统时，我们发现不管使用力法还是位移法，仍需要求解含大量未知量的线性方程组。对于一般的结构分析问题，考虑如下方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.1a}
$$

从理论上说，这些线性代数方程组应该有解。但当方程数增多时，求解会变得很困难。为了方便求解，引入代数矩阵，因此方程(9.1a)可以写成如下的矩阵形式

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}
\tag{9.1b}
$$

或更简便地

$$
(a_{ij})(x_j) = (c_i) \tag{9.1c}
$$

或

$$Ax = c \tag{9.1d}$$

表达式(9.1b)中括号内的数组称为矩阵，数组内的数字称为元素。若矩阵由 m 行 n 列构成，称矩阵为 $m \times n$ 阶。若矩阵只有一行或一列元素，则称为行向量或列向量。不难理解，(9.1b)中的矩阵(a_{ij})和列向量(x_i)构成了方程(9.1a)的左端项。这样，在用矩阵方法求解结构问题得到足够重视之前，我们有必要学习下一节将要讨论的代数矩阵的规则。

在学习之前，希望读者明白用矩阵方法进行结构分析并没有特殊的效果，更不代表前几章介绍的方法的数值计算都可以用手算。它的优势主要在于可以使用电子数字计算机，因为处理这些问题时对台式计算器来说太复杂了。从而开辟了解决计算结构问题的新方法。我们无法抵挡矩阵方法的魅力。希望列举的几个例子能使读者熟悉这种方法，能更好地研究矩阵分析方法。

9.2 矩阵代数基础

上一节中提到，矩阵是数字、符号或元素组成的矩形阵，它不能化简而且必须作为一个整体。和代数符号或数字一样，矩阵在某种条件下可以进行加、减、乘或除运算。以上的这些运算规则就形成了矩阵代数。

两个矩阵相加，只需将相对应的元素相加就可得到矩阵和的元素，其前提为两个矩阵的阶数均为 $m \times n$，相加的规则如下

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{a}$$

特别地，如果(a_{ij})和(b_{ij})都是 2×2 阶矩阵，则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

同理，相减的规则为

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}) \tag{b}$$

由此可以看出，只有每个元素相等我们才可以说两个矩阵相等。

得出加法的规则之后，介绍一下矩阵的数乘。显然矩阵的数乘就是用一个数乘以矩阵的每一个元素，详细的规则表述如下

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \tag{c}$$

其中 λ 为常数。

两个矩阵 A 和 B 相乘，遵循如下规律：矩阵 A 第 i 行元素乘以矩阵 B 第 j 列的元素得到所求矩阵的第 i 行第 j 列元素。如果 A 是 $m \times n$ 阶阵，而 B 是 $n \times q$ 阶阵，得到的矩阵 C 应该是 $m \times q$ 阶。矩阵 $C = AB$，C 的元素 c_{ij}的具体过程为

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj} \tag{d}$$

例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

注意的是只有在 A 的列数和 B 的行数相等时两个矩阵相乘才有可能，而且矩阵相乘不是互换的，即 $AB \neq BA$。如上述例子中，矩阵 AB 的阶数为 2×2，矩阵 BA 的阶数为 3×3。如果矩阵 AB 和矩阵 BA 都存在，矩阵 BA 称为矩阵 AB 的反序乘积，这样就可以区别左乘和右乘。在上述例子中可以说 B 左乘 A 或 A 右乘 B。

现在回到矩阵表达式(9.1b)，对表达式的左边运用乘法规则，用矩阵$[a_{ij}]$左乘列向量$[x_j]$，这样就得到了方程(9.1a)的左边项，同时也解释了矩阵相乘的规则。

现在，我们来讨论用一个矩阵除以另一个矩阵的情况，首先介绍一个很有用的矩阵运算——转置，用 A'表示矩阵 A 的转置，将 A 的行向量依次变为列向量按照同样的顺序排列就得到转置阵 A'，表示为

$$(a_{ij}) = (a_{ji}) \tag{e}$$

例如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad 则 \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

矩阵乘积的转置要同时考虑乘法规则和转置规则，转置矩阵的结果为每个矩阵的转置后反序相乘，为

$$(AB)' = B'A' \tag{f}$$

这叫做反序规则。

在进一步学习之前，要注意一些应用中经常能遇到的特殊矩阵．矩阵[⊖]

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \tag{g}$$

称为 3×3 阶的单位矩阵。一般来说，单位矩阵是 $n\times n$ 阶的方阵，除了主对角线以外，其他元素为零。主对角线是从左上角第一个元素的位置到右下角的最后一个元素的位置。在矩阵代数中，单位矩阵 I 和一般代数中 1 的概念相类似。

如果单位矩阵 I 与数 λ 相乘，得到

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda \end{pmatrix} \tag{h}$$

称为标量矩阵。矩阵形式

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_3 \end{pmatrix} \tag{i}$$

称为对角矩阵，单位矩阵和标量矩阵都是对角矩阵的一种特殊情况。

还有许多其他形式的矩阵，到目前为止介绍的特殊矩阵对我们来说已经够用了。用到的矩阵总结如下：$m\times n$ 阶矩阵，$n\times n$ 阶方阵，行向量，列向量，单位矩阵，标量矩阵和对角

⊖ 点表示零。

矩阵。

再看方程组(9.1a)用矩阵形式表示为 $Ax=c$，由定义，结果有如下形式

$$x=\frac{c}{A}=A^{-1}c=Rc \tag{j}$$

这就是两个矩阵相除的思想，或者更确切地说寻找矩阵 A 的逆阵，这一过程称为求逆。为了实现求解过程，寻找 $RA=I$ 形式中的矩阵 R，其中 I 为单位矩阵。值得注意的一点是只有方程数和未知数相同，联立方程的解才惟一。A 只能是方阵，不然，求逆是没有意义的。

有很多方法可以求出方阵的逆。下面将主要介绍一种，首先有必要说明矩阵 A 的伴随矩阵的概念，记为 adj$A$，伴随阵是指已知矩阵 A 中元素 a_{ij}的余子式构成的另外一个矩阵 C 转置后形成的矩阵，形成过程如下所示。

已知矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{k}$$

矩阵 C 是由 A 的余子式构成，为

$$C=\begin{pmatrix} |b_2c_3| & -|a_2c_3| & |a_2b_3| \\ -|b_1c_3| & |a_1c_3| & -|a_1b_3| \\ |b_1c_2| & -|a_1c_2| & |a_1b_2| \end{pmatrix}$$

其中行列式

$$|b_2c_3|\equiv\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=b_2c_3-c_2b_3$$

称为元素 a_1 的余子式。

$$-|b_1c_3|\equiv-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-(b_1c_3-c_1b_3)$$

称为 a_2 的余子式，等等。一般来说，求任何已知矩阵元素 a_{ij}的余子式可以通过划掉第 i 行、j 列得到，如 $i=2$，$j=1$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & \cancel{b_2} & \cancel{c_2} \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

矩阵中其余元素余子式的正负号遵循如下规则：如果行数 i 和 j 均为奇数或偶数，则余子式的符号为正；如果行数为奇数面列数为偶数或相反，则余子式为负。

运用这个规则可以得到余子式矩阵 C，伴随阵定义为 C 的转置

$$\text{adj}A=\begin{pmatrix} |b_2c_3| & -|b_1c_3| & |b_1c_2| \\ -|a_2c_3| & |a_1c_3| & -|a_1c_2| \\ |a_2b_3| & -|a_1b_3| & |a_1b_2| \end{pmatrix} \tag{k'}$$

方阵 A 与其伴随阵存在关系

$$A(\text{adj}A)=(\text{adj}A)A=|A|I \tag{l}$$

其中$|A|$是A的行列式，I是单位矩阵，用表达式(l)除以$|A|\neq 0$，有

$$\frac{A(\mathrm{adj}A)}{|A|}=\frac{(\mathrm{adj}A)A}{|A|}=I=RA$$

因此

$$R=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}=|A|^{-1}\mathrm{adj}A \tag{m}$$

就是A的逆。

按照方阵的求逆规则，容易得出结论：对角阵的逆，可以通过求每个主对角元素的倒数而实现。因此，如果

$$(A)=\begin{pmatrix}5 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 3 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & 1\end{pmatrix} \quad 则 \quad (A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & 1\end{pmatrix}$$

应用方阵求逆的方法，我们试用矩阵方法求出联立方程(9.1)的解，考虑一个简单的方程

$$\begin{aligned}3x+2y-z&=4\\ x-y+2z&=5\\ -2x+y-z&=-3\end{aligned}$$

方程用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ -3\end{pmatrix}$$

按照上面讲到的规则，方程系数矩阵A的伴随阵为

$$\mathrm{adj}A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -3 & -5 & -7\\ -1 & -7 & -5\end{pmatrix}$$

为了求出A的行列式，矩阵按第一行元素展开，有

$$|A|=3(-1)-2(3)-1(-1)=-3-6+1=-8$$

最后，由式(j)，我们得到

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -3 & -5 & -7\\ -1 & -7 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-8\\ -16\\ -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

即$x=1$，$y=2$，$z=3$代表了所求的解。这个简单的例子包含了许多讨论过的代数矩阵运算。在进行进一步分析前读者应该清楚每一步的计算。

在讲解矩阵方法在结构分析中的应用前，我们要介绍一些将代数表达式书写为矩阵表达式的例子，如

$$c=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \tag{n}$$

为了将上式写为矩阵形式，先定义两个列向量 A 和 B

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\qquad 和\qquad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

然后，将列向量 A 转置为行向量 A'，再将矩阵 A' 和 B 相乘，有

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

即为方程(n)的右半部分。因此，方程(n)用矩阵表示为

$$c=A'B \tag{n'}$$

然后，我们把

$$c=a_{11}x_1y_1+a_{22}x_2y_2+a_{33}x_3y_3 \tag{o}$$

和下面定义的矩阵相联系

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\qquad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdot & \cdot\\\cdot & a_{22} & \cdot\\\cdot & \cdot & a_{33}\end{pmatrix}$$

那么，将列向量 x 转置为行向量 x'，作乘积 $x'Ay$ 有

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdot & \cdot\\\cdot & a_{22} & \cdot\\\cdot & \cdot & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(a_{11}x_1y_1+a_{22}x_2y_2+a_{33}x_3y_3)$$

从而可以看出方程(o)可以用矩阵形式表达为

$$c=x'Ay \tag{o'}$$

习题

1. 试求矩阵的和 $A+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\0 & 1 & 4\\2 & 0 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\1 & -3 & 5\\-2 & 1 & 1\end{pmatrix}$。
2. 若矩阵 A、B 如上题，试求矩阵的乘积 AB。
3. 矩阵 A、B 如习题1，试求矩阵的乘积 BA。
4. 写出习题1中每个矩阵的转置。
5. 已知方阵 A 和 B，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 5\\1 & 5 & 12\end{pmatrix}$，$B$ 是 A 的伴随阵，$B=\begin{pmatrix}11 & -9 & 1\\-7 & 9 & -2\\2 & -3 & 1\end{pmatrix}$试求矩阵 AB 的乘积。

9.3 矩阵方法在平面桁架中的应用

为了说明矩阵方法在铰接桁架中的应用，首先回顾一下第6章讨论的挠度问题。如图9.2a所示，简支桁架由 m 根杆件构成，承受一组外载 P 的作用，要求根据这一载荷确定 j 点垂直位移。求解过程中，以 σ_i 代表荷载 P 作用下杆件 i 的轴力(见图9.2a)，用 S_{ij} 表示结点 j 的单位铅垂力产生的杆件 i 的轴力(见图9.2b)，然后可以得出 j 点铅垂挠度的表达式[见方程(5.2)，5.1节]

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{i=m} S_{ij}\rho_i\sigma_i \tag{9.2}$$

其中 $\rho_i = l_i/A_iE$ 是杆件 i 的柔度系数。

图 9.2

如果想求解桁架中 n 个选定的结点的挠度，则必须对这 n 个结点的铅垂单位力，计算出 S_{ij}。假设已经完成上述过程，然后将这些影响系数表示成为 $m\times n$ 阶的矩阵

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mn} \end{pmatrix} \tag{a}$$

称为桁架的几何矩阵，或者简称为 S 矩阵。

下面将 m 个柔度系数 ρ_i 表示为对角阵

$$(\rho_i) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \rho_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \rho_{33} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{mm} \end{pmatrix} \tag{b}$$

称为桁架的柔度矩阵，或者简称为 ρ 矩阵。

最后，假设载荷 P 产生的轴力 σ_i 的值已经计算出来，并以列向量的形式表示为

$$(\sigma_i) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{pmatrix} \tag{c}$$

称为载荷矩阵，或者简称为 σ 矩阵。

现在回顾一下前一节讲过的矩阵相乘的规则，式(9.2)可以用矩阵式表示如下

$$\Delta = S'\rho\sigma \tag{9.3}$$

也就是说，如果用式(a)中 S 矩阵转置后右乘式(b)中 ρ 矩阵，然后，右乘式(c)中 σ 矩阵，可以得到方程组(9.2)的所有方程，由此求解桁架 n 个结点的挠度。

举例说明，假设 $m=3$，$n=2$，方程(9.3)变为

$$\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_{11} & S_{21} & S_{31}\\ S_{12} & S_{22} & S_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{11} & \cdot & \cdot\\ \cdot & \rho_{22} & \cdot\\ \cdot & \cdot & \rho_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}S_{11}\rho_{11} & S_{21}\rho_{22} & S_{31}\rho_{33}\\ S_{12}\rho_{11} & S_{22}\rho_{22} & S_{32}\rho_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_{11}\rho_{11}\sigma_1+S_{21}\rho_{22}\sigma_2+S_{31}\rho_{33}\sigma_3\\ S_{12}\rho_{11}\sigma_1+S_{22}\rho_{22}\sigma_2+S_{32}\rho_{33}\sigma_3\end{pmatrix}$$

矩阵的乘积(9.3)称为 Δ 矩阵。不难看出它用一种紧凑方式来表达所有 n 个结点的挠度公式(9.2)。不仅如此，接下来将看到，可用系统化的方法将真实数值和矩阵相乘，从而将计算误差降到最小。同理，通过构造每一列对应一个不同的载荷条件的 σ 阵，可以一次性处理要研究的多种不同的加载条件。

考虑如图 9.3 所示一个有 9 根杆件($m=9$)构成的简单桁架的例子。桁架在承受两个不同载荷体系作用，载荷条件如图 9.3a 和 9.3b 所示，求解上弦结点 a、b 的铅垂挠度。杆件的编号如图 9.3a 所示，桁架的尺寸如图 9.3b 所示。每根杆件的横截面积为 $A_i=1\text{in}^2$，弹性模量 $E=30\times10^3\text{ksi}$。首先，计算在两个不同载荷条件下九个杆件的轴力 σ_i。这一系列的轴力值将构成问题中的 σ 矩阵。同理，再计算如图 9.3c 和图 9.3d 所示的单位载荷分别作用在结点 a 和 b 时所有杆件的轴力，这组轴力值将构成问题中的 S 阵。最后，我们计算每个杆件的柔度系数 $\rho_i=l_i/A_iE$，写出对角柔度矩阵，这三个基本矩阵如下所示

图　9.3

$$s_{ij}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8 & 4\\ -10 & -5\\ -3 & 3\\ 4 & 8\\ 5 & -5\\ -8 & -4\\ 0 & 0\\ 4 & 8\\ -5 & -10\end{pmatrix}\qquad \rho_i=\frac{10}{E}\begin{pmatrix}4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5\end{pmatrix}\qquad \sigma_i=\begin{pmatrix}4 & 10\\ -5 & 0\\ 3 & 0\\ 8 & 10\\ -5 & 0\\ -4 & 0\\ 9 & 0\\ 8 & 10\\ -10 & 0\end{pmatrix}$$

现在利用方程(9.3)，通过矩阵相乘可以得到要求的挠度 Δ_j

$$\Delta=\frac{10}{9E}\begin{pmatrix}8 & -10 & -3 & 4 & 5 & -8 & 0 & 4 & -5\\ 4 & -5 & 3 & 8 & -5 & -4 & 0 & 8 & -10\end{pmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix}4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 10\\ -5 & 0\\ 3 & 0\\ 8 & 10\\ -5 & 0\\ -4 & 0\\ 9 & 0\\ 8 & 10\\ -10 & 0\end{pmatrix}$$

我们分两步计算矩阵乘积，有

$$\Delta=\frac{10}{9E}\begin{pmatrix}32 & -50 & -9 & 16 & 25 & -32 & 0 & 16 & -25\\ 16 & -25 & 9 & 32 & -25 & -16 & 0 & 32 & -50\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 10\\ -5 & 0\\ 3 & 0\\ 8 & 10\\ -5 & 0\\ -4 & 0\\ 9 & 0\\ 8 & 10\\ -10 & 0\end{pmatrix}=\frac{10}{9E}\begin{pmatrix}860 & 640\\ 1417 & 800\end{pmatrix}$$

因此，当结构承受载荷 $P=9\text{kip}$，$E=30\times10^3\text{ksi}$ 时，如图 9.3a 所示，挠度计算如下

$$\Delta'_a=0.0318\text{in}\qquad \Delta'_b=0.0525\text{in}$$

当结构承受载荷 $Q=10\text{kip}$ 时(见图 9.3b)，挠度为

$$\Delta''_a=0.0237\text{in}\qquad \Delta''_b=0.0296\text{in}$$

现在我们求解一个有 m 根杆件的超静定桁架，其中 n 个杆件为冗余杆[⊖](见图 9.4)，利

⊖ 值得注意的是，此处的 n 是指冗余杆件的数量而不是结点的数量。

用方程(6.6)确定 n 根冗余杆件的轴力 X_1、X_2、X_3、…、X_n。假设结构不受温度影响，也不存在装配误差，方程的形式如下

$$\left.\begin{aligned}-\Delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n\\ -\Delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n\\ &\vdots\\ -\Delta_n &= \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n\end{aligned}\right\} \tag{9.4a}$$

图　9.4

其中 Δ_j 是载荷 P 引起的对应于 X_j 的广义位移。δ_{ji} 是 X_i 处的单位载荷引起的对应于 X_j 的广义位移。

这组方程表示为矩阵形式为

$$-\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \vdots\\ \Delta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix} \tag{9.4b}$$

或简单地写为

$$-\Delta = \delta X \tag{9.4c}$$

方程(9.4c)的解为

$$X = -\frac{\Delta}{\delta} = -\delta^{-1}\Delta \tag{d}$$

其中，由方程(9.3)得

$$\Delta = (S'\rho\sigma) \qquad \delta = (S'\rho S) \tag{e}$$

将表达式(e)代入式(d)，就可以得到冗余杆轴力的矩阵表达形式

$$X = -(S'\rho S)^{-1}(S'\rho\sigma) \tag{9.5}$$

当冗余杆的轴力由式(9.5)求出后，其余杆件的轴力也可以由下式得出

$$S_i = \sigma_i + S_{i1}X_1 + S_{i2}X_2 + \cdots + S_{in}X_n \tag{f}$$

其矩阵形式为

$$S = \sigma + SX \tag{g}$$

将式(9.5)代入式(g)有

$$S = \sigma - S(S'\rho S)^{-1}(S'\rho S)$$

或者为避免 σ 重复出现，引入单位矩阵 I，得

$$S = [I - S(S'\rho S)^{-1}(S'\rho)]\sigma \tag{9.6}$$

上式就是在已知载荷作用下，超静定桁架所有杆件的轴力的最终的矩阵表达形式。

作为等式(9.6)的应用，来研究一个超静定桁架，如图 9.5a 所示。这个平面桁架有七个杆件，其中三个为冗余杆件。选择杆件 5、6、7 为冗余杆件，则系统的基本结构如图 9.5b 所示。

图 9.5

第一步，我们要对载荷 P 和单位力作用下的基本结构进行静力分析。已知杆件横截面积 $A_1=A_4=A_5=5.00\text{in}^2$，$A_2=A_3=8.66\text{in}^2$，$A_6=A_7=2.89\text{in}^2$，几何矩阵、柔度矩阵和载荷矩阵分别为

$$S=\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\rho=\begin{pmatrix} 2 & . & . & . & . & . & . \\ . & 2 & . & . & . & . & . \\ . & . & 2 & . & . & . & . \\ . & . & . & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & 2 & . & . \\ . & . & . & . & . & 3 & . \\ . & . & . & . & . & . & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma=\begin{pmatrix} -5\sqrt{3} \\ +5\sqrt{3} \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中，为了简便，取 $E=1\text{ksi}$。

现在将 S 转置为 S'，右乘 ρ，再右乘 S，得

$$(S'\rho S)=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 & 2 & 0 & 0\\ -\sqrt{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & \cdot & \cdot\\ \cdot & 5 & \cdot\\ \cdot & \cdot & 5\end{pmatrix}$$

因为结果为对角阵，很容易求逆，于是得

$$(S'\rho S)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \cdot & \cdot\\ \cdot & \frac{1}{5} & \cdot\\ \cdot & \cdot & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

将上式左乘 S 矩阵，得

$$S(S'\rho S)^{-1}=\begin{pmatrix}+\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ +\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \cdot & \cdot\\ \cdot & \frac{1}{5} & \cdot\\ \cdot & \cdot & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{120}\begin{pmatrix}10 & -12\sqrt{3} & 0\\ -10\sqrt{3} & 0 & -12\\ -10\sqrt{3} & -12 & 0\\ 10 & 0 & -12\sqrt{3}\\ 20 & 0 & 0\\ 0 & 24 & 0\\ 0 & 0 & 24\end{pmatrix}$$

然后右乘 $S'\rho$ 得

$$S(S'\rho S)^{-1}S'\rho=\frac{1}{120}\begin{pmatrix} 46 & -\frac{30}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & 10 & 20 & -\frac{108}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{30}{\sqrt{3}} & 42 & 30 & \frac{6}{\sqrt{3}} & -\frac{60}{\sqrt{3}} & 0 & -36 \\ \frac{6}{\sqrt{3}} & 30 & 42 & -\frac{30}{\sqrt{3}} & -\frac{60}{\sqrt{3}} & -36 & 0 \\ 10 & \frac{6}{\sqrt{3}} & -\frac{30}{\sqrt{3}} & 46 & 20 & 0 & -\frac{108}{\sqrt{3}} \\ 20 & \frac{60}{\sqrt{3}} & -\frac{60}{\sqrt{3}} & 20 & 40 & 0 & 0 \\ -\frac{72}{\sqrt{3}} & 0 & -24 & 0 & 0 & 72 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & -\frac{72}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}$$

最后，用单位矩阵 I 减去上述计算式，完成式(9.6)的计算，可以得到

$$120S=\begin{pmatrix} 74 & \frac{30}{\sqrt{3}} & -\frac{6}{\sqrt{3}} & -10 & -20 & \frac{108}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{30}{\sqrt{3}} & 78 & -30 & -\frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{60}{\sqrt{3}} & 0 & 36 \\ -\frac{6}{\sqrt{3}} & -30 & 78 & \frac{30}{\sqrt{3}} & \frac{60}{\sqrt{3}} & 36 & 0 \\ -10 & -\frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{30}{\sqrt{3}} & 74 & -20 & 0 & \frac{108}{\sqrt{3}} \\ -20 & \frac{60}{\sqrt{3}} & \frac{60}{\sqrt{3}} & -20 & 80 & 0 & 0 \\ \frac{72}{\sqrt{3}} & 0 & 24 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & \frac{72}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{15}{\sqrt{3}} \\ \frac{15}{\sqrt{3}} \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -423.5 \\ 692.8 \\ -706.4 \\ -400.0 \\ 400.0 \\ -480.0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这样，以 kip 为单位，各杆件的轴力值可列成下表。

杆	1	2	3	4	5	6	7
S	-3.53	+5.78	-5.89	-3.33	+3.33	-4.00	0

然后对计算结果进行局部检验，可以容易地证明各结点的平衡条件是满足的。

习题

1. 用矩阵方法，求图 9.5a 所示的桁架在温度平均上升 50℉时各杆件的轴力，杆件的热膨胀系数为 $\alpha_t = 6.667 \times 10^{-6}$(in/in)/℉，弹性模量 $E = 30 \times 10^6$psi。无外力。

   提示：用矩阵 $\alpha_t \Delta t(s'l)$ 代替式(9.5)中的矩阵$(s'\rho\sigma)$。

2. 用矩阵方法，求平面桁架各杆件的轴力，如图 9.6 所示，杆件的弹性模量均为 E，横截面面积如下：$A_1 = A_4 = 7.5\text{in}^2$，$A_2 = A_3 = 10.0\text{in}^2$，$A_7 = 6.4\text{in}^2$，$A_6 = A_5 = 8.0\text{in}^2$，桁架的尺寸和施加的荷载如图 9.6 所示。

图　9.6

9.4　连续梁的矩阵分析

上一节讨论的超静定桁架问题，阐述了力法分析的矩阵形式。作为位移法的矩阵形式阐述，我们讨论连续梁。虽然这类问题都可以采用矩阵处理，但这里的讨论将限制在非屈服支承的连续梁问题，这样，讨论的重点就会集中到矩阵方法上。

首先，以一个等截面简支梁 ab 为例，承受杆端弯矩(顺时针为正)和横向载荷，如图 9.7 所示。在此例中斜率—挠度方程[见 8.2 节中等式(8.6)]如下

图　9.7

$$M_{ab} = k(4\theta_a + 2\theta_b) + m_{ab} \qquad (9.7a)$$

$$M_{ba} = k(2\theta_a + 4\theta_b) + m_{ba}$$

其中 m_{ab} 和 m_{ba} 为面端弯矩(见 8.2 节)，$k = EI/l$ 为梁的刚度系数，这些等式的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k & 2k \\ 2k & 4k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{ab} \\ m_{ba} \end{pmatrix} \qquad (9.7b)$$

在上述表达式中，2×2 矩阵

$$K = \begin{pmatrix} 4k & 2k \\ 2k & 4k \end{pmatrix} \qquad (a)$$

称为梁的刚度矩阵。

等截面梁刚度矩阵的概念同样可以延伸到变截面梁，参照斜率—挠度方程(8.17)，得到非等截面梁的刚度矩阵

$$K = \begin{pmatrix} kk_{aa} & kk_{ab} \\ kk_{ab} & kk_{bb} \end{pmatrix} \qquad (b)$$

其中 kk_{aa}、kk_{ab}、kk_{bb} 的值由 8.4 节的表达式(e)定义，$k = EI_0/l$，I_0 是最小截面处的惯性矩。在以后的讨论中为了避免下标混淆，在表达式(b)中的刚度矩阵中引入新的符号，写为

$$K = \begin{pmatrix} K_a & R \\ R & K_b \end{pmatrix} \qquad (c)$$

其中

$$K_a = kk_{aa} \qquad K_b = kk_{bb} \qquad R = kk_{ab} \qquad (d)$$

采用这些符号，矩阵方程(9.7b)变为

$$\begin{pmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_a & R \\ R & K_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{ab} \\ m_{ba} \end{pmatrix} \tag{9.7c}$$

如果 $M_{ab}=0$，即梁只在一端受弯矩 M_{ba} 的作用，方程(9.7c)为

$$0 = K_a\theta_a + R\theta_b + m_{ab}$$

$$M_{ba} = R\theta_a + K_b\theta_b + m_{ba}$$

在上面两个方程中消去 θ_a，得到

$$M_{ba} = \frac{K_aK_b - R^2}{K_a}\theta_b + \left(m_{ba} - \frac{R}{K_a}m_{ab}\right)$$

因此，对这种情况

$$M_{ba} = K'_b\theta_b + m'_{ba} \tag{9.7d}$$

其中

$$K'_b = \frac{K_aK_b - R^2}{K_a} \qquad 和 \qquad m'_{ba} = m_{ba} - \frac{R}{K_a}m_{ab} \tag{e}$$

代表梁在 a 端没有弯矩时，b 端的修正刚度系数和修正固端弯矩。当研究连续梁时，修正刚度系数和修正固端弯矩的概念将极大简化一端简支的梁段的处理。

有了矩阵形式(9.7c)表示的斜率—挠度方程，就可以对连续梁进行计算，且结论一般也适用于由 $n+1$ 个非屈服支座支撑的 n 跨连续梁，且每跨梁的两端或简支或面定，如图9.8所示。为了避免下标书写的混乱，我们取四跨梁的特殊情况。梁的左端简支，右端固定(见图9.8)。假设横向载荷已知，所有固端弯矩都可以计算或直接从表中查。若以上过程已经完成，就可写出四段梁的每段的斜率—挠度方程(9.7c)。

图 9.8

对每个梁段的左端(第一段左端除外，因为 $M_{01}=0$)，利用 $\theta_4=0$，每组方程中的第一个方程为

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= K_{12}\theta_1 + R_{12}\theta_2 + m_{12} \\ M_{23} &= K_{23}\theta_2 + R_{23}\theta_3 + m_{23} \\ M_{34} &= K_{34}\theta_3 + m_{34} \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

或用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{23} \\ M_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{12} & R_{12} & 0 \\ 0 & K_{23} & R_{23} \\ 0 & 0 & K_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{23} \\ m_{34} \end{pmatrix} \tag{f'}$$

可以简单地用矩阵的加法和乘法检验上式。同样，对于每个梁段的右端[最后一段和第一段右端除外，因为最后一段的右端 $\theta_4=0$，而第一段梁右端利用修正方程(9.7d)]，由方程(9.7c)得到

$$\left.\begin{aligned} M_{10} &= K'_{10}\theta_1 + m'_{10} \\ M_{21} &= R_{21}\theta_1 + K_{21}\theta_2 + m_{21} \\ M_{32} &= R_{32}\theta_2 + K_{32}\theta_3 + m_{32} \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{21} \\ M_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K'_{10} & 0 & 0 \\ R_{21} & K_{21} & 0 \\ 0 & R_{32} & K_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m'_{10} \\ m_{21} \\ m_{32} \end{pmatrix} \tag{g'}$$

在表达式(f′)和(g′)中，需要注意的是每个矩阵的元素第一个下标表示支撑铰的序号，第二个下标表示梁段的序号，由两个下标确定梁的序号。因此，K_{23}表示第三段梁左端的刚度系数，m_{21}是第二段梁右端固支端弯矩，等等。因为每段 R 值惟一，下标的顺序无关紧要。

确定方程(f′)和(g′)的系数矩阵方法如下：参照图9.8，在每段梁下写出其刚度矩阵(c)，对两端的梁段，因为我们已经消去了斜率—挠度方程中的一个。因此，相应矩阵中只含有一个元素，如图9.8中所示。在列出两端梁段的单一元素矩阵时，也必须考虑0点和4点的约束条件。这样，对于左端的梁段，采用表达式(e)中定义的修正刚度系数 K'_{10}，而对于右端的梁段，采用标准的刚度系数 K_{34}。求出每段梁的刚度矩阵后，方程(f′)的系数矩阵就可集成了，即用2×2的单跨矩阵中的上面的行作为系数矩阵的行，每行和前一行向右错开一个位置，其他元素均为0。方程(g′)中的系数矩阵集成方法完全相同，利用2×2的单跨矩阵的下面的行作为系数矩阵的行，如图9.8所示。

下面引入列向量符号

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{23} \\ M_{34} \end{pmatrix} \qquad M_{ba} = \begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{21} \\ M_{32} \end{pmatrix} \qquad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \tag{h}$$

$$m_{ab} = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{23} \\ m_{34} \end{pmatrix} \qquad m_{ba} = \begin{pmatrix} m'_{10} \\ m_{21} \\ m_{32} \end{pmatrix}$$

以及刚度矩阵符号

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} K_{12} & R_{12} & 0 \\ 0 & K_{23} & R_{23} \\ 0 & 0 & K_{34} \end{pmatrix} \qquad K_{ba} = \begin{pmatrix} K'_{10} & 0 & 0 \\ R_{21} & K_{21} & 0 \\ 0 & R_{32} & K_{32} \end{pmatrix} \tag{i}$$

用上述符号，表达式(f′)和(g′)就可用紧凑的形式表述

$$\left.\begin{aligned} (M_{ab}) &= (K_{ab})(\theta) + (m_{ab}) \\ (M_{ba}) &= (K_{ba})(\theta) + (m_{ba}) \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

对任意的支座不可沉降的连续梁都能列出斜率—挠度方程。值得一提的是，这些方程与第8章中表示的方程完全相同。矩阵表达的惟一优势就在于它的简洁。

一般来说，可以选择一组中间支座上的转角，用任意列向量 θ 表示，然后从方程(9.8)

中求出相应的杆端弯矩。这样，在每个中间支座上可以得到两个杆端弯矩，而且这两个杆端弯矩并不一定平衡，必须在每个支座上施加外力矩使其平衡，并保持结构的原形。为了求出这组杆端弯矩，必须增加一个约束条件，使相邻梁段间支座上的杆端弯矩大小相等，符号相反。这个约束条件用矩阵方程表示如下

$$(M_{ab})+(M_{ba})=0 \tag{9.9}$$

将表达式(9.8)代入方程(9.9)得到

$$(K)(\theta)=-(M) \tag{9.10}$$

其中

$$(K)=(K_{ab})+(K_{ba})=\begin{pmatrix} K_{12}+K'_{10} & R_{12} & 0 \\ R_{21} & R_{23}+K_{21} & R_{23} \\ 0 & R_{32} & K_{34}+K_{32} \end{pmatrix} \tag{j}$$

并且

$$(M)=\begin{pmatrix} m_{12}+m'_{10} \\ m_{23}+m_{21} \\ m_{34}+m_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \tag{k}$$

M_i 是中间支座固端弯矩的和，跟前面提到的力矩分配法中的不平衡力矩的概念相似。

方程(9.10)用矩阵形式表示了连续梁的三转角方程，它以前是用方程(8.9)或方程(8.20)表示的，这里忽略了表示每个梁段刚体转动的 θ 项。读者可以用方程(9.10)的矩阵相乘进行检验。

用表达式(j)定义的 K 矩阵称为整个连续梁的刚度矩阵。上面考虑的四跨连续梁，其刚度矩阵的阶数是 3×3。一般地，对于 $n+1$ 个支座的 n 跨连续梁，刚度矩阵阶数为 $(n-1)\times(n-1)$。刚度矩阵的形式总是相同的，即由主对角元素、主对角元素正上面的上对角元素和主对角元素正下面的下对角元素组成，其他元素为0。这样的矩阵称为带状矩阵。连续梁的刚度矩阵是将每跨梁的刚度系数之和作为主对角元素，而每跨的 R 值作为上对角和下对角元素。

方程(9.10)的解为

$$\theta=-(K)^{-1}(M) \tag{9.11}$$

其中 $(K)^{-1}$ 是 (K) 的逆，将方程(9.11)代入方程(9.8)得

$$\left.\begin{aligned}(M_{ab})&=(m_{ab})-(K_{ab})(K)^{-1}(M)\\(M_{ba})&=(m_{ba})-(K_{ba})(K)^{-1}(M)\end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

这些矩阵公式可以认为是最终解，即它们定义了梁的所有中间支座的杆端弯矩。由于 $(M_{ab})=-(M_{ba})$，只需利用这些方程中的一组就可以求解任意给定的连续梁。

对于两端固支的连续梁，仍需要用前面未曾使用过的斜率—挠度方程，计算两端梁段的杆端弯矩 M_{01} 和 $M_{n,n-1}$。杆端弯矩方程为

$$\left.\begin{aligned}M_{01}&=m_{01}-\frac{R_{10}}{K_{10}}(m_{10}-M_{10})\\M_{n,n-1}&=m_{n,n-1}-\frac{R_{n-1,n}}{K_{n-1,n}}(m_{n-1,n}-M_{n-1,n})\end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

作为矩阵式(9.12)应用的第一个实例，让我们考虑一个三跨连续梁，如图 9.9a 所示。这个梁具有均匀截面。取 $EI = 10\text{kip} \cdot \text{ft}^2$[⊖]，且两端简支。梁的尺寸、横向载荷的大小以及每跨的 $k = EI/l$ 的值都表示在图 9.9a 中。

图　9.9

首先，写出每段梁的刚度矩阵。对于等截面梁，利用表达式(a)，而对于两梁段的单一元素矩阵，简支端用 $3k/4$ 代替 k。有了上述矩阵，由表达式(i)得到

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad K_{ba} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{l}$$

然后由表达式(j)，整个梁的刚度矩阵为

$$K = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{m}$$

为了求矩阵的逆，首先求出 K 的伴随阵

$$\text{adj}K = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \tag{n}$$

并且计算 K 的行列式

$$|K| = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 42 - 4 = 38 \tag{o}$$

K 的逆阵为

$$(K)^{-1} = \frac{\text{adj}K}{|K|} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \tag{p}$$

利用表格 8.1，查出固端弯矩为

$$m'_{10} = +5 \qquad m_{12} = -10 \qquad m_{21} = +10 \qquad m'_{23} = -15$$

所有值的单位为 kip · ft，方程(9.12)中出现的几个列矩阵为

⊖ 由于结果不依赖于 EI 的真实值，我们选择 $EI = 10$ 是为了使刚度值为整数，以简化矩阵计算。

$$m_{ab}=\begin{pmatrix}-10\\-15\end{pmatrix}\qquad m_{ba}=\begin{pmatrix}+5\\+10\end{pmatrix}\qquad M=\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$$

方程(9.12)变为

$$\begin{pmatrix}M_{12}\\M_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2\\0&2\end{pmatrix}\frac{1}{38}\begin{pmatrix}6&-2\\-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}M_{10}\\M_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\2&4\end{pmatrix}\frac{1}{38}\begin{pmatrix}6&-2\\-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}\tag{q}$$

为了求解这些表达式，我们先计算矩阵的乘积

$$\frac{1}{38}\begin{pmatrix}6&-2\\-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}=\frac{1}{38}\begin{pmatrix}-20\\-25\end{pmatrix}=\frac{5}{38}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix}4&2\\0&2\end{pmatrix}\frac{5}{38}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}=\frac{5}{38}\begin{pmatrix}-26\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3.42\\-1.32\end{pmatrix}$$

并且

$$\begin{pmatrix}3&0\\2&4\end{pmatrix}\frac{5}{38}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}=\frac{5}{38}\begin{pmatrix}-12\\-28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.58\\-3.68\end{pmatrix}$$

那么，表达式(q)变为

$$\begin{pmatrix}M_{12}\\M_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3.42\\-1.32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6.58\\-13.68\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}M_{10}\\M_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1.58\\-3.68\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6.58\\13.68\end{pmatrix}$$

这些就是杆端弯矩的最终结果。除了符号以外，这两组方程得到完全相同的结果，这也可以作为计算的一个检验。相应的弯矩图如图 9.9b 所示。

作为第二个例子，对 8.5 节图 8.22 中的变截面三跨梁进行矩阵分析。首先记录每一跨梁[⊖]的固端弯矩和刚度系数 K_{aa}、K_{ab}、K_{bb}，如图 9.10 所示，然后使用符号 $k=EI_0/36$，在每一跨下面写出每跨梁的 EI_0/l 值。

因为梁是两端简支，下一步需计算出梁两端的修正固端弯矩和修正刚度系数。利用方程(e)，有

$$m'_{10}=m_{10}-\frac{k_{01}}{k_{00}}m_{01}=210.2-\frac{8.12}{6.45}(-56.9)=+281.8$$

各组修正固端弯矩直接写在梁的上方，如图 9.10。同理，写下第一段和最后一段梁修正刚度系数，有

$$k'_{10}=k'_{23}=\frac{k_{00}k_{11}-k_{01}^2}{k_{00}}=\frac{(6.45)(30.58)-(8.12)^2}{6.45}=20.36$$

引入表达式(b)并消去标量系数 $k=EI_0/36$，形成每段梁的刚度矩阵如图 9.10 所示。

现在开始进行分析，将图 9.10 的数据代入方程(i)，得到

⊖ 这个问题在前面已经讨论过。

图　9.10

$$K_{ab}=\begin{pmatrix}11.42 & 8.95\\ 0 & 20.36\end{pmatrix}\qquad K_{ba}=\begin{pmatrix}20.36 & 0\\ 8.95 & 11.42\end{pmatrix}$$

然后用方程(j)和求逆规则有

$$K=\begin{pmatrix}31.78 & 8.95\\ 8.95 & 31.78\end{pmatrix}\qquad K^{-1}=\frac{1}{929.9}\begin{pmatrix}31.78 & -8.95\\ -8.95 & 31.78\end{pmatrix}$$

最后，式(9.12)中的第一组矩阵公式变为

$$\begin{pmatrix}M_{12}\\ M_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-570\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11.42 & 8.95\\ 0 & 20.36\end{pmatrix}\times\frac{1}{929.9}\begin{pmatrix}31.78 & -8.95\\ -8.95 & 31.78\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-288.2\\ +570.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-594\\ -453\end{pmatrix}$$

这些杆端弯矩值符合以前得到的值。在上述讨论的例子中，未知量较少，用矩阵方法就发挥不了优势，然而对于多跨连续梁会非常有用，特别是电子计算机可以用来求方程的数值解。

习题

1. 如果梁端固定，而不是简支，试分析如图9.9所示的等截面连续梁，数据不变。
2. 如果中间跨度为36ft，而不是72ft，试重新分析如图8.22所示的三跨梁，其他数据不变。

9.5　拱和刚架的矩阵方法

为了进一步说明矩阵方法在结构分析中的应用，考虑一个非对称无铰拱 AB 的例子，如图9.11a所示。取 A 点的反力作为多余量，利用最小功定理可以计算 H_a、R_a、M_a，其方程组(a)和(b)已经在7.6节给出。将表达式(b)代入方程(a)，并忽略轴力影响，有

$$\left.\begin{aligned}
&M_a\int_0^s\frac{y\mathrm{d}s}{EI}+R_a\int_0^s\frac{xy\mathrm{d}s}{EI}+H_a\int_0^s\frac{y^2\mathrm{d}s}{EI}+\int_0^s\frac{M'y\mathrm{d}s}{EI}=0\\
&M_a\int_0^s\frac{x\mathrm{d}s}{EI}+R_a\int_0^s\frac{x^2\mathrm{d}s}{EI}+H_a\int_0^s\frac{xy\mathrm{d}s}{EI}+\int_0^s\frac{M'x\mathrm{d}s}{EI}=0\\
&M_a\int_0^s\frac{\mathrm{d}s}{EI}+R_a\int_0^s\frac{x\mathrm{d}s}{EI}+H_a\int_0^s\frac{y\mathrm{d}s}{EI}+\int_0^s\frac{M'\mathrm{d}s}{EI}=0
\end{aligned}\right\}\tag{9.14a}$$

上述方程组并不适合未知量 H_a、R_a、M_a 的实际计算。正如7.6节所述，不用未知量 H_a、R_a 和 M_a，而是采用具有冗余反力 X_0、Y_0、M_0 的等效静力平衡系统，问题将得到极大的简化。冗余反力 X_0、Y_0、M_0 作用于拱的弹性中心 O，方向沿其主轴方向，如图9.11c所示。这样

就可以用三个独立方程代替方程组(9.14)，且每个方程只包含一个未知量。方程(9.14a)的转换可以通过相关矩阵的适当运算得到。现在我们来详细加以说明。

图 9.11

首先引入下面的符号

$$Q_x = \int_0^s \frac{y\mathrm{d}s}{EI} \qquad Q_y = \int_0^s \frac{x\mathrm{d}s}{EI} \qquad A = \int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{EI}$$

$$I_x = \int_0^s \frac{y^2\mathrm{d}s}{EI} \qquad I_y = \int_0^s \frac{x^2\mathrm{d}s}{EI} \qquad I_{xy} = \int_0^s \frac{xy\mathrm{d}s}{EI} \tag{a}$$

如图 9.11d 所示，如果我们给出拱轴一个虚构的厚度 $1/EI$，则积分(a)代表了阴影面积对通过拱轴 A 端的坐标轴 x 和 y 的静矩、面积以及惯性矩和惯性积。利用式(a)的符号，方程(9.14a)变为

$$\left.\begin{aligned} I_xH_a + I_{xy}R_a + Q_xM_a &= -\int_0^s M'y\frac{\mathrm{d}s}{EI} \\ I_{xy}H_a + I_yR_a + Q_yM_a &= -\int_0^s M'x\frac{\mathrm{d}s}{EI} \\ Q_xH_a + Q_yR_a + AM_a &= -\int_0^s M'\frac{\mathrm{d}s}{EI} \end{aligned}\right\} \tag{9.14b}$$

其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & Q_x \\ I_{xy} & I_y & Q_y \\ Q_x & Q_y & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_a \\ R_a \\ M_a \end{pmatrix} = -\left\{\begin{pmatrix} \int \frac{M'y\mathrm{d}s}{EI} \\ \int \frac{M'x\mathrm{d}s}{EI} \\ \int \frac{M'\mathrm{d}s}{EI} \end{pmatrix}\right\} \tag{9.14c}$$

现在，我们来考虑方程中的矩阵

$$F = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & Q_x \\ I_{xy} & I_y & Q_y \\ Q_x & Q_y & A \end{pmatrix} \tag{b}$$

这个矩阵称为拱的几何矩阵。不难看出这个矩阵和作用在拱上的载荷无关，只依赖于拱肋的形状和比例等，即拱的几何特性。因为这个矩阵的元素关于主对角线对称，所以称为对称矩阵。

假设有一组平行轴线 x_1、y_1 轴通过了弹性中心 O，即图 9.11d 中的阴影部分的形心。若用 x_1、y_1 轴代替通过 A 点的 x、y 轴，静矩 Q_{x_1} 和 Q_{y_1} 将消失，相应的几何矩阵 F_1 化为更简单的形式

$$F_1=\begin{pmatrix} I_{x_1} & I_{x_1y_1} & 0 \\ I_{x_1y_1} & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \tag{c}$$

通过引入变换矩阵 T 和转置矩阵 T'

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{Q_x}{A} \\ 0 & 1 & -\dfrac{Q_y}{A} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{Q_x}{A} & -\dfrac{Q_y}{A} & 1 \end{pmatrix} \tag{d}$$

则矩阵 F_1 可以直接由矩阵 F 得到

$$F_1=TFT' \tag{9.15}$$

为了进一步说明这个过程，首先要了解惯性矩和惯性积的平行轴定理，即

$$I_{x_1}=I_x-Ab^2 \quad I_{y_1}=I_y-Aa^2 \quad I_{x_1y_1}=I_{xy}-Aab \tag{e}$$

其中弹性中心 O 的坐标为

$$a=\frac{Q_y}{A} \qquad b=\frac{Q_x}{A} \tag{e'}$$

将 a 和 b 的值代入方程(e)，有

$$I_{x_1}=I_x-\frac{Q_x^2}{A} \qquad I_{y_1}=I_y-\frac{Q_y^2}{A} \qquad I_{x_1y_1}=I_{xy}-\frac{Q_xQ_y}{A} \tag{f}$$

现在将方程(9.15)的矩阵相乘，有

$$F_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{Q_x}{A} \\ 0 & 1 & -\dfrac{Q_y}{A} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & Q_x \\ I_{xy} & I_y & Q_y \\ Q_x & Q_y & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{Q_x}{A} & -\dfrac{Q_y}{A} & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_x-\dfrac{Q_x^2}{A} & I_{xy}-\dfrac{Q_xQ_y}{A} & 0 \\ I_{xy}-\dfrac{Q_xQ_y}{A} & I_y-\dfrac{Q_y^2}{A} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

可以看出矩阵中的元素符合表达式(f)。

参照图 9.11c，x_1、y_1 轴旋转到 x_0、y_0 的位置，即与图 9.11d 中的阴影部分面积的主方向一致，则惯性积 $I_{x_0y_0}$ 等于零，相应的几何矩阵为

$$F_0=\begin{pmatrix} I_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \tag{g}$$

利用变换矩阵 P 和转置矩阵 P'，这个几何矩阵也可以通过前面的矩阵 F_1 得到，即

$$P=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad P'=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta & 0\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\tag{h}$$

这个矩阵的元素就是这组新轴 x_0、y_0 的方向余弦。如前所述，有

$$F_0=PF_1P'\tag{9.16}$$

该变换适用于任意的 β 值，但要使惯性积 $I_{x_0y_0}=0$，必须取

$$\tan2\beta=\frac{2I_{x_1y_1}}{I_{y_1}-I_{x_1}}\tag{i}$$

当方程(9.15)和(9.16)表示的两个变换完成后，图 9.11c 中的冗余反力 X_0、Y_0、M_0 的计算方程为

$$\begin{pmatrix}I_{x_0} & 0 & 0\\ 0 & I_{y_0} & 0\\ 0 & 0 & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\ Y_0\\ M_0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\int\frac{M'y_0\mathrm{d}s}{EI}\\ \int\frac{M'x_0\mathrm{d}s}{EI}\\ \int\frac{M'\mathrm{d}s}{EI}\end{pmatrix}\tag{9.17}$$

为了进一步说明方程(9.17)的应用，我们来看一个承受载荷的固支刚架，如图 9.12a 所示。刚架的尺寸和各杆横截面惯性矩如图所示，为了简便，假设 $EI_0=1\mathrm{kip}\cdot\mathrm{ft}^2$。因此，相对于刚架中心线阴影面积的宽度为 $1/EI$，如图 9.12b 所示。过 A 点取 x 和 y 轴，则方程(a)定义的几何量为

$$Q_x=-6\times3-12\times6+0=-90$$

$$Q_y=0+12\times6+6\times12=144$$

$$A=6+12+6=24$$

图 9.12

$$I_x = 6 \times \frac{6^2}{3} + 12 \times 6^2 + 6 \times \frac{12^2}{12} = 576 \tag{j}$$

$$I_y = 0 + 12 \times \frac{12^2}{3} + 6 \times 12^2 = 1440$$

$$I_{xy} = 0 - 12 \times 6 \times 6 + 0 = -432$$

然后，由方程(f)可知，弹性中心 O 的坐标为

$$a = \frac{144}{24} = 6.00 \qquad b = -\frac{90}{24} = -3.75 \tag{k}$$

将式(j)代入表达式(b)，刚架的几何矩阵为

$$F = \begin{pmatrix} 576 & -432 & -90 \\ -432 & 1440 & 144 \\ -90 & 144 & 24 \end{pmatrix} \tag{l}$$

相似地，利用等式(k)中的坐标 a 和 b，则式(d)中的第一式定义的变换矩阵 T 为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3.75 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{m}$$

然后，对于通过弹性中心的轴 x_1、y_1 来说，如图 9.12c 所示，由方程(9.15)得几何矩阵 F_1

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3.75 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 576 & -432 & -90 \\ -432 & 1440 & 144 \\ -90 & 144 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3.75 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238.5 & 108 & 0 \\ 108 & 576 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

现在，由公式(i)得到

$$\tan 2\beta = \frac{2 \times 108}{576 - 238.5} = 0.640$$

则

$$\beta = 16°18' \qquad \cos\beta = 0.960 \qquad \sin\beta = 0.281$$

有了这些值，表达式(h)定义的变换矩阵 P 为

$$P = \begin{pmatrix} 0.960 & -0.281 & 0 \\ 0.281 & 0.960 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{n}$$

由方程(9.16)，得到如图 9.12c 所示的主轴 x_0、y_0 的几何矩阵为

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0.960 & -0.281 & 0 \\ 0.281 & 0.960 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 238.5 & 108 & 0 \\ 108 & 576 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.960 & 0.281 & 0 \\ -0.281 & 0.960 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 354.3 & 0 & 0 \\ 0 & 608.0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

讨论完刚架主轴的几何矩阵，现在讨论方程(9.17)右端出现的载荷矩阵。为了写出这个矩阵，必须考虑弯矩图 M'，如图 9.12d 所示。用图形的面积除以 EI 为

$$W = \int_A^B \frac{M' \mathrm{d}s}{EI} = \int_D^B \frac{M' \mathrm{d}s}{2EI_0} = -36P$$

图形面积的形心坐标为

$$x_0 = x_1\cos\beta + y_1\sin\beta = 6\times0.960 + 5.75\times0.281 = 7.38$$

$$y_0 = y_1\cos\beta - x_1\sin\beta = 5.75\times0.960 - 6\times0.281 = 3.84$$

因此，载荷矩阵为

$$-\begin{pmatrix}\int\frac{M'y_0\mathrm{d}s}{EI}\\ \int\frac{M'x_0\mathrm{d}s}{EI}\\ \int\frac{M'\mathrm{d}s}{EI}\end{pmatrix} = 36P\begin{pmatrix}3.84\\7.38\\1\end{pmatrix} \tag{o}$$

现在，对矩阵 F_0 求逆，然后求解方程(9.17)，得到

$$\begin{pmatrix}X_0\\Y_0\\M_0\end{pmatrix} = \frac{36P}{1000}\begin{pmatrix}2.82 & \cdot & \cdot\\ \cdot & 1.64 & \cdot\\ \cdot & \cdot & 41.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3.84\\7.38\\1\end{pmatrix} = \frac{36P}{1000}\begin{pmatrix}10.83\\12.14\\41.70\end{pmatrix}$$

也就是

$$X_0 = 0.390P\text{kip} \qquad Y_0 = 0.437P\text{kip} \qquad M_0 = 1.50P\text{ft}\cdot\text{kip}$$

9.6 连续刚架的矩阵分析

连续刚架结构，如房屋刚架，可能是高阶超静定问题，在分析求解过程中会有很多未知量。求解这类问题，最现实的方法就是依靠电子数字计算机，因此矩阵表达最有优势。下面来举一个二层房屋框架实例，来说明矩阵方法在此类问题中的应用，如图9.13所示。一方面，这个刚架不包括太多未知量，从而使讨论更简明。而另一方面，这个问题足以解释在分析大型结构中所需的所有步骤。

图 9.13

为了简便，假设每个杆件均有相同的长度 l 和抗弯刚度 EI，所以刚度系数也相同，即 $k = EI/l$。一般地，忽略杆件轴力引起的变形和剪力对杆件的影响，只考虑弯曲变形。基于这个假设，载荷作用下刚架的变形完全依赖于六个位移，也就是，两个地板的水平位移 δ_a 和 δ_b，四个刚结点的转角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4。六个位移确定后，所有的杆端弯矩可以直接由斜率—挠度方程(8.6)计算(参见8.2节)，从而问题得以解决。引入列向量[⊖]

$$(\delta_i) = \{\delta_a \quad \delta_b \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4\} \tag{a}$$

并选择这组位移为未知量。

⊖ 为了节省空间，列向量通常写为水平的，用大括号{}来代替()，表明这个向量不是行向量。

首先，我们考虑如图 9.14 所示的两个简单的例子，计算式(a)中的位移。在图 9.14a 中，两端固支的等截面梁 AB，A 端位移为 δ，且保证 A 端的切线没有任何转动和 B 端没有任何位移，使用斜率—挠度方程(8.6)很容易算出 A、B 点反力，得

$$R_{ab}=\frac{12k}{l^2}\delta \qquad M_{ab}=\frac{6k}{l}\delta \qquad R_{ba}=\frac{12k}{l^2}\delta \qquad M_{ba}=\frac{6k}{l}\delta \tag{b}$$

在图 9.14b 中，使相同的梁在端点 A 产生 θ 转角，且保证 A 端无任何横向挠度或 B 端没有任何位移。然后再用 8.2 节中的斜率—挠度方程(8.6)，有

$$R_{ab}=\frac{6k}{l}\theta \qquad M_{ab}=4k\theta \qquad M_{ba}=\frac{6k}{l}\theta \qquad M_{ba}=2k\theta \tag{b'}$$

在方程(b)和方程(b′)中，δ 和 θ 前的系数的含义是：当 δ 和 θ 等于 1 时，梁端的支反力或约束力。这些和每种位移相对应的量称为梁的刚度影响系数。为了便于对照，将这些刚度系数以矩阵形式写在每根梁的下固，如图 9.14 所示。

图　9.14

现在考虑图 9.13 的刚架，去掉所有施加的载荷，锁住结点使其不能移动或转动。然后解除六个自由度中任何一个相关的约束，如约束 j，使其有单位位移 $\delta_j=1$[⊖]。由于这个人为的约束，结构会产生相应的变形。继续计算相应的约束反力，即计算出保持 $\delta_j=1$ 时的结构所需的外力和外力矩。一般来说，不管是外力还是外力矩，都将用 S_{ij} 表示 i 点的外支反力。这样，当 j 点产生单位位移，其他位移为 0 时，在 i 点引起的支反力就是刚度影响系数 S_{ij}。在这个例子中，共有 36 个刚度影响系数。我们用一根杆件的刚度系数说明了计算过程，如图 9.14 所示。

首先，在图 9.15a 中，使结构产生单位位移 $\delta_a=1$，即上层横向位移为单位位移，其他位移为 0。为了保持结构的变形所需施加的外力如图[⊖]所示，外力的值列在结构旁边的表里。在计算过程中，我们定义线位移和力的符号为向右为正，向左为负；角位移和力矩的符号为顺时针为正，逆时针为负。作为例子，考虑 S_{ba} 的计算。从图 9.14a 中不难看出，图 9.15a

⊖ 这可能是水平位移或角位移，即我们用符号 δ_j 表示一般意义上的位移。

⊖ 由于结构中的杆件是不可伸长的，假定约束的所有水平力作用在结构的左边部分。

中上层每根立柱底部反力为 $12k/l^2$，方向向左且有两根这样的立柱，因此，$S_{ba}=-24k/l^2$。再考虑 S_{4a}的计算。从图 9.14a 中看出，图 9.15a 中的立柱 42 底部的反弯矩为 $6k/l$，逆时针方向，且只有一个立柱，因此，$S_{4a}=-6k/l$。读者可以自己检验 S_{ij}的其他值。

接下来，在图 9.15b 中给定一个单位位移 $\delta_b=1$，即中间层水平位移为 1，其他位移为 0。然后利用图 9.14a 中的刚度系数可以求出外支反力 S_{ij}，并列入图 9.15b。对应于 $\theta_1=1$、$\theta_2=1$、$\theta_3=1$、$\theta_4=1$ 的变形和相应的外力如图 9.15c、d、e、f 所示。这样就完成了刚架影响系数的计算。

图 9.15

现在，将刚度系数组装为矩阵形式，称为结构的刚度矩阵，其行和列都按照 a、b、1、2、3、4 顺序排列，有

$$S_{ij}=\begin{pmatrix} \frac{24k}{l^2} & -\frac{24k}{l^2} & -\frac{6k}{l} & -\frac{6k}{l} & -\frac{6k}{l} & -\frac{6k}{l} \\ -\frac{24k}{l^2} & \frac{48k}{l^2} & \frac{6k}{l} & \frac{6k}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{6k}{l} & \frac{6k}{l} & 8k & 2k & 2k & 0 \\ -\frac{6k}{l} & \frac{6k}{l} & 2k & 8k & 0 & 2k \\ -\frac{6k}{l} & 0 & 2k & 0 & 12k & 2k \\ -\frac{6k}{l} & 0 & 0 & 2k & 2k & 12k \end{pmatrix} \tag{c}$$

值得注意的是，这是一个对称矩阵，这种对称性可由互等定理得到。

得到刚度影响系数后，应用叠加原理，计算保持任一组位移 δ_j 时，刚架所需施加的外力。例如，在 a 点所需的外力为

$$F_a=S_{aa}\delta_a+S_{ab}\delta_b+S_{a1}\theta_1+S_{a2}\theta_2+S_{a3}\theta_3+S_{a4}\theta_4$$

在 1 点所需的外力矩为

$$M_1=S_{1a}\delta_a+S_{1b}\delta_b+S_{11}\theta_1+S_{12}\theta_2+S_{13}\theta_3+S_{14}\theta_4$$

等等。然而，我们要寻找的是由一组特定的外力，即结构上实际作用的载荷，引起的真实位移，如图 9.13 所示。因此，这组真实位移是由以下联立方程组求得

$$\left.\begin{aligned} &S_{aa}\delta_a+S_{ab}\delta_b+S_{a1}\theta_1+S_{a_2}\theta_2+S_{a3}\theta_3+S_{a4}\theta_4=P_a \\ &S_{ba}\delta_a+S_{bb}\delta_b+S_{b1}\theta_1+S_{b_2}\theta_2+S_{b3}\theta_3+S_{b4}\theta_4=P_b \\ &S_{1a}\delta_a+S_{1b}\delta_b+S_{11}\theta_1+S_{12}\theta_2+S_{13}\theta_3+S_{14}\theta_4=0 \\ &S_{2a}\delta_a+S_{2b}\delta_b+S_{21}\theta_1+S_{22}\theta_2+S_{23}\theta_3+S_{24}\theta_4=Qa \\ &S_{3a}\delta_a+S_{3b}\delta_b+S_{31}\theta_1+S_{32}\theta_2+S_{33}\theta_3+S_{34}\theta_4=\frac{ql^2}{12} \\ &S_{4a}\delta_a+S_{4b}\delta_b+S_{41}\theta_1+S_{42}\theta_2+S_{43}\theta_3+S_{44}\theta_4=-\frac{ql^2}{12} \end{aligned}\right\} \tag{9.18a}$$

其中 $ql^2/12$ 和 $-ql^2/12$ 分别代表梁 34 两端的固端弯矩，即结点 3 和结点 4 的不平衡力矩。引入矩阵符号

$$(F_i)=\begin{pmatrix} P_a & P_b & 0 & Qa & \frac{ql^2}{12} & -\frac{ql^2}{12} \end{pmatrix} \tag{d}$$

称为载荷矩阵。方程(9.18a)用矩阵符号表示为

$$(S_{ij})(\delta_j)=(F_i) \tag{9.18b}$$

在方程中出现的三个矩阵分别由表达式(c)、式(a)和式(d)定义。

由方程(9.18b)，位移可从下列方程解出

$$(\delta_j)=(S_{ij})^{-1}(F_i) \tag{9.18c}$$

要注意的是，位移的解需要求出刚度矩阵(S_{ij})的逆，而且必须求助于计算机。

为了解释方程(9.18a)的解，引入下面的数据

$$l=10\text{ft} \qquad k=\frac{EI}{l}=5000\text{kip}\cdot\text{ft} \qquad a=2\text{ft}$$

$$P_a=5\text{kip} \qquad P_b=5\text{kip} \qquad Q=2\text{kip} \qquad \frac{ql^2}{12}=8\text{kip}\cdot\text{ft} \tag{e}$$

将数据代入，刚度矩阵(c)变为

$$(S_{ij})=100\begin{pmatrix} 12 & -12 & -30 & -30 & -30 & -30 \\ -12 & 24 & 30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & 30 & 400 & 100 & 100 & 0 \\ -30 & 30 & 100 & 400 & 0 & 100 \\ -30 & 0 & 100 & 0 & 600 & 100 \\ -30 & 0 & 0 & 100 & 100 & 600 \end{pmatrix} \tag{f}$$

载荷矩阵(d)变为

$$(F_i)=\{5 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 8 \quad -8\} \tag{g}$$

然后由方程(9.18c)，得到○

$$\begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{10000}\begin{pmatrix} 34.848 & 15.152 & 0.909 & 0.909 & 1.364 & 1.364 \\ 15.152 & 11.515 & 0.091 & 0.091 & 0.636 & 0.636 \\ 0.909 & 0.091 & 0.324 & -0.033 & -0.018 & 0.054 \\ 0.909 & 0.091 & -0.033 & 0.324 & 0.054 & -0.018 \\ 1.364 & 0.636 & -0.018 & 0.054 & 0.234 & 0.020 \\ 1.364 & 0.636 & 0.054 & -0.018 & 0.020 & 0.234 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{10000}\begin{pmatrix} 253.6 \\ 133.7 \\ 4.296 \\ 6.868 \\ 11.93 \\ 8.216 \end{pmatrix}$$

挠度 δ_a 和 δ_b 以 ft(英尺)为单位，转角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 以 rad(弧度)为单位。因此，$\delta_a=0.02536\text{ft}$，$\delta_b=0.01337\text{ft}$，$\theta_1=0.0004296$，$\theta_2=0.0006868$，$\theta_3=0.001193$，$\theta_4=0.0008216$。

如前所述，一旦确定了这些位移，结构所有的杆端弯矩就可由斜率—挠度方程(8.6)计算出来，分析过程即告完成。值得注意的是，通过引入载荷矩阵式(d)，每列向量代表一组载荷，就可以简化对外载荷的分析。式(c)中的刚度矩阵和结构载荷无关。从这个例子可以看出，如果能利用电子计算机求解刚度矩阵的逆，矩阵方法要优于第 8 章讨论的任何一种方法。

○ 式(f)中的刚度矩阵的逆已经通过电子计算机求出。

第 10 章

结构动力学

10.1 单自由度系统的自由振动

在前面的章节中，我们讨论了在静载荷作用下结构或结构单元的力学行为。然而，很多情况需要考虑结构在运动、振动或者冲击载荷作用下的响应。比如：经受地震的建筑物，承受移动载荷的桥梁以及承受风暴、爆炸冲击的结构等，这些都是动力学问题的例子。本章将探讨动力学的几个重要问题。

以某种方式通过弹性约束联系在一起的分布质量组成的任何结构，如果在平衡状态受到扰动，该结构将产生振动。在处理一个已知结构的此类振动问题时，有时用一个受到无重弹簧支撑的单质量块来表示该结构，这种对结构的理想化表示称为模型。举例来说，考虑一个跨中承受着电动机重量的等截面简支梁，如图 10.1a 所示。把这个弹性梁看作一个支撑电动机质量块的弹簧，得到如图 10.1b 所示的系统模型。假定质量块的运动被限制在竖直方向内，就得到了一个单自由度系统。也就是说，单坐标 x 定义了系统的位置。第二个例子，考虑如图 10.1c 所示的桥式门架结构，一个由柔性竖直立柱支撑的刚度很大的梁。假定梁是完全刚性的，立柱无重量，可以看到，对于梁的水平移动，结构的运动就像图 10.1d 所示的弹簧支撑的质量块一样。于是再次得到单自由度系统模型。

图 10.1

现在详细考虑单自由度的悬挂弹簧质量块系统的动力学行为，如图 10.2 所示。在重力 W 作用下，弹簧的伸长量为

$$\delta_{st}=\frac{W}{k} \tag{a}$$

这里，k 称为弹簧常数，表示弹簧产生单位伸长所需要的荷载。如果重量 W 以 p(英磅)为单位，弹簧伸长以 in(英寸)为单位，那么弹簧常数 k 自然以p/in(英镑/英寸)为单位。量 δ_{st}的大小决定了图示载荷的平衡位置。

图 10.2

借助冲击或者突然施加或移去一个铅垂力的方式，产生了振动系统。这种仅由弹簧内的弹性力来维持的振动系统称为自由或自然振动。在研究这些振动问题时，将采用牛顿第二运动定律：质点的质量和其加速度的乘积等于作用在加速度方向上的力。在这种情况下，振动物体的质量是 W/g、这里 g 是由重力引起的加速度。

物体的加速度由从平衡位置算起的位移 x 对于时间的二阶导数给出，表示为 $\ddot{x}$。作用在振动物体上的力是重力 W，方向竖直向下；作用在弹簧上的力，如图 10.2 所示，方向竖直向上，大小等于 $W+kx$。因而，在上述条件下的运动微分方程变为

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-(W+kx)=-kx \tag{b}$$

引入符号

$$p^2=\frac{kg}{W}=\frac{g}{\delta_{st}} \tag{c}$$

式(b)变换为如下形式

$$\ddot{x}+p^2x=0 \tag{10.1}$$

如果令 x 取以下两值中的任一个，上式将被满足

$$x=C_1\cos pt \text{ 或者 } x=C_2\sin pt$$

这里 C_1 和 C_2 是任意常量。将这两个结果叠加，可得到方程(10.1)的通解。因此

$$x=C_1\cos pt+C_2\sin pt \tag{10.2}$$

可以看出，由于 $\cos pt$ 和 $\sin pt$ 的值以时间间隔 τ 循环出现，使得重物 W 的铅垂运动带有振动特点

$$p(t+\tau)-pt=2\pi \tag{d}$$

该时间间隔称为振动周期，其大小可以由式(d)和式(c)求出

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \tag{10.3a}$$

可以看出，悬挂重物 W 的振动周期与长度等于 δ_{st}的单摆的振动周期相等，这与振幅的大小无关。为求出周期 τ，仅需要计算或通过实验获得静变形 δ_{st}。每单位时间，即每秒振动的次数被称为振动频率，用 f 表示。由此，通过式(10.3a)得到

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{10.3b}$$

方程(10.2)表示的振动称为简谐振动。为确定方程中的两个常量 C_1 和 C_2，必须考虑运动的初始条件。例如，假定重物 W 在初始时刻($t=0$)有相对平衡位置的初始位移 x_0 和初始速度 $\dot{x}_0$。下面，把 $t=0$ 和 $x=x_0$ 代入方程(10.2)，我们得到 $C_1=x_0$。同理，把 $t=0$ 和 $\dot{x}=\dot{x}_0$ 代入

方程(10.2)的一阶导数形式，得到 $C_2=\dot{x}_0/p$。得到了常量 C_1、C_2 的值后，方程(10.2)变为

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \tag{10.4a}$$

可以看出，这个振动表达式包含两部分：第一部分，取决于初始位移，与 $\cos pt$ 成比例；第二部分，取决于初始速度，与 $\sin pt$ 成比例。

把式(10.4a)用旋转矢量的方式来表示，这样做有时很方便。参照图 10.3，设$\overline{OB}$是长度为 x_0 的矢量，以等角速度 p 绕原点 O 逆时针旋转。以该矢量与 x 轴重合时作为初始零时刻开始计时，可以看出，在任意时刻 t 这个矢量绕 x 轴转过的角度为 pt，矢量在 x 轴的投影即为方程(10.4a)的第一部分。现在，我们构建第二个矢量$\overline{BC}$，方向垂直于矢量$\overline{OB}$，长度为 $\dot{x}_0/p$，则该矢量在 x 轴的投影即表示方程(10.4a)的第二部分。接下来，我们可以看出，长度为 A 的合矢量$\overline{OC}$在 x 轴上的投影即表示了方程(10.4a)的全解。设$\overline{OB}$和$\overline{OC}$之间的夹角为 α，就可以把式(10.4a)写成以下形式

$$x=A\cos(pt-\alpha) \tag{10.4b}$$

这里，参照图 10.3 得

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2} \tag{e}$$

$$\alpha=\arctan\frac{\dot{x}_0}{px_0} \tag{f}$$

量 A 表示了振动物体的最大位移，称为振幅；当 x_0 和 $\dot{x}_0$ 的值给定时，可以通过式(e)来计算 A 值。由式(f)定义的量 α 称为相位角。从图 10.3 中还可以看出，α/p 即为振动物体从 $t=0$ 的初始时刻第一次运动到最大位移处所经历的时间。滞后的时间如图 10.4 所示，该图也表示方程(10.4b)的几何形式。

图 10.3

图 10.4

假定阻尼可以忽略不计，振动系统的固有频率通常通过能量守恒定律计算。举例来说，系统如图 10.2 所示，忽略弹簧的质量，仅考虑悬挂重物的质量，系统在振动过程中的动能为

$$T=\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2} \tag{g}$$

这种情况下的势能包含两部分：①弹簧变形的应变能；②重物随位置的势能。首先考虑弹簧的应变能，当离开平衡位置的位移为 x 时，弹簧的张力为 $k(\delta_{st}+x)$，相应的应变能为 $k(\delta_{st}+x)^2/2$。当在平衡位置 $x=0$ 时，则该应变能为 $k\delta_{st}^2/2$。因此，在位移 x 的过程中，储存在

弹簧中的能量为

$$\frac{k(\delta_{st}+x)^2}{2}-\frac{k\delta_{st}^2}{2}=k\delta_{st}x+\frac{kx^2}{2}=Wx+\frac{kx^2}{2}$$

由于重物的位置引起的势能经过位移 x 时减少了 Wx。因而，系统在经过位移 x 的过程中总势能的变化为

$$V=Wx+\frac{kx^2}{2}-Wx=\frac{kx^2}{2} \tag{h}$$

需要指出的是，上式仅表示初始无应力的弹簧伸长 x 后的应变能。

有了式(g)和式(h)后，并忽略阻尼，可以看到振动系统的能量守恒方程为

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\text{const} \tag{i}$$

方程右边常量的大小取决于运动的初始条件。假定 $t=0$ 时刻，$x=x_0$ 并且 $\dot{x}=0$，则系统的初始总能量为 $kx_0^2/2$，方程(i)变为

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{kx_0^2}{2} \tag{j}$$

振动过程中，当位移 x 等于 x_0 时和速度 $\dot{x}$ 等于零时，系统的能量只有势能。当位移 x 等于零时，也就是说，当振动物体经过它的中间位置时，速度 $\dot{x}$ 达到最大值。从式(j)可以得到

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_{max}^2}{2}=\frac{kx_0^2}{2} \tag{10.5}$$

因而得出，系统在中间位置的最大动能等于其在最大位移处的势能。

在所有情况下，假定系统振动为简谐振动，式(10.5)可用来计算频率。若假定运动表示为如下形式

$$x=x_0\cos pt \qquad \dot{x}=-x_0p\sin pt$$

可以看到，对于简谐振动

$$\dot{x}_{max}=px_0 \tag{k}$$

把上述关系代入方程(10.5)，得到

$$p^2=\frac{kg}{W}$$

这同式(c)算得的结果一致。下一节将介绍频率计算方法的几个算例。

习题

1. 重 $W=500\text{lb}$ 的重物从 $h=1\text{in}$ 的高度落到简支梁的中点位置，该简支梁长 $l=8\text{ft}$，其横截面惯性矩为 $I=12\text{in}^4$。忽略梁的质量，要求计算梁的最大挠度及自由振动的周期 τ。
2. 一个旋转鼓轮，其下方通过弹性钢绞索系着一个重量 $W=10\text{kip}$ 的升降机。当该升降机以 $v_0=3\text{ft/sec}$ 等速下降时，设备突然停止翻转，此时拉直的绞索长度为 $l=50\text{ft}$。设绞索的横截面积为 $A=2\text{in}^2$，弹性模量为 $E=20\times10^6\text{psi}$，问绞索内的最大拉应力是多少？
3. 计算图 10.1c 所示的桥式门架自由横向振动的自然周期。这里，梁重 $W=2\text{kip}$，每根竖直立柱的长度为 $l=10\text{ft}$，槽钢的横截面积为 $A=4\text{in}^2$，最小回转半径为 $r=0.06\text{in}$。弹性模量 $E=30\times10^6\text{psi}$，横梁是完全刚体。

10.2　瑞雷(Rayleigh)法

在上一节所讨论的自由振动问题中，通过忽略弹簧的质量而研究悬挂重物的质量使问题得到了简化。为了确定这种简化对振动频率的影响并求得更准确的近似解，我们将要讨论 Lord Rayleigh 所采用的方法。在应用这个方法时，需要对振动系统结构作一些假设，然后通过上一节的方程(10.5)求出振动频率。

举一个应用 Rayleigh 法的简单例子，如图 10.2 所示。假定相对于振动物体的质量 W 而言，弹簧的质量很小，对振动模态的影响不是很大。为精确起见，假定弹簧中距离其固定端位移为 c 的任意单元的位移与该弹簧被视为无重弹簧时的位移一样，也就是说，与到固定端的距离 c 成比例，该单元的位移为

$$\frac{c}{l}x \tag{a}$$

如果弹簧质量对位移没有影响，系统势能表达式仍然和式(10.5)的右端项一样，只有系统的动能需要重新计算。用 w 表示弹簧单位长度的重量，则弹簧微段 $\mathrm{d}c$ 长的单元质量为 $w\mathrm{d}c/g$，利用表达式(a)，该单元相应的动能为

$$\frac{w}{2g}\left(\frac{\dot{x}c}{l}\right)^2\mathrm{d}c \tag{b}$$

那么弹簧的总动能为

$$\frac{w}{2g}\int_0^l\left(\frac{\dot{x}c}{l}\right)^2\mathrm{d}c=\frac{\dot{x}^2wl}{2g\,3} \tag{c}$$

该动能与重物 W 的动能叠加，那么能量方程为

$$\frac{\dot{x}^2}{2g}\left(W+\frac{wl}{3}\right)+\frac{kx^2}{2}=\frac{kx_0^2}{2} \tag{d}$$

把上式与上一节的方程(j)比较，可以看出，为了估算弹簧质量对如图 10.2 所示自由振动系统频率的影响，仅仅需要把弹簧质量的 1/3 加到悬挂重物的重量 W 上即可。

以上结论，虽然是在弹簧重量相比于载荷重量很小的前提下得出的，但即便是弹簧的重量与重物的重量在同一数量级，这种算法也有足够的精度。当 $wl=0.5W$ 时，相比于精确解，这种近似解的误差为 0.5%；当 $wl=W$ 时，误差为 0.75%。

第二个例子，考虑图 10.5 所示中间承载的等截面梁的振动情况。如果梁的重量 wl 远小于载荷 W，就可以假定梁在振动过程中的挠曲线与其静态挠曲线相同，这种假设有足够的精度。那么，用 x 表示重物在振动过程中的位移，在距离支座为 c 处，梁的任意一段 $w\mathrm{d}c$ 的位移为

图　10.5

$$x\frac{3cl^2-4c^2}{l^3} \tag{e}$$

整个梁的动能为

$$2\int_0^{l/2}\frac{w}{2g}\left(\dot{x}\frac{3cl^2-4c^3}{l^3}\right)^2\mathrm{d}c=\frac{17}{35}wl\frac{\dot{x}^2}{2g} \tag{f}$$

为估算梁的重量对振动周期的影响，需要把梁振动的动能加到集中在梁中间的重物的动能

$W\dot{x}^2/2g$ 上去；也就是说，所求振动周期将等于梁中点处作用载荷的无重梁的振动周期

$$W+\frac{17}{35}wl$$

表达式(f)虽然是基于梁的重量远小于载荷的重量 W 的假设下得到的，但可应用于所有实际情况，甚至包含梁在无承载时的极限情况，即 $W=0$。这时，假设$\frac{17}{35}wl$ 集中作用于梁的中点，这种近似计算方法的精度对于所有实际应用是足够的，梁在作用于中点的载荷$\frac{17}{35}wl$ 作用下的挠度为

$$\delta_{st}=\frac{17}{35}wl\frac{l^2}{48EI}$$

把上式代入式(10.3a)，得到自由振动的周期为

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}\approx 0.632\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$$

此情况的精确解为

$$\tau=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}\approx 0.637\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$$

可以看出，即便在极限情况下，该近似解的误差也小于1%。

同样的方法也可以应用于更一般的例子中，如图 10.6 所示，载荷不是作用于梁的中点。这时在载荷作用下梁的静变形为

$$\delta_{st}=\frac{Wa^2b^2}{3lEI} \tag{g}$$

图 10.6

弹簧常数为

$$k=\frac{3lEI}{a^2b^2} \tag{h}$$

如果忽略梁的质量，通过式(10.3a)可以得到振动周期为

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{Wa^2b^2}{3glEI}} \tag{i}$$

考虑梁的质量后，采用以下表达式作为梁的两部分的静变形

$$x_1=\frac{Wb\xi}{6lEI}[a(l+b)-\xi^2] \qquad x_2=\frac{Wa\eta}{6lEI}[b(l+a)-\eta^2] \tag{j}$$

那么，用 $\dot{x}_{max}$表示载荷 W 的最大速度，则两部分梁的速度分别为

$$(\dot{x}_1)_{max}=\dot{x}_{max}\frac{x_1}{\delta_{st}} \qquad (\dot{x}_2)_{max}=\dot{x}_{max}\frac{x_2}{\delta_{st}}$$

相应的动能为

$$\frac{w\dot{x}_{max}^2}{2g}\left[\int_0^a\left(\frac{x_1}{\delta_{st}}\right)^2d\xi+\int_0^b\left(\frac{x_2}{\delta_{st}}\right)^2d\eta\right]=\frac{w\dot{x}_{max}^2}{2g}(\alpha a+\beta b) \tag{k}$$

这里

$$\alpha=\frac{1}{3}\frac{l^2}{b^2}+\frac{23}{105}\frac{a^2}{b^2}-\frac{8}{15}\frac{al}{b^2}$$

$$\beta=\frac{1}{12}\frac{(l+a)^2}{a^2}+\frac{1}{28}\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{10}\frac{b(l+a)}{a^2}$$

如果在计算振动周期时考虑梁的质量，就必须把梁的动能[见式(k)]加到重物的动能 $W(\dot{x})^2_{max}/2g$ 上去。那么，代替式(i)，得

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{(W+\alpha wa+\beta wb)a^2b^2}{3glEI}} \tag{l}$$

在自由端载有重物 W 的悬臂梁(见图 10.7)，可以用相同的方法来计算振动周期。假定在振动过程中，梁的挠曲线形状同静载荷作用下的挠曲线形状相同。用 x 表示重物 W 在竖直方向的位移，等截面悬臂梁的动能为

图　10.7

$$\int_0^l\frac{w\dot{x}^2}{2g}\left(\frac{3c^2l-c^3}{2l^3}\right)^2\mathrm{d}c=\frac{33}{140}wl\frac{\dot{x}^2}{2g} \tag{m}$$

因面，振动周期等于在一端有如下载荷的无重悬臂梁的周期

$$W+\frac{33}{140}wl$$

这个结果是在梁的重量 wl 远小于重物的重量 W 的假设下得到的，但在梁的重量 wl 不是很小时也有足够精度。计算重物重量 $W=0$ 的特例，得到

$$\delta_{st}=\frac{33}{140}\frac{wll^3}{3EI}$$

相应的振动周期为

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}=\frac{2\pi}{3.567}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$$

这种情况下的精确解为

$$\tau=\frac{2\pi}{3.515}\sqrt{\frac{wl^4}{EIg}}$$

可以看出，近似解的误差仅为 1.5%。

假设立柱内的压力远小于欧拉载荷，相似的近似解也可用到如图 10.1c 所示的桥式门架中。

当然，上述描述的计算频率的近似方法也可用于承载几个载荷 W_1、W_2、W_3 时的简支梁的情况。设 x_1、x_2、x_3 为梁在各载荷作用下的静变形，则梁变形的势能为

$$V=\frac{1}{2}(W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3) \tag{n}$$

计算低阶模态的振动频率时，可以将图 10.8 所示的静挠度曲线看作系统振动时的极限位置的近似。那么，假定振动为简谐振动，则载荷 W_1、W_2、W_3 的位移为

图　10.8

$$x_1\cos pt\qquad x_2\cos pt\qquad x_3\cos pt \tag{o}$$

振动过程中，梁的动能在经过中点位置时达到最大。

从式(o)可以看出，相应于这个位置时载荷的速度大小为 px_1、px_2、px_3，系统的动能变为

$$T=\frac{p^2}{2g}(W_1x_1^2+W_2x_2^2+W_3x_3^2) \tag{p}$$

根据方程(10.5)，令式(n)和式(p)相等，得到

$$p^2=g\frac{W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3}{W_1x_1^2+W_2x_2^2+W_3x_3^2}$$

振动周期

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{W_1x_1^2+W_2x_2^2+W_3x_3^2}{g(W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3)}} \tag{10.6}$$

可以看出，在计算周期 τ 时，只需要用到梁的静挠度 x_1、x_2、x_3。这些量很容易通过常规方法计算得到。如果是变截面梁，利用几何法求得静挠度比较有利。如果有必要，梁本身重量的影响也可以考虑进去。为此，只需把梁分成几部分，而每部分的重量看作集中载荷作用在各自的重心上。

习题

1. 桥式门架如图 10.1c 所示，为了修正竖直立柱的质量对框架自由横向振动周期的影响，应该从每根竖直立柱总重 wl 中拿出多大比例加到刚架梁的重量 W 上去？忽略立柱柔性刚度的轴向压缩，假设端部固支。
2. 有一惯性矩为 I_0 的薄圆盘，其中心刚性连接于一水平轴的端部，该轴长为 l，重 wl，如图 10.9 所示。轴的两端由轴承 A 和 B 支撑，轴承可以略有松动使轴发生图示的弯曲。对于圆盘绕水平直径的小幅度的旋转摆动，忽略轴的质量，振动的周期是 $\tau=2\pi\sqrt{I_0/k}$，这里 $k=3EI/l$，EI 是轴的抗弯刚度。为了修正轴的质量对周期的影响，应该使用增加后的惯性矩 $I_0+\alpha wl^3/g$ 代替原来的惯性矩 I_0。试通过 Rayleigh 法计算因子 α 的值。

图 10.9

3. 如图 10.10 所示，忽略悬臂梁的质量，利用式(10.6)的 Rayleigh 法，近似计算系统自由振动时基础模态的周期 τ。给出下面数值：$W=1000\text{lbf}$，$I=15\text{in}^4$，$E=30\times10^6\text{psi}$。
4. 使用 Rayleigh 法，近似计算梁自由振动的基础模态的周期，梁承载有两个重为 W 的重物，如图 10.11 所示。忽略梁的分布质量，假定 $W=1000\text{lbf}$，$E=30\times10^6\text{psi}$，$I=15\text{in}^4$。

图 10.10

图 10.11

10.3　稳态强迫振动

在上一节中，通过悬挂物体的初始位移或速度来产生振动，此类振动称为自由振动。因为存在着多种阻尼，比如摩擦、空气阻力以及弹簧的不完全变形等，自由振动将逐渐减弱直至消失。现在来考虑另一种由外部干扰力产生的振动，此类振动称为强迫振动。实际应用中，因为一些旋转机械的不平衡而产生的周期干扰力是非常重要的。如图 10.12a 所示，非平衡转子的离心力就产生了此类干扰力。图 10.12 中，用 P_0 表示力的大小，用 ωt 表示转过角度的大小，可以得到干扰力在竖直方向和水平方向的分力分别为 $P_0\sin\omega t$ 和 $P_0\cos\omega t$。如果该机械刚架同基础刚性连接(见图 10.12a)，则全部离心力作用于地基，机械产生不了任何运动。有时采用如图 10.2b 所示的弹簧装置来消除该结构要传递的力，假定有辊轴支座限制了刚架 W 的横向位移，就可以得到与图 10.12a 所示系统相似的系统。为得到通过弹簧传递给地基的竖直方向的脉冲力的大小，必须考虑该刚架在竖向干扰力 $P_0\sin\omega t$ 作用下的竖向振动。如果把竖向力加到原来讨论的力上[见 10.1 节中式(b)]，就得到所求的运动微分方程，即

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = W - (W + kx) + P_0\sin\omega t \tag{a}$$

引入符号

$$q_0 = \frac{P_0 g}{W} \qquad p^2 = \frac{kg}{W} \tag{b}$$

图　10.12

运动方程(a)变为

$$\ddot{x} + p^2 x = q_0\sin\omega t \tag{10.7}$$

假定

$$x = A\sin\omega t$$

为方程的特解。上式中 A 是常量。把上式代入式(10.7)得到

$$A = \frac{q_0}{p^2 - \omega^2}$$

于是所求特解为

$$x = \frac{q_0}{p^2 - \omega^2}\sin\omega t \tag{10.8a}$$

把上式同表示自由振动的表达式(10.2)相加，得到方程(10.7)的全解为

$$x = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{q_0}{p^2 - \omega^2}\sin\omega t \tag{10.8b}$$

可以看出，全解包含两部分：前两项是第一部分，表示自由振动，在 10.1 节中已讨论；由干扰力所决定的最后一项是第二部分，用以表示强迫振动。很明显，强迫振动同干扰力有相同的周期 $\tau_1 = 2\pi/\omega$。只考虑强迫振动时，把式(b)中用以表示 q_0 和 p^2 的两式代入方程(10.8a)，得到以下形式

$$x = \frac{P_0}{k}\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\sin\omega t \tag{10.8c}$$

式中$(p_0/k)\sin\omega t$ 表示作用静态干扰力所产生的位移，系数 $1/(1-\omega^2/p^2)$表示了干扰力的动态特性，其绝对值被称为放大因子。放大因子的大小取决于比值 ω/p，而比值 ω/p 是系统的干扰力的频率除以系统的固有频率得到的，这里干扰力的频率称为激振频率。图 10.13 画出了放大因子 β 与比值 ω/p 的关系曲线。可以看出，当比值 ω/p 较小时，即激振频率 ω 远小于固有频率 p 时，放大因子 β 趋向于单位值，动态位移与只在力 $P_0\sin\omega t$ 作用下的静态位移几乎相同。随着比值 ω/p 接近于单位值，放大因子与强迫振动的振幅迅速增加，当 $\omega \approx p$，即激振频率与系统固有频率重合时，二者趋向于无穷大，这种情况称作共振。共振条件下放大因子的无穷大说明在没有阻尼时振幅可以无限增大。实际中，阻尼总是存在的，这就使得在共振时振幅虽可以很大，但毕竟不能无限大。

图 10.13

当干扰力的频率继续增加超过共振范围时，放大因子重新回归到有限值，并且随 ω/p 绝对值的增大而逐渐减小直至接近于零，如图 10.13 所示。这说明了脉动力的高阶频率产生振幅很小的强迫振动，在很多情况下可以认为物体 W 在空间保持不动。此类情况的实际意义后面再作讨论。

类似图 10.12b 所示的强迫振动系统，不仅可以通过施加周期力产生，也可以通过地基的周期运动产生。例如，图 10.2 所示的无重弹簧，假定支撑重物的弹簧顶端在竖直方向有简谐振动

$$\xi = a\sin\omega t \tag{c}$$

当 $\xi=0$ 时，悬挂重物 W 相对于平衡位置的距离用 x 表示，则在任意时刻 t 弹簧的伸长量为 $x-\xi+\delta_{st}$，相应的弹簧拉力为 $k(x-\xi)+W$。因此，悬挂重物的运动方程为

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = W - k(x-\xi) - W = -k(x-\xi) \tag{d}$$

把 ξ 的表达式(c)代入式(d)，并利用符号

$$q_0 = \frac{akg}{W} \qquad p^2 = \frac{kg}{W} \tag{e}$$

式(d)变为

$$\ddot{x} + p^2 x = q_0\sin\omega t$$

上式与式(10.7)完全相同。因而可以推断出，给弹簧顶端的地面运动 $a\sin\omega t$ 与给悬挂重物 W 直接受干扰力 $ak\sin\omega t$ 产生的效果相同。于是关于式(10.7)解的所有结论也适用于上述情况，再一次得到强迫振动的稳态解为

$$x = a\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\sin\omega t \tag{10.8d}$$

当 $ak = P_0$，上式与式(10.8c)相同。

作为上述理论的第一个应用实例，考虑振荡器装置，该装置用实验来测量各种工程结构的固有频率(见图 10.14)。振荡器包含有两个相同的转盘，两个转盘各自以等角速度 ω 反方向旋转。转盘的轴承与结构的钢架刚性联接，试研究该结构的振动。与转盘相连的不平衡重量如图 10.14，可以看出盘子转动产生的离心力 P 沿对称轴 mn 的合脉动力为 $2P\sin\omega t$，产生的强迫振动用适当的仪器记录。通过不断地改变转盘的转速，我们总能得到在结构的振幅达到最大时圆盘每秒的转速。假定在共振时刻上述情形出现，那么自由振动结构的固有频率就等于所观测到的圆盘每秒的转速。在测量桥梁、办公楼及导弹发射塔等大型结构的固有频率时，该振荡器是非常有用的。

第二个例子，考虑一个测量垂直振动振幅的仪器。该装置是在一个箱子内，用弹性良好的弹簧悬挂重物 W，如图 10.15 所示。如果量挂点 A 固定不动，重物 W 在竖直方向产生自由振动，那么就可以应用运动方程(10.1)。现在假定包含悬挂重物的箱子与有轻微垂直振动的地基相连。在这种情况下，弹簧顶部端点 A 将随地基的振动而振动，于是重物 W 的强迫振动也随之产生。假定箱子的铅垂振动用式(c)来表示，那重物 W 的强迫振动就可用方程(10.8c)表示。可以看出，当 ω 远小于 p 时，位移 x 与 ξ 几乎相等，并且悬挂重物 W 实际上与箱子一起作同步运动。

图　10.14

图　10.15

现在考虑 ω 远大于 p 的情况，也就是说，箱子振动的频率比悬挂重物的固有频率大很多。那么，式(10.8d)所示的强迫振动的振幅将变得非常小，重物 W 在空间不动，只是箱子在上下振动。举例来说，当 $\omega = 10p$ 时，可以算得强迫振动的振幅仅为 $a/99$。因此可以说，在这类情况下，箱子的振动几乎没有传递给重物 W。很多仪器装置就是利用这种现象来测量和记录振幅。如图 10.15 所示，把某个刻度盘置于箱子顶部，同时它的振针触及重物的上表面，那么在振动过程中，刻度盘指针的前后移动就显示了重物 W 相对于箱子的振幅的 2 倍。通过方程(10.8d)看出，该振幅等于下述表达式的最大值

$$x - \xi = a\sin\omega t\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2} - 1\right) \tag{10.9}$$

$$(x-\xi)_{\max} = a\frac{\omega^2/p^2}{1-\omega^2/p^2} \tag{10.10}$$

当 p 远小于 ω 时，该表达式的数值接近于同仪器相连的振动物体的振幅 a。这种仪器用以测量高频振动的振幅非常准确，并已经证明对于研究发电厂涡轮式发电机的振动是非常有用的。通常选择该测量仪器的弹簧的固有频率接近于 200r/min，那么如果涡轮式发电机以 1800rpm 的频率运行，我们得到的该强迫振动的振幅有足够精度。

为得到如图 10.15 所示振动的完整记录，在箱子中放入一个以恒角速度绕垂直轴旋转的柱型圆筒。把一支铅笔一端固定在重物上，另一端与圆筒相接触，这样就可以把箱子和重物的相对运动方程(10.10)完整的记录下来。除了垂直的弹簧，另在水平方向引入弹簧，就得到同时用来测量水平振动的仪器了。

在记录低频振动，比如我们所见到的大型、重型结构的振动时，图 10.15 所示的仪器就不再适用了。为得到求低阶固有频率的仪器，必须用到柔性极大的弹簧，而这样弹簧的静挠度极大。如何克服这个困难呢？采用图 10.16 所示的仪器装置。得到

图 10.16

$$\delta_{st}=\frac{W}{k}\left(\frac{l}{a}\right)^2 \tag{f}$$

所以固有频率是

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\frac{1}{2\pi}\frac{a}{l}\sqrt{\frac{kg}{W}} \tag{g}$$

通过调节比率 a/l，可以得到任意小的理想频率。

习题

1. 重为 $W=20\text{kip}$ 的大型发动机装配于两端简支的平行的工字形梁的中部，该梁有标准的 23lbf · 8in 的轧钢截面，跨距 12ft。发动机转速 600rpm，在半径 10in 处，5lbf 的程度失去平衡。问该稳态强迫振动的振幅是多少？忽略工字形梁的质量的影响。
2. 如图 10.15 所示测振仪的刻度盘记录了所连接的地基振动过程中的相对位移 ±0.08in。假定地基的垂直运动是简谐振动，频率为 1200r/min，那么它的实际振幅 a 是多少？已知悬挂重物 W 的静挠度是 $\delta_{st}=1.00\text{in}$。
3. 抗弯刚度为 $EI=30\times4\times10^6\text{lbf}\cdot\text{in}^2$ 的钢梁，支座如图 10.17 所示，在其自由端有重物 $W=600\text{lbf}$。试计算重物 W 的稳态强迫振动的振幅。已知支座 A 做微小的竖向振动 $x_A=a\sin\omega t$，其中 $a=0.12\text{in}$，$\omega=30\text{sec}^{-1}$。支座 B 不动，梁的质量忽略不计。
4. 如图 10.18 所示的简支梁由两个 6×2in · 13lbf 的槽钢梁背对背组成，梁的跨距中点有重物 $W=12\text{kip}$。有一外加脉动力矩 $M_0\cos\omega t$ 作用于梁的左端，如图 10.18 所示。已知 $\omega=0.9p$，并且 $p=\sqrt{g/\delta_{st}}$，$M_0=1000\text{in}\cdot\text{lbf}$，试计算重物 W 稳态强迫振动的振幅。

图 10.17

图 10.18

10.4　一个干扰力的通用情况

上一节中，仅仅考虑了由周期干扰力 $P_0\sin\omega t$ 作用引起的悬挂于弹簧的质量块的稳态强迫振动。更为常见的是，尤其在结构动力学方面，可能要求我们处理非周期干扰力 $Q(t)$ 引起的振动。这种情况下，不再是稳态强迫振动，我们需要确定自由振动和由干扰力引起的强迫振动的混合系统的全部响应。现在来研究这种情况下得到微分方程解的方法。

为说明这种方法，我们来看如图 10.19a 所示系统，弹簧下连有重物 W，重物只能在竖直方向上下移动，竖直干扰力 $Q(t)$ 作用于重物。用 $q(t)$ 表示单位质量干扰力的大小，它表示为随时间变化的函数，如图 10.19b 所示的 mn 曲线的坐标。假定初始时刻 $t=0$，重物 W 停留在其平衡位置 $(x_0=0, \dot{x}_0=0)$，要求确定物体在任一时刻 $t=t_1$ 时的位移。为计算位移，我们把力 q 的持续作用设想成可以用一系列的冲量 $q\mathrm{d}t$ 来代替，如图 10.19b 所示的阴影条就是其中的一个冲量。作为结果，在时刻 t 产生冲量，响应的物体获得速度增量

图　10.19

$$\mathrm{d}\dot{x}=q\mathrm{d}t \tag{a}$$

上式说明了单位质量的动量变化等于其相应的冲量。现在把速度增量看作在时刻 t 传递给物体的起始速度，利用 10.1 节中式(10.4a)所表示的自由振动的解，不考虑后面的冲量，物体在随后时刻 t_1 的位移将是

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{p}\sin p(t_1-t)=\frac{q\mathrm{d}t}{p}\sin(pt_1-pt) \tag{b}$$

为得到从 $t=0$ 时刻到 $t=t_1$ 时刻由于干扰力持续作用面使物体产生的位移，只要对式(b)在时间间隔上求和就可以。于是得到

$$x=\frac{1}{p}\int_0^{t_1}q\sin(pt_1-pt)\mathrm{d}t \tag{10.11a}$$

该表达式包括了自由振动和干扰力引起的强迫振动，尤其在研究风暴、爆炸冲击等某些瞬态干扰引起的系统运动时，该式尤为重要。它甚至对于在变量 q 随时间的变化只能用图示而不能用解析表达式时，该式仍然可用。这种情况下，只需使用一些数值方法计算积分式(10.11a)，比如采用辛普生法则等数值积分方法。

如果重物 W 有初始位移 x_0，在时刻 $t=0$ 有初始速度 $\dot{x}_0$，则在 $t=t_1$ 时刻，再次参照 10.1 节中公式(10.4a)，写出位移 x 的解为

$$x=x_0\cos pt_1+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt_1+\frac{1}{p}\int_0^{t_1}q\sin(pt_1-pt)\mathrm{d}t \tag{10.11b}$$

下面是应用式(10.11a)的一个算例。周期干扰力 $Q_0\sin\omega t$，假定 $x_0=\dot{x}_0=0$。将 $q=q_0\sin\omega t$，$q_0=Q_0g/W$ 代入方程(10.11a)，观察到

$$\sin\omega t\sin(pt_1-pt)=\frac{1}{2}[\cos(\omega t+pt-pt_1)-\cos(\omega t-pt+pt_1)]$$

积分后，得到

$$x=\frac{q_0}{p^2-\omega^2}\left(\sin\omega t_1-\frac{\omega}{p}\sin pt_1\right) \tag{10.12}$$

结果表达式中的第一项代表强迫振动，上一节中已有讨论[见方程(10.8a)]，第二项代表自由振动。如果将假定初始条件($t=0$ 时，$x_0=0$，$\dot{x}=0$)带入通解方程(10.8b)，得到

$$C_1=0 \text{ 和 } C_2=-\frac{\omega}{p}\frac{q_0}{p^2-\omega^2}$$

式(10.8b)的解与式(10.12)的解相同。

现在来讨论式(10.11a)应用于受风脉冲作用的弹性结构的情况，如图 10.20 所示。假定脉动冲击初始值为 Q_0，其值随时间均匀衰减，在 $t=T$ 时刻衰减到零(见图 10.20b)。因而，作为时间的函数

$$Q(t)=Q_0\left(1-\frac{t}{T}\right) \tag{c}$$

图 10.20

或者，如果把 q 作为振动结构每单位质量的力，得到

$$q(t)=\frac{Q_0 g}{W}\left(1-\frac{t}{T}\right)=q_0\left(1-\frac{t}{T}\right) \tag{d}$$

自由横向振动结构的固有周期都可以通过 10.1 节中方程(10.3a)计算得到。假定立柱上下端固支，重为 W 的水平梁完全刚性，在水平力 P 的作用下，刚架顶部的横向挠度为 $\delta=pl^3/24EI$，可以看出，弹性常数 $k=24EI/l^3$。因而，从方程(10.3a)得到周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}=2\pi\sqrt{\frac{Wl^3}{24EIg}} \tag{e}$$

由式(10.11a)，可以得到在任一时刻 $t=t_1$ 框架顶部梁的位移

$$x=\frac{q_0}{p}\int_0^{t_1}\left(1-\frac{t}{T}\right)\sin(pt_1-pt)\,\mathrm{d}t \tag{f}$$

当然，该表达式仅在范围 $0<t_1<T$ 内成立。对大于 t_1 的值来说，风脉动冲击已经消失，我们只须考虑由脉冲传递的结构自由振动的相应位移和速度。

继续推导积分式(f)，得到

$$x=\frac{q_0}{p^2}\left(1-\frac{t_1}{T}-\cos pt_1+\frac{\tau}{2\pi T}\sin pt_1\right) \tag{g}$$

由式(d)和式(e)，有 $q_0/p^2=Q_0/k$，式(g)可以写成

$$x=\frac{Q_0}{k}\left(1-\frac{t_1}{T}-\cos pt_1+\frac{\tau}{2\pi T}\sin pt_1\right) \tag{10.13a}$$

通过求导，相应的速度是

$$\dot{x}=\frac{Q_0}{k}\left[p\sin pt_1+\frac{1}{T}(\cos pt_1-1)\right] \tag{10.13b}$$

式(10.13a、b)表示问题的全解。

为得到位移 x 达到最大时的时刻 t_1，设定速度 $\dot{x}$ 等于零，得到

$$\tan\frac{\pi t_1}{\tau}=\frac{2\pi T}{\tau} \tag{h}$$

如果脉冲作用的时间 T 远大于结构的固有周期 τ，则 $\tan(\pi t_1/\tau)$ 的值很大，角度 $\pi t_1/\tau$ 接近 $\pi/2$。因此，结构挠度最大的时刻为 $t_1\approx\tau/2$。把 t_1 的值代入式(10.13a)，得到

$$x_{max}=\frac{Q_0}{k}\left(2-\frac{\tau}{2T}\right) \tag{i}$$

从中我们可以看出，当比率 τ/T 较小时，刚架结构的最大位移接近于其静态位移 Q_0/k 的2倍。

如果脉冲作用时间 T 远小于系统周期 τ，则从 $t=0$ 到 $t=T$，速度始终为正值，通过方程(10.13b)，得到

$$\dot{x}_T=\frac{1}{2}\frac{Q_0}{k}\frac{1}{T}\left(\frac{2\pi T}{\tau}\right)^2=\frac{Q_0 g}{W}\frac{T}{2} \tag{j}$$

从式(10.13a)得到相应的位移值为

$$x_T=\frac{Q_0 g}{W}\frac{T^2}{3} \tag{k}$$

得到这些 $t=T$ 时刻的位移和速度值以后，把它们作为方程(10.4a)的初始位移和初始速度，就可以得到只有自由振动的系统的位移—时间方程。

如果图10.20a所示结构受到类似于图10.21抛物线形式的风脉冲，我们用下固的单位质量的力代替式(d)，得

$$q(t)=\frac{Q_0 g}{W}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2=q_0\left(1-\frac{t}{T}\right)^2 \tag{l}$$

图 10.21

这种情况下，在 $0<t_1<T$ 时，方程(10.11)变为

$$x=\frac{q_0}{p}\int_0^{t_1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2\sin(pt_1-pt)\,dt$$

积分后，上式变为

$$x=\frac{q_0}{p^2}\left[(1-\cos pt_1)\left(1-\frac{2}{p^2T^2}\right)+\frac{2}{pT}\sin pt_1-\frac{2t_1}{T}+\frac{t_1^2}{T^2}\right]$$

注意当 $p=2\pi/\tau$ 时，$q_0/p^2=Q_0/k$，上式也可进一步写成如下形式

$$x=\frac{Q_0}{k}\left[\left(1-\cos\frac{2\pi t_1}{\tau}\right)\left(1-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\tau^2}{T^2}\right)+\frac{\tau}{\pi T}\sin\frac{2\pi t_1}{\tau}-2\frac{t_1}{T}+\frac{t_1^2}{T^2}\right] \tag{10.14}$$

又一次看出，如果 τ 的值远小于 T，则最大动位移在 $t_1=\tau/2$ 时接近 $2Q_0/k$。

图10.20b所示的三角形脉冲和图10.21所示的抛物线脉冲只能算是对真实风脉冲的初

步近似，随时间变化的实际力变量更接近图 10.22 所示的形式。这种风脉冲的特点是在力达到最大值 Q_{max} 前，即在时间 $t=t_a$ 前，力的值随时间快速增加；在此之后，是更为平缓的指数衰减过程。力随时间的变化可以用以下方程真实地表达

$$Q(t)=Cte^{-at} \tag{m}$$

这里 C 和 a 是常量，适当选择这两个常量以使风脉冲在设定时刻 t_a 达到设定值 Q_{max}。写出表达式(m)对时间的偏导并令其等于零，得到

图 10.22

$$C(1-at)e^{-at}=0$$

从中可以看出 Q_{max} 出现在时刻 $t_a=1/a$。把 t 时刻的值代入方程(m)，那么得到 $Q_{max}=C/ae$。因而，当 Q_{max} 和 t_a 的值确定后，常量 C 和 a 的值也就随之确定。

引入符号

$$c=\frac{Cg}{W}$$

结构单位质量的风脉冲力的表达式为

$$q(t)=cte^{-at} \tag{n}$$

下面，假定结构在时刻 $t=0$ 处于平衡位置，式(10.11a)变成

$$x=\frac{c}{p}\int_0^{t_1} te^{-at}\sin(pt_1-pt)\,dt \tag{o}$$

注意

$$\sin(pt_1-pt)=\sin pt_1\cos pt-\cos pt_1\sin pt$$

对表达式(o)分部积分，最后可以得出结构的动位移

$$x=\frac{ct_1e^{-at_1}}{a^2+p^2}+\frac{2ac}{(a^2+p^2)^2}(e^{-at}-\cos pt_1)+\frac{c(a^2-p^2)}{p(a^2+p^2)^2}\sin pt_1 \tag{10.15}$$

通过求解 $t_1=\pi/2$ 时刻的位移 x，可以得到位移最大值理想的近似值。

在求结构对一系列冲击的响应时，式(10.11)是非常有用的。举例来说，假定图 10.19a 所示重物 W 在瞬时刻 $t=t'$、$t=t''$、…其速度增量 $\Delta\dot{x}_1$、$\Delta\dot{x}_2$、…那么在时刻 $t=t_1$，位移是

$$x=\frac{1}{p}[\Delta\dot{x}_1\sin(pt_1-pt')+\Delta\dot{x}_2\sin(pt_1-pt'')+\cdots] \tag{p}$$

如果 t'、t''、…是 $\tau=2\pi/p$ 的倍数，振幅将随时间增加而增加。

习题

1. 参照式(10.11)，推导一个位移—时间方程，用来处理图 10.19a 所示的系统对干扰力 $Q(t)=Wbt/g$ 的响应。这里 b 是常量。假定 $t=0$ 时刻，$x_0=0$ 和 $\dot{x}_0=0$。
2. 柔性钢索提拉着重为 W 的升降台，钢索上端缠绕于一半径为 r 的圆柱滚筒，慢慢展开钢索以使升降台以恒速 v_0 下降。在特定时刻 $t=0$ 时，在圆柱滚筒上作用了一个闸，以便于滚筒以 $\alpha=a/\tau$ 的恒定角速度减慢转速。如果在 $t=0$ 时刻，松开的缆绳长度为 l，并且 $AE/l=k$，那么离开 $t=0$ 时刻的平衡位置后缆绳的位移 x 是多少？

3. 上一题中，如果滚筒停止了运动，当一个质量块悬挂于顶端固定的竖直方向的弹性缆绳上，升降台将做自由振动。那么剩余的自由振动的振幅 A 是多少？
4. 对于图 10.20a 所示的结构刚架，已知下列数据：$W=10\text{kip}$，$k=24EI/l^3=100\text{kip/in}$。结构受到水平方向的风脉冲 $Q_{max}=100\text{kip}$，$t_a=1/a=0.10\text{sec}$，如图 10.22 所示。试通过式(10.15)计算 x_{max} 的近似值。
5. 通过式(10.11)，计算弹簧支撑的重物 W 的响应，如图 10.19a 所示，受到的干扰力为 $Q(t)=Q_0\cos\omega t$，如果 $Q_0g/W=q_0$，$kg/W=p^2$，假定在 $t=0$ 时，$x=0$，$\dot{x}=0$。

10.5　数值积分

前面各节中，假定弹簧力与弹簧的变形量成正比，在这个假设的基础上，得到了通解方程(10.11)。有些时候弹簧力遵循更为复杂的非线性规律，这种情况下，求运动微分方程的精确解将变得困难，这就必须借助于一些近似方法。应用于上述情况，这里有一个使用逐步积分数值方法的算例程序。为解释该程序，考虑不带阻尼的自由振动情况，该情况的运动微分方程有如下形式

$$\ddot{x}=f(x) \tag{a}$$

如果给定了初始条件，比如在 $t=0$ 时的初始位移值 x 和初始速度值 $\dot{x}$，利用逐步积分，就能计算位移 x 和速度 $\dot{x}$ 随时间的变化情况。通过把值 $(x)_{t=0}$ 带入方程(a)，我们就能够计算出 $(\ddot{x})_{t=0}$。那么，知道了初始加速度后，选择非常接近 $t=0$ 的时刻 $t=t_1$，假定在如此短的时间间隔内加速度保持不变，这样就能够计算出 $t=t_1$ 时刻的速度和位移。如果我们用 Δt 表示从 $t=0$ 时刻到 $t=t_1$ 时刻非常小的时间间隔，$(\dot{x})_{t=t_1}$ 和 $(x)_{t=t_1}$ 的近似值就能够通过以下方程得到

$$\dot{x}_1=\dot{x}_0+\ddot{x}_0\Delta t \qquad x_1=x_0+\frac{1}{2}(\dot{x}_0+\dot{x}_1)\Delta t \tag{10.16a}$$

下一步，把 x_1 的值代入方程(a)，我们就得到 $\ddot{x}_1$ 的值。那么，利用 $\ddot{x}_1$ 的值，从以下方程中计算出 $\dot{x}_1$ 和 x_1 更接近的近似值，得

$$\dot{x}_1=\dot{x}_0+\frac{1}{2}(\ddot{x}_1+\ddot{x}_1)\Delta t \qquad x_1=x_0+\frac{1}{2}(\dot{x}_0+\dot{x}_1)\Delta t \tag{10.16b}$$

通过把 x_1 的第二次近似值代入方程(a)可以得到 $\ddot{x}_1$ 的第二次近似值。

进入第二步，利用已经算得的值 x_1、$\dot{x}_1$、$\ddot{x}_1$，在 $t=t_2=2\Delta t$ 时刻的值 x_2、$\dot{x}_2$、$\ddot{x}_2$ 可以用上述完全一样的方法计算得到，等等。通过采用足够小的时间间隔 Δt，对每个 t 值做两次计算以得到第二次近似，尤其当我们只对相对较短的运动周期感兴趣时，这种数值积分方法在实际应用中能达到足够的精度。

为举例说明这个程序以及应用这个程序得到足够精度的一些思路，下面考虑简谐振动的情况。简谐振动的运动方程是

$$\ddot{x}=-p^2x \tag{b}$$

假定 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}_0=0$，这个方程的精确解是

$$x=x_0\cos pt \qquad \dot{x}=-px_0\sin pt \tag{c}$$

表 10.1 给出了按照上述步骤运算的数值积分的结果。本算例中，采用的时间间隔是 $\Delta t=1/4p$。由于此时的振动周期是 $\tau=2\pi/p$，可以看出选择的时间间隔 Δt 近似等于 1/4 周期 $\tau/4$

的 1/6。表中的第一行表示假定的初始条件。现在开始第一步，通过使用方程(10.16a)可以获得在时刻 $t=\Delta t=1/4p$ 对 x_1 和 $\dot{x}_1$ 的第一次近似，得到的结果列于表中的第二行。为取得更好的近似结果，现在利用方程(10.16b)进行重复计算。重复计算后的结果显示在图表的第三行。按照这种方式得到整个表。在图表的后两列，显示了相应的 $\cos pt$ 和 $\sin pt$ 的值。本算例中，它们与精确解式(c)成比例，以便于数值积分的精度可以从直接表中看出。我们可以看到，数值积分算得的速度有很高的精度。然而，也可以看出，位移的误差随时间而增加，在表中的最后一行位移误差达到了初始位移 x_0 的 1%。通过将 1/4 个周期划分六个时间间隔 Δt，就可以得到这些结果。通过增加时间间隔的数目，精度可以得到提高，但需要的计算量也同时随之大增。

表 10.1　数值综合分析

t	x	$\dot{x}$	$\ddot{x}$	$\cos pt$	$\sin pt$
0	x_0	0	$-p^2x_0$	1.0000	0.0000
Δt	$0.9687x_0$	$-0.2500px_0$	$-0.9687p^2x_0$		
Δt	$0.9692x_0$	$-0.2461px_0$	$-0.9692p^2x_0$	0.9689	0.2474
$2\Delta t$	$0.8774x_0$	$-0.4884px_0$	$-0.8774p^2x_0$		
$2\Delta t$	$0.8788x_0$	$-0.4769px_0$	$-0.8788p^2x_0$	0.8776	0.4794
$3\Delta t$	$0.7321x_0$	$-0.6966px_0$	$-0.7321p^2x_0$		
$3\Delta t$	$0.7344x_0$	$-0.6783px_0$	$-0.7344p^2x_0$	0.7317	0.6816
$4\Delta t$	$0.5419x_0$	$-0.8619px_0$	$-0.5419p^2x_0$		
$4\Delta t$	$0.5449x_0$	$-0.8378px_0$	$-0.5449p^2x_0$	0.5403	0.8415
$5\Delta t$	$0.3184x_0$	$-0.9740px_0$	$-0.3184p^2x_0$		
$5\Delta t$	$0.3220x_0$	$-0.9457px_0$	$-0.3220p^2x_0$	0.3153	0.9490
$6\Delta t$	$0.0755x_0$	$-1.0262px_0$	$-0.0755p^2x_0$		
$6\Delta t$	$0.0794x_0$	$-0.9954px_0$	$-0.0794p^2x_0$	0.0707	0.9975
$7\Delta t$	$-0.1719x_0$	$-1.0153px_0$	$-0.1719p^2x_0$		
$7\Delta t$	$-0.1680x_0$	$-0.9838px_0$	$-0.1680p^2x_0$	-0.1792	0.9840

利用表 10.1 中的数据，也能确定自由振动的周期。从 x 在 $t=6\Delta t$ 时刻的值可以看出，位移—时间曲线中有正的纵坐标 $+0.0794x_0$，而在 $t=7\Delta t$ 时刻，纵坐标等于 $-0.1680x_0$。位移零点决定了完成 1/4 振动周期需要的时间。采用线性插值，时间可以由以下方程确定

$$\frac{\tau}{4}=6\Delta t+\Delta t\frac{0.0794}{0.0794+0.1680}=6.32\Delta t=\frac{6.32}{4p}=\frac{1.58}{p}$$

1/4 周期的准确值是 $\tau/4=1.57/p$。因而，可以认为上式计算得到的近似值令人满意。

数值积分的方法也可用于弹簧力与 x 不成比例，但可以表示为更为一般 x 的函数形式，见方程(a)。举一个例子，考虑图 10.23a 所示的自由振动系统，质量为 m 的质点系在拉紧的长为 $2l$ 的金属线的中点。当质点在中点位置有很小的位移 x 时，金属线每段的张力为

$$S=S_0+\frac{AE}{l}\left(\sqrt{l^2+x^2}-l\right) \tag{d}$$

这里 S_0 是 $x=0$ 时刻的初始张力。把式(d)的根式按二项式法则展开，假设 $x\ll l$，仅保留展

开式的前两项，得到

$$S \approx S_0 + \frac{AE}{2l^2}x^2 \tag{d'}$$

a) b)

图 10.23

如果 S_0 很大，那么式(d′)的第二项可以忽略，我们有 $S \approx S_0$，这里假定 x/l 值非常小。这意味着对于自由振动的振幅很小时，运动方程变为

$$m\ddot{x} = -\frac{2S_0}{l}x$$

或者利用符号

$$k_0 = \frac{2S_0}{l} \qquad p_0^2 = \frac{k_0}{m} \tag{e}$$

$$\ddot{x} + p_0^2 x = 0 \tag{f}$$

上式表示周期为下式的简谐振动

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{p_0} \tag{g}$$

如果方程(d′)中的第二项不能忽略，运动方程变为

$$m\ddot{x} = -\frac{2S_0}{l}x - \frac{AE}{l^3}x^3$$

或者，利用式(e)中符号和下列符号

$$k_1 = \frac{AE}{l^3} \qquad \beta = \frac{k_1}{k_0} \tag{h}$$

可得到以下形式的运动方程

$$\ddot{x} = -p_0^2(x + \beta x^3) \tag{i}$$

可以看出，这种情况下质点每单位质量的回复力 $f(x)$ 为立方抛物线形状，如图 10.23b 所示。对于很小的 x 值，曲线 OA 同它初始切线接近重合，在实际中就有了线性回复力。这就产生了由式(g)所给出的周期为 τ_0 的简谐振动。对于稍大的 x 值，图 10.23b 所示的曲线 OA 明显偏离了它的初始切线，则必须利用运动方程(i)代替(f)。方程(i)不再表示简谐振动，我们将发现周期 τ 取决于振幅，随着振幅越来越大周期变得越来越短。

为对方程(i)逐步进行数值积分，假定下面的数据：$mg = 1\text{lbf}$，$k_0 = 2\text{lbf/in}$，$k_1 = 4\text{lbf/in}^3$，同时有初始条件：当 $t = 0$ 时，$x_0 = 1\text{in}$，$\dot{x}_0 = 0$。那么，$\beta = k_1/k_0 = 2\text{in}^{-2}$，方程(i)采用下面形式

$$\ddot{x} = -p_0^2(x + 2x^3) \tag{i'}$$

本算例中，使用 x、$\dot{x}/p_0$、$\ddot{x}/p_0^2$ 更为方便，那么用 $\Delta(p_0t)$ 取代方程(10.16)中的时间步长 Δt，然后对方程(10.16a)进行数值计算，第一次近似可写成如下形式

$$\frac{\dot{x}_1}{p_0} = \frac{\dot{x}_0}{p_0} + \frac{\ddot{x}_0}{p_0^2}\Delta(p_0t) \qquad x_1 = x_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}_0}{p_0} + \frac{\dot{x}_1}{p_0}\right)\Delta(p_0t) \tag{10.17a}$$

对方程(10.16b)，第二次近似为如下形式

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_1}{p_0} &= \frac{\dot{x}_0}{p_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{x}_0}{p_0^2} + \frac{\ddot{x}_1}{p_0^2}\right)\Delta(p_0t) \\ x_1 &= x_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}_0}{p_0} + \frac{\dot{x}_1}{p_0}\right)\Delta(p_0t) \end{aligned} \tag{10.17b}$$

对于步长 $\Delta(p_0t)$，如同方程(g)给出的，把基本周期 τ_0 粗分成 40 份，即每 1/4 个周期 $\tau_0/4$ 大约包含 10 步，那么给出 $\Delta(p_0t) = p_0\tau_0/40 = 2\pi/40 = 0.157$。因而，以约数表示，有 $\Delta(p_0t) = 0.15$。在选择时间步长时，注意到对于振幅 $x_0 = 1\text{in}$，周期 τ 比 τ_0 要小很多，所以更有可能把 1/4 周期 $\tau/4$ 分成七或八部分。这就意味着从本算例的数值积分，得到同前面例子一样的同等精度。

在选择的时间间隔为 $\Delta(p_0t) = 0.15$ 和式(i')的基础上，式(10.17a、b)数值计算的结果显示在表 10.2 中。经过七步的重复计算之后，发现位移 x 变为负值，这说明计算已略超出振动的 1/4 循环。在最后两个值 $x = 0.153$ 和 $x = -0.059$ 之间使用线性插值，得到当 $p_0t = 1.01$ 时，$x = 0$。因此，完整的周期相应为 $p_0\tau = 4(1.01) = 4.04$，同时利用 $p_0 = \sqrt{k_0/m} = \sqrt{2g} = \sqrt{772} = 27.8\text{sec}^{-1}$，得到

$$\tau = \frac{4.04}{27.8} = 0.1452\text{sec}$$

本例中 τ 的准确值可以通过椭圆积分计算出，结果是 $\tau_{ex} = 0.1447\text{sec}$。从数值积分的结果可以看到周期误差大约为 0.3%。

表 10.2

p_0t	x	$\frac{x}{p_0}$	x^3	$\frac{\ddot{x}}{p_0^2}$	$\frac{\ddot{x}_0+\ddot{x}_1}{2p_0^2}\Delta(p_0t)$	$\frac{\dot{x}_0+\dot{x}_1}{2p_0}\Delta(p_0t)$
0	1.000	0	1.000	-3.000	-0.450	
0.15	0.966	-0.450	0.902	-2.770	-0.433	-0.034
0.15	0.968	-0.433	0.907	-2.782	-0.433	-0.032
0.30	0.871	-0.866	0.661	-2.193	-0.370	-0.097
0.30	0.875	-0.803	0.670	-2.215	-0.374	-0.093
0.45	0.727	-1.177	0.384	-1.495	-0.278	-0.148
0.45	0.734	-1.081	0.395	-1.524	-0.280	-0.141
0.60	0.551	-1.361	0.167	-0.885	-0.181	-0.183
0.60	0.558	-1.262	0.174	-0.906	-0.182	-0.176
0.75	0.355	-1.444	0.045	-0.445	-0.101	-0.203
0.75	0.361	-1.363	0.047	-0.455	-0.102	-0.197
0.90	0.149	-1.465	0.003	-0.155	-0.045	-0.212
0.90	0.153	-1.408	0.004	-0.161	-0.046	-0.208
1.05	-0.062	-1.454	0.000	-0.062	-0.016	-0.215
1.05	-0.059	-1.424				-0.212

对于如图 10.23a 所示的小振幅非线性振动系统，由方程(g)算得的周期

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{p_0} = \frac{6.28}{27.8}\text{sec} = 0.266\text{sec}$$

把上式与前面计算的振幅为 1in 时的周期相比较，可以看到非线性对周期的影响是相当明显的。

如果有必要，通过使用更为详尽的表达式计算连续值 x 和 $\dot{x}$，代替原来的式(10.16)或者式(10.17)那样的简单方程，数值积分的精度可以进一步提高。如果要研究的运动持续的时间间隔较长就要借助于此种方法。

10.6　图形积分

在很多结构动力学的实际算例中，干扰力作为时间的函数，可能仅以曲线的形式给出，不能表达为解析式，如图 10.24 所示。这种情况下，可以用图形积分的方法得到干扰力系统响应的近似解。为完成近似，我们用一系列等时间间隔 Δt 对应的有着恒定纵坐标值 Q_1、Q_2、Q_3、…的阶梯函数，取代图 10.24 所示的平滑曲线 *abcde* 所表示的 $Q(t)$，参照图示。那么，在 $t=0$ 时刻开始，已知初始位移 x_0 和初始速度 $\dot{x}_0$，我们能够计算出由第一时间段 Δt 的恒力 Q_1 作用于质量块所产生的运动，并且得到该时间段最后的位移 x_1 和速度 $\dot{x}_1$，即 $t=\Delta t$ 时刻。下面把 x_1 和 $\dot{x}_1$ 作为新的初始位移和初始速度，我们重新计算系统在恒力 Q_2 作用下的运动，Q_2 在时刻 $t=\Delta t$ 突然作用于物体，得到第二个时间段最后的位移 x_2 和速度 $\dot{x}_2$，即 $t=2\Delta t$ 时刻等等。用这种方法，系统在阶梯函数作用下的全部运动都能确定。

图　10.24

可以看出，为执行上述程序，需要首先研究系统在突然施加的恒力 Q_i 作用下的响应。为此，考虑如图 10.25a 所示系统，假定 $Q(t)=Q_i=\text{const}$，运动方程变为

$$m\ddot{x} = -kx + Q_i$$

或利用符号

$$p^2 = \frac{k}{m} \qquad \delta_i = \frac{Q_i}{k} \tag{a}$$

可以得到

$$\ddot{x} + p^2 x = p^2 \delta_i \tag{b}$$

该微分方程的解是

图 10.25

$$x = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \delta_i \tag{c}$$

通过代回方程(b)，上式可以很容易得到验证。对方程(c)关于时间微分，得到

$$\dot{x} = -pC_1\sin pt + pC_2\cos pt \tag{d}$$

现在，假定运动的初始条件，在 $t=0$ 时刻，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，得到积分常量

$$C_1 = x_0 - \delta_i \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{p}$$

使用这些值，并将方程(c)和方程(d)的各项重新整理，得到

$$\begin{aligned} x - \delta_i &= (x_0 - \delta_i)\cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \\ \frac{\dot{x}}{p} &= -(x_0 - \delta_i)\sin pt + \frac{\dot{x}_0}{p}\cos pt \end{aligned} \tag{e}$$

将式(e)的两个方程两边平方后相加，得到

$$(x-\delta_i)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{p}\right)^2 = (x_0-\delta_i)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2 \tag{f}$$

将这个表达式看成圆的半径方程，得到

$$R = \sqrt{(x_0-\delta_i)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2}$$

该半径方程在平面坐标系统 $x-\dot{x}/p$ 内的圆心位于点$(\delta_i,0)$。该平面通常称为相位平面，该圆被称为相位平面轨迹圆。因而，可以推断出突然施加的恒力 Q_i 引起的运动是简谐振动，中心点位于新平衡位置 $x=\delta_i=Q_i/k$ 而不是 $x=0$。有了 Q_i/k、x_0 和 $\dot{x}_0$ 的值后，相位平面圆如图 10.25b 所示。为了形象地表示平面轨迹圆代表的运动，仅仅需要想象一个点 A，从 $t=0$ 时刻 A_0 点开始，以恒定角速度 p 逆时针作圆周运动。那么在任何时刻 t，运动点 A 在图 10.25b 中转过角度 pt，位移 x 和速度 $\dot{x}$ 根据点 A 的坐标得到。

已经有了用以表示突然施加恒力引起的运动的平面相位图，现在可以回到如图 10.24 所示的阶梯函数中，看如何跟踪相位平面轨迹圆，该轨迹代表弹簧支撑的质量块对一系列恒力冲击的响应。参照图 10.26a，让点 $A_0(x_0,\dot{x}_0/p)$ 表示 $t=0$ 时刻，在相位平面中运动的起始状态。以点 $C_1(Q_1/k,0)$ 为圆心，C_1A_0 为半径，$p\Delta t$ 为圆心角构建圆弧 A_0A_1。用这种方法得到的点 A_1，表示受扰质量块在第一时间段 $t=\Delta t$ 时刻的位移 x_1 和速度 $\dot{x}_1$。现在引入 C_2，坐标

$(Q_2/k,0)$，作为新的中心点，以同上述一样的圆心角 $p\Delta t$ 构建圆弧 A_1A_2 获得点 A_2，从而表示了第二个时间段最后即 $t=2\Delta t$ 时刻的位移 x_2 和速度 $\dot{x}_2$。按照这种方法，在图 10.24 所示阶梯函数的基础上，如图 10.26a 所示画到 $t=6\Delta t$ 时刻完成。

完成了图 10.26a 所示的构建，将点 A_0、A_1、A_2、…很容易投影到位移—时间平面中，从而得到曲线 $x=f(t)$，如图 10.26b 所示。

图　10.26

如果采用合理的曲线步长来近似给定的干扰力 $Q(t)$，所描述的图形有很高的精度。一般情况下，要求遵照以下方法，每一步长下的面积与已知的表示 $Q(t)$ 的光滑曲线相应部分下的面积相同。在选择时间间隔 Δt 时，不仅必须依据已知曲线 $Q(t)$ 的变化，还要依据弹簧悬挂质量块的固有周期 $\tau=2\pi/p$。一般说来，Δt 必须是周期很小的部分。如果干扰力在某段时间内变化很快，在另一段时间内基本恒定，那么相应地改变时间间隔 Δt 也是合理的，时间间隔相等不是最基本要求。

用一个例子来演示上面描述的图形积分的方法，考虑如图 10.27a 所示的水塔，其地基部分容易受到地面的水平运动 $\xi=q(t)$ 的约束，图 10.27b 给出了光滑曲线的图形。水塔的重量是 W，假定立柱的柔性刚度恰好是使水塔横向自由振动面有周期为 $\tau=0.48\text{sec}$ 时的刚度。将这个周期连同给定地面运动的波动一起考虑，可推断出 $\Delta t=0.02\text{sec}$ 是针对本问题合适的时间间隔，由此作如图 10.27b 所示的阶梯函数图形。由于 $p=2\pi/\tau$，相位平面的角步长是

图　10.27

$$p\Delta t=\frac{2\pi}{\tau}\Delta t=2\pi\frac{0.02}{0.48}=\frac{\pi}{12}=15°$$

用 x 表示水塔的横向位移，用 ξ 表示地面的位移，运动方程变为

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=-k(x-\xi)$$

或者引入符号 $kg/W=p^2$，得

$$\ddot{x}+p^2x=p^2\xi \tag{g}$$

把该方程同方程(b)作比较，可以看到，地面位移 ξ 完全相当于作用了大小为 $\delta_i=Q_i/k$ 的干扰力。因而，我们可以继续构造如前所述的相位平面。这种构建建立在图 10.27b 所示的近似阶梯曲线的基础上，构建后的图形如图 10.28a 所示，相应的位移—时间曲线如图 10.28b 所示。这里假定了构建时水塔运动的初始条件，$t=0$ 时刻，$x_0=0$，$\dot{x}_0=0$。注意到在受扰振动期间，水塔在 $t=0.17$sec 时刻达到最大位移 $x=0.85$in，之后就运行振幅为 $A=0.925$in 的自由振动，该振幅即相位平面轨迹图最后一个点 A_{13} 的向量 $\overline{OA_{13}}$ 的半径长度(见图 10.28a)。然而，把位移—时间曲线 $x=f(t)$ 与地面—运动曲线 $\xi=q(t)$ 作比较，如图 10.28b 所示，可以看出水塔和地面的最大相对位移是 $(x-\xi)_{max}\approx1.13$in，出现在 $t=0.16$sec 时刻。最大相对位移代表了响应的关键点，因为它可以决定立柱的最大弯曲应力。

a)　　b)

图　10.28

第二个例子，考虑如图 10.29a 所示的简单桥式门架，刚架在水平方向受到矩形脉冲力 $Q_0=1492$lbf 作用，持续时间 $t_1=0.2$sec，如图 10.29b 所示。两边的立柱都是槽钢断面，两端简支，惯性矩是 $I=1.54\text{in}^4$。因而，如图 10.29c 所示，在水平力 P 作用下的横向挠度 δ 是

$$\delta=\frac{Pl^3}{24EI} \tag{h}$$

结构的弹簧常数变为

$$k=\frac{24EI}{l^3}=373\text{lbf/in}$$

于是有 $p=\sqrt{kg/W}=\sqrt{373\times\frac{386}{2400}}=7.75\text{sec}^{-1}$，并且 $\tau\approx2\pi/p=0.813$sec。

注意到如图 10.29c 所示 a、b、c、d 处的弯矩值大小为 $M=Pl/4$，方程(h)可以表示成

如下形式

$$\delta = \frac{Ml^2}{6EI} \tag{h'}$$

那么，如果钢的屈服应力使槽截面的弹塑性力矩达到 $M_p = 40000\text{in} \cdot \text{lbf}$，从方程(h′)中得到

$$\delta_p = \frac{M_p l^2}{6EI} = 3\text{in}$$

就是说，当受扰结构的位移 x 达到值 δ_p 时，立柱开始发生塑性变形并且对于横向位移不再提高抵抗力。

图　10.29

现在我们来假定在 $t=0$ 时刻，框架竖直立于平衡位置，就是说，$x_0 = 0$ 并且 $\dot{x}_0 = 0$。下面，只要还在立柱的弹性范围内，即位移达到 $x = \delta_p = 3\text{in}$ 之前，运动方程就可写成

$$\ddot{x} + p^2 x = p^2 \frac{Q_0}{k} \tag{i}$$

这里 $Q_0/k = 1492/373 = 4\text{in}$。因而，以相位平面内(见图 10.30)坐标为(4,0)的点 C_0 为圆心，构建圆弧 OA，其长是使 A 点满足坐标 $x = \delta_p = 3\text{in}$，如图 10.30 所示。相应的圆心角是 $pt = 75° = 5\pi/12$，同时 $p = 7.75\text{sec}^{-1}$，相应于时间 $t = 0.167\text{sec}$。因而，在此时刻，结构开始塑性变形。干扰力 Q_0 有另外的 0.033sec 的作用时间，相应于在相位平面内的转角是 $\Delta t = 15°$。对于干扰力必须作用的剩余时间里，即 $0.167 < t < 0.200$，运动方程将变为

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = -k\delta_p + Q_0$$

还可以将其写成形式

$$\ddot{x} + p^2 x = p^2\left(\frac{Q_0}{k} - \delta_p + x\right) = p^2 \delta_i \tag{j}$$

图　10.30

这里 δ_i 决定了相位平面轨迹图中每段圆弧中心点 C_i 在 x 轴上的位置，如图 10.30 所示。在此例子中，有 $Q_0/k = 4\text{in}$ 和 $\delta_p = 3\text{in}$，以致于 $\delta_i = 1 + x$。注意到从 $x \approx 3\text{in}$ 开始，以 $p\Delta t = 15°$ 为时间步长直到 $x \approx 4\text{in}$，我们取本段时间间隔内 δ_i 的平均值，即 $(\delta_i)_{av} = (4+5)/2 = 4.5\text{in}$，得到新中心点 C_1。本例中，在达到点 B 后方程(j)就失去了其有效性，因为在 $pt = \pi/2 = 90°$ 时，干扰力消失并且仅仅需要一个时间步长。

在干扰力消失之后结构停止运动之前，运动方程是

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = -k\delta_p$$

这里，为便于用相位平面表示，方程可以写成如下形式

$$\ddot{x} + p^2 x = p^2(x - \delta_p) = p^2\delta_i \tag{k}$$

通过以下表达式，又可以得到正确的圆心 C_2、C_3、C_4、…，即

$$\delta_i = x - \delta_p = x - 3$$

由于这些 δ_i 值又是取决于位移 x，每步长的 δ_i 的平均值应该被用于确定该步长的中心 C_i。举例来说，为了确定圆弧 BC，若决定先从 $x = 4\text{in}$ 处的点 B 开始，画到 $x = 5\text{in}$ 的点 C，那么就有步长 $(\delta_i)_{av} = (1+2)/2 = 1.5\text{in}$，由此再选择新中心点 C_2。按这种方法做下去，继续图 10.30 的构建直到轨迹圆 $BCDEF$ 与 x 轴相交于点 F，说明此时刚架停止了运动，$\dot{x} = 0$。随后结构在相位图中的自由振动又是用以 C_0 为圆心的圆弧来表示，半径 $x_F - \delta_0 = 7 - 4 = 3\text{in}$。这表明作为脉动冲击的结果，结构受了永久损伤，并且在新的变形平衡位置振动，相对于初始的垂直平衡位置向右偏移了 4in。这个例子说明了如何构建相位平面图，此方法可用于研究在弹塑性相位中受到干扰力的结构响应。

10.7 轨道静动应力

假定将铁轨看成由弹性地基连续支承的长杆。下面考虑最简单的单一载荷 P 的情况(见图 10.31)，并用 k 表示地基的模量，即要使地基产生单位挠度时单位长度铁轨施加的载荷，挠曲线的微分方程是

图 10.31

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -ky \tag{a}$$

使用符号

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \tag{b}$$

我们把式(a)的解写成如下形式

$$y = \frac{\beta P}{2k}e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) = \frac{\beta P}{2k}\phi(x) \tag{c}$$

相应的挠度曲线如图 10.32 中所示曲线 $\phi(x)$，把 $x = 0$ 代入方程(c)，得到载荷下的最大挠度

$$y_{x=0} = \frac{\beta P}{2k} \tag{d}$$

该表达式可用来计算地基的模量 k，假定轨道在已知载荷下的挠度可以测量出来。最大挠度取决于常数 β 和 k，并且随着地基模量 k 和轨道的抗弯刚度 EI 的减小而增加。对于一段 130lbf 的铁轨($I = 72.8\text{in}^4$)，若轨道条件较好，我们可以取 $k \approx 1500\text{psi}$，$\beta \approx 0.020\text{in}^{-1}$。为了计算弯

图 10.32

曲刚度，利用弯矩的表达式

$$M = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta}e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) = \frac{P}{4\beta}\psi(x) \tag{e}$$

将函数 $\psi(x)$ 也表示于图 10.32 中。可以在载荷作用下出现最大弯矩，最大弯矩值是

$$M_{max} = \frac{P}{4\beta} \tag{f}$$

对于铁轨的最大应力，我们有

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{P}{4\beta Z} = \frac{P}{4Z}\sqrt[4]{\frac{4EI}{k}} \tag{g}$$

这里 Z 表示铁轨的截面模量。

为了比较铁轨的应力，几何上相似于横截面，方程(g)可以写成如下形式

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\frac{A\sqrt[4]{I}}{4Z}\sqrt[4]{\frac{4E}{k}} \tag{h}$$

其中 A 代表铁轨的横截面面积。对于几何上相似的横截面表达式的第二项因子保持不变，并且第三项因子与铁轨的尺寸无关，所以最大应力与铁轨横截面面积成反比，也就是说，与每单位长度铁轨的重量成反比。

在枕木上的最大压力 R 的近似值，可以通过将式(d)的最大挠度与枕木跨距 l 和地基模量 k 相乘得到，因此

$$R = \frac{\beta P}{2k}kl = \frac{P\beta l}{2} = \frac{Pl}{2}\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \tag{i}$$

从中可以看出枕木上的最大压力 R 主要取决于枕木跨距 l。也应该指出，地基模量 k 同时以四次方根的形式出现于方程(g)和方程(i)，因面，在 σ_{max} 和 R 中由 k 引起的误差是非常小的。

当同时有几个载荷作用于铁轨，就像一列火车车轮那样，轨道的弯矩和应力可以通过叠加得到。举例来说，图 10.33 就显示了由四个大小一样的等速车轮载荷产生的弯矩的叠加结果。

图　10.33

上面的分析是在进行了几个简化假设的基础上得到的近似结果。因而，得到的结果对于铁轨应力试验的指导，是非常有利的证明。

在运动的火车车轮作用下，与按静态公式计算的结果相比，轨道的动挠度和动应力可能会大很多。有很多原因可以使弯曲和应力增加，主要是：

1）车轮或者铁轨形状的各种不规则度，比如车轮边缘的凸点、铁轨的凹点，还有铁轨

连接的不连续。

2）由作用于车轮的弹性力引起的铁轨的应力变化、离心力的竖直方向分量以及作用于连接处的竖直分量。

在讨论由于铁轨中的凹点引起的动应力时（见图 10.34），用变量 η 代表凹点的深度，函数 x 表示铁轨的长度。用 W/g 表示每个车轮的非弹性质量，$2k/\beta$ 表示使铁轨产生单位挠度所需要施加的竖直载荷[见方程(d)]，并且用 y 表示由于对凹点的动态影响而使铁轨产生的附加挠度。那么可以写出由于铁轨的动挠度和凹点共同作用引起的车轮竖向位移，记为 $y+\eta$，车轮在竖直方向的运动微分方程写作

图 10.34

$$\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}^2(y+\eta)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2ky}{\beta}=0 \tag{10.18a}$$

用 v 表示火车的恒速，得到

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}v \qquad \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2}v^2$$

于是方程(10.18a)可以写成如下形式

$$\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2ky}{\beta}=-\frac{W}{g}v^2\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2} \tag{10.18b}$$

如果凹点形状和速度 v 已知，方程(10.18b)的右端项很容易表示为时间的函数，从而得到 10.4 节所讨论的受迫振动方程，在每一种具体情况下，很容易得到该方程的解。

作为算例，我们给出如图 10.34 所示的凹点情形，凹点形状由以下方程描述

$$\eta=\frac{\lambda}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right) \tag{j}$$

其中，l 是凹面的长度；λ 是凹面的中点的深度。于是方程(10.18b)的右端项变为

$$-\frac{W}{g}v^2\frac{\lambda}{2}\frac{4\pi^2}{l^2}\cos\frac{2\pi x}{l}$$

从车轮与凹面起始点重合的那一刻开始计时，如图 10.34 所示，我们有 $x=vt$，方程(10.18b)变为

$$\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2ky}{\beta}=-\frac{W}{g}v^2\frac{\lambda}{2}\frac{4\pi^2}{l^2}\cos\frac{2\pi vt}{l}$$

或者采用符号

$$\frac{2kg}{\beta W}=p^2$$

可得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+p^2y=-\frac{2\lambda\pi^2v^2}{l^2}\cos\frac{2\pi vt}{l}$$

为求解这个微分方程，采用 10.4 节所描述的方法。按照方程(10.11)描述的方法运算，得到

$$y=-\frac{2\lambda\pi^2v^2}{pl^2}\int_0^{t_1}\cos\frac{2\pi vt}{l}\sin p(t_1-t)\,\mathrm{d}t \tag{k}$$

对上式进行积分，并用 $\tau=2\pi/p$ 表示铁轨上的车轮的自由振动周期，用 $\tau_1=l/v$ 表示车轮通过凹点所经历的时间，得到

$$y=\frac{\lambda}{2(1-\tau_1^2/\tau^2)}\left(\cos\frac{2\pi t_1}{\tau_1}-\cos\frac{2\pi t_1}{\tau}\right) \quad (10.19)$$

通过上式，在任何时刻 $t_1\leqslant\tau_1$ 附加的动挠度都能够被计算出来。可以看出，由凹点产生的挠度正比于深度 λ，也取决于比率 τ_1/τ。针对该比率的不同值，图 10.35 画出了动挠度曲线。横坐标给出了车轮经过凹点的位置，纵坐标给出了根据 λ 值表示的附加挠度。车轮一进入凹点，当车轮开始向下加速运动时，铁轨上的压力和相应的轨道挠度就随之减小（y 是负值）。接着随着压力和挠度的增加，运动减速。从图中可以看出，在 $\tau_1<\tau$ 时，当车轮接近凹面的最低点时，产生的压力最大。最大动挠度和凹面深度 λ 的比值，可通过式(10.19)计算出，如下表所示。

图　10.35

$\frac{\tau_1}{\tau}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
y_{max}/λ	0.33	0.65	1.21	1.41	1.47	1.45	1.33

可以看出，当火车速度为 $\tau_1/\tau\approx2/3$ 时，比率的最大值大约等于 1.5。就是说，当车轮通过凹面的时间等于轨道上车轮的自然振动周期的 2/3 时比率有最大值。可以推断出由于凹点引起的附加动压力约等于使铁轨产生 1.5λ 的静挠度所需要施加的力。其他形状的凹点也可得到类似结果。此类计算说明比率 y_{max}/λ 不完全取决于凹点的形状，假设凹点的形状可用一条连续曲线表示，上面的计算也可应用于车轮边缘是凸点的情况，因为这种凸点使车轮产生的竖向振动的效果同铁轨上同样形状的凹点使车轮振动的效果完全一样。

考虑由于配重的离心力 Q 产生的火车车轮的附加压力，能够使用前面 10.3 节讨论的强迫振动理论，并将这个力乘以放大因子。这样由配重产生，作用于铁轨的附加压力等于 $Q/(1-\tau^2/\tau_2^2)$，这里 τ 表示铁轨上车轮的自由振动周期，τ_2 表示车轮公转一周时间。以上计算中，忽略了铁轨质量，因为时间 τ_2 远大于铁轨自由振动的周期 τ，所以这是合理的。最简单的铁轨振动类型是将铁轨看成刚体在竖直方向上的振动。为求得该振动的周期 τ_3，使用已知方程

$$\tau_3=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}$$

这里 δ_{st} 是铁轨由于自重引起的静挠度。举例来说，一个 130lbf 的铁轨，假定 $k=1500$psi，可以计算得到 $\tau_3=0.0157$sec，该结果与车轮公转一周的时间 τ_2 相比要小得多。

10.8 等截面梁的横向振动

等截面梁的静态挠曲线微分方程是

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=q$$

其中，q 代表均布载荷集度；EI 是梁的抗弯刚度。为使方程适用于梁的自由横向振动的情况，仅仅需要使用 D'Alember 法则，把横向载荷集度 q 用梁每单位长度的惯性力来代替。方程变为

$$EI\frac{\partial^4y}{\partial x^4}=-\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2} \tag{10.20}$$

其中 w/g 表示梁每单位长度的质量。在如图 10.36 所示的简支梁的情况，方程(10.20)的求解尤为简单。这种情况下，振动梁呈正弦形状，采用下列解的形式既能够满足方程(10.20)，也能够满足支点 A 和 B 的条件

$$y=\phi_i\sin\frac{i\pi x}{l} \tag{a}$$

其中，i 表示振动梁被分成半波的个数；ϕ_i 是时间的函数。把方程(a)代入方程(10.20)，我们得到方程

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=0 \tag{10.21}$$

利用符号

$$p_i^2=\frac{i^4\pi^4}{l^4}\frac{EIg}{w} \tag{10.22a}$$

图 10.36

微分方程(10.21)表示前面 10.1 节提到的简谐振动，其频率表达式为

$$f_i=\frac{p_i}{2\pi}=\frac{\pi i^2}{2l^2}\sqrt{\frac{EIg}{w}} \tag{10.22b}$$

取 $i=1$、2、3、…，我们获得梁振动的不同模态，如图 10.36b、c、d、…所示。可以看出，不同模态的振动频率与半波数量 i 的平方成正比，与梁长度 l 的平方成反比。对于几何形状相似的梁，横向振动频率随着线性尺寸的增加而减少。

讨论梁的受迫振动，我们用 $q(x,t)$ 表示分布干扰力集度，并把它作为惯性力加到方程(10.20)的右边，于是写成

$$EI\frac{\partial^4y}{\partial x^4}=-\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}+q(x,t) \tag{10.23}$$

再次采用形式(a)写出方程的解，并代回方程，得到

$$\ddot{\phi}_i\sin\frac{i\pi x}{l}+p_i^2\phi_i\sin\frac{i\pi x}{l}=\frac{g}{w}q(x,t)$$

现在方程两边都乘以 $\sin(i\pi x/l)dx$，并且在梁的长度 l 上积分，得到

$$\ddot{\phi}_i+p_i^2\phi_i=\frac{2g}{wl}\int_0^l q(x,t)\sin\frac{i\pi x}{l}dx \tag{10.24}$$

对于任何给定的分布干扰力 $q(x,t)$，能够估算出方程(10.24)右端项的积分。下面利用 10.5 节的通解方程(10.17)，我们得到 ϕ_i 的解。

举例说明。考虑受一个静态脉冲力 $P\sin\omega t$ 作用的梁的情况，如图 10.37 所示。本例中，除了在点 $x=c$ 外，函数 $q(x,t)$ 对所有的 x 值都为零，得到

$$\int_0^l q(x,t)\sin\frac{i\pi x}{l}\mathrm{d}x = P\sin\omega t\sin\frac{i\pi c}{l}$$

图　10.37

把上式代入方程(10.24)的右端，变为

$$\ddot{\phi}_i + p_i^2\phi_i = \frac{2gP}{wl}\sin\omega t\sin\frac{i\pi c}{l} \tag{b}$$

然后利用方程(10.17)，我们得到通解

$$\phi_i = \frac{2gP}{p_i wl}\sin\frac{i\pi c}{l}\int_0^{t_1}\sin\omega t\sin(p_i t_1 - p_i t)\,\mathrm{d}t \tag{c}$$

积分后，变为

$$\phi_i = \frac{2gP}{wl}\sin\frac{i\pi c}{l}\left(\frac{\sin\omega t}{p_i^2-\omega^2} - \frac{\omega}{p_i}\frac{\sin p_i t}{p_i^2-\omega^2}\right) \tag{d}$$

把这个关于 ϕ_i 的表达式代入方程(a)，得到梁振动的第 i 阶模态。取 $i=1$、2、3、…并把相应的各阶振动模态相加求和，得到梁对于干扰力 $P\sin\omega t$ 响应的全解，即

$$y = \frac{2gP}{wl}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi c/l)\sin(i\pi x/l)}{p_i^2-\omega^2}\sin\omega t - \frac{2gP}{wl}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\omega}{p_i}\frac{\sin(i\pi c/l)\sin(i\pi x/l)}{p_i^2-\omega^2}\sin p_i t \tag{10.25}$$

第一项级数正比于 $\sin\omega t$，表示同干扰力自身频率完全一样的频率为 $\omega/2\pi$ 的强迫振动。第二项级数正比于 $\sin p_i t$，表示频率由方程(10.22a)给定的自由振动。由于在推导时忽略了各种阻尼，这些自由振动将逐渐消失，而只保留了强迫振动。

我们可以看到，如果 ω 很接近于任何一个固有频率 p_i，级数中的各项就会变得很大，并且产生共振。为了避免产生共振的可能，最低阶振动模态($i=1$)的频率必须要比干扰力的频率大好几倍。

举一个例子。干扰力作用于梁中点($c=l/2$)的情况。引入符号 $\omega^2/p_1^2=\alpha^2$，从方程(10.25)第一项级数得出

$$y = \frac{2pl^3}{\pi^4 EI}\left[\frac{\sin(\pi x/l)}{1-\alpha^2} - \frac{\sin(3\pi x/l)}{3^4-\alpha^2} + \frac{\sin(5\pi x/l)}{5^4-\alpha^2} - \cdots\right]\sin\omega t$$

对于 α^2 值很小的情况，也就是，$\omega \ll p_1$，这个级数中只用表示稳态响应的第一项就有足够精度，我们推断出动挠度与静挠度的比率是 $1/(1-\alpha^2)$。举例来说，如果 $\omega=p_1/4$，动挠度将比静挠度大 6% 左右。

第二个例子。我们考虑如图 10.38 所示的情况，有一常力 P 以匀速 v 沿着梁运动。从力 P 位于点 A 时开始计时，力的作用位置由图示距离 vt 确定。那么，在本算例中，方程(10.24)的右端项积分变为

$$\int_0^l q(x,t)\sin\frac{i\pi x}{l}\mathrm{d}x = P\sin\frac{i\pi vt}{l}$$

图　10.38

求解 ϕ_i 的方程变为

$$\ddot{\phi}+p_i^2\phi_i=\frac{2gP}{wl}\sin\frac{i\pi vt}{l} \tag{e}$$

把上式同方程(b)相比较，我们看到由 $i\pi v/l$ 代替 ω，同时因子 $\sin(i\pi c/l)$ 也消失了。把这些变化引入通解(10.25)，我们就得到了常力 P 以匀速 v 沿着梁运动的解如下

$$y=\frac{2gP}{wl}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i\pi x/l)\sin(i\pi vt/l)}{p_i^2-i^2\pi^2v^2/l^2}-\frac{2gP}{wl}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i\pi v}{p_il}\frac{\sin(i\pi x/l)\sin p_it}{p_i^2-i^2\pi^2v^2/l^2} \tag{10.26}$$

如前所述，解中的第一项级数表示梁的强迫振动，第二项级数表示自由振动。

考虑一个有趣的特殊情况。假定力 P 通过梁跨度的时间仅仅是梁自由振动的一阶模态的周期 τ 的一半，就是说，$2l/v=\tau=2\pi/p_1$。这种情况下，$p_1^2=\pi^2v^2/l^2$，看出每个级数中的第一项变得无限大，但其微分是有限的，可表示成如下形式

$$y\approx-\frac{Pgt}{w\pi v}\cos\frac{\pi vt}{l}\sin\frac{\pi x}{l} \tag{f}$$

当 $vt=l$ 时，该表达式有最大值，仅在移动力 P 到达梁的远端时，有最大值

$$y_{\max}=\frac{Pgl}{w\pi v^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

注意到

$$p_1^2=\frac{\pi^4}{l^4}\frac{EIg}{w}=\frac{\pi^2v^2}{l^2}$$

得到

$$y_{\max}=\frac{Pl^3}{\pi^3EI}\sin\frac{\pi x}{l} \tag{g}$$

可以看出，由于移动载荷而产生的梁的最大动挠度要比梁中点作用同样大小的力产生的静挠度大 50%。

在桥梁的例子中，移动载荷通过桥梁需要的时间通常要大于振动的最低阶模态的周期。在这个例子中比率 $\pi^2v^2/l^2p_1^2$ 较小，用 α^2 表示。然后只取式(10.26)每一个级数的第一项，并假定最不利的情况下自由振动和强迫振动相位相同，使得振幅叠加，由此得到最大挠度

$$y_{\max}=\frac{2gP}{wl}\left(\frac{1}{p_1^2-\pi^2v^2/l^2}+\frac{\pi v}{p_1l}\frac{1}{p_1^2-\pi^2v^2/l^2}\right)$$

把因子 α 引入上述表达式，上式变为

$$y_{\max}=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}\frac{1+\alpha}{1-\alpha^2}=\frac{2Pl^3}{\pi^4EI}\frac{1}{1-\alpha} \tag{10.27}$$

从中可以看出，对于移动速度较慢的力，梁的最大动挠度接近于同样的力作用下产生的最大静挠度的 $1/(1-\alpha)$ 倍。

最后一个例子。我们考虑以匀速 v 沿梁运动的脉冲力的情况。例如，这种条件可能出现于不完全平衡的火车车轮移动穿过桥梁的情况。这种情况下，由于不平衡引起的离心力的竖直分量是 $P\cos\omega t$，ω 是车轮的角速度。采用上一个例子的方法继续进行运算，得到梁的动挠度

$$y=\frac{Pl^3}{\pi^4 EI}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{l}\left\{\frac{\sin(i\pi v/l+\omega)t}{i^4-(\beta+i\alpha)^2}-\frac{\sin(i\pi v/l-\omega)t}{i^4-(\beta-i\alpha)^2}-\right.$$

$$\left.\frac{\alpha}{i}\left[\frac{\sin p_i t}{-i^2\alpha^2+(i^2-\beta)^2}+\frac{\sin p_1 t}{-i^2\alpha^2+(i^2+\beta)^2}\right]\right\}\cdots \tag{10.28}$$

其中 α 是梁振动的最低阶模态周期 τ 与移动力通过梁的跨距所需时间 $\tau_1=l/v$ 的 2 倍的比值。$\beta=\tau/\tau_2$ 是梁的基本周期与脉冲力的周期 $\tau_2=2\pi/\omega$ 的比值。

当脉动力的周期 τ_2 等于梁在最低阶振动模态的周期 τ 时，$\beta=1$，我们得到共振条件。并且脉冲力在移动过程中振动的振幅逐渐上涨，在时间 $t=l/v$ 时达到最大值，级数列式(10.28)中最重要的一项可以简写成如下形式

$$\frac{1}{\alpha}\frac{2Pl^3}{\pi^4 EI}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\omega t$$

最大挠度变为

$$y_{max}=\frac{1}{\alpha}\frac{2Pl^3}{\pi^4 EI}=\frac{2\tau_1}{\tau}\frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \tag{10.29}$$

这说明梁的最大动挠度接近于由力 P 产生的静挠度的 $2\tau_1/\tau$ 倍。由于 τ_1 通常比 τ 大，我们经常看到值 y_{max} 比最大静挠度大很多倍。

附　　录

附录 A　国际单位制单位与英美制单位换算表

Linear Measure　长度单位

1in(英寸) = 25.4mm(毫米)

1ft(英尺) = 12in(英寸) = 0.3048m(米)

1yd(码) = 3ft(英尺) = 0.9144m(米)

1(statute)mile(英里) = 1760yd(码) = 1.609km(千米)

1n mile(海里) = 1852m(米)

1mm(毫米) = 0.03937in(英寸)

1cm(厘米) = 10mm(毫米) = 0.3937in(英寸)

1dm(分米) = 10cm(厘米) = 3.937in(英寸)

1m(米) = 10dm(分米) = 1.0936yd(码) = 3.2808ft(英尺)

1dam(十米) = 10m(米) = 10.936yd(码)

1hm(百米) = 100m(米) = 109.4yd(码)

1km(千米) = 1000m(米) = 0.6214mile(英里)

1nmile(海里) = 1852m(米) = 1.1500mile(英里)

Square Measure　面积单位

$1in^2$ 平方英寸 = $6.45cm^2$(平方厘米)

$1ft^2$ 平方英尺 = $144in^2$(平方英寸) = $9.29dm^2$(平方分米)

$1yd^2$(平方码) = $9ft^2$(平方英尺) = $0.836m^2$(平方米)

1acre 英亩 = $4840yd^2$(平方码) = 0.405ha(公顷)

$1mile^2$ 平方英里 = 640acre(英亩) = 259ha(公顷)

$1cm^2$(平方厘米) = $0.155in^2$(平方英寸)

$1m^2$(平方米) = $1.196yd^2$(平方码)

1are(公亩) = $100m^2$(平方米) = $119.6yd^2$(平方码)

1ha(公顷) = 100are(公亩) = 2.471acre(英亩)

$1km^2$(平方公里) = $0.386mile^2$(平方英里)

Cubic Measure　体积单位

$1in^3$(立方英寸) = $16.4cm^3$(立方厘米)

$1ft^3$(立方英尺) = $1728in^3$(立方英寸) = $0.0283m^3$(立方米)

1yd³(立方码)=27ft³(立方英尺)=0.765m³(立方米)
1cm³(立方厘米)=0.0619in³(立方英寸)
1m³(立方米)=1.308yd³(立方码)

Capacity Measure　容积单位

Britich　英制

1pint(品脱)=20fluid oz(液量盎司)=34.68in³(立方英寸)=0.568L(升)
1quart(夸脱)=2pint(品脱)=1.136L(升)
1gallon(加仑)=4quart(夸脱)=4.546L(升)
1peck(配克)=2gallon(加仑)=9.092L(升)
1bushel(蒲式耳)=4peck(配克)=36.4L(升)
1quarter(八蒲式耳)=8bushel(蒲式耳)=2.91hL(百升)

American dry　美制干量

1pint(品脱)=33.60in³(立方英寸)=0.550L(升)
1quart(夸脱)=2pint(品脱)=1.101L(升)
1peck(配克)=8quart(夸脱)=8.81L(升)
1busbel(蒲式耳)=4peck(配克)=35.3L(升)

American liquid　美制液量

1pint(品脱)=16fluid oz(液量盎司)=28.88in³(立方英寸)=0.4731L(升)
1quart(夸脱)=2pint(品脱)=0.946L(升)
1gallon(加仑)=4quart(夸脱)=3.785L(升)
1mL(毫升)=0.002pint(British)(英制品脱)
1cL(厘升)=10mL(毫升)=0.018pint(品脱)
1dL(分升)=10cL(厘升)=0.176pint(品脱)
1L(升)=10dL(分升)=1.76pint(品脱)
1daL(十升)=10L(升)=2.20gallon(加仑)
1hL(百升)=100L(升)=2.75bushel(蒲式耳)
1klL(千升)=1000L(升)=3.44quarter(八蒲式耳)

Weight Measure 重量(质量)单位

1gr(格令)=0.065g(克)
1dr(打兰)=1.772g(克)
1oz(盎司)=16dr(打兰)=28.35g(克)
1lb(磅)=16oz(盎司)=7000gr(格令)=0.4536kilogram(千克)
1st(英石)=14lb(磅)=6.35kg(千克)
1quarter(四分之一英担)=2st(英石)=12.70kg(千克)
1cwt(英担)=4quarter(四分之一英担)=50.80kg(千克)
1short ton 短吨(美吨)=2000lb(磅)=0.907tonne(公吨)
1(long)ton 长吨(英吨)=20cwt(英担)=1.016tonne(公吨)

1mg(毫克)=0.015gr(格令)
1cg(厘克)≈10mg(毫克)=0.154gr(格令)
1dg(分克)≈10cg(厘克)≈1.543gr(格令)
1g(克)=10dg(分克)=15.43gr(格令)
1dag(十克)=10g(克)=5.64dr(打兰)
1hg(百克)=100g(克)=3.527oz(盎司)
1kg(千克)=1000g(克)=2.205lb(磅)
1t(tonne)(吨,公吨)=1000kg(千克)=0.984(long)ton(长吨,英吨)=1.1023(短吨,美吨)

Force、Stresses Measure　力、应力单位

1N(牛顿)=0.101972kgf(千克力)=0.224809lbf(磅力)=3.59694ozf(盎司力)
1lbf(磅力)=4.44822N(牛顿)=0.453592kgf(千克力)≈16ozf(盎司力)
1kgf(千克力)=9.80665N(牛顿)=2.20462lbf(磅力)=35.274ozf(盎司力)
1kgf·m(千克力米)=9.80665N·m(牛顿米)
1lbf·ft(磅力英尺)=1.35582N·m(牛顿米)
1lbf·in(磅力英寸)=0.112985N·m(牛顿米)
1lbf/ft^2(磅力每平方英尺)=47.8803Pa(帕斯卡)
1lbf/in^2(磅力每平方英寸)=6894.76Pa(帕斯卡)
1kgf/m^2(千克力每平方米)=9.80665Pa(帕斯卡)

附录B　习题答案

第1章

1.1　1. $S_1=P\csc\alpha$, $S_2=P\cot\alpha$
　　2. $S=P\sqrt{2}$

1.2　1. $R_A=0.882P$, $R_B=0.667P$
　　2. $R_A=2.24P$, $R_B=2.82P$
　　3. $R_A=P$, $R_B=1.41P$

1.3　1. $R_A=0.65Q$, $R_B\approx1.52Q$
　　2. $S_1=+5.33P$, $S_2=+2.01P$, $S_3=-7.12P$
　　3. $X_A=0.167P$, $X_B=0.833P$, $Y_A=0.125P$, $Y_B=1.125P$
　　4. $S\approx P/2$

1.4　5. $P/3$

1.5　1. $P_A=1.25P$, $R_B\approx0.75P$
　　2. $R_A=R_B=P$
　　4. $R_A=9,315\text{lbf}$, $R_B=6,465\text{lbf}$
　　5. $S_1=-1,538\text{lbf}$, $S_2=+1,414\text{lbf}$, $S_3=-1,392\text{lbf}$

1.6　1. $x\approx0.355a$

4. $R_A = 6,880\text{lbf}$, $R_B = 8,220\text{lbf}$

5. $S = 0.6Q$

1.8 1. $S_{max} = 94,700\text{lbf}$

2. $L = 104\text{ft}$

3. $f = 39.8\text{ft}$

4. $S_b = 496\text{lbf}$

5. $L_{min} = 1.14l + 0.80l = 1.94l$

6. $y = h(\cosh \sqrt{w/H}x - 1)$

1.10 1. $S_2 = 1.41P$，拉力

2. $S_1 = -P$, $S_2 = +Pb/(a+b)$

3. $R_C = 13P/4$

4. $X_A = -X_B = \sqrt{3}P$, $Y_A = Y_B = 2P$

5. $H = P/3$

第 2 章

2.2 1. (a) $R_A = 5P$, $X_B = 2.5\sqrt{3}P$, $Y_B = 1.5P$

2. (a) $R_B = 5P/\sqrt{3}$, $X_A = 2P$, $Y_A = P/\sqrt{3}$

3. (a) $R_B = 184.7\text{kip}$, $X_A = 160\text{kip}$, $Y_A = 92.4\text{kip}$

4. (a) $S_1 = -2.45P$, $S_2 = -3.87P$, $S_3 = +4.46P$

5. $S_1 = 0$, $S_2 = 1.56P$, $S_3 = -1.20P$

2.5 1. $S_2 = -1.875P$, $S_5 = -2.5P$, $S_8 = +1.875P$

2. $S_1 = +2.25P$, $S_2 = -0.75P$, $S_3 = -2.25P$

2.9 1. $X = 0$

第 3 章

3.2 3. $\text{Max}R_B = 322\text{kip}$

4. $\text{Max}R_A = 189.1\text{kip}$

3.3 1. $V_{max} = 75\text{kip}$

2. $V_{max} = 126.9\text{kip}$

3. $V_{max} = 57.1\text{kip}$

3.4 1. (a) 1907.5kip · ft, (b) 1738.7kip · ft

2. (a) 412.5kip · ft, (b) −210.0kip · ft

4. 1243kip · ft

3.5 1. 65.9kip

2. 2990kip · ft

3. 105.3kip

3.6 1. (a) 56.25kip, (b) 239kip

2. 67.5kip · ft

3. 3.35kip

4. $H=15\text{kip}$, $M_d=-104\text{kip}\cdot\text{ft}$, $V_d=8.06\text{kip}$

3.7 1. (a) 66.7kip, (b) 80.2kip

2. $S_1=+33.75\text{kip}$, $S_2=-26.25\text{kip}$, $S_3=-33.75\text{kip}$

3. $S_1=36.7\text{kip}$, $S_2=-26.4\text{kip}$

4. $S=-5\text{kip}$

3.8 2. $S_1=449\text{kip}$

3. $H=90\text{kip}$, $H=344.5\text{kip}$

4. 55.4kip

第4章

4.1 1. 4:1

2. $U=42\text{lbf}\cdot\text{in}$

3. $U_T/U_M=5/4$

4.3 1. (a) $U=\dfrac{l}{6EI}(M_a^2+M_aM_b+M_b^2)$

(b) $U=\dfrac{2EI}{l}(\theta_A^2-\theta_A\theta_B+\theta_B^2)$

2. $U=2\pi^2EI/l$

3. $U=EI\pi^4\delta^2/l^3$

4. $U=q^2l^5/240EI$

4.4 1. $S=P/(1+\cos^3\alpha)$

2. $\delta=Pl^3/2\pi^4EI$

3. $\delta=\sqrt[3]{2Pl^3/AE}$

4.5 1. $\theta_A=\theta_B=ql^3/24EI$

2. $\delta=5Pl^3/3EI$

3. $\delta=2Pl^3/3EI$

4. $\delta_h=Pr^3/2EI$, $\delta_v=\pi Pr^3/4EI$

5. $\theta=\dfrac{MR\alpha}{EI}+\dfrac{QR^2}{EI}(1-\cos\alpha)-\dfrac{NR^2}{EI}(\alpha-\sin\alpha)$

4.6 1. $M_A=M_B=-ql^2/12$

2. $M_A=-q_0l^2/30$, $M_B=-q_0l^2/20$

3. $M_B=Pc(l^2-c^2)2l^2$

5. $H=P/\pi$

4.7 1. $\text{Max}M_C=5125\text{ft}\cdot\text{lbf}$

2. $y=-(l^2x-2lx^2+x^3)/l^2$, $x=l/3$

3. $R_b=\dfrac{Px^2}{2l^3}(3l-x)$

4. $S=\dfrac{Px^2}{6}\dfrac{3l-x}{l^3/3+Ih/A}$

5. $S=\frac{Px^2}{6}\frac{3l-x}{(l^3/3)\sin\alpha+(2Il/A)\csc 2\alpha}$

第 5 章

5.1 1. -0.0028in

2. $\delta_c=0.010\text{in}$

3. $\delta=0.0114\text{in}$

4. $\delta_d=0.786\text{in}$

5. $\delta_h=4.71\text{in}$

5.2 1. $\delta_v=0.158\text{in}$，向上

2. $\delta_c=0.223\text{in}$，向下

5.3 1. $\delta_h=0.017\text{in}$，$\delta_v=0.080\text{in}$

2. $\delta_v=0.345\text{in}$

5.4 1. $\delta_p=0.175\text{in}$

2. $\delta_c=1.25\text{in}$

5.5 1. $\delta_C=0.067\text{in}$

2. $\delta_D=\delta_C=0.20\text{in}$ 向上

3. $\delta_C=1.800\text{in}$

4. $\delta_C=0.0785\text{in}$，$\delta_D=0.1215\text{in}$

5. $\delta_C=1.53\text{in}$，$\delta_D=3.28\text{in}$，$\delta_h=2.60\text{in}$

第 6 章

6.2 1. $X=(540.9/616.5)P$

2. $X=540.9P/(300/A_6+616.5)$

3. $X=0.854P$

4. $X=19.23\text{kip}$，向上

5. $S_x=+14500\text{lbf}$

6.3 1. $X_c=17850\text{lbf}$，$X_d=3600\text{lbf}$

2. $X_C=16950\text{lbf}$，$X_D=4200\text{lbf}$

3. $X=35.8\text{kip}$

4. $X=21.0\text{kip}$

5. $X=-17.7\text{kip}$，$Y=-16.1\text{kip}$，$Z=-6.5\text{kip}$

... $=+7.1\text{kip}$，... $=+16.1\text{kip}$

6.4 1. $X_A=-2260\text{lbf}$，$X_B=+10340\text{lbf}$

2. $X_A=+1740\text{lbf}$，$X_B=+5860\text{lbf}$

3. $X=8575\text{lbf}$，拉力

4. $X=-2100\text{lbf}$，$Y=-1800\text{lbf}$，$Z=+3910\text{lbf}$

5. $X=-11840\text{lbf}$，$Y=-9440\text{lbf}$，$Z=-3720\text{lbf}$

6.5 1. $\text{Max}X_c=98.3\text{kip}$

2. $S_{max} = -23.6\text{kip}$

3. $\text{Max}X_c = 85.5\text{kip}$

4. $X_{max} = 40.8\text{kip}$，压力

5. 参见图 6.24b

6.6 1. $X = +56\text{lbf}$

2. $X_t = -1,295\text{lbf}$

3. $X = +14370\text{lbf}$，$Y = +18210\text{lbf}$

第 7 章

7.2 1. $\Delta = (2Hr^3/EI)F(\alpha)[1 + (k^2/r^2)G(\alpha)]$

其中 $F(\alpha) = \alpha/2 - \frac{3}{4}\sin 2\alpha + \alpha\cos^2\alpha, G(\alpha) = (\alpha/2 + \frac{1}{4}\sin 2\alpha)/F(\alpha)$

2. $H = \frac{qr}{2}\frac{\Psi(\alpha)}{F(\alpha)}\frac{1}{1 + (k/r)^2 G(\alpha)}$

其中 $\Psi(\alpha) = \frac{2}{3}\sin^3\alpha + \frac{1}{2}\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha - \frac{1}{4}\cos\alpha\sin 2\alpha$

3. $H = \frac{EI\alpha_t tl}{2r^3 F(\alpha)}\frac{1}{1 + (k/r)^2 G(\alpha)}$

7.3 1. $H_t = \frac{45EI_0\alpha t}{4f^2\left[1 + \frac{45}{16}(l/f)(k^2/f^2)\tan^{-1}(4f/l)\right]}$

2. $M_C = -wl^2 f/560$

3. $d = (r/\alpha)(\alpha - \sin\alpha)$

4. $M_0 = \frac{ql^2}{16\alpha\sin^2\alpha}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$

5. $H_0 = F(\alpha)(EI\alpha_t t/r^2)$

其中 $F(\alpha) = \frac{2\alpha\sin\alpha}{\alpha^2 + \alpha\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha + (k^2/r^2)(\alpha^2 + \alpha\sin\alpha\cos\alpha)}$

7.4 1. $M_d = -ql^2/21$

2. $H_0 = 3.743q$ ft，$M_0 = 9.417q$ ft^2，$V_0 = -1.533q$ ft

3. $H_0 = 4.488q$ ft，$M_0 = 31.14q$ ft^2，$R_0 = 2.659q$ ft

4. $H_0 = 1.730q$ ft，$M_0 = 3.434q$ ft^2，$R_0 = 0.615q$ ft

5. 分布载荷 $q = 1\text{kip/ft}$，反力及弯矩图的竖距，如图 7.22 所示

7.5 1. $R_A = 11.301\text{kip}$，$H_A = 2.684\text{kip}$

2. $R_A = 4.781\text{kip}$，$H_A = 1.822\text{kip}$

7.6 1. $H_0 = 186.4\text{lbf}$，$R_0 = -31.8\text{lbf}$

7.7 1. $b = l/2$，$M_0 = -Pc(c + 3l)/4l$，$H_0 = 3Pc(l - c)4l^2$

2. $M_A = Pr/\pi - Pr/2$，$M_D = Pr/\pi$

第8章

8.3　1. $M_1 = -\frac{ql^2}{8}\frac{1}{1+\alpha}$

2. $M_1 = -\frac{ql^2}{8}\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}$

3. $M_0 = -\frac{ql^2}{8}\frac{2+4\alpha}{3+4\alpha}$　$M_1 = -\frac{ql^2}{8}\frac{2}{3+4\alpha}$

4. $M_0 = -\frac{ql^2}{8}\frac{2+3\alpha}{3(1+\alpha)}, M_1 = -\frac{ql^2}{8}\frac{2}{3(1+\alpha)}, M_2 = +\frac{ql^2}{8}\frac{1}{3(1+\alpha)}$

5. $M_1 = -\frac{ql^2}{8}\frac{4(\alpha+\beta)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}, M_2 = +\frac{ql^2}{8}\frac{2\alpha}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$

6. $M_1 = -\frac{ql^2}{8}\frac{2\alpha^3(\alpha+2\beta)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}, M_2 = -\frac{ql^2}{8}\frac{2\alpha^3(2+\alpha)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$

7. $M_0 = M_3 = \frac{ql^2}{8}\frac{2\alpha^3}{3(1+2\alpha)}, M_1 = M_2 = -\frac{ql^2}{8}\frac{4\alpha^3}{3(1+2\alpha)}$

8.4　1. (a) $m_{ab} = -m_{ba} = -0.1138ql^2$，(b) $m_{ab} = -m_{ba} = -0.1708pl^2$

2. $M_{ab} = M_{ba} = -0.0668EI_0/l$

3. $M_{ba} = \frac{C_2}{C_1}M_{ab}$

4. $M_{ba} = 0.238ql^2$

5. $M_{ba} = 0.159ql^2$

8.6　1. $M_{ad} = -M_{ab} = -94.0\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{ba} = -M_{bc} = +21.4\text{kip}\cdot\text{ft}$

2. $M_B = M_C = -ql^2/6(2+\alpha)$，$M_A = M_D = -M_B/2$，$\alpha = h/l$

3. $M_B = \frac{-1}{\alpha\gamma+1}\frac{pc^2(l-e)}{l^2}$，这里 $\alpha = h/l$，$\gamma = I_2/I_1$

4. $M_B = \frac{-q_0l^2}{20(1+\alpha\gamma)}$，这里 $\alpha = h/l$，$\gamma = I_2/I_1$

5. $M_B = M_C = -(ql^2)/8(3+\alpha\gamma)$，这里 $\alpha = h/l$，$\gamma = I_2/I_1$

6. 对于 $\alpha = h/l$，$\gamma = I_2/I_1$

$$M_B = -\frac{2pe(l-e)[\alpha\gamma(l+e)+2e]}{l^2(\alpha\gamma+2)(3\alpha\gamma+2)}$$

$$M_C = -\frac{2pe(l-e)[\alpha\gamma(2l-e)+2(l-e)]}{l^2(\alpha\gamma+2)(3\alpha\gamma+2)}$$

$$M_A = -\frac{M_B}{2},\ M_D = -\frac{M_C}{2}$$

8.7　1. 参见图 8.33b

2. $M_{ab} = \frac{4}{7}\left(\frac{11}{128}Qe - Pd\right)$，$M_{ac} = \frac{-11}{128}Qe + \frac{3}{7}\left(\frac{11}{128}Qe - Pd\right)$

3. $M_{ba} = -M_{bc} = -2.25\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{cb} = 3.94\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{ce} = 6.94\text{kip}\cdot\text{ft}$，
$M_{cd} = -10.88\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{ec} = -M_{ef} = 8.25\text{kip}\cdot\text{ft}$，

$M_{gb} = -26.44\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{dc} = -12.75\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{fe} = -11.44\text{kip}\cdot\text{ft}$

4. $M_{ba} = -160.0\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{bc} = -25.3\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{bg} = 185.3\text{kip}\cdot\text{ft}$，
$M_{cb} = -46.7\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{cd} = -7.86\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{ef} = 54.6\text{kip}\cdot\text{ft}$，
$M_{dc} = -M_{de} = -16.1\text{kip}\cdot\text{ft}$

8.8 1. $M_b = -20.75\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_c = -37.6\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_d = +18.3\text{kip}\cdot\text{ft}$

2. $M_a = -25.95\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_b = -20.11\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_c = -37.62\text{kip}\cdot\text{ft}$

3. $M_{ab} = -110.5\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{ba} = +78.8\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{bc} = -42.4\text{kip}\cdot\text{ft}$，
$M_{cb} = -21.2\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{bd} = -37.0\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{db} = -M_{de} = -9.0\text{kip}\cdot\text{ft}$

4. 距左端 $\Delta = 0.0179\text{ft}$

5. $\Delta = 0.101\text{in}$

6. $M_{ab} = -16.8\text{in kip}$，$M_{ba} = -53.6\text{in}\cdot\text{kip}$，
$M_{bc} = +53.6\text{in}\cdot\text{kip}$，$M_{cb} = -141.2\text{in}\cdot\text{kip}$

第 9 章

9.2

2. $AB = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 11 \\ -7 & 1 & 9 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3. $BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & -1 & 4 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

5. $AB = 3I$

9.3

1. $S_1 = S_4 = -6.67\text{kip}$，$S_2 = S_3 = -23.1\text{kip}$，$S_5 = +16.7\text{kip}$，$S_6 = S_7 = +17.3\text{kip}$

2.

杆	1	2	3	4	5	6	7
S	+51.6	-4.55	+35.5	+21.6	+51.4	+51.4	-15.4

9.4 2. $M_{12} = -115.9\text{kip}\cdot\text{ft}$，$M_{23} = -113.8\text{kip}\cdot\text{ft}$

第 10 章

10.1 1. $\delta_{max} = 0.252\text{in}$，$\tau = 0.0511\text{sec}$

2. $\sigma_{max} = 29300\text{psi}$

3. $\tau = 0.583\text{sec}$

10.2 1. $13wl/35$

2. $\alpha = \dfrac{2}{105}$

3. $\tau = 0.27\text{sec}$

4. $\tau = 0.248\text{sec}$

10.3　1. $x_{max}=0.0036\text{in}$

2. $a=0.078\text{in}$

3. $x_{max}=0.131\text{in}$

4. $x_{max}=0.00457\text{in}$

10.4　1. $x=bt/p^2-(b/p^3)\sin pt$

2. $x=v_0t-\frac{1}{2}at^2+(a/p^2)(1-\cos pt)$，这里 $0<t<v_0/a$

3. $A=(\sqrt{2}a/p^2)\sqrt{1-\cos(pv_0/a)}$

4. $x_{max}\approx 2.54\text{in}$

5. $x=\frac{q_0}{p^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos pt)$

附录 C　人名对照表

Aitken，A. C.，艾特肯
Andrews，E. S.，安德鲁斯
Argyris，J. H.，阿杰瑞斯
Ayre，R. S.，艾雷

Barlow，P.，巴尔劳
Baticle，E.，巴蒂克尔
Beggs，G.，拜格斯
Bendixen，A.，本缔克森
Benscoter，S. U.，本斯库德
Betti，E.，比迪
Biot，M. A.，比奥
Bleich，Hans H.，布雷科
Blume，J. A.，布鲁梅
Bryan，C. W.，布尔焉

Calisev，K. A.，卡利斯夫
Castigliano，A.，卡斯迪格里安诺
Clebsch，A.，克里布斯
Corning，L.，克奥宁
Cross，Hardy，克劳斯-哈尔迪
Culmann，C.，库尔曼

Emperger F.，艾泼格尔
Euler，L.，欧拉

Foppl，A.，夫泊
Freyssient，E.，弗勒森特

Gere，J. M.，吉利
Godard，T.，高大德
Guldan，R.，古尔丹

Hardesty，S.，哈尔德斯蒂
Henneberg，L.，亨尼勃格
Housner，G. W.，休斯乃尔

Inglis，C. E.，尹格利斯

Jacobsen，L. S.，雅克布森
Jakkula，A. A.，珈库拉
Johnson，J. B.，约翰逊

Kazey，I. I.，卡兹

Lagrange，J.，拉格朗日
Lame，G.，拉梅
Lameon，J.，拉梅隆
Langer，B. F.，拉格尔

Marquard, E., 玛尔库尔德
Maxwell, J. C., 麦克斯韦
Melan, J., 麦兰
Mohr, O., 莫尔
Muller-Breslau, H., 穆勒-布鲁斯拉

Navier, M., 纳维
Newmark, N., 纽马克

Paris, A., 巴利斯
Pearson, M. A., 皮尔森

Rayleigh, Load, 瑞雷
Ritter, W., 勒特
Rosenblueth,, E., 罗森布鲁斯
Ruppel, W., 拉泊尔
Saint-Venant, Barre de, 圣维南
Southwell, H. V., 索斯维尔
Spath, W., 斯番斯
Steinman, D. B., 斯岱曼
Steuding, H., 斯特尤丁
Steuerman, E., 斯特尤尔曼
Stokes, G. G., 斯托克斯
Strassner, A., 斯特瑞斯纳
Stussi, F., 斯特尤西

Todhunter, I., 凸德亨特
Turneaure F. E., 凸乃奥尔

Von Sanden, H., 冯-桑登

Waddell, J. A. L., 瓦德尔
Way, S., 维艾
Williot, 维利奥
Willis, R., 维利斯

附录 D 关键词索引

Absolute maximum moment 绝对弯矩最大值
Acceleration spectrum 加速度谱
Accelogram 加速度图
Adjugate 伴随
Amplitude of vibration 振幅
Angular coefficients 角系数
Arches, analysis of 拱，分析
  hingeless 无铰拱
  influence lines for ... 的影响线
  matrix analysis of ... 矩阵分析
  numerical analysis of ... 数值分析
  symmetrical 对称的
  thermal stresses in 热应力
  three-hinged 三铰
  two-hinged 两铰
  unsymmetrical 非对称的
Assembly stresses 装配应力
Axial force 轴力

Beam constants 梁常数
Beams, conjugate 梁，共轭
  continuous 连续的
  deflection of ... 的挠度
  with fixed ends 带固定端的
  haunched 托臂，掖梁
  influence lines for ... 的影响线
  vibrations of ... 的振动
Bending-moment diagrams 弯矩图
Betti's law Betti 法则
Blast pulse 脉冲
Bow's notation Bow 符号
Building frames 建筑框架

Cables 悬索
Carry-over factor 传递系数

Castigliano's theorem　卡氏定理
Catenary　悬链线，悬垂线
Clapeyron's theorem　克雷佩隆定理
Complex trusses　复杂桁架
Compound trusses　复合桁架
Conjugate beam　共轭梁
Continuous beams　连续梁
　matrix analysis of　的矩阵分析
Continuous frames　连续框架
　matrix analysis of　的矩阵分析
Cooper's loading　(库玻)载荷
Criteria　准则
　for maximum moment　最大弯矩
　for maximum shear　最大剪力
　for truss rigidity　几何不变桁架
Critical form　临界形式

Deflection, of beams　挠度，梁的
　of trusses　桁架的
Deformation methods　位移法
Displacement, generalized　位移，广义
　virtual　虚位移
Distributed force　分布力
Distribution factor　分配系数

Earthquakes　地震
Elastic center　弹性中心
End moments　端弯矩
Equilibrium equations　平衡方程

Fictitious loads　虚载荷
Fixed-end moment　固端弯矩
Flexibility factor　柔度系数
Flexibility matrix　柔度矩阵
Force, axial　力，轴向力
　distributed　分布力
　generalized　广义力
　internal　内力
　resultant　合力
Force methods　力法
Force polygon　力多边形
Frames, building　建筑物框架
　continuous　连续的
　simple　简单的
　thermal stresses in　内的热应力
Funicular curve　索曲线

Generalized displacement　广义位移
Generalized force　广义力
Graphical integration　图形积分

Haunched beams　托臂梁
Henneberg's method　亨尼勃格方法
Hingeless arches　无铰拱
Hooke's law　胡克定律

Ideal system　理想系统
Influence coefficient　影响系数
Influence lines　影响线
　for arches　拱的
　for beams　梁的
　models for　的模型
　for suspension bridges　悬索桥的
　for trusses　桁架的
Influence number　影响数
Integration, graphical　积分，图形的
　numerical　数值的
Internal force　内力

Lateral sway　横向移动
Least work　最小功
　theorem of　原理
Live load　活载荷

Magnification factor　放大系数
Matrix algebra 矩阵代数
Matrix analysis, of arches　矩阵分析，拱的

of continuous beams 连续梁的
of continuous frames 连续框架的
of trusses 桁架的
Matrix inversion 逆矩阵
Matrix methods 矩阵法
Maxwell diagrams 麦克斯韦图
Maxwell-Mohr method 麦克斯韦-莫尔法
Method, of deformations 方法，位移法
of forces 力法
of joints 结点法
of least work 最小功
of sections 截面法
Models of influence lines 影响线模型
Moment distribution 弯矩分配
Moment table 弯矩表

Navier's problem 纳维叶问题
Numerical integration 数值积分

Parallelogram law 平行四边形法则
Phase angle 相位角
Phase plane 相平面
Plane trusses 平面应力

Rails, stresses in 铁轨，应力
Reyleigh's method 瑞雷法
Reactions 反力
Reciprocal figures 可易图形
Reciprocal theorem 互等定理
Resonance 共振
Resultant force 合力
Rings, analysis of 环的分析

Secondary stresses 次应力
Settlement of supports 支座的放置
Shear force diagrams 剪力图
Simple frames 简单框架
Simple truss 简单桁架
Simpson's rule 辛普生准则
Slope—deflection equations 斜率—挠度方程
Space structures 空间结构
Space truss 空间桁架
Spring constant 弹簧常数
Standard train 标准列车
Statically determinate truss 静定桁架
Statically indeterminate truss 超静定桁架
Stiffening truss 加筋桁架
Stiffness factor 刚度系数
Stiffness matrix 刚度矩阵
Strain energy 应变能
String polygon 索多边形
Structural dynamics 结构动力学
Superposition 叠加
Suspension bridges 悬索桥
influence lines for 的影响线
Symmetrical arches 对称拱

Theorem, Castigliano's 定理，卡氏
Clapeyron's 克雷佩隆
of least work 最小功的
reciprocal 互等的
of three moments 三弯矩的
Thermal stresses 热应力
in arches 拱的
in frames 框架的
in trusses 桁架的
Three-angle equation 三转角方程
Three-hinged arches 三铰拱
Three-moment equation 三弯矩方程
Truss rigidity, criteria for 桁架几何不变，准则
Trusses, compound 复合桁架
complex 复杂的
deflection of 的挠度
general theory of 的一般理论

influence lines for　的影响线
matrix analysis of　的矩阵分析
plane　平面的
Trusses, simple　桁架，简单的
space　空间的
statically determinate　静定的
statically indeterminate　超静定的
stiffening　加筋，加强
thermal stresses in　热应力
Two-hinged arches　两铰拱

Unbalanced moment　不平衡力矩
Unsymmetrical arches　不对称拱

Vibrations amplitude of　振幅
of beams　梁的
of bridges　桥的
of buildings　建筑物的
forced　强迫振动的
free　自由振动的
Virtual displacements　虚位移

Williot diagrams　维利奥图
Work, definition of　功，定义的

Zero-load test　零载荷测试