序

本书为第一作者黄克智在清华大学自1987年为研究生（以博士生为主）开设“固体本构关系与强度”（以后改为“固体本构关系”）课程，并逐年更新补充积累的基础上编写而成，其中也包括1986年11月在浙江大学力学系与1987年8月国家教委工程力学教材委员会在江西庐山举办的“固体本构理论”讲座的内容。第二作者黄永刚于1995年参加本书的编写，对全书的内容与结构作了许多修改，尤其以包括其本人成果在内的较多的科研成果充实了第2章细观力学基础与第6章应变梯度塑性理论的内容。

本书第1章小变形弹塑性本构关系，系统地阐述了这一问题现有的几个主要理论。这是一个力学工作者必须具备的最起码的基础知识。但是就作者多年在清华大学对研究生（尤其是博士生）入学考试的经验证明，能掌握这些基本内容（例如J_2流动理论与J_2形变理论及其对比）的为数不多。因此第1章的部分目的是为了给在力学专业本科和硕士生阶段没有学好这些基础知识者提供一个补救的机会。第1章的节1.5：Tresca流动理论（混合硬化）是本书首次发表的内容。这是因为在工程上为了简单起见常常采用Tresca屈服准则（即最大剪应力塑性准则），但是往往有人同时采用与之不关联的、基于Mises屈服准则的流动法则。本书作者认为有必要建立一个与Tresca屈服准则相关联的塑性理论（混合硬化），其重要性是与J_2流动理论（混合硬化）对等的。但为了简单起见，该节中假设了材料的主应力（或主应变）方向是不变的。

本书第2章细观力学基础，系统介绍了Eshelby，Hill，Mura等人发展的夹杂理论。实际材料就其细观说来都不是均匀连续，而是具有其内部结构的。例如，多晶体是由许多单晶颗粒组成；材料内部含有许多夹杂；复合材料包含许多相。由材料的细观组成与结构推算总体的力学行为，是近年来固体力学界许多学者关注的课题。本书第一作者及其研究组在研究相变材料（例如形状记忆合金、铁电材料）与第二作者及其研究组在研究复合材料的力学行为时，均充分利用了这种细观力学的研究方法。

大变形固体本构理论是目前固体力学的前沿领域。目前系统阐述这一领域的书很少，无论是专著，还是研究生或本科生教材。研究大变形塑性本构理论需要以下两方面的基础：

(1) 张量分析：目前多数教材中的张量分析还仅限于将张量当作带指标的符号。实际上，张量分析的理论与用途远比指标符号深刻得多。它不仅可以使推导变得异常简洁，而且还可以清楚地显示问题本身的物理意义，有时会得到一些意想不到的结果。我们可以毫不夸张地说，不懂得张量分析，要阅读和消化现代力学文献是不可能的。在清华大学工程

力学系每年都为硕士生开设“张量分析”学位课[1]。但为了还未系统掌握张量分析读者的方便，本书最后附有一个附录：张量分析（介绍），当然只能包含一些最少量的必要知识。

(2) 连续介质力学：这里指的是现代连续介质力学，包括应力理论、应变理论和本构理论。它已远远超出某些已有教科书的范围。

塑性本构理论课程若不与张量分析和连续介质力学相结合就只能是入门性质的，而不可能是比较深入的。为此，本书第3章连续介质力学概述，也提供了为研究本构理论所必需的连续介质理论基础知识。

第4章大变形弹性本构关系，是必要的基础内容。第5章大变形弹塑性本构关系，系统地介绍了许多基本概念和几种主要的理论。对于大变形问题，本构关系可以在物体变形前的构形（参考构形）中写出，也可以在物体变形后的构形（即时构形）中写出，甚至还可以在卸载后的构形（中间构形）中写出。这几种写法涉及到不同的坐标，不同的应力（率）与应变（率）。骤然看来，它们之间的关系非常复杂。考虑到这一难点，本书着重说明这几种写法之间的相互“转移”关系，希望读者做到举一就能反三。

近年来的一些试验表明，当非均匀塑性变形特征长度在微米量级时，材料具有很强的尺度效应。其原因在于，一点的应力不仅与该点的应变有关，而且也与该点的应变梯度有关。由于传统的塑性理论中本构模型不包含任何尺度，所以它不能预测尺度效应。然而，在工程实际中迫切需要处理微米量级的设计和制造问题，例如，微电力系统（MEMS）、微电子封装、先进复合材料及微加工。因此这一领域成为近五年来固体力学的热点。本书第6章应变梯度塑性理论，其目的在于扩大读者的眼界，为进一步的研究准备基础。

本书受到国家自然科学基金委员会长期支持，同时也是本书两作者参加国家自然科学基金重大项目“材料的宏微观力学与强韧化设计”（项目批准号19891180）的研究成果，作者对国家自然科学基金委员会的支持表示感谢。此外，作者对为本书出版过程提供过帮助（包括建议、题解、打字、校对等）的许多同事与学生（张晓堤、江冰、姜汉卿、邱信明等），尤其是对清华大学出版社长期的出版支持表示感谢。

第一作者　黄克智

1999年3月

1) 教材为黄克智，薛明德，陆明万编著，张量分析，北京：清华大学出版社，1986

目　录

第 1 章　小变形弹塑性本构关系 1
1.1　经典弹塑性本构关系 1
1.2　J_2 流动理论 14
1.2.1　各向同性硬化 14
1.2.2　混合硬化 17
1.3　J_2 形变理论及其与 J_2 流动理论（各向同性硬化）的比较 27
1.3.1　J_2 形变理论 27
1.3.2　J_2 形变理论与 J_2 流动理论的比较 34
1.4　奇异屈服面塑性理论 36
1.4.1　Sanders 理论 36
1.4.2　Koiter 理论 41
1.5　Tresca 流动理论（混合硬化） 49
1.6　塑性基本假设 65
1.6.1　Drucker 假设 65
1.6.2　Ilyushin 假设 69
1.6.3　对 J_2 形变理论的重新评价 72
1.7　J_2 角点理论 75
1.7.1　塑性应变率势 75
1.7.2　$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为凸函数的条件 82
1.7.3　逆塑性本构关系 90
1.7.4　J_2 角点理论 95
1.7.5　应变率势理论 101
1.8　压力敏感及塑性膨胀模型 105
习题 1 110

第 2 章　细观力学基础 120
2.1　Eshelby 相变应变问题 120
2.1.1　对称张量的矩阵表示 122
2.1.2　弹性约束张量 128
2.1.3　与 Eshelby 张量 $\boldsymbol{S}$ 相对偶的张量 $\boldsymbol{T}$ 131
2.2　夹杂问题 132
2.3　复合体的平均弹性模量 135

2.3.1 Voigt 近似 135
2.3.2 Reuss 近似 139
2.3.3 Hill 理论 140
2.3.4 自洽方法 143
2.4 能量方法 156
2.4.1 稀疏解法（不考虑夹杂相互作用） 161
2.4.2 自洽方法 163
2.4.3 广义自洽方法 165
2.4.4 Mori-Tanaka 方法 166
2.4.5 各种方法的比较 170
2.4.6 注记 171
习题 2 172

第 3 章 连续介质力学概述 174
3.1 变形几何 174
3.1.1 $\boldsymbol{F}$ 的极分解 177
3.1.2 线元、面元与体元的变换 182
3.1.3 Hill 应变度量与 Seth 应变度量 183
3.2 变形运动学 185
3.2.1 速度梯度、变形率、旋率 185
3.2.2 各种旋率 189
3.2.3 Hill 应变度量、Seth 应变度量的率 190
3.3 应力理论 194
3.3.1 Cauchy 应力、第一类与第二类 P-K 应力 194
3.3.2 动量方程 198
3.3.3 变形功率 199
3.3.4 与 $\mathscr{E}, \boldsymbol{E}^{(m)}$ 功共轭的应力度量 201
3.4 质量与能量的守恒或平衡律 202
3.4.1 质量守恒律 202
3.4.2 机械能平衡律 204
3.4.3 能量平衡律 205
3.4.4 熵不等式、熵平衡律 206
3.5 本构理论的客观性原理 208
3.5.1 客观量 208
3.5.2 张量的客观率（或客观导数） 216
3.5.3 本构理论的客观性原理 219

3.6 Lagrange 嵌入（或随体）曲线坐标，张量的转移 223
3.6.1 Lagrange 嵌入曲线坐标系 223
3.6.2 张量的转移 226
3.6.3 张量的四个客观导数 229
3.7 小变形弹塑性本构关系形式上的推广 231
3.7.1 弹性本构关系（率形式） 232
3.7.2 各向同性硬化 Prandtl-Reuss 弹塑性本构方程 233
3.7.3 混合硬化 235
3.7.4 J_2形变理论 236
3.8 局限性 237
习题 3 242

第 4 章 大变形弹性本构关系 243
4.1 弹性本构关系与热传导 243
4.1.1 弹性本构关系 243
4.1.2 一个特例 246
4.1.3 热传导 251
4.1.4 率形式弹性本构关系 253
4.2 弹性张量必须满足的条件 256
4.3 各向同性材料大变形弹性本构关系 260
习题 4 266

第 5 章 大变形弹塑性本构关系 268
5.1 弹性变形与塑性变形 268
5.2 弹性变形率 $\boldsymbol{d}^{e}$ 与塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{p}$ 273
5.2.1 Moran-Ortiz-Shih 定义 274
5.2.2 Green-Naghdi 与 Simo-Ortiz 的定义 280
5.2.3 Rice 与 Hill 的定义 281
5.2.4 三种定义的比较及卸载构形刚性转动$\boldsymbol{\beta}$的影响 286
5.3 Rice-Hill 大变形弹塑性理论 288
5.3.1 率形式本构关系 290
5.3.2 内变量的演化，正交法则 294
5.3.2.1 弹性增量与塑性增量 297
5.3.2.2 在参考构形 $\mathscr{R}$ 中提屈服条件 299
5.3.2.3 在即时构形 $\mathscr{r}$ 中提屈服条件 308
5.4 度量相关性 316

5.4.1 应变度量 $\mathscr{E}$ 及率 $\dot{\mathscr{E}}$，应力度量 $\mathscr{T}$ 及率 $\dot{\mathscr{T}}$ ……317
5.4.2 度量不变量 ……320
5.4.3 对应于不同度量函数的本构关系 ……321
5.4.4 应变率与应力率的弹塑性分解 ……322
5.4.5 正交法则的对偶性与度量不变性 ……324
5.5 Simo-Ortiz 大变形弹塑性本构理论 ……325
5.5.1 一般关系 ……325
5.5.2 各向同性硬化（等向硬化）情况 ……327
5.6 中间构形弹塑性本构理论之一——Moran-Ortiz-Shih
大变形弹塑性本构理论 ……336
5.6.1 弹性响应 ……338
5.6.2 塑性响应，率形式本构关系 ……340
5.6.2.1 在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中提屈服条件 ……341
5.6.2.2 在即时构形 τ 中提屈服条件 ……344
5.6.3 虚位移原理 ……350
5.7 中间构形弹塑性本构理论之二——Van der Giessen
大变形弹塑性本构理论 ……352
5.7.1 热力学讨论 ……355
5.7.2 热传导 ……358
5.7.3 塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 与塑性旋率 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$ ……360
5.7.4 内变量理论 ……363
5.7.5 持续各向同性介质 ……367
5.7.6 机动与混合硬化 ……371
5.7.7 各向异性硬化 ……376
习题 5 ……378

第 6 章 应变梯度塑性理论 ……383
6.1 引言 ……383
6.2 CS 应变梯度塑性理论——偶应力理论 ……385
6.2.1 偶应力与转角梯度 ……385
6.2.2 虚功原理 ……388
6.2.3 CS 应变梯度塑性理论本构关系 ……389
6.2.4 最小位能原理与最小余能原理 ……390
6.2.5 等效应力与等效应变 ……391
6.3 应变梯度塑性 SG 理论——伸长和旋转梯度理论 ……394
6.3.1 应变梯度张量 $\boldsymbol{\eta}$ ……394

6.3.2 应变梯度偏量η'的分解与总等效应变$\bar{\varepsilon}_{SG}$ 395
6.3.3 SG 应变梯度塑性理论的本构关系 400
6.4 基于细观机制的应变梯度塑性理论(MSG) 402
6.4.1 应变梯度塑性的试验规律 402
6.4.2 提出基于细观机制的应变梯度塑性理论的动机 403
6.4.3 基本假设 404
6.4.4 位错模型 406
6.4.5 MSG 应变梯度塑性理论本构方程 406
6.4.6 在 MSG 塑性理论中不存在应变能密度函数 408
6.4.7 微尺度胞元尺寸 408
习题 6 409

附录 张量分析（介绍） 414
I. 矢量与张量的概念 414
1. 矢量 414
2. 张量 416
II. 张量代数 418
1. 数乘 418
2. 加法 418
3. 点积 418
4. 并乘 419
5. 叉乘 420
6. 转置 420
7. 几种常用的二阶张量 421
8. 加法分解 422
9. 乘法分解（极分解） 422
10. 商法则 423
III. 张量的微积分 423
1. 梯度 423
2. 散度和旋度 424
3. Green 公式和 Stokes 公式 425

参考文献 427

第 1 章　小变形弹塑性本构关系

本章研究率无关材料小变形情况。

1.1　经典弹塑性本构关系

小变形情况下，变形（或应变）张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可分解为弹性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 之和：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{1.1}$$

1.　预备知识

以 $\boldsymbol{I}$ 表示四阶“等同张量”(identity tensor)，它的分量为

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \tag{1.2}$$

式中 δ_{ik} 等为 Kronecker delta，它是二阶单位张量 $\boldsymbol{\delta}$（或记作 $\mathbf{1}$）的分量。易证 I_{ijkl} 具有下列三重对称性，又称 Voigt 对称性：

$$I_{ijkl} = I_{jikl},\quad I_{ijkl} = I_{ijlk},\quad I_{ijkl} = I_{klij}$$

可证 $\boldsymbol{I}$ 具有以下性质

性质 1　设 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶张量，则

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{a} = \mathrm{sym}\,\boldsymbol{a} \tag{1.3}$$

即

$$I_{ijkl}a_{kl} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

因此，如 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶对称张量，则

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

$$I_{ijkl}\,a_{kl} = a_{ij} \tag{1.3$'$}$$

性质 2

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$$

$$I_{ijrs}I_{rskl} = I_{ijkl}$$

以 $\bar{\boldsymbol{I}}$ 表示“特殊等同张量”（special identity tensor），其定义为

$$\bar{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta}$$

$$\bar{I}_{ijkl} = I_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{1.4}$$

它具有以下性质。

性质 1 设 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶对称张量，则

$$\bar{\boldsymbol{I}}:\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$

$$\bar{I}_{ijkl}a_{kl} = a'_{ij} \tag{1.5}$$

式中 $\boldsymbol{a}'$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的偏斜张量[1)]：

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \frac{1}{3}J_1(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\delta}$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{3}a_{kk}\delta_{ij} \tag{1.6}$$

性质 2

$$\bar{\boldsymbol{I}}:\bar{\boldsymbol{I}} = \bar{\boldsymbol{I}}$$

$$\bar{I}_{ijrs}\bar{I}_{rskl} = \bar{I}_{ijkl}$$

2. 弹性变形

弹性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$ 与应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 之间满足弹性关系：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e} = \mathscr{M}:\boldsymbol{\sigma}$$

$$\varepsilon^{e}_{ij} = \mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.7}$$

式中 $\mathscr{M}$ 为弹性柔度张量。如果弹性与塑性之间不存在耦合，则 $\mathscr{M}$ 为常张量。

下面来推导各向同性材料的弹性柔度张量 $\mathscr{M}$。各向同性材料的弹性常数 G，K，E，ν 之间满足以下关系：

---

1) 二阶张量加撇表示该二阶张量的偏斜张量（简称偏量）。以后仍沿用此记号。

$$\frac{1}{2G}=\frac{1+\nu}{E},\qquad \frac{1}{9K}=\frac{1-2\nu}{3E}$$

其中 E 为杨氏模量，ν为泊松比，G 为剪切模量，K 为体积模量。

在弹性变形与应力之间，它们的偏斜张量的比例常数为 $2G$，球形张量之间的比例常数为 $3K$。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e}=\frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma}'+\frac{1}{3K}\frac{1}{3}J_1(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\delta}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^{e}&=\frac{1}{2G}\sigma'_{ij}+\frac{1}{9K}\sigma_{kk}\delta_{ij}\\&=\left(\frac{1}{2G}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\sigma_{kl}\end{aligned}$$

式中 $J_1(\boldsymbol{\sigma})$表示应力张量$\boldsymbol{\sigma}$的第一不变量。因此，与(1.7)对比可看出

$$\mathscr{M}=\frac{1}{2G}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{9K}\boldsymbol{\delta\delta}$$

$$\mathscr{M}_{ijkl}=\frac{1}{2G}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl}\tag{1.8}$$

将(1.4)的$\bar{\boldsymbol{I}}$ 代入(1.8),可得

$$\mathscr{M}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\boldsymbol{I}-\nu\boldsymbol{\delta\delta}\right]$$

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{ijkl}&=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)I_{ijkl}-\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\\&=\frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})-\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\end{aligned}\tag{1.8$'$}$$

若用 Lamé 参数λ与μ表示，则(1.8)可写作

$$\mathscr{M}=\frac{1}{2\mu}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{3(2\mu+3\lambda)}\boldsymbol{\delta\delta}=\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{I}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\boldsymbol{\delta\delta}$$

$$\mathscr{M}_{ijkl}=\frac{1}{2\mu}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{3(2\mu+3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl}=\frac{1}{2\mu}I_{ijkl}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl}\tag{1.8$''$}$$

式中

$$\mu=G=\frac{E}{2(1+\nu)},\qquad \lambda=\frac{2\nu G}{1-2\nu}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

3. 塑性变形

屈服条件

$$f(\boldsymbol{\sigma},Y_1,\cdots,Y_n)=0 \tag{1.9}$$

式中 $Y_1,\cdots,Y_n$ 为硬化参量，它们依赖于材料的当前状态，可以是标量，也可以是张量。作为硬化参量的例子，有累积塑性变形、累积塑性功、背应力等。

屈服条件(1.9)决定应力空间中的一曲面，称为后继屈服面（或当前屈服面）。在材料初始状态，$Y_1=\cdots=Y_n=0$，(1.9) 相当于应力空间中的初始屈服面，见图 1-1。屈服面之内为弹性区。当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 指向屈服面外时，属于加载情况，伴随有塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$。当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 指向屈服面之内，属于卸载情况，塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 为零。

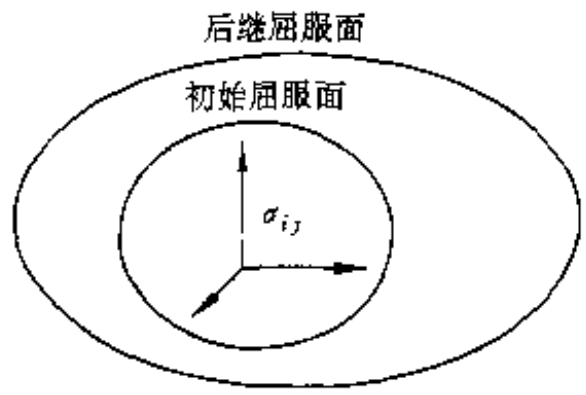


图 1-1　初始与后继屈服面

在经典塑性理论中，假定为“正交法则”，即塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 沿着屈服面的外向法线方向。由 Drucker 假设，或 Ilyushin 假设、或最大塑性功率原理（见 1.6）均可论证这一正交法则。按正交法则 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\,//\,\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$。不失广泛性，可设 $\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 沿屈服面的外向法线[1]，故可记[2]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad 即\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\qquad \lambda\geqslant 0 \tag{1.10}$$

式中 λ 称为塑性流动因子。由于塑性变形保持体积不变，

$$\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{ii}^{\mathrm{p}}=0 \tag{1.11}$$

---

1) 在 1.1 至 1.3 节中假设 $\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 存在，即在应力空间中屈服面为光滑曲面。

2) 有的文献中把此处的 λ 记为 $\dot{\lambda}$，因此（1.10）乘以 $\mathrm{d}t$ 后，可以写成 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$，　$\mathrm{d}\lambda\geqslant 0$

因此 $\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 为一偏斜张量。定义沿屈服面外法线的单位张量

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\bigg/\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right| \tag{1.12}$$

式中

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|=\sqrt{\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}}=\sqrt{\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}} \tag{1.13}$$

故 $\boldsymbol{n}$ 为一单位偏斜张量

$$\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}=1 \tag{1.14}$$

而(1.10)可写作

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\lambda\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|\boldsymbol{n} \tag{1.10$'$}$$

因为塑性变形保持体积不变，故 $\boldsymbol{n}$ 为偏量。

作为塑性变形的度量，引进“累积塑性变形” $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，首先定义等效塑性变形率。设材料为各向同性,定义等效塑性变形率为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}\text{，即 }\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{1.15}$$

$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 恒为正。在沿 x_1 方向的单向拉伸或单向压缩情况下，$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{22}=\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{33}=-\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{11}$，

$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{12}=\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{23}=\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{31}=0$，由(1.15)

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\left|\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{11}\right|$$

利用(1.15)，可将 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 写为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{n} \tag{1.16}$$

比较 (1.10)′ 与(1.16)，可知

$$\lambda=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\left|\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right|} \tag{1.17}$$

(1.17)表示塑性流动因子λ与等效塑性变形率$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的关系。(1.15) 对时间$t$积分定义为累积塑性变形，

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int_{t_0}^{t}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}\,\mathrm{d}t=\int_{\text{history}}\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{1.18}$$

式中 t_0 表示开始出现塑性变形的时刻。在单向拉伸或压缩时

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int_{t_0}^{t}\left|\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}\right|\mathrm{d}t$$

附带指出，在率无关的塑性本构关系中，t 不一定取牛顿时间，它可以是任意的随时间递增的函数(有时称为“类时间参数”，time-like parameter)，例如也可以取$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$为“时间”。率无关材料的塑性变形过程就好像一部电影胶片，无论快速或慢速放映，这个过程是不变的。

设给定应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$（或应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}t$），需求塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$。为此必须确定(1.10)或(1.10)′式中的$\lambda$，或者(1.16)中的$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$（$\lambda$与$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$之间存在关系(1.17)）。可以区分两种情形：

(1) 理想弹塑性材料。屈服面在应力空间中为固定不变曲面，此时屈服条件(1.9)成为

$$f(\boldsymbol{\sigma})=0 \tag{1.9$'$}$$

设$\boldsymbol{\sigma}$在屈服面上，应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$必须服从条件

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\leqslant 0$$

当给定的$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$使上式的$\mathrm{d}f<0$时，属于弹性卸载，$\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=0$，因此$\lambda=0$。但当给定的$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$使 $\mathrm{d}f=0$ 时，应力$\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$仍保持在屈服面上，有塑性变形增量$\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$产生。但当给定应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$（或应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t$）时，由(1.10)式决定$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$所需要的塑性流动因子$\lambda$不可能由塑性本构关系确定[1]。但是在具体的物理问题（例如在内压作用下的厚壁筒）中，将本构关系与平衡方程及几何方程联立在一起，可以确定应力与应变场。这时除平衡方程之外，对应力增加了一个约束方程(1.9)′，但同时也增加了一个未知场函数λ。

(2) 硬化材料。λ可由“一致性条件”(consistency condition)定出。

4. 一致性条件

为了确定塑性流动因子λ，必须利用“一致性条件”。设在时刻t应力空间中表示材料应

1) 理想弹塑性材料，当给定变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$（或变形增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t$）时，可以由逆本构关系(见本节(1.31)式)求应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$（或应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}t$）。

力$\boldsymbol{\sigma}$的点 P 处于后继屈服面(1.9)上(图 1-2)。在时刻 $t+\mathrm{d}t$，应力为$\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，在应力空间中的应力点为 P'，后继屈服面成为

$$f(\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},Y_1+\mathrm{d}Y_1,\cdots,Y_n+\mathrm{d}Y_n)=0 \tag{1.19}$$

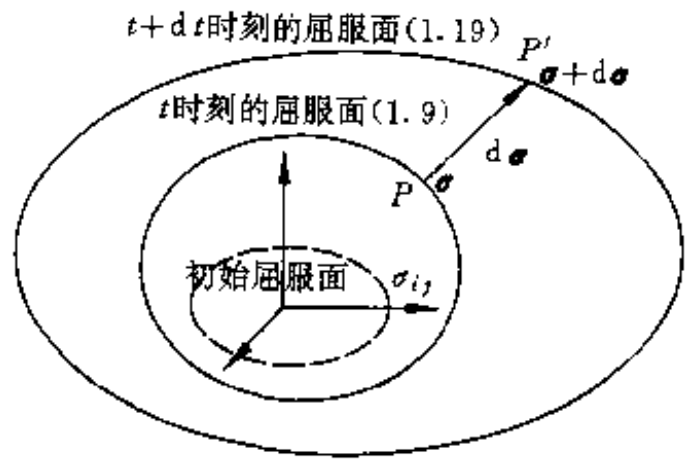


图 1-2　后继屈服面的变化

式中 $\mathrm{d}Y_1,\cdots,\mathrm{d}Y_n$ 为硬化参量 $Y_1,\cdots,Y_n$ 在时间 $\mathrm{d}t$ 内的增量。取(1.19)与(1.9)式之差，得

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+\sum_i\frac{\partial f}{\partial Y_i}\mathrm{d}Y_i=0 \tag{1.20}$$

如 Y_i 为张量，则 $\partial f/\partial Y_i$ 与 $\mathrm{d}Y_i$ 应为张量的缩并乘。(1.20)式称为“一致性条件”。它的物理意义表示：在加载（非卸载）过程中，材料的应力点始终处于屈服面上。(1.20)中第一项 $(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 表示 f 由于$\boldsymbol{\sigma}$的变化 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 所引起的增量，可记为

$$\mathrm{d}f\big|_Y=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\text{，即}\quad\frac{\mathrm{d}f\big|_Y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

以区别于(1.20)的 $\mathrm{d}f$，下标 Y 表示假设保持 $Y_1,\cdots,Y_n$ 不变。

设 $Y_i\ (i=1,\cdots,n)$ 以下列微分方程（称为演化方程）的形式依赖于累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$：

$$\mathrm{d}Y_i=Z_i(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\cdots)\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.21}$$

式中 Z_i 除了依赖于 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 之外，还可能依赖于其他状态变量，如应力张量（或变形张量）、硬化参量 $Y_1,\cdots,Y_n$ 等。(1.21)式规定屈服曲面 $f(\boldsymbol{\sigma},Y_1,\cdots,Y_n)$ 如何随着塑性变形过程而变化。将(1.21)代入(1.20)后，除以 $\mathrm{d}t$，可得

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=-\frac{1}{\sum_i\frac{\partial f}{\partial Y_i}Z_i}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.20$'$}$$

将(1.20)′代入(1.17)，可得

$$\lambda = \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} \tag{1.22}$$

式中

$$\frac{1}{h} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|\sum_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} Z_i} \tag{1.23}$$

将(1.22)之 λ 代入(1.10)，或直接将(1.20)′的 $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 代入(1.16)，可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.24}$$

$h>0$ 的情况相当于硬化材料,因为由(1.24)当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 指向屈服面之外 $\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0\right)$ 时，塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 指向屈服面的外向法线（$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 与 $\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}$ 同向）。反之，对于软化材料 $h<0$，按(1.24)应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 则不可能指向屈服面之外，因为否则 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 指向屈服面的内向法线，违背正交法则（$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 恒指向屈服面的外向法线）。在 $h<0$ 的情况下，当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 指向屈服面之内时，按(1.24)可以算出 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 指向屈服面的外向法线。但是根据屈服面的定义，当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 指向屈服面之内时，属于卸载情况，应有 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = 0$。这一相互矛盾的结果说明采用应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 为自变量，变形 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变量，由给定的应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 来求解应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的提法（(1.24)式）不适用于软化材料。现以单向拉伸为例加以说明。图 1-3(a)、(b)各表示硬化材料与软化材料的单向拉伸曲线。A 点表示初始屈服。对于硬化材料（图 1-3(a)），在 P 点可根据 $\dot{\sigma}_{11}$ 的正或负来判断属于加载或卸载。但对于软化材料（图 1-3(b)），在 P 点应力只能减小而不能增大，$\dot{\sigma}_{11} < 0$。在应力空间中讨论问题，给定 $\dot{\sigma}_{11} < 0$，无法判定 $\dot{\varepsilon}_{11} > 0$（继续产生新的塑性变形，$\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}} > 0$,也称为加载）还是 $\dot{\varepsilon}_{11} < 0$（卸载，$\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}} = 0$）。因此对于软化材料，必须在应变空间中讨论问题，即给定 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，求解 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$。

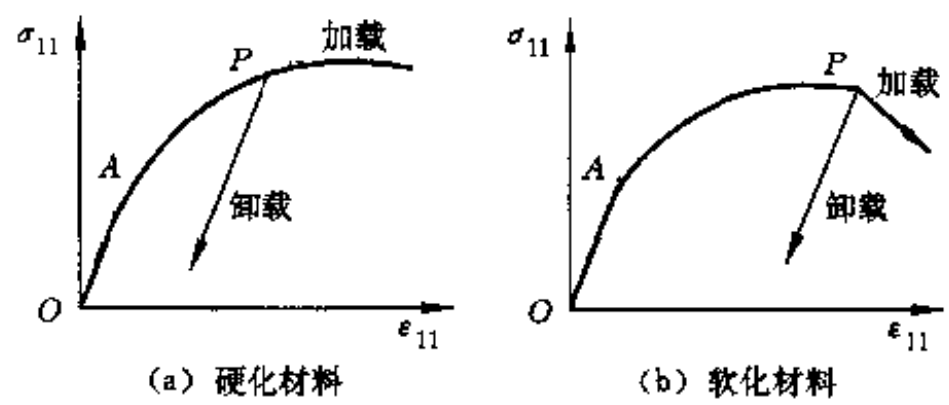


图 1-3 硬化与软化材料单向拉伸曲线

为书写简便，记

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mu_{ij}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{1.25}$$

则(1.22)成为

$$\lambda=\frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\geqslant 0 \tag{1.26}$$

(1.10)式(或(1.24)式)成为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad 当\ \boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\geqslant 0$$

引进一加载参数α，在加载情况下$\alpha=1$；而在卸载情况下$\alpha=0$，则可写出塑性应变率的统一表示：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.27}$$

式中

$$\alpha=\begin{cases}1 & 当在应力空间中\boldsymbol{\sigma}在屈服面上,且\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}>0\\ 0 & 当\boldsymbol{\sigma}在屈服面内或\boldsymbol{\sigma}在屈服面上,且\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\leqslant 0\end{cases} \tag{1.28}$$

把弹性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$与塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$叠加，得到变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$之间的关系，称为本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.29}$$

式中$\boldsymbol{M}$表示弹塑性柔度张量：

$$\boldsymbol{M}=\mathscr{M}+\frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu} \tag{1.30}$$

显然，$\boldsymbol{M}$具有 Voigt 对称性。

本构关系也可用 Heaviside 阶梯函数表示，其定义为

$$H(L)=\begin{cases}1 & 当L>0\\ 0 & 当L\leqslant 0\end{cases}$$

再引进记号〈 〉：

$$\langle L\rangle=LH(L)=\begin{cases}L & 当L>0\\ 0 & 当L\leqslant 0\end{cases}$$

则(1.27)塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}\langle\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle \tag{1.27)'}$$

而本构关系(1.29)则可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}\langle\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\rangle \tag{1.29)'}$$

以下还引进“塑性模量”E_{p}。利用(1.12)，(1.25)，$\boldsymbol{\mu}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\mu} = \left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|\boldsymbol{n}$$

因此(1.27)可写作

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \alpha\frac{3}{2E_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.27)''}$$

式中的 E_{p} 定义为

$$\frac{1}{E_{\mathrm{p}}} = \frac{2}{3}\frac{1}{h}\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|^2 \tag{1.23)'}$$

将(1.23)中 $1/h$ 代入，得

$$\frac{1}{E_{\mathrm{p}}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|}{\sum_i \frac{\partial f}{\partial Y_i}Z_i} \tag{1.23)''}$$

将(1.27)″代入(1.15)，可将累积塑性变形率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 表示为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \alpha\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{n}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.27)'''}$$

在单向拉伸情况下，设 x_1 为拉伸方向。设材料在初始状态为各向同性。经过沿 x_1 方向的单向拉伸以后具有对 x_1 轴的轴对称性。因此可以由(1.14)定出

$$n_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}},\quad n_{22} = n_{33} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}},\quad n_{ij} = 0,\ \text{当}\ i \neq j$$

(1.27)″给出

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}}n_{11}\dot{\sigma}_{11}=\frac{1}{E_{\mathrm{p}}}\dot{\sigma}_{11}$$

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}}$$

所以在单向拉伸情况下，E_{p} 为拉伸方向应力增量与塑性变形分量增量之比值，这正是 E_{p} 称为塑性模量的原因。

弹塑性本构关系(1.29)是变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 通过应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的表示式。也可以求它的逆，即应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 通过变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的表示式，称为逆本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{1.31}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为四阶张量，它是 $\boldsymbol{M}$ 之逆，即

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}^{-1}$$

$\boldsymbol{L}$ 称为弹塑性刚度张量。如果 $\boldsymbol{M}$ 具有 Voigt 对称性，则 $\boldsymbol{L}$ 也具有 Voigt 对称性。

首先来求弹性刚度张量 $\mathscr{L}$，它是弹性柔度张量 $\mathscr{M}$ 之逆；

$$\mathscr{L}=\mathscr{M}^{-1}$$

即

$$\mathscr{L}_{ijrs}\mathscr{M}_{rskl}=I_{ijkl}$$

由(1.8)$\mathscr{M}$式右端两项所表示的变形与应力之间偏斜张量与球形张量的比例关系，易知

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=2G\bar{\boldsymbol{I}}+3K\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}\\&=2G\bar{\boldsymbol{I}}+K\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\mathscr{L}_{ijkl}=2G\bar{I}_{ijkl}+K\delta_{ij}\delta_{kl}$$

利用(1.4)及弹性常数之间的关系，$\mathscr{L}$又可通过 E，ν 或 LamIé 参数 λ，$\mu=G$ 表示

$$\mathscr{L}=2G\boldsymbol{I}+\left(K-\frac{2}{3}G\right)\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}=\frac{E}{1+\nu}\left[\boldsymbol{I}+\frac{\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}\right]=2\mu\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta} \tag{1.32$'$}$$

$$\mathscr{L}_{ijkl}=\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right]$$

显然 $\mathscr{L}$ 具有 Voigt 对称性。

下文将证明弹塑性刚度张量 $\boldsymbol{L}$ 的表示式[1]：

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}^{-1}=\mathscr{L}-\frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda} \tag{1.33}$$

式中

$$\boldsymbol{\lambda}=\mathscr{L}:\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}:\mathscr{L} \tag{1.34}$$

$$g=h+\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{\lambda}=h+\boldsymbol{\mu}:\mathscr{L}:\boldsymbol{\mu} \tag{1.35}$$

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当应力空间中}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面上(或应变空间中}\boldsymbol{\varepsilon}\text{在屈服面上),且}\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\sigma}\text{或}\boldsymbol{\varepsilon}\text{在各自屈服面内,或}\boldsymbol{\sigma}\text{或}\boldsymbol{\varepsilon}\text{在各自屈服面上且}\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\leqslant 0\end{cases} \tag{1.36}$$

利用(1.33)，可将逆本构关系(1.31)写作与(1.29)或(1.29)′对应的形式：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}}&=\mathscr{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\\&=\mathscr{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{1}{g}\boldsymbol{\lambda}\langle\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle\end{aligned}$$

上式右端两项可分别记作“弹性应力率” $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}}$ 与“塑性应力率” $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}$，对应的弹性应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}$ 与塑性应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}$ 为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}}=\mathscr{L}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}=-\frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=-\frac{1}{g}\boldsymbol{\lambda}\langle\boldsymbol{\lambda}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle$$

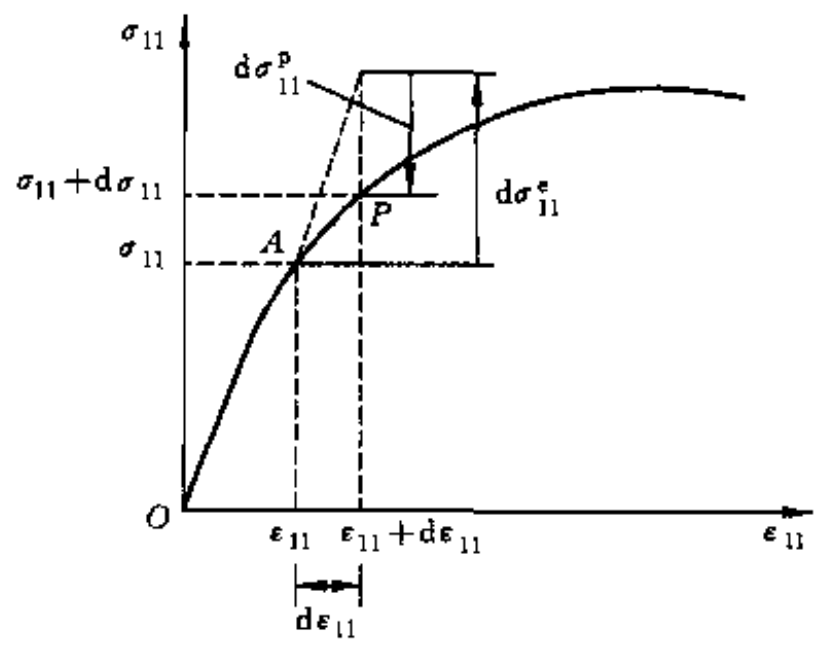


图 1-4　单向拉伸情况的弹性与塑性应力增量

1）这里的张量 $\boldsymbol{\lambda}$ 勿与前面(1.10)式的塑性流动因子 λ 或(1.32)′式中的 Lamé 参数 λ 相混淆。

图 1-4 示出单向拉伸（沿 x_1 方向）情况沿拉伸方向的弹性应力增量 $\mathrm{d}\sigma_{11}^{e}$ 与塑性应力增量 $\mathrm{d}\sigma_{11}^{p}$。

现在来证明(1.33)式。不失广泛性，可设加载情况 $\alpha=1$。由(1.29)迁项

$$\mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

求上式之逆，即 $\mathscr{L}$:上式，得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathscr{L}:\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{1.37}$$

为了要求出 $\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，可用 $\boldsymbol{\mu}:(1.37)$ 并利用(1.34)，得

$$\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\left(1+\frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{\lambda}\right)=\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

故，利用(1.35)

$$\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{h}{g}\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{1.38}$$

将(1.38)代入(1.37)，得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathscr{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{1}{g}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\left(\mathscr{L}-\frac{1}{g}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

因此(1.33)得证。

如前所述，本构关系(1.29)适用于 $h>0$（硬化材料）的情况。类似地，逆本构关系(1.31)，(1.33)适用于 $g=h+\boldsymbol{\mu}:\mathscr{L}:\boldsymbol{\mu}>0$ 的情况，其中也包含 h 为负的情况。所以，逆本构关系(1.31)，(1.33)用于由给定 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 求 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$。由于 $\boldsymbol{\mu}:\mathscr{L}:\boldsymbol{\mu}>0$ 为恒正，逆本构关系的适用范围比本构关系(1.29)更广，不但适用于理想弹塑性情况（$h=0$），而且也适用于图 1-3(b)所示的软化材料，由变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的方向来判断加载或卸载。

5. 塑性功率

应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 对于塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的功率称为塑性功率，记作 $\dot{W}^{\mathrm{p}}$：

$$\dot{W}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{1.39}$$

利用(1.16)式，可将塑性功率 $\dot{W}^{\mathrm{p}}$ 写作

$$\dot{W}^{\mathrm{p}}=\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{1.40}$$

式中 $\bar{\sigma}$ 称为“功等效应力”

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{n} \tag{1.41}$$

1.2 J_2流动理论

本节研究前节的几个特例。

1.2.1 各向同性硬化

设屈服条件(1.9)中只有一个硬化参数 Y（即 $n=1$），且屈服条件的形式为

$$f(\boldsymbol{\sigma},Y)=J_2(\boldsymbol{\sigma})-\frac{Y^2}{3}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'-\frac{Y^2}{3}=\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}-\frac{Y^2}{3}=0 \tag{2.1}$$

式中 $J_2(\boldsymbol{\sigma})=\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$ 为应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的第二不变量（仅差一个负号），J_2 流动理论之名由此而来。$[3J_2(\boldsymbol{\sigma})]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'\right)^{\frac{1}{2}}=\sigma_{\mathrm{eq}}$ 即为熟知的 Mises 等效应力。(2.1)表示 $\sigma_{\mathrm{eq}}=Y$。进一步设 Y 只依赖于 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，且 $Y=Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 为材料函数，因此其演化方程为 $\mathrm{d}Y=Z\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}},Z=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}$。这一材料函数 $Y=Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 可由简单的试验(例如单向拉伸或剪切试验)而得。例如，取单向拉伸试验，得到拉伸曲线如图 1-5(a)所示。以 σ_{11}，$\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}$ 为坐标，可重新得到图 1-5(b) 所示的曲线。在单向拉伸情况下，由(2.1) $Y=\sigma_{11}$，由(1.15)式 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\varepsilon^{\mathrm{p}}{}_{11}$。因为 $Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 是材料函数，所以把单向拉伸所得图 1-5(b)的坐标 σ_{11} 与 $\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}$ 各改为 Y 与 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，就立即得到表示材料函数 $Y=Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 的曲线。

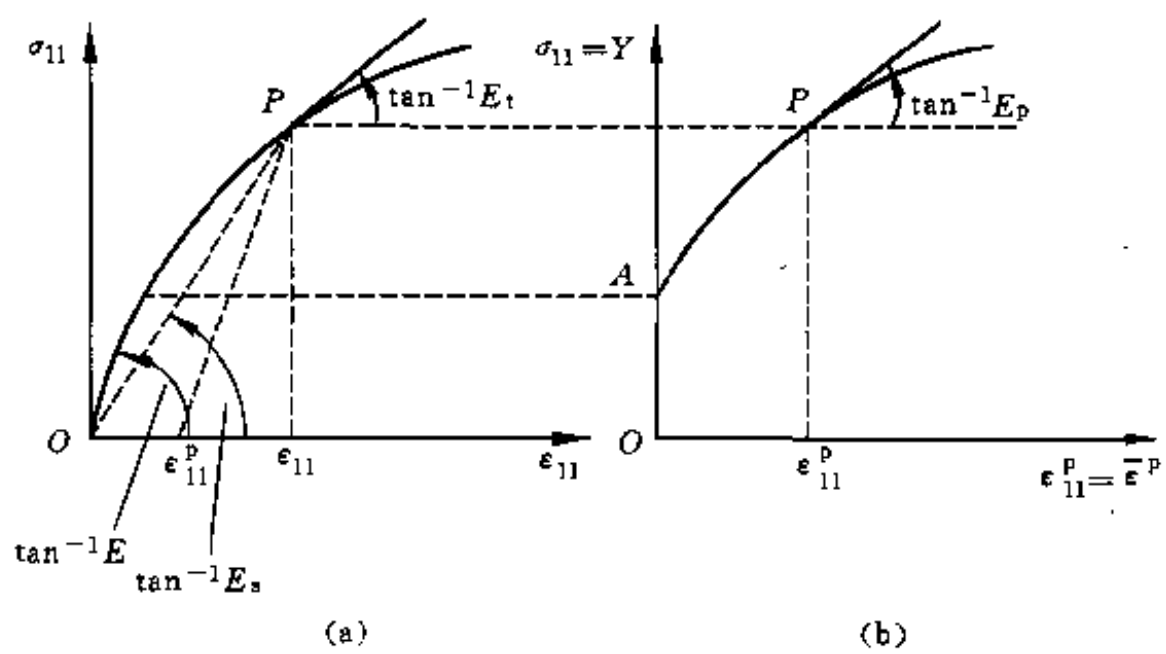


图 1-5 由单向拉伸曲线求得材料曲线 $Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$

1. 本构关系

将(2.1)的 $f(\boldsymbol{\sigma},Y)$ 依次代入节 1.1 中有关各式：(1.25)，(1.13)，(1.12)，(1.23)，(1.23)′ (1.34),可分别得到

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}J_2(\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{\sigma}'$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|=\sqrt{\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\mathrm{eq}}=\sqrt{\frac{2}{3}}Y$$

$$\boldsymbol{n}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sigma_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{\sigma}'=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{Y}\boldsymbol{\sigma}'$$

$$\frac{1}{h}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}}=\frac{9}{4}\frac{1}{Y^2\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}} \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{E_{\mathrm{p}}}=\frac{2}{3}\frac{1}{h}\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|^2=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}}=\frac{1}{E_{\mathrm{t}}}-\frac{1}{E},\qquad E_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\mathscr{L}:\boldsymbol{\mu}=\mathscr{L}:\boldsymbol{\sigma}'=2G\boldsymbol{\sigma}'=\frac{E}{1+\nu}\boldsymbol{\sigma}' \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{\lambda}=\frac{E}{1+\nu}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'=\frac{2}{3}\frac{E}{1+\nu}Y^2 \tag{2.5}$$

$E_{\mathrm{p}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 称为塑性模量，$E_{\mathrm{t}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})=E_{\mathrm{p}}E/(E_{\mathrm{p}}+E)$ 称为切线模量(见图 1-5)。

由(1.29)，(1.30)，(1.28)得到各向同性硬化时的 J_2 流动理论本构关系

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.6}$$

式中弹塑性柔度张量 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M}=\mathscr{M}+\frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}=\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}Y^2}\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}'=\mathscr{M}+\alpha\frac{3}{2E_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{n} \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{M}_{ijkl}=\mathscr{M}_{ijkl}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}Y^2}\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}$$

加载参数α为

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{\sigma}':\dot{\boldsymbol{\sigma}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面内,或}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{\sigma}':\dot{\boldsymbol{\sigma}}\leqslant 0\end{cases} \tag{2.8}$$

本构关系(2.6)、(2.7)适用于 $h>0$ 的情况。

2. 逆本构关系

由(1.31)，(1.33)，利用(2.4)，得到各向同性硬化时 J_2 流动理论的逆本构关系

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.9}$$

式中弹塑性刚度张量为

$$\boldsymbol{L} = \mathscr{L} - \frac{\alpha}{g}\frac{E^2}{(1+\nu)^2}\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}' \tag{2.10}$$

$$L_{ijkl} = \mathscr{L}_{ijkl} - \frac{\alpha}{g}\frac{E^2}{(1+\nu)^2}\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}$$

式中 g 可由(1.35)，利用(2.2)，(2.5)定出

$$g = \frac{4}{9}EY^2\left[\frac{E_p}{E} + \frac{3}{2(1+\nu)}\right] \tag{2.11}$$

加载参数α由(1.36)决定

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{当}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面内，或}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

逆本构关系(2.9)、(2.10)适用于 $g>0$ 的情况。

3. 塑性功率

由(1.40)，(1.41)，塑性功率 $\dot{W}^{\mathrm{p}}$ 为

$$\dot{W}^{\mathrm{p}} = \bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{1.40}$$

式中

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{n} = \left[3J_2(\boldsymbol{\sigma})\right]^{\frac{1}{2}} = \sigma_{\mathrm{eq}} = Y \tag{2.13}$$

因此在各向同性硬化情况，功等效应力 $\bar{\sigma}$ 与 Mises 等效应力 σ_{eq} 相同。塑性功为

$$W^{\mathrm{p}} = \int Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{2.14}$$

它表示图 1-5(b)曲线下的面积。利用(2.14)，也可以取塑性功 W^{p} 为硬化参数，那么累积塑

性变形 $\bar{\varepsilon}^{p}$ 与 Mises 等效应力 Y 都是塑性功 W^{p} 的“材料函数”：$\bar{\varepsilon}^{p}(W^{p})$ 与 $Y(W^{p})$。

1.2.2 混合硬化

在初始状态为各向同性的材料中，拉伸屈服限与压缩屈服限的数值是相同的，记作 σ_s，见图 1-6 所示的单向拉伸(压缩)曲线的 A 与 $\bar{A}$ 点。材料的拉伸曲线与压缩曲线形状相同。如果材料属于各向同性硬化，那么在拉伸到达屈服后的 B 点，应力为 σ_B 时开始卸载并反向加压应力,在图 1-6 中表示应力与应变的点从 B 沿一斜率为杨氏模量 E 的直线 BC 变化；当 $\sigma_C=-\sigma_B$ 时出现反向屈服，这时材料的屈服限由初始值 σ_s 增大至 σ_B，屈服面的大小由初始的 $2\sigma_s$ 增大为 $2\sigma_B$。若继续加压，压缩曲线 $C\bar{D}$ 段的形状与拉伸曲线 BD 段的形状相同。如果 $\overline{D'O'}=O'D'$，则 $\bar{D}$ 与 D 点具有相同的累积塑性变形值：

$$\bar{\varepsilon}_{\bar{D}}^{p}=\bar{\varepsilon}_{D}^{p}$$

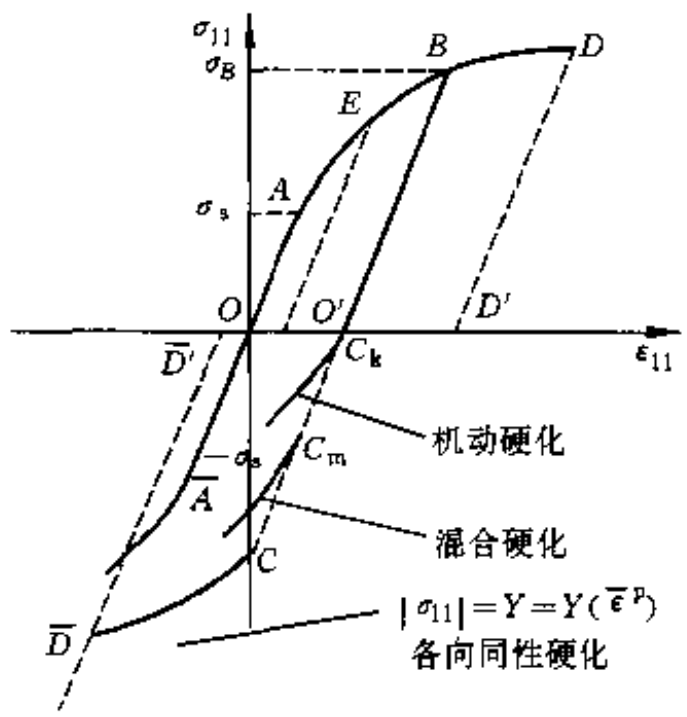


图 1-6 混合硬化

由节 1.2.1，$Y=|\sigma_{11}|=Y(\bar{\varepsilon}^{p})$，故 D 与 $\bar{D}$ 点应力绝对值相等

$$\sigma_{11,D}=\left|\sigma_{11,\bar{D}}\right|$$

即便在初始状态为各向同性的材料，如果材料的硬化不是节 1.2.1 所述的各向同性硬化，则从 B 点卸载后，还未到达 C 点之前，更早地就出现反向屈服。如果屈服面的大小不变，保持在初始值 $2\sigma_s$，则卸载至 C_k 点($\sigma_B-\sigma_{C_k}=2\sigma_s$)，材料开始反向屈服。这种情况称为“机动硬化”。介于各向同性硬化与机动硬化之间的情况，反向屈服出现在位于 C 与 C_k 之间的某 C_m 点，这一情况称为“混合硬化”，此时屈服面大小介于各向同性硬化的 $2\sigma_B$ 与机动硬化的 $2\sigma_s$ 之间：

$$2\sigma_B>\sigma_B-\sigma_{C_m}>2\sigma_s$$

通常把这种反向屈服应力（绝对值）小于正向屈服应力的现象称为鲍氏效应（Bauschinger effect）。这种现象的物理解释是由于微观残余应力所造成的。例如，当出现位错钉扎时，位错线向正向运动越来越困难，但反向运动却更为容易。

上述现象说明，后继屈服面是随着塑性变形的发展而不断变化的，包括大小、位置和形状的变化。下面只讨论一个理想的情况。假定后继屈服面的形状不变（即和初始屈服面的形状相同），只是大小与位置变化。各向同性硬化是一个极端情况，后继屈服面的形状与位置都不变（即屈服面的中心保持在应力空间的原点$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$处），只有大小不断变化。另一个极端情况是机动硬化，后继屈服面的形状与大小都不变，只有位置不断变化（“机动”之名由此而来）。后继屈服面的中心可以不在应力空间的原点$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$，而在$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{b}$处。$\boldsymbol{b}$称为“背应力”（back stress），它代表微观残余应力的效应。介于两个极端之间，即后继屈服面的大小与位置都变化的情况称为混合硬化。

1. 屈服条件

取硬化参量Y_1表示屈服面的大小σ_F，$Y_2=\boldsymbol{b}$表示屈服面的中心（故Y_2为二阶对称张量）。取屈服条件(1.9)为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma},\sigma_F,\boldsymbol{b}) &= J_2(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})-\frac{1}{3}\sigma_F^2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')-\frac{1}{3}\sigma_F^2 \\ &= \frac{1}{2}(\sigma'_{ij}-b'_{ij})(\sigma'_{ij}-b'_{ij})-\frac{1}{3}\sigma_F^2=0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

式中$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}$称为主动应力，$[3J_2(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})]^{1/2}$称为等效主动应力。仍采用累积塑性变形$\bar{\varepsilon}^p$的定义（1.18），并设等效主应力$\sigma_F$

$$\sigma_F=\sigma_F(\bar{\varepsilon}^p) \tag{2.16}$$

为$\bar{\varepsilon}^p$的材料函数。(2.15)相当于把节 1.2.1 各向同性硬化情况的屈服条件中应力$\boldsymbol{\sigma}$改为$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}$，$Y$改为$\sigma_F$。(2.15)中屈服函数$f$只取决于应力的偏量$\boldsymbol{\sigma}'$和背应力的偏量$\boldsymbol{b}'$，而与应力的第一不变量$J_1(\boldsymbol{\sigma})$及背应力的第一不变量$J_1(\boldsymbol{b})$无关。(2.15)相当于一般情况屈服条件(1.9)中取两个硬化参量

$$Y_1=\sigma_F(\bar{\varepsilon}^p) \quad Y_2=\boldsymbol{b} \tag{2.17}$$

Y_1的演化方程为

$$\mathrm{d}Y_1=Z_1\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p, \quad Z_1=\frac{\mathrm{d}\sigma_F(\bar{\varepsilon}^p)}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p}=E_F(\bar{\varepsilon}^p) \tag{2.17$'$}$$

$E_F(\bar{\varepsilon}^p)$称为各向同性硬化模量。(2.17)′第二式是E_F的定义式，它表示屈服面大小σ_F随累积塑性变形$\bar{\varepsilon}^p$变化的率。

2. 一致性条件

先计算屈服函数$f(\boldsymbol{\sigma},\sigma_F,\boldsymbol{b})$的偏导数。由(2.15)，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= (\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'-\mathrm{d}\boldsymbol{b}')-\frac{2}{3}\sigma_F\mathrm{d}\sigma_F \\ &= (\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}-(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\mathrm{d}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\sigma_F\mathrm{d}\sigma_F \end{aligned} \tag{2.18}$$

由全微分公式

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{b}}:\mathrm{d}\boldsymbol{b}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_F}:\mathrm{d}\sigma_F \tag{2.19}$$

对比以上两式，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}' \\ \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{b}} &= -(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}') \\ \frac{\partial f}{\partial\sigma_F} &= -\frac{2}{3}\sigma_F \end{aligned} \tag{2.20}$$

于是由(1.13)、(1.12)，并利用(2.15)，则

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|=[(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_F \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}}{\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sigma_F}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}') \tag{2.22}$$

将(2.22)代入(1.27)″，得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\alpha\frac{9}{4E_p\sigma_F^2}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.23}$$

式中，由(1.28)

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当在应力空间中}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面上,且}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\dot{\boldsymbol{\sigma}}>0 \\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面内或}\boldsymbol{\sigma}\text{在屈服面上, 且}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\dot{\boldsymbol{\sigma}}\leqslant 0\end{cases} \tag{2.24}$$

(2.17)'式已规定第一个硬化参量Y_1的演化方程。它确定屈服面的大小σ_F如何随着塑性变形过程而变化。现在讨论第二个硬化参量$Y_2=\boldsymbol{b}$（即背应力）的演化规律，也就是研究在塑性变形过程中，背应力$\boldsymbol{b}$的大小与方向如何变化。首先以$\boldsymbol{\nu}$表示与背应力率$\dot{\boldsymbol{b}}$(背应力随时间的变化率)的方向平行的单位张量$\boldsymbol{\nu}$，即$\boldsymbol{\nu}\ /\!/\ \dot{\boldsymbol{b}}$。下文中还将对$\boldsymbol{\nu}$作进一步的讨论。由(2.18)和(2.22)可看出，由于背应力变化引起的屈服函数的变化只取决于背应力率$\dot{\boldsymbol{b}}$沿屈服面法向$\boldsymbol{n}$的投影$\boldsymbol{n}:\dot{\boldsymbol{b}}$。因此假设

$$\dot{\boldsymbol{b}}:\boldsymbol{n}=\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}E_{\mathrm{b}} \tag{2.25}$$

式中E_{b}称为机动硬化模量。(2.25)可以看作是E_{b}的定义式。利用$\dot{\boldsymbol{b}}\ /\!/\boldsymbol{\nu}$，由上式可得

$$\dot{\boldsymbol{b}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\boldsymbol{\nu}:\boldsymbol{n}}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}E_{\mathrm{b}}\boldsymbol{\nu} \tag{2.26}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\boldsymbol{\nu}:\boldsymbol{n}}E_{\mathrm{b}}\boldsymbol{\nu} \tag{2.26$'$}$$

(2.26)或(2.26)'称为背应力演化方程。背应力的变化率$\dot{\boldsymbol{b}}$的方向取决于$\boldsymbol{\nu}$，大小取决于E_{b}。

关于$\dot{\boldsymbol{b}}$的方向$\boldsymbol{\nu}$存在不同的理论。Prager（1956）假定$\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{n}$，即背应力的变化$\mathrm{d}\boldsymbol{b}$沿着屈服面的法向$\boldsymbol{n}$。设塑性变形无体积变形。由（1.10），$\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$必为偏斜张量。由（1.12），$\boldsymbol{n}$也是偏斜张量。因此$\boldsymbol{b}$恒为偏斜张量，$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}$。由(2.26)

$$\dot{\boldsymbol{b}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}E_{\mathrm{b}}\boldsymbol{n},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}E_{\mathrm{b}}\boldsymbol{n} \tag{2.27}$$

Ziegler则假定$\dot{\boldsymbol{b}}$的方向$\boldsymbol{\nu}$平行于主动应力$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}$。因此

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{1}{|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}|}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}) \tag{2.28}$$

式中$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}$可分解为偏量与球量（球形张量）两部分

$$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')+\frac{1}{3}J_1(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{\delta}$$

利用屈服条件(2.15)，可算得

$$|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}|=[(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}):(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[\frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{F}}^{2}+\frac{1}{3}(\sigma_{kk}-b_{kk})^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

按 Ziegler 的假定，$\boldsymbol{v}$ 一般不是偏量，所以 $\boldsymbol{b}$ 一般也不是偏量。但是由(2.28) $\boldsymbol{v}$ 的偏量 $\boldsymbol{v}'$ 平行于 $\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'$，因而由(2.22)，$\boldsymbol{v}'$ 平行于 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{v}'//\boldsymbol{n}$，则

$$\boldsymbol{v}'=(\boldsymbol{v}:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$$

取(2.26)之偏量，得背应力偏量 $\boldsymbol{b}'$ 的演化方程(利用(1.16))

$$\dot{\boldsymbol{b}}'=\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}E_{\mathrm{b}}\boldsymbol{n}=\frac{2}{3}E_{\mathrm{b}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}'}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}E_{\mathrm{b}}\boldsymbol{n} \tag{2.29}$$

故背应力偏量 $\boldsymbol{b}'$ 满足演化方程(2.29)。

按 Prager 假定，背应力 $\boldsymbol{b}$ 本身（为偏量）所满足的演化方程(2.27)与按 Ziegler 假定背应力偏量 $\boldsymbol{b}'$ 所满足的演化方程(2.29)相同。因此无论按 Prager 或按 Ziegler 假定，背应力偏量率 $\dot{\boldsymbol{b}}'$ 均服从(2.29)。

由(1.20)，令(2.18)的 df=0，得到一致性条件(除以 dt 后):

$$(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\dot{\boldsymbol{\sigma}}-(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\dot{\boldsymbol{b}}-\frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{F}}\dot{\sigma}_{\mathrm{F}}=0$$

利用(2.22)，上式可写作

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{n}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{n}:\dot{\boldsymbol{b}})-\frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{F}}\dot{\sigma}_{\mathrm{F}}=0$$

再利用(1.27)‴,(2.17)′ 与(2.29)，并注意因 $\boldsymbol{n}$ 为偏量，$\boldsymbol{n}:\dot{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{n}:\dot{\boldsymbol{b}}'$，上式又可写作(无论对于 Prager 假定或 Ziegler 假定)

$$\frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{F}}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}(E_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{b}}-E_{\mathrm{F}})=0$$

因此

$$E_{\mathrm{p}}=E_{\mathrm{b}}+E_{\mathrm{F}} \tag{2.30}$$

作为一致性条件导出的结论，上式表明塑性模量 E_{p} 为机动硬化模量 E_{b} 与各向同性硬化模量 E_{F} 之和。由(2.17)′，前已假定 E_{F} 为累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的函数。因此由(2.30)，假定 E_{p} (或

E_b)也是 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数 $E_b(\bar{\varepsilon}^p)$(或 $E_b(\bar{\varepsilon}^p)$)，则 E_b(或 E_p)也必是 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数 $E_b(\bar{\varepsilon}^p)$(或 $E_p(\bar{\varepsilon}^p)$)。那么三个模量 E_p，E_b，E_F 都是 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数。E_p 可由单向拉伸曲线图 1-5(b)求出(见习题 1.7)：

$$E_p = \frac{\mathrm{d}Y(\bar{\varepsilon}^p)}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p} \tag{2.31}$$

可以用单向拉伸(图 1-7)为例说明(2.30)的物理意义。单向拉伸情况下，$\sigma_{11} \neq 0$，其他 $\sigma_{ij} = 0$。按 Ziegler 理论[1)]，类似于 σ_{ij}，设 $b_{11} \neq 0$，其他 $b_{ij} = 0$；$v_{11} = 1$，其他 $v_{ij} = 0$，(2.26)′可以满足。由图 1-7 所示拉伸曲线，如果当前应力 σ_{11} 在拉伸曲线上，$\sigma_{11} = b_{11} + \sigma_F$，因此

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^p} = \frac{\mathrm{d}b_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^p} + \frac{\mathrm{d}\sigma_F}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^p}$$

此式就是(2.30)在单向拉伸情况下的特例。若按 Prage 理论，图 1-7 中的 b_{11} 应改成 $3b_{11}'/2$。

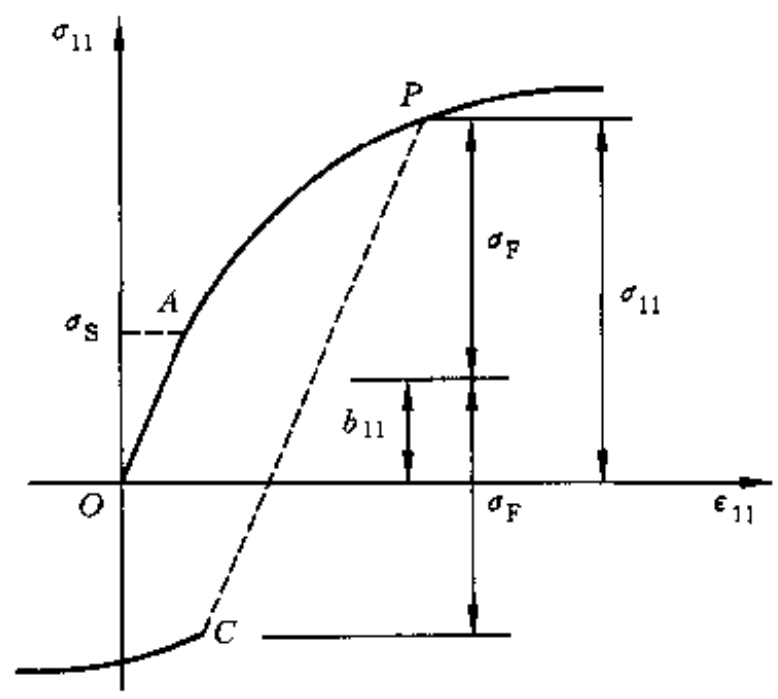


图 1-7　混合硬化单向拉伸曲线

3. 本构关系

由(2.23)，可得混合硬化的 J_2 流动理论本构关系

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.32}$$

1) Ziegler 理论的便利之处在于可以限于低维应力空间进行计算。例如在平面应力情况下，$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ 则必有 $b_{13} = b_{23} = b_{33} = 0$。

式中弹塑性柔度张量 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M}=\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\ \sigma_{\mathrm{F}}^{2}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')$$

$$M_{ijkl}=\mathscr{M}_{ijkl}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\ \sigma_{\mathrm{F}}^{2}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}(\sigma'_{ij}-b'_{ij})\ (\sigma'_{kl}-b'_{kl}) \tag{2.33}$$

加载参数 α 见(2.24)。

4. 塑性功率

由(1.40)

$$\dot{W}^{\mathrm{p}}=\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{1.40}$$

式中，由(1.41)与(2.22)，功等效应力 $\bar{\sigma}$ 为

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{n}=\frac{3}{2\sigma_{\mathrm{F}}}\boldsymbol{\sigma}:(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}') \tag{2.34}$$

由此可见，不同于各向同性硬化的(2.13)式，在混合硬化情况，功等效应力 $\bar{\sigma}$ 不同于 Mises 等效应力 σ_{eq}：

$$\sigma_{\mathrm{eq}}=[3J_2(\boldsymbol{\sigma})]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'\right]^{\frac{1}{2}}$$

也不同于等效主动应力(见(2.15))

$$[3J_2(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')\right]^{\frac{1}{2}}$$

在混合硬化情况，塑性功率 $\dot{W}^{\mathrm{p}}$ 不一定为恒正，有可能为负。例如图 1-7 所示的单向拉伸情况，如果 $b_{11}>\sigma_{\mathrm{F}}$，反向屈服点 C 处应力 σ_{11} 为正；从 P 点卸载，在拉伸应力 σ_{11} 卸至零之前就开始反向屈服，此时 $\sigma_{11}>0$, $\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}<0$，故 $\dot{W}^{\mathrm{p}}$ 为负。因此由(1.40)，功等效应力 $\bar{\sigma}$ 也可能为负。

5. 比例加载情况

设在加载过程中应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的分量的相互比例不变，且随时间单调增加，即过程为加载，$\alpha=1$。这一过程称为比例加载过程。以二阶单位偏斜张量 $\boldsymbol{m}$ ($\boldsymbol{m}:\boldsymbol{m}=1$) 表示应力偏量

的固定方向，$\boldsymbol{\sigma}'//\boldsymbol{m}$，则$\boldsymbol{\sigma}'$可写作

$$\boldsymbol{\sigma}'=|\boldsymbol{\sigma}'|\boldsymbol{m}$$

其中

$$|\boldsymbol{\sigma}'|=(\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}')^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\mathrm{eq}}$$

故

$$\boldsymbol{\sigma}'=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\mathrm{eq}}\boldsymbol{m} \tag{2.35}$$

由背应力演化方程(2.29)，并利用(2.22)，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}'}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}E_{\mathrm{b}}\boldsymbol{n}=\frac{E_{\mathrm{b}}}{\sigma_{\mathrm{F}}}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')$$

因此$\boldsymbol{b}'$满足微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}'}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}+\frac{E_{\mathrm{b}}}{\sigma_{\mathrm{F}}}\boldsymbol{b}'=\frac{E_{\mathrm{b}}}{\sigma_{\mathrm{F}}}\boldsymbol{\sigma}'=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{E_{\mathrm{b}}}{\sigma_{\mathrm{F}}}\sigma_{\mathrm{eq}}\boldsymbol{m}$$

在初始屈服时，初始值$\boldsymbol{b}$=0，$\boldsymbol{b}'=0$ 。由上述微分方程，在整个加载过程中背应力$\boldsymbol{b}'$必也沿着固定方向$\boldsymbol{m}$，即$\boldsymbol{b}'//\boldsymbol{m}$。因此主动应力偏量$\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'//\boldsymbol{m}$。在整个加载过程中，屈服面的大小与位置不断变化，但由(2.22)，屈服面的法线方向张量$\boldsymbol{n}$保持不变

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}$$

由(1.27)″并利用(2.35)，则

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2E_{\mathrm{p}}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}'=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}}\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}}\boldsymbol{n} \tag{2.36}$$

上式说明：在比例加载情况下，塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$不分别依赖于机动硬化模量$E_{\mathrm{b}}$与各向同性硬化模量$E_{\mathrm{F}}$，而只依赖于它们的和，即$E_{\mathrm{p}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$(见(2.30))。

由(1.15)与(2.36)，可得

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{E_{\mathrm{p}}}\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}}$$

因此，由(2.31)

$$\sigma_{eq}=\int E_p \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p=\int \frac{\mathrm{d}Y(\bar{\varepsilon}^p)}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p}\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p=Y(\bar{\varepsilon}^p) \tag{2.37}$$

式中 $Y(\bar{\varepsilon}^p)$ 为材料曲线，也就是图 1-5(b)由单向拉伸所得的曲线。由 Mises 等效应力 σ_{eq} 可用(2.37)的反函数求累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^p$：

$$\bar{\varepsilon}^p=Y^{-1}(\sigma_{eq}) \tag{2.37$'$}$$

由(1.16)对时间积分，并利用(2.35)，可得塑性变形 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p=\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{\varepsilon}^p\boldsymbol{n}=\frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}}\boldsymbol{\sigma}'=\frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}^p}{Y(\bar{\varepsilon}^p)}\boldsymbol{\sigma}' \tag{2.38}$$

式中 $\bar{\varepsilon}^p$ 见 (2.37)′。因此在比例加载情况下，可以得到塑性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 与应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 之间的函数关系(2.38)，这种关系又称为“全量关系”。而在一般情况下(非比例加载情况)，塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 与应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ (或应力偏量率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$)之间满足一定关系，如(1.24)，(2.23)，必须根据应力全部历史 $\boldsymbol{\sigma}(t)$，才能求出塑性变形历史 $\boldsymbol{\varepsilon}^p(t)$。正因为如此，本节的流动理论也称为增量型本构理论或增量理论：本构关系所表示的是应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 与变形增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 之间的关系。

(2.38)式右端的系数 $\bar{\varepsilon}^p/Y(\bar{\varepsilon}^p)$ 可以通过割线模量 $E_s(\bar{\varepsilon}^p)$ 来表示。在图 1-5(a)的单向拉伸曲线图中以 $E_s(\varepsilon_{11}^p)$ 表示 OP 线的斜率，称为割线斜率，则易证

$$\frac{\bar{\varepsilon}^p}{Y(\bar{\varepsilon}^p)}=\frac{1}{E_s(\bar{\varepsilon}^p)}-\frac{1}{E} \tag{2.39}$$

因此(2.38)塑性变形 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 可写作

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{E_s(\bar{\varepsilon}^p)}-\frac{1}{E}\right]\boldsymbol{\sigma}' \tag{2.40}$$

由背应力偏量 $\boldsymbol{b}'$ 演化方程(2.29)，利用(2.30),则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}'}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p}=\sqrt{\frac{2}{3}}E_b\boldsymbol{n}=\sqrt{\frac{2}{3}}[E_p(\bar{\varepsilon}^p)-E_F(\bar{\varepsilon}^p)]\boldsymbol{n}$$

积分上式，注意当 $\bar{\varepsilon}^p=0$ 时的初始值 $\boldsymbol{b}'=0, Y(0)=\sigma_s, \sigma_F(0)=\sigma_s$ (σ_s 表示材料初始屈服应力)，并利用 $(2.17)_2'$ 与（2.31），可得

$$\boldsymbol{b}'=\sqrt{\frac{2}{3}}[Y(\bar{\varepsilon}^p)-\sigma_F(\bar{\varepsilon}^p)]\boldsymbol{n} \tag{2.41}$$

在各向同性硬化情况

$$\boldsymbol{b}'=0,\ \sigma_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})=Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$$

而在机动硬化情况，则

$$\boldsymbol{b}'=\sqrt{\frac{2}{3}}[Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})-\sigma_{\mathrm{s}}]\boldsymbol{n},\sigma_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})=\sigma_{\mathrm{s}}$$

我们回到非比例加载的一般情况。

6. 逆本构关系

为了求本构关系(2.32)，(2.33)之逆，可以利用一般形式的逆本构关系(1.31)，(1.33)。计算过程如下，由(1.23)计算 h

$$\frac{1}{h}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{\mathrm{F}}}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{F}}}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}+\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{b}}:\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}\right)}$$

将(2.15)中 f 代入，并利用(2.20)可得（见习题 1.7）

$$\frac{1}{h}=\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\sigma_{\mathrm{F}}^{2}},\qquad h=\frac{4}{9}E_{\mathrm{p}}\sigma_{\mathrm{F}}^{2}$$

将(2.33)与(1.30)相比较，也可得到此一结果。因此，将(2.20)的 $\boldsymbol{\mu}$ 代入(1.34)，(1.35)，得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'\\&\boldsymbol{\lambda}=\mathscr{L}:\boldsymbol{\mu}=\mathscr{L}:(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')=\frac{E}{1+\nu}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')\\&g=h+\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{\lambda}=\frac{4}{9}E\sigma_{\mathrm{F}}^{2}\left[\frac{E_{\mathrm{p}}}{E}+\frac{3}{2(1+\nu)}\right]\end{aligned}\tag{2.42}$$

因此，混合硬化情况 J_2 流动理论的逆本构关系为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathscr{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\tag{2.43}$$

$$\boldsymbol{L}=\mathscr{L}-\frac{\alpha}{g}\frac{E^{2}}{(1+\nu)^{2}}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')\tag{2.44}$$

式中 g 见 $(2.42)_3$。混合硬化材料的本构关系(2.33)$\boldsymbol{M}$ 与逆本构关系(2.44)$\boldsymbol{L}$ 都可以从各向同

性硬化情况的相应式子(2.7)与(2.10)把应力偏量$\boldsymbol{\sigma}'$改为主动应力偏量$\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'$，$Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$改为$\sigma_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}^{p})$而得到。决定加载参数$\alpha$的条件为

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\sigma}\text{在应力空间屈服面上,且}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\sigma}\text{在应力空间屈服面内,或}\boldsymbol{\sigma}\text{在应力空间屈服面上,且}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\leqslant 0\end{cases} \tag{2.45}$$

逆本构关系(2.43)，(2.44)适用于 $g>0$ 的情况。

7. 各向同性硬化系数

在各向同性硬化情况下，屈服面的大小为

$$\sigma_{\mathrm{F}}=Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$$

而在机动硬化情况下，屈服面的大小不变，值为

$$\sigma_{\mathrm{F}}=Y(0)=\sigma_{\mathrm{s}}$$

人们常假定在混合硬化情况下

$$\sigma_{\mathrm{F}}=(1-c)\sigma_{\mathrm{s}}+cY(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{2.46}$$

因此有

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{p}}&=\frac{\mathrm{d}Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}\\ E_{\mathrm{F}}&=\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{F}}}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=cE_{\mathrm{p}}\\ E_{\mathrm{b}}&=E_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{F}}=(1-c)E_{\mathrm{p}}\end{aligned} \tag{2.47}$$

c 称为各向同性硬化系数。$c=1$ 为各向同性硬化情况，而 $c=0$ 为机动硬化情况。

1.3 J_2形变理论及其与J_2流动理论(各向同性硬化)的比较

1.3.1 J_2形变理论

上一节的J_2流动理论属于增量型理论，它所建立的是从某一已知状态出发的应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$（或应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$）与变形增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$（或变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$）之间的关系。本节的$J_2$形变理论则属于

全量型理论，它所建立的是应力$\boldsymbol{\sigma}$与变形$\boldsymbol{\varepsilon}$之间的关系。

设材料服从各向同性硬化 Mises 屈服条件(2.1):

$$f(\boldsymbol{\sigma},Y)=J_2(\boldsymbol{\sigma})-\frac{Y^2}{3}=\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}-\frac{Y^2}{3}=0 \tag{3.1}$$

式中 Y 为材料加载历史中 Mises 等效应力曾达到的最大值，记作σ^*_{eq}

$$Y=\max_{\mathrm{history}}[3J_2(\boldsymbol{\sigma})]^{\frac{1}{2}}=\max_{\mathrm{history}}\sigma_{\mathrm{eq}}=\sigma^*_{\mathrm{eq}} \tag{3.2}$$

材料所处的状态可区分为加载状态与卸载状态两种。如果材料当前的 Mises 等效应力σ_{eq}等于历史最大值σ^*_{eq}，则称材料处于加载状态。如果材料当前的 Mises 等效应力σ_{eq}小于历史最大值σ^*_{eq}，则称材料处于卸载状态。图 1-8 表示单向拉伸的例子。

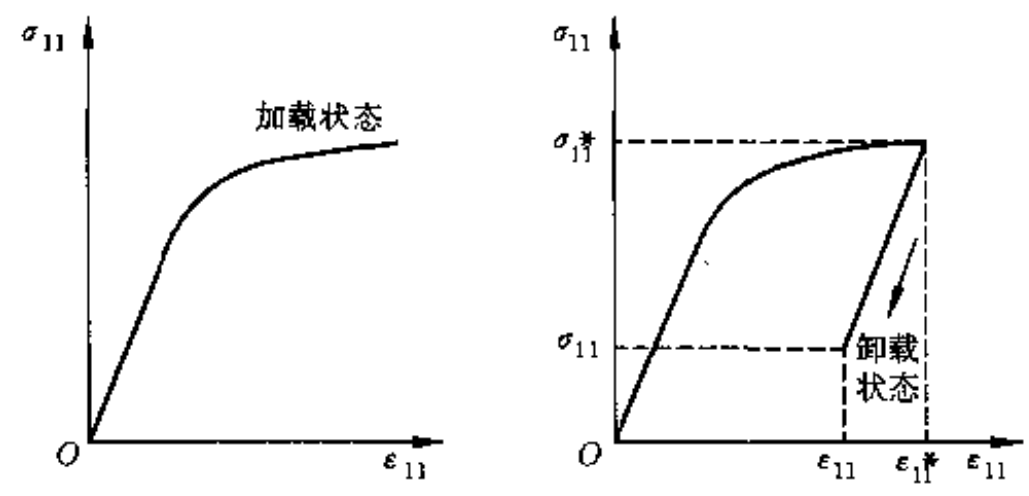


图 1-8　单向拉伸的加载状态和卸载状态

若材料处于卸载状态，它是由 Mises 等效应力σ_{eq}为历史上最大值的状态（以*表示）卸载而得。则当前的应力$\boldsymbol{\sigma}$、应变$\boldsymbol{\varepsilon}$与以*表示的状态的应力$\boldsymbol{\sigma}^*$，应变$\boldsymbol{\varepsilon}^*$之差满足弹性关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*-\boldsymbol{\varepsilon}=\mathscr{M}:(\boldsymbol{\sigma}^*-\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.3}$$

J_2形变理论假定：若材料处于加载状态，即

$$\sigma_{\mathrm{eq}}=Y=\max_{\mathrm{histroy}}\sigma_{\mathrm{eq}}=\sigma^*_{\mathrm{eq}}$$

时，在应力$\boldsymbol{\sigma}$与应变$\boldsymbol{\varepsilon}$之间存在函数关系。换句话说，已知应力$\boldsymbol{\sigma}$（或已知应变$\boldsymbol{\varepsilon}$）就可求出应变$\boldsymbol{\varepsilon}$（或应力$\boldsymbol{\sigma}$），而不必像节 1.2 的J_2流动理论必须已知加载应力历史$\boldsymbol{\sigma}(t)$（或应变历史$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$），由每一增量步的应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t$（或应变增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}t$）计算该增量步的应变增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}t$（或应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t$），然后叠加所有增量步的应变增量（或应力增量）得到当前的应变$\boldsymbol{\varepsilon}$（或应力$\boldsymbol{\sigma}$）。

与节 1.2 流动理论一样，由式(1.1)，应变$\boldsymbol{\varepsilon}$可分解为弹性与塑性两部分之和

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{3.4}$$

式中弹性变形$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$满足弹性规律

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} = \mathscr{M} : \boldsymbol{\sigma} \tag{3.5}$$

J_2形变理论假定塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$的方向与应力偏量$\boldsymbol{\sigma}'$平行，即$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} // \boldsymbol{\sigma}'$，也就是说$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$的分量与$\boldsymbol{\sigma}'$的分量成比例。设比例因子为$\eta$，可记

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \eta \boldsymbol{\sigma}' \tag{3.6}$$

式中η为 Mises 等效应力σ_{eq}的函数（材料函数）

$$\eta = \eta(\sigma_{\mathrm{eq}})$$

对于J_2流动理论（各向同性硬化），由(1.10)可得$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \lambda \boldsymbol{\sigma}'$，故塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的方向与$\boldsymbol{\sigma}'$平行；而$J_2$形变理论则假定(3.6)式，即设$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$与$\boldsymbol{\sigma}'$平行。这是两个理论的重要区别。

在J_2流动理论中取累积塑性变形作为塑性变形的度量：

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} \, \mathrm{d}t \tag{1.18}$$

J_2形变理论则取塑性应变张量的大小作为塑性变形的度量

$$\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \left[\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

式中系数 2/3 是为了使得在单向拉伸时$\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$恰好等于拉伸方向的塑性应变分量$\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}$。$\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$可称为等效塑性变形。

以单向拉伸（图 1-6）为例，可看出累积塑性变形$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$与等效塑性变形$\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$的差别。当材料受力从图 1-6 的 O 点拉伸加载至 B 点，然后卸载至 C，开始反向压缩屈服，再压缩加载至$\overline{D}$点时，累积塑性变形$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$与等效塑性变形$\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$各为

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = OO' + \overline{D}'O'$$
$$\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \left| OO' - \overline{D}'O' \right| = \left| O\overline{D}' \right|$$

因此，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$随时间递增，而$\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$则可随时间增大或缩小。

将(3.6)代入(3.7)，可得

$$\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\left[\frac{2}{3}\eta^{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\eta(\sigma_{\mathrm{eq}})\sigma_{\mathrm{eq}} \tag{3.8}$$

$\frac{2}{3}\eta$ 也是等效塑性变形 $\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 与 Mises 等效应力 σ_{eq} 之间的比例系数。

为了要求出材料函数 $\eta(\sigma_{\mathrm{eq}})$，可以利用简单的试验，例如单向拉伸试验（图 1-5(a)）。此时

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{11}^{\mathrm{e}}+\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}=\frac{\sigma_{11}}{E}+\frac{2}{3}\eta\sigma_{11}$$

因割线模量为

$$E_{\mathrm{s}}=\frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}=E_{\mathrm{s}}(\sigma_{11})$$

故可由前式解出单向拉伸试验的 η

$$\eta=\frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon_{11}}{\sigma_{11}}-\frac{1}{E}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{11})}-\frac{1}{E}\right)=\eta(\sigma_{11}) \tag{3.9}$$

因为 $\eta(\sigma_{\mathrm{ec}})$ 为材料函数，故必有

$$\eta(\sigma_{\mathrm{eq}})=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right] \tag{3.10}$$

将(3.9)代入(3.6)，得

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right]\boldsymbol{\sigma}' \tag{3.11}$$

式(3.11)正好与 J_2 流动理论比例加载情况下的(2.40)式一致。按 J_2 形变理论，这是一般适用的关系式；但按 J_2 流动理论，这只适用于比例加载情况，而在一般情况下不成立。

1. 本构关系

将塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 与弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 叠加，并利用(1.8)，得本构关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}&=\mathscr{M}:\boldsymbol{\sigma}+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right]\boldsymbol{\sigma}'\\&=\left\{\left[\frac{1}{2G}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right)\right]\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{9K}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}\right\}:\boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

记

$$\frac{1}{2G_s(\sigma_{eq})}=\frac{1}{2G}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s(\sigma_{eq})}-\frac{1}{E}\right) \tag{3.12}$$

则本构关系可写作

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathscr{M}_s:\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2G_s(\sigma_{eq})}\boldsymbol{\sigma}'+\frac{1}{9K}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\delta} \tag{3.13}$$

式中 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})=J_1(\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\delta}$ 表示应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的迹。

$$\mathscr{M}_s-\frac{1}{2G_s(\sigma_{eq})}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{9K}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}$$

$$(\mathscr{M}_s)_{ijkl}=\frac{1}{2G_s(\sigma_{eq})}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{3.14}$$

弹塑性柔度张量 $\mathscr{M}_s$ 的表达式(3.14)在形式上与弹性柔度张量 $\mathscr{M}$ 的表达式(1.8)相同，只需将其中的弹性剪切模量 G 改为 $G_s(\sigma_{eq})$。

2. 逆本构关系

仿照弹性刚度张量 $\mathscr{L}$ 的(1.32)式，只需将其中的弹性剪切模量 G 改为 $G_s(\sigma_{eq})$，就可以得到弹塑性刚度 $\mathscr{L}_s=\mathscr{M}_s^{-1}$ 的表达式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_s&=2G_s(\sigma_{eq})\bar{\boldsymbol{I}}+K\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}\\(\mathscr{L}_s)_{ijkl}&=2G_s(\sigma_{eq})\bar{I}_{ijkl}+K\delta_{ij}\delta_{kl}\end{aligned} \tag{3.15}$$

因此逆本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathscr{L}_s:\boldsymbol{\varepsilon}=2G_s\boldsymbol{\varepsilon}'+K\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta} \tag{3.16}$$

现在来讨论 G_s 的物理意义。由(3.12)

$$\frac{3}{2E}-\frac{1}{2G}=\frac{3}{2E_s(\sigma_{eq})}-\frac{1}{2G_s(\sigma_{eq})} \tag*{(3.12)$'$}$$

利用弹性常数的关系式 $G=E/[2(1+\nu)]$，上式左端等于 $(1-2\nu)/2E$。因此也可以定义 $\nu_s(\sigma_{eq})$，它的定义式为

$$G_s(\sigma_{eq}) = \frac{E_s(\sigma_{eq})}{2(1+\nu_s(\sigma_{eq}))} \tag{3.17}$$

那么(3.12)'式可写作

$$\frac{1-2\nu}{2E} = \frac{1-2\nu_s}{2E_s} \tag{3.18}$$

所以 J_2 形变理论的本构关系或逆本构关系，形式上与弹性关系完全相同，只需将弹性常数 E、G，ν，各改为 $E_s(\sigma_{eq})$, $G_s(\sigma_{eq})$, $\nu_s(\sigma_{eq})$ 即可。

为了说明 G_s 的物理意义，可定义等效变形 ε_{eq}：

$$\varepsilon_{eq} = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}'\right)^{\frac{1}{2}}$$

将(3.13)式的偏量部分，即右端第一项，代入上式的 $\boldsymbol{\varepsilon}'$，得

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{3G_s}\sigma_{eq} \tag{3.19}$$

由此可见，$3G_s$ 的意义就是 Mises 等效应力 σ_{eq} 与等效变形 ε_{eq} 的比值。对于弹性材料，我们有

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{3G}\sigma_{eq}$$

附带指出，弹性材料单向拉伸时

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{3G}\sigma_{11} \neq \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11}$$

仅当泊松比 ν=1/2 时 $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{11}$

J_2 流动理论的本构关系是率形式，即应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ 与应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ 之间满足一定的关系。根据已知的应力历史 $\boldsymbol{\sigma}(t)$（或应变历史 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$），由本构关系（或逆本构关系）可以求出应变历史 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$（或应力历史 $\boldsymbol{\sigma}(t)$），但是在一般情况下[1]，不可能由本构关系（或逆本构关系）积分得到应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 与应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 本身之间的函数关系。与此不同，J_2 形变理论的本构关系是全量形式的，也就是应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 与应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 本身之间为函数关系。由这个本构关系对时间求导，很容易把它写成率形式。这个率形式的本构关系当然是可以积分成全量关系的。

为了便于对两个理论进行比较，下面导出率形式的 J_2 形变理论本构关系。由(3.4)求导

1) 非比例加载情况

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{3.20}$$

式中弹性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$ 与塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$（利用(3.6)）各为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} &= \mathscr{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \left(\frac{1}{2G} \bar{\boldsymbol{I}} + \frac{1}{9K} \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta} \right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} &= (\eta \boldsymbol{\sigma}')^{\cdot} = \eta \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \dot{\eta} \boldsymbol{\sigma}' \end{aligned} \tag{3.21}$$

式中 η 见(3.9)。回到单向拉伸试验的(3.9)′式

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon_{11}}{\sigma_{11}} - \frac{1}{E} \right)^{\cdot} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{11} \sigma_{11} - \varepsilon_{11} \dot{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}^2} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\dot{\sigma}_{11}} - \frac{\varepsilon_{11}}{\sigma_{11}} \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}} \left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}(\sigma_{11})} - \frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{11})} \right) \end{aligned}$$

式中 $E_{\mathrm{t}}(\sigma_{11}) = \mathrm{d}\sigma_{11}/\mathrm{d}\varepsilon_{11}$ 表示单向拉伸的切线模量（图 1-5(a)），因此在一般情况下

$$\dot{\eta} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}} \left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} - \frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} \right) \tag{3.22}$$

(3.22)代入$(3.21)_2$，得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} - \frac{1}{E} \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}} \left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} - \frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} \right) \boldsymbol{\sigma}' \tag{3.23}$$

(3.23)适用于 $\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}} \geqslant 0$，因为当 $\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}} < 0$ 时 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = 0$。由 σ_{eq} 的定义 $\sigma_{\mathrm{eq}} = [3J_2(\boldsymbol{\sigma})]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \right)^{\frac{1}{2}}$.

可得

$$\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}} = \frac{3}{2\sigma_{\mathrm{eq}}} \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\sigma}}'$$

故(3.23)的 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 可写作

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} - \frac{1}{E} \right) \bar{\boldsymbol{I}} + \frac{1}{h_{\mathrm{s}}} \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\sigma}' \right] : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \tag{3.23$'$}$$

$$\frac{1}{h_{\mathrm{s}}} = \frac{9}{4} \frac{1}{\sigma_{\mathrm{eq}}^2} \left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} - \frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} \right) \tag{3.24}$$

将(3.23)′与$(3.21)_1$的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$叠加后，并利用(3.12)式，得$J_2$形变理论的率形式本构关系

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.25}$$

式中

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} = \mathscr{M}_{\mathrm{s}} + \frac{1}{h_{\mathrm{s}}}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}} \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\sigma}'$$

$\mathscr{M}_{\mathrm{s}}$已见(3.14)。注意(3.26)右端第一项$\mathscr{M}_{\mathrm{s}}$除了来自弹性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$以外，还包含塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$(3.23)右端的第一项。所以(3.26)的两部分并不代表弹性与塑性部分的分解。但是如果利用塑性模量E_{p}与切线模量E_{t}之间的关系

$$\frac{1}{E_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{E_{\mathrm{t}}} - \frac{1}{E}$$

则可以看出(3.26)中$\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$表达式与$J_2$流动理论（各向同性硬化）相应的表达式(2.7)形式上相似，只需把后者的E改为$E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})$，$\nu$改为$\nu_{\mathrm{s}}$，$h$改为$h_{\mathrm{s}}$，$\boldsymbol{\mu}$改为$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}$(实际上$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\sigma}'$)。

由(3.25)求逆，可得J_2形变理论的率形式本构关系

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{s}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.27}$$

式中$\boldsymbol{L}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}^{-1}$，仿(1.33)~(1.35)式的推导，可得

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{s}} = \mathscr{L}_{\mathrm{s}} - \frac{1}{g_{\mathrm{s}}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{s}} \tag{3.28}$$

式中$\mathscr{L}_{\mathrm{s}}$见(3.15)，仿（2.4）与（2.11）可得$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{s}}$与$g_{\mathrm{s}}$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{s}} = \mathscr{L}_{\mathrm{s}} : \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}} = 2G_{\mathrm{s}}\boldsymbol{\sigma}' = \frac{E_{\mathrm{s}}}{1+\nu_{\mathrm{s}}}\boldsymbol{\sigma}' \tag{3.29}$$

$$g_{\mathrm{s}} = h_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}} : \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{s}} = \frac{4}{9}E_{\mathrm{s}}\sigma_{\mathrm{eq}}^2\left[\frac{1}{E_{\mathrm{s}}}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{s}}}\right)^{-1} + \frac{3}{2(1+\nu_{\mathrm{s}})}\right] \tag{3.30}$$

1.3.2 J_2形变理论与J_2流动理论的比较

1. 全量型与增量型

J_2形变理论的本构关系(3.13)属于全量型。如果材料处于加载状态，已知应力$\boldsymbol{\sigma}$就可以求出应变$\boldsymbol{\varepsilon}$，而无需知道应力的全部历史，即加载路径$\boldsymbol{\sigma}(t)$。

J_2 流动理论的本构关系（各向同性硬化(2.6)式，混合硬化(2.32)与(2.29)式）则属于增量型。必须给定应力的历史 $\boldsymbol{\sigma}(t)$（或应变的历史 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$）才能确定应变的历史 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$（或应力的历史 $\boldsymbol{\sigma}(t)$），因此某一时刻的应变（或应力）值取决于在此时刻以前应力（或应变）全部的历史。

如果已知材料的单向拉伸曲线 $Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$，在比例加载情况下，两种理论给出相同的结果（见(2.40)与(3.10)）。

2. 正交法则

J_2 流动理论满足正交法则，即塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 正交于屈服面（各向同性硬化情况平行于 $\boldsymbol{\sigma}'$，混合硬化情况平行于 $\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}'$）。$J_2$ 形变理论不满足正交法则，可见(3.23)式，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 由两项组成，第二项平行于 $\boldsymbol{\sigma}'$，而第一项含 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$，一般不平行于 $\boldsymbol{\sigma}'$（除非在比例加载的特例下，$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'/\!/\boldsymbol{\sigma}'$）。

3. 连续性

按 J_2 流动理论，由(2.23)式，当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的方向由屈服面的外法线方向（$/\!/(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')$）逐渐变为相切于屈服面的方向（$\perp(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')$）时，塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的方向不变，始终平行于 $(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{b}')$，但其值由正逐渐变为零。当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 指向屈服面之内时，由于卸载，$\alpha=0$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 恒为零。因此，J_2 流动理论满足 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 随 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 变化的连续性。反之，J_2 形变理论则不满足这种连续性。因为，当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 从屈服面的外法线方向（$\dot{\boldsymbol{\sigma}}/\!/\boldsymbol{\sigma}'$）逐渐变为相切于屈服面的方向（$\dot{\boldsymbol{\sigma}}\perp\boldsymbol{\sigma}'$，即 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{\sigma}'=0$，即 $\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}}=0$）时，由(3.23)，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\neq 0$，而当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 从指向屈服面之内逐渐变为相切于屈服面的方向时，却有 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=0$，不满足连续性。这是 J_2 形变理论的重要缺点。

4. 对反向屈服的适用性

J_2 流动理论可以用于反向屈服的情况，而 J_2 形变理论则否。可以举两个例子。当材料的应力点从应力空间中当前屈服面的 A 点沿着屈服面到达屈服面上的 B 点时，按 J_2 流动理论，这一过程属于弹性，塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 不发生变化，因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\varepsilon}_A^{\mathrm{p}}$，但按 J_2 形变理论，$\boldsymbol{\varepsilon}_A^{\mathrm{p}}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\mathrm{p}}$ 各自平行于 A 与 B 点的偏应力 $\boldsymbol{\sigma}_A'$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_B'$，故 $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\mathrm{p}}\neq\boldsymbol{\varepsilon}_A^{\mathrm{p}}$。另一个例子是单向拉伸（图1-6）。当应力的路径为图中的 $OABC\overline{D}$ 时，在 $\overline{D}$ 点的等效塑性变形 $\tilde{\varepsilon}_{\overline{D}}^{\mathrm{p}}=\overline{D}'O$，而 Mises 等效应力 $\sigma_{\mathrm{eq}}=|\sigma_{11}|_{\overline{D}}$，显然二者之间不满足(3.8)式。因为 $|\sigma_{11}|_{\overline{D}}$ 显然大于拉伸曲线 OAB 上对应于 $\varepsilon^{\mathrm{p}}=O\overline{D}'$ 的 E 点之应力 $(\sigma_{11})_E$ 值。

总结以上各点，应该认为 J_2 形变理论在理论上具有严重的缺点。由于它在比例加载情况下导致与 J_2 流动理论相同的结果，因此 J_2 形变理论可以近似地用于离比例加载路径不远的加载路径。

1.4 奇异屈服面塑性理论

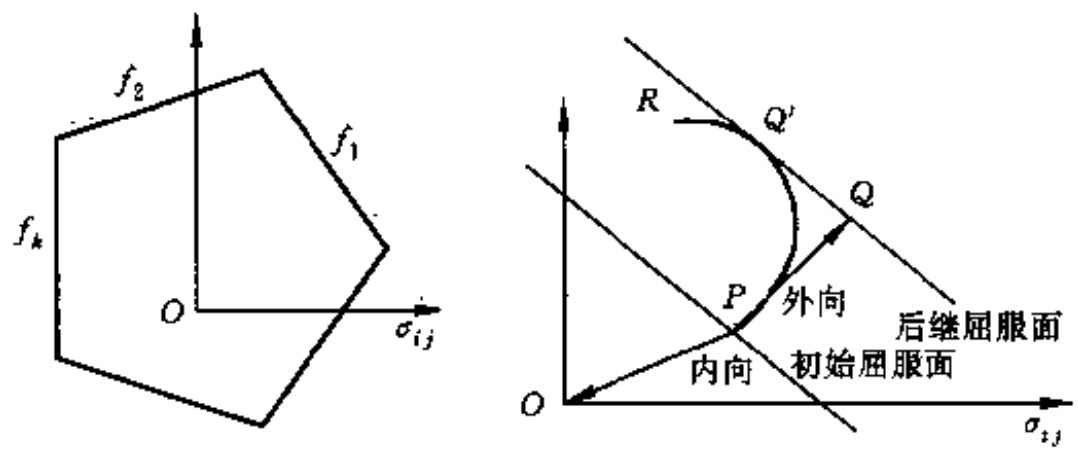
在前面几节都假定屈服面是应力空间中的光滑曲面，曲面上每一点都存在唯一的法线方向。本节讨论奇异屈服面的情况，即在屈服面的某些处（例如角点），不存在唯一的法线方向。此时屈服面称为奇异屈服面。

1.4.1 Sanders 理论 [1)]

假定在应力空间中屈服面由有限个曲面组成（图 1-9(a)）。现在来讨论其中一个曲面的演化。假定该曲面的方程为

$$f(\sigma)=f(\sigma_{ij})=C=\max_{\text{history}} f(\sigma_{ij})$$

其中 $f(\sigma_{ij})$ 称为屈服函数，具有连续偏导数 $\partial f/\partial\sigma_{ij}$，$C$ 表示一常数，其初始值为 f_0。材料开始屈服以后，C 值随着加载过程而变化，其值取材料加载历史上的最大值。因此 C 值只能增加，不能减小。



（a）奇异屈服面　　（b）单个屈服面的变化

图 1-9　奇异屈服面及其变化

现在来研究某一个屈服面的演化（图 1-9(b)）。当应力点在应力空间中从屈服面上 P 处向屈服面的内向变动时，这属于卸载情况，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=0$，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=0$。当应力点从 P 向屈服面的外向变动时，必然伴随有塑性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$。当应力点沿着屈服面变动（即 $\mathrm{d}f(\sigma_{ij})=0$）时，根据连续性，亦应有 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=0$。因此 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$ 表达式应含有 $\mathrm{d}f$ 因子。根据正交法则，且不失广泛性，假定 $\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 沿屈服面的外向法线方向，可知 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 应与 $\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 平行。因此可设

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=g(f)\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}f,\qquad \mathrm{d}\varepsilon_{ij}{}^{\mathrm{p}}=g(f)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\mathrm{d}f\qquad \text{当 } \mathrm{d}f>0$$

1)　见 Sanders 1954

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=0 \quad , \qquad \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=0 \qquad\qquad 当\ \mathrm{d}f\leqslant 0 \tag{4.1}$$

式中 $g(f)$ 为比例因子，

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\mathrm{d}\sigma_{kl}$$

(4.1)为增量型关系式，一般说来不能通过积分得到 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 与 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 之间的函数关系（全量关系）。但可以证明：若屈服函数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的线性函数，由(4.1)可以通过积分而得到 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 与 f 之间的函数关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\varphi}(f), \quad \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=\varphi_{ij}(f) \tag{4.2}$$

证明如下：设 f 为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的线性函数，则 $\partial f/\partial\sigma_{ij}$ 为常数，可记作

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{n}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}=n_{ij}$$

由(4.1)积分可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=H(f)\boldsymbol{n}, \quad H(f)=\int_{f_0}^{f} g(f)\mathrm{d}f$$

取 $\boldsymbol{\varphi}(f)=H(f)\boldsymbol{n}$，(4.2)式得证。

当屈服函数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 为应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的线性函数时，由(4.2)，塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 只取决于 f 的值，因此，如果两个不同的加载路径所导致的后继屈服面相同，那么塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 也应该相同。Sanders 假定(1954)：

(1) 在应力空间中屈服面由有限个超平面组成，每个超平面的屈服函数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的线性函数；每个屈服超平面在应力空间的演化过程中保持法线方向不变，作平行于自身的移动；

(2) 在应力空间中，各个屈服超平面的演化互相独立；换句话说，每个屈服超平面的演化不会牵动或影响其他超平面的演化。

图 1-9(b)示在应力空间中单个屈服超平面的演化。若加载路径为 OPQ，应力点在 P 处碰到初始屈服超平面，然后在从 P 到 Q 的过程中，屈服超平面也随着平移，从初始屈服超平面的位置平移到后继屈服超平面 QQ'。随着应力点的变化，正在被牵动（演化）的屈服超平面，称为开动（active）的超平面。当应力点变化时，有的屈服超平面没有被牵动（或以前被牵动过，当前不被牵动），称之为不开动（inactive）的超平面。

图 1-10(a)表示在加载过程 OP 中，只有一个屈服超平面 AB 开动，而在图 1-10(b)中，则有两个超平面 AB 与 AC 开动。在应力点到达 P 时，屈服超平面的位置用虚线表示。

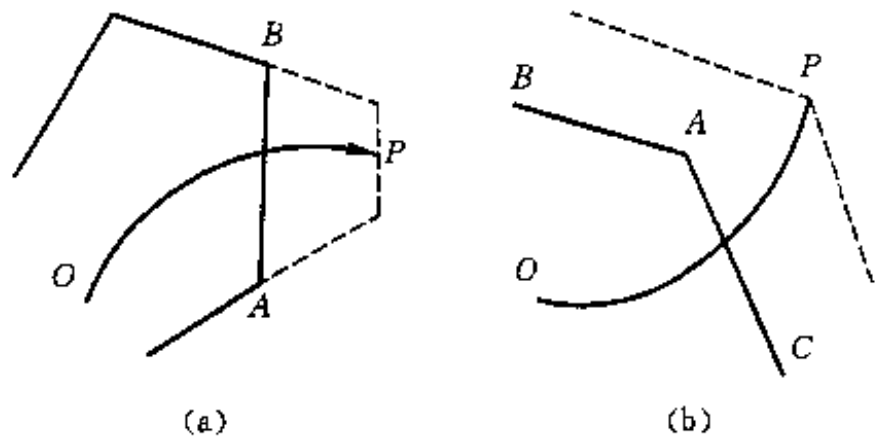


图 1-10　Sanders 理论屈服面的变化

当应力点 P 在屈服面的交线或角点，即 P 同时处于几个屈服超平面上时，这几个屈服超平面是否开动，取决于应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的方向。图 1-11 示应力点 P 处于两个屈服超平面的交线上的情况。当应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$（或应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$）从 P 指向I区时，两个屈服超平面均不开动，属于卸载情况，塑性应变增量为零，因此I区称为卸载区。当应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 从 P 指向III区时，两个屈服超平面均开动，因此III区称为全加载区。当应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 从 P 指向II区或IV区时，只有一个超平面开动，而另一个不开动。因此II区与IV区称为部分加载区。

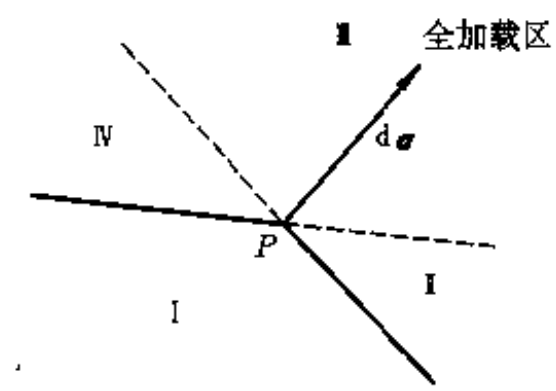


图 1-11　屈服面交线或角点

(4.1)式给出当一个屈服超平面开动时的塑性应变增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$。当有几个屈服超平面同时开动时，Sanders 假定塑性应变增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 是它们单独开动所对应的塑性应变增量之和

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha} g_{\alpha}(f_{\alpha})\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}f_{\alpha},\quad \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha} g_{\alpha}(f_{\alpha})\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}f_{\alpha}\qquad 当\ \mathrm{d}f_{\alpha}>0$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathbf{0},\qquad \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=0\qquad 当\ \mathrm{d}f_{\alpha}\leqslant 0\tag{4.1$'$}$$

式中右端Σ符号表示对应力点所在的几个屈服超平面取和。但实际上只要对开动的屈服超平面取和，因为不开动的屈服超平面在应力空间中不演化，对塑性应变增量无贡献。

Sanders 也讨论了在应力空间中初始屈服面为曲面的情况。曲面可以看作是无穷多个超平面的包络面。图 1-12 所示的应力空间（为说明简单起见，以二维空间为例）中初始屈服面为一光滑的曲面。O 表示应力的零点。经过加载路径 OP 以后，与初始屈服面虚线部分相切的超平面都被应力点所牵动而平移至 P，它们全部相交于 P（用虚线表示）。PA 与

PB 是还未被牵动的两个超平面。最后当应力点到达 P 时的后继屈服面由初始屈服面的实线部分和 PA，PB 两个超平面组成。P 点为屈服面的角点，所以按照 Sanders 的理论，本来是光滑的初始屈服面，在经过塑性变形之后，可以演化为不光滑的奇异后继屈服面。

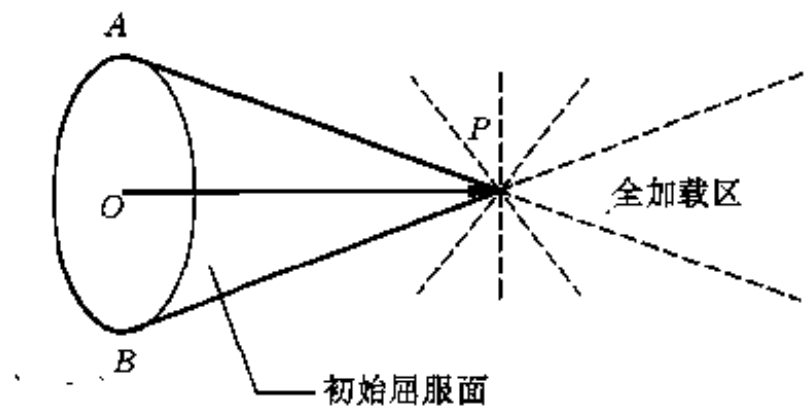


图 1-12　光滑初始屈服面演化为奇异后继屈服面

但是对于无穷多个超平面的情况，不能采用前面的把无穷多个超平面开动所对应的塑性应变增量简单地相加的办法，而必须引进无穷多个超平面的某种分布函数。例如，取 ω 为在应力空间中表示初始屈服面法线方向的变量，$\delta\omega$ 表示立体角。其法线在立体角 $\delta\omega$ 之内的屈服超平面开动所造成的塑性应变增量为

$$\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}})=\begin{cases} g(f,\omega)\mu_{ij}\mathrm{d}f\delta\omega & 当\mathrm{d}f>0 \\ 0 & 当\mathrm{d}f\leqslant 0 \end{cases}$$

式中 $\partial f/\partial\sigma_{ij}$ 已记作 μ_{ij}，显然 μ_{ij} 依赖于 ω。因此，把所有开动的屈服超平面对塑性应变增量的贡献加起来，得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=\int_{\omega(\mathrm{d}f>0)} g\,(f,\omega)\mu_{ij}\mathrm{d}f\,\delta\omega$$

因此

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=\int_{\omega}\bar{g}(f,\omega)\mu_{ij}\delta\omega\ .$$

式中

$$\bar{g}(f,\omega)=\int g(f,\omega)\mathrm{d}f$$

对于一定法线方向的屈服超平面（ω 一定），上式右端只在该超平面开动的过程（$\mathrm{d}f>0$）进行积分。

例　设材料的初始屈服条件为

$$\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=3J_2(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_{\mathrm{eq}}^2=\sigma_{\mathrm{s}}^2$$

在偏应力 σ'_{ij} 空间中，初始屈服面可以用一个半径为 $\sqrt{2/3}\sigma_{\mathrm{s}}$ 的球面表示。这个球面可以看

作是无穷多个与之相切的超平面的包络面（图 1-13）。设在偏应力空间中加载路径为 OP，则后继屈服面为图中用实线表示的球底锥面。

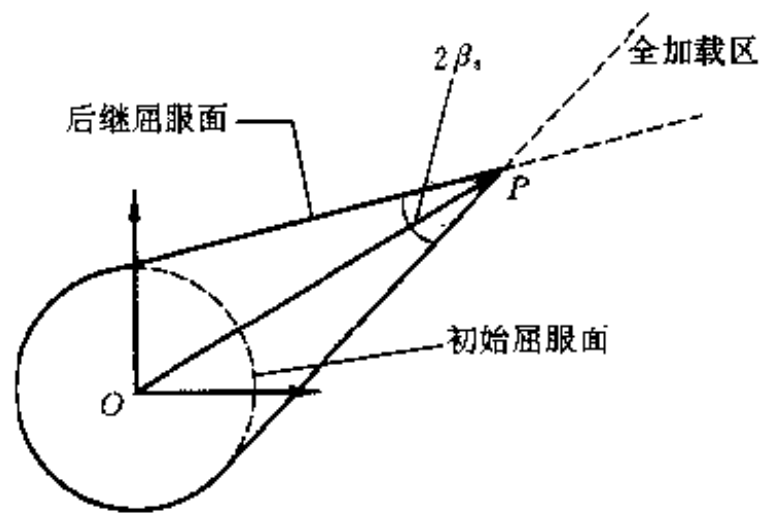
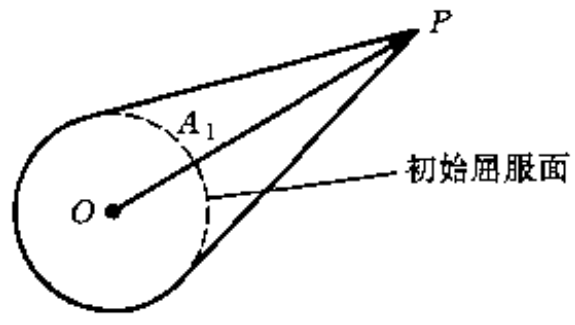


图 1-13　满足 Mises 初始屈服条件的后继屈服面

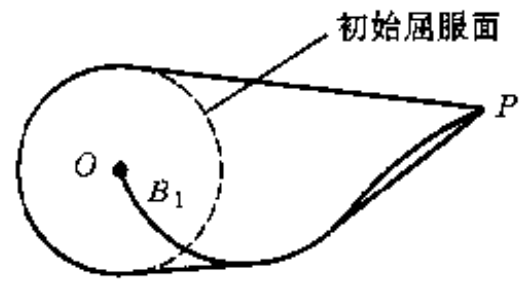
以 $2\beta_s$ 表示在 P 点的锥顶角，也就是全加载区的锥角。显然，因 $OP=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{eq}$，

$$\sin\beta_s=\frac{\sigma_s}{\sigma_{eq}}$$

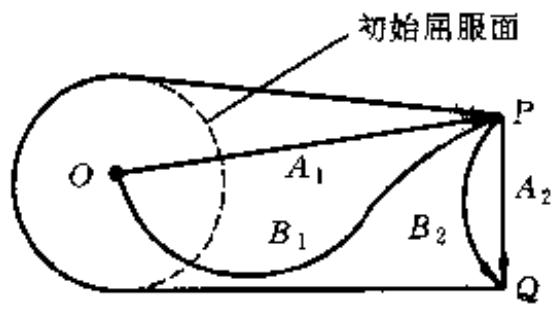
容易证明，所有导致相同后继屈服面的加载路径，其塑性应变也相同。以图 1-14 为例，图(a)与(b)表示两个不同的加载路径 A_1 与 B_1 所导致的不同的后继屈服面。因此，加载路径 A_1 与加载路径 B_1 所造成的塑性应变是不同的。但是，如图(c)所示，加载路径 A_1+A_2 与加



(a) 加载路径 A_1 所导致的后继屈服面



(b) 加载路径 B_1 所导致的后继屈服面



(c) 加载路径 A_1+A_2 与 B_1+B_2 所导致相同的后继屈服面

图 1-14　不同的加载路径导致不同的后继屈服面

载路径 B_1+B_2 所导致的后继屈服面相同，因此它们所造成的塑性应变也是相同的。

当应力点$\boldsymbol{\sigma}$在屈服面上的 P 点时，全加载区是指这样一个区域：若应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 从 P 点指向全加载区时，相交于 P 的所有的屈服超平面都开动。例见图 1-11 与图 1-12。

如果有一个加载路径，在该路径上的每一时刻，应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 均指向该时刻的全加载区，则称该加载路径为全加载路径。比例加载就是全加载路径的一个例子。对于奇异屈服面，除了比例加载外，还有许多其他的路径也属于全加载路径。从应力空间中的零点 O ($\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$) 到同一 P 点的两个不同的全加载路径，必导致相同的后继屈服面，因而造成相同的塑性应变。

Sanders 证明(1952)：假定材料为各向同性，初始屈服面满足 Mises 屈服条件，屈服函数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 只依赖于应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$，则全加载路径所造成的塑性应变服从 J_2 形变理论。

证明如下：初始屈服面是在偏应力空间中以应力零点 O 为球心，半径为 $\sqrt{2/3}\sigma_s$ 的球面($(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{1/2}=\sqrt{2/3}\sigma_s$)。设从应力零点 O 至 P 有一全加载路径 OP_n。则到达 P 点时的后继屈服面与经过比例加载，即直线加载路径 $\overline{OP}$ 到达 P 点时的后继屈服面相同。因此到达 P 点时的塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 也相同。设 P 点的偏应力为 $\boldsymbol{\sigma}'$，则塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 必为 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的函数，依赖于 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的方向和大小 $\left(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right)^{1/2}=\sqrt{2/3}\sigma_{\mathrm{eq}}$。

由于整个问题中只体现了一个直线加载路径 $\overline{OP}$ 的方向，也就是 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的方向。$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的方向[1]必平行于 $\boldsymbol{\sigma}'$，大小为 σ_{eq} 的函数，故可记

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\eta(\sigma_{\mathrm{eq}})\boldsymbol{\sigma}'$$

上式恰好就是 J_2 形变理论的出发点(3.6)式。由此可导出 J_2 形变理论的本构关系。因此，J_2 形变理论适用于包含比例加载情况在内的任何全加载路径。

晶体的塑性变形来自于滑移系的滑移。每个滑移系的开动条件可用应力空间中的超平面表示。晶体的屈服面由它的所有滑移系的屈服超平面组成。但与 Sanders 塑性理论不同，晶体的各滑移系屈服超平面的演化不是相互独立的。每个滑移系的硬化（自身硬化）按一定的规律带动其他滑移系的硬化（潜在硬化）。换句话说，在应力空间中每个屈服超平面的移动带动其他超平面移动。在 Sanders 理论中，没有这种潜在硬化。

1.4.2 Koiter 理论

按 Koiter 理论，塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的表示分为两种情况：

(1) 理想塑性材料

---

1) 因 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 只依赖于应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$，而与 $J_1(\boldsymbol{\sigma})$ 无关，由习题 1.5，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，因而 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 必为偏量。

设屈服条件为

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\sigma_{ij}) = \text{const} \tag{4.3}$$

式中 $f(\sigma_{ij})$ 为屈服函数，具有连续偏导数 $\partial f/\partial\sigma_{ij}$，const 为一不变的常数。由正交法则(1.10)式

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}{}^{p} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4.4}$$

式中

$$\begin{aligned} &\lambda \geqslant 0 && \text{当 } f(\sigma_{ij}) = \text{const} \ \text{且 } \dot{f} = 0 \\ &\lambda = 0 && \text{当 } f(\sigma_{ij}) = \text{const} \ \text{且 } \dot{f} < 0 \\ & && \text{或 } f(\sigma_{ij}) < \text{const} \end{aligned} \tag{4.5}$$

在(4.5)第一式的情况下，λ 值不能由本构关系求出。

若材料的屈服面由有限个光滑的曲面组成，每个光滑屈服面的屈服函数为 $f_\alpha(\sigma_{ij})$，则塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$ 为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \sum_{\alpha}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}{}^{p} = \sum_{\alpha}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4.6}$$

式中下标α表示第α个屈服面，λ_α 为相应的塑性流动因子。以 $f_\alpha(\sigma_{ij}) = C_\alpha$ 表示第α个屈服条件。

$$\begin{aligned} &\lambda_\alpha \geqslant 0 && \text{当 } f_\alpha(\sigma_{ij}) = C_\alpha, \ \dot{f}_\alpha = 0 \\ &\lambda_\alpha = 0 && \text{当 } f_\alpha(\sigma_{ij}) = C_\alpha, \ \dot{f}_\alpha < 0 \\ & && \text{或 } f_\alpha(\sigma_{ij}) < C_\alpha \end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.7)式的第一行相当于屈服曲面开动。因此，(4.6)式右端只要对“开动”的屈服面取和。对于理想塑性材料，在(4.7)第一式的情况下，塑性流动因子 λ_α 不能由本构关系求出。

(2) 硬化材料

设屈服条件为

$$f(\sigma_{ij}) = \text{const} \quad (\text{可变常数})$$

式中右端为可变常数，其值随着塑性变形的发展而变化，相应的屈服面在应力空间中平移（演化）。类似于 Sanders 理论的(4.1)式，除以 dt 后，塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$ 可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{c}{h}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{f},\qquad \dot{\varepsilon}_{ij}{}^{\mathrm{p}}=\frac{c}{h}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{f} \tag{4.8}$$

式中 $\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，$h$ 可称为塑性硬化系数，$h>0$

$$c=\begin{cases}1 & \text{当}f(\sigma_{ij})=\text{const(当前值)},\text{且}\dot{f}>0\\ 2 & \text{当}f(\sigma_{ij})=\text{const(当前值)},\text{且}\dot{f}\leqslant 0\\ & \text{或}f(\sigma_{ij})<\text{const(当前值)}\end{cases} \tag{4.9}$$

式中 const（当前值）表示随塑性变形过程单调递增的值，卸载（c=0）时其值不变。c=1 的情况称为屈服面开动。注意 Koiter 理论的(4.8)式实际上就是 Sanders 理论的(4.1)式；(4.8)式中的 $1/h$ 相当于(4.1)中的 $g(f)$。但是 Koiter 没有讨论 h 的演化规律，所以 Koiter 理论不是一个完整的塑性本构理论。它只限于已知当前状态时（故 f 与 h 为已知）应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 与塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 之间关系的讨论。一般说来，h 依赖于应力或应变的历史。对于率相关材料（rate dependent material），h 还依赖于应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$。对于率无关材料，$h$ 与应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 无关，或只能是应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的零次齐次函数（即只依赖于应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的方向，而不依赖于其大小）。取 $\boldsymbol{n}$ 为沿屈服面外向法线的单位张量（见(1.12)）：

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}}{|\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}|} \tag{4.10}$$

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|\boldsymbol{n}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

故(4.8)可写作

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{c}{H}\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{nn} \tag{4.8$'$}$$

式中

$$H=\frac{h}{|\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}|^2}$$

若屈服面由有限个光滑的曲面组成，则塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha}\frac{c_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{f}_\alpha,\qquad \dot{\varepsilon}_{ij}{}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha}\frac{c_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}\dot{f}_\alpha \tag{4.11}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}}{H_{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{n}_{\alpha} \boldsymbol{n}_{\alpha}, \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}{}^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}}{H_{\alpha}} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{n}_{\alpha})(\boldsymbol{n}_{\alpha})_{ij} \tag{4.11$'$}$$

式中 h_{α} 为第α个屈服曲面的塑性硬化系数，$h_{\alpha}>0$，

$$H_{\alpha} = \frac{h_{\alpha}}{\left|\dfrac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|^{2}}$$

c_{α} 为第α个屈服曲面的加载系数，

$$c_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{当} f_{\alpha}(\sigma_{ij}) = \text{const(当前值)}, \text{且} \dot{f}_{\alpha} > 0 \\ 0 & \text{当} f_{\alpha}(\sigma_{ij}) = \text{const(当前值)}, \text{且} \dot{f}_{\alpha} \leqslant 0 \\ & \text{或} f_{\alpha}(\sigma_{ij}) < \text{const(当前值)} \end{cases} \tag{4.9$'$}$$

$c_{\alpha}=1$ 表示第α个屈服曲面开动。因此(4.11)或(4.11)′右端可只对开动的屈服面取和。

可以把(4.11)′式写成如下的形式：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.12}$$

式中 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$ 为塑性柔度张量

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}}{h_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}}{H_{\alpha}} \boldsymbol{n}_{\alpha} \boldsymbol{n}_{\alpha} \tag{4.13}$$

应该指出，对于率无关材料，当应力$\boldsymbol{\sigma}$在应力空间中屈服面的角点，即同时在几个屈服曲面上时，即使是各个屈服曲面的塑性硬化系数h_{α}(因而H_{α})都与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$无关，塑性柔度张量$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$仍然与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的方向有关，因为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的方向不同，开动的屈服曲面可能不同。因此，对于率无关材料，只能说，$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$是应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的零次齐次函数,而不能说$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$无关。

1. 本构关系

把上面所述的塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$(4.6)或(4.11)与弹性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$相加，可得 Koiter 理论的本构关系。

对于理想塑性材料

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{4.14}$$

式中右端两部分为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} = \mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda_{\alpha}\text{服从(4.7)式}$$

对于硬化材料

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}}{h_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{f}_{\alpha} \tag{4.15}$$

式中右端两部分为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} = \mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}}{h_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{f}_{\alpha} \quad c_{\alpha}\text{服从(4.9)}'\text{式}$$

设当前应力点$\boldsymbol{\sigma}$同时在几个屈服曲面上。对于理想塑性材料，给定应力率[1] $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，可计算应力点$\boldsymbol{\sigma}$所在的每个屈服曲面的$\dot{f}_{\alpha} = (\partial f_{\alpha}/\partial \boldsymbol{\sigma}):\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，由(4.7)可确定哪些屈服曲面开动。对于开动的屈服曲面λ_{α}为正或为零，但其值不可定。因此给定应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，不可能由本构关系(4.14)唯一地确定应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$。但对于硬化材料，给定应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，由(4.9)′可确定哪些屈服面开动，同时由本构关系(4.15)可以唯一地确定应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$。

2. 逆本构关系

设当前应力点同时在几个屈服曲面上。给定应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，欲求应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$使能满足本构关系(4.14)或(4.15)。这种$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$依赖于$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$的关系称为逆本构关系，例如(1.31)就是经典弹塑性理论的逆本构关系，它是本构关系(1.29)之逆。虽然 Koiter 本构关系(4.14)或(4.15)的逆难以用显式表达，但可以证明逆本构关系存在，即任意给定$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，Koiter 证明，必有唯一的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$存在，使(4.14)或(4.15)满足。我们先来证明$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的唯一性，然后证明$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的存在性。

唯一性证明：

对于给定的应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，假定应力率有(1)与(2)两个解，即有两个应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}$与$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$都满足(4.14)或(4.15)，欲证明$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}$必等于$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$。把对应的两个本构关系式相减，得

$$\mathbf{0} = \mathscr{M}:(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}) + (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(1)} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(2)})$$

---

1) 对于理想塑性材料，从屈服面上的应力点$\boldsymbol{\sigma}$出发，应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$（或$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}/\mathrm{d}t$）只可能指向屈服面之内（弹性区）或相切于屈服面，不可能指向屈服面之外。

由上式，用 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$ 双点乘，得

$$0=(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}):\mathscr{M}:(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)})+(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}):(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(1)}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(2)}) \qquad ①$$

因 $\mathscr{M}$ 为恒正，故①式右端第一项为恒正，即只当 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}=\mathbf{0}$ 时才为零。可以证明①式右端第二项是非负的。这可以区别以下两种情况加以证明。

对于理想塑性材料,根据屈服面的外凸性（见节 1.6 塑性基本假设）可以证明

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(1)}=0, \qquad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(2)}=0$$
$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(2)}\leqslant 0, \qquad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(1)}\leqslant 0$$

因此①式右端第二项

$$(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}):(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(1)}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(2)})\geqslant 0$$

于是，①式右端第一项恒正的应变能必为零，故

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$$

这就证明了应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的唯一性。因此 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}=\mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 也唯一，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$ 因而也唯一。但是，无法保证(4.14)中的塑性流动因子 λ_α 的唯一性，即解的开动屈服曲面集合可有 $A^{(1)}$ 或 $A^{(2)}$ 之不同

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha\in A^{(1)}}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\sum_{\alpha\in A^{(2)}}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\boldsymbol{\sigma}}$$

这种 λ_α 的不唯一性可能发生在同时开动的屈服曲面函数不线性独立的情况。

对于硬化材料，利用(4.15)可将①式右端第二项化为以下形式：

$$\begin{aligned}
&\left(\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}-\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}\right)\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}(1)}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}(2)}\right)\\
&=\left(\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}-\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}\right)\left(\sum_{\alpha\in A^{(1)}}\frac{c_\alpha^{(1)}}{h_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_{ij}}\dot{f}_\alpha^{(1)}-\sum_{\alpha\in A^{(2)}}\frac{c_\alpha^{(2)}}{h_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_{ij}}\dot{f}_\alpha^{(2)}\right)\\
&=\sum_{\alpha\in A^{(1)}}\frac{c_\alpha^{(1)}}{h_\alpha}\left(\dot{f}_\alpha^{(1)}-\dot{f}_\alpha^{(2)}\right)\dot{f}_\alpha^{(1)}+\sum_{\alpha\in A^{(2)}}\frac{c_\alpha^{(2)}}{h_\alpha}\left(\dot{f}_\alpha^{(2)}-\dot{f}_\alpha^{(1)}\right)\dot{f}_\alpha^{(2)}\\
&=\sum_{\alpha}\frac{1}{h_\alpha}\left[c_\alpha^{(1)}\dot{f}_\alpha^{(1)2}+c_\alpha^{(2)}\dot{f}_\alpha^{(2)2}-\left(c_\alpha^{(1)}+c_\alpha^{(2)}\right)\dot{f}_\alpha^{(1)}\dot{f}_\alpha^{(2)}\right]\geqslant 0
\end{aligned} \qquad ②$$

式中 $A^{(1)}$ 与 $A^{(2)}$ 各表示应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 解(1)与解(2)的开动屈服面集合，最后一行的 $\sum_{\alpha}$ 对当前应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 所在的全部屈服曲面取和。不论第 α 屈服曲面是否属于 $A^{(1)}$ 或 $A^{(2)}$，均可证明②式右端为非负。因此①式右端的第二项为非负，第一项必为零，故

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$$

这证明了应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的唯一性。因此 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} = \mathscr{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 与 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}$ 都唯一。由 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 可以唯一地由 (4.9)′ 确定加载系数 c_{α}，因此开动的屈服曲面集合也唯一，$A^{(1)} = A^{(2)}$。

因此无论是理想塑性材料或是硬化材料，给定 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，如果满足本构关系(4.14)或(4.15)的解 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 存在的话，解必唯一。唯一性证毕。

存在性证明：

设当前应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 同时在几个屈服曲面上。分以下两种情况：

对于理想塑性材料，给定 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，满足本构关系(4.14)的解 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 乃是下列代数极值问题($\dot{\varepsilon}_{ij}$ 给定)

$$\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathscr{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\mathscr{M}_{ijkl}\dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \min \qquad ③$$

在下列约束条件下之解：对当前应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 所在的所有屈服曲面 α[1)]

$$\dot{f}_{\alpha} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} \leqslant 0 \qquad ④$$

由于弹性柔度张量 $\mathscr{M}_{ijkl}$ 为正定，上述极值问题的解一定存在。现在证明上述极值问题的解 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{*}$ 恰好满足本构关系(4.14)，因此它就是欲求的解。以 $\Delta\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 表示任意 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 与解 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{*}$ 之差：

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{*}, \qquad \Delta\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}^{*}_{ij}$$

由于表达式③在 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{*}$ 处为极小

$$\frac{1}{2}\mathscr{M}_{ijhk}\dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{hk} - \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \geqslant \frac{1}{2}\mathscr{M}_{ijhk}\dot{\sigma}^{*}_{ij}\dot{\sigma}^{*}_{hk} - \dot{\sigma}^{*}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$$

故有不等式(利用 $\mathscr{M}_{ijhk}$ 的 Voigt 对称性)

$$\frac{1}{2}\mathscr{M}_{ijhk}\Delta\dot{\sigma}_{ij}\Delta\dot{\sigma}_{hk} + \mathscr{M}_{ijhk}\dot{\sigma}^{*}_{hk}\Delta\dot{\sigma}_{ij} - \Delta\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \geqslant 0 \qquad ⑤$$

---

1) 不失一般性，可设在当前应力点 $\boldsymbol{\sigma}$，各 $\partial f_{\alpha}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 为线性独立。

⑤式中$\Delta\dot{\sigma}_{ij}$ 应满足的约束条件可由④式定出

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}\Delta\dot{\sigma}_{ij} \leqslant -\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}^*_{ij} = -\dot{f}^*_\alpha$$

式中最右端的等式为$\dot{f}^*_\alpha$的定义式。因此对于$\dot{f}^*_\alpha<0$的屈服曲面α，以上不等式对$\Delta\dot{\sigma}_{ij}$无约束（当$\Delta\dot{\sigma}_{ij}$足够小）；而对于$\dot{f}^*_\alpha=0$的屈服曲面α，对$\Delta\dot{\sigma}_{ij}$的约束条件为

$$\dot{f}_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\Delta\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}\Delta\dot{\sigma}_{ij} \leqslant 0 \qquad ④'$$

不等式⑤的第一项为$\Delta\dot{\sigma}_{ij}$的二次式，因此只要$\Delta\dot{\sigma}_{ij}$足够小，⑤式左端的符号取决于第二和第三项，故要求

$$(\mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}):\Delta\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathscr{M}_{ijhk}\dot{\sigma}^*_{hk} - \dot{\varepsilon}_{ij})\Delta\dot{\sigma}_{ij} \geqslant 0 \qquad ⑥$$

不等式⑥要求对满足约束条件④'的一切$\Delta\dot{\boldsymbol{\sigma}}$成立，故必有

$$\mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad ⑦$$

式中

$$\lambda_\alpha \geqslant 0 \qquad 当\ \dot{f}^*_\alpha = 0$$

$$\lambda_\alpha = 0 \qquad 当\ \dot{f}^*_\alpha < 0$$

⑦式说明对于给定的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$满足本构关系(4.14)。对于理想塑性材料，当给定$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$时，$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的存在性证毕。

对于硬化材料，给定$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，用类似的方法可以证明满足本构关系(4.15)的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$乃是下列代数极值问题（$\dot{\varepsilon}_{ij}$给定）的解。

$$\frac{1}{2}\mathscr{M}_{ijhk}\dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{hk} + \frac{1}{4}\sum_\alpha \frac{1}{h_\alpha}\dot{f}_\alpha\left(\dot{f}_\alpha + \left|\dot{f}_\alpha\right|\right) - \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \min \qquad ⑧$$

式中$\sum_\alpha$对当前应力点所在的全部屈服曲面取和，即对$f_\alpha(\sigma_{ij}) = \text{const}$（当前值）的所有的$\alpha$取和。

$$\dot{f}_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}$$

由于⑧式中左端第二项的因子$(\dot{f}_\alpha + |\dot{f}_\alpha|)$的存在，使得第二项$\sum_\alpha$的取和实际上只包括开动的屈服曲面（$\dot{f}_\alpha > 0,\ \dot{f}_\alpha + |\dot{f}_\alpha| = 2\dot{f}_\alpha$），因为对于应力点虽在其上但不开动的屈服面，$\dot{f}_\alpha \leqslant 0, \dot{f}_\alpha + |\dot{f}_\alpha| = 0$。令$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$为上述代数极值问题的解，可以证明$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$必满足下列方程

$$\mathscr{M}_{ijhk}\dot{\sigma}^*_{hk} + \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{1}{h_\alpha}\left(\dot{f}^*_\alpha + |\dot{f}^*_\alpha|\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} - \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \qquad ⑨$$

式中$\sum_\alpha$对当前应力点所在的全部屈服曲面取和。

$$\dot{f}^*_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}^*_{ij} \qquad ⑩$$

⑨与⑩式恰好等同于本构关系(4.15)与(4.9)′。因此，上述代数极值的解$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$也就是当$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$给定时，逆本构关系的解。于是硬化材料逆本构关系解的存在性证毕。

1.5 Tresca 流动理论（混合硬化）

设材料的初始屈服服从最大剪应力条件

$$Q(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_s = 2k \qquad (5.1)$$

式中σ_s为拉伸屈服限，k为剪切屈服限，$Q(\sigma)$为最大剪应力的两倍，其值依赖于应力张量$\boldsymbol{\sigma}$。如同在J_2流动理论中采用 Mises 等效应力$\boldsymbol{\sigma}_{eq}$一样，$Q(\boldsymbol{\sigma})$可以看作是 Tresca 流动理论的等效应力，简称 Tresca 等效应力。$Q(\boldsymbol{\sigma})$通过应力分量的一般表达式比较复杂，但通过$\boldsymbol{\sigma}$的主应力分量σ_1，σ_2，σ_3表示却很简单。如果规定$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，则

$$Q(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_3 \qquad (5.2)$$

在一般情况（不作上述主应力排序规定），则有

$$Q(\boldsymbol{\sigma})=\max\{|\sigma_1-\sigma_2|,|\sigma_2-\sigma_3|,|\sigma_3-\sigma_1|\} \tag{5.3}$$

实际上$Q(\boldsymbol{\sigma})$只取决于偏应力$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\sigma}'$，(5.3)式可写作

$$\left[Q^2-(s_1-s_2)^2\right]\left[Q^2-(s_2-s_3)^2\right]\left[Q^2-(s_3-s_1)^2\right]=0 \tag{5.4}$$

以J_2，J_3表示应力偏量$\boldsymbol{s}$的不变量

$$J_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2+s_3^2)$$

$$J_3=\det\boldsymbol{s}=\det[s_{ij}]=\begin{vmatrix}s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{vmatrix}=s_1s_2s_3$$

则(5.4)式可表示成

$$Q^6-6J_2Q^4+9J_2^2Q^2-(4J_2^3-27J_3^2)=0 \tag{5.4$'$}$$

由此式定出Q为依赖于应力不变量J_2与J_3的隐函数：

$$Q=f(J_2,\ J_3) \tag{5.3$'$}$$

(5.3)′式就是Q依赖于应力$\boldsymbol{\sigma}$的一般表达式，它比Q通过主应力分量的表达式(5.3)要复杂得多。正因为如此，Tresca 流动理论一般只用于材料应力的主方向在整个加载过程中保持不变的情况(例如在内压作用下的厚壁筒这一轴对称问题)。本节只限于讨论应力主方向不变的这一情况，此时三个主应力方向以 1，2，3 表示，应力$\boldsymbol{\sigma}$只需要用三个主应力分量$\sigma_1(=\sigma_{11})$，$\sigma_2(=\sigma_{22})$，$\sigma_3(=\sigma_{33})$来描述，或$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$。写成张量形式，则有

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\sigma_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\sigma_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \qquad ①$$

式中$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$表示沿主应力方向的单位矢量，它们都是大小为 1、方向不变的矢量。取上式的微分，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{d}\sigma_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\mathrm{d}\sigma_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\mathrm{d}\sigma_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \qquad ②$$

屈服函数$f(\boldsymbol{\sigma})$对$\boldsymbol{\sigma}$的导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial f}{\partial \sigma_3}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \qquad ③$$

故

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\mathrm{d}\sigma_1+\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\mathrm{d}\sigma_2+\frac{\partial f}{\partial \sigma_3}\mathrm{d}\sigma_3 \qquad ④$$

注意②，③，④式都只适用于主应力方向不变的情况。一般情况下，如果主应力方向改变，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$不是恒矢量，②，③，④式不成立，此时必须采用沿坐标轴方向的单位向量$\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$,而得到

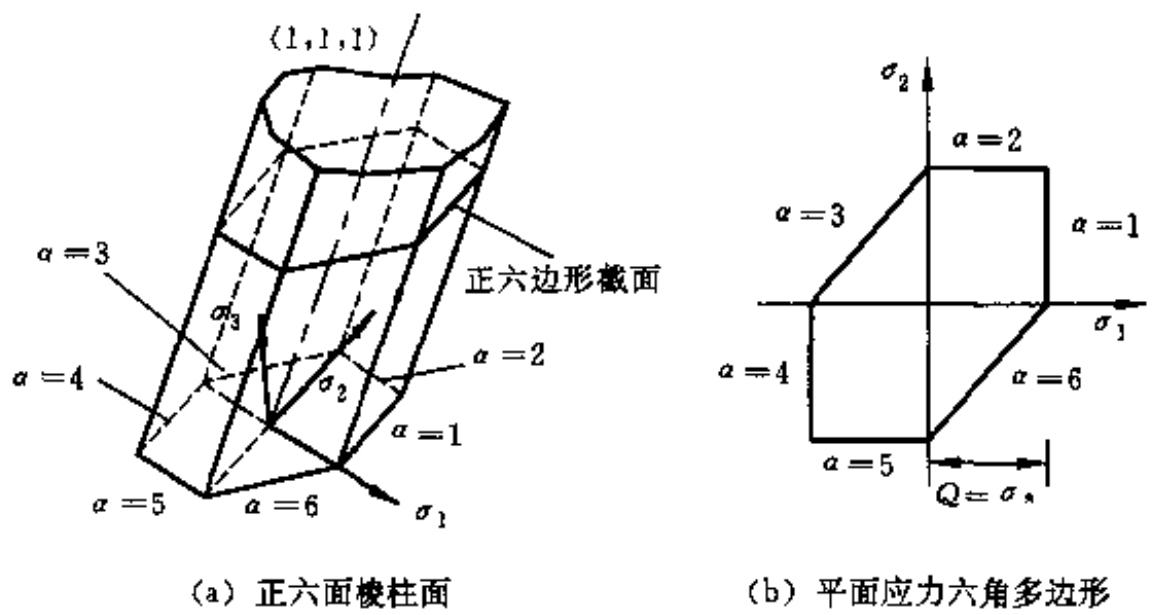
$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{d}\sigma_{kl}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_l,\qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_l$$

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\mathrm{d}\sigma_{kl}$$

假设主应力方向不变。初始屈服条件 (5.1) 可以表示为下列 6 个条件的集合

$$\begin{aligned}&f_1(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s,\quad f_2(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_2-\sigma_3=\sigma_s,\quad f_3(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_2-\sigma_1=\sigma_s\\&f_4(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_3-\sigma_1=\sigma_s,\quad f_5(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_3-\sigma_2=\sigma_s,\quad f_6(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_1-\sigma_2=\sigma_s\end{aligned} \qquad (5.5)$$

初始屈服面在主应力空间(σ_1，σ_2，σ_3)中为一正六面棱柱面，见图 1-15(a)．柱轴通过应力零点，方向为(1,1,1)，见图中点划线。在平面应力情况（设σ_3=0），这个棱柱面与σ_3=0 平面的交线为(σ_1，σ_2)平面上的六角多边形．见图 1-15(b)。



(a) 正六面棱柱面　　(b) 平面应力六角多边形

图 1-15　Tresca 初始屈服曲面

初始屈服条件(5.5)中有 6 个屈服函数f_α，α =1,2,…,6。给定应力为σ_1，σ_2，σ_3，应

力点在哪一个屈服平面上，取决于在 6 个屈服函数中哪一个代数值最大，而 Tresca 等效应力 $Q(\boldsymbol{\sigma})$ 的(5.3)式可写作

$$Q(\boldsymbol{\sigma})=\max_{1\leqslant\alpha\leqslant6} f_\alpha(\boldsymbol{\sigma})=\max_{1\leqslant\alpha\leqslant6} f_\alpha(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$$

当材料开始屈服以后，随着塑性变形的发展，在主应力空间中的屈服面不断演化。假定后继屈服面不断地胀大与平移，仍然保持为正六面棱柱面。柱轴通过背应力 $\boldsymbol{b}(b_1,b_2,b_3)$ 点且平行于(1,1,1)方向，引入 Tresca 等效主动应力 $Q(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})$，其定义如下

$$Q(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})=\max_{1\leqslant\alpha\leqslant6} f_\alpha(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})=\max_{1\leqslant\alpha\leqslant6} f_\alpha(\sigma_1-b_1,\sigma_2-b_2,\sigma_3-b_3) \tag{5.6}$$

式中 6 个屈服函数 f_α 已在(5.5)式定义。显然 $Q(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})$ 只取决于应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 与背应力偏量 $\boldsymbol{b}'$。第 α 个屈服面（称为 f_α 面）的法线方向平行于 $\partial f_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma}$，后者可记作 $(\partial f_\alpha/\partial\sigma_1,\partial f_\alpha/\partial\sigma_2,\partial f_\alpha/\partial\sigma_3)$。以 $\boldsymbol{n}_\alpha$ 表示 f_α 面的单位法向张量，故

$$\boldsymbol{n}_\alpha=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_3}\right)^2}}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_1},\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_2},\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_3}\right) \tag{5.7}$$

例如

$$\frac{\partial f_1}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=(1,0,-1)$$

$$\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

由于 $f_\alpha(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})$ 为 $\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}$ 的线性函数，故 $\partial f_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 为常张量，可写

$$\begin{aligned}f_\alpha(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})&=\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})\\&=\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_1}(\sigma_1-b_1)+\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_2}(\sigma_2-b_2)+\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_3}(\sigma_3-b_3)\end{aligned} \tag{5.8}$$

因此 Tresca 等效主动应力的(5.6)式可写作

$$Q(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})=\max_{1\leqslant\alpha\leqslant6}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}) \tag{5.6$'$}$$

约定屈服面 α 的编号如图 1-15 所示，因此当 $\beta=\alpha\pm1$ 时，f_α 与 f_β 面为相邻的两屈服平面[1]。

1）这里约定，当 $\alpha=6$ 时，$\beta=\alpha+1=7$ 表示第 $\beta=1$ 屈服平面，而当 $\alpha=1$ 时，$\beta=\alpha-1=0$ 表示第 $\beta=6$ 屈服平面，即约定指标 α 的周期为 6。

易证以下的性质

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_i}\right)^2=2,\ \alpha=1,2,\cdots,6 \tag{5.9}$$

即

$$\left|\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|=\sqrt{2}$$

若 f_α 面与 f_β 面为相邻的两屈服平面，则必有

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial \sigma_i}=1,\quad \beta=\alpha\pm1,\qquad \alpha,\ \beta=1,2,\cdots,6 \tag{5.10}$$

故由式(5.9)与(5.10)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}-\frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_i}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_i}-\frac{\partial f_\beta}{\partial \sigma_i}\right)=1,\ \beta=\alpha\pm1,\qquad \alpha,\beta=1,2,\cdots,6 \tag{5.11}$$

现在我们来建立 Tresca 流动理论（混合硬化）。分两种情况讨论：

(1) 设应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 在第 α 屈服平面上，且应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的方向使 $\boldsymbol{\sigma}$ 继续保持在该屈服平面上。

按正交法则，塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 应平行于屈服平面的外向法线方向，即平行于 $\partial f_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma}$，或 $\boldsymbol{n}_\alpha$，故

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{4G_{\mathrm{F}}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{Q} \tag{5.12}$$

式中 $f_\alpha=f_\alpha(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}),Q=Q(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})$ 表示 Tresca 等效主动应力 [1]，见(5.6)，G_{F} 表示各向同性硬化剪切模量 [2]。因为 $f(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})$ 只与应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 以及背应力偏量 $\boldsymbol{b}'$ 有关，故 $\partial f_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 为偏量。因此 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 为偏量，从而 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 也为偏量，塑性变形无体积变化。(5.12)式右端含有 $\dot{Q}$ 因子，这表示塑性变形是伴随着屈服面的胀大而发生的。因此利用(5.9)可得

---

1) 注意下文中只用 Q 表示 Tresca 等效主动应力 $Q(\sigma-\boldsymbol{b})$，而 Tresca 等效应力记作 $Q(\boldsymbol{\sigma})$，不能简单地用 Q 表示，以免混淆。

2) 以 $\alpha=1$ 为例，$\partial f_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma}=(1,0,-1)$，由(5.12)式 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dot{Q}(1,0,-1)/4G_{\mathrm{F}}$，$\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}}-\dot{\varepsilon}_3^{\mathrm{p}}=\dot{Q}/2G_{\mathrm{F}}$。这里 $\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}}-\dot{\varepsilon}_3^{\mathrm{p}}$ 表示剪切角率，$Q/2=[(\sigma_1-b_1)-(\sigma_3-b_3)]/2$ 表示主动剪应力率，G_{F} 表示各向同性硬化剪切模量。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{2G_{\mathrm{F}}}\dot{Q} \tag{5.13}$$

类似于 J_2 流动理论的 Prager 假设（见式(2.27)），设背应力的变化率（背应力率）$\dot{\boldsymbol{b}}$ 与 $\boldsymbol{n}_\alpha$，因而与 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 平行，记作

$$\dot{\boldsymbol{b}}=2G_{\mathrm{b}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{5.14}$$

式中 G_{b} 表示机动硬化剪切模量 1)。在开始出现塑性变形时，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的初始值为零。因 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 为偏量，由(5.14)可知 $\dot{\boldsymbol{b}}$，因而 $\boldsymbol{b}$ 也为偏量。将(5.12)代入(5.14)，可得 $\dot{\boldsymbol{b}}$ 与 $\dot{Q}$ 的关系：

$$\dot{\boldsymbol{b}}=\frac{1}{2}\frac{G_{\mathrm{b}}}{G_{\mathrm{F}}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{Q} \tag{5.15}$$

用 Q_{F} 表示屈服面的大小，当应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 在第 α 屈服平面上时，后继屈服条件可表示为

$$Q=Q(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})=\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})=Q_F \tag{5.6''}$$

因为应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的方向使应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 继续保持在第α屈服平面，故上述屈服条件(5.6)″ 对时间的导数仍旧成立，即（因 $\partial f_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 为常张量）

$$\dot{Q}=\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:(\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\dot{\boldsymbol{b}})=\dot{Q}_{\mathrm{F}} \tag{5.16}$$

(5.16)称为一致性条件。当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 给定时，利用一致性条件 (5.16)可求出 $\dot{Q}_{\mathrm{F}}$ 如下。将(5.15) $\dot{b}$ 式代入(5.16)式并利用(5.9)，可得

$$\dot{Q}_{\mathrm{F}}=\frac{G_{\mathrm{F}}}{G_{\mathrm{p}}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{5.17}$$

式中

$$G_{\mathrm{p}}=G_{\mathrm{F}}+G_{\mathrm{b}} \tag{5.18}$$

G_{p} 为塑性剪切模量，它是各向同性硬化剪切模量 G_{F} 与机动硬化剪切模量 G_{b} 之和。由(5.17)与(5.13)，可得

---

1) 以α=1 为例，$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\,//\,(\partial f_1/\partial\boldsymbol{\sigma})=(1,0,-1)$，由(5.14)式，$\dot{b}_1=2G_{\mathrm{b}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{\mathrm{p}}$，$\dot{b}_2=0$，$\dot{b}_3=2G_{\mathrm{b}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^{\mathrm{p}}$。$(\dot{b}_1-\dot{b}_3)/2=G_{\mathrm{b}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{\mathrm{p}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^{\mathrm{p}})$：左端 $(\dot{b}_1-\dot{b}_3)/2$ 表示背剪应力率，右端 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{\mathrm{p}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^{\mathrm{p}}$ 表示剪切角率，G_{b} 表示机动硬化剪切模量。

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=G_{\mathrm{p}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$$

由上式可看出 G_{p} 的意义，它等于剪应力率（上式左端）与塑性剪切角率（上式右端的（$\partial f_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma}):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$）之比。将(5.17) $\dot{Q}_{\mathrm{F}}$ 代入(5.12)的 $\dot{Q}$，再代入(5.14)，可求出塑性应力率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 与背应力率 $\dot{\boldsymbol{b}}$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}&=\frac{1}{4G_{\mathrm{p}}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\\ \dot{\boldsymbol{b}}&=\frac{G_b}{2G_{\mathrm{p}}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\end{aligned}\tag{5.19}$$

引入各向同性硬化系数 c（参考 J_2 流动理论(2.46)式），其定义式为

$$\frac{G_{\mathrm{F}}}{G_{\mathrm{p}}}=c,\qquad \frac{G_{\mathrm{b}}}{G_{\mathrm{p}}}=1-c\tag{5.20}$$

故由(5.17)，$(5.19)_2$

$$\dot{Q}_{\mathrm{F}}=c\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\tag{5.17$'$}$$

$$\dot{\boldsymbol{b}}=\frac{1-c}{2}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\tag{5.19$'$}$$

(5.17)′ 式表明屈服面胀大率 $\dot{Q}_{\mathrm{F}}$ 是 Tresca 等效应力率 $\partial f_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的 c 倍。c=1 为各向同性硬化情况，而 c=0 为机动硬化情况。

(2) 设应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 在第 α 与第 $\beta=\alpha+1$ 两相邻屈服平面的交线上，且应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的方向使 $\boldsymbol{\sigma}$ 继续保持在此两屈服平面的交线上。

按连续性，塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的方向应介于两相邻屈服平面的外向法线方向之间[1]，则 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{4G_{\mathrm{F}}}\left(\mu_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}+\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\dot{Q},\qquad \mu_\alpha\geqslant 0,\ \mu_\beta\geqslant 0\tag{5.21}$$

与第(1)情况（应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 保持在第 α 屈服平面上）(5.12)相比，这里多出两个待定参数 μ_α 与

1) 根据节 1.6 的 Drucker 假设可证明这一点。

μ_β。因为应力点$\boldsymbol{\sigma}$继续保持在两个相邻屈服平面上，必须满足两个一致性条件，比前述第(1)情况（只有一个一致性条件，即(5.16)）多出一个条件。为了确定两参数μ_α与μ_β，还需要一个条件。考虑到(5.21)式与应力点$\boldsymbol{\sigma}$分别在屈服平面f_α与f_β上的本构关系（当$\boldsymbol{\sigma}$在第α屈服平面上时，$\mu_\alpha=1$，$\mu_\beta=0$；而当$\boldsymbol{\sigma}$在第β屈服平面上时，$\mu_\alpha=0$，$\mu_\beta=1$）之间应满足连续性，故设

$$\mu_\alpha+\mu_\beta=1,\ \ \mu_\alpha\geqslant 0,\ \mu_\beta\geqslant 0 \tag{5.22}$$

应该指出，在节 1.4 的 Sanders 理论与 Koiter 理论中，当应力点$\boldsymbol{\sigma}$在几个屈服平面（或曲面）的交线（或交点）时，塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$等于开动的那些屈服面的贡献的简单和(相当于这里取$\mu_\alpha=1$，$\mu_\beta=1$)。这是因为在节 1.4 的理论中，假设各屈服平面（或曲面）的演化是相互独立的，它们之间不需要满足什么约束关系。而在本节的理论中，各屈服平面的演化不是独立的，它们必须保持经过平移与胀大的正六面棱柱体的形状，因此(5.21)中的μ_α与μ_β必须服从一定的限制。

因为应力点$\boldsymbol{\sigma}$在两相邻屈服曲面的交线上，故在$\boldsymbol{\sigma}$处不存在屈服面的法线。但我们仍然假定 (5.14)式成立，即背应力率$\dot{\boldsymbol{b}}$平行于塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，比例系数为$2G_{\mathrm{b}}$。

设应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的方向使$\boldsymbol{\sigma}$继续保持在第$\alpha$与第$\beta=\alpha+1$屈服平面上，则有，类似于(5.6)″与(5.16)

$$Q=\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})=\frac{\partial f_\beta}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})=Q_{\mathrm{F}},\qquad \beta=\alpha+1 \tag{5.23}$$

$$\dot{Q}=\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\dot{\boldsymbol{b}})=\frac{\partial f_\beta}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\dot{\boldsymbol{b}})=\dot{Q}_{\mathrm{F}},\qquad \beta=\alpha+1 \tag{5.24}$$

由(5.21)，(5.22)，(5.24)与(5.14)，可解出μ_α与μ_β，$\dot{Q}$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，$\dot{\boldsymbol{b}}$。若记[1)]

$$f_\alpha^*=\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}},\qquad f_\beta^*=\frac{\partial f_\beta}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

结果可表示为

$$\mu_\alpha=\frac{2f_\alpha^*-(1+c)f_\beta^*}{(1-c)(f_\alpha^*+f_\beta^*)}$$

---

1) 注意f_α^*与f_β^*区别于$\dot{f}_\alpha=\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\sigma}-\dot{\boldsymbol{b}})$，$\dot{f}_\beta=\frac{\partial f_\beta}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:(\boldsymbol{\sigma}-\dot{\boldsymbol{b}})$。

$$\mu_\beta = 1 - \mu_\alpha = \frac{2f_\beta^* - (1+c)f_\alpha^*}{(1-c)(f_\alpha^* + f_\beta^*)} \tag{6}$$

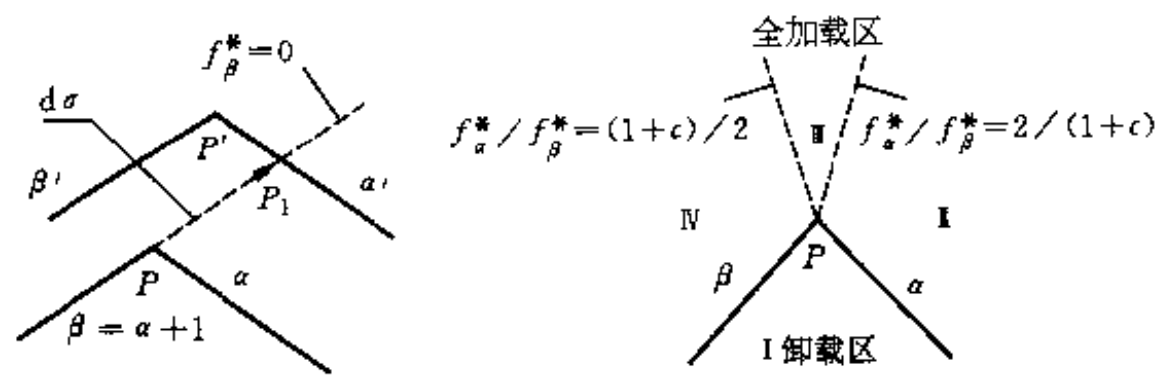
及

$$\dot{Q}_F = \frac{2c}{3+c}(f_\alpha^* + f_\beta^*) \tag{5.25}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{1}{G_p(1-c)(3+c)}\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} f_\alpha^* + \frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} f_\beta^* - \frac{1+c}{2}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} f_\beta^* + \frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} f_\alpha^*\right)\right] \tag{5.26}$$

$$\dot{\boldsymbol{b}} = \frac{2}{3+c}\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} f_\alpha^* + \frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} f_\beta^* - \frac{1+c}{2}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} f_\beta^* + \frac{\partial f_\beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} f_\alpha^*\right)\right] \tag{5.27}$$

当应力点$\boldsymbol{\sigma}$当前在两个相邻的第α与第 $\beta=\alpha+1$ 屈服平面的交线上时，它是否将继续保持在交线上，或将离开交线进入第α屈服平面或者第 $\beta=\alpha+1$ 屈服平面，或者卸载进入屈服面之内部，这取决于应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的方向。图 1-11 表示按 Sanders 或按 Koiter 理论的结果，因为相邻的两个屈服平面的演化（即平移）相互独立，故由两屈服平面与它们的延长线决定出 I，II，III，IV 区。本节所讨论的 Tresca 流动理论则不然。由于假定屈服面为同时胀大与平移的正六面棱柱，各屈服平面的平移是互相关联的，如图 1-16(a)所示，如



(a) 相邻屈服平面的演化　　(b) 交线P处分区

图 1-16　Tresca 理论交线 P 处的分区

果应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t = \overline{PP_1}$ 沿着第β屈服面的延长段，即 $f_\beta^*=0$，在第α面（简称α面）平移到α'位置的同时，由于互相关联，β面也平移至β'的位置，P' 成为两屈服平面的新交线。新应力点 P_1 不再保持在新交线上，而从原交线 P 进入α面。因此屈服平面的延长段 PP_1 不是分区的边界线。图 1-16(b)示出 P 处的四个分区 I，II，III，IV。为了确定分区的边界，可以根据连续性的要求定出 II 区与 III 区（全加载区）的边界为

$$\frac{f_\alpha^*}{f_\beta^*}=\frac{2}{1+c}\geqslant 1,\ \ f_\alpha^*>0,\ \ f_\beta^*>0$$

上式也可由⑥式令 $\mu_\beta=0$（故 $\mu_\alpha=1$）定出。IV 区与 III 区的边界为

$$\frac{f_\alpha^*}{f_\beta^*}=\frac{1+c}{2}\leqslant 1,\ \ f_\alpha^*>0,\ \ f_\beta^*>0$$

上式也可由⑤式令 $\mu_\alpha=0$（故 $\mu_\beta=1$）定出。P 处的分区情况也可以表示在图 1-17 所示的 $f_\alpha^*\sim f_\beta^*$ 平面上。令 $f_\alpha^*/f_\beta^*=\tan\theta=(1+c)/2$，由于 $1/2\leqslant(1-c)/2\leqslant 1$，故 $26.565^\circ\leqslant\theta\leqslant 45^\circ$，全加载区 III 的两条边界必位于图 1-17 上 $f_\alpha^*>0, f_\beta^*>0$ 的象限内且与 f_α^*, f_β^* 轴夹 θ 角。当 $c=1$ 时，III 区退化为一条 $\theta=45^\circ$ 的直线。$f_\alpha^*\leqslant 0, f_\beta^*\leqslant 0$ 的象限为卸载区 I。

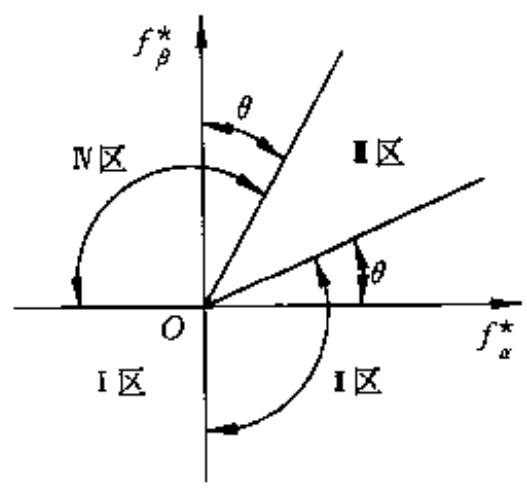


图 1-17　确定分区边界

1. 塑性变形度量与硬化律

在 J_2 流动理论中采用累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$（见式(1.15)、(1.18)）作为塑性变形的度量。现在来讨论 Tresca 流动理论中塑性变形的度量。假定应力点 P 在正六面屈服棱柱面第 α 与第 $\beta=\alpha+1$ 屈服平面的交线上，如图 1-16(b)所示。当 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t$ 从 P 指向 II 区时，P 将保持在第α面上，塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 由(5.12)给出

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{4G_{\mathrm{F}}}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dot{Q} \tag{5.12}$$

同理，当 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 从 P 指向 IV 区时，P 将保持在第 $\beta=\alpha+1$ 面上，塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{4G_{\mathrm{F}}}\frac{\partial f_\beta}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dot{Q} \tag{5.12$'$}$$

当 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 从 P 指向全加载区 III 时，P 将保持在交线上，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 由(5.21)，(5.22)给出

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{4G_{\mathrm{F}}}\left(\mu_{\alpha}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\mu_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\dot{Q} \tag{5.21}$$

$$\mu_{\alpha}+\mu_{\beta}=1,\quad \mu_{\alpha}\geqslant 0,\quad \mu_{\beta}\geqslant 0 \tag{5.22}$$

式中 μ_{α} 与 μ_{β} 取决于 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的方向，可由⑤，⑥式确定。(5.12)与 (5.12)′ 可看作是(5.21)式 $\mu_{\alpha}=1,\mu_{\beta}=0$ 与 $\mu_{\alpha}=0,\mu_{\beta}=1$ 的特例。在定义塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的大小时，根据连续性的考虑，我们应该要求上述(5.12)，(5.12)′ 与(5.21)三个式子的 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 大小相同，也就是说，不管 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是指向 II，III，IV 中的哪一区，只要 $\mathrm{d}Q=\dot{Q}\mathrm{d}t$ 相同，所造成的塑性应变增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$ 的大小也应该相同。作为塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 大小的度量，可以选择 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 沿两相邻屈服平面法线方向张量 $\partial f_{\alpha}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\partial f_{\beta}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 线性分解式系数之和的两倍作为 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的大小，记作 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}$，即

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}=\frac{1}{2G_{\mathrm{F}}}(\mu_{\alpha}+\mu_{\beta})\dot{Q}=\frac{1}{2G_{\mathrm{F}}}\dot{Q},\qquad \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}=\frac{1}{2G_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}Q \tag{5.28}$$

这个定义式既适用于当 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 指向全加载区 III，也适用于当 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 指向部分加载区 II（$\mu_{\alpha}=1,\mu_{\beta}=0$）或 IV（$\mu_{\alpha}=0,\mu_{\beta}=1$）。给定 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}$ 可以用 $\partial f_{\alpha}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 及 $\partial f_{\beta}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 的“共轭对” $\boldsymbol{a}_{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{a}_{\beta}$ 来表示

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}&=2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:(\boldsymbol{a}_{\alpha}+\boldsymbol{a}_{\beta})\\ \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}&=2\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:(\boldsymbol{a}_{\alpha}+\boldsymbol{a}_{\beta})\end{aligned} \tag{5.29}$$

式中右端的两项各表示 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 与 $\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 沿 $\partial f_{\alpha}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\partial f_{\beta}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 的线性分解式的两个系数之和的两倍。“共轭对”$\boldsymbol{a}_{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{a}_{\beta}$ 是偏斜张量，它们满足以下“共轭”关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\alpha}:\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}&=1,\qquad \boldsymbol{a}_{\alpha}:\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=0\\ \boldsymbol{a}_{\beta}:\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}&=0,\qquad \boldsymbol{a}_{\beta}:\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=1\end{aligned} \tag{⑦}$$

如图 1-18 所示，$\boldsymbol{a}_{\alpha}$ 平行于 β 面，$\boldsymbol{a}_{\beta}$ 平行于 α 面。当 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 指向部分加载区，例如II区时，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\,//\,\dfrac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$，由(5.29)，并利用(5.9)与⑦式，可得

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}=2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{a}_{\alpha}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{5.30}$$

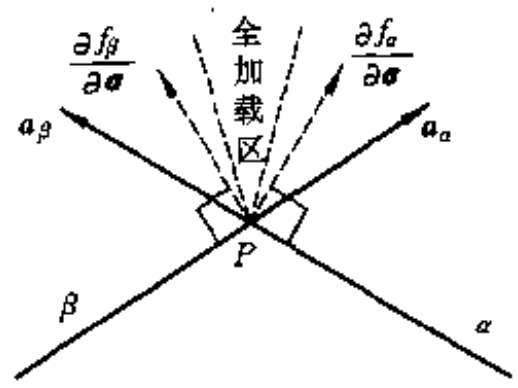


图 1-18 “共轭对” $\boldsymbol{a}_\alpha$ 与 $\boldsymbol{a}_\beta$

$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}$ 对时间的积分，即

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}} = \int_{t_0}^{t} \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}} \mathrm{d}t = \int_{\text{history}} \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}} \tag{5.31}$$

式中 t_0 表示开始出现塑性变形的时刻。$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}$ 称为 Tresca 累积塑性变形。

在 J_2 流动理论中，假定屈服曲面的大小 σ_{F} 为累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的材料函数（见(2.16)）。与此类似，这里假设屈服面的大小 Q_{F} 为 Tresca 累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}$ 的材料函数:

$$Q_{\mathrm{F}} = Q_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}})$$

因此，由(5.28)

$$G_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}})}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}} = G_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{Tr}) \tag{5.32}$$

鉴于背应力率 $\dot{\boldsymbol{b}}$ 与塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的比例关系(5.14)，既适用于当应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 保持在屈服平面上的情况，也适用于当应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 保持在两相邻屈服平面的交线上的情况，我们可以仿照 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的大小即 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}}$ 的定义(5.29)与(5.30)来定义背应力率 $\dot{\boldsymbol{b}}$ 的大小 $\dot{\bar{b}}$ ：

$$\dot{\bar{b}} = 2\dot{\boldsymbol{b}}:\boldsymbol{a}_\alpha = \dot{\boldsymbol{b}}:\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{当 } \boldsymbol{\sigma} \text{ 保持在第 } \alpha \text{ 屈服平面上} \tag{5.33}$$

$$\dot{\bar{b}} = 2\dot{\boldsymbol{b}}:(\boldsymbol{a}_\alpha + \boldsymbol{a}_\beta) \quad \text{当 } \boldsymbol{\sigma} \text{ 保持在第 } \alpha \text{ 与第 } \beta=\alpha+1 \text{ 屈服平面上} \tag{5.34}$$

取(5.14)式两端的大小，得

$$\dot{\bar{b}} = 2G_{\mathrm{b}}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{Tr}} \tag{5.35}$$

定义 $\dot{\bar{b}}$ 的积分为累积等效背应力 $\bar{b}$

$$\bar{b}=\int_{t_0}^{t}\dot{\bar{b}}\,\mathrm{d}t=\int_{\text{history}}\mathrm{d}\bar{b} \tag{5.36}$$

设$\bar{b}$ 为 Tresca 累积塑性变形$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}$的材料函数

$$\bar{b}=\bar{b}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}) \tag{5.37}$$

则由(5.35)

$$G_{\mathrm{b}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\bar{b}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}})}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}}=G_{\mathrm{b}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}) \tag{5.38}$$

因为各向同性硬化剪切模量G_{F}(5.32)与机动硬化剪切模量G_{b}(5.38)都是 Tresca 累积塑性变形$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}$的材料函数，故由(5.18)塑性剪切模量$G_{\mathrm{p}}$也是$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}$的材料函数

$$G_{\mathrm{p}}=G_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}})+G_{\mathrm{b}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}})=G_{\mathrm{p}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}) \tag{5.39}$$

一般情况下，各向同性硬化系数 c 也是$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}$的材料函数

$$c=\frac{G_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}})}{G_{\mathrm{P}}(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}})}=c(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}) \tag{5.40}$$

2. 平面应力情况

对 Tresca 流动理论，Prager（1956）曾提出平面应力的机动硬化模型，如图 1-19 所示。图中把六边形屈服面看作是一个大小不变但可平移的框架，应力点(σ_1，σ_2)看作是一个小珠。当小珠在框架内移动时只有弹性变形增量发生。当小珠向外移动时，框架被小珠带动平移。假定小珠与框架之间无摩擦。当小珠位于角点时，全加载区在两相邻屈服平面外法线夹角内，用阴影线表示。塑性应变增量（$\mathrm{d}\varepsilon_1^{\mathrm{p}},\mathrm{d}\varepsilon_2^{\mathrm{p}}$）与框架中心的移动（$\mathrm{d}b_1,\mathrm{d}b_2$）成比例。

作为平面应力情况之特例，以下对于单向拉伸情况应用上述模型。单向拉伸时应力点沿σ_1轴右移，带动框架沿 1 边（$f_1=\sigma_1-b_1=\sigma_s$）的外法线方向移动。由(5.19)，令$\alpha$=1 得

$$\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}}=\frac{1}{4G_{\mathrm{p}}}\dot{\sigma}_1,\qquad \dot{\varepsilon}_2^{\mathrm{p}}=0$$

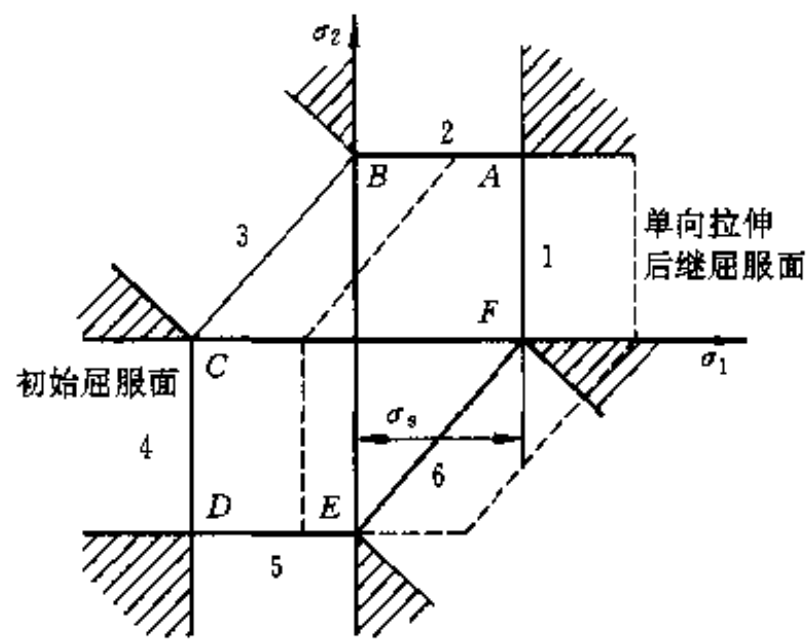


图 1-19　Prager 平面应力机动硬化模型

故

$$\dot{\varepsilon}_3^{\mathrm{p}} = -(\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}} + \dot{\varepsilon}_2^{\mathrm{p}}) = -\frac{1}{4G_{\mathrm{p}}}\dot{\sigma}_1$$

Budiansky(1957)指出，由于 $\dot{\varepsilon}_2^{\mathrm{p}} \neq \dot{\varepsilon}_3^{\mathrm{p}}$，上述结果与材料初始各向同性相矛盾，因而不合理。黄克智(1958)指出，造成这种不合理是由于平面应力状态虽然 $\sigma_3 = 0$，但 $b_3 \neq 0$，因此不能局限在二维平面应力子空间中讨论问题；同时他给出了以下平面应力问题的处理方法。

在三维主应力空间中正六面棱柱初始屈服面与 $\sigma_3 = 0$ 平面的交线形状为图 1-15(b)或图 1-20(a)所示的六边形，称为(σ_1，σ_2)平面上的初始屈服面。经过塑性变形后，在(σ_1，σ_2)平面上的后继屈服面如图 1-20 所示。六边形中心的坐标为(u_1, u_2)，六边形的大小为 Q_{F}(见(5.6)″式)。

根据图 1-16(b)的分区边界，可求出平面应力情况当应力点处于六边形角点时的全加载区，如图 1-20(b)的阴影区。对于 c=1 的各向同性硬化，图 1-20(b)中各角点处的全加载区均退缩为一条线。图 1-20 中六边形的中心($u_1, u_2, u_3 = 0$)乃是主应力空间($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)中正六面棱柱屈服面的柱轴与平面 $\sigma_3 = 0$ 的交点。(5.14)中出现的背应力率 $\dot{\boldsymbol{b}}$ 为偏量，因而柱轴与等倾平面的交点 $\boldsymbol{b}$ 亦为偏量，即 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$，演化后屈服面的轴是一根通过 $\boldsymbol{b}$ 且平行于(1,1,1)方向的线。柱轴上的任意点记作 $\boldsymbol{u}[u_1, u_2, u_3]$，用参数 s 可将 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的关系表示为

$$\boldsymbol{u}[u_1, u_2, u_3] = \boldsymbol{b}[b_1, b_2, b_3] + s[s, s, s]$$

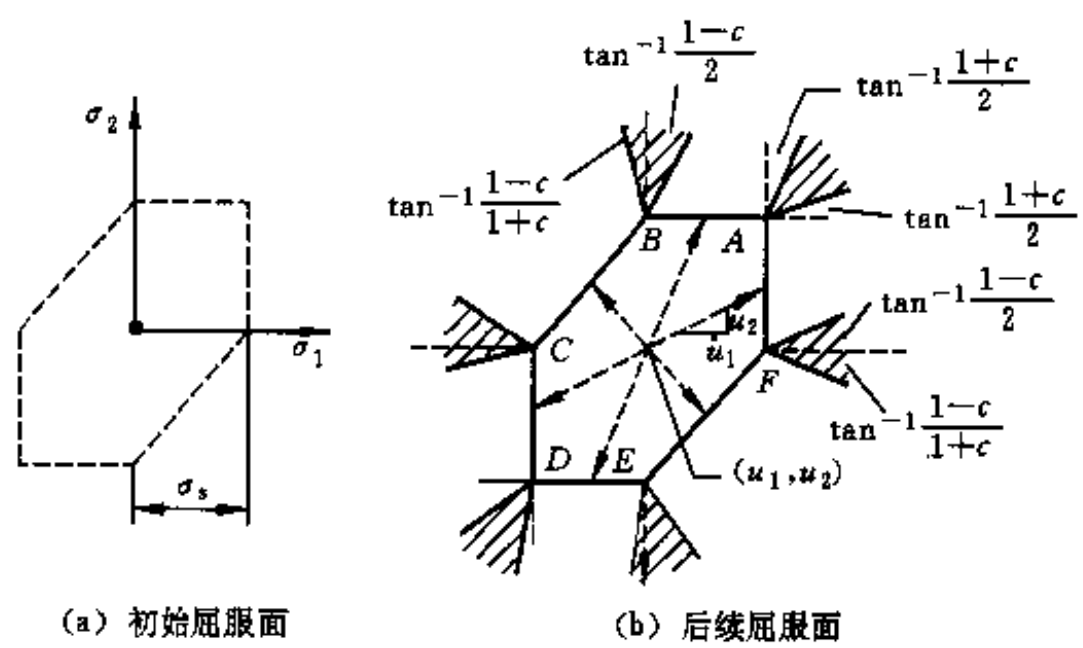
上式对时间 t 求导

$$\dot{\boldsymbol{u}}[\dot{u}_1,\dot{u}_2,\dot{u}_3]=\dot{\boldsymbol{b}}[\dot{b}_1,\dot{b}_2,\dot{b}_3]+\dot{s}[\dot{s},\dot{s},\dot{s}]$$

将(5.14)式的 $\dot{\boldsymbol{b}}$ 代入上式，令 $u_3=0$，故 $\dot{u}_3=0$，并注意 $\dot{\varepsilon}_3^{\mathrm{p}}=-(\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}}+\dot{\varepsilon}_2^{\mathrm{p}})$ 和 $(5.20)_2$ 得

$$\begin{aligned}\dot{u}_1&=4G_{\mathrm{p}}(1-c)\left(\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}}+\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_2^{\mathrm{p}}\right)\\ \dot{u}_2&=4G_{\mathrm{p}}(1-c)\left(\dot{\varepsilon}_2^{\mathrm{p}}+\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}}\right)\end{aligned}\tag{5.41}$$

(5.41)式表明虽然在主应力空间$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$中，正六面棱柱屈服面的轴是朝着应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 所在的屈服平面外法线方向平移（见(5.14)），但在平面应力子空间(σ_1,σ_2)中，屈服面的中心(u_1,u_2)并非朝着应力点所在边的外法线方向平移。图 1-20(b)中六边形中心的移动速度$(\dot{u}_1,\dot{u}_2)$是朝着应力点(σ_1,σ_2)所在边的中点，如图中虚线所示。



(a) 初始屈服面　　(b) 后续屈服面

图 1-20　Tresca 理论平面应力情况后继屈服面

作为例子，当应力点保持在图 1-20(b)的三个边 FA，AB，BC 和三个角点 F，A，B 上时，塑性应变率与应力率的关系在表 1-1 中列出。应力点在其它三个边或三个角点上的结果也可类似得到。现在来计算单向拉伸情况。设 $\sigma_2=\sigma_3=0$，在图 1-20(b)上应力点沿 σ_1 轴右移，指向 F 点的全加载区，因此保持在 F 角上。由表 1-1 得

$$\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}}=\frac{1}{E_{\mathrm{p}}}\dot{\sigma}_1,\quad \dot{\varepsilon}_2^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_3^{\mathrm{p}}=-\frac{1}{2E_{\mathrm{p}}}\dot{\sigma}_1$$

式中

表 1-1　Tresca 流动理论平面应力情况

情　况	塑性本构关系	塑性逆本构关系	屈服面胀大率 $\dot{Q}_F$
F: $\alpha=6$ $\beta=1$	$\dot{\varepsilon}_1^p=\frac{1}{G_p(3+c)}\left(\dot{\sigma}_1-\frac{1}{2}\dot{\sigma}_2\right)$ $\dot{\varepsilon}_2^p=\frac{1}{G_p(1-c)(3+c)}\left(\dot{\sigma}_2-\frac{1-c}{2}\dot{\sigma}_1\right)$	$\dot{\sigma}_1=4G_p\left(\dot{\varepsilon}_1^p+\frac{1-c}{2}\dot{\varepsilon}_2^p\right)$ $\dot{\sigma}_2=4G_p(1-c)\left(\dot{\varepsilon}_2^p+\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_1^p\right)$	$\frac{2c}{3+c}(2\dot{\sigma}_1-\dot{\sigma}_2)$
FA: $\alpha=1$	$\dot{\varepsilon}_1^p=\frac{\dot{\sigma}_1}{4G_p},\quad \dot{\varepsilon}_2^p=0$	$\dot{\sigma}_1=4G_p\dot{\varepsilon}_1^p$	$c\dot{\sigma}_1$
A: $\alpha=1$ $\beta=2$	$\dot{\varepsilon}_1^p=\frac{1}{G_p(1-c)(3+c)}\left(\dot{\sigma}_1-\frac{1+c}{2}\dot{\sigma}_2\right)$ $\dot{\varepsilon}_2^p=\frac{1}{G_p(1-c)(3+c)}\left(\dot{\sigma}_2-\frac{1+c}{2}\dot{\sigma}_2\right)$	$\dot{\sigma}_1=4G_p\left(\dot{\varepsilon}_2^p+\frac{1-c}{2}\dot{\varepsilon}_2^p\right)$ $\dot{\sigma}_2=4G_p\left(\dot{\varepsilon}_2^p+\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_1^p\right)$	$\frac{2c}{3+c}(\dot{\sigma}_1+\dot{\sigma}_2)$
AB: $\alpha=2$	$\dot{\varepsilon}_1^p=0,\quad \dot{\varepsilon}_2^p=\frac{\dot{\sigma}_2}{4G_p}$	$\dot{\sigma}_2=4G_p\dot{\varepsilon}_2^p$	$c\dot{\sigma}_2$
B: $\alpha=2$ $\beta=3$	$\dot{\varepsilon}_1^p=\frac{1}{G_p(1-c)(3+c)}\left(\dot{\sigma}_1-\frac{1-c}{2}\dot{\sigma}_2\right)$ $\dot{\varepsilon}_2^p=\frac{1}{G_p(3+c)}\left(\dot{\sigma}_1-\frac{1}{2}\dot{\sigma}_2\right)$	$\dot{\sigma}_1=4G_p(1-c)\left(\dot{\varepsilon}_1^p+\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_2^p\right)$ $\dot{\sigma}_2=4G_p\left(\dot{\varepsilon}_2^p+\frac{1-c}{2}\dot{\varepsilon}_1^p\right)$	$\frac{2c}{3+c}(2\dot{\sigma}_2-\dot{\sigma}_1)$
BC: $\alpha=3$	$\dot{\varepsilon}_2^p=\frac{1}{4G_p}(\dot{\sigma}_1-\dot{\sigma}_2)$ $\dot{\varepsilon}_2^p=\frac{1}{4G_p}(\dot{\sigma}_2-\dot{\sigma}_1)$	$\dot{\sigma}_2-\dot{\sigma}_1=4G_p\dot{\varepsilon}_2^p$	$c(\dot{\sigma}_2-\dot{\sigma}_1)$

$$E_p=G_p(3+c) \tag{5.42}$$

(5.42)式给出的是按 Tresca 流动理论，拉伸塑性模量 E_p 与剪切塑性模量 G_p 的关系[1]。

Shield 与 Ziegler（1958）假设背应力率 $\dot{\boldsymbol{b}}$ 的方向平行于主动应力 $\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b}$，即

1）由 J_2 流动理论（混合硬化）的本构关系(2.32)，(2.33)可证 E_p 与 G_p 的关系为 $E_p=3G_p$。

$$\dot{\boldsymbol{b}}=k(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{b})$$

这样一来在平面应力情况下，由于$\sigma_3\equiv 0$，由上式可知恒有$b_3=0$，因此可以在二维平面应力子空间中讨论问题。

1.6 塑性基本假设

有许多塑性本构关系中的一般性质可以从一些基本假设推导而出。这些基本假设并不像热力学定律那样是已经确证的事实，因此人们称它们是“准热力学”的。

1.6.1 Drucker 假设

Drucker(1951)假设可叙述如下：对于处在某一状态下的材料单元，借助一个外部作用，在其原有的应力状态之上，缓慢地施加并卸除一组附加应力，则在此附加应力的施加与卸除的循环内，外部作用所做的功是非负的

$$\int(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\geqslant 0 \tag{6.1}$$

式中$\boldsymbol{\sigma}^*$表示原有的应力状态，$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*$表示附加应力，积分表示应力$\boldsymbol{\sigma}$从$\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}^*$出发再回到$\boldsymbol{\sigma}_2=\boldsymbol{\sigma}^*$的应力循环过程中附加应力$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*$所做的功。

原有的应力状态$\boldsymbol{\sigma}^*$可以在屈服面之内，也可以在屈服面之上。这样的应力状态称为许可应力状态。由 Drucker 假设，即(6.1)式，可以得到以下两个推论：

(1) 设应力状态$\boldsymbol{\sigma}$在屈服面上，而$\boldsymbol{\sigma}^*$为许可应力状态，则

$$(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\geqslant 0 \tag{6.2}$$

式中$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$是在应力状态为$\boldsymbol{\sigma}$并继续加载时的塑性应变率。将(6.2)式改写为

$$\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\geqslant\boldsymbol{\sigma}^*:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{6.2$'$}$$

(6.2)′式称为“最大塑性功率原理”，它表示实际应力的塑性功率恒大于或等于许可应力状态的塑性功率。

(2) 设应力状态$\boldsymbol{\sigma}$在屈服面上，且应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的方向使材料继续加载(继续产生塑性变形)，则

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\geqslant 0 \tag{6.3}$$

证明如下：将(6.1)中的$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$分成$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$与$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$之和，则有

$$\int(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}+\int(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\geqslant 0$$

式中左端第一项为应力循环过程中的弹性功，第二项为塑性功。假定材料的弹性性质不随塑性变形的发生而变化，即假定弹性刚度 $\mathscr{L}$ 或柔度 $\mathscr{M}$ 为常量，则弹性功必为零：

$$\int(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=0$$

因此由(6.1)

$$\int(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\geqslant 0\ ^{1)} \qquad ①$$

取图 1-21 所示的应力循环：应力从屈服面内的 $\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}^*$ 加载至屈服面上的 $\boldsymbol{\sigma}$，继续加载至 $\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$(此时屈服面演化，假设原有的应力状态 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 仍在演化后的屈服面内 2)，然后卸载回到 $\boldsymbol{\sigma}_2=\boldsymbol{\sigma}^*$。在此加载过程中，只有应力从 $\boldsymbol{\sigma}$ 到 $\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的这一小段出现塑性应变增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，因此不等式①成为

$$\int(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\left(\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*\right):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\geqslant 0 \qquad (6.1)'$$

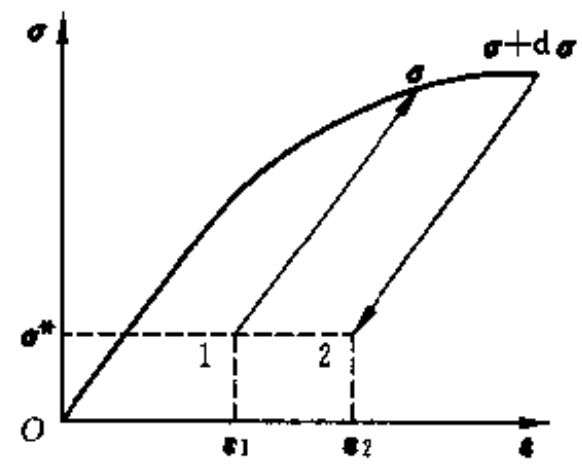


图 1-21　Drucker 假设中的应力循环

下面区别两种情况：

(1)　如果应力 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 在屈服面的内部(此时称 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 为安全应力状态)，或者 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 在屈服面上，但 $\boldsymbol{\sigma}\neq\boldsymbol{\sigma}^*$，则在上式中可略去小量 $\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，得到

1)　如果材料的弹性性质(弹性刚度 $\mathscr{L}$ 或柔度 $\mathscr{M}$)随着塑性变形的发生而变化，这种情况称为弹塑性耦合。此时应力循环的弹性功未必为零。如果假定由于塑性变形使得材料的弹性性质变得更“软”，应力循环过程中 $\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*$ 的弹性功为负，塑性功恒为非负的，即此不等式①仍成立。

2)　如果应力 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 在屈服面的内部，这个假设可以成立。但如果应力 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 在屈服面上，则这个假设只对硬化材料成立。

$$(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\geqslant 0$$

除以 dt 后即得(6.2)式。

(2) 如果应力$\boldsymbol{\sigma}^*$在屈服面上，且$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^*$，则由(6.1)′得到

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\geqslant 0$$

除以$(\mathrm{d}t)^2$，即得(6.3)。

由(6.2)式可以证明屈服面的外凸性质和正交法则。在图 1-22(a)与(b)的应力空间中，应力$\boldsymbol{\sigma}^*$用屈服面内的P^*点表示，应力$\boldsymbol{\sigma}$用屈服面上的P点表示。则(6.2)式可记作

$$\overrightarrow{P^*P}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\geqslant 0 \tag{6.2)'}$$

这说明张量$\overrightarrow{P^*P}=\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*$与塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$成锐角或直角。过 P 点作垂直于$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的超平面，则(6.2)′式要求屈服面内的任何应力点P^*必须在这超平面异于$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$所指的一侧，这只有在屈服面为外凸时才可能。由(6.2)式也可证明正交法则。图 1-22(a)为光滑屈服曲面情况，以$\boldsymbol{n}$表示屈服面在P点的沿外向法线方向的单位张量。如果$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的方向与$\boldsymbol{n}$不重合，则总可以在屈服面内找到$P^*$使$\overrightarrow{P^*P}$与$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的夹角为钝角，因而破坏(6.2)式。所以对于光滑屈服曲面情况，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$必须与屈服面的外向法线方向重合，而可记作

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.10}$$

图 1-22(b)为屈服曲面有棱线或角点的情况。在棱线或角点P处不存在屈服面的唯一法线。(6.2)式表明当应力$\boldsymbol{\sigma}$处于屈服面的棱线或角点时，塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$必定指向由$P$点所在的屈服曲面外向法线所构成的“塑性锥”内，图 1-22(b)中塑性锥用阴影线表示。

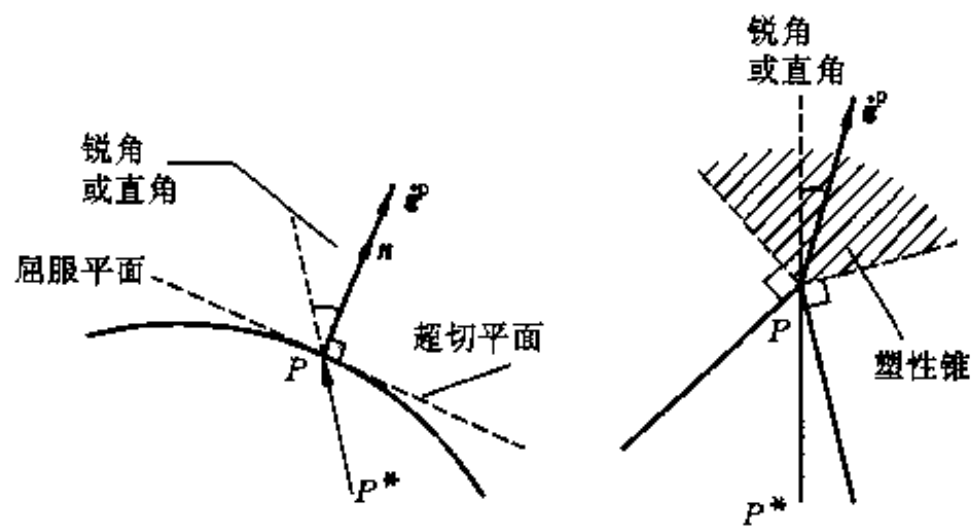
Drucker 假设的(6.1)式也可以用另一种形式表达为*

$$\int\boldsymbol{\varepsilon}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\leqslant 0 \tag{6.4}$$

式中$\int$表示在从状态 1($\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}^*$，$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1$)到状态 2($\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_2=\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_2$)的应力循环过程(图 1-21)中的积分。可以证明(6.4)与(6.1)是等价的。由等式

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon})=\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

从状态 1 到状态 2 进行积分，得



(a) 光滑屈服曲面　　(b) 奇异屈服曲面

图 1-22　屈服曲面外凸性质与正交法则

$$\boldsymbol{\sigma}_2:\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\sigma}_1:\boldsymbol{\varepsilon}_1=\int_{1\to2}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}+\int_{1\to2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

上式可写作

$$\int_{1\to2}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=-\int_{1\to2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

因此，由(6.1)可导出(6.4)，反之亦然，故两式等价。

以上对 Drucker 假设的讨论只限于小变形的情况。在大变形情况下存在许多种应力的定义与应变的定义。每一种应变的定义都对应着一种应力的定义，它们构成一对称之为“功共轭”的“应力应变对”，使得对应于同一物理过程的元功$\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$的值，无论采用哪一种“应力应变对”，都是一样的。但是(6.4)式所涉及的“余元功” $\boldsymbol{\varepsilon}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$的值则因所采用的“应力应变对”而异。因此 Drucker 假设如果适用于一种定义的“应力应变对”，就不适用于另一种。同样，(6.2)与(6.3)式的左端值也因所采用的“应力应变对”而异。这就使得正交法则也只能适用于一种“应力应变对”，而对于其它的“应力应变对”不成立。

最后指出，Drucker 假设所导致的推论(6.3)式，只适用于硬化材料，而不适用于如图1-23(b)所示的软化材料，因为在证明(6.2)与(6.3)式的过程中，曾假设原有的应力状态$\boldsymbol{\sigma}^*$仍保持在演化后的屈服面内。如果$\boldsymbol{\sigma}^*$在屈服面上，这对于软化材料不能成立。为了证明(6.3)式，必须假定$\boldsymbol{\sigma}^*=\boldsymbol{\sigma}$在屈服面上。对于软化材料，当应力从$\boldsymbol{\sigma}$变至$\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$时，$\boldsymbol{\sigma}$已不在演化后的屈服面之内，因此无法实现从$\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$再回到$\boldsymbol{\sigma}$的应力循环。对于满足(6.3)式的材料，必有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p>0$$

我们称此种材料为稳定的材料，使该材料产生应变增量 $d\boldsymbol{\varepsilon}$ 所需加的应力增量 $d\boldsymbol{\sigma}$ 对 $d\boldsymbol{\varepsilon}$ 所做的功总是正的

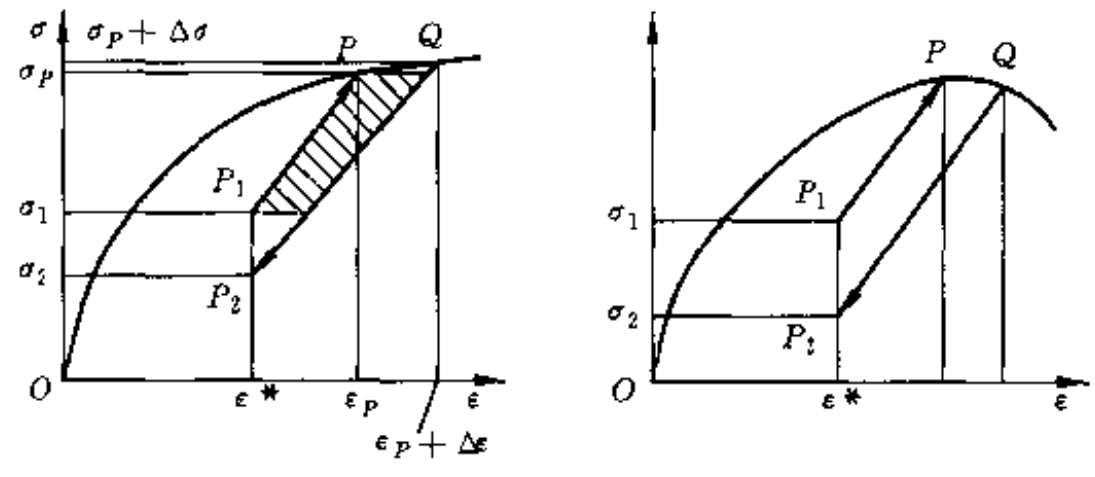


图 1-23　Ilyushin 假设中的应变循环

1.6.2　Ilyushin 假设

前苏联学者 Ilyushin（1961）提出另一个假设：在弹塑性材料的一个应变循环内，外部作用做的功是非负的，即

$$\oint \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} \geqslant 0 \tag{6.5}$$

式中 $\oint$ 表示从状态 1（$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1$）到状态 2（$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_2$）的应变循环过程的积分，经过这个过程，应变返回原值。　从(6.5)式可导出屈服面的外凸性质与正交法则如下。

取图 1-23(a)所示的应变循环 P_1PQP_2，现计算各段的功。

P_1P 段：

从 P_1 点（$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1$）到 P 点（$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_P$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P$）屈服，无塑性变形发生，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathscr{M}_1 : (\boldsymbol{\sigma}_P - \boldsymbol{\sigma}_1) \tag{2}$$

$$\int_{P_1P} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}_P : (\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}^*) : \mathscr{L}_1 : (\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \tag{3}$$

式中 $\mathscr{L}_1$ 为 P_1P 段的弹性刚度张量，$\mathscr{M}_1 = \mathscr{L}_1^{-1}$ 为弹性柔度张量。

PQ 段：

从 P 点（$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_P$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P$）到 Q 点（$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_P + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P + \Delta\boldsymbol{\sigma}$）

$$\int_{PQ} \boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}_P:\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\sigma}:\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + O(|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}|^2) \tag{④}$$

QP_2段：

从 Q 点（$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_P + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P + \Delta\boldsymbol{\sigma}$）卸载到 P_2 点($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_2$)，完成应变循环，应变返回原值$\boldsymbol{\varepsilon}^*$，但应力$\boldsymbol{\sigma}_2 \neq \boldsymbol{\sigma}_1$，

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_P + \Delta\boldsymbol{\sigma} + \mathscr{L}_2:(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}_P - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{⑤}$$

$$\int_{QP_2} \boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = -(\boldsymbol{\sigma}_P + \Delta\boldsymbol{\sigma}):(\boldsymbol{\varepsilon}_P + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_P + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*):\mathscr{L}_2:(\boldsymbol{\varepsilon}_P + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \tag{⑥}$$

式中 $\mathscr{L}_2$ 为 QP_2 段的弹性刚度张量。

由于在 PQ 段经历过塑性变形增量

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathscr{M}_1:\Delta\boldsymbol{\sigma} \tag{⑦}$$

考虑弹塑性耦合，QP_2 段的弹性刚度张量 $\mathscr{L}_2$ 与 P_1P 段的弹性刚度张量 $\mathscr{L}_1$ 可以有差异，其差异的量级可估计为

$$\|\mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_1\| = \mathscr{L}\left|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right| \tag{⑧}$$

式中 $\mathscr{L}$ 表示弹性刚度模量 $\mathscr{L}_1$ 或 $\mathscr{L}_2$ 的量级。 将③，④，⑤三式相加，得到 Ilyushin 假设(6.5)式左端的功相当于图 1-23(a)中 P_1PQP_2 的面积，可表达为

$$\oint_{P_1PQP_2} \boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = -\Delta\boldsymbol{\sigma}:(\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}^*) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}:\mathscr{L}_1:(\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}^*) + \mathscr{L}O\left(\left|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right|^2, \left|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right|\left|\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}^*\right|^2\right) \geqslant 0 \tag{⑨}$$

式中已假定⑦式中各项为同一量级

$$O(|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}|) = O(|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}|),\ O(|\Delta\boldsymbol{\sigma}|) = \mathscr{L}O(|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}|)$$

利用②式及弹性张量的 Voigt 对称性，⑨式可记作

$$\oint_{P_1PQP_2} \boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\sigma}_P - \boldsymbol{\sigma}_1):\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \mathscr{L}O\left(\left|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right|^2, \left|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right|\left|\boldsymbol{\varepsilon}_P - \boldsymbol{\varepsilon}^*\right|^2\right) \geqslant 0 \tag{⑩}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 为 PQ 段（应力从 $\boldsymbol{\sigma}_P$ 变为 $\boldsymbol{\sigma}_P+\Delta\boldsymbol{\sigma}$）的塑性应变增量。⑩式右端第一项 $(\boldsymbol{\sigma}_P-\boldsymbol{\sigma}_1):\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 表示图 1-23(a)中的阴影面积，第二项的一部分 $\mathscr{L}O\left(\left|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right|^2\right)$来自图 1-23(a)中两个小三角形的面积，另外一部分 $\mathscr{L}O\left(\left|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right|^2\left|\varepsilon_P-\boldsymbol{\varepsilon}^*\right|^2\right)$来自弹塑性耦合，即 $\mathscr{L}_2$ 与 $\mathscr{L}_1$ 之差⑧式。在⑩式中令 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\to 0$（即令 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\to 0$，图 1-23(a)中 Q 点趋近于 P 点），同时还令 $\boldsymbol{\varepsilon}_P-\boldsymbol{\varepsilon}^*\to 0$（即图 1-23(a)中 P_1 点也趋近于 P 点），并记 $\delta\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_P$ 为自屈服面上 P 点应力 $\boldsymbol{\sigma}_P$ 至邻近许可应力 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 的应力差，得

$$\delta\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\leqslant 0 \qquad ⑪$$

式中 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 为应力状态为 $\boldsymbol{\sigma}_P$ 并继续“加载”[1]时的塑性应变率，$\delta\boldsymbol{\sigma}$ 为自 $\boldsymbol{\sigma}_P$ 指向屈服面内的应力差。⑪式与 Drucker 假设所导致的(6.2)式不同。(6.2)式中 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 为屈服面内或屈服面上任一应力状态，故由(6.2)可导出屈服面的外凸性质与正交法则。⑪式中 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 只能是在屈服面内或在屈服面上无限接近于 $\boldsymbol{\sigma}_P$ 的应力状态，因此由⑪式只能导出正交法则。若令 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ 为从屈服面上的应力点($\boldsymbol{\sigma}_P$)指向弹性区内的应力率，$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ 的方向指向屈服面内，则由⑪式可得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\leqslant 0 \qquad ⑫$$

注意⑫式与 Drucker 假设所导出的(6.3)式的意义完全不同，在(6.3)式中 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 是由 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 所引起的，而在⑫式 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 不是由于 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ 所产生的，$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ 是从屈服面上 P 点指向屈服面内的假想应力率，在这个应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ 作用下材料出现卸载，塑性应变率为零。由⑫式可知在图 1-22(b)中，塑性锥中任一方向 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 必与由 P 指向屈服面内的任一方向成钝角或直角。

如果不存在弹塑性耦合，即设 $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_2=\mathscr{L}$，则⑩式成为

$$\oint_{P_1PQP_2}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{\sigma}_p-\boldsymbol{\sigma}_1):\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}+\mathscr{L}O\left(\left|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right|^2\right)\geqslant 0 \qquad ⑩'$$

在⑩′式中令 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 保持不变，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\to 0$，得到⑪式，其中 $\delta\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_P$ 为有限。此时由⑪式可导出屈服面的外凸性。

以上的证明也适用于软化材料(图 1-23(b))。在这一点，Ilyushin 假设比 Drucker 假设更具有普遍性，它适用于具有弹塑性耦合的情况，而且不仅适用于硬化材料，也适用于软化材料。此外，与 Drucker 假设不同，Ilyushin 假设不但适用于小变形的情况，而且也适用于

---

1) 对于软化材料，“加载”的含意为继续产生塑性变形。

大变形情况，只要适用于某一种"功共轭"的"应力应变对"，它就也适用于任何一种"功共轭"的"应力应变对"。

1.6.3 对 J_2 形变理论的重新评价

1.3.1 指出了 J_2 形变理论的缺点。但在实际上，J_2 形变理论的结果有时与试验结果符合得较好。Budiansky（1959）用 Drucker 假设来检验 J_2 形变理论的结论(3.10)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right)\boldsymbol{\sigma}' \tag{6.7}$$

及其率(3.23)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right)\dot{\boldsymbol{\sigma}}'+\frac{3}{2}\frac{\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}\right)\boldsymbol{\sigma}' \tag{6.8}$$

结果认为：如果假定后继屈服面为具有棱线或角点的奇异屈服面，当加载路径距离比例加载偏差不大时，塑性本构关系(3.10)与(3.23)符合 Drucker 假设，因而在理论上是可以接受的。检验过程如下。

J_2 流动理论在比例加载情况下导致的(2.40)与 J_2 形变理论(6.7)（即(3.10)）完全相同。因此在比例加载情况下，(6.7)与(6.8)完全符合 Drucker 假设。塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的方向必平行于偏应力 $\boldsymbol{\sigma}'$。

现在假定材料的偏应力从零经过比例加载到达当前值 $\boldsymbol{\sigma}'$（见图 1-24 偏应力空间中从原点 O 到 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的直线段），然后加一个不与 $\boldsymbol{\sigma}'$ 成比例的偏应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'=\dot{\boldsymbol{\sigma}}'\mathrm{d}t$（或偏应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$），即 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ 不与 $\boldsymbol{\sigma}'$ 平行。如果当前的屈服面在 $\boldsymbol{\sigma}'$ 处为光滑，则屈服面在 $\boldsymbol{\sigma}'$ 处有唯一的法线方向，也就是比例加载情况的塑性应变率方向，即偏应力 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的方向。而当偏应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ 不与 $\boldsymbol{\sigma}'$ 成比例（即它们的方向不平行）时，由(3.23)塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 不与屈服面法线方向 $\boldsymbol{\sigma}'$ 平行，这就违背了正交法则，因而违背 Drucker 假设的推论(6.2)。所以要想使(3.10)与(3.23)不违背 Drucker 假设，经过比例加载到达当前偏应力 $\boldsymbol{\sigma}'$ 时，屈服面在 $\boldsymbol{\sigma}'$ 处必然不光滑（即为奇异）。设图 1-24 后继屈服面在当前偏应力 $\boldsymbol{\sigma}'$ 处为一锥面，半锥角为 β，锥轴方向平行于 $\boldsymbol{\sigma}'$。

我们来检验塑性本构关系(3.10)即(3.23)是否满足 Drucker 假设的推论(6.2)与(6.3)。先检验(6.3)：将(3.23)的 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 代入(6.3)，得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right)\dot{\boldsymbol{\sigma}}':\dot{\boldsymbol{\sigma}}'+\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}\right)(\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}})^2\geqslant 0$$

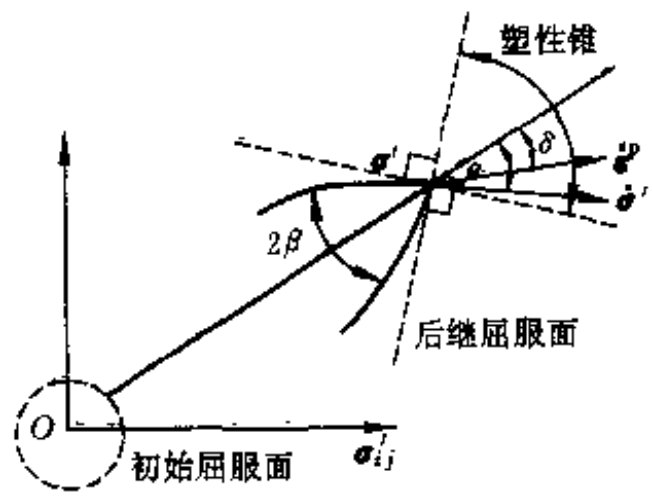


图 1-24　偏应力空间中后继屈服面的锥顶点 $\boldsymbol{\sigma}'$

显然，对于所有应力应变曲线为向下凹的硬化曲线，$E > E_s(\sigma_{eq}) > E_t(\sigma_{eq})$，上述条件恒满足。因此 J_2 形变理论本构关系满足(6.3)。

其次，检验(6.2)。(6.2)式表示在图 1-24 中塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 必定落在塑性锥内，即

$$0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2} - \beta \tag{6.9}$$

式中 δ 为偏应力 $\boldsymbol{\sigma}'$（即锥轴方向）与塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 方向的夹角

$$\cos\delta = \boldsymbol{n}_{\sigma'} : \boldsymbol{n}_{\dot{\varepsilon}^p},\ \boldsymbol{n}_{\sigma'} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{|\boldsymbol{\sigma}'|},\ \boldsymbol{n}_{\dot{\varepsilon}^p} = \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p|} \tag{6.10}$$

由(6.9)，可写

$$\cos^2\delta \geqslant 1 - \cos^2\beta \tag{6.11}$$

利用(6.10)，由(6.8)可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}|\dot{\boldsymbol{\sigma}}'|\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)\{\boldsymbol{n}_{\dot{\sigma}'} + (N-1)(\boldsymbol{n}_{\sigma'} : \boldsymbol{n}_{\dot{\sigma}'})\boldsymbol{n}_{\sigma'}\} \tag{6.12}$$

式中

$$\boldsymbol{n}_{\dot{\sigma}'} = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}'}{|\dot{\boldsymbol{\sigma}}'|}$$
$$N = \frac{1/E_t - 1/E}{1/E_s - 1/E} \geqslant 1 \tag{6.13}$$

及

$$\boldsymbol{n}_{\varepsilon^p} = \frac{\boldsymbol{n}_{\dot{\sigma}'} + (N-1)\boldsymbol{n}_{\sigma'}\cos\alpha}{[1 + (N^2-1)\cos^2\alpha]^{\frac{1}{2}}} \tag{6.14}$$

式中α为偏应力$\boldsymbol{\sigma}'$与偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的夹角

$$\cos\alpha = \boldsymbol{n}_{\sigma'} : \boldsymbol{n}_{\dot{\sigma}'},\ \boldsymbol{n}_{\dot{\sigma}'} = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}'}{|\dot{\boldsymbol{\sigma}}'|}$$

故

$$\cos\delta = \boldsymbol{n}_{\sigma'} : \boldsymbol{n}_{\dot{\varepsilon}^p} = \frac{N\cos\alpha}{[1+(N^2-1)\cos^2\alpha]^{\frac{1}{2}}} \tag{6.15}$$

(6.15)代入(6.11)，得

$$\tan\alpha \leqslant \frac{\tan^2\overline{\beta}}{\tan\beta} \tag{6.16}$$

式中记

$$\tan^2\overline{\beta} = N \geqslant 1 \tag{6.17}$$

(6.16)取等号时，在图 1-25 中用虚线表示，它表示α角的上限。(6.16)就是 Drucker 假设的推论(6.2)所要求的；如果不满足此式，就违背 Drucker 假设。

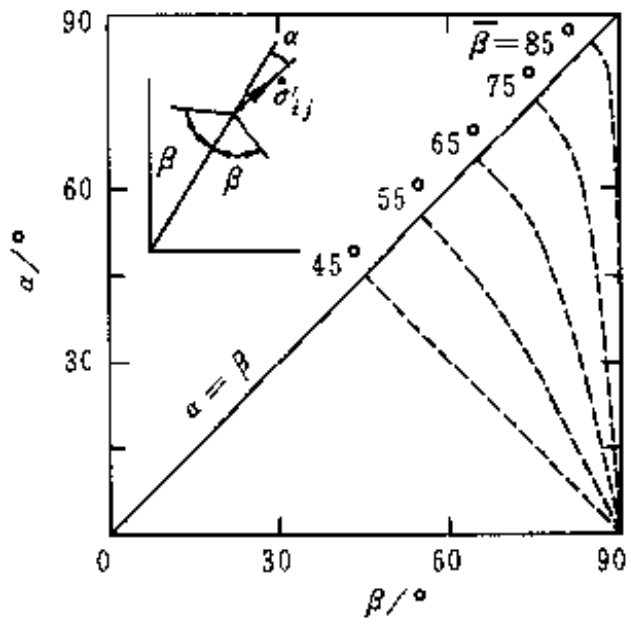


图 1-25　偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$与锥轴的夹角α的允许值与半锥角$\beta$的关系

上文中假设从应力为零到当前的偏应力$\boldsymbol{\sigma}'$为比例加载（图 1-24）。现在定义“全加载路径”[1]。若有一加载路径，当应力$\boldsymbol{\sigma}$在路径上任一点时，屈服面与假设应力从零经过比例加载到该点时的屈服面完全相同，则称该加载路径为“全加载路径”。对于“全加载路径”，Budiansky 认为偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的方向必须指向以$\boldsymbol{\sigma}'$为锥顶的“全加载锥”内，“全加载锥”就是屈服锥面的延长（图 1-26），其半锥角也是β，故全加载路径要求

1) 参考 1.4.1 Sanders 理论中对“全加载路径”的类似定义。

$$\alpha \leqslant \beta \tag{6.18}$$

否则，如果“全加载路径”的偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$与锥轴夹角$\alpha$大于$\beta$，导致 t 时刻的$\boldsymbol{\sigma}'$位于 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的屈服锥面（以$\boldsymbol{\sigma}'+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$为锥顶的锥面）之外，对于硬化材料我们已经假设排除了这种可能性。

不等式(6.16)与(6.18)表示图 1-26 中的三根线，即实线$\alpha=\beta$、虚线以及β 轴所界的三角区。如果α，β 值落在这个三角区，那么J_2形变理论的本构关系(6.7)和(6.8)不违背 Drucker 假设。当β 值增加时，α 的上限先随β 而增加，α 的上限到达最大值后又随β 之增加而减小。α 的最大值发生于当$\alpha=\beta=\bar{\beta}$。

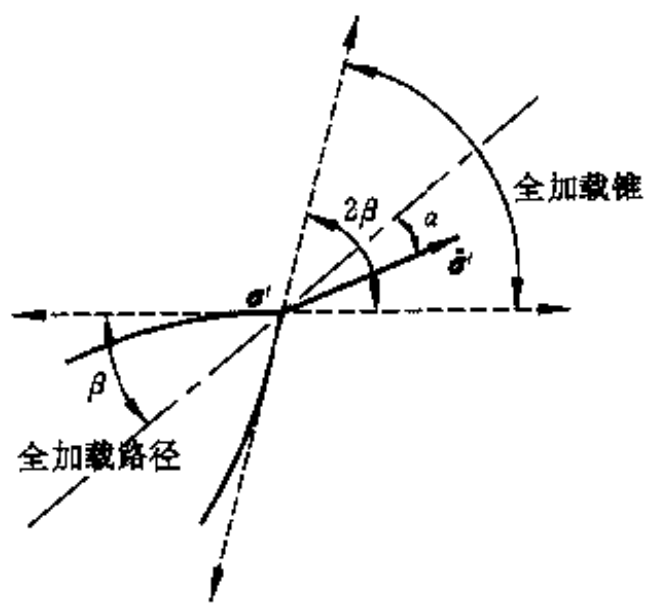


图 1-26　全加载路径

但必须指出，以上的讨论中假设塑性本构关系(6.7)与(6.8)，但并不接受以前的J_2形变理论所假设的与 Mises 屈服条件对应的光滑屈服面。

1.7　J_2角点理论

1.3.1 指出，与J_2流动理论相比，J_2形变理论在理论上具有严重的缺点。但是，在对结构塑性稳定的试验结果进行预测时，用J_2形变理论却比用J_2流动理论更符合试验结果。对这一点，有的学者用结构的初始缺陷来解释。而 Chistoffersen 与 Hutchinson（1979）提出一种J_2角点理论（J_2 corner theory）。这种理论依加载方向的变化，可以实现从J_2形变理论到J_2流动理论的连续光滑过渡。

1.7.1　塑性应变率势

本构关系写成率形式

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$$

式中

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} = \mathscr{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}},\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

故

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

式中

$$\boldsymbol{M} = \mathscr{M} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$$

按 1.2.2，J_2 流动理论（混合硬化），由式(2.23)

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}} = \frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\sigma_{\mathrm{F}}^2}(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{b}')(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{b}') \tag{2.23$'$}$$

按 1.3，J_2 形变理论，由(3.23)′与(3.26)（下文中记作 $\boldsymbol{C}$）：

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} - \frac{1}{E}\right)\bar{\boldsymbol{I}} + \frac{9}{4\sigma_{\mathrm{eq}}{}^2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}(\sigma_{\mathrm{eq}})} - \frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}\right)\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{C} \tag{3.23$''$}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{I}}$ 为特殊等同张量（见(1.4)式），$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$ 称为塑性柔度张量，$\mathscr{M}$称为弹性柔度张量。按照上述理论，$\mathscr{M}$与$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$，因而 $\boldsymbol{M}$，都只取决于当前的状态，而与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$无关。因此弹性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$，塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，以及它们的和$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$均为应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的线性函数。此时可定义弹性应变率势$W^{\mathrm{e}}$，它是应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次函数

$$W^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathscr{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{7.1}$$

因为$\mathscr{M}$为正定，$W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$恒为正，$W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) > 0$。弹性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$等于势$W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$对应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的导数

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} = \mathscr{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{7.2}$$

同样可定义塑性应变率势$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$

$$W^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{7.3}$$

对于稳定的材料（满足(6.3)式），$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$ 亦为正定，$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 恒为正，$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})>0$。塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 等于势 $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 对应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的导数:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{7.4}$$

把弹性应变率 $W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 与塑性应变率 $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 相加，得到

$$W=W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})+W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})=W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{7.5}$$

$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 恒为正，$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})>0$，称为应变率势。应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 等于势 $W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 对应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的导数

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{7.6}$$

按照 1.4.1，Sanders 理论（见(4.1)′式），本构关系为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha}g_{\alpha}(f_{\alpha})\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.1)'}$$

因此塑性柔度张量 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$ 为

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha}g_{\alpha}(f_{\alpha})\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$

式中 α 对开动的屈服超平面取和。当应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 处于应力空间中几个屈服超平面相交的角点时，哪些屈服超平面开动，取决于应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的方向。因此，不能说 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$ 与应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 无关，而只能说 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$ 与应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的大小无关（因为材料已设为率无关材料）。此时，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$ 是应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的零次齐次函数，而塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 则是应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的一次齐次函数。对于稳定的材料，$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 因而 $W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的二次恒正齐次函数。Koiter 本构理论(4.11)或(4.11)′实质上与 Sanders 本构理论相同

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha}\frac{1}{h_{\alpha}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\sum_{\alpha}\frac{1}{H_{\alpha}}\boldsymbol{n}_{\alpha}\boldsymbol{n}_{\alpha}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.11)'}$$

塑性柔度张量 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$ 可写作

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha}\frac{1}{h_{\alpha}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\sum_{\alpha}\frac{1}{H_{\alpha}}\boldsymbol{n}_{\alpha}\boldsymbol{n}_{\alpha}$$

式中 α 对开动的屈服面取和。Sanders 或 Koiter 本构理论均假定各屈服面(对应于不同的 α)互相独立地演化，而不考虑它们之间的相互影响。Strören 和 Rice（1975）考虑各屈服面

演化的相互影响，建议本构关系为：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{h_{\alpha\beta}}\boldsymbol{n}_{\alpha}\boldsymbol{n}_{\beta}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

式中β只对开动的屈服面取和，α 对所有的屈服面取和。由此，塑性柔度张量$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$为

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{h_{\alpha\beta}}\boldsymbol{n}_{\alpha}\boldsymbol{n}_{\beta} \tag{7.7}$$

式中$h_{\alpha\beta}$对于α与β未必对称，因此$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$不一定具有 Voigt 对称性。

如上所述，按照J_2流动理论或J_2形变理论，塑性应变率势$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为(7.3)式所示的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$二次型，其系数张量，即塑性柔度张量$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$，与$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$无关。按照 Sanders 理论，Koiter 理论或 Strören-Rice 理论，可以按应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的方向（称为加载方向）分成几个区域（例见图 1-11，1-16(b)）。在每一个区域（称为加载区）内,由于开动的屈服面相同，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$也相同。当加载方向指向不同的加载区，由于开动的屈服面不同，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$也不同。沿着相邻的加载区的交线方向加载，则按相邻区的两个不同的$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$计算的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$应该相同，这是连续性的要求。因此，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$在每一分区内与$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$无关，$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次型，其系数在每一分区内与$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$无关。通过相邻区的交线，$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为连续。

J_2角点理论假定塑性应变率势$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为连续地依赖于应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$方向的二次齐次函数。先假定$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$的函数形式，然后代入(7.5)式，得到应变率势$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$。利用应变率与势的关系

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{7.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}=\frac{\partial W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}},\qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{7.9}$$

就可得到本构关系。

以后将要证明，如果$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸函数，即$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$满足条件

$$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2)-W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1)\geqslant(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2-\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1):\left(\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2}\right)_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1} \tag{7.10}$$

且上式中等号只当$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1=\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$时成立，则本构关系(7.8)必有逆，即给定应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，存在唯一的应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$使(7.8)得以满足。

设塑性应变率只与偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$有关，而与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的球形部分$\dot{\sigma}_{kk}$无关。又设在偏应

力空间中屈服面为正锥面，半锥角为β，偏应力点$\boldsymbol{\sigma}'$在锥顶点（图 1-27）。在 1.6.3 中，Budiansky 所设经过全加载路径后的屈服面也正是半锥角为β 的正锥面（图 1-25），锥轴方向平行于偏应力$\boldsymbol{\sigma}'$。J_2角点理论设塑性应变率势$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为

$$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})=\frac{1}{2}f(\theta)\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{2}f(\theta)\dot{\boldsymbol{\sigma}}':\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}' \tag{7.11}$$

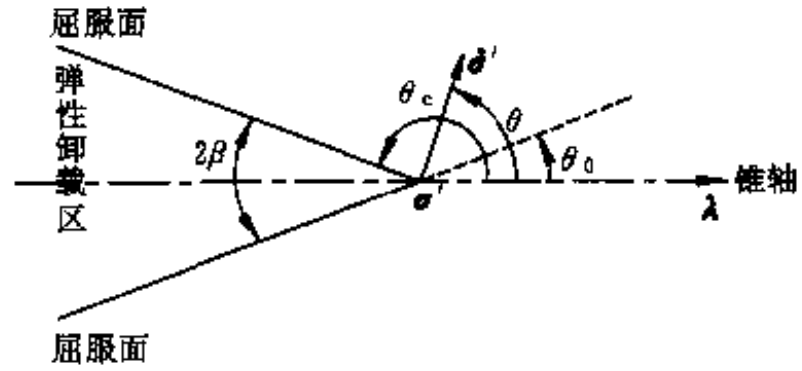


图 1-27　在偏应力空间中的正锥屈服面

式中 $\boldsymbol{C}$ 为按照J_2形变理论的塑性柔度张量，见(3.23)″式；θ 为偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的方向与锥轴方向之间的夹角，称为“加载角”；$f(\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，为$\theta$ 的递减函数，它是一个材料函数，且满足

$$f(\theta)=\begin{cases}1, & \theta\leqslant\theta_0\\ 0, & \theta\geqslant\theta_{\mathrm{c}}=\pi-\beta\end{cases} \tag{①}$$

当θ 从θ_0增至θ_{c}时，$f(\theta)$值从 1 递减至 0。①的第一式表示当偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的方向偏离锥轴不远，即加载角$\theta$ 不超过θ_0时，J_2形变理论适用。①的第二式则表示：当偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的方向指向屈服面之内时，属于弹性卸载情况，塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$为零。(7.11)式的$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$是应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次齐次函数。

由(3.23)″式，$\boldsymbol{C}$ 为 Voigt 对称，且满足下式

$$C_{kkij}=C_{ijkk}=0 \tag{②}$$

②的第一式表示按J_2形变理论，塑性体积变形率$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{kk}$为零。而②的第二式则表示塑性应变率$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的球形部分$\dot{\sigma}_{kk}$无关，由于②式，可把塑性应变率势$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$写作(7.11)式右端的形式。故$W^{\mathrm{p}}$只依赖于偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$，而与$\dot{\sigma}_{kk}$无关。

由于$\boldsymbol{C}$（见(3.23)″式）为正定，Christofferson 与 Hutchinson（1979）把$\boldsymbol{C}$取为偏应力空间中的度量张量。偏应力空间中的“长度”（或模）与“角度”都要根据这个度量张量来定义或计算。例如出现在(7.11)式中的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}':\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$可以理解为偏应力率$\dot{\sigma}'$的长度的平方。

定义$\boldsymbol{\lambda}$为锥轴方向、长度为 1 的偏斜张量，即

$$\boldsymbol{\lambda}:\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\lambda}=1 \tag{7.12}$$

定义

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\lambda} \tag{7.13}$$

因此

$$\boldsymbol{\lambda}:\boldsymbol{\mu}=1 \tag{7.12$'$}$$

显然，利用②的第一式，可知$\boldsymbol{\mu}$亦为偏斜张量，即$\mu_{kk}=0$。偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$与锥轴（即与$\boldsymbol{\lambda}$）的夹角$\theta$ 应定义为

$$\cos\theta=\boldsymbol{\lambda}:\boldsymbol{C}:\frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}'}{(\dot{\boldsymbol{\sigma}}':\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}')^{\frac{1}{2}}}=\frac{\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}'}{(\dot{\boldsymbol{\sigma}}':\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}')^{\frac{1}{2}}} \tag{7.14}$$

(7.14)中 $\cos\theta$ 是$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的零次齐次函数（即依赖于$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的方向，而不依赖于$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的长度或大小）。

塑性应变率势$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$（见(7.11)式）中的系数$f(\theta)$也依赖于$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$，因为 θ 按(7.14)依赖于$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，将(7.11)式代入(7.9)第二式，可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.15}$$

式中

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=f(\theta)\left[(1-k(\theta)\cot\theta)\boldsymbol{C}+\frac{k(\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}\right] \tag{7.16}$$

$$k(\theta)=-\frac{1}{2}\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \tag{7.17}$$

(7.16)式表明$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$连续地依赖于$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的方向，即依赖于$\theta$ 。因为$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$是$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次齐次函数，所以(7.9)第二式，即(7.15)的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$是$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的一次齐次函数。由于②式$C_{ijkk}=0$，且$\boldsymbol{\mu}$为偏量（$\mu_{kk}=0$）、(7.15)的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$只与$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$有关，故(7.15)可改写为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}' \tag{7.15$'$}$$

由①的第一式及(7.17)式

$$f(\theta)=1,\ k(\theta)=0 \qquad 当\ 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$$

故由(7.15)，(7.16)，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{C}$，当$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$，

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad 当 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \qquad ③$$

这说明当加载角 θ 不超过 θ_0 时，材料服从 J_2 形变理论。$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ 的锥形范围可称为全加载锥（图 1-27）。

(7.15)式的推导过程如下：

欲要计算 $\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})/\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}$，可把 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 当作自变量，先来计算 $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 的微分，得到

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathrm{d}\left[\frac{1}{2} f(\theta) \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}\right]$$

利用 $\boldsymbol{C}$ 的 Voigt 对称性，可得

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = f(\theta) \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{C} : \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2} f'(\theta) \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \mathrm{d}\theta \tag{7.18}$$

依(7.14)，θ 为 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的函数。将(7.14)式两端平方后，取微分，并再利用(7.14)，可得 $\mathrm{d}\theta$ 与 $\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的关系

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}} \left[\cot\theta \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{C} - \frac{1}{\sin\theta \cos\theta} (\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \boldsymbol{\mu}\right] : \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.19}$$

将(7.19)代入(7.18)，得

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \left[\left(f(\theta) + \frac{1}{2} f'(\theta) \cot\theta\right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{C} - \frac{1}{2} f'(\theta) \frac{1}{\sin\theta \cos\theta} (\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \boldsymbol{\mu}\right] : \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad ④$$

但由定义

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad ⑤$$

比较式④与⑤，注意到 $\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 为任意，且④中的[…]与⑤中的 $\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})/\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 均为对称张量[1)]，可得

$$\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \left(f(\theta) + \frac{1}{2} f'(\theta) \cot\theta\right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{C} - \frac{1}{2\sin\theta \cos\theta} f'(\theta) (\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \boldsymbol{\mu} \qquad ⑥$$

⑥式代入(7.9)第二式，得

1) 否则，只能得到⑥式两端的对称部分相等。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

此即(7.15)式，式中塑性柔度张量$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$见(7.16)。(7.15)式证毕。

1.7.2 $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸函数的条件

实数变量一元函数 $y(x)$为凸的条件（充分且必要，下同）为对于任意的 x_1 与 x_2，均有

$$y(x_2) - y(x_1) - (x_2 - x_1)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_1} \geqslant 0 \tag{7.20}$$

凸函数 $y(x)$的图形示于图 1-28。

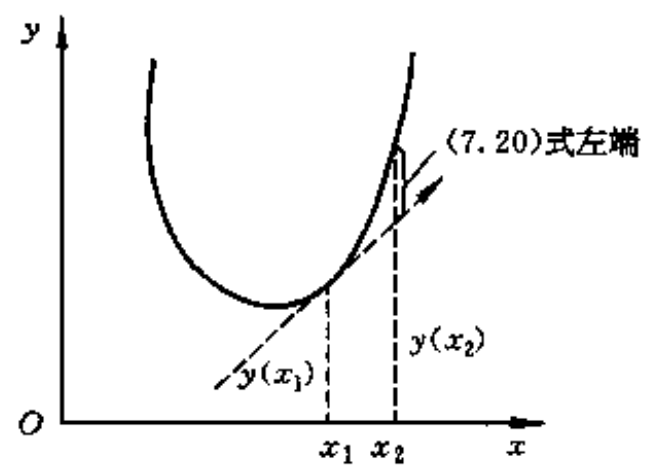


图 1-28　凸函数 $y(x)$

如果(7.20)式中的等号仅当 $x_1 = x_2$ 时成立，则称 $y(x)$为绝对凸。若 $y(x)$为绝对凸，则当 $x_1 \neq x_2$ 时，必有

$$y(x_2) - y(x_1) - (x_2 - x_1)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_1} > 0$$

上述凸函数的定义很容易推广到实数变量二元函数 $z(x, y)$。$z(x, y)$为凸的条件是：对于任意的(x_1, y_1)与(x_2, y_2)，均有

$$z(x_2, y_2) - z(x_1, y_1) - \left[(x_2 - x_1)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} + (y_2 - y_1)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}\right] \geqslant 0 \tag{7.20$'$}$$

如果(7.20)′式中的等号仅当$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$时成立，则称 $z(x, y)$为绝对凸。把上述定义推广到自变量为应力率张量$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的情况。$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸的条件为

$$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2)-W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1)-(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2-\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1):\left(\frac{\partial W^{\mathrm{p}}}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{\dot{\sigma}=\dot{\sigma}_1}\geqslant 0 \tag{7.21}$$

如果(7.21)式中的等号仅当$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1=\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$时成立，则称$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为绝对凸。

已设$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次齐次函数，它具有以下性质：

(1)
$$W^{\mathrm{p}}(c\dot{\boldsymbol{\sigma}})=c^2W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{7.22}$$

(2)
$$\frac{\partial W^{\mathrm{p}}}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=2W^{\mathrm{p}}$$

故利用(7.9)第二式，可得

$$W^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{7.23}$$

式中$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$为应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$所产生的塑性应变率。

利用上述性质，可将$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸的条件(7.21)写成更简单的形式。令

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1=c_1\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1,\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2=c_2\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2,\ c_1>0,\ c_2>0 \tag{7.24}$$

由(7.9)第二式，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$是$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的一次齐次函数。设与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$相对应的塑性应变率为$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{\mathrm{p}},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\mathrm{p}}$，与应力率$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1,\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2$相对应的塑性应变率为$\dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}},\dot{\boldsymbol{E}}_2^{\mathrm{p}}$，则它们之间存在类似于(7.24)的关系：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{\mathrm{p}}=c_1\dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}},\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\mathrm{p}}=c_2\dot{\boldsymbol{E}}_2^{\mathrm{p}} \tag{7.25}$$

利用(7.22)第一式与(7.9)第二式，可将$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸的条件(7.21)改写为

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2)-W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1)-\left(\frac{c_2}{c_1}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2-\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1\right):\dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}}\geqslant 0 \tag{7.21$'$}$$

其中$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1,\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2,c_1,c_2$均为任意。选择

$$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2)=W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1)=\frac{1}{2} \tag{7.26}$$

这时，由(7.23)

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2 : \dot{\boldsymbol{E}}_2^{\mathrm{p}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1 : \dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}} = 1$$

则(7.21)′可改写为

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{c_2}{c_1}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2 - \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1\right) : \dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}} \geqslant 0$$

即

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{c_2}{c_1}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2 : \dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{7.21''}$$

上式对于任意的c_2/c_1，任意的满足(7.26)的$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2$及任意满足(7.26)的$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_1$所引起的$\dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}}$成立。取 $c_1 = c_2$，由上式可得

$$1 - \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2 : \dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{7.27}$$

以上由(7.21)导出(7.27)。反之，由(7.27)也可导出(7.21)，因为由(7.27)可导出

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 2\frac{c_2}{c_1} + 1\right] + \frac{c_2}{c_1}\left(1 - \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2 : \dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}}\right) \geqslant 0$$

而由上式可导出(7.21)″，继而导出(7.21)′，(7.21)。因此，(7.27)与(7.21)完全等价，表示$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸的必要且充分条件。

现在假设$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$如(7.11)式，计算(7.27)式的左端 $1 - \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2 : \dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}}$。设$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$为满足条件(7.26)的应力率，故利用(7.11)，有

$$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{1}{2} f(\theta) \dot{\boldsymbol{\Sigma}} : C : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{2} \tag{7.26'}$$

因此，$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$的长度为$[f(\theta)]^{-1/2}$。如图 1-29 所示，以 $\boldsymbol{\chi}$ 表示在偏应力空间中包含锥轴$\boldsymbol{\lambda}$方向与偏应力率$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'$方向的超平面上正交于锥轴的“单位”张量（注意：均以 $\boldsymbol{C}$ 为度量张量），即

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\chi} = 1 \\ &\boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{\mu} = 0 \end{aligned} \tag{7.28}$$

$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'$可表示为$\boldsymbol{\lambda}$与$\boldsymbol{\chi}$的线性组合：

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}' = a\boldsymbol{\lambda} + b\boldsymbol{\chi} \tag{7.29}$$

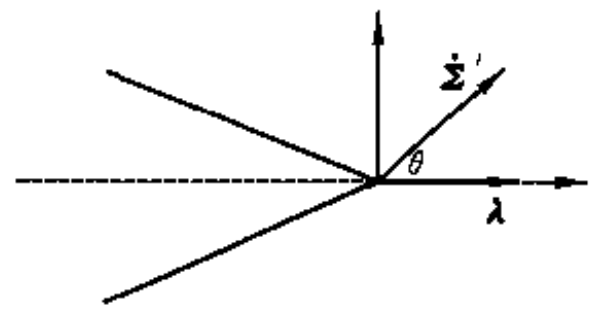


图 1-29　偏应力空间中锥轴$\boldsymbol{\lambda}$与应力率$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'$构成的超平面

将(7.29)代入(7.26)′，可得

$$a^2+b^2=\left[f(\theta)\right]^{-1} \tag{7}$$

由(7.14)，以θ表示$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'$与锥轴$\boldsymbol{\lambda}$方向的夹角（图 1-29）

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'}{\left(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}':\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{8}$$

将(7.29)代入⑧，可得

$$a=[f(\theta)]^{-1/2}\cos\theta \tag{9}$$

由⑦与⑨，并不失广泛性可假定 $\boldsymbol{\chi}:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'\geqslant 0$，即$\sin\theta\geqslant 0$，可得

$$b=[f(\theta)]^{1/2}\sin\theta \tag{10}$$

因此(7.29)成为

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'=[f(\theta)]^{-1/2}(\cos\theta\boldsymbol{\lambda}+\sin\theta\boldsymbol{\chi}) \tag{7.30}$$

(7.30)式实际上可看作是$\boldsymbol{\chi}$的定义式。

将(7.30)代入(7.15)，可得$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$所产生的应变率$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$：

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\Sigma}} \tag{7.31}$$

式中$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$为塑性柔度张量，见(7.16)式。将(7.30)与(7.31)分别加以下标 2 与 1 后，得到$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸的条件(7.27)式中左端的$\boldsymbol{\Sigma}_2:\dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}}$为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2:\dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}}&=\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2':\dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}}\\&=[f(\theta_2)]^{1/2}(\cos\theta_2\boldsymbol{\lambda}+\sin\theta_2\boldsymbol{\chi}_2):f(\theta_1)\left[(1-k(\theta_1)\cot\theta_1)\boldsymbol{C}+\frac{k(\theta_1)}{\sin\theta_1\cos\theta_1}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}\right]:\\&\quad[f(\theta_1)]^{-1/2}(\cos\theta_1\boldsymbol{\lambda}+\sin\theta_1\boldsymbol{\chi}_1)\end{aligned}$$

记 $f_1 = f(\theta_1), f_2 = f(\theta_2)$，并利用(7.12)与(7.28)第二式化简上式得到

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_2 : \dot{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{p}} \\
&= \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ [1 - k(\theta_1)\cot\theta_1](\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 \boldsymbol{\chi}_1 : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\chi}_2) + k(\theta_1)\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_1} \right\} \\
&= \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{1}{2}} [\cos(\theta_2 - \theta_1) - k(\theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)] \\
&\quad - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{1}{2}} [1 - k(\theta_1)\cot\theta_1]\sin\theta_1\sin\theta_2 (1 - \boldsymbol{\chi}_1 : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\chi}_2)
\end{aligned}
$$

再将上式代入(7.27)，得到 $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为凸的条件

$$
\begin{aligned}
&1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{1/2} [\cos(\theta_2 - \theta_1) - k(\theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)] \\
&+ \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{1/2} [1 - k(\theta_1)\cot\theta_1]\sin\theta_1\sin\theta_2 (1 - \boldsymbol{\chi}_1 : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\chi}_2) \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

上式对于任意的 θ_1，θ_2 与任意满足(7.28)两式的 $\boldsymbol{\chi}_1$ 与 $\boldsymbol{\chi}_2$ 成立。$k(\theta_1)$ 的意义见(7.17)，即

$$
k(\theta_1) = -\frac{1}{2}\frac{f'(\theta_1)}{f(\theta_1)} = -\frac{1}{2f_1} f'(\theta_1)
$$

由(7.32)可得以下推论：

(1) 令 $\theta_1 = \theta_2$（因此 $f_1 = f_2$）由(7.32)

$$
[1 - k(\theta_1)\cot\theta_1](1 - \boldsymbol{\chi}_1 : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\chi}_2) \geqslant 0 \qquad ⑪
$$

对于任意的 θ_1，与满足(7.28)两式的 $\boldsymbol{\chi}_1$ 与 $\boldsymbol{\chi}_2$。但因 $\boldsymbol{C}$ 为正定，由 Schwarz 不等式，设 $\boldsymbol{\chi}_1 \neq \boldsymbol{\chi}_2$

$$
\boldsymbol{\chi}_1 : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\chi}_2 < (\boldsymbol{\chi}_1 : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\chi}_1)^{1/2} (\boldsymbol{\chi}_2 : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\chi}_2)^{1/2} = 1
$$

故⑪式成为

$$
1 - k(\theta)\cot(\theta) \geqslant 0 \tag{7.33}
$$

对于任意的 θ。

(2) 令 $\boldsymbol{\chi}_1=\boldsymbol{\chi}_2$，(7.32)成为

$$1-\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{1/2}\left[\cos(\theta_2-\theta_1)-k(\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1)\right]\geqslant 0 \tag{7.34}$$

对于任意的 θ_1 与 θ_2。

上面由(7.27)推导出(7.33)与(7.34)，反之由(7.33)与(7.34)也能推导出(7.27)。换句话说，(7.27)与(7.33)及(7.34)两式是互相等价的。因此可以把(7.33)与(7.34)当作 $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为凸的条件。当且仅当(7.11) $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 中的函数 $f(\theta)$ 满足(7.33)与(7.34)两条件时，$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为凸函数。

为了阐明(7.34)条件的几何意义，考察一平面上的曲线，其方程设为

$$\boldsymbol{v}(\theta)=[f(\theta)]^{1/2}(\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\sin\theta\,\boldsymbol{j}) \tag{7.35}$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 为平面上的单位正交矢量，$\boldsymbol{v}(\theta)$ 为矢径。(7.35)式的形式与 $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 的(7.30)相同。当 $f(\theta)$ 给定时，(7.35)决定平面上的一条曲线（图 1-30）。其直角坐标参变量方程为

$$\begin{aligned} v_x(\theta)&=[f(\theta)]^{-1/2}\cos\theta \\ v_y(\theta)&=[f(\theta)]^{-1/2}\sin\theta \end{aligned} \tag{7.35$'$}$$

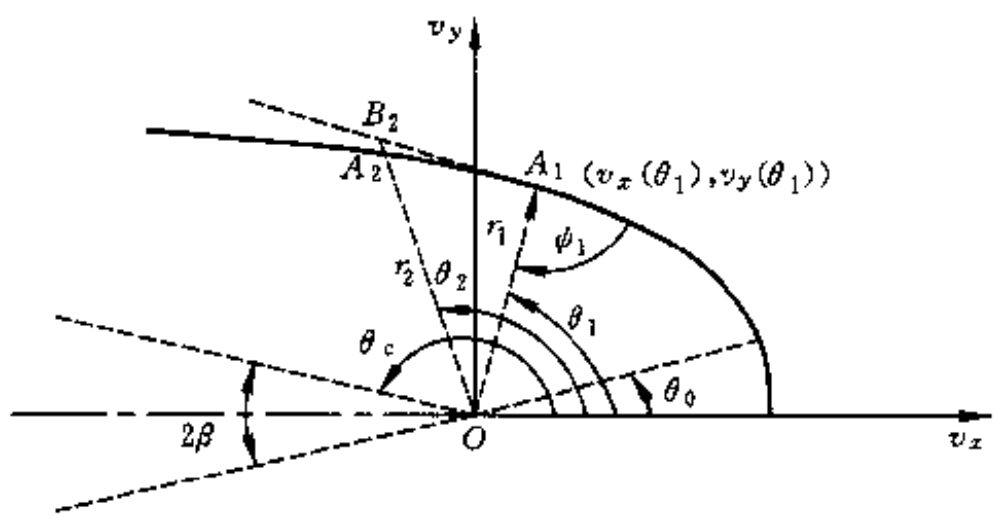


图 1-30 平面曲线 $v(\theta)$

而极坐标参数方程则为

$$r=r(\theta)=|\boldsymbol{v}(\theta)|=[f(\theta)]^{-1/2} \tag{7.35$''$}$$

当 $f(\theta)$ 服从①式时，图 1-30 平面曲线当 $\theta\leqslant\theta_0$ 时为以原点 O 为圆心，半径为 1 的圆弧。当 $\theta\to\theta_c$ 时，$|\boldsymbol{v}(\theta)|\to\infty$，故渐近方程为 $\theta=\theta_c$。下面将证明(7.34)条件的几何意义是图 1-30

的平面曲线必须是向外凸的。证明如下：以ψ表示曲线切线与矢径所夹之角（图 1-30，在曲线上$\theta=\theta_1$的A_1处的ψ角以ψ_1表示），则

$$\tan\psi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$$

以A_2表示曲线上$\theta=\theta_2$的点，以B_2表示过A_1点的切线与$\theta=\theta_2$射线之交点，则

$$OA_2=r(\theta_2)$$

$$OB_2=\frac{r(\theta_1)}{\sin[\psi_1-(\theta_2-\theta_1)]}\sin\psi_1$$

曲线为向外凸（即整体向外凸）的条件为

$$OB_2-r(\theta_2)\geqslant 0$$

即

$$1-\frac{r(\theta_2)}{r(\theta_1)}[\cos(\theta_2-\theta_1)-\cot\psi_1\sin(\theta_2-\theta_1)]\geqslant 0 \tag{7.36}$$

对于任意的θ_1,θ_2。式中

$$\cot\psi_1=\frac{r'(\theta_1)}{r(\theta_1)}$$

将(7.35)″式$r(\theta)=[f(\theta)]^{-1/2}$代入(7.36)，就得到(7.34)。因此(7.34)的几何意义为图 1-30 的平面曲线向外凸。

(7.36)要求对于任意的θ_1，θ_2均成立。若仅研究$\theta=\theta_1$附近，令$\theta_2\to\theta_1$，则(7.36)式可写成

$$\frac{1}{8f_1^2}(4f_1^2-f_1'^2+2f_1f_1'')(\theta_2-\theta_1)^2+o(\theta_2-\theta_1)^2\geqslant 0$$

式中$f_1=f(\theta_1),f_1'=f'(\theta_1),f_1''=f_1''(\theta)$。因此图 1-30 的平面曲线在$\theta=\theta_1$处局部向外凸的条件为

$$4f_1^2-f_1'^2+2f_1f_1''\geqslant 0$$

曲线处处局部向外凸的条件为

$$4f^2(\theta)-f'^2(\theta)+2f(\theta)f''(\theta)\geqslant 0 \tag{7.37}$$

对于任意的θ。上式左端也可写作

$$左端=4f^{\frac{3}{2}}(\theta)\left[\left(f^{\frac{1}{2}}(\theta)\right)''+f^{\frac{1}{2}}(\theta)\right]=4f^{2}(\theta)\left[1+k^{2}(\theta)-k'(\theta)\right]$$

以上由曲线向外凸的条件(7.36)导出了曲线处处局部向外凸的条件(7.37)。反之，由曲线处处局部向外凸的条件(7.37)也可导出向外凸的条件(7.36)。因此，式(7.33)与(7.37)表示$W^{p}(\dot{\sigma})$为凸的条件。附带指出，(7.37)亦可利用曲率公式并要求曲率为正的条件导出

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}(\psi+\theta)}{\mathrm{d}s}=\frac{r^{2}(\theta)+2r'^{2}(\theta)-r(\theta)r''(\theta)}{\{r^{2}(\theta)+r'^{2}(\theta)]^{3/2}}>0$$

将(7.35)″式$r=[f(\theta)]^{-1/2}$代入，得到

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{4}f^{3}(\theta)[2f(\theta)f''(\theta)+4f^{2}(\theta)-f'^{2}(\theta)]>0$$

这也就是(7.37)式。

为了使$f(\theta)$为满足①式的连续且光滑的函数，Christofferson 与 Hutchinson（1979）建议选取$f(\theta)$如下

$$f(\theta)=\begin{cases}1 & 当0\leqslant\theta\leqslant\theta_{0}\\ \cos^{2}\left[\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\theta-\theta_{0}}{\theta_{c}-\theta_{0}}\right)\right] & 当\theta_{0}\leqslant\theta\leqslant\theta_{c}\\ 0 & 当\theta_{c}\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}\tag{7.38}$$

在$\theta_{0}\leqslant\theta\leqslant\theta_{c}$范围内（即(7.38)式第二行），$f(\theta)$的导数为

$$f'(\theta)=-\frac{\pi}{2(\theta_{c}-\theta_{0})}\sin\left[\pi\left(\frac{\theta-\theta_{0}}{\theta_{c}-\theta_{0}}\right)\right],\ \theta_{0}\leqslant\theta\leqslant\theta_{c}$$

$$f''(\theta)=-\frac{\pi^{2}}{2(\theta_{c}-\theta_{0})^{2}}\cos\left[\pi\left(\frac{\theta-\theta_{0}}{\theta_{c}-\theta_{0}}\right)\right],\ \theta_{0}\leqslant\theta\leqslant\theta_{c}$$

注意在$0\leqslant\theta\leqslant\pi$中，$f(\theta),f'(\theta)$均为连续，但$f''(\theta)$在$\theta=\theta_{c}$（即弹塑性边界）处有间断。(7.38)代入(7.17)，得

$$k(\theta)=\begin{cases}0 & \text{当}0\leqslant\theta\leqslant\theta_0\\ \dfrac{\pi}{2(\theta_c-\theta_0)}\tan\left[\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_c-\theta_0}\right)\right] & \text{当}\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_c\\ \text{无定义} & \text{当}\theta_c\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}\tag{7.39}$$

可以验证，(7.38)满足(7.33)与(7.37)两条件，因此由(7.11)和(7.38)所定义的$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$是凸函数。

1.7.3 逆塑性本构关系

欲求(7.15)′ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$之逆，即给定$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$（必须满足塑性体积变形为零的条件，$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{kk}=0$，即$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$为偏量），求应力率的偏量$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$，使(7.15)′式成立。

当偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$沿锥轴方向$\boldsymbol{\lambda}$（即$\theta$=0）时，由前面的③式$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$沿着$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\lambda}$（见(7.13)）的方向。以$\boldsymbol{D}$表示$\boldsymbol{C}$之逆

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{-1}$$

即

$$\boldsymbol{D}:\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{D}=\bar{\boldsymbol{I}}\tag{7.40}$$

式中$\bar{\boldsymbol{I}}$为“特殊等同张量”，见前(1.4)式，$\boldsymbol{C}$已见(3.23)″式，$\boldsymbol{D}$见后节1.7.4的(7.61)式。在塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$空间中，取$\boldsymbol{D}$作为度量张量。由(7.13)与(7.12)′

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{D}:\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{D}:\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda}:\boldsymbol{\mu}=1\tag{7.41}$$

故$\boldsymbol{\mu}$为塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$空间中的单位张量。以$\phi$表示塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$与$\boldsymbol{\mu}$的夹角，则

$$\cos\phi=\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{D}:\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{D}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})^{\frac{1}{2}}}=\frac{\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{D}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})^{\frac{1}{2}}}\tag{7.42}$$

将(7.15) $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$代入(7.42)的分子与分母，并利用(7.14)，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}&=f(\theta)[1+k(\theta)\tan\theta]\cos\theta(\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}})^{1/2}\\(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{D}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})^{1/2}&=f(\theta)\left[1+k^2(\theta)\right]^{1/2}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}})^{1/2}\end{aligned}\tag{7.43}$$

因此，将(7.43)代入(7.42)，得

$$\cos\phi=\frac{\cos\theta+k(\theta)\sin\theta}{[1+k^2(\theta)]^{1/2}}\tag{7.44}$$

上式也可写作

$$\cos\phi=\cos[\theta-\alpha(\theta)]\tag{7.45}$$

式中

$$\alpha(\theta)=\tan^{-1}k(\theta)$$

因 $f'(\theta)\leqslant 0$，由(7.17)，$k(\theta)\geqslant 0$，故 $0\leqslant\alpha(\theta)\leqslant\frac{\pi}{2}$ 。(7.45)又可写作

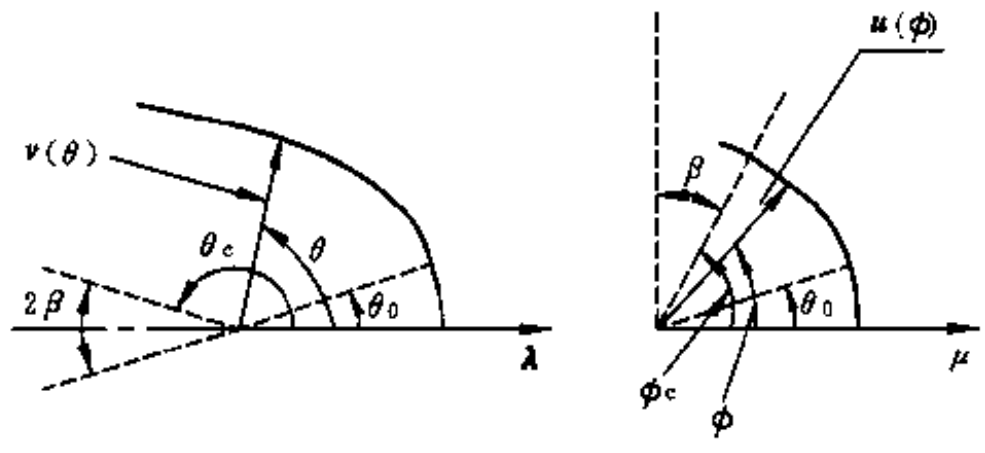
$$\phi=\theta-\alpha(\theta)\quad 或\ \tan(\phi-\theta)=-k(\theta) \tag{7.46}$$

在偏应力空间中的加载角θ 与塑性应变空间中的ϕ角($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$与 $\boldsymbol{\mu}$ 的夹角)之间的对应关系示于图 1-31 中。当偏应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ 指向全加载锥($0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$)内时，$f(\theta)=1,k(\theta)=0,\alpha(\theta)=0$，由(7.46)

$$\phi=\theta\ 当\ 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$$

而当$\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_{\mathrm{c}}$时，$\phi$ 按(7.46)式随 θ 而变化，可求出导数

$$\frac{\mathrm{d}\phi(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1+k^2(\theta)-k'(\theta)}{1+k^2(\theta)} \tag{7.47}$$



(a) θ与$v(\theta)$　　(b) ϕ与$u(\phi)$

图 1-31　θ与ϕ，$v(\theta)$与 $u(\phi)$的对应关系

如果$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸，由(7.37)必有$1+k^2(\theta)-k'(\theta)\geqslant 0$，因此$\mathrm{d}\phi(\theta)/\mathrm{d}\theta>0$，在$\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_{\mathrm{c}}$范围内，$\phi(\theta)$为单调增函数，其值从$\theta=\theta_0$时的$\phi=\phi_0=\theta_0$增为$\theta=\theta_{\mathrm{c}}$时的$\phi=\phi_{\mathrm{c}}$。当$\theta\to\theta_{\mathrm{c}}$时，由 $f(\theta),f'(\theta)$ 的连续性要求，$f(\theta)\to 0,f'(\theta)\to 0$，一般情况下有 $k(\theta)=-f'(\theta)/2f(\theta)\to\infty$(例见(7.39)第二式)，因此

$$\phi_{\mathrm{c}}=\theta_{\mathrm{c}}-\frac{\pi}{2} \tag{7.48}$$

如果在偏应力空间中锥轴$\boldsymbol{\lambda}$沿着$\boldsymbol{\sigma}'$方向，那么利用(3.23)″式 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\lambda}$必也沿着$\boldsymbol{\sigma}'$方向；

(7.48)式表明塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 必指向塑性锥内(见图 1-22(b))。

利用(7.11)与 $(7.43)_2$，可得

$$W^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}f(\theta)\dot{\boldsymbol{\sigma}}':\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{f(\theta)[1+k^2(\theta)]}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{D}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$$

(7.46)式确定 ϕ 为 θ 的函数，因此可定义函数 $g(\phi)$ 为

$$g(\phi)=\frac{1}{f(\theta)[1+k^2(\theta)]}=\frac{f(\theta)}{f^2(\theta)+\dfrac{f'^2(\theta)}{4}} \tag{7.49}$$

则 W^{p} 可写作[1)]

$$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=\frac{1}{2}g(\phi)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{D}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{7.50}$$

仿照(7.26)′式，可以定义 $\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$ 为满足下列条件的塑性应变率

$$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}})=\frac{1}{2}g(\phi)\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{D}:\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}$$

仿照图 1-29 与(7.28)式，以 $\boldsymbol{\nu}$ 表示在塑性应变空间中包含 $\boldsymbol{\mu}$ 方向与塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$ 方向的超平面上正交于 $\boldsymbol{\mu}$ 方向的“单位”张量(均以 $\boldsymbol{D}$ 为度量张量)，即

$$\boldsymbol{\nu}:\boldsymbol{D}:\boldsymbol{\nu}=1$$
$$\boldsymbol{\nu}:\boldsymbol{D}:\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\nu}:\boldsymbol{\lambda}=0$$

类似于(7.30)式，可得

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=[g(\phi)]^{-1/2}(\cos\phi\boldsymbol{\mu}+\sin\phi\boldsymbol{\nu}) \tag{12}$$

类似于(7.35)，也可以构造一平面曲线，其方程设为

$$\boldsymbol{u}(\phi)=[g(\phi)]^{-1/2}(\cos\phi\boldsymbol{i}+\sin\phi\boldsymbol{j}) \tag{7.51}$$

图 1-31 示出 θ 和 ϕ 以及 $\boldsymbol{v}(\theta)$ 和 $\boldsymbol{u}(\phi)$ 的对应关系。

现在来对比(7.11)与(7.50)两式。在(7.11)式中 W^{p} 表示成应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的二次齐次函数，式

---

1) W^{p} 写作自变量 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的函数形式(7.11)与写作自变量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的函数形式(7.50)是不同的，但为简单起见，我们用同一字母 W^{p} 表示 $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 与 $W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$。

中的θ为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的函数(见(7.14));而在(7.50)式中$W^{\mathrm{p}}$则表示成塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的二次齐次函数，式中的$\phi$为$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的函数(见(7.42))。

在$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$的(7.11)式中，$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$是可以任意独立变化的自变量，因此$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$可以对自变量$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$求导数，由(7.9)第二式这个导数就是$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{7.9$_2$}$$

由于$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$只与偏应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$有关而与$\dot{\sigma}_{kk}$无关，自变量$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$可以改为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$（见(7.11)第二式），则

$$W^{\mathrm{p}}=W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})=W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}') \tag{13}$$

尽管如此，由于$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$必须是一个对称的偏量(即其分量必须满足约束条件$\dot{\sigma}'_{ij}=\dot{\sigma}'_{ji}$和$\dot{\sigma}'_{kk}=0$)，我们只能定义$W^{\mathrm{p}}$对于自变量$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的导数$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})/\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，而不能定义对于自变量$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的导数$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}')/\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$。或者换句话说，如果由下式来定义导数

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}=\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}:\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}')}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}'}:\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' \tag{14}$$

那么，可以证明上式定义的$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})/\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}$可以相差一个任意的反对称张量$\boldsymbol{\omega}$，而$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}')/\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$可以相差任意的球形张量$a\boldsymbol{\delta}$($a$为任意的数，$\boldsymbol{\delta}$为二阶单位张量)与任意的反对称张量$\boldsymbol{\omega}$之和$a\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\omega}$(见习题 1.24)。通常规定函数$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$已经经过对称化[1]，即$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})=W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}})$(式中$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}$表示$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的转置)，$W^{\mathrm{p}}$称为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的对称函数。那么$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})/\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}$必为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的对称函数，必是一个对称张量，由⑭式也可以唯一地定义$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})/\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}$。但是，即使规定$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}')$是$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$的对称函数，由⑭式定义的导数$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}')/\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$可以相差一个任意的球形张量$a\boldsymbol{\delta}$。因此，只当规定$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}')/\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$必须是一个对称偏斜张量(偏量)，它才具有明确的意义。

与此类似，$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$的(7.50)式是自变量$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的对称函数。但由于$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$本身是一个偏斜张量，必须规定导数$\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p})/\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$为对称偏斜张量，它才具有明确的意义，由下式所定义

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}=\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}:\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} \tag{15}$$

根据二次齐次函数的 Euler 定理，由(7.11)与(7.50)，并利用$(7.9)_2$式，有

---

1) 如果$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$不满足对称化条件$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})=W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}})$，那么所谓对称化就是重新定义$\frac{1}{2}[W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})+W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}})]$为新的$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$。

$$W^{\mathrm{p}} = W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = 2\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad ⑯$$

与

$$W^{\mathrm{p}} = W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = 2\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \qquad ⑰$$

比较⑯与⑰式，由于$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$为任意的偏斜张量，可知

$$\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \tag{7.52}$$

将(7.50)代入(7.52)，仿照(7.15)式的推导，得到$\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$通过$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$的表示式，称为塑性逆本构关系

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = g(\phi)\left[(1 + l(\phi)\cot\phi)\boldsymbol{D} - \frac{l(\phi)}{\sin\phi\cos\phi}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}\right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{7.53}$$

式中

$$l(\phi) = \frac{1}{2}\frac{g'(\phi)}{g(\phi)} \tag{7.54}$$

正如同(7.37)表示(7.11)式$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸的条件一样，(7.50)式$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$为凸的条件为

$$\begin{aligned} 4g^2(\phi) - g'^2(\phi) + 2g(\phi)g''(\phi) &= 4g^{3/2}(\phi)\left[(g^{1/2}(\phi))'' + g^{1/2}(\phi)\right] \\ &= 4g^2(\phi)\left[1 + l^2(\phi) + l'(\phi)\right] \geqslant 0 \end{aligned} \tag{7.55}$$

对于任意的ϕ。

将(7.49)中$g(\phi)$代入(7.55)，并利用(7.47)与(7.17)，可得

$$l(\phi) = k(\theta) \tag{7.56}$$

利用(7.56)与(7.47)，可证明

$$1 + l^2(\phi) + l'(\phi) = \frac{\left[1 + k^2(\theta)\right]^2}{1 + k^2(\theta) - k'(\theta)} \tag{7.57}$$

因此$1 + l^2(\phi) + l'(\phi)$与$1 + k^2(\theta) - k'(\theta)$恒为同号，即同时为正，或同时为负。因此$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸的条件(7.37)与$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$为凸的条件(7.55)是等同的。换句话说，如果(7.11)式$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸，则(7.50)式$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$亦为凸，反之亦然。

出现于(7.11)式$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$中的函数$f(\theta)$与出现于(7.50)式$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$中的函数$g(\phi)$可以互

求。(7.46)式确定θ与ϕ的关系。若已知$f(\theta)$，可由(7.49)求$g(\phi)$，然后由(7.54)求$l(\phi)$。反之，若已知$g(\phi)$，可由(7.49)与(7.56)得下式

$$f(\theta)=\frac{1}{g(\phi)[1+l^2(\phi)]} \tag{18}$$

求$f(\theta)$，然后由(7.17)求$k(\theta)$。

由(7.38)式的$f(\theta)$，可如上述计算相应的$g(\phi)$。Christofferson 与 Hutchinson（1979）建议另一个方案，另选取$g(\phi)$如下：

$$g(\phi)=\begin{cases}1 & 当0\leqslant\phi\leqslant\theta_0\\ (1-x^m)^{-2} & 当\theta_0\leqslant\phi\leqslant\phi_c\end{cases} \tag{7.58}$$

式中$m>1$。因此

$$l(\phi)=\begin{cases}\dfrac{g'(\phi)}{2g(\phi)}=0 & 当0\leqslant\phi\leqslant\theta_0\\ \dfrac{mx^{m-1}}{(\phi_c-\theta_0)\ (1-x^m)} & 当\theta_0\leqslant\phi\leqslant\phi_c\end{cases}$$

式中

$$x=\frac{\phi-\theta_0}{\phi_c-\theta_0}$$

当$\phi\to\phi_c$时，$x\to1$，$g(\phi)\to\infty$。根据(7.58)式的$g(\phi)$，可计算相应的$f(\theta)$。

1.7.4 J_2角点理论

以$\boldsymbol{C}$表示J_2形变理论的塑性柔度张量（见(3.23)″）式

$$\boldsymbol{C}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{9}{4\sigma_{eq}^2}\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E_s}\right)\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}' \tag{7.59}$$

容易验证，其逆为[1)]

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{E}{E-E_s}\left[\frac{2}{3}E_s\bar{\boldsymbol{I}}-\frac{E(E_s-E_t)}{\sigma_{eq}^2(E-E_t)}\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}'\right] \tag{7.60}$$

---

1) $\boldsymbol{D}$可设为$a\bar{\boldsymbol{I}}+b\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}'$的形式。$a,b$为待定系数，由条件$\boldsymbol{D}:\boldsymbol{C}=\bar{\boldsymbol{I}}$求出。

J_2 形变理论的本构关系，可由弹性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$ 的(3.21)第一式与塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的式(3.23)′相加得到

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.61}$$

式中，由(1.8)

$$\mathscr{M} = \frac{1}{2G}\bar{\boldsymbol{I}} + \frac{1-2\nu}{3E}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta} \tag{1.8}$$

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$ 见(3.26)式。而 J_2 角点理论的本构关系可将弹性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$ 的(3.21)第一式与塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的(7.15)式相加得到

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.62}$$

前已设屈服面在 $\boldsymbol{\sigma}'$ 处为一锥顶点，且锥轴方向平行于 $\boldsymbol{\sigma}'$（图 1-26，1-27）。故 $\boldsymbol{\lambda}$ 可表示为 $\alpha\boldsymbol{\sigma}'$ 形式，α 为一待定系数，可由(7.12)式确定。最后得

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}} - \frac{1}{E}\right)^{-1/2} \frac{1}{\sigma_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{\sigma}' \tag{7.63}$$

由(7.13)，(7.59)，(7.63)得

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{C}:\boldsymbol{\lambda} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}} - \frac{1}{E}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{\sigma}' \tag{7.64}$$

由(7.14)，可计算

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{(\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}})^{1/2}} = \frac{\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}} - \frac{1}{E}\right)^{1/2}\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}}}{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}} - \frac{1}{E}\right)\dot{\boldsymbol{\sigma}}':\dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{s}}}\right)\dot{\sigma}_{\mathrm{eq}}^2\right]^{1/2}} \tag{7.65}$$

因此

$$\tan\theta = a^{1/2}\tan\bar{\theta} \qquad \theta,\bar{\theta} \in [0,\pi] \tag{7.66}$$

式中

$$a=\frac{1/E_s-1/E}{1/E_t-1/E} \tag{7.67}$$

$$\cos\bar{\theta}=\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{(\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}')^{1/2}}\frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}'}{(\dot{\boldsymbol{\sigma}}':\dot{\boldsymbol{\sigma}}')^{1/2}}=\frac{\dot{\sigma}_{eq}}{\left(\frac{3}{2}\dot{\sigma}'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}\right)^{1/2}} \tag{7.68}$$

这里θ 表示在应力空间中以 $\boldsymbol{C}$ 为度量张量时应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$与锥轴方向$\boldsymbol{\lambda}$（见(7.63)式）的夹角，而$\bar{\theta}$ 则表示以特殊等同张量$\bar{\boldsymbol{I}}$ 为度量张量时的同一夹角。

由(7.5)，利用(7.11)以及(3.21) $\mathscr{M}$ 与(7.59) $\boldsymbol{C}$，可得与本构关系(7.61)对应的应变率势 $W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$：

$$\begin{aligned}W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})&=W^{e}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})+W^{p}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})\\&=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{1}{2}f(\theta)\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2G}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)f(\theta)\right]\dot{\sigma}'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E}\right)f(\theta)\dot{\sigma}_{eq}^2+\frac{1-2\nu}{6E}\dot{\sigma}_{kk}^2\end{aligned} \tag{7.69}$$

当材料经过比例加载（或全加载路径）超过 Mises 初始屈服面以后，达到等效应力 σ_{eq}。按 Sanders 理论，在偏应力空间中后继屈服面为一球底锥面，如图 1-13 所示。锥顶点为当前偏应力$\boldsymbol{\sigma}'$，半锥角为$\bar{\beta}_s$（上面加一横，表示以$\bar{\boldsymbol{I}}$ 为度量张量的角），且

$$\sin\bar{\beta}_s=\frac{\sigma_s}{\sigma_{eq}},\quad \tan\bar{\beta}_s=\frac{\sigma_s}{(\sigma_{eq}^2-\sigma_s^2)^{1/2}} \tag{7.70}$$

σ_s 表示初始屈服限。锥轴$\boldsymbol{\lambda}$方向（见(7.63)）与锥面的夹角记作$\bar{\theta}_c$，且

$$\bar{\theta}_c=\pi-\bar{\beta}_s$$

因此

$$\sin\bar{\theta}_c=\frac{\sigma_s}{\sigma_{eq}},\ \tan\bar{\theta}_c=-\frac{\sigma_s}{(\sigma_{eq}^2-\sigma_s^2)^{1/2}} \tag{7.70$'$}$$

$\bar{\theta}_c$是以$\bar{\boldsymbol{I}}$ 为度量张量的角。如果按J_2角点理论以$\boldsymbol{C}$ 为度量张量，对应的角为θ_c，由(7.66)：

$$\tan\theta_c=a^{1/2}\tan\bar{\theta}_c=-a^{1/2}\frac{\sigma_s}{(\sigma_{eq}^2-\sigma_s^2)^{1/2}} \tag{7.71}$$

假设材料承受单向拉伸，应力从零增至$\sigma_{11}>\sigma_s$，然后开始施加拉伸应力增量$d\sigma_{11}=\dot{\sigma}_{11}dt$与剪切应力增量$d\sigma_{12}=\dot{\sigma}_{12}dt$。在二维应力空间（$\sigma_{11},\sqrt{3}\sigma_{12}$）中，初始屈服面的方程为

$$\sigma_{eq}^2=\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'=\sigma_{11}^2+3\sigma_{12}^2=\sigma_s^2$$

在图 1-32 中初始屈服面为一以σ_s为半径的圆。按 Sanders 理论，后继屈服面为以当前应力点 P 为锥顶点的圆底锥 $PABCP$。按(7.70)′式，或由图 1-32，有

$$\sin\bar{\theta}_c=\frac{\sigma_s}{\sigma_{11}},\qquad \tan\bar{\theta}_c=-\frac{\sigma_s}{(\sigma_{11}^2-\sigma_s^2)^{1/2}}$$

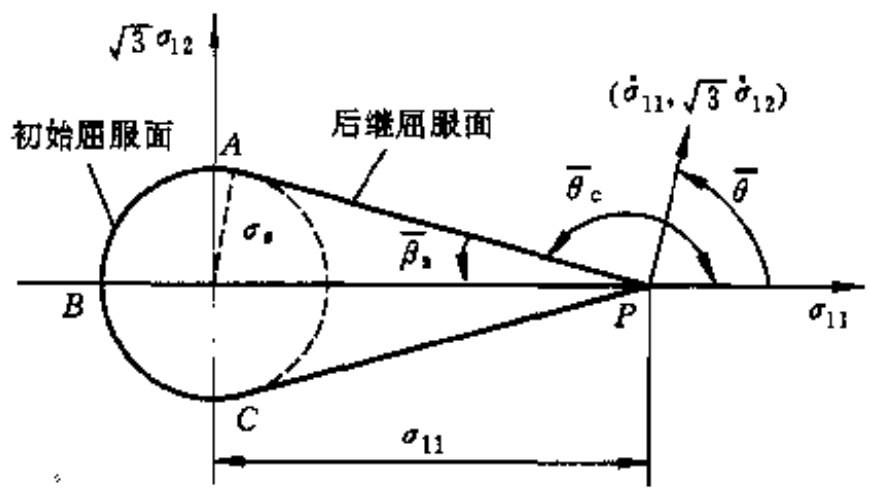


图 1-32　经过预拉伸至σ_{11}的后继屈服面

由(7.65)，偏应力空间中应力率方向与锥轴方向的夹角θ的余弦（以 C 为度量增量）为

$$\cos\theta=\frac{\dot{\sigma}_{11}}{[\dot{\sigma}_{11}^2+3a\dot{\sigma}_{12}^2]^{1/2}}\qquad \theta\in[0,\pi)$$

式中 a 见(7.67)。因此

$$\tan\theta=\frac{(3a)^{1/2}|\dot{\sigma}_{12}|}{\dot{\sigma}_{11}}\qquad ⑲$$

由(7.66)式与⑲式

$$\tan\bar{\theta}=\frac{\sqrt{3}|\dot{\sigma}_{12}|}{\dot{\sigma}_{11}}\qquad ⑳$$

$\bar{\theta}$恰好是图 1-32 中应力率（$\dot{\sigma}_{11},\sqrt{3}\dot{\sigma}_{12}$）与锥轴的夹角。

设经过预拉伸至应力σ_{11}后（图 1-32 之 P 点）拉伸应力率为$\dot{\sigma}_{11}$，同时剪切应力率为

$\dot{\sigma}_{12}$。由下式定义塑性拉伸模量 E_p 与塑性剪切模量 G_p，分别为

$$\frac{1}{E_p}=\frac{\dot{\varepsilon}_{11}^p}{\dot{\sigma}_{11}} \qquad \frac{1}{G_p}=\frac{2\dot{\varepsilon}_{12}^p}{\dot{\sigma}_{12}}$$

则由(7.15)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_p}&=f(\theta)\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E}\right)(1+k(\theta)\tan(\theta))\\ \frac{1}{G_p}&=3f(\theta)\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)(1-k(\theta)\cot(\theta))\end{aligned} \qquad ㉑$$

而由(7.53)则可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_p}&=\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E}\right)\frac{1}{g(\phi)(1-l(\phi)\tan\phi)}\\ \frac{1}{G_p}&=3\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)\frac{1}{g(\phi)(1+l(\phi)\cot\phi)}\end{aligned} \qquad ㉒$$

因此经过预拉伸应力 σ_{11} 后，应变率分量 $\dot{\varepsilon}_{11},\dot{\varepsilon}_{12}$ 与应力率分量 $\dot{\sigma}_{11},\dot{\sigma}_{12}$ 之比值各为

$$\frac{1}{E_{\text{eff}}}=\frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\dot{\sigma}_{11}}=\frac{1}{E}+\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E}\right)f(\theta)(1+k(\theta)\tan\theta)=\frac{1}{E}+\left(\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E}\right)\frac{1}{g(\phi)(1-l(\phi)\tan\phi)} \quad (7.72)$$

$$\frac{1}{G_{\text{eff}}}=\frac{2\dot{\varepsilon}_{12}}{\dot{\sigma}_{12}}=\frac{1}{G}+3\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)f(\theta)(1-k(\theta)\cot\theta)=\frac{1}{G}+3\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)\frac{1}{g(\phi)(1+l(\phi)\cot\phi)} \quad (7.73)$$

E_{eff} 称为有效拉伸模量，G_{eff} 称为有效剪切模量。利用 θ 与 ϕ 的关系式(7.46)与(7.56)，可证明 (7.72)中的两个表达式是相等的，(7.73)亦然。

当在偏应力空间中，偏应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ 的方向指向全加载锥，即 $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$，$f(\theta)=1,\ k(\theta)=0$，即在塑性应变空间中 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 方向与 $\boldsymbol{\mu}$ 的方向夹角 $\phi\leqslant\phi_0$，$g(\phi)=1,l(\phi)=0$。㉒式给出

$$\frac{1}{E_p}=\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E} \qquad \frac{1}{G_p}=3\left(\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}\right)$$

这个结果与习题 1.12 的 J_2 形变理论结果符合。按习题 1.12，J_2 流动理论给出

$$\frac{1}{E_p}=\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E} \qquad \frac{1}{G_p}=0$$

作为例子，设材料的单向拉伸曲线为 Ramberg-Osgood 型，即

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+\frac{3}{7}\frac{\sigma}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^{n-1}$$

式中σ ,ε 为单向拉伸的应力与应变。因此

$$\frac{1}{E_s}=\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{1}{E}+\frac{3}{7E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{E_t}=\frac{d\varepsilon}{d\sigma}=\frac{1}{E}+\frac{3n}{7E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^{n-1}$$

代入(7.67)，得 $a=1/n$。又设 $n=5$，泊松比$\nu=1/3$。设材料预拉伸到应力$\sigma_{11}=1.5\sigma_0$。然后开始施加应力增量$d\sigma_{11}=\dot{\sigma}_{11}dt, d\sigma_{12}=\dot{\sigma}_{12}dt$。由(7.70)′，$\bar{\theta}_c=138^\circ$。由(7.71)，$\theta_c=158^\circ$。由(7.48)，$\phi_c=\theta_c-90^\circ=68^\circ$。图 1-33 示按(7.73)计算的$G_{eff}/G$随$\bar{\theta}$角的变化，$\bar{\theta}$与加载方向有关（见 20式及图 1-32）。

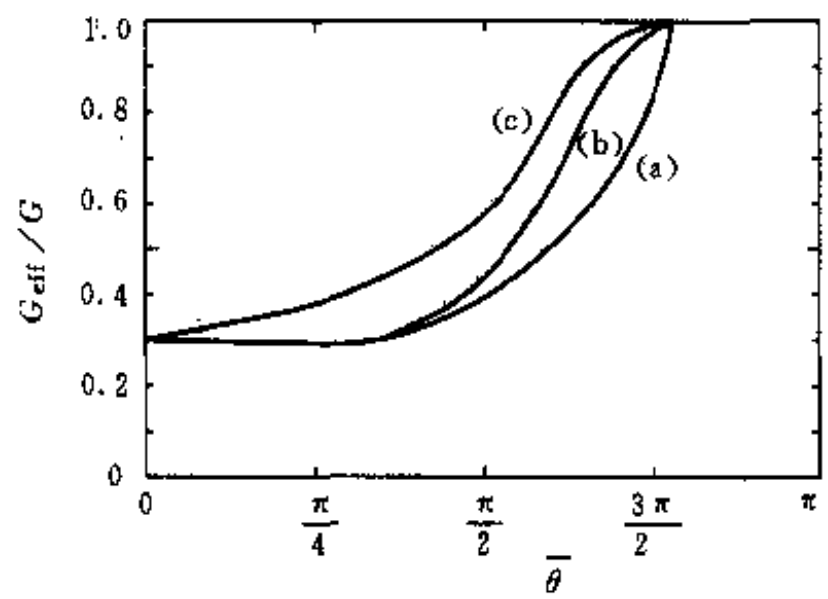


图 1-33　G_{eff}/G随$\bar{\theta}$角的变化

$$\bar{\theta}=\tan^{-1}\left(\sqrt{3}|\dot{\sigma}_{12}|/|\dot{\sigma}_{11}|\right)$$

曲线(a)：$f(\theta)$ 取(7.38)，n=5，取 $\theta_0=\frac{1}{2}\phi_C=34^\circ$，故 $\bar{\theta}_0=56^\circ$

曲线(b)：$g(\phi)$ 取(7.58)，m=3，取 $\theta_0=\frac{1}{2}\phi_C=34^\circ$，故 $\bar{\theta}_0=56^\circ$

曲线(c)：$g(\phi)$ 取(7.58)，m=3，取 $\theta_0=0$，　　故 $\bar{\theta}_0=0$

1.7.5 应变率势理论

(7.8)式为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{7.8}$$

式中的$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$称为应变率势。规定$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的对称函数。$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸是一个重要性质，下面再作进一步的讨论。

若$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$满足下列(1)~(3) 的性质之一，则称$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸函数：

(1) 对于任意的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$与$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$，有$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2)-W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1)\geqslant\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{\dot{\sigma}=\dot{\sigma}_1}:(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2-\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1)$ $\quad(7.74)_1$

(2) $\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}$为正定，即对于任意的二阶对称张量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}:\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}:\boldsymbol{x}\geqslant 0$ $\quad(7.74)_2$

(3) 对于任意的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$与$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$，有$\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{\sigma=\dot{\sigma}_2}-\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{\dot{\sigma}=\dot{\sigma}_1}\right]:(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2-\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1)\geqslant 0$ $\quad(7.74)_3$

上述三个性质是互相等价的。如果$(7.74)_1$，$(7.74)_3$式中等式只当$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1=\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$时成立，或$(7.74)_2$式中等式只当 $\boldsymbol{x}=0$ 时成立，则称$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为绝对凸函数。

$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$称为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次函数（指二次齐次函数，下同），如果

$$W(k\dot{\boldsymbol{\sigma}})=c^2W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{7.75}$$

如果$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次绝对凸函数，则必有

$$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})>0 \qquad ㉓$$

对于任意的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}\neq 0$。

现在举一个简单的例子：

$$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.76}$$

式中$\boldsymbol{C}$为四阶常张量，具有 Voigt 对称性。(7.76)代入(7.8)，给出

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}=\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.77}$$

当 $\boldsymbol{C}$ 取(7.59)式（即(3.23)″）时，(7.77)就是 J_2 形变理论的塑性应变率。因此(7.76)就是 J_2 形变理论的塑性应变率势。

式(7.76) $W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为绝对凸的三种条件(7.74)为

(1) 对于任意的 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$ 与 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$，且 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 \neq \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$，有

$$\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 : \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 : \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 > \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 : \boldsymbol{C} : (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1)$$

即

$$\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1) : \boldsymbol{C} : (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1) > 0 \tag{7.78$_1$}$$

(2) $\boldsymbol{C}$ 为正定，即对于任意的 $\boldsymbol{x}$，且 $\boldsymbol{x} \neq 0$；

$$\boldsymbol{x} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{x} > 0 \tag{7.78$_2$}$$

(3) 对于任意的 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$ 与 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$，且 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 \neq \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$，有 $(\boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1) : (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1) > 0$

即

$$(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1) : \boldsymbol{C} : (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1) > 0 \tag{7.78$_3$}$$

容易看出(7.78)的三个式子是互相等价的。

下面回到一般情况。(7.8)式确定 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的函数。下面给出逆函数存在条件。

设 $W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为二次函数，且恒正，则(7.8)必有逆。

证 设给定 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，求 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，使(7.8)满足。构造一 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的函数（对于给定的 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$）

$$f(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

因为 $W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的二次函数，且恒正（见㉓式），故必存在 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 使 $f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为极小，即

$$f(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \min \tag{7.79}$$

$f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ 为极小，必有

$$\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$$

对于任意的 $\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，故有

$$\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$$

即(7.8)式。因此给定$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，必存在$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$（即使得(7.79)的$f(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为极小的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$）满足(7.8)，故(7.8)必有逆。证毕。

下面给出(7.8)有逆且唯一的条件。

设$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为二次绝对凸函数，则(7.8)式必有逆，且唯一。

证 由㉓式，$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$恒正，上面已证明(7.8)式必有逆。现用反证法证明逆为唯一。如果对于给定的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，有两个不同的$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$使(7.8)满足，记作$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$与$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$，且$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 \neq \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$，则

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{\dot{\sigma}=\dot{\sigma}_1} = \left(\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}\right)_{\dot{\sigma}=\dot{\sigma}_2}$$

显然破坏$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为绝对凸的条件$(7.74)_3$（其中“$\geqslant$”改为“$>$”）。因此(7.8)的逆必唯一。证毕。

(7.8)之逆确定$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$为$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$的函数$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$。把这个函数$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$代入$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$，得到$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}))$，仍记作$W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$，即

$$W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})) \tag{7.80}$$

下面证明：

若$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为二次绝对凸函数，则(7.80)所定义的$W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$恰好也是应力率势函数，即

$$\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.81}$$

证 因$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为二次齐次函数，由 Euler 定理，并利用(7.8)

$$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

因此

$$W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - W(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}))$$

且$W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$必为二次齐次函数。上式对$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &\quad - \frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\end{aligned}$$

即(7.81)。 (证毕)

利用(7.8)与(7.81)，可将$W(\boldsymbol{\sigma})$为凸的条件$(7.74)_3$改写为以下形式

$$(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1):\left[\left(\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_2}-\left(\frac{\partial W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)_{\varepsilon=\dot{\varepsilon}_1}\right]>0 \tag{7.82}$$

(7.82)恰好是$W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$为凸的条件。因此，如果$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为二次凸函数，则$W(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$亦必为二次凸函数。

应变率势$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为弹性应变率势$W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$与塑性应变率势$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$之和（见(7.5)式）。$W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为二次绝对凸函数。如果$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为（二次）凸函数，则$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$必为（二次）绝对凸函数。

附带指出，在节 1.4.2 Koiter 理论硬化材料本构关系之逆存在性的证明所用到的⑧式正是本节的(7.79)式。式⑧左端的第一项为$W^{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$，下面证明该⑧式左端第二项表示$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$。(4.11)式$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的一次齐次函数，故$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次齐次函数，由 Euler 定理，有

$$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})=\frac{1}{2}\frac{\partial W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$$

将(4.11)式$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$代入，并利用(4.9)′式加载系数$c_\alpha$，可得

$$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})=\frac{1}{2}\sum_\alpha\frac{c_\alpha}{h_\alpha}(\dot{f}_\alpha)^2=\frac{1}{4}\sum_\alpha\frac{1}{h_\alpha}\dot{f}_\alpha\left(\dot{f}_\alpha+\left|\dot{f}_\alpha\right|\right) \tag{㉔}$$

式中$\sum$对当前应力所在的诸屈服曲面取和。

$$\dot{f}_\alpha=\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

㉔式$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$就是⑧式左端的第二项。节 1.4.2 所证明的对理想塑性材料与硬化材料

$$(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}):(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(1)}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}(2)})\geqslant 0$$

说明 Koiter 理论的$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$满足条件$(7.74)_3$，因而是凸函数，所以$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$是二次绝对凸函数。因此逆本构关系存在且唯一。

J_2角点理论$W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为凸函数的条件（见节 1.7.2）。如果满足，那么$W(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$为二次绝对凸函数。

最后指出，本小节中的部分讨论中把应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$与应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$分别改写为应力$\boldsymbol{\sigma}$与应变$\boldsymbol{\varepsilon}$，可以建立非线性弹性的应变势理论

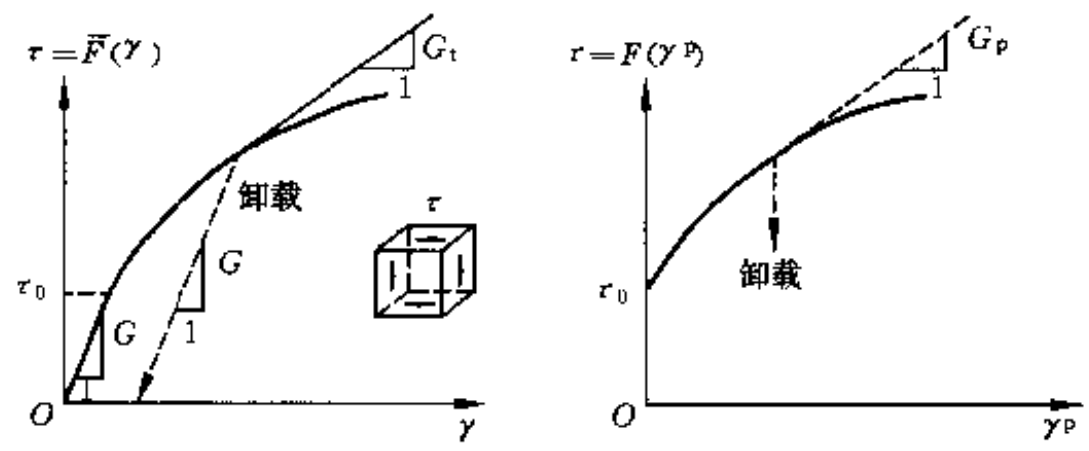
$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\partial W(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$

1.8 压力敏感及塑性膨胀模型

在以上各节所讨论的弹塑性本构关系中，屈服条件只取决于偏斜应力$\boldsymbol{\sigma}'$，而与静水应力σ_{kk}无关。与此同时，塑性变形无体积变化。对于岩土材料及某些高强钢，上述条件不满足。本节介绍 Rudnicki 与 Rice（1975）所提出的一种模型。它考虑静水应力对屈服条件的影响,称为压力敏感性[1]（pressure-sensitivity），及塑性变形的体积变化,称为塑性膨胀(dilatant plasticity)。

我们先来研究材料在单剪作用下的行为。在单剪作用下，剪应力τ与剪切角γ之间的关系如图 1-34(a)的曲线所示，可表示为

$$\tau = \overline{F}(\gamma) \tag{8.1}$$



(a) $\tau\sim\gamma$曲线图　　(b) $\tau\sim\gamma^p$曲线图

图 1-34　单剪作用下的剪应力-剪切角图

$\overline{F}(\gamma)$为材料函数。将剪切角增量 dγ分为弹性与塑性两部分

$$\mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}\gamma^{\mathrm{e}} + \mathrm{d}\gamma^{\mathrm{p}} \tag{8.2}$$

式中

$$\mathrm{d}\gamma^{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{d}\tau}{G_{\mathrm{p}}} \tag{8.3}$$

G_{p}称为塑性剪切模量。(8.2)式除以 dτ后，得

1) 实际上应为静水应力敏感性。

$$\frac{1}{G_t}=\frac{1}{G}+\frac{1}{G_p} \tag{8.4}$$

式中 G 为弹性剪切模量，G_t 为切线剪切模量：为

$$G_t=\frac{d\tau}{d\gamma}=\frac{d\overline{F}(\gamma)}{d\gamma}=\overline{F}'(\gamma) \tag{8.5}$$

若把单剪曲线中的自变量γ变换为塑性剪切角

$$\gamma^p=\gamma-\gamma^e=\gamma-\frac{\tau}{G}$$

则由(8.1)

$$\tau=\overline{F}\left(\gamma^p+\frac{\tau}{G}\right)$$

由此可解出τ为塑性剪切角 γ^p 的函数，记作

$$\tau=F(\gamma^p) \tag{8.6}$$

$F(\gamma^p)$ 为材料函数，其曲线如图 1-34(b)所示。将(8.6)代入(8.3)，得

$$G_p=\frac{dF(\gamma^p)}{d\gamma^p}=F'(\gamma^p) \tag{8.7}$$

由于材料具有塑性膨胀，在产生剪切角塑性增量 $d\gamma^p$ 的同时，将出现塑性体积增量 $d\varepsilon_v^p$，为

$$d\varepsilon_v^p=\beta d\gamma^p=\beta\frac{d\tau}{G_p} \tag{8.8}$$

式中$\beta>0$，称为膨胀因子，为一材料常数。在单剪作用下，材料的剪切硬化函数为(8.6)式。因此，判别加载或弹性卸载的条件为：

$$\tau=\begin{cases}F\left(\gamma^p\right)\text{且}d\tau>0 & \text{加载}\\ F\left(\gamma^p\right)\text{且}d\tau<0\ \text{或}\ \tau<F\left(\gamma^p\right) & \text{弹性卸载}\end{cases} \tag{8.9}$$

加载情况，$d\gamma^p$ 由(8.3)确定，$d\varepsilon_v^p$ 由(8.8)确定。卸载情况，$d\gamma^p=d\varepsilon_v^p=0$。塑性膨胀的机制可以用两个表面凹凸不平的面相接触来说明，当两个面相对错动时，它们之间的距离由于表面凹凸不平而发生变化，因而引起体积变化。

现在来研究材料在三向均压 p（p 受压为正）作用下的剪切行为。由于均压 p 的影响，材料的剪切屈服条件可由(8.6)把剪应力τ改为有效剪应力 $\tau-\mu p$ 而得。

$$\tau_{eff}=\tau-\mu p=F(\gamma^p) \tag{8.10}$$

式中μp具有摩擦力的性质，μ称为内摩擦系数，为一材料常数。图 1-34 仍旧适用，但纵坐标τ应改为$\tau-\mu p$。在图 1-35 的二维应力空间 (p,τ) 中，(8.10)式表示后继屈服平面。加载或卸载条件为

$$\tau_{\text{eff}}=F\left(\gamma^{\text{p}}\right) \text{ 且 } \mathrm{d}(\tau-\mu p)>0 \qquad \text{即 } \mathrm{d}\tau>\mu\mathrm{d}p \qquad \text{加载}$$

$$\tau_{\text{eff}}=F\left(\gamma^{\text{p}}\right) \text{ 且 } \mathrm{d}(\tau-\mu p)<0 \qquad \text{即 } \mathrm{d}\tau<\mu\mathrm{d}p$$

或 $$\tau_{\text{eff}}<F\left(\gamma^{\text{p}}\right) \qquad \text{弹性卸载} \tag{8.11}$$

在加载情况，图 1-35 中加载方向$\overrightarrow{AB}$ $(\mathrm{d}p,\mathrm{d}\tau)$ 指向屈服面上方。由(8.3)与(8.8)，将$\mathrm{d}\tau$改为$\mathrm{d}\tau-\mu\mathrm{d}p$ 得塑性剪切角增量与塑性体积变形增量，分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma^{\text{p}}&=\frac{1}{G_{\text{p}}}(\mathrm{d}\tau-\mu\mathrm{d}p)\\ \mathrm{d}\varepsilon_v^{\text{p}}&=\frac{\beta}{G_{\text{p}}}(\mathrm{d}\tau-\mu\mathrm{d}p)\end{aligned} \tag{8.12}$$

$(-\mathrm{d}\varepsilon_v^{\text{p}},\mathrm{d}\gamma^{\text{p}})$在图 1-35 中用$\overrightarrow{AC}$表示。只当$\beta=\mu$时$\overrightarrow{AC}$才正交于屈服面。(8.12)叠加上弹性变形后，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma&=\frac{1}{G}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{G_{\text{p}}}(\mathrm{d}\tau-\mu\mathrm{d}p)\\ \mathrm{d}\varepsilon_v&=-\frac{1}{K}\mathrm{d}p+\frac{\beta}{G_{\text{p}}}(\mathrm{d}\tau-\mu\mathrm{d}p)\end{aligned} \tag{8.13}$$

式中K为弹性体积模量

$$\frac{1}{K}=\frac{3(1-2\nu)}{E}$$

(8.13)亦可写成率形式

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}&=\frac{1}{G}\dot{\tau}+\frac{1}{G_{\text{p}}}(\dot{\tau}-\mu\dot{p})\\ \dot{\varepsilon}_v&=-\frac{1}{K}\dot{p}+\frac{\beta}{G_{\text{p}}}(\dot{\tau}-\mu\dot{p})\end{aligned} \tag{8.14}$$

加载或卸载条件(8.11)亦可写成率形式

$$\tau_{\text{eff}}=F\left(\gamma^{\text{p}}\right) \text{ 且 } \dot{\tau}-\mu\dot{p}>0 \qquad \text{加载}$$

$$\tau_{\text{eff}}=F\left(\gamma^{\text{p}}\right) \text{ 且 } \dot{\tau}-\mu\dot{p}<0$$

或 $$\tau_{\text{eff}}<F\left(\gamma^{\text{p}}\right) \qquad \text{弹性卸载} \tag{8.15}$$

在卸载情况，图 1-35 中载荷增量指向屈服面下方，$d\gamma^p = d\varepsilon_v^p = 0$。

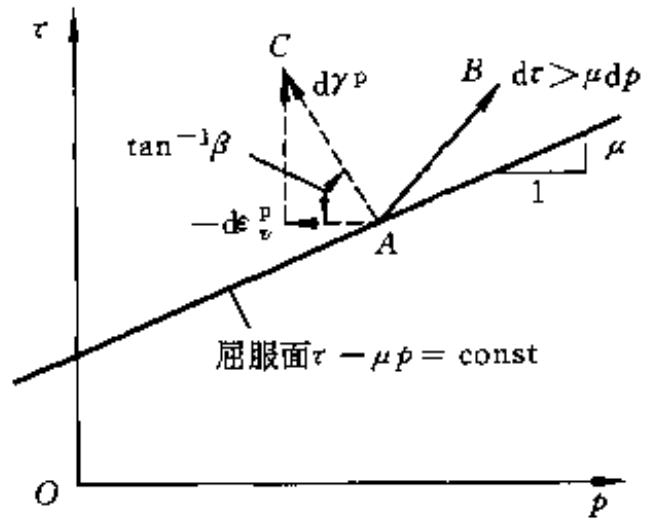


图 1-35　二维应力空间(τ, p)中的屈服面与塑性变形增量 AC

现在把屈服条件(8.10)与本构关系(8.14)推广到三维应力情况。此时可定义有效剪应力 τ_{eff} 为

$$\tau_{eff} = \tau_{eq} + \frac{1}{3}\mu\sigma_{kk} \tag{8.16}$$

式中等效剪应力 τ_{eq} 与 Mises 等效应力 σ_{eq} 的关系为

$$\tau_{eq} = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{eq} \tag{8.17}$$

由(8.16)可以计算有效剪应力 τ_{eff} 的率为

$$\dot{\tau}_{eff} = \boldsymbol{Q}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{8.18}$$

式中

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{2\tau_{eq}}\boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{3}\mu\boldsymbol{\delta} \tag{8.19}$$

在静水压下的单剪情况，(8.16)的 τ_{eff} 退化为 $\tau - \mu p$，$\dot{\tau}_{eff}$ 退化为 $\dot{\tau} - \mu\dot{p}$。在三维应力情况，定义塑性剪切角率 $\dot{\bar{\gamma}}^p$ 为

$$\dot{\bar{\gamma}}^p = \left(2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p'}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p'}\right)^{1/2} \tag{8.20}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p'}$ 为塑性偏应变率（即塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 之偏斜部分）。而累积塑性剪切角 $\bar{\gamma}^p$ 则定义为

$$\bar{\gamma}^p = \int \dot{\bar{\gamma}}^p dt \tag{8.21}$$

在单调增加的单剪情况下，(8.21)的 $\bar{\gamma}^p$ 恰好退化为塑性剪切角 γ^p。三维应力情况下屈服条件 (8.10)可推广为

$$\tau_{\text{eff}} = \tau_{\text{eq}} + \frac{1}{3}\mu\sigma_{kk} = F(\bar{\gamma}^{\text{p}}) \tag{8.22}$$

而(8.7)则推广为

$$G_{\text{p}} = F'(\bar{\gamma}^{\text{p}}) \tag{8.23}$$

式中 F 函数取自图 1-34(b)的单剪曲线 $\tau = F(\gamma^{\text{p}})$。

可以把本构关系(8.14)推广于三维应力情况如下。

$$\begin{aligned} 2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' &= \frac{1}{G}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \frac{1}{G_{\text{p}}}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\tau_{\text{eq}}}\dot{\tau}_{\text{eff}} \\ \operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{3K}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\beta}{G_{\text{p}}}\dot{\tau}_{\text{eff}} \end{aligned} \tag{8.24}$$

(8.14)第二式中的 $\dot{\tau} - \mu\dot{\varphi}$ 推广为(8.24)第二式中的 $\dot{\tau}_{\text{eff}}$，但在(8.14)第一式中的 $\dot{\tau} - \mu\dot{\varphi}$ 则推广为(8.24)第一式中的

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\tau_{\text{eq}}}\dot{\tau}_{\text{eff}}$$

这是因为(8.24)第一式是一个张量等式。在均压作用下的单剪情况，张量 $\boldsymbol{\sigma}'/\tau_{\text{eq}}$ 的非零分量恰好等于 1。

(8.24)的两式分别确定应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的偏斜部分与球形部分。把两式组合起来，则有

$$\frac{1}{2}(8.24)_1 + \frac{1}{3}(8.24)_2\boldsymbol{\delta}$$

并利用(8.18)，可得率形式的本构关系为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{M}^* : \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = M^*_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} \tag{8.25}$$

式中 $\boldsymbol{M}^*$ 为弹塑性柔度张量

$$\boldsymbol{M}^* = \mathscr{M} + \frac{\alpha}{G_{\text{p}}}\boldsymbol{PQ} \tag{8.26}$$

$\mathscr{M}$ 为弹性柔度张量（四阶），$\boldsymbol{Q}$ 见式(8.19)，G_{p} 见式(8.23)。

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2\tau_{\text{eq}}}\boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{3}\beta\boldsymbol{\delta} \tag{8.27}$$

α 为加载系数

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当 } \tau_{\text{eff}}=F(\bar{\gamma}^{\text{p}}) \quad \text{且 } \dot{\tau}_{\text{eff}}>0 \\ 0 & \text{当 } \tau_{\text{eff}}=F(\bar{\gamma}^{\text{p}}) \quad \text{且 } \dot{\tau}_{\text{eff}}\leqslant 0 \\ & \quad \text{或} \quad \tau_{\text{eff}}<F(\bar{\gamma}^{\text{p}})\end{cases} \tag{8.28}$$

(8.18)式说明在应力空间中屈服面的法线方向为 $\boldsymbol{Q}$，(8.26)式说明塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}$ 的方向为 $\boldsymbol{P}$。因此如果 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{Q}$，塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}$ 不沿屈服面的法线方向，正交法则不成立。比较(8.19) $\boldsymbol{Q}$ 与(8.27)$\boldsymbol{P}$，可见只当内摩擦系数μ值等于膨胀因子β时，正交法则才成立。

对于高强度马氏体钢，$\mu\approx 0.05$，$\beta\approx\mu/15$，β很小，故材料近似为塑性不可压缩。当 $\beta=\mu=0$ 时，本节的理论退化为节 1.2.1 J_2 流动理论各向同性硬化情况。

把本构关系(8.24)用于单向拉伸情况，可得单向拉伸之切线模量

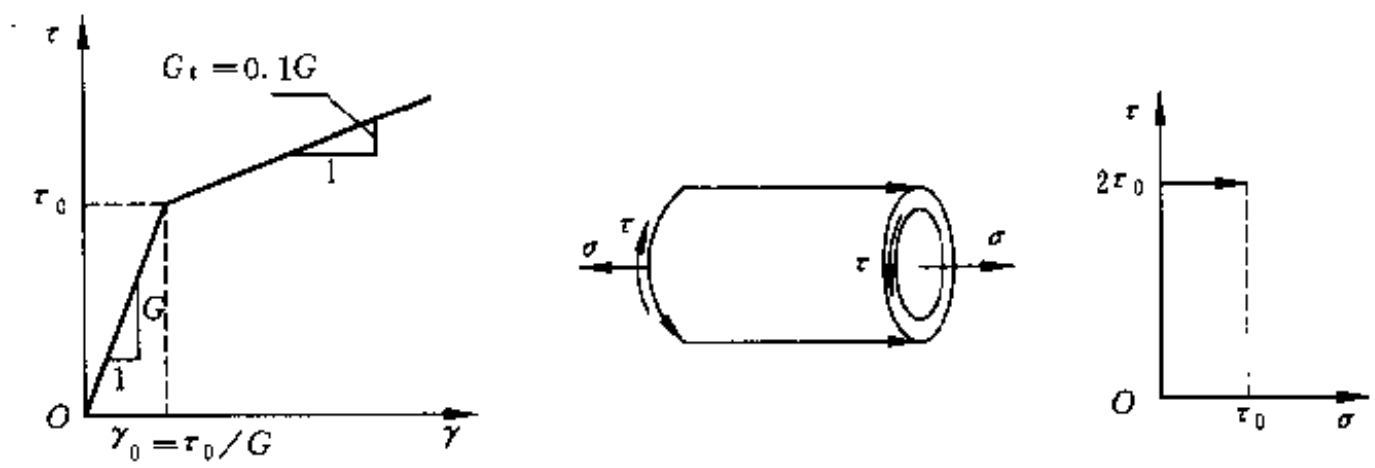
$$\frac{1}{E_{\text{t}}}=\frac{1}{E}+\frac{1}{G_{\text{p}}(\bar{\gamma}^{\text{p}})}\frac{1}{3}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{\mu}{\sqrt{3}}\right) \tag{8.29}$$

式中由(8.20)，(8.21)

$$\bar{\gamma}^{\text{p}}=\sqrt{3}\varepsilon_{11}^{\text{p}'}$$

习 题 1

1.1 设有一线性硬化材料，剪切时的应力应变曲线如图 1-36(a)，图中γ 为剪切角，τ_0 为剪切屈服限，G 为弹性剪切模量，G_{t} 为切线剪切模量。设在图(b)所示薄管试验中材料先受剪切应力从零到 $2\tau_0$，然后维持剪应力不变，再加拉应力从零到τ_0。试用各向同性硬化 J_2 流动理论计算最后的变形。加载历史示于图(c)。



(a) 剪应力应变曲线　　(b) 薄管试验　　(c) 加载历史

图 1-36　习题 1.1 图

解答：

$$\gamma=11\gamma_0+9\gamma_0\ln\frac{13}{12},\qquad \varepsilon_{11}=\frac{\gamma_0}{2(1+\nu)}+\left[3-6\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\right]\gamma_0$$

1.2 证明弹塑性刚度张量$\boldsymbol{L}$ (1.33)式可以表示成(见 Besseling & Van der Giessen, 1994):

$$\boldsymbol{L}=\mathscr{L}-\alpha(1-h')\mathscr{P}$$

式中

$$\mathscr{P}=\frac{1}{\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda} \qquad h'=\frac{h}{h+\boldsymbol{\lambda}:\boldsymbol{\mu}}$$

$\boldsymbol{\mu}$见(1.25)，$\boldsymbol{\lambda}$见(1.34)，h见(1.23)。对于J_2流动理论各向同性硬化情况，有

$$h'=\frac{1}{1+3G\dfrac{1}{E_{\mathrm{p}}}}=\frac{1}{1+3G\left(\dfrac{1}{E_{\mathrm{t}}}-\dfrac{1}{E}\right)}$$

1.3 证明在平面应力（$\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$）情况下，各向同性硬化的 J_2 流动理论逆本构关系（2.9）可写作以下的矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{d}\sigma_x\\ \mathrm{d}\sigma_y\\ \mathrm{d}\tau_{xy}\end{Bmatrix}=E\left[L^{\mathrm{P}}\right]\begin{Bmatrix}\mathrm{d}\varepsilon_x\\ \mathrm{d}\varepsilon_y\\ \mathrm{d}\gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

式中 $\mathrm{d}\sigma_x=\mathrm{d}\sigma_{11}$，$\mathrm{d}\sigma_y=\mathrm{d}\sigma_{22}$，$\mathrm{d}\tau_{xy}=\mathrm{d}\sigma_{12}$ 为应力增量；$\mathrm{d}\varepsilon_x=\mathrm{d}\varepsilon_{11}$，$\mathrm{d}\varepsilon_y=\mathrm{d}\varepsilon_{22}$，$\mathrm{d}\gamma_{xy}=2\mathrm{d}\varepsilon_{12}$ 为工程应变分量；$[L^{\mathrm{P}}]$为对称矩阵如下：

$$[L^{\mathrm{P}}]=\frac{1}{\mathrm{Q}}\begin{bmatrix}\sigma_y'^2+2P & \cdots & \cdots\\ -\sigma_x'\sigma_y'+2\nu P & \sigma_x'^2+2P & \cdots\\ -\dfrac{\sigma_x'+\nu\sigma_y'}{1+\nu}\tau_{xy} & -\dfrac{\sigma_y'+\nu\sigma_x'}{1+\nu}\tau_{xy} & \dfrac{R}{2(1+\nu)}+\dfrac{2E_{\mathrm{p}}}{9E}(1-\nu)Y^2\end{bmatrix}$$

$$P=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{g}{2G}-2(\sigma_x'^2+\sigma_y'^2+\sigma_x'\sigma_y')\right]=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{2}{9}\frac{E_{\mathrm{p}}}{G}Y^2+2\tau_{xy}^2\right]$$

$$R=\sigma_x'+2\nu\sigma_x'\sigma_y'+\sigma_y'^2$$

$$Q=(1-\nu)\frac{g}{2G}-(1-2\nu)\sigma_z'^2=R+2(1-\nu^2)P$$

g 见（2.11）式，$\sigma_x',\sigma_y',\sigma_z',\tau_{xy}$ 为偏应力分量，Y 由 P 的表达式定义。

提示：令（2.9）中分量$\dot{\sigma}_z=0$,可解出$\dot{\varepsilon}_z$。本题结果取自 Yamata 与 Yoshimura，1968。

1.4 对于正交各向异性材料，设 x，y，z 为各向异性主轴。Hill (1950)假设初始屈服条件为

$$2f_0(\sigma_{ij})=F_0(\sigma_y-\sigma_z)^2+G_0(\sigma_z-\sigma_x)^2+H_0(\sigma_x-\sigma_y)^2+2L_0\tau_{yz}^2+2M_0\tau_{zx}^2+2N_0\tau_{xy}^2=1 \quad ①$$

经过塑性变形后，后继屈服条件为

$$2f(\sigma_{ij})=F(\sigma_y-\sigma_z)^2+G(\sigma_z-\sigma_x)^2+H(\sigma_x-\sigma_y)^2+2L\tau_{yz}^2+2M\tau_{zx}^2+2N\tau_{xy}^2=1 \quad ②$$

假设在应力空间中屈服面等向膨胀（各向同性硬化），有

$$\frac{F}{F_0}=\frac{G}{G_0}=\frac{H}{H_0}=\frac{L}{L_0}=\frac{M}{M_0}=\frac{N}{N_0}=\frac{1}{h^2} \quad ③$$

式中 h 为塑性功 W^{p} 的函数（材料函数），即

$$\begin{aligned}h&=\left[F_0(\sigma_y-\sigma_z)^2+G_0(\sigma_z-\sigma_x)^2+H_0(\sigma_x-\sigma_y)^2+2L_0\tau_{yz}^2+2M_0\tau_{zx}^2+2N_0\tau_{xy}^2\right]^{1/2}\\&=h(W^{\mathrm{p}})\end{aligned} \quad ④$$

塑性功增量的定义为

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}=\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} \quad ⑤$$

试导出塑性本构方程。

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\varepsilon_x=\mathrm{d}\lambda\left[H(\sigma_x-\sigma_y)+G(\sigma_x-\sigma_z)\right] && \mathrm{d}\varepsilon_{yz}=\mathrm{d}\lambda L\tau_{yz}\\&\mathrm{d}\varepsilon_y=\mathrm{d}\lambda\left[F(\sigma_y-\sigma_z)+H(\sigma_y-\sigma_x)\right] && \mathrm{d}\varepsilon_{zx}=\mathrm{d}\lambda M\tau_{zx}\\&\mathrm{d}\varepsilon_z=\mathrm{d}\lambda\left[G(\sigma_z-\sigma_x)+F(\sigma_z-\sigma_y)\right] && \mathrm{d}\varepsilon_{xy}=\mathrm{d}\lambda N\tau_{xy}\end{aligned} \quad ⑥$$

并证明塑性功增量

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda \quad ⑦$$

当给定应力增量 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ 时（设加载情况）

$$\mathrm{d}h=\frac{1}{h}\frac{\partial f_0}{\partial\sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij}$$

$$\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}h(W^{\mathrm{p}})/\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}} \quad ⑧$$

式中 $\frac{\mathrm{d}h(W^{\mathrm{p}})}{\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}}$ 为材料函数 $h(W^{\mathrm{p}})$(见④中)的导数。

注：可以定义等效塑性应变增量 $\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 与功等效应力 $\bar{\sigma}$，使得

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}=\bar{\sigma}\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \quad ⑨$$

一个可能的选择（可以退化到各向同性材料情况）是

$$\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(F_0+G_0+H_0\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}}{h} \tag{10}$$

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{h}{\left(F_0+G_0+H_0\right)^{1/2}} \tag{11}$$

1.5 设习题 1.4 中的材料，沿 x, y, z 三个方向的拉伸屈服限为 σ_0，沿 yz, zx, xy 的剪切屈服限均为 τ_0，剪切应力应变曲线如习题 1.1 图 1-36(a) 所示。且设 $\sigma_0=\tau_0$，在习题 1.1 图 (c) 的加载历史下计算最后的变形。

解答：

$$\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_0}{2(1+\nu)G}+\frac{9\sigma_0}{G}\left(1-2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma_{12}=\frac{11\sigma_0}{G}+\frac{9\sigma_0}{G}\ln\frac{5}{4}$$

1.6 设材料满足正交法则(1.10)式。证明塑性变形无体积变化（即 $\dot{\varepsilon}_{ii}^{\mathrm{p}}=0$）的必要且充分条件为屈服条件 (1.9) 中左端的屈服函数 $f\left(\boldsymbol{\sigma},Y_1,\cdots,Y_n\right)$ 与应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的第一不变量 $J_1(\boldsymbol{\sigma})$ 无关（即：对于任意的 a 值，都有：$f\left(\boldsymbol{\sigma}+a\mathbf{1},Y_1,\cdots,Y_n\right)=f\left(\boldsymbol{\sigma},Y_1,\cdots,Y_n\right)$）。

1.7 直接由一般公式（1.30）并利用（1.23）与 (1.25)，分别按 Prager 假定与 Ziegler 假定推导混合硬化情况 J_2 流动理论的弹塑性柔度张量（2.33）式 $\boldsymbol{M}$。

1.8 将节 1.2.2 混合硬化 J_2 流动理论本构关系用于单向拉伸情况。证明以下结果：

(1) 按 Prager 的背应力演化假定

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}},\ E_{\mathrm{b}}=\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}b_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}},\ b_{22}=b_{33}=-\frac{1}{2}b_{11}$$

(2) 按 Ziegler 的背应力演化假定

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}},\ E_b=\frac{\mathrm{d}b_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}}=\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}b_{11}'}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}},\ b_{22}=b_{33}=0$$

1.9 给定材料的 $E_{\mathrm{p}}\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right),\sigma_{\mathrm{F}}\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right)$，证明对于给定的任意加载历史 $\boldsymbol{\sigma}(t)$，按混合硬化的 J_2 流动理论，无论按 Prager 或按 Ziegler 的背应力演化假定，均得到相同的变形过程 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$。（注意：本题结论只适用于光滑屈服面的情况。当屈服面不光滑而具有角点或棱线时，按 Prager 与按 Ziegler 假定将导致不同的结果。）

1.10 设 c=0 与 c=1/2,求解习题 1.1（此题需上机计算，给出的数值结果要求 6 位有效数字，建议先计算 c=1，并用习题 1.1 的解析解验证）。

1.11 按 J_2 形变理论求解习题 1.1。

解答：

$$\gamma=\frac{18\left(\sqrt{13}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{13}}\gamma_0+2\gamma_0$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{3\left(\sqrt{13}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{13}}\gamma_0+\frac{\gamma_0}{2(1+\nu)}.$$

1.12 设一试件先受单向拉伸进入塑性，到达一定的塑性应变 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}$。然后施加一应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，其分量为 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$。请分别按 J_2 流动理论（各向同性硬化）与 J_2 形变理论求出相应的塑性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$。

解答：按 J_2 流动理论

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}&=\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}\left(\mathrm{d}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{33}\right)\\
\mathrm{d}\varepsilon_{22}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\varepsilon_{33}^{\mathrm{p}}&=-\frac{1}{2}\frac{1}{E_{\mathrm{p}}}\left(\mathrm{d}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{33}\right)\\
\mathrm{d}\varepsilon_{12}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\varepsilon_{23}^{\mathrm{p}}&=\mathrm{d}\varepsilon_{13}^{\mathrm{p}}=0
\end{aligned}$$

按 J_2 形变理论

$$\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}\left(\mathrm{d}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{33}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varepsilon_{22}^{\mathrm{p}}=&\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right)\left(\mathrm{d}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{33}\right)\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}\right)\left(\mathrm{d}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{33}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{33}^{\mathrm{p}}=\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}(\sigma_{\mathrm{eq}})}-\frac{1}{E}\right)\left(\mathrm{d}\sigma_{33}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{22}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_t(\sigma_{eq})}-\frac{1}{E_s(\sigma_{eq})}\right)\left(d\sigma_{11}-\frac{1}{2}d\sigma_{22}-\frac{1}{2}d\sigma_{33}\right)$$

$$d\varepsilon_{12}^p=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s(\sigma_{eq})}-\frac{1}{E}\right)d\sigma_{12}$$

$$d\varepsilon_{23}^p=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s(\sigma_{eq})}-\frac{1}{E}\right)d\sigma_{23}$$

$$d\varepsilon_{13}^p=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s(\sigma_{eq})}-\frac{1}{E}\right)d\sigma_{13}$$

一般认为按 J_2 流动理论材料的反应比 J_2 形变理论更为刚硬。

1.13 设 Sanders 理论中的比例因子 $g(f,\omega)$ 为常数。材料满足 Mises 初始屈服条件，初始拉伸屈服限为 σ_s，

(1) 计算材料单向拉伸曲线的塑性模量 E_p；

(2) 在薄管试验中材料先受拉伸应力到 $\sigma>\sigma_s$，然后保持拉伸应力不变，加剪切应力增量 $d\tau$。求切线剪切模量 $G_t=d\tau/d\gamma$。

提示：先写出 $(\sigma_{11},\sqrt{3}\sigma_{12})$ 应力空间中当前屈服平面族的函数 $f(\sigma_{ij})$。

解答：

$$E_p=\frac{1}{g}\left(\cos^{-1}\frac{\sigma_s}{\sigma}+\frac{\sigma_s}{\sigma}\sqrt{1-\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}}\right)^{-1}$$

$$G_t=\frac{d\tau}{d\gamma}=\left[\frac{1}{G}+3g\left(\cos^{-1}\frac{\sigma_s}{\sigma}-\frac{\sigma_s}{\sigma}\sqrt{1-\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}}\right)\right]^{-1}$$

1.14 证明节 1.4.2 代数极值问题⑧的解 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ 满足方程⑨。

1.15 设应力点 $\boldsymbol{\sigma}$ 在主应力空间中两相邻屈服平面相交的棱线上。按图 1-16(b)分区写出应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 必须满足的条件。

1.16 试推导各向同性硬化情况 (c=1) Tresca 理论的塑性应力率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 公式。区别当应力点保持在第 α 屈服平面的情况及保持在第 α 与第 $\beta=\alpha+1$ 屈服平面交线的情况。

提示：各向同性硬化情况 (c=1)，当应力点保持在两相邻屈服平面交线上时，$f_\alpha^*=f_\beta^*$，$\mu_\alpha+\mu_\beta=1$，$0\leqslant\mu_\alpha\leqslant1$，$0\leqslant\mu_\beta\leqslant1$，但 μ_α，μ_β 值不定。

1.17 设材料的剪切曲线（剪切应力 τ ~剪切角 γ 曲线）为线性硬化曲线，弹性段斜率为剪切弹性模量 G，进入塑性后斜率为 G_t，剪切屈服限为 τ_0。求材料先沿轴 1 方向受拉伸应力 $4\tau_0$，然后保持 $\sigma_1=4\tau_0$ 不变，沿轴 2 方向加拉伸应力 $4\tau_0$。求最后的应变。已知材料的泊松比为 ν。计算 c=0，c=1/2 与 c=1 三种情况。

1.18 采用 Ziegler 假设，即$\dot{\boldsymbol{b}} // (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{b})$，建立 Tresca 流动理论。要求分两种情况（$\boldsymbol{\sigma}$ 在α面并继续保持在α面上及$\boldsymbol{\sigma}$ 在α，β两相邻平面的交线上且继续保持在交线上）写出已知$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$时$\dot{Q}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 和$\dot{\boldsymbol{b}}$的表达式。

提示：

(1) 当应力点在α 屈服面上时，$\dot{\bar{b}} = \dot{\boldsymbol{b}} : (\partial f_\alpha / \partial \boldsymbol{\sigma})$，而当应力点在$\alpha$ 与β 屈服面交线上时，$\dot{\bar{b}} = \dot{\boldsymbol{b}} : (\partial f_\alpha / \partial \boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{b}} : (\partial f_\beta / \partial \boldsymbol{\sigma})$。

(2) 设$\bar{b}$ 为$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}$的函数，以(5.38)定义 Ziegler 假设下的机动硬化模量$G_{\mathrm{b}}^{(z)} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\mathrm{d}\bar{b}\left(\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}_{\mathrm{Tr}}^{\mathrm{p}}}$。

1.19 Prager（1945）提出在比例加载情况下的下列塑性本构关系：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = f(J_2, J_3)\boldsymbol{\sigma}' + g(J_2, J_3)\boldsymbol{t}'$$

式中$\boldsymbol{t}'$ 为$\boldsymbol{t}$的偏量：

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}',\ J_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'),\ J_3 = \frac{1}{3}\boldsymbol{t}' : \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}')$$

证明

(1)
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial J_2}\dot{J}_2 + \frac{\partial f}{\partial J_3}\dot{J}_3\right)\boldsymbol{\sigma}' + f\dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \left(\frac{\partial g}{\partial J_2}\dot{J}_2 + \frac{\partial g}{\partial J_3}\dot{J}_3\right)\boldsymbol{t}' + g\dot{\boldsymbol{t}}'$$

(2) 在比例加载情况下，设

$$\boldsymbol{\sigma}' = p(t)\boldsymbol{\sigma}_0',\ p(0) = 0, \dot{p} > 0$$

证明

$$\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{\dot{p}}{p}\left[4J_2^2\frac{\partial f}{\partial J_2} + 6J_2J_3\left(\frac{\partial f}{\partial J_3} + \frac{\partial g}{\partial J_2}\right) + 9J_3^2\frac{\partial g}{\partial J_3} + 2J_2 f + 6J_3 g\right] \geqslant 0$$

上式称为“不可逆条件”。

1.20 设材料的单向拉伸曲线为 Ramberg-Osgood 关系：

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K\sigma^n$$

证明

$$\frac{1}{E_{\mathrm{s}}} - \frac{1}{E} = K\sigma_{\mathrm{eq}}^{n-1},\quad \frac{1}{E_{\mathrm{t}}} - \frac{1}{E} = nK\sigma_{\mathrm{eq}}^{n-1}$$

及
$$\tan\overline{\beta}=n^{\frac{1}{2}}$$

1.21 设材料的弹性极限为σ_y，单向拉伸应力应变关系为

$$\varepsilon=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{E} & \text{当}\sigma\leqslant\sigma_y\\ \dfrac{\sigma}{E}+K(\sigma-\sigma_y)^n & \text{当}\sigma>\sigma_y\end{cases}$$

则

$$\frac{1}{E_s}-\frac{1}{E}=\frac{K(\sigma_{eq}-\sigma_y)^n}{\sigma_{eq}}$$
$$\frac{1}{E_t}-\frac{1}{E}=nK(\sigma_{eq}-\sigma_y)^{n-1}$$

及
$$\tan\overline{\beta}=\left[n\frac{1}{(1-\sigma_y/\sigma_{eq})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

1.22 求(7.11)式$W^p(\dot{\boldsymbol{\sigma}})$对$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$的二次导数

$$\boldsymbol{M}^p=\frac{\partial^2W^p(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}$$

提示：利用(7.15)式可得

$$\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\mathrm{d}\left(\frac{\partial W^p(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}\right)=\mathrm{d}\left(\boldsymbol{C}^p:\dot{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

将(7.16)的$\boldsymbol{C}^p$代入，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\dot{\varepsilon}^p&=\mathrm{d}\left(\frac{\partial W^p(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\\&=\left[\left(f(\theta)+\frac{1}{2}f'(\theta)\cot\theta\right)\boldsymbol{C}-\frac{f'(\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}\right]:\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\\&\quad+\left\{\left[\left(1-\frac{1}{2\sin^2\theta}\right)f'(\theta)+\frac{1}{2}f''(\theta)\cot\theta\right]\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\left[\frac{f''(\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}-\frac{2f'(\theta)\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}\right](\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\sigma}})\boldsymbol{\mu}\right\}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

式中$\mathrm{d}\theta$见(7.19)式。由上式可得出

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} &= \frac{\partial^2 W^{\mathrm{p}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}} \\
&= f(\theta)\mathbf{C} + \frac{1}{2}f'(\theta)\left[\cot\theta(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{pp} - \boldsymbol{qq}) + \boldsymbol{H}\right] + \frac{1}{2}f''(\theta)\boldsymbol{qq}
\end{aligned}
$$

式中

$$
\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{(\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}})^{1/2}}
$$

$$
\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{p}}{\tan\theta} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{\sin\theta}
$$

$$
\boldsymbol{H} = \boldsymbol{pq} + \boldsymbol{qp}
$$

注意 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$ 为 Voigt 对称，且满足类似于节 1.7.1 中②式的条件：

$$
M^{\mathrm{p}}_{kkij} = M^{\mathrm{p}}_{ijkk} = 0
$$

1.23 证明 J_2 角点理论的塑性变形率可写为

$$
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad ①
$$

式中 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$ 见题 1.22。同时证明式①与(7.15)给出相同的 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，即

$$
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad ②
$$

提示：因为 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 是 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的一次齐次函数，利用齐次函数的 Euler 定理可证明①式。由①与(7.15)可证

$$
\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}} = \left[-f'(\theta)\cot 2\theta + \frac{1}{2}f''(\theta)\right]\boldsymbol{qq}
$$

利用 $\boldsymbol{q}$ 与 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的正交性质

$$
\boldsymbol{q}:\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0
$$

可证明②式。

1.24 若 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 为二阶张量，已知对于任意的二阶对称偏斜张量 $\boldsymbol{b}$，均有

$$
\boldsymbol{x}:\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}:\boldsymbol{b}
$$

求证：$\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 之间必存在下列关系

$$
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + a\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega}
$$

式中 a 为标量，$\boldsymbol{\delta}$ 为二阶单位张量，$\boldsymbol{\omega}$ 为反对称二阶张量。

1.25 证明式(7.49)当$\phi \to \phi_c$时，$g(\phi)$的极限为

$$\lim_{\phi \to \phi_c} g(\phi) = \lim_{\theta \to \theta_c} \frac{2}{f''(\theta)}$$

提示：利用(7.49)式。

1.26 推导 1.7.4 中㉑与㉒式。

1.27 推导 1.8 中单向拉伸的切线模量(8.29)式 E_t

1.28 与(8.22)有类似形式的 Coulomb 屈服条件为

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\sin\varphi = C\cos\varphi$$

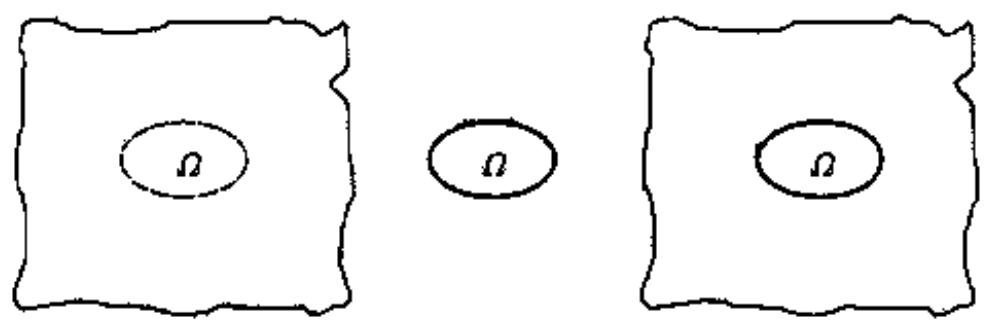
式中σ_1, σ_3为最大，最小主应力（按代数值），C, φ为材料常数。试用 Mohr 圆说明上式意义。

第 2 章　细观力学基础

工程材料往往不是均匀(或均质)的，而是由许多成分组成。许多材料有一定的内部细微结构。根据材料的组成与内部的细微结构来推测材料的宏观性能，这就是细观力学的任务。

2.1　Eshelby 相变应变问题

设在图 2-1(a)所示的无限大均质介质中，区域 Ω 内的材料发生相变，相变所引起的应变为 $\boldsymbol{\varepsilon}^{t}$。它是一个常张量。Mura（1987）称 $\boldsymbol{\varepsilon}^{t}$ 为特征应变 (eigen strain)，它也可以是由于其他原因，例如温度变化 (热胀冷缩)所引起的。如果区域 Ω 的材料是自由的 (即不受约束)，如图 2-1(b)所示，它的应变就是由于相变或温度变化引起的特征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{t}$。但是实际上，图 2-1(a)中区域 Ω 的材料是处于无限大介质中，它受到周围介质的约束，不能自由地变形，因而必然受到来自周围介质的力的作用，而限制它的应变。因此图 2-1(a)无限大介质区域 Ω 的实际应变不是 $\boldsymbol{\varepsilon}^{t}$，而是 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$，我们称 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$ 为约束应变。



(a) 无限大介质　　(b) Ω 自由　　(c) 含孔的无限大介质

图 2-1　Eshelby 相变应变问题(图 (a) 中区域 Ω 产生相变应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{t}$)

Eshelby (1957，1959，1961) 证明：设介质为线性弹性，当区域 Ω 的形状为椭球体时，只要特征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{t}$ 是一个常张量(即在区域 Ω 内不随位置而变化)，则约束应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$ 也是一个常张量，其值为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{*} = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^{t} \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 为四阶张量，称为 Eshelby 张量。$\boldsymbol{S}$ 可利用弹性力学求出，它与介质的弹性性质及

椭球的形状与取向有关，可参考 Eshelby 与 Mura 的著作。S_{ijkl} 对于 i 与 j、以及对于 k 与 l 为对称

$$S_{ijkl}=S_{ijlk}=S_{jikl}$$

但是对于 (i,j) 与 (k,l) 一般不对称，因此 $\boldsymbol{S}$ 一般不具有 Voigt 对称性。

弹性介质的本构关系为

$$\sigma=\mathscr{L}:\varepsilon,\quad \varepsilon=\mathscr{M}:\sigma \tag{1.2}$$

式中 $\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{M}$ 各为弹性刚度张量与弹性柔度张量。当弹性介质为各向同性时，由第 1 章式(1.32)、(1.32)′与(1.8)，则有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=3K\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta}+2G\bar{\boldsymbol{I}}=(3K-2G)\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta}+2G\boldsymbol{I}\\ \mathscr{M}&=\mathscr{L}^{-1}=\frac{1}{3K}\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta}+\frac{1}{2G}\bar{\boldsymbol{I}}=\left(\frac{1}{3K}-\frac{1}{2G}\right)\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta}+\frac{1}{2G}\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{1.3}$$

其分量形式为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{ijkl}&=3K\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}+2G\bar{I}_{ijkl}=(3K-2G)\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}+2GI_{ijkl}\\ \mathscr{M}_{ijkl}&=\frac{1}{3K}\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2G}\bar{I}_{ijkl}=\left(\frac{1}{3K}-\frac{1}{2G}\right)\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2G}I_{ijkl}\end{aligned} \tag{1.4}$$

特殊等同张量 $\bar{\boldsymbol{I}}$ 与等同张量 $\boldsymbol{I}$ 的分量见第 1 章式(1.4)与(1.2),则

$$\begin{aligned}\bar{I}_{ijkl}&=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\\ I_{ijkl}&=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)\end{aligned} \tag{1.5}$$

各向同性弹性本构关系(1.2)与(1.3)式表示应力与应变的球形张量之间的比例系数为 $3K$，偏斜张量之间的比例系数为 $2G$。(1.3)与(1.4)式的一个方便记法是 [1)]

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}=(3K,2G)\text{或}\quad \mathscr{L}=(3K,2G)\\ &\mathscr{M}=\left(\frac{1}{3K},\frac{1}{2G}\right)\text{或}\ \mathscr{M}=\left(\frac{1}{3K},\frac{1}{2G}\right)\end{aligned} \tag{1.6}$$

推而广之，任何一个四阶各向同性张量 $\boldsymbol{N}$ 若记作 [2)]

$$\boldsymbol{N}=(a,b) \tag{1.7a}$$

---

1) (1.6)式左端可以记作张量(如 $\mathscr{L}$),或者对应的矩阵(如 $\mathscr{L}$)。
2) 表示成(1.7)形式的张量为四阶各向同性张量，其分量值不因笛卡儿坐标变换而改变。

则

$$N = a\frac{1}{3}\delta\delta + b\bar{I} = (a-b)\frac{1}{3}\delta\delta + b\bar{I} \tag{1.7b}$$

显然，由第 1 章式 (1.4)，四阶特殊等同张量 $\bar{I}$ 与四阶等同张量 I 可各表示为

$$\bar{I} = (0,1), \quad I = (1,1)$$

当图 2-1 所示 Eshelby 相变应变问题中弹性介质为各向同性且 Ω 为圆球形域时，Eshelby 张量为（见 Eshelby（1957，1959，1961）或 Mura（1987））

$$S = (\alpha, \beta) \tag{1.8}$$

即

$$S = \alpha\frac{1}{3}\delta\delta + \beta\bar{I} = (\alpha-\beta)\frac{1}{3}\delta\delta + \beta I$$

$$\begin{aligned} S_{ijkl} &= \alpha\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \\ &= (\alpha-\beta)\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha &= 3 - 5\beta = \frac{3K}{3K+4G} = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \\ \beta &= \frac{6(K+2G)}{5(3K+4G)} = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \end{aligned} \tag{1.9}$$

这里 K 为体积模量，G 为剪切模量，ν 为泊松比。

$$\nu = \frac{3K-2G}{6K+2G}$$

当 $\nu = 0.3$ 时，$\alpha = 0.619$，$\beta = 0.476$。这表明图 2-1 (a) 无限大介质中 Ω 圆球形区域的约束体积变形只是图 2-1(b)自由相变应变的体积变形的 61.9%，而约束偏斜变形则为自由相变偏斜变形的 47.6%。容易证明乘法规律：若 $N = (a,b)$，$K = (c,d)$，则

$$N : K = (ac, bd) \tag{1.10}$$

2.1.1 对称张量的矩阵表示

在弹性介质本构关系(1.2)中，为了便于运算，可以用矩阵形式来表示应力张量 σ 应变

张量$\boldsymbol{\varepsilon}$与刚度或柔度张量，$\mathscr{L}$或$\mathscr{M}$。为此目的，规定下标 ij 与一维指标对应的如下次序：

$$
\begin{aligned}
&11 \leftrightarrow 1, \quad 22 \leftrightarrow 2, \quad 33 \leftrightarrow 3, \\
&23 \leftrightarrow 4, \quad 32 \leftrightarrow 5, \quad 31 \leftrightarrow 6, \\
&13 \leftrightarrow 7, \quad 12 \leftrightarrow 8, \quad 21 \leftrightarrow 9,
\end{aligned}
$$

则(1.2)的两式可写成矩阵乘法的形式，例如(1.2)第一式可写作

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathscr{L}_{1111} & \mathscr{L}_{1122} & \mathscr{L}_{1133} & \mathscr{L}_{1123} & \mathscr{L}_{1132} & \mathscr{L}_{1131} & \mathscr{L}_{1113} & \mathscr{L}_{1112} & \mathscr{L}_{1121} \\
\mathscr{L}_{2211} & \mathscr{L}_{2222} & \mathscr{L}_{2233} & \mathscr{L}_{2223} & \mathscr{L}_{2232} & \mathscr{L}_{2231} & \mathscr{L}_{2213} & \mathscr{L}_{2212} & \mathscr{L}_{2221} \\
\mathscr{L}_{3311} & \mathscr{L}_{3322} & \mathscr{L}_{3333} & \mathscr{L}_{3323} & \mathscr{L}_{3332} & \mathscr{L}_{3331} & \mathscr{L}_{3313} & \mathscr{L}_{3312} & \mathscr{L}_{3321} \\
\mathscr{L}_{2311} & \mathscr{L}_{2322} & \mathscr{L}_{2333} & \mathscr{L}_{2323} & \mathscr{L}_{2332} & \mathscr{L}_{2331} & \mathscr{L}_{2313} & \mathscr{L}_{2312} & \mathscr{L}_{2321} \\
\mathscr{L}_{3211} & \mathscr{L}_{3222} & \mathscr{L}_{3233} & \mathscr{L}_{3223} & \mathscr{L}_{3232} & \mathscr{L}_{3231} & \mathscr{L}_{3213} & \mathscr{L}_{3212} & \mathscr{L}_{3221} \\
\mathscr{L}_{3111} & \mathscr{L}_{3122} & \mathscr{L}_{3133} & \mathscr{L}_{3123} & \mathscr{L}_{3132} & \mathscr{L}_{3131} & \mathscr{L}_{3113} & \mathscr{L}_{3112} & \mathscr{L}_{3121} \\
\mathscr{L}_{1311} & \mathscr{L}_{1322} & \mathscr{L}_{1333} & \mathscr{L}_{1323} & \mathscr{L}_{1332} & \mathscr{L}_{1331} & \mathscr{L}_{1313} & \mathscr{L}_{1312} & \mathscr{L}_{1321} \\
\mathscr{L}_{1211} & \mathscr{L}_{1222} & \mathscr{L}_{1233} & \mathscr{L}_{1223} & \mathscr{L}_{1232} & \mathscr{L}_{1231} & \mathscr{L}_{1213} & \mathscr{L}_{1212} & \mathscr{L}_{1221} \\
\mathscr{L}_{2111} & \mathscr{L}_{2122} & \mathscr{L}_{2133} & \mathscr{L}_{2123} & \mathscr{L}_{2132} & \mathscr{L}_{2131} & \mathscr{L}_{2113} & \mathscr{L}_{2112} & \mathscr{L}_{2121}
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix}
\tag{1.11}
$$

或记作

$$
(\boldsymbol{\sigma}) = [\mathscr{L}](\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{1.11$'$}
$$

为了简单起见，可以把张量形式的本构关系$(1.2)_1$与矩阵形式的本构关系(1.11)（或(1.11)′）都记作以下共同的形式

$$
\boldsymbol{\sigma} = \mathscr{L}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.12}
$$

(1.12)可以理解为张量等式$(1.2)_1$，σ，ε 理解为应力张量$\boldsymbol{\sigma}$，应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\mathscr{L}$ 理解为弹性刚度张量$\mathscr{L}$；也可以理解为矩阵等式(1.11)（或(1.11)′），σ，ε 理解为应力列矢量（σ），应变列矢量（ε），$\mathscr{L}$ 理解为弹性刚度矩阵[$\mathscr{L}$]。(1.12)式称为简化记法。对于(1.2)的第二式$(1.2)_2$以及本章的以后诸节，我们都采用类似的记法，既可以按张量运算来理解，也可以按矩阵运算来理解，两者是一致的。$\mathscr{L}$与$\mathscr{M}$具有 Voigt 对称性，因此矩阵$\mathscr{L}$与$\mathscr{M}$为 9 行 9 列的对称矩阵。Eshelby 张量 $\boldsymbol{S}$ 不具有 Voigt 对称性，因此相应的矩阵 $\boldsymbol{S}$ 不对称。

在四阶各向同性张量例如(1.3)，(1.8)中出现的$\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta}$，$\bar{\boldsymbol{I}}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 所对应的矩阵为

$$\left[\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{I}]=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$
[I]=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
$$

由于应力张量$\boldsymbol{\sigma}$ 与应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}$ 都是对称张量，(1.11)式中的“列矢量”(σ)与(ε)的第 4 行与第 5 行相同，第 6 行与第 7 行相同，第 8 行与第 9 行相同。弹性刚度矩阵$[\mathscr{L}]$与柔度矩阵$[\mathscr{M}]$第 4 行、列与第 5 行、列相同，第 6 行、列与第 7 行、列相同，第 8 行、列与第 9 行、列相同。为了简单起见，利用这种对称性，可以把应力张量$\boldsymbol{\sigma}$ 与应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}$ 写成 6 个元素的“列矢量”

$$
(\sigma)=\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix},\qquad (\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{pmatrix}
$$

相应地，$\mathscr{L}$与$\mathscr{M}$写成 6 行 6 列的对称矩阵

$$
[\mathscr{L}]=\begin{bmatrix}
\mathscr{L}_{1111} & \mathscr{L}_{1122} & \mathscr{L}_{1133} & 2\mathscr{L}_{1123} & 2\mathscr{L}_{1131} & 2\mathscr{L}_{1112} \\
\mathscr{L}_{2211} & \mathscr{L}_{2222} & \mathscr{L}_{2233} & 2\mathscr{L}_{2223} & 2\mathscr{L}_{2231} & 2\mathscr{L}_{2212} \\
\mathscr{L}_{3311} & \mathscr{L}_{3322} & \mathscr{L}_{3333} & 2\mathscr{L}_{3323} & 2\mathscr{L}_{3331} & 2\mathscr{L}_{3312} \\
\mathscr{L}_{2311} & \mathscr{L}_{2322} & \mathscr{L}_{2333} & 2\mathscr{L}_{2323} & 2\mathscr{L}_{2331} & 2\mathscr{L}_{2312} \\
\mathscr{L}_{3111} & \mathscr{L}_{3122} & \mathscr{L}_{3133} & 2\mathscr{L}_{3123} & 2\mathscr{L}_{3131} & 2\mathscr{L}_{3112} \\
\mathscr{L}_{1211} & \mathscr{L}_{1222} & \mathscr{L}_{1233} & 2\mathscr{L}_{1223} & 2\mathscr{L}_{1231} & 2\mathscr{L}_{1212}
\end{bmatrix}
$$

$$[\mathscr{M}]=\begin{bmatrix} \mathscr{M}_{1111} & \mathscr{M}_{1122} & \mathscr{M}_{1133} & 2\mathscr{M}_{1123} & 2\mathscr{M}_{1131} & 2\mathscr{M}_{1112} \\ \mathscr{M}_{2211} & \mathscr{M}_{2222} & \mathscr{M}_{2233} & 2\mathscr{M}_{2223} & 2\mathscr{M}_{2231} & 2\mathscr{M}_{2212} \\ \mathscr{M}_{3311} & \mathscr{M}_{3322} & \mathscr{M}_{3333} & 2\mathscr{M}_{3323} & 2\mathscr{M}_{3331} & 2\mathscr{M}_{3312} \\ \mathscr{M}_{2311} & \mathscr{M}_{2322} & \mathscr{M}_{2333} & 2\mathscr{M}_{2323} & 2\mathscr{M}_{2331} & 2\mathscr{M}_{2312} \\ \mathscr{M}_{3111} & \mathscr{M}_{3122} & \mathscr{M}_{3133} & 2\mathscr{M}_{3123} & 2\mathscr{M}_{3131} & 2\mathscr{M}_{3112} \\ \mathscr{M}_{1211} & \mathscr{M}_{1222} & \mathscr{M}_{1233} & 2\mathscr{M}_{1223} & 2\mathscr{M}_{1231} & 2\mathscr{M}_{1212} \end{bmatrix}$$

也就是说，各列除去重复的元素，但第 1、2、3 列的元素的数值不变，而第 4,5,6 列的元素则乘以 2。此时，张量运算与矩阵运算仍然一致，但失去了矩阵的对称性。用 6 行 6 列的矩阵表示，则有

$$\left[\frac{1}{3}\delta\delta\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{I}]=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在有的文献[1)]中定义应力“列矢量”为

$$\sigma_1 = \sigma_{11},\ \sigma_2 = \sigma_{22},\ \sigma_3 = \sigma_{33}$$
$$\sigma_4 = \sigma_{23},\ \sigma_5 = \sigma_{31},\ \sigma_6 = \sigma_{12}$$

应变“列矢量”为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11},\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22},\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$$
$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23},\ \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{31},\ \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$$

注意 $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ 就是剪切角 $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$。把弹性本构关系写作

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

或

$$\varepsilon_i = s_{ij}\sigma_j$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$$

容易导出矩阵 C, s 与 $\mathscr{L}$ $\mathscr{M}$ 元素的关系为

$$[C] = \begin{bmatrix} \mathscr{L}_{1111} & \mathscr{L}_{1122} & \mathscr{L}_{1133} & \mathscr{L}_{1123} & \mathscr{L}_{1131} & \mathscr{L}_{1112} \\ \mathscr{L}_{2211} & \mathscr{L}_{2222} & \mathscr{L}_{2233} & \mathscr{L}_{2223} & \mathscr{L}_{2231} & \mathscr{L}_{2212} \\ \mathscr{L}_{3311} & \mathscr{L}_{3322} & \mathscr{L}_{3333} & \mathscr{L}_{3323} & \mathscr{L}_{3331} & \mathscr{L}_{3312} \\ \mathscr{L}_{2311} & \mathscr{L}_{2322} & \mathscr{L}_{2333} & \mathscr{L}_{2323} & \mathscr{L}_{2331} & \mathscr{L}_{2312} \\ \mathscr{L}_{3111} & \mathscr{L}_{3122} & \mathscr{L}_{3133} & \mathscr{L}_{3123} & \mathscr{L}_{3131} & \mathscr{L}_{3112} \\ \mathscr{L}_{1211} & \mathscr{L}_{1222} & \mathscr{L}_{1233} & \mathscr{L}_{1223} & \mathscr{L}_{1231} & \mathscr{L}_{1212} \end{bmatrix}$$

1) 为了避免混乱，本章不采用此种符号。

$$[s]=\begin{bmatrix} \mathscr{M}_{1111} & \mathscr{M}_{1122} & \mathscr{M}_{1133} & 2\mathscr{M}_{1123} & 2\mathscr{M}_{1131} & 2\mathscr{M}_{1112} \\ \mathscr{M}_{2211} & \mathscr{M}_{2222} & \mathscr{M}_{2233} & 2\mathscr{M}_{2223} & 2\mathscr{M}_{2231} & 2\mathscr{M}_{2212} \\ \mathscr{M}_{3311} & \mathscr{M}_{3322} & \mathscr{M}_{3333} & 2\mathscr{M}_{3323} & 2\mathscr{M}_{3331} & 2\mathscr{M}_{3312} \\ 2\mathscr{M}_{2311} & 2\mathscr{M}_{2322} & 2\mathscr{M}_{2333} & 4\mathscr{M}_{2323} & 4\mathscr{M}_{2331} & 4\mathscr{M}_{2312} \\ 2\mathscr{M}_{3111} & 2\mathscr{M}_{3122} & 2\mathscr{M}_{3133} & 4\mathscr{M}_{3123} & 4\mathscr{M}_{3131} & 4\mathscr{M}_{3112} \\ 2\mathscr{M}_{1211} & 2\mathscr{M}_{1222} & 2\mathscr{M}_{1233} & 4\mathscr{M}_{1223} & 4\mathscr{M}_{1231} & 4\mathscr{M}_{1212} \end{bmatrix}$$

2.1.2 弹性约束张量

在图 2-1 中对于图 2-1(b)所示的 Ω 椭球区域（称为内域）来说，图 2-1(c)所示的含孔的无限大介质（可称为外域）可以看作“弹性约束”。正因为有这个弹性约束的存在，使得图 2-1(b)的内域材料不能自由地变形 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}}$，而只能变形 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$（见(1.1)式）。图 2-2(a),(b)各表示图 2-1 Eshelby 相变应变问题中内域与外域的受力。以 $\boldsymbol{\sigma}^{*}$ 表示内域的应力，则由弹性本构关系(1.2)（用简化记法(1.12)）。

$$\sigma^{*}=\mathscr{L}(\varepsilon^{*}-\varepsilon^{\mathrm{t}}) \tag{1.13}$$

式中实际应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$ 减去相变应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}}$ 才是由于应力 $\boldsymbol{\sigma}^{*}$ 所产生的应变。按照 Eshelby，假定 Ω 为椭球域，则应力 $\boldsymbol{\sigma}^{*}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$ 都是常张量。外域在内域表面所作用于内域的面力（图 2-2 (a)）为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{in}}=\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}} \tag{1.14}$$

式中 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}$ 为内域的外向法线单位矢量。如图 2-2(b)所示，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ou}}$ 为外域的外向法线单位矢量，内域在外域表面所作用于外域的力为 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{ou}}$。显然 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ou}}=-\boldsymbol{n}_{\mathrm{in}}$，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{ou}}=-\boldsymbol{p}_{\mathrm{in}}$，即 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{ou}}$ 与 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{in}}$ 大小相等，方向相反。因此

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{ou}}=\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ou}} \tag{1.15}$$

图 2-2(b)中的 Ω 域为一空洞。如果 Ω 域为椭球域，变形后仍为椭球域，且变形应与图 2-2(a)内域的最终变形 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$ 完全一致。因此图 2-2(b)中空洞的变形也是 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$。由(1.1)式(简化形式为 $\varepsilon^{*}=S\varepsilon^{\mathrm{t}}$)解出 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}}$ 为

$$\varepsilon^{\mathrm{t}}=S^{-1}\varepsilon^{*} \tag{1.16}$$

代入(1.13)，得

$$\boldsymbol{\sigma}^{*}=-\mathscr{L}(S^{-1}-I)\boldsymbol{\varepsilon}^{*} \tag{1.17}$$

(1.17)式如看作矩阵等式，S^{-1} 为 S 矩阵之逆，I 为单位矩阵[1)]。(1.17)式可记为

---

1) 如把(1.17)式看作张量等式，则应写作 $\boldsymbol{\sigma}^{*}=-\mathscr{L}:(\boldsymbol{S}^{-1}-\boldsymbol{I}):\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$，式中 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 为 Eshelby 张量 $\boldsymbol{S}$ 之逆（即 $\boldsymbol{S}^{-1}:\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{I}$），$\boldsymbol{I}$ 为四阶等同张量（见第 1 章式(1.2)）。

$$\boldsymbol{\sigma}^* = -\mathscr{L}^* \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{1.18}$$

式中

$$\mathscr{L}^* = \mathscr{L}(S^{-1} - I) \tag{1.19}$$

(1.18)式可以看作是图 2-2(b)中外域在空洞处受力 $\boldsymbol{p}_{ou}$（见(1.15)，相当于 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 的表面力）与空洞变形 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 的关系。因为外域本身被看作是内域的弹性约束，所以 $\mathscr{L}^*$（或所对应的四阶张量 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}:(S^{-1} - I)$）称为弹性约束刚度张量。(1.18)也可写作

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = -\mathscr{M}^* \boldsymbol{\sigma}^* \tag{1.20}$$

式中 $\mathscr{M}^*$ 称为弹性约束柔度张量

$$\mathscr{M}^* = \mathscr{L}^{*-1} = (S^{-1} - I)^{-1} \mathscr{M} \tag{1.21}$$

$\mathscr{L}^*$ 与 $\mathscr{M}^*$ 统称为弹性约束张量（overall constraint tensors）。(1.18)与(1.20)右端的负号表示若要使外域的空洞变大，必须在空洞表面处加压，反之亦然。

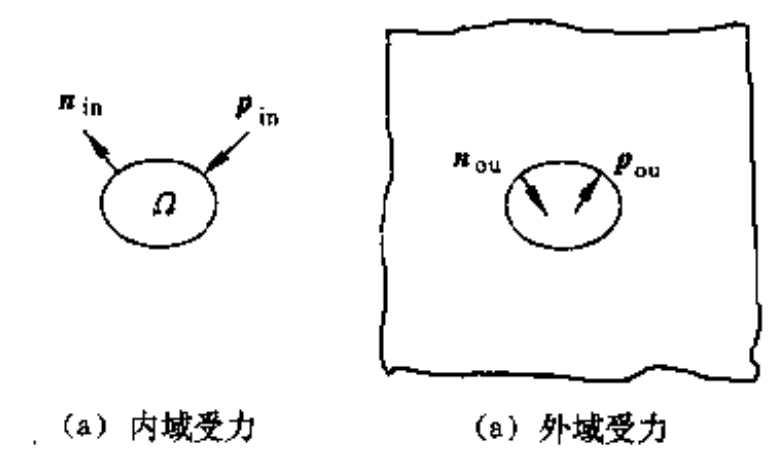


图 2-2 Eshelby 相变应变问题的内域与外域受力

可以用弹性力学的 Betti 互逆定理来证明弹性约束张量 $\mathscr{L}^*$ 与 $\mathscr{M}^*$ 具有 Voigt 对称性。图 2-3(a),(b)示一含椭球孔 Ω 的无限大介质在孔边受有两种不同的面力

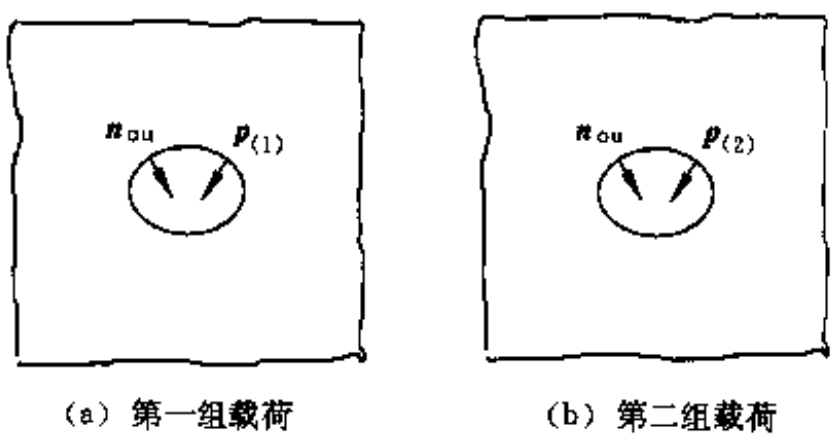


图 2-3 含椭球孔 Ω 的无限大介质

$$\boldsymbol{p}_{(1)} = \boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \boldsymbol{n}_{\text{ou}} \quad 与 \quad \boldsymbol{p}_{(2)} = \boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \boldsymbol{n}_{\text{ou}}$$

在这两组面力作用下，图 2-3(a),(b)中的空洞应变各为(由(1.20))

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*_{(1)} = -\mathscr{M}^* : \boldsymbol{\sigma}^*_{(1)} \quad 与 \quad \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(2)} = -\mathscr{M}^* : \boldsymbol{\sigma}^*_{(2)}$$

因此空洞表面的位移各为

$$\boldsymbol{u}^*_{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(1)} \cdot \boldsymbol{r} \quad 与 \quad \boldsymbol{u}^*_{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(2)} \cdot \boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为自椭球孔中心至空洞表面各点之矢径。由 Betti 互逆定理

$$\int_{\Omega_{\text{surface}}} \boldsymbol{p}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(2)} \mathrm{d}a = \int_{\Omega_{\text{surface}}} \boldsymbol{p}_{(2)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(1)} \mathrm{d}a$$

上式沿空洞表面的积分可化为在空洞体积上的体积积分 1)

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^*_{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(2)} \mathrm{d}V = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^*_{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(1)} \mathrm{d}V$$

除以空洞体积后，得

$$\boldsymbol{\sigma}^*_{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(2)} = \boldsymbol{\sigma}^*_{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^*_{(1)}$$

即

$$\boldsymbol{\sigma}^*_{(1)} : \mathscr{M}^* : \boldsymbol{\sigma}^*_{(2)} = \boldsymbol{\sigma}^*_{(2)} : \mathscr{M}^* : \boldsymbol{\sigma}^*_{(1)}$$

此式对于任意的 $\boldsymbol{\sigma}^*_{(1)}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}^*_{(2)}$ 成立，因此 $\mathscr{M}^*$ 必具有 Voigt 对称性，其逆 $\mathscr{L}^*$ 也必具有 Voigt 对称性。

由(1.19)与(1.21)可证明等式

$$\begin{aligned} S &= (\mathscr{L}^* + \mathscr{L})^{-1} \mathscr{L} = \mathscr{M}^* (\mathscr{M}^* + \mathscr{M})^{-1} \\ S^{-1} &= \mathscr{M} (\mathscr{L}^* + \mathscr{L}) = (\mathscr{M}^* + \mathscr{M}) \mathscr{L}^* \end{aligned} \tag{1.22}$$

若介质为各向同性弹性介质而且区域 Ω 为圆球形，则 Eshelby 张量 S 如(1.8)式，代入(1.19)，(1.21)并利用(1.6)，(1.8)，可得

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^* &= (3K, 2G)\left(\frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1\right) = \left(\frac{3K(1-\alpha)}{\alpha}, \frac{2G(1-\beta)}{\beta}\right) = \left(4G, \frac{G(9K+8G)}{3(K+2G)}\right) \\ \mathscr{M}^* &= \left(\frac{1}{3K}, \frac{1}{2G}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{\beta}{1-\beta}\right) = \left(\frac{\alpha}{3K(1-\alpha)}, \frac{\beta}{2G(1-\beta)}\right) = \left(\frac{1}{4G}, \frac{3(K+2G)}{G(9K+8G)}\right) \end{aligned} \tag{1.23}$$

---

1) 我们也可以想象一个椭球实体 Ω，表面受有两组（i=1,2）面力 $\boldsymbol{p}_{(i)}$，位移相应为 $\boldsymbol{u}^*_{(i)}$，实体内的应力为 $\boldsymbol{\sigma}_{(i)}$，应变为 $\boldsymbol{\varepsilon}^*_{(i)}$。利用面力的外功与应力的内功相等而得到此等式。

当 $\nu=0.3$ 时

$$\frac{1}{\alpha}-1=0.615,\quad \frac{1}{\beta}-1=1.100$$

这说明图 2-2(b)的外域，若看作是图 2-2(a)内域的弹性约束，则在弹性约束刚度中，体积模量只相当于弹性介质本身体积模量的 61.5%，而剪切模量则相当于弹性介质本身剪切模量的 1.1 倍。

2.1.3 与 Eshelby 张量 S 相对偶的张量 T

在图 2-1(b)中区域 Ω 的材料已想象从图 2-1(a)无限大介质中取出，并让它自由地发生相变应变 ε^{t}。在图 2-1(b)中材料不受任何应力或约束，可以自由地变形。实际情况为图 2-1(a)，处于无限大介质的约束下，Ω 区域的实际应变为 ε^{*},见(1.1)式，该式可看作是 Eshelby 张量 S 的定义。

如果把图 2-1(b)中区域 Ω 的材料完全地约束住，不让它出现任何应变，则必须加上应力,以产生应变与相变应变 ε^{t} 相抵消，此应力为

$$\mathscr{L}(-\varepsilon^{t})$$

但是实际上，图 2-1(c)的外域(含孔的无限大介质)不能完全约束内域 Ω 的相变应变，因此图 2-1(a)所示 Ω 区域内材料的实际应力 σ^{*} 不可能达到 $-\mathscr{L}\varepsilon^{t}$，可记作

$$\sigma^{*}=-T\mathscr{L}\varepsilon^{t} \tag{1.24}$$

(1.24)式是张量 T（对应于矩阵 T）的定义式。

对比(1.24)与(1.18)，并利用(1.1)，即 $\varepsilon^{*}=S\varepsilon^{t}$，可得

$$T\mathscr{L}=\mathscr{L}^{*}S\overset{\Delta}{=}Q \tag{1.25}$$

式中符号 $\overset{\Delta}{=}$ 表示定义，即“记为”。由此

$$\mathscr{M}^{*}T=S\mathscr{M}=\mathscr{M}^{*}Q\mathscr{M}\overset{\Delta}{=}P \tag{1.26}$$

由(1.25)，利用$(1.22)_1$，可知

$$\begin{aligned}T&=\mathscr{L}^{*}S\mathscr{M}=\mathscr{L}^{*}(\mathscr{L}^{*}+\mathscr{L})^{-1}=(\mathscr{M}^{*}+\mathscr{M})^{-1}\mathscr{M}\\T^{-1}&=(\mathscr{L}^{*}+\mathscr{L})\mathscr{M}^{*}=\mathscr{L}(\mathscr{M}^{*}+\mathscr{M})\end{aligned} \tag{1.27}$$

由此可知

$$\mathscr{M}^{*}=\mathscr{M}(T^{-1}-I),\quad \mathscr{L}^{*}=(T^{-1}-I)^{-1}\mathscr{L} \tag{1.28}$$

前已证明 $\mathscr{L}^{*}$ 与 $\mathscr{M}^{*}$ 具有 Voigt 对称性。由(1.25)，(1.26)与$(1.27)_1$可证

$$P^{-1}=\mathscr{L}+\mathscr{L}^{*},\quad Q^{-1}=\mathscr{M}+\mathscr{M}^{*} \tag{1.29}$$

可知 P，Q 也具有 Voigt 对称性，因此 P，Q 均为对称矩阵。

2.2 夹杂问题

在节 2.1 中研究的是均匀介质，其中区域 Ω 的材料发生相变或温度变化而引起整个介质中的应力场。本节中研究含有一夹杂物的无限大介质在无限远处应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$ 作用下的应力场（图 2-4(a)）。夹杂物所占的区域为 Ω_c，称为内域，而 Ω_c 以外的区域称为外域。外域与内域由两种不同的材料组成。外域材料的弹性本构关系已见(1.2)，(1.3)，写成类似于(1.12)的简化记法,即

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathscr{L}\boldsymbol{\varepsilon} \quad 即 \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathscr{M}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.1}$$

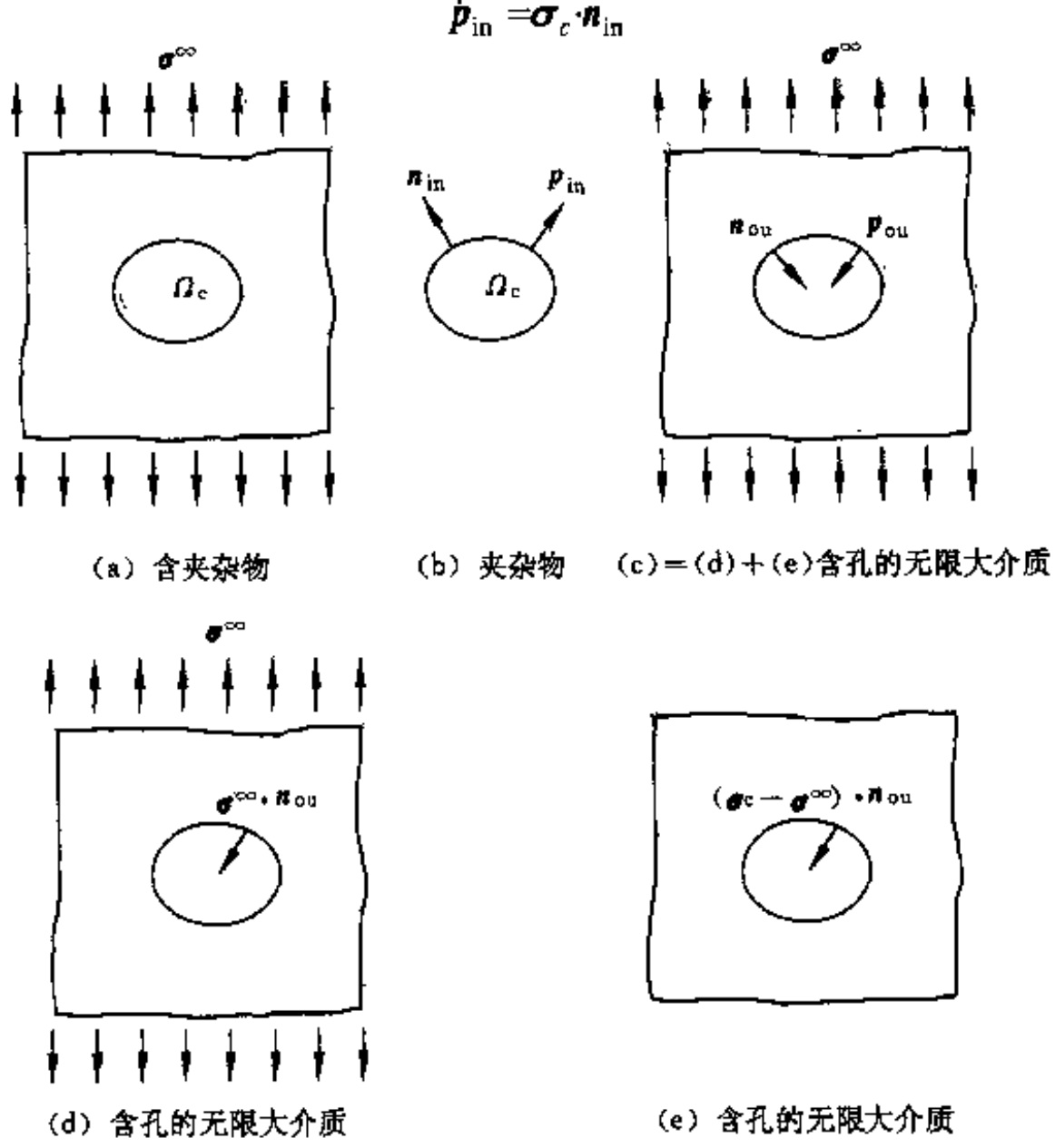
而内域材料的弹性本构关系则为

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \mathscr{L}_c\boldsymbol{\varepsilon}_c \quad 即 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathscr{M}_c\boldsymbol{\sigma}_c \tag{2.2}$$

式中 $\mathscr{L}_c$ 与 $\mathscr{M}_c$ 表示内域材料（即夹杂物）的弹性刚度与弹性柔度，下标 c 表示夹杂物。

想象把图 2-4(a)中的夹杂物取出，以 $\boldsymbol{\sigma}_c$ 表示夹杂物中的应力，夹杂物的应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 由 $(2.2)_2$ 式给出。夹杂物表面的面力（图 2-4(b)）为

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{in} = \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{n}_{in} \tag{2.3a}$$



(a) 含夹杂物　(b) 夹杂物　(c)＝(d)＋(e)含孔的无限大介质

(d) 含孔的无限大介质　(e) 含孔的无限大介质

图 2-4　含一夹杂物的无限大介质

内域作用于外域表面的面力则为（图 2-4(c)）

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{ou}} = -\boldsymbol{p}_{\mathrm{in}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{ou}} \tag{2.3b}$$

现在来求图 2-4(c)含孔的无限大介质在远处的应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$ 与空洞表面上的面力 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{ou}}$ 作用下空洞的变形 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$。图 2-4(c)可以看作是图 2-4(d)与图 2-4(e)的叠加，因此

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{*} = \boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{(2)} \tag{2.4}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{(1)}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{(2)}$ 各表示图 2-4(d)与(e)中空洞的变形。图 2-4(d)所示含孔的无限大介质在无限远处受应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$，在空洞表面受面力 $\boldsymbol{\sigma}^{\infty} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{ou}}$，这恰好是想象从一**完全均匀**的**无孔**的无限大介质中取出的外域所受的力，因此显然

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} \tag{2.5}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}$ 为无限远处的应变，由(2.1)

$$\sigma^{\infty} = \mathscr{L}\varepsilon^{\infty},\ \varepsilon^{\infty} = \mathscr{M}\sigma^{\infty} \tag{2.6}$$

图 2-4(e)所示含孔的无限大介质在无限远处不受力，只在空洞表面受面力 $(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{\sigma}^{\infty}) \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{ou}}$。当区域 Ω_{c} 为椭球时，空洞变形 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{(2)}$ 可以由节 2.1.2 的(1.18)或(1.20)式求出为

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{\sigma}^{\infty} = -\mathscr{L}^{*}\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{(2)} \quad \text{或即} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{(2)} = -\mathscr{M}^{*}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{\sigma}^{\infty}) \tag{2.7}$$

式中 $\mathscr{L}^{*}$, $\mathscr{M}^{*}$ 为弹性约束张量，各见(1.19)与(1.21)。求解图 2-4(a)所示非均匀夹杂问题之关键是建立图 2-4(b)夹杂物与图 2-4(c)含孔无限大介质两者变形的协调条件

$$\varepsilon_{\mathrm{c}} = \varepsilon^{*} \tag{2.8}$$

由(2.4)，(2.5)与(2.8)，可得

$$\varepsilon^{*}_{(2)} = \varepsilon_{\mathrm{c}} - \varepsilon^{\infty} \tag{2.9}$$

将(2.9)代入(2.7)，可得

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{\sigma}^{\infty} = -\mathscr{L}^{*}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}) \tag{2.10}$$

即

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} = -\mathscr{M}^{*}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{\sigma}^{\infty}) \tag{2.11}$$

将 $(2.6)_1$ 式 $\boldsymbol{\sigma}^{\infty} = \mathscr{L}\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}$ 与 $(2.2)_1$ 式 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} = \mathscr{L}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{c}}$ 代入(2.10)，可解出

$$\varepsilon_{\mathrm{c}} = A_{\mathrm{c}}\,\varepsilon^{\infty} \tag{2.12}$$

式中 A_{c} 称为应变集中张量

$$A_{\mathrm{c}} = (\mathscr{L}^{*} + \mathscr{L}_{\mathrm{c}})^{-1}(\mathscr{L}^{*} + \mathscr{L}) \tag{2.13}$$

将(1.19) $\mathscr{L}^{*}$ 式代入(2.13)，可得 A_{c} 通过 Eshelby 张量 S 与两介质弹性张量表示的表达式

$$A_c = \left\{\mathscr{L}(S^{-1} - I) + \mathscr{L}_c\right\}^{-1} \mathscr{L} S^{-1} = \left\{I + S\mathscr{M}(\mathscr{L}_c - \mathscr{L})\right\}^{-1} \tag{2.13a}$$

同样，把$(2.6)_2$式$\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} = \mathscr{M}\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$与$(2.2)_2$式$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathscr{M}_c\boldsymbol{\sigma}_c$代入(2.11)，则可解出

$$\sigma_c = B_c \sigma^{\infty} \tag{2.14}$$

式中$\boldsymbol{B}_c$称为应力集中张量，为

$$\boldsymbol{B}_c = (\mathscr{M}^* + \mathscr{M}_c)^{-1}(\mathscr{M}^* + \mathscr{M}) \tag{2.15}$$

将$(1.28)_1$ $\mathscr{M}^*$式代入(2.15)式，可得$\boldsymbol{B}_c$通过T张量与两介质弹性张量表示的表达式

$$\boldsymbol{B}_c = \left\{\mathscr{M}(T^{-1} - I) + \mathscr{M}_c\right\}^{-1} \mathscr{M} T^{-1} = \left\{I + T\mathscr{L}(\mathscr{M}_c - \mathscr{M})\right\}^{-1} \tag{2.15a}$$

A_c与$\boldsymbol{B}_c$统称为集中张量，它们是四阶张量，分别描述在无限大介质中的一个椭球形夹杂物Ω_c中的应变与应力集中情况。它们取决于无限大介质和夹杂物的弹性性质以及椭球形夹杂物Ω_c的形状与取向。对应的四阶张量$\boldsymbol{A}_c$与$\boldsymbol{B}_c$一般都不具有 Voigt 对称性，因此A_c与$\boldsymbol{B}_c$一般为非对称矩阵。由(2.12)，(2.14)，并利用(2.2)，(2.6)，可证明$\boldsymbol{A}_c$与$\boldsymbol{B}_c$之间存在关系

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_c \boldsymbol{B}_c &= A_c \mathscr{M} \\ \mathscr{L}_c A_c &= \boldsymbol{B}_c \mathscr{L} \end{aligned} \tag{2.16}$$

当无限大介质与夹杂物均为各向同性弹性介质，且夹杂物Ω_c形状为圆球形时，利用(1.6)与(1.23)，由(2.13)与(2.15)可分别求出A_c与$\boldsymbol{B}_c$为

$$\begin{aligned} A_c &= \left(\frac{K}{(K_c - K)\alpha + K}, \frac{G}{(G_c - G)\beta + G}\right) \\ \boldsymbol{B}_c &= \left(\frac{K_c}{(K_c - K)\alpha + K}, \frac{G_c}{(G_c - G)\beta + G}\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

式中$\boldsymbol{K}_c$，G_c为夹杂物的体积模量与剪切模量，α，β见(1.9)。引入记号ρ_1，ρ_2

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{K_c}{(K_c - K)\alpha + K} = \frac{K_c}{K}\frac{3K + 4G}{3K_c + 4G} \\ \rho_2 &= \frac{G_c}{(G_c - G)\beta + G} \end{aligned} \tag{2.18}$$

并利用$(1.9)_1$式$\alpha = 3K/(3K + 4G)$，则(2.17)可记作

$$A_c = \left(\frac{K}{K_c}\rho_1, \frac{G}{G_c}\rho_2\right), \quad B_c = (\rho_1, \rho_2) \tag{2.19}$$

当夹杂物弹性性质与外域介质相同，即$K_c = K$且$G_c = G$时，$\rho_1 = \rho_2 = 1$、$A_c = B_c = I = (1,1)$。当夹杂物为空洞时，$K_c = G_c = 0$，$\rho_1 = \rho_2 = 0$，$A_c = \left(\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\beta}\right) = A_{\text{hole}}$（见习题 2.4），$B_c = (0,0)$。当夹杂物为刚性时，$K_c = \infty$、$G_c = \infty$，$\rho_1 = \frac{1}{\alpha}$，$\rho_2 = \frac{1}{\beta}$，$A_c = (0,0)$，$B_c = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) = B_{\text{rigid}}$（见习题 2.4）。

2.3 复合体的平均弹性模量

复合体(或复合材料)或多晶体的平均弹性模量(例如剪切模量，体积模量等)是细观力学经典问题之一。W. Voigt （1889）与 Reuss（1929）最早曾作研究。Hill（1952）证明 Voigt 的近似与 Reuss 的近似各给出平均模量的上限与下限。

2.3.1 Voigt 近似

图 2-5(a)示一复合体，其中有 n 个夹杂物嵌于基体之中。n 个夹杂物的弹性刚度张量各为$\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \cdots, \mathscr{L}_n$，基体的弹性刚度张量为$\mathscr{L}_0$。设 n 个夹杂物所占的体积分数(或称体积比)各为$c_1, c_2, \cdots, c_n$，而基体的体积分数为c_0。显然

$$\sum_{r=0}^{n} c_r = 1 \tag{3.1}$$

Voigt 采用图 2-5(b)所示的并联模型，假定在载荷作用下，各组成部分（n 个夹杂物与基体）的变形相同，都等于复合体的平均应变$\bar{\varepsilon}$，即$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, (r = 0,1,\cdots,n)$。复合体的平均应力为

$$\bar{\sigma} = \sum_{r=0}^{n} c_r \boldsymbol{\sigma}_r \tag{3.2}$$

以各组成部分的弹性本构关系

$$\boldsymbol{\sigma}_r = \mathscr{L}_r : \boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathscr{L}_r : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (r \text{ 不取和}) \tag{3.3}$$

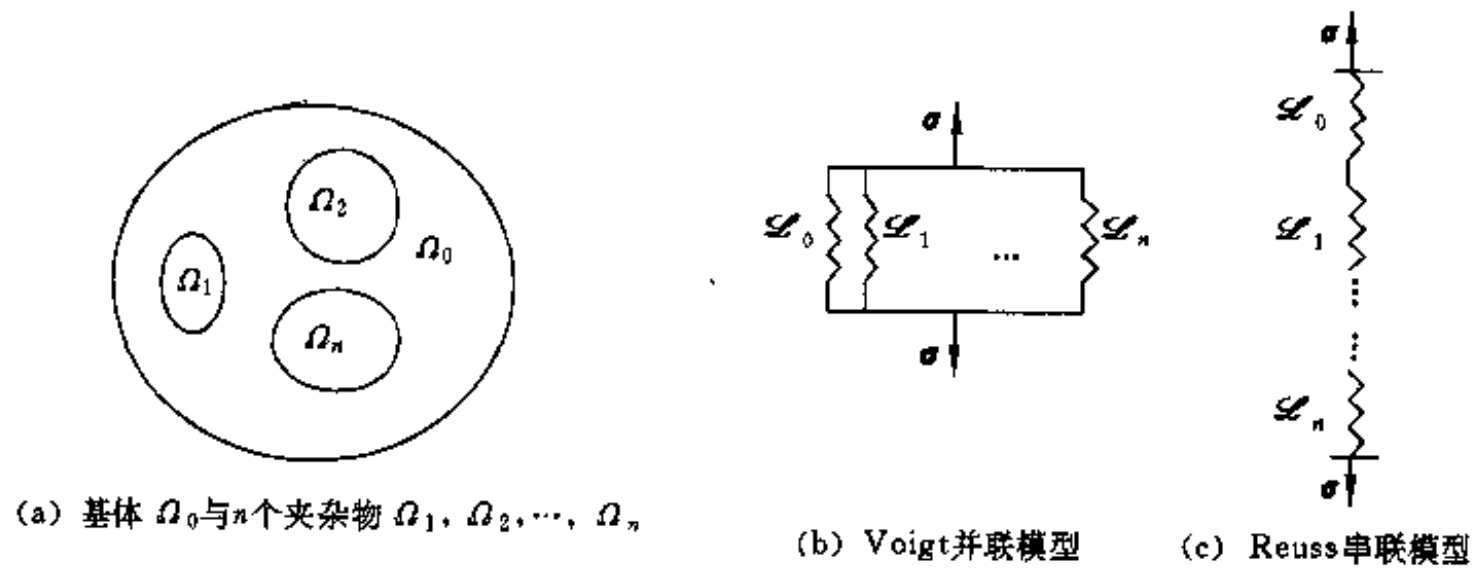
代入(3.2)，并注意$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$为任意，可得

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\mathscr{L}} : \bar{\varepsilon} \tag{3.4}$$

式中$\overline{\mathscr{L}}$为复合体的平均弹性刚度：

$$\overline{\mathscr{L}} = \sum_{r=0}^{n} c_r \mathscr{L}_r = \{\mathscr{L}\} \tag{3.5}$$

(3.5)式表示复合体的平均弹性刚度是各组成部分弹性刚度按体积的平均，这里及以后用{ }表示按体积的平均。



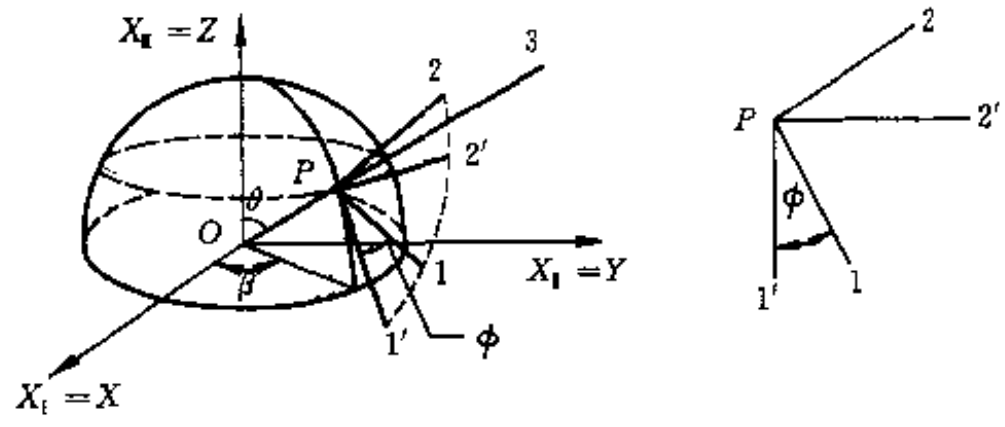
(a) 基体 Ω_0与n个夹杂物 Ω_1，Ω_2，…，Ω_n　　(b) Voigt并联模型　　(c) Reuss串联模型

图 2-5　复合体的平均弹性模量

如果各组成部分都是各向同性弹性材料，由(3.5)可得复合体的平均体积模量与平均剪切模量为

$$\begin{aligned} \overline{K} &= \sum_{r=0}^{n} c_r K_r = \{K\} \\ \overline{G} &= \sum_{r=0}^{n} c_r G_r = \{G\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

现在把(3.5)式用于多晶体的平均弹性刚度。单晶体的弹性性质一般是各向异性的。假定多晶体是由随机取向的单晶体颗粒组成。因此(3.5)式右端按体积平均{ }可改为（或理解为）按取向的平均。如图 2-6(a)所示，以 $X_{\mathrm{I}} = X, X_{\mathrm{II}} = Y, X_{\mathrm{III}} = Z$ 表示在空间中固定方向的笛卡尔坐标轴。故 I，II，III表示空间中三个固定的互相垂直的方向。任意单晶体颗粒的取向可用互相正交的三个方向 1，2，3 来表示。如图 2-6(a)所示，可以用(β，θ，ϕ)三个角度来表示单晶粒的取向。在一以 O 为球心的单位球面上，任一点 P 的位置可用β（经角）与θ（纬角的余角）来表示。以1′, 2′, 3表示 P 点的沿子午线（θ增加）、纬线（β 增加）与球半径 OP 的方向。再绕 3 轴旋转ϕ 角，就可以由1′, 2′, 3方向得到 1，2，3 方向。图 2-6(b)表示在 P 点的切平面中（即正交于 3 轴的平面中）实现的这一旋转ϕ。



(a) 单位球面　　(b) P点切平面中的旋转

图 2-6　在单位球面上 P 点表示单晶粒的任意取向：1,2,3 轴表示单晶粒方向

表 2-1 表示I，II，III方向与1′,2′,3′ 方向之间的夹角余弦 $a_{i'K}$（i' = 1′,2′,3′，K=I，II，III），由表 2-1 容易得到I，II，III方向与 1, 2, 3 方向之间的夹角余弦 a_{iK}（i =1,2,3, K = I，II，III）如表 2-2 所示。

表 2-1　$a_{i'K}$ 表 示 式

	K = I	K = II	K = III
i' = 1′	$\cos\theta\cos\beta$	$\cos\theta\sin\beta$	$-\sin\theta$
i' = 2′	$-\sin\beta$	$\cos\beta$	0
i' = 3′	$\sin\theta\cos\beta$	$\sin\theta\sin\beta$	$\cos\theta$

表 2-2　a_{iK} 表 示 式

	K = I	K = II	K = III
i = 1	$\cos\theta\cos\beta\cos\phi-\sin\beta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\beta\cos\phi+\cos\beta\sin\phi$	$-\sin\theta\cos\phi$
i = 2	$-\cos\theta\cos\beta\sin\phi-\sin\beta\cos\phi$	$-\cos\theta\sin\beta\sin\phi+\cos\beta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$
i = 3	$\sin\theta\cos\beta$	$\sin\theta\sin\beta$	$\cos\theta$

因为单晶的弹性性质一般是各向异性的，不同取向的单晶粒的弹性刚度张量 $\mathscr{L}$ 也是不同的。把单晶粒的 $\mathscr{L}$ 沿该晶粒自身的取向 1，2，3 方向分解为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \tag{3.7}$$

式中 $\boldsymbol{e}_i$ 表示沿 i（i = 1, 2, 3）方向的单位矢量。则显然各不同取向的单晶粒的 $\boldsymbol{e}_i$ 不同，但 $\mathscr{L}_{ijkl}$ 的数值（张量分量或矩阵元素）是相同的，即不因单晶粒取向不同而不同。按张量分量的坐标转换关系，$\mathscr{L}$ 也可以沿固定坐标轴 K（K = I，II，III）方向分解为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{IJKL}\boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_J\boldsymbol{e}_K\boldsymbol{e}_L \tag{3.8}$$

式中 $\boldsymbol{e}_K$ 表示沿 K（K = I，II，III）方向的单位矢量。(3.7)与(3.8)两种分解式中分量的关系为

$$\mathscr{L}_{IJKL} = a_{iI}\, a_{jJ}\, a_{kK}\, a_{lL}\, \mathscr{L}_{ijkl} \tag{3.9}$$

由(3.5)可得到多晶体的平均弹性刚度，

$$\overline{\mathscr{L}} = \{\mathscr{L}\} = \{\mathscr{L}_{IJKL}\}\boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_J\boldsymbol{e}_K\boldsymbol{e}_L = \overline{\mathscr{L}}_{IJKL}\boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_J\boldsymbol{e}_K\boldsymbol{e}_L \tag{3.10}$$

式中，注意到图 2-6(a)中单位球面的面元为 $\sin\theta\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\theta$，则

$$\overline{\mathscr{L}}_{IJKL} = \{\mathscr{L}_{IJKL}\} = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathscr{L}_{IJKL}\mathrm{d}\phi \tag{3.11}$$

将(3.9) $\mathscr{L}_{IJKL}$ 代入(3.11)，可得

$$\overline{\mathscr{L}}_{IJKL} = \left(\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}a_{iI}\, a_{jJ}\, a_{kK}\, a_{lL}\,\mathrm{d}\phi\right)\mathscr{L}_{ijkl} \tag{3.12}$$

由于单晶粒为随机取向，多晶体的弹性性质必然是各向同性的。利用 $(1.6)_1$ 的记法可记

$$\overline{\mathscr{L}} = (3\overline{K}, 2\overline{G}) \tag{3.13}$$

式中 $\overline{K}$, $\overline{G}$ 各为多晶体的平均体积模量与平均剪切模量。利用表示式$(1.4)_1$，可得

$$\overline{\mathscr{L}}_{IJKL} = \left(\overline{K} - \frac{2}{3}\overline{G}\right)\boldsymbol{\delta}_{IJ}\boldsymbol{\delta}_{KL} + \overline{G}(\boldsymbol{\delta}_{IK}\boldsymbol{\delta}_{JL} + \boldsymbol{\delta}_{IL}\boldsymbol{\delta}_{JK}) \tag{3.14}$$

由上式取缩并，可计算出下列不变量

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{L}}_{IIKK} &= 9\overline{K}\\ \overline{\mathscr{L}}_{IJIJ} &= 3\overline{K} + 10\overline{G}\end{aligned} \tag{3.15}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\overline{K} &= \frac{1}{9}\overline{\mathscr{L}}_{IIKK}\\ \overline{G} &= \frac{1}{10}\left(\overline{\mathscr{L}}_{IJIJ} - \frac{1}{3}\overline{\mathscr{L}}_{IIKK}\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

将(3.9)代入(3.16)，并利用张量分量转换的不变量性质，可得

$$\begin{aligned}\overline{K} &= \frac{1}{9}\mathscr{L}_{iikk}\\ \overline{G} &= \frac{1}{10}\left(\mathscr{L}_{ijij} - \frac{1}{3}\mathscr{L}_{iikk}\right)\end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.17)就是按 Voigt 近似，多晶体的模量直接由单晶粒弹性刚度不变量的表示式。

2.3.2 Reuss 近似

Reuss 采用图 2-5(c)所示的串联模型，假定在载荷作用下，各组成部分的应力相同，都等于复合体的平均应力$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$，即$\boldsymbol{\sigma}_r = \bar{\boldsymbol{\sigma}}, (r = 0,1,\cdots,n)$。复合体的平均应变为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{r=0}^{n} c_r \boldsymbol{\varepsilon}_r \tag{3.18}$$

以各组成部分的逆弹性本构关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathscr{M}_r : \boldsymbol{\sigma}_r = \mathscr{M}_r : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \qquad (r\text{ 不取和}) \tag{3.19}$$

代入(3.18)，并注意$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$为任意，可得

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathscr{M}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.20}$$

式中$\bar{\mathscr{M}}$为复合体的平均弹性柔度

$$\bar{\mathscr{M}} = \sum_{r=0}^{n} c_r \mathscr{M}_r = \{\mathscr{M}\} \tag{3.21}$$

(3.21)式表示复合体的平均弹性柔度是各组成部分弹性柔度按体积的平均。

如果各组成部分是各向同性材料，由(3.21)可得复合体的平均模量与平均剪切模量$\bar{G}$由下式给出，即

$$\frac{1}{\bar{K}} = \sum_{r=0}^{n} \frac{c_r}{K_r} = \left\{\frac{1}{K}\right\} \quad \frac{1}{\bar{G}} = \sum_{r=0}^{n} \frac{c_r}{G_r} = \left\{\frac{1}{G}\right\} \tag{3.22}$$

对于由单晶粒随机取向组成的多晶体，类似于节 2.3.1 中 Voigt 近似的(3.12)，可得

$$\bar{\mathscr{M}}_{IJKL} = \left(\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} a_{iI} a_{jJ} a_{kK} a_{lL} \mathrm{d}\phi\right) \mathscr{M}_{ijkl} \tag{3.23}$$

类似于(3.13)，(3.14)可记

$$\bar{\mathscr{M}}_{IJKL} = \left(\frac{1}{3\bar{K}}, \frac{1}{2\bar{G}}\right) \tag{3.24}$$

$$\bar{\mathscr{M}}_{IJKL} = \left(\frac{1}{9\bar{K}} - \frac{1}{6\bar{G}}\right)\delta_{IJ}\delta_{KL} + \frac{1}{4\bar{G}}(\delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}) \tag{3.25}$$

取(3.25)的不变量

$$\overline{\mathscr{M}}_{IIKK}=\frac{1}{\overline{K}}$$
$$\overline{\mathscr{M}}_{IJIJ}=\frac{1}{3\overline{K}}+\frac{5}{2\overline{G}} \tag{3.25)'}$$

由此可得

$$\frac{1}{\overline{K}}=\overline{\mathscr{M}}_{IIKK}=\mathscr{M}_{iikk}$$
$$\frac{1}{\overline{G}}=\frac{2}{5}\left(\overline{\mathscr{M}}_{IJIJ}-\frac{1}{3}\overline{\mathscr{M}}_{IIKK}\right)=\frac{2}{5}\left(\mathscr{M}_{ijij}-\frac{1}{3}\mathscr{M}_{iikk}\right) \tag{3.26}$$

(3.26)就是按 Reuss 近似，多晶体的模量直接由单晶粒柔度不变量的表示式。

2.3.3 Hill 理论

Hill（1952）证明 Voigt 的近似与 Reuss 的近似各给出复合体平均弹性模量的上限与下限。

设图 2-5(a)所示的复合体在表面力 X_i 作用下，平均应力为 $\overline{\sigma}_{ij}$，平均应变为 $\overline{\varepsilon}_{ij}$，并设 $\overline{\sigma}_{ij}$ 与 $\overline{\varepsilon}_{ij}$ 都是均匀的。这个复合体的受力 X_i 与边界位移 u_i^0 示于图 2-7(a)。D 表示复合体所占的域，S 为边界。均匀应力 $\overline{\sigma}_{ij}$ 显然满足平衡方程 $\overline{\sigma}_{ij,j}=0$，及在边界 S 上的表面力边界条件

$$\overline{\sigma}_{ij}n_j=X_i \quad 在\ S\ 上 \tag{3.27}$$

式中 n_j 为表面 S 的单位外向矢量。$\overline{\varepsilon}_{ij}$ 应满足

$$\overline{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\overline{u}_{i,j}+\overline{u}_{j,i}) \quad 在\ D\ 内 \tag{3.28}$$

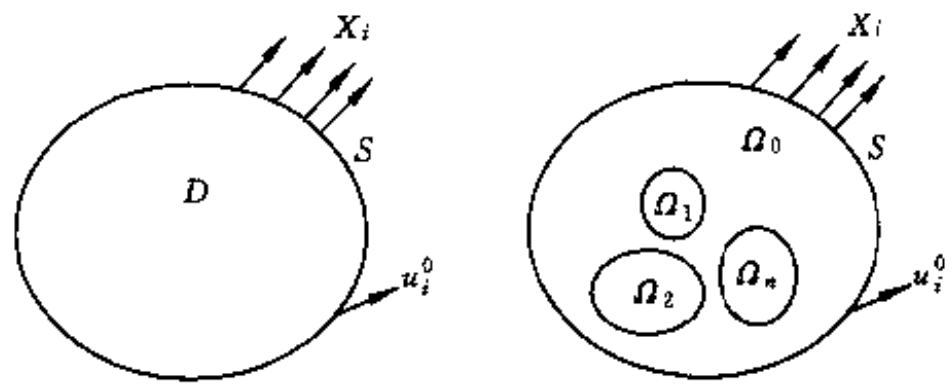
$$\overline{u}_i=u_i^0 \quad 在\ S\ 上 \tag{3.29}$$

式中 $\overline{u}_i$ 为平均位移，它是空间坐标的线性函数（因为 $\overline{\varepsilon}_{ij}$ 为均匀）。以 $\overline{\mathscr{L}}$ 表示平均弹性刚度，$\overline{\mathscr{M}}$ 表示平均弹性柔度，则有

$$\overline{\sigma}_{ij}=\overline{\mathscr{L}}_{ijkl}\overline{\varepsilon}_{kl} \tag{3.30}$$

或

$$\overline{\varepsilon}_{ij}=\overline{\mathscr{M}}_{ijkl}\overline{\sigma}_{kl} \tag{3.31}$$



(a) 平均场 $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $\bar{u}_i$　　(b) 实际场 σ_{ij}, ε_{ij}, u_i

图 2-7　复合体的平均场与实际场

实际的复合体如图 2-7(b)所示，$D=\Omega_0+\Omega_1+\cdots+\Omega_n$ 。应力、应变与位移各记作σ_{ij}，ε_{ij}与u_i。由于材料不均匀，它们的变化都很复杂。σ_{ij}与ε_{ij}满足各组成部分的弹性本构关系

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}=\mathscr{L}_{ijkl}\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}\ ,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\mathscr{M}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{kl} \tag{3.32}$$

σ_{ij}满足平衡方程$\sigma_{ij,j}=0$，ε_{ij}与u_i应满足

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\quad 在\ D\ 内 \tag{3.33}$$

σ_{ij}与u_i也应满足边界条件(3.27)，(3.29)

$$\sigma_{ij}n_j=X_i\quad 在\ S\ 上 \tag{3.34}$$

$$u_i=u_i^0\qquad 在\ S\ 上 \tag{3.35}$$

因为$\sigma_{ij,j}=0$，$\bar{\sigma}_{ij,j}=0$，则有（可以用部分求积或虚功原理证明，下文中类似）

$$\begin{aligned}\int_D \boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}D&=\int_D \boldsymbol{\sigma}_{ij}u_{i,j}\mathrm{d}D=\int_S X_i u_i^0\mathrm{d}S\\ \int_D \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}\mathrm{d}D&=\int_D \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\bar{u}_{i,j}\mathrm{d}D=\int_S X_i u_i^0\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{3.36}$$

式中 $\mathrm{d}D$ 表示体元，$\mathrm{d}S$ 表示面元。因此

$$\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{V}\int_D \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}D \tag{3.37}$$

式中 V 表示 D 的体积。现在以σ_{ij}^o表示均匀应变$\bar{\varepsilon}_{ij}$所对应的各组成部分的应力，以ε_{ij}^o表示均匀应力$\bar{\sigma}_{ij}$所对应的各组成部分的应变，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{ij}^0&=\mathscr{L}_{ijkl}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0&=\mathscr{M}_{ijkl}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}\end{aligned} \tag{3.38}$$

式中$\mathscr{L}_{ijkl}$与$\mathscr{M}_{ijkl}$表示各组成部分互相不同的弹性刚度与柔度。由弹性互逆关系

$$\sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij}=\sigma_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij},\quad \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^0=\bar{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}$$

易证

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^0)(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_{ij})&=\sigma_{ij}^0\bar{\varepsilon}_{ij}+2(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_{ij})\sigma_{ij}\\ \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+(\sigma_{ij}-\bar{\sigma}_{ij})(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^0)&=\bar{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^0+2(\sigma_{ij}-\bar{\sigma}_{ij})\varepsilon_{ij}\end{aligned}\tag{3.39}$$

(3.39)两式左端第二项可各写为 $\mathscr{L}_{ijkl}(\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}-\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl})(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}-\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij})$ 与 $\mathscr{M}_{ijkl}(\boldsymbol{\sigma}_{kl}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{kl})(\boldsymbol{\sigma}_{ij}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij})$，因此恒为正。此外，利用部分求积或虚位移原理可证

$$\begin{aligned}\int_D\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-\bar{\varepsilon}_{ij})\mathrm{d}D&=\int_S X_i(u_i^0-u_i^0)\mathrm{d}S=0\\ \int_D(\sigma_{ij}-\bar{\sigma}_{ij})\varepsilon_{ij}\mathrm{d}D&=\int_S(X_i-X_i)u_i^0\mathrm{d}S=0\end{aligned}\tag{3.40}$$

因此，由(3.39)在 D 上积分，并利用(3.37)与(3.40)可得

$$\begin{aligned}V\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}&\leqslant\bar{\varepsilon}_{ij}\int_D\sigma_{ij}^0\mathrm{d}D\\ V\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}&\leqslant\bar{\sigma}_{ij}\int_D\varepsilon_{ij}^0\mathrm{d}D\end{aligned}\tag{3.41}$$

以上两式分别利用(3.30)，$(3.38)_1$ 与(3.31)，$(3.38)_2$，可写作

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{L}}_{ijkl}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}&\leqslant\left(\frac{1}{V}\int_D\mathscr{L}_{ijkl}\mathrm{d}D\right)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}=\left\{\mathscr{L}_{ijkl}\right\}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}\\ \bar{\mathscr{M}}_{ijkl}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}&\leqslant\left(\frac{1}{V}\int_D\mathscr{M}_{ijkl}\mathrm{d}D\right)\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}=\left\{\mathscr{M}_{ijkl}\right\}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}\end{aligned}\tag{3.42}$$

上式对于任意的 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ 或 $\bar{\sigma}_{ij}$ 成立。(3.42)右端的{ }表示按体积的平均，$\{\mathscr{L}_{ijkl}\}$就是复合体刚度的 Voigt 近似，$\{\mathscr{M}_{ijkl}\}$就是复合体柔度的 Reuss 近似。

如果复合体本身及其各组成部分都是各向同性弹性，则由$(3.42)_1$可得

$$\bar{K}\leqslant\{K\}\qquad \bar{G}\leqslant\{G\}\tag{$(3.43)_1$}$$

而由$(3.42)_2$则有

$$\frac{1}{\bar{K}}\leqslant\left\{\frac{1}{K}\right\}\quad \frac{1}{\bar{G}}\leqslant\left\{\frac{1}{G}\right\}\tag{$(3.43)_2$}$$

Hashin 与 Shtrikman（1962，1963）曾提出一个变分原理用来求复合体平均弹性模量

的上限与下限。他们的方法一般能给出比 Voigt 与 Ruess 所给出的更好的上限与下限。以后许多作者（例如 Hill（1963）等）又推广和改进了他们的方法。

2.3.4 自洽方法

自洽方法(self-consistent method)最早曾由 Hershey（1964），Kröner（1968）等人用于多晶体。Hill（1965a，1965b）进一步发展了这一方法，并用来研究复合材料的弹性模量问题。

图 2-7(b)所示的复合体实际上包含了许多组成部分。复合体的总体（overall）弹性性质，可以用图 2-7(a)所示的等效的、均匀的弹性介质来代表，其弹性刚度张量为$\overline{\mathscr{L}}$,弹性柔度张量为$\overline{\mathscr{M}}$，复合体的总体弹性本构关系为(3.30)或(3.31)式。现在研究图 2-7(b)的复合体中的某一夹杂物，记作Ω_c。这个夹杂物嵌在图 2-4 所示的无限大介质中（见图 2-4(a)），但这无限大介质并非如图 2-7(b)中所示的基体，而是含有除Ω_c本身以外的其他所有物质的“基体”。而后者正是所要研究的等效的弹性介质。自洽方法的实质就在于把每个夹杂物看作嵌在等效弹性介质之中，这相当于在某种程度上考虑了每个夹杂物与基体及其他各夹杂物的相互作用。因此，2.2 夹杂问题一节中所导出的全部结果均可采用，只不过要把图 2-4 中的无限大介质（基体）改为等效的、均匀的弹性介质，其应力$\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$改为$\overline{\boldsymbol{\sigma}}$，应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}$改为$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$，弹性刚度张量$\mathscr{L}$改为$\overline{\mathscr{L}}$，而弹性柔度张量$\mathscr{M}$改为$\overline{\mathscr{M}}$。

在复合体中往往难于辨认 n 个组成部分（称为“相”）中谁是基体，谁是夹杂。往往没有任何一个“相”，使其他“相”的颗粒都嵌于它之中。因此在自洽方法中，把所有的“相”都平等看待，它们全是在等效介质中的夹杂物。

我们定义复合体的应力$\overline{\boldsymbol{\sigma}}$（或称总体应力，或宏观应力）是各组成部分（看作夹杂）的应力$\boldsymbol{\sigma}_c$的按体积平均,即

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V}\int_D \boldsymbol{\sigma}_c \mathrm{d}D = \{\boldsymbol{\sigma}_c\} \tag{3.44}$$

(3.44)也可写作

$$\{\boldsymbol{\sigma}_c - \overline{\boldsymbol{\sigma}}\} = 0 \tag{3.44a}$$

$\boldsymbol{\sigma}_c - \overline{\boldsymbol{\sigma}}$称为“应力偏差”，故应力偏差的按体积平均值为零。由(2.12)，(2.14)与(2.2)，可得矩阵等式

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= A_c\overline{\varepsilon} = \mathscr{M}_c B_c \overline{\sigma} \\ \sigma_c &= B_c\overline{\sigma} = \mathscr{L}_c A_c \overline{\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.45}$$

式中 A_c 为应变集中张量，B_c 为应力集中张量,由式(2.13)，(2.15)，(将$\mathscr{L}$改为$\overline{\mathscr{L}}$),分别为

$$
\begin{aligned}
A_c &= (\bar{\mathscr{L}}^* + \mathscr{L}_c)^{-1}(\bar{\mathscr{L}}^* + \bar{\mathscr{L}}) \\
B_c &= (\bar{\mathscr{M}}^* + \mathscr{M}_c)^{-1}(\bar{\mathscr{M}}^* + \bar{\mathscr{M}})
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

而等效介质的弹性约束张量 $\bar{\mathscr{L}}^*$，$\bar{\mathscr{M}}^*$ 见(1.19)与(1.21),分别为

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathscr{L}}^* &= \bar{\mathscr{L}}(\bar{S}^{-1} - I) \\
\bar{\mathscr{M}}^* &= \bar{\mathscr{L}}^{*-1} = (\bar{S}^{-1} - I)^{-1}\bar{\mathscr{M}}
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

式中 $\bar{S}$ 为根据等效介质的 Eshelby 张量。将$(3.45)_2$代入(3.44)，并注意 $\bar{\sigma} = \bar{\mathscr{L}}\bar{\varepsilon}$，可得

$$
I = \{B_c\} \tag{3.48a}
$$

或即

$$
\bar{\mathscr{L}} = \{\mathscr{L}_c A_c\} \tag{3.48b}
$$

(3.48a)式中 B_c 依赖于 $\bar{\mathscr{M}}$（见$(3.46)_2$，B_c 依赖于 $\bar{\mathscr{M}}$ 与 $\bar{\mathscr{M}}^*$，而 $\bar{\mathscr{M}}^*$ 表达式$(3.47)_2$中 $\bar{S}$ 也依赖于 $\bar{\mathscr{M}}$），故可由(3.48a)求出 $\bar{\mathscr{M}}$。(3.48b)中 A_c 依赖于 $\bar{\mathscr{L}}$（见$(3.46)_1$），故亦可由(3.48b)求出 $\bar{\mathscr{L}}$。如果复合体由 N 个相的材料组成，各相的体积分数为 c_r（$r = 1, 2, \cdots, N$），并假设每一相的颗粒均为形状相似且取向相同的椭球，则（3.48a 与 b）式各成为

$$
I = \sum_{r=1}^{N} c_r B_c^{(r)} \tag{3.49a}
$$

与

$$
\bar{\mathscr{L}} = \sum_{r=1}^{N} c_r \mathscr{L}_c^{(r)} A_c^{(r)} \tag{3.49b}
$$

式中由(3.46) $A_c^{(r)}$ 为第 r 相的应变集中张量，$B_c^{(r)}$ 为第 r 相的应力集中张量

$$
\begin{aligned}
A_c^{(r)} &= (\bar{\mathscr{L}}^{*(r)} + \mathscr{L}_c^{(r)})^{-1}(\bar{\mathscr{L}}^{*(r)} + \bar{\mathscr{L}}) \\
B_c^{(r)} &= (\bar{\mathscr{M}}^{*(r)} + \mathscr{M}_c^{(r)})^{-1}(\bar{\mathscr{M}}^{*(r)} + \bar{\mathscr{M}})
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

$\bar{\mathscr{L}}^{*(r)}$，$\bar{\mathscr{M}}^{*(r)}$ 为第 r 相的弹性约束张量，由(3.47)

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathscr{L}}^{*(r)} &= \bar{\mathscr{L}}(\bar{S}^{(r)-1} - I) \\
\bar{\mathscr{M}}^{*(r)} &= \bar{\mathscr{L}}^{*(r)-1} = (\bar{S}^{(r)-1} - I)^{-1}\bar{\mathscr{M}}
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

$\bar{S}^{(r)}$ 为第 r 相的 Eshelby 张量，与该相的形状与取向有关。

定义复合体的应变 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$（或称总体应变，或宏观应变）是各组成部分（看作夹杂）的应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 的按体积平均,即

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V}\int_D \boldsymbol{\varepsilon}_c \mathrm{d}D = \{\boldsymbol{\varepsilon}_c\} \tag{3.52}$$

(3.52)也可写作

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_c - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \mathbf{0} \tag{3.52a}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_c - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 称为“应变偏差”，故应变偏差的按体积平均值为零。将$(3.45)_1$ 代入(3.52)，并注意 $\bar{\varepsilon} = \bar{\mathscr{M}}\bar{\sigma}$，可得

$$I = \{A_c\} \tag{3.53a}$$

或

$$\bar{\mathscr{M}} = \{\mathscr{M}_c B_c\} \tag{3.53b}$$

可以由(3.53a)求出 $\bar{\mathscr{F}}$，或由(3.53b)求出 $\bar{\mathscr{M}}$。如果复合体由 N 个相的材料组成，并假设每一相的颗粒均为形状相似且取向相同的椭球，则（3.53a 与 b）成为

$$I = \sum_{r=1}^{N} c_r A_c^{(r)} \tag{3.54a}$$

或

$$\bar{\mathscr{M}} = \sum_{r=1}^{N} c_r \mathscr{M}_c^{(r)} B_c^{(r)} \tag{3.54b}$$

由（3.48b 或 a）求出的 $\bar{\mathscr{F}}$ 或 $\bar{\mathscr{M}}$，与由（3.53a 或 b）求出的 $\bar{\mathscr{F}}$ 或 $\bar{\mathscr{M}}$，一般说来并不一致。也就是说，如果定义复合体应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 为各组成部分应力 $\boldsymbol{\sigma}_c$ 的按体积平均，那么复合体应变 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 未必是各组成部分应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 的按体积平均；反之亦然。

但是，如果所有的组成部分（即全部的 N 个相）颗粒均为形状相似（即三主轴比值相同）且取向相同的椭球，由(3.47)式可知，所有颗粒的 $\bar{\mathscr{F}}^*$（因而 $\bar{\mathscr{M}}^*$）均相同。此时，由(2.10)式

$$\sigma_c - \bar{\sigma} = -\bar{\mathscr{F}}^*(\varepsilon_c - \bar{\varepsilon}) \tag{3.55}$$

因此

$$\{\sigma_c - \bar{\sigma}\} = -\bar{\mathscr{F}}^*\{\varepsilon_c - \bar{\varepsilon}\}$$

所以(3.44a)与(3.52a)是等价的，因而（3.48b 或 a）与（3.53a 或 b），（3.49b 或 a）与（3.54a 或 b）也是等价的。由它们求出的 $\bar{\mathscr{F}}$ 或 $\bar{\mathscr{M}}$ 应该一致。

Hill（1965b）还把关系式(3.49a)与(3.54a)写成其他等价形式。将$(3.50)_2$ 代入(3.49a)，可得

$$\sum_{r=1}^{N} c_r(\overline{\mathscr{M}}^{*(r)} + \mathscr{M}_c^{(r)})^{-1}(\overline{\mathscr{M}}^{*(r)} + \overline{\mathscr{M}}) = I \tag{3.56}$$

而将(3.50)$_1$代入(3.54a)，则可得

$$\sum_{r=1}^{N} c_r(\overline{\mathscr{P}}^{*(r)} + \mathscr{P}_c^{(r)})^{-1}(\overline{\mathscr{P}}^{*(r)} + \overline{\mathscr{P}}) = I \tag{3.57}$$

如果所有的相（$r=1,2,\cdots,N$）颗粒均为形状相似且取向相同的椭球，$\overline{\mathscr{P}}^{*(r)} = \overline{\mathscr{P}}^{*}$（$r=1,2,\cdots,N$），则(3.49a)与(3.54a)（即(3.56)与(3.57)）可各简化为

$$\sum_{r=1}^{N} c_r(\overline{\mathscr{M}}^{*} + \mathscr{M}_c^{(r)})^{-1} = \overline{Q} \tag{3.58a}$$

或

$$\sum_{r=1}^{N} c_r(\overline{\mathscr{P}}^{*} + \mathscr{P}_c^{(r)})^{-1} = \overline{P} \tag{3.58b}$$

式中（见(1.25)，(1.26)与(1.29)）

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= \overline{T}\,\overline{\mathscr{P}} = \overline{\mathscr{P}}^{*}\overline{S} = (\overline{\mathscr{M}}^{*} + \overline{\mathscr{M}})^{-1} \\ \overline{P} &= \overline{\mathscr{M}}^{*}\overline{T} = \overline{S}\,\overline{\mathscr{M}} = (\overline{\mathscr{P}}^{*} + \overline{\mathscr{P}})^{-1} \end{aligned} \tag{3.59}$$

前已证明，当全体 N 个相均为形状相似且取向相同的椭球体时，(3.49a)与(3.54a)是等价的，因此(3.58a)与(3.58b)是等价的。利用 $\sum_{r=1}^{N} c_r = 1$，可将（3.58a 与 b）各改写为

$$\sum_{r=1}^{N} c_r\left[\left(\overline{\mathscr{M}}^{*} + \mathscr{M}_c^{(r)}\right)^{-1} - \overline{Q}\right] = 0 \tag{3.60a}$$

$$\sum_{r=1}^{N} c_r\left[\left(\overline{\mathscr{P}}^{*} + \mathscr{P}_c^{(r)}\right)^{-1} - \overline{P}\right] = 0 \tag{3.60b}$$

利用(3.59)，可得 $\overline{\mathscr{M}}^{*} = \overline{Q}^{-1} - \overline{\mathscr{M}}$，$\overline{\mathscr{P}}^{*} = \overline{P}^{-1} - \overline{\mathscr{P}}$，故可将（3.60a 与 b）写成

$$\sum_{r=1}^{N} c_r\left\{\left[\overline{Q}^{-1} + \left(\mathscr{M}_c^{(r)} - \overline{\mathscr{M}}\right)\right]^{-1} - \overline{Q}\right\} = 0 \tag{3.61a}$$

$$\sum_{r=1}^{N} c_r\left\{\left[\overline{P}^{-1} + \left(\mathscr{P}_c^{(r)} - \overline{\mathscr{P}}\right)\right]^{-1} - \overline{P}\right\} = 0 \tag{3.61b}$$

由代数等式

$$\left(x^{-1}+y\right)^{-1}-x=-x\left(y^{-1}+x\right)^{-1}x$$

的启发，可证矩阵等式

$$\left[\overline{Q}^{-1}+(\mathscr{M}_{\mathrm{c}}^{(r)}-\overline{\mathscr{M}})\right]^{-1}-\overline{Q}=-\overline{Q}\left[(\mathscr{M}_{\mathrm{c}}^{(r)}-\overline{\mathscr{M}})^{-1}+\overline{Q}\right]^{-1}\overline{Q}$$
$$\left[\overline{P}^{-1}+(\mathscr{L}_{\mathrm{c}}^{(r)}-\overline{\mathscr{L}})\right]^{-1}-\overline{P}=-\overline{P}\left[(\mathscr{L}_{\mathrm{c}}^{(r)}-\overline{\mathscr{L}})^{-1}+\overline{P}\right]^{-1}\overline{P}$$

因此，可将（3.61a 与 b）化成

$$\sum_{r=1}^{N}c_r\left[(\mathscr{M}_{\mathrm{c}}^{(r)}-\overline{\mathscr{M}})^{-1}+\overline{Q}\right]^{-1}=0 \tag{3.62a}$$

$$\sum_{r=1}^{N}c_r\left[(\mathscr{L}_{\mathrm{c}}^{(r)}-\overline{\mathscr{L}})^{-1}+\overline{P}\right]^{-1}=0 \tag{3.62b}$$

(3.62a)来自于(3.49a)，(3.62b)来自于(3.54a)。

现在假定复合体的各相颗粒均为圆球形，由$(1.6)_1$，(2.19)，计算(3.49b)中的矩阵

$$\overline{\mathscr{L}}=(3\overline{K},2\overline{G})$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{c}}^{(r)}A_{\mathrm{c}}^{(r)}&=(3K_{\mathrm{c}}^{(r)},2G_{\mathrm{c}}^{(r)})\left(\frac{\overline{K}}{K_{\mathrm{c}}^{(r)}}\rho_1^{(r)},\frac{\overline{G}}{G_{\mathrm{c}}^{(r)}}\rho_2^{(r)}\right)\\&=(3\overline{K}\rho_1^{(r)},2\overline{G}\rho_2^{(r)})\end{aligned}\qquad (r=1,2,\cdots,N) \tag{3.63}$$

式中$\rho_1^{(r)}$，$\rho_2^{(r)}$见(2.18)

$$\begin{aligned}\rho_1^{(r)}&=\frac{K_{\mathrm{c}}^{(r)}}{\overline{K}(1-\overline{\alpha})+\overline{\alpha}K_{\mathrm{c}}^{(r)}}=\frac{K_{\mathrm{c}}^{(r)}}{\overline{K}}\frac{3\overline{K}+4\overline{G}}{3K_{\mathrm{c}}^{(r)}+4\overline{G}}\\\rho_2^{(r)}&=\frac{G_{\mathrm{c}}^{(r)}}{\overline{G}(1-\overline{\beta})+\overline{\beta}G_{\mathrm{c}}^{(r)}}\end{aligned}\qquad (r=1,2,\cdots,N) \tag{3.64}$$

又以$\overline{\nu}$表示复合体的泊桑比，$\overline{\alpha},\overline{\beta}$见(1.9)为

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}&=\frac{3\overline{K}}{3\overline{K}+4\overline{G}}=\frac{1+\overline{\nu}}{3(1-\overline{\nu})}\\\overline{\beta}&=\frac{6(\overline{K}+2\overline{G})}{5(3\overline{K}+4\overline{G})}=\frac{2(4-5\overline{\nu})}{15(1-\overline{\nu})}\end{aligned} \tag{3.65}$$

(3.49b)可写成

$$\sum_{r=1}^{N} c_r \rho_1^{(r)} = 1$$
$$\sum_{r=1}^{N} c_r \rho_2^{(r)} = 1 \tag{3.66}$$

由(3.66)的两式联立可求出 $\overline{K}$ 与 $\overline{G}$ 。上面由(3.49b)导出了(3.66)。因为所有的颗粒都是圆球形，(3.49b)与(3.54b)是等价的。直接由(3.54b)也可以导出(3.66)（见习题 2.5）。当然，由(3.49a)或者(3.54a)也可以得到(3.66)。

由(3.58b)，利用$(1.23)_1$，(3.65)与习题 2.4 的结果 $\overline{P} = \left(\frac{\overline{\alpha}}{3\overline{K}}, \frac{\overline{\beta}}{2\overline{G}}\right)$，可得

$$\sum_{r=1}^{N} c_r (4\overline{G} + 3K_c^{(r)})^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{3\overline{K}} = (4\overline{G} + 3\overline{K})^{-1}$$
$$\sum_{r=1}^{N} c_r \left(\frac{2\overline{G}(1-\overline{\beta})}{\overline{\beta}} + 2G_c^{(r)}\right)^{-1} = \frac{\overline{\beta}}{2\overline{G}} \tag{3.67}$$

$(3.67)_1$ 说明一个有趣的结果，复合体的 $(4\overline{G} + 3\overline{K})^{-1}$ 是各组成部分 $(4\overline{G} + 3K_c^{(r)})^{-1}$ 按体积的平均值。

1. 两相材料 ($N = 2$) 情况及讨论

当复合体只由两个相($N = 2$)的材料组成，且两相的颗粒均为形状相似且取向相同的椭球，则（3.62a 与 b）可简化为

$$c_1(\mathscr{K}\overline{\mathscr{I}} - \mathscr{K}_c^{(2)})^{-1} + c_2(\mathscr{K}\overline{\mathscr{I}} - \mathscr{K}_c^{(1)})^{-1} = \overline{Q} \tag{3.68a}$$

$$c_1(\mathscr{G}\overline{\mathscr{I}} - \mathscr{G}_c^{(2)})^{-1} + c_2(\mathscr{G}\overline{\mathscr{I}} - \mathscr{G}_c^{(1)})^{-1} = \overline{P} \tag{3.68b}$$

再设颗粒为圆球形，则由(3.68b)，利用习题 2.4，可得

$$\frac{c_1}{\overline{K} - K_c^{(2)}} + \frac{c_2}{\overline{K} - K_c^{(1)}} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{K}} = \frac{3}{3\overline{K} + 4\overline{G}}$$
$$\frac{c_1}{\overline{G} - G_c^{(2)}} + \frac{c_2}{\overline{G} - G_c^{(1)}} = \frac{\overline{\beta}}{\overline{G}} = \frac{6(\overline{K} + 2\overline{G})}{5\overline{G}(3\overline{K} + 4\overline{G})} \tag{3.69}$$

式中 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ 见(3.65)。因为(3.68a)与(3.68b)等价，直接由(3.68a)也可以导出(3.69)（见习题 2.6）。由(3.69)两式可联立求解 $\overline{K}$ 与 $\overline{G}$ 。

对于两相材料($N = 2$)，求解 $\overline{K}$ 与 $\overline{G}$ 的一个简便消元方法，是从$(3.67)_1$ (N=2)与$(3.69)_2$消去 $\overline{K}$ ，而得到求解 $\overline{G}$ 的方程。由$(3.67)_1$，得

$$\overline{\alpha}=\frac{3\overline{K}}{3\overline{K}+4\overline{G}}=1-\frac{4\overline{G}}{3\overline{K}+4\overline{G}}$$
$$=(c_1+c_2)-4\overline{G}\left[\frac{c_1}{3K_c^{(1)}+4\overline{G}}+\frac{c_2}{3K_c^{(2)}+4\overline{G}}\right] \tag{3.70}$$
$$=\frac{c_1K_c^{(1)}}{K_c^{(1)}+\frac{4}{3}\overline{G}}+\frac{c_2K_c^{(2)}}{K_c^{(2)}+\frac{4}{3}\overline{G}}$$

由$(3.69)_2$，可得$\overline{\beta}$为

$$\overline{\beta}=\overline{G}\left[\frac{c_1}{\overline{G}-G_c^{(2)}}+\frac{c_2}{\overline{G}-G_c^{(1)}}\right]$$
$$=1+\frac{c_1G_c^{(2)}}{\overline{G}-G_c^{(2)}}+\frac{c_2G_c^{(1)}}{\overline{G}-G_c^{(1)}} \tag{3.71}$$

将(3.70)与(3.71)代入$\overline{\alpha}$与$\overline{\beta}$的关系式（见(1.9)）

$$\overline{\alpha}=3-5\overline{\beta}$$

可得

$$\left(\frac{c_1K_c^{(1)}}{K_c^{(1)}+\frac{4}{3}\overline{G}}+\frac{c_2K_c^{(2)}}{K_c^{(2)}+\frac{4}{3}\overline{G}}\right)+5\left(\frac{c_1G_c^{(2)}}{\overline{G}-G_c^{(2)}}+\frac{c_2G_c^{(1)}}{\overline{G}-G_c^{(1)}}\right)+2=0 \tag{3.72}$$

由(3.72)可求解$\overline{G}$。然后可进而求$\overline{K}$。

现在讨论两个特殊情况。

(1)设第 2 相为空洞，即$K_c^{(2)}=0$，$G_c^{(2)}=0$。(3.72)式成为

$$\frac{(1-c_2)K_c^{(1)}}{K_c^{(1)}+\frac{4}{3}\overline{G}}+\frac{5c_2G_c^{(1)}}{\overline{G}-G_c^{(1)}}+2=0 \tag{3.73}$$

由(3.73)式，当复合体全部由第一相构成时，$c_2\to 0$，$\overline{G}\to G_c^{(1)}$。当$c_2\to\frac{1}{2}$时，$\overline{G}\to 0$。这表示当复合体的空洞体积分数占 50%时，剪切模量$\overline{G}$为零。后一结果是不合理的。如果第一相不可压，$K_c^{(1)}\to\infty$，则(3.73)式的解为

$$\overline{G}=\frac{3-6c_2}{3-c_2}G_c^{(1)} \tag{3.74}$$

(2) 设两个相 ($r=1,2$)均不可压，即$K_c^{(1)}\to\infty$，$K_c^{(2)}\to\infty$，(3.72)式成为

$$3+5\left(\frac{c_1G_c^{(2)}}{\overline{G}-G_c^{(2)}}+\frac{c_2G_c^{(1)}}{\overline{G}-G_c^{(1)}}\right)=0$$

通分后，得（注意$c_1+c_2=1$）

$$3\overline{G}^2+\left[(2-5c_1)G_c^{(1)}+(2-5c_2)G_c^{(2)}\right]\overline{G}-2G_c^{(1)}G_c^{(2)}=0 \tag{3.75}$$

由(3.75)可以求出一个正根$\overline{G}$。写出(3.75)解的表达式后，可以证明当$G_c^{(2)}\to 0$（即第二相对体积变形为刚性，对剪切变形为柔性）时，有

$$\overline{G}\to\frac{1}{3}(5c_1-2)G_c^{(1)},\qquad 当\ c_1>\frac{2}{5} \tag{3.76}$$

$$\frac{\overline{G}}{G_c^{(2)}}\to\frac{2}{2-5c_1}.\qquad 故\ \overline{G}\to 0\ ，当\ c_1<\frac{2}{5}$$

(3.76)式表示当空洞体积分数占60%时，复合体剪切模量$\overline{G}$为零。这个结果也不大合理。

因此，一般认为，除非对于稀疏夹杂的情况（$c_2<<1$或$c_1<<1$），巨治理论给出的极端情况（例如某些模量趋于零或无限大）的结果不大可靠。

2. 面心立方多晶体的弹性模量（Hutchinson，1970）

首先来研究面心立方单晶体的弹性本构关系。以 1，2，3 三个方向表示面心立方晶体的晶轴方向。对于这三个方向，晶体具有“立方”对称性。弹性刚度张量的分量$\mathscr{L}_{ijkl}$中除了零分量以外，只有三个独立的非零分量，即$\mathscr{L}_{1111}$，$\mathscr{L}_{1122}$与$\mathscr{L}_{2323}$。在晶轴方向 1，2，3 中的弹性本构关系$(1.2)_1$的分量形式为

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\mathscr{L}_{1111}\varepsilon_{11}+\mathscr{L}_{1122}(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\\
\sigma_{22}&=\mathscr{L}_{1111}\varepsilon_{22}+\mathscr{L}_{1122}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33})\\
\sigma_{33}&=\mathscr{L}_{1111}\varepsilon_{33}+\mathscr{L}_{1122}(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11})\\
\sigma_{23}&=2\mathscr{L}_{2323}\varepsilon_{23}\\
\sigma_{31}&=2\mathscr{L}_{2323}\varepsilon_{31}\\
\sigma_{12}&=2\mathscr{L}_{2323}\varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

上式也可以分为球形张量部分：

$$\sigma_{ii}=(\mathscr{L}_{1111}+2\mathscr{L}_{1122})\varepsilon_{ii} \tag{3.78a}$$

与偏斜张量部分（取正应力分量之差代替偏应力分量）

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}-\sigma_{22}=(\mathscr{L}_{1111}-\mathscr{L}_{1122})(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\\
&\sigma_{22}-\sigma_{33}=(\mathscr{L}_{1111}-\mathscr{L}_{1122})(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})\\
&\sigma_{33}-\sigma_{11}=(\mathscr{L}_{1111}-\mathscr{L}_{1122})(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})\\
&\sigma_{23}=2\mathscr{L}_{2323}\varepsilon_{23}\\
&\sigma_{31}=2\mathscr{L}_{2323}\varepsilon_{31}\\
&\sigma_{12}=2\mathscr{L}_{2323}\varepsilon_{12}
\end{aligned}
\tag{3.78b}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ii}=3\eta_1\varepsilon_{ii}\\
&\sigma_{11}-\sigma_{22}=2\eta_2(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\\
&\sigma_{22}-\sigma_{33}=2\eta_2(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})\\
&\sigma_{33}-\sigma_{11}=2\eta_2(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})\\
&\sigma_{23}=2\eta_3\varepsilon_{23},\quad \sigma_{31}=2\eta_3\varepsilon_{31},\quad \sigma_{12}=2\eta_3\varepsilon_{12}
\end{aligned}
\tag{3.79}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
&3\eta_1=\mathscr{L}_{1111}+2\mathscr{L}_{1122}\\
&2\eta_2=\mathscr{L}_{1111}-\mathscr{L}_{1122}\\
&2\eta_3=2\mathscr{L}_{2323}
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

也可以把η_1,η_2,η_3当作面心立方单晶体的三个独立弹性常数，则由(3.80)，$\mathscr{L}_{1111}$，$\mathscr{L}_{1122}$与$\mathscr{L}_{2323}$可以通过它们表示为

$$
\mathscr{L}_{1111}=\eta_1+\frac{4}{3}\eta_2,\quad \mathscr{L}_{1122}=\eta_1-\frac{2}{3}\eta_2,\quad \mathscr{L}_{2323}=\eta_3
\tag{3.81}
$$

按(1.11)弹性刚度张量分量的 9 行 9 列矩阵表示，应有

$$
[\mathscr{L}]=\begin{bmatrix}
\mathscr{L}_{1111} & \mathscr{L}_{1122} & \mathscr{L}_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\mathscr{L}_{1122} & \mathscr{L}_{1111} & \mathscr{L}_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\mathscr{L}_{1122} & \mathscr{L}_{1122} & \mathscr{L}_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \mathscr{L}_{2323} & \mathscr{L}_{2323} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \mathscr{L}_{2323} & \mathscr{L}_{2323} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathscr{L}_{2323} & \mathscr{L}_{2323} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathscr{L}_{2323} & \mathscr{L}_{2323} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathscr{L}_{2323} & \mathscr{L}_{2323}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathscr{L}_{2323} & \mathscr{L}_{2323}
\end{bmatrix}
\tag{3.82}
$$

将(3.81)代入(3.82)，可得

$$
[\mathscr{S}]=\begin{bmatrix}
\eta_1+\frac{4}{3}\eta_2 & \eta_1-\frac{2}{3}\eta_2 & \eta_1-\frac{2}{3}\eta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\eta_1-\frac{2}{3}\eta_2 & \eta_1+\frac{4}{3}\eta_2 & \eta_1-\frac{2}{3}\eta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\eta_1-\frac{2}{3}\eta_2 & \eta_1-\frac{2}{3}\eta_2 & \eta_1+\frac{4}{3}\eta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \eta_3 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \eta_3 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_3 & \eta_3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_3 & \eta_3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_3 & \eta_3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_3 & \eta_3
\end{bmatrix} \tag{3.83}
$$

把$[\mathscr{S}]$写成三部分之和为

$$
[\mathscr{S}]=(3\eta_1-2\eta_2)\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}+2\eta_3\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
$$

$$
+2(\eta_2-\eta_3)\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{3.84}
$$

(3.84)式的分量形式为

$$\mathscr{L}_{ijkl}=(3\eta_1-2\eta_2)\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}+2\eta_3\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+2(\eta_2-\eta_3)\delta_{ijkl} \tag{3.85}$$

式中

$$\delta_{ijkl}=\begin{cases}1 & 当 i=j=k=l\\ 0 & 其他情况\end{cases}$$

(3.85)式的分量形式只适用于晶轴方向 1，2，3。在其他坐标轴方向中的分量需用张量分量的坐标转换公式求出。当 $\eta_1=K$，$\eta_2=\eta_3=G$ 时，(3.85)的 $\mathscr{L}_{ijkl}$ 成为各向同性弹性刚度张量 $(1.4)_1$ 式。(3.85)所表示的张量不是四阶各向同性张量（见(1.7)）。可把(3.85)所表示的四阶张量记作

$$\mathscr{L}\text{ 或 }\mathscr{L}=(3\eta_1,2\eta_2,2\eta_3) \tag{3.86}$$

如果 $\eta_2=\eta_3$，则(3.86)退化为如(1.7)所表示的四阶各向同性张量，即 $(3\eta_1,2\eta_2)$

$$\mathscr{L}\text{ 或 }\mathscr{L}=(3\eta_1,2\eta_2,2\eta_2)=(3\eta_1,2\eta_2) \tag{3.87}$$

以后我们兼用(1.7a)的(a,b)记号与(3.86)的(a,b,c)记号，并注意$(a,b,b)=(a,b)$。四阶张量 $\mathscr{L}$ 对应于(3.79)式所表示的由 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 到 $\boldsymbol{\sigma}$ 的变换，因此其逆 $\mathscr{M}=\mathscr{L}^{-1}$ 必可表示为

$$\mathscr{M}=\mathscr{L}^{-1}=\left(\frac{1}{3\eta_1},\frac{1}{2\eta_2},\frac{1}{2\eta_3}\right) \tag{3.88}$$

容易证明乘法规律：若有四阶张量

$$\boldsymbol{N}=(a,b,c),\quad \boldsymbol{K}=(d,e,f)$$

则

$$\boldsymbol{N}:\boldsymbol{K}=(ad,be,cf) \tag{3.89}$$

现在来研究面心立方多晶体。假定它是由随机取向的面心立方单晶颗粒组成。取 $X_{\mathrm{I}},X_{\mathrm{II}},X_{\mathrm{III}}$ 为在空间中固定坐标轴。如果取 Voigt 近似，那么多晶体的弹性刚度张量 $\overline{\mathscr{L}}$ 由(3.12)及(3.13)式给出，其中 $\overline{K}$，$\overline{G}$ 见(3.17)。由(3.85)可计算出

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{iikk}&=9\eta_1\\ \mathscr{L}_{ijij}&=3\eta_1+2(2\eta_2+3\eta_3)\end{aligned} \tag{3.90}$$

将(3.90)代入(3.17)，得面心立方多晶体的体积模量 $\overline{K}$ 与剪切模量 $\overline{G}$ 通过单晶弹性模量的表示式为

$$\overline{K}=\eta_1,\quad \overline{G}=\frac{1}{5}(2\eta_2+3\eta_3) \tag{3.91}$$

(3.91)式是 Voigt 近似的结果。

现在我们采用自洽方法。

由面心立方单晶颗粒随机取向构成的多晶体为各向同性弹性介质，故其弹性刚度张量与弹性柔度张量可各表示为

$$\overline{\mathscr{L}} = (3\overline{K}, 2\overline{G}) = (3\overline{K}, 2\overline{G}, 2\overline{G})$$
$$\overline{\mathscr{M}} = \left(\frac{1}{3\overline{K}}, \frac{1}{2\overline{G}}\right) = \left(\frac{1}{3\overline{K}}, \frac{1}{2\overline{G}}, \frac{1}{2\overline{G}}\right) \tag{3.92}$$

(3.92)式对于任意取向的笛卡尔坐标轴均成立。现在来研究某一个面心立方单晶颗粒。在沿此颗粒本身的晶轴方向 1，2，3 的坐标系内，晶粒弹性刚度张量 $\mathscr{L}_c$ 与弹性柔度张量 $\mathscr{M}_c$ 可用(3.86)与(3.88)式表示：

$$\mathscr{L}_c = (3\eta_1, 2\eta_2, 2\eta_3)$$
$$\mathscr{M}_c = \left(\frac{1}{3\eta_1}, \frac{1}{2\eta_2}, \frac{1}{2\eta_3}\right) \tag{3.93}$$

设单晶颗粒均为圆球形，在晶轴方向的坐标系内，弹性约束张量 $\mathscr{L}^*$ 与 $\mathscr{M}^*$ 见(1.23)为

$$\overline{\mathscr{L}}^* = \left(\frac{3\overline{K}(1-\overline{\alpha})}{\overline{\alpha}}, \frac{2\overline{G}(1-\overline{\beta})}{\overline{\beta}}\right) = 2\overline{G}\left(2, \frac{1-\overline{\beta}}{\overline{\beta}}\right) = 2\overline{G}\left(2, \frac{1-\overline{\beta}}{\overline{\beta}}, \frac{1-\overline{\beta}}{\overline{\beta}}\right)$$
$$\overline{\mathscr{M}}^* = \left(\frac{\overline{\alpha}}{3\overline{K}(1-\overline{\alpha})}, \frac{\overline{\beta}}{2\overline{G}(1-\overline{\beta})}\right) = \frac{1}{2\overline{G}}\left(\frac{1}{2}, \frac{\overline{\beta}}{1-\overline{\beta}}\right) = \frac{1}{2\overline{G}}\left(\frac{1}{2}, \frac{\overline{\beta}}{1-\overline{\beta}}, \frac{\overline{\beta}}{1-\overline{\beta}}\right) \tag{3.94}$$

式中 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ 见(3.65)。将(3.93)与(3.94)代入(3.46)，可计算出

$$A_c = (\overline{\mathscr{L}}^* + \mathscr{L}_c)^{-1}(\overline{\mathscr{L}}^* + \overline{\mathscr{L}}) = \left(\frac{\overline{K}}{\eta_1}\rho_1, \frac{\overline{G}}{\eta_2}\rho_2, \frac{\overline{G}}{\eta_3}\rho_3\right)$$
$$B_c = (\overline{\mathscr{M}}^* + \mathscr{M}_c)^{-1}(\overline{\mathscr{M}}^* + \overline{\mathscr{M}}) = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \tag{3.95}$$

式中

$$\rho_1 = \frac{\eta_1(4\overline{G} + 3\overline{K})}{\overline{K}(4\overline{G} + 3\eta_1)}$$
$$\rho_2 = \frac{\eta_2}{\overline{G}(1-\overline{\beta}) + \overline{\beta}\eta_2} \tag{3.96}$$
$$\rho_3 = \frac{\eta_3}{\overline{G}(1-\overline{\beta}) + \overline{\beta}\eta_3}$$

因此由$(3.93)_1$，$(3.95)_1$，得

$$\mathscr{L}_c A_c = (3\overline{K}\rho_1, 2\overline{G}\rho_2, 2\overline{G}\rho_3) \tag{3.97}$$

将(3.97)代入自洽方程(3.48b)

$$\overline{\mathscr{L}} = \{\mathscr{L}_c A_c\} \tag{3.48b}$$

式中左端 $\overline{\mathscr{L}}$ 见$(3.92)_1$，右端$\{\mathscr{L}_c A_c\}$可理解为对随机取向取平均。类似于(3.91)式的推导，可得

$$\{\mathscr{L}_c A_c\} = \left(3\overline{K}\rho_1, \frac{2}{5}(2\overline{G}\rho_2 + 3\overline{G}\rho_3)\right)$$

因此自洽方程(3.48b)成为

$$\begin{aligned} 3\overline{K} &= 3\overline{K}\rho_1 \\ 2\overline{G} &= \frac{2}{5}(2\overline{G}\rho_2 + 3\overline{G}\rho_3) \end{aligned} \tag{3.98}$$

即

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1 \\ \frac{2}{5}\rho_2 + \frac{3}{5}\rho_3 &= 1 \end{aligned} \tag{3.99}$$

将$(3.99)_1$代入$(3.96)_1$的ρ_1,可解出

$$\overline{K} = \eta_1 \tag{3.100}$$

代入$(3.65)_2$

$$\overline{\beta} = \frac{6(\overline{K} + 2\overline{G})}{5(3\overline{K} + 4\overline{G})} = \frac{6(\eta_1 + 2\overline{G})}{5(3\eta_1 + 4\overline{G})} \tag{3.101}$$

将$(3.96)_2$，$(3.96)_3$，代入$(3.99)_2$的ρ_2，ρ_3，并利用(3.101)，经过通分、整理并简化后，得到确定$\overline{G}$的方程为

$$(8\overline{G} + 9\eta_1)\left[8\overline{G}^3 + (9\eta_1 + 4\eta_2)\overline{G}^2 - \eta_3(3\eta_1 + 12\eta_2)\overline{G} - 6\eta_1\eta_2\eta_3\right] = 0$$

式中$8\overline{G} + 9\eta_1 \neq 0$是可消去的因子。将(3.80)式的$\eta_1$，$\eta_2$，$\eta_3$代入，并记

$$\mathscr{L}_{1111} = C_{11},\ \mathscr{L}_{1122} = C_{12},\ \mathscr{L}_{2323} = C_{44}$$

得到$\overline{G}$的三次代数方程为

$$8\overline{G}^3 + (5C_{11} + 4C_{12})\overline{G}^2 - C_{44}(7C_{11} - 4C_{12})\overline{G} - C_{44}(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12}) = 0 \tag{3.102}$$

对于铜单晶，Hutchinson 取

$$\frac{C_{12}}{C_{11}} = 0.722, \qquad \frac{C_{44}}{C_{11}} = 0.447$$

因为

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \neq \eta_3 = C_{44}$$

故铜单晶非各向同性弹性体。由(3.100)与$(3.80)_1$，有

$$\overline{K} = \eta_1 = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12}) = 0.815C_{11}$$

由(3.102)解出

$$\overline{G} = 0.285C_{11}$$

因此铜的多晶体杨氏模量与泊松比为

$$\overline{E} = \frac{9\overline{K}\overline{G}}{3\overline{K} + \overline{G}} = 0.766C_{11}$$

$$\overline{\nu} = \frac{3\overline{K} - 2\overline{G}}{2(3\overline{K} + \overline{G})} = 0.343$$

2.4 能量方法

Budiansky（1965）首先提出过能量等效的框架，但其框架只限于自洽方法。Huang（黄永刚）和 Hwang（黄克智）1995，Huang，Hwang，Hu 等(1995)把这框架推广于各向异性基体与夹杂，并用于各种近似求解方法，包括稀疏解 dilute solution）、自洽方法、广义自洽方法（generalized self-consistent method）及 Mori-Tanaka 方法。

我们来研究一个多相复合材料块体，它是由若干种各向异性弹性材料组成。假定各个相材料的空间分布使得复合材料在宏观上表现为均匀的。设一共有 $N-1$ 个相的夹杂嵌于基体中，其弹性刚度张量与弹性柔度张量各为 $\mathscr{L}^I, \mathscr{M}^I (I = 1,2,\cdots,N-1)$ 与 $\mathscr{L}$，$\mathscr{M}$，即夹杂与基体的本构关系各为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathscr{L}^I : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = \mathscr{L}^I_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathscr{M}^I : \boldsymbol{\sigma}, \quad \varepsilon_{ij} = \mathscr{M}^I_{ijkl}\sigma_{kl} \end{aligned} \qquad I = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{4.1}$$

及

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathscr{L} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = \mathscr{L}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathscr{M} : \boldsymbol{\sigma}, \quad \varepsilon_{ij} = \mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{kl} \end{aligned} \tag{4.2}$$

各夹杂相与基体的体积分数各为 $c_I (I = 1,2,\cdots N-1)$ 与 $1 - \sum_{I=1}^{N-1} c_I$ 。一般说来，由于夹杂与基体的各向异性以及各夹杂的几何形状与空间取向，复合体是各向异性的，其弹性本构关系

可记作

$$\boldsymbol{\sigma}=\overline{\mathscr{L}}:\boldsymbol{\varepsilon},\quad \boldsymbol{\sigma}_{ij}=\overline{\mathscr{L}}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4.3a}$$

或

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\overline{\mathscr{M}}:\boldsymbol{\sigma},\quad \varepsilon_{ij}=\overline{\mathscr{M}}_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{4.3b}$$

式中 $\overline{\mathscr{L}},\overline{\mathscr{M}}=\overline{\mathscr{L}}^{-1}$ 为复合体的弹性刚度与柔度张量。

为了决定 $\overline{\mathscr{L}}$ 或 $\overline{\mathscr{M}}$，在复合材料块体的表面上施加均匀应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$。实际上在表面上施加的为由 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 计算的面力或曳力（traction）$\sigma^0\cdot n$，$\boldsymbol{n}$ 为正交于表面的单位外向法向矢量。复合材料中的应变能为

$$U=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0:\overline{\mathscr{M}}:\boldsymbol{\sigma}^0V=\frac{1}{2}\overline{\mathscr{M}}_{ijkl}\sigma_{ij}^0\sigma_{kl}^0V \tag{4.4}$$

式中 V 为复合材料的总体积。另一种方式，应变能也可以通过各个相（包含基体）中的应力与应变表示为

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\int_V\sigma:\varepsilon\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\int_V\sigma_{ij}u_{i,j}\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\int_V(\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\oint_S\sigma_{ij}n_ju_i\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{4.5}$$

式中 u_j 为位移，n_i 为块体表面 S 的单位外向法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分量。(4.5)的推导曾用到应变与位移的关系 $\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$，应力对称性 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，应力平衡条件 $\sigma_{ij,j}=0$，以及散度定理（或虚位移原理）。

在块体的表面上，曳力应满足力的边界条件 $\sigma_{ij}n_j=\sigma_{ij}^0n_j$。因此，(4.5)式成为

$$U=\frac{1}{2}\sigma_{ij}^0\oint_S u_in_j\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\sigma_{ij}^0\int_V u_{i,j}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\sigma_{ij}^0\int_V\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{4.6}$$

将 ε_{ij} 分成两部分之和

$$\varepsilon_{ij}=\mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{kl}+(\varepsilon_{ij}-\mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{kl})$$

这里 $\mathscr{M}_{ijkl}$ 为基体的弹性柔度张量（$\mathscr{M}=\mathscr{L}^{-1}$），$\sigma_{ij}$ 沿体积非均匀分布。应变能(4.6)式成为

$$U=\frac{1}{2}\sigma_{ij}^0\mathscr{M}_{ijkl}\int_V\sigma_{kl}\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^0\int_V(\varepsilon_{ij}-\mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{kl})\mathrm{d}V \tag{4.7}$$

(4.7)右端第一项的积分可化简成为

$$
\begin{aligned}
\int_V \sigma_{kl}\mathrm{d}V &= \int_V \sigma_{km}\delta_{lm}\mathrm{d}V = \int_V \sigma_{km}x_{l,m}\mathrm{d}V = \int_V (\sigma_{km}x_l)_{,m}\mathrm{d}V \\
&= \oint_S \sigma_{km}n_m x_l \mathrm{d}S = \sigma_{km}^0 \oint_S n_m x_l \mathrm{d}S = \sigma_{km}^0 \int_V x_{l,m}\mathrm{d}V \\
&= \sigma_{km}^0 \delta_{lm}\int_V \mathrm{d}V = \sigma_{kl}^0 V
\end{aligned}
\quad ①
$$

式中 x_l 为笛卡尔坐标。(4.7)式右端第二项中的被积函数在基体材料中为零，因此，第二项的积分成为

$$
\begin{aligned}
\sum_{I=1}^{N-1}\int_{V_I}(\varepsilon_{ij}^I - \mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{kl}^I)\mathrm{d}V &= \sum_{I=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}) - \mathscr{M}_{ijkl}\mathscr{L}_{klmn}^I\right]\int_{V_I}\varepsilon_{mn}^I\mathrm{d}V \\
&= \sum_{I=1}^{N-1}c_I\left[\frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}) - \mathscr{M}_{ijkl}\mathscr{L}_{klmn}^I\right]\bar{\varepsilon}_{mn}^I V
\end{aligned}
\quad ②
$$

式中 $V_I = c_I V$ 为第 I 相的总体积，而

$$
\bar{\varepsilon}_{mn}^I = \frac{1}{V_I}\int_{V_I}\varepsilon_{mn}^I\mathrm{d}V
$$

为第 I 相的平均应变。考虑到①，②式，应变能(4.7)式成为

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{V}{2}\left\{\mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{ij}^0\sigma_{kl}^0 + \sum_{I=1}^{N-1}c_I\left[\frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}) - \mathscr{M}_{ijkl}\mathscr{L}_{klmn}^I\right]\sigma_{ij}^0\bar{\varepsilon}_{mn}^I\right\} \\
&= \frac{V}{2}\left\{\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathscr{M} : \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \sum_{I=1}^{N-1}c_I\left[\boldsymbol{I} - \mathscr{M} : \mathscr{L}^I\right] : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I\right\}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为四阶等同张量（见$(1.5)_2$）。

将应变能的两种表示式(4.4)与(4.8)进行对比，可得

$$
\bar{\mathscr{M}}_{ijkl}\sigma_{ij}^0\sigma_{kl}^0 = \mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{ij}^0\sigma_{kl}^0 + \sum_{I=1}^{N-1}c_I\left[\frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}) - \mathscr{M}_{ijkl}\mathscr{L}_{klmn}^I\right]\sigma_{ij}^0\bar{\varepsilon}_{mn}^I \tag{4.9a}
$$

即

$$
\boldsymbol{\sigma}^0 : \bar{\mathscr{M}} : \boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathscr{M} : \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \sum_{I=1}^{N-1}c_I\left[\boldsymbol{I} - \mathscr{M} : \mathscr{L}^I\right] : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^I \tag{4.9b}
$$

应该强调，(4.9)是能量等效的精确表达式。各种不同的近似方法，例如稀疏解、自洽方法、广义自洽方法与 Mori-Tanaka 方法，它们的区别在于对每相的平均应变 $\bar{\varepsilon}_{mn}^I$ 的处理方法不同。一旦选择了计算 $\bar{\varepsilon}_{mn}^I$ 的方法，在 $\bar{\varepsilon}_{mn}^I$ 与施加的应力 σ_{ij}^0 之间存在一个线性关系，

即

$$\bar{\varepsilon}^{I}_{mn} = \bar{\mathscr{M}}^{I}_{mnpq}\sigma^{0}_{pq} \qquad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{I} = \bar{\mathscr{M}}^{I} : \boldsymbol{\sigma}^{0} \tag{4.10}$$

式中的 $\bar{\mathscr{M}}^{I}_{mnpq}$（或 $\bar{\mathscr{M}}^{I}$）称为第 I 相（I =1, 2, …, N–1）的平均应变柔度张量，它不仅取决于各相材料的几何（形状、取向等）、各相材料与基体材料的弹性性质，而且也因所采用的方法（例如见后 2.4.1~2.4.4）而异。虽然 $\bar{\mathscr{M}}^{I}$ 具有对第 1、第 2 指标与对第 3、第 4 指标的对称性，即 $\bar{\mathscr{M}}^{I}_{mnpq} = \bar{\mathscr{M}}^{I}_{nmpq} = \bar{\mathscr{M}}^{I}_{mnqp}$，但它未必具有对第 1、2 与第 3、4 指标的对称性 $\bar{\mathscr{M}}^{I}_{mnpq} = \bar{\mathscr{M}}^{I}_{pqmn}$。也就是说，$\bar{\mathscr{M}}^{I}$ 一般不具有 Voigt 对称性。

将(4.10)代入(4.9)，得到

$$\bar{\mathscr{M}}_{ijkl}\sigma^{0}_{ij}\sigma^{0}_{kl} = \left\{\mathscr{M}_{ijkl} + \sum_{I=1}^{N-1} c_I\left[\frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) - \mathscr{M}_{ijpq}\mathscr{S}^{I}_{pqmn}\right]\bar{\mathscr{M}}^{I}_{mnkl}\right\}\sigma^{0}_{ij}\sigma^{0}_{kl} \tag{4.11a}$$

即

$$\boldsymbol{\sigma}^{0} : \bar{\mathscr{M}} : \boldsymbol{\sigma}^{0} = \boldsymbol{\sigma}^{0} : \left\{\mathscr{M} + \sum_{I=1}^{N-1} c_I\left[\boldsymbol{I} - \mathscr{M} : \mathscr{L}^{I}\right] : \bar{\mathscr{M}}^{I}\right\} : \boldsymbol{\sigma}^{0} \tag{4.11b}$$

(4.11)是一个 $\boldsymbol{\sigma}^{0}$ 的二次方程，对于任意的 $\boldsymbol{\sigma}^{0}$ 成立。对于一般各向异性复合材料，一共有 21 个二次项，例如 $(\sigma^{0}_{11})^2, \sigma^{0}_{11}\sigma^{0}_{22}, (\sigma^{0}_{22})^2$ 等。比较(4.11a)中这些二次项的系数导致 21 个方程，来决定复合材料的 21 个模量 $\bar{\mathscr{L}}_{ijkl}$。

对于下文 2.4.1 的稀疏解（即不考虑夹杂互相作用的解），及 2.4.4 的 Mori-Tanaka 方法，夹杂的平均应变柔度张量 $\bar{\mathscr{M}}^{I}$ 与复合材料模量 $\bar{\mathscr{L}}$ 无关。因此，由(4.11)可得到封闭形式的解。但是对于 2.4.2 的自洽方法或 2.4.3 的广义自洽方法，$\bar{\mathscr{M}}^{I}$ 还依赖于 $\bar{\mathscr{L}}$，因此(4.11)为一个求解 $\bar{\mathscr{L}}$ 的非线性方程组。这一点将在下文仔细讨论。

在由(4.11)得到张量形式的方程之前，叙述以下定理：令 $\boldsymbol{\sigma}^{0}$ 为二阶对称张量，$\sigma^{0}_{ij} = \sigma^{0}_{ji}$，$\boldsymbol{A}$ 为四阶张量，具有对称性 $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}$，但不具有对于第 1 对指标 ij 与第 2 对指标 kl 的对称性，即 $A_{ijkl} \neq A_{klij}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 不具有 Voigt 对称性。如果对于任意的 $\boldsymbol{\sigma}^{0}$，$\boldsymbol{\sigma}^{0} : \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\sigma}^{0} = 0$ 均成立，则 $\boldsymbol{A}$ 的对称部分必为零，即

$$\mathrm{sym}\boldsymbol{A} = 0 \tag{4.12a}$$

$$\frac{1}{2}(A_{ijkl} + A_{klij}) = 0 \tag{4.12b}$$

这里我们定义 sym $\boldsymbol{A}$ 的分量就是(4.12b)的左端，即把 $\boldsymbol{A}$ 的分量对于第 1 对(ij)与第 2 对(kl)指标进行对称化的结果。这里要注意的是，从 $\boldsymbol{\sigma}^{0} : \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\sigma}^{0} = 0$ 一般不能得到 $\boldsymbol{A} = 0$ 的结论，除非 $\boldsymbol{A}$ 具有 Voigt 对称性。

将上述定理用于(4.11)式，可得

$$\overline{\mathscr{M}} = \mathscr{M} + \sum_{I=1}^{N-1} c_I \operatorname{sym}\left[(\mathscr{I} - \mathscr{M} : \mathscr{L}^I) : \overline{\mathscr{M}}^I\right] \tag{4.13a}$$

$$\overline{\mathscr{M}}_{ijkl} = \mathscr{M}_{ijkl} + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N-1} c_I \left[\overline{\mathscr{M}}^I_{ijkl} + \overline{\mathscr{M}}^I_{klij} - \mathscr{M}_{ijpq}\mathscr{L}^I_{pqmn}\overline{\mathscr{M}}^I_{mnkl} - \mathscr{M}_{klpq}\mathscr{L}^I_{pqmn}\overline{\mathscr{M}}^I_{mnij}\right] \tag{4.13b}$$

讨论一个最简单的情况：设基体材料为各向同性，其体积模量为 K，剪切模量为 G。只有一个相的夹杂（$I = N - 1 = 1$）随机地嵌于基体之中，且夹杂相材料也是各向同性，夹杂颗粒均为圆球形。夹杂相材料的体积模量为 K_c，剪切模量为 G_c，体积分数为 c。显然，复合体也是各向同性的，需求其体积模量 $\overline{K}$ 与剪切模量 $\overline{G}$ 。利用(1.3)式，有关基体、夹杂相（以上标或下标 c 表示）与复合体（以上面一横表示）的弹性张量可表示为

$$\begin{aligned}
\mathscr{M} &= \frac{1}{3K}\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta} + \frac{1}{2G}\bar{\boldsymbol{I}} \\
\mathscr{L}_c &= 3K_c\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta} + 2G_c\bar{\boldsymbol{I}} \\
\overline{\mathscr{M}} &= \frac{1}{3\overline{K}}\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta} + \frac{1}{2\overline{G}}\bar{\boldsymbol{I}}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

因为只有两个模量 $\overline{K}$ 与 $\overline{G}$ 待定，我们可以取两种施加的应力状态 $\boldsymbol{\sigma}^0$，由(4.9)或(4.11)列出两个方程：

(1) 取 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 为静水应力 $\boldsymbol{\sigma}^0 = \sigma^0\boldsymbol{\delta}$

利用(4.14)，并注意 $\bar{\boldsymbol{I}} : \boldsymbol{\delta} = 0$，由（4.9a 或 b）可得

$$\frac{1}{\overline{K}}(\sigma^0)^2 = \frac{1}{K}(\sigma^0)^2 + c\left(1 - \frac{K_c}{K}\right)\sigma^0\overline{\varepsilon}^c_{kk}$$

故

$$\frac{1}{\overline{K}} = \frac{1}{K} + c\left(1 - \frac{K_c}{K}\right)\frac{\overline{\varepsilon}^c_{kk}}{\sigma^0} \tag{4.15}$$

(2) 取 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 为轴对称剪切型应力

$$\sigma^0_{33} = 2\tau^0,\quad \sigma^0_{11} = \sigma^0_{22} = -\tau^0 \tag{4.16}$$

容易看出，$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$ 也是轴对称剪切型，$\overline{\varepsilon}^c_{11} = \overline{\varepsilon}^c_{22} = -\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}^c_{33}$。（4.9a 或 b）成为

$$\frac{3}{\overline{G}}(\tau^0)^2 = \frac{3}{G}(\tau^0)^2 + 3c\left(1 - \frac{G_c}{G}\right)\tau^0\overline{\varepsilon}^c_{33}$$

故

$$\frac{1}{\overline{G}}=\frac{1}{G}+c\left(1-\frac{G_c}{G}\right)\frac{\overline{\varepsilon}_{33}^{c}}{\tau^0} \tag{4.17}$$

由(4.15)与(4.17)两式，可求解复合材料的体积模量 $\overline{K}$ 与剪切模量 $\overline{G}$ 。如下面所述，夹杂平均应变 $\overline{\varepsilon}_{kk}^{c}$ （(4.15)式）与 $\overline{\varepsilon}_{33}^{c}$ （(4.17)式）的计算取决于所采用的方法，见以下 2.4.1~2.4.4。

2.4.1 稀疏解法（不考虑夹杂相互作用）

如图 2-8 所示，稀疏解法假定夹杂的平均应变 $\overline{\varepsilon}^I\ (I=1,2,\cdots,N-1)$ 近似等于孤立的夹杂嵌于无限大基体中时的应变，而不考虑在基体中所含有其他夹杂的影响。利用(2.13a)式夹杂应变集中张量表达式（按矩阵运算写法）为

$$\overline{\varepsilon}^I=A_c^I\varepsilon^0=A_c^I\mathscr{M}\sigma^0 \tag{4.18a}$$

$$A_c^I=\left\{\mathscr{I}+S^I\mathscr{M}(\mathscr{L}^I-\mathscr{L})\right\}^{-1}\qquad (I=1,2,\cdots,N-1) \tag{4.18b}$$

(4.18)式相当于在(4.10)中取第 I 相的平均应变柔度张量 $\overline{\mathscr{M}}^I$ 的对应矩阵 $\overline{\mathscr{M}}^I$ 为

$$\overline{\mathscr{M}}^I=A_c^I\mathscr{M}=\left\{\mathscr{I}+S^I\mathscr{M}(\mathscr{L}^I-\mathscr{L})\right\}^{-1}\mathscr{M}\qquad (I=1,2,\cdots,N-1) \tag{4.19}$$

当所有 N 个相(基体与 $N-1$ 个夹杂相)均为各向同性弹性，且各夹杂相颗粒均为圆球形时，利用$(1.6)_2$ $\mathscr{M}$ ，(1.9) α 与 β ，及 $(2.17)_1$，(4.19)式给出

$$\overline{\mathscr{M}}^I=\left(\frac{\frac{1}{3}}{K+\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}(K^I-K)},\ \frac{\frac{1}{2}}{G+\frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}(G^I-G)}\right)\qquad (I=1,2,\cdots,N-1) \tag{4.20}$$

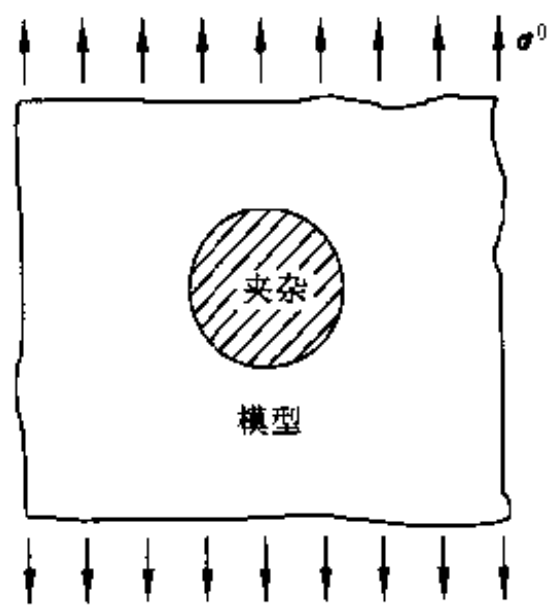


图 2-8 稀疏解模型

式中 K^I 与 G^I 表示第 I 相的弹性体积模量与剪切模量。由(4.20)可知在静水应力 $\boldsymbol{\sigma}^0=\sigma^0\boldsymbol{\delta}$ 作用下，第 I 相平均体积应变为

$$\bar{\varepsilon}_{kk}^I=\frac{1}{K+\dfrac{1+\nu}{3(1-\nu)}(K^I-K)}\sigma^0 \qquad (I=1,2,\cdots,N-1) \tag{4.21}$$

而在轴对称剪切型应力(4.16)作用下，第 I 相的应变分量 $\bar{\varepsilon}_{33}^I$ 为

$$\bar{\varepsilon}_{33}^I=\frac{1}{G+\dfrac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}(G^I-G)}\tau^0 \quad (I=1,2,\cdots,N-1) \tag{4.22}$$

当只有一个相的夹杂 $(I=N-1=1)$ 时，将(4.21)，(4.22)（其中 $I=1$ 以下标 c 表示）代入(4.15)，(4.17)，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{K}}&=\frac{1}{K}+c\left(1-\frac{K_c}{K}\right)\frac{1}{K+\dfrac{1+\nu}{3(1-\nu)}(K_c-K)}\\ \frac{1}{\bar{G}}&=\frac{1}{G}+c\left(1-\frac{G_c}{G}\right)\frac{1}{G+\dfrac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}(G_c-G)}\end{aligned} \tag{4.23}$$

由(4.23)可解出复合体的 $\bar{K}$ 与 $\bar{G}$,分别为

$$\bar{K}=K\left\{1+\frac{c\left(\dfrac{K_c}{K}-1\right)}{1-\left[\dfrac{1+\nu}{3(1-\nu)}-c\right]\left(\dfrac{K_c}{K}-1\right)}\right\} \tag{4.24}$$

$$\bar{G}=G\left\{1+\frac{c\left(\dfrac{G_c}{G}-1\right)}{1+\left[\dfrac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}-c\right]\left(\dfrac{G_c}{G}-1\right)}\right\} \tag{4.25}$$

显然，稀疏解没有考虑夹杂颗粒之间的相互作用，只能用于夹杂体积分数 c 很小，即 $c<<1$ 的情况。当 c 很小时，(4.24)与(4.25)的 Taylor 展开式成为

$$\frac{\bar{K}}{K}=1+\alpha_K c+\alpha_K^2c^2-\alpha_K^3c^3+O(c^4) \tag{4.26}$$

$$\frac{\bar{G}}{G}=1+\alpha_G c+\alpha_G^2c^2+\alpha_G^3c^3+O(c^4) \tag{4.27}$$

式中

$$\alpha_K = \frac{K_c - K}{K + \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}(K_c - K)}$$
$$\alpha_G = \frac{G_c - G}{G + \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}(G_c - G)} \tag{4.28}$$

当夹杂比基体材料更刚硬时，α_K 与 α_G 为正；否则为负。当夹杂表示空洞时（$K_c = G_c = 0$）

$$\alpha_K = -\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}, \quad \alpha_G = -\frac{15(1-\nu)}{7-5\nu}$$

当夹杂为刚性时（$K_c \to \infty$，$G_c \to \infty$）

$$\alpha_K = \frac{3(1-\nu)}{1+\nu}$$
$$\alpha_G = \frac{15(1-\nu)}{2(4-5\nu)}$$

2.4.2 自洽方法

2.3.4 曾指出，自洽方法假定把夹杂物嵌于其弹性刚度张量 $\bar{\mathscr{L}}$ 暂时尚为未知的等效介质之中（图 2-9）。因此 2.4.1 的公式仍可以适用，但需把基体的弹性模量改为等效弹性模量，例如把基体的弹性刚度张量 $\mathscr{L}$ 改为等效弹性刚度张量 $\bar{\mathscr{L}}$。因此(4.18)与(4.19)各成为

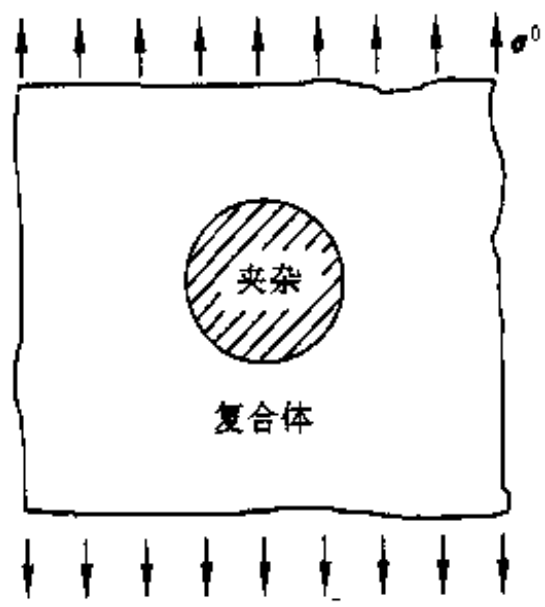


图 2-9 自洽方法模型

$$\bar{\varepsilon}^I = \left\{I + \bar{S}^I \bar{\mathscr{M}}(\mathscr{L}^I - \bar{\mathscr{L}})\right\}^{-1} \bar{\mathscr{M}} \sigma^0 \qquad (I = 1,2,\cdots,N-1) \tag{4.29}$$

$$\bar{\mathscr{M}}^I = \left\{I + \bar{S}^I \bar{\mathscr{M}}(\mathscr{L}^I - \bar{\mathscr{L}})\right\}^{-1} \bar{\mathscr{M}} \qquad (I = 1,2,\cdots,N-1) \tag{4.30}$$

对于各向同性弹性与圆球形颗粒夹杂情况，(4.21)与(4.22)两式改为

$$\bar{\varepsilon}_{kk}^{I}=\frac{1}{\bar{K}+\frac{1+\bar{\nu}}{3(1-\bar{\nu})}(K^{I}-\bar{K})}\sigma^{0}\qquad(I=1,2,\cdots,N-1)\tag{4.31}$$

$$\bar{\varepsilon}_{33}^{I}=\frac{1}{\bar{G}+\frac{2(4-5\bar{\nu})}{15(1-\bar{\nu})}(G^{I}-\bar{G})}\tau^{0}\qquad(I=1,2,\cdots,N-1)\tag{4.32}$$

式中 $\bar{\nu}=(3\bar{K}-2\bar{G})/(6\bar{K}+2\bar{G})$。当只有一个相的夹杂时 $(I=N-1=1)$，将(4.31)与(4.32)代入(4.15)，(4.17)得

$$\frac{1}{\bar{K}}=\frac{1}{K}+c\left(1-\frac{K_c}{K}\right)\frac{1}{\bar{K}+\frac{1+\bar{\nu}}{3(1-\bar{\nu})}(K_c-\bar{K})}\tag{4.33}$$

$$\frac{1}{\bar{G}}=\frac{1}{G}+c\left(1-\frac{G_c}{G}\right)\frac{1}{\bar{G}+\frac{2(4-5\bar{\nu})}{15(1-\bar{\nu})}(G_c-\bar{G})}\tag{4.34}$$

式中 c 为夹杂体积分数。(4.33)与(4.34)与前面 2.3.1 按 Hill 方法得到的(3.69)式完全一致。在(3.69)式中，令 $c_1=1-c$, $c_2=c$, $K_c^{(1)}=K$，$K_c^{(2)}=K_c$，$G_c^{(1)}=G$, $G_c^{(2)}=G_c$，可证(3.69)式分别与(4.33)与(4.34)一致。

(4.33)与(4.34)为 $\bar{K}$ 与 $\bar{G}$ 的非线性代数方程，必须数值求解。当夹杂体积分数 c 甚小时，可求出 K/K 与 G/G 的展开式为

$$\begin{aligned}\frac{\bar{K}}{K}=&1+\alpha_K c+\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\left[1+\frac{2-4\nu}{3(1-\nu)}\alpha_G\right]\alpha_K^2c^2+\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\left[\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\alpha_K-\frac{2-4\nu}{3(1-\nu)}\alpha_G\right.\\&+\frac{4(1-2\nu)(1+\nu)}{9(1-\nu)^2}\alpha_K\alpha_G+\frac{4(1-2\nu)(5\nu-1)}{45(1-\nu)^2}\alpha_G^2+\frac{8(1-2\nu)^2(1+\nu)}{45(1-\nu)^3}\alpha_K\alpha_G^2\\&\left.+\frac{4(1-2\nu)(23-50\nu+35\nu^2)}{675(1-\nu)^3}\alpha_G^3\right]\alpha_K^2c^3+O(c^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{G}}{G}=&1+\alpha_G c+\frac{8-10\nu}{15(1-\nu)}\left[1+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{3(1-\nu)(4-5\nu)}\alpha_K+\frac{23-50\nu+35\nu^2}{15(1-\nu)(4-5\nu)}\alpha_G\right]\alpha_G^2c^2\\&+\frac{2}{15(1-\nu)^2}\left\{\frac{3-10\nu+5\nu^2}{5}\alpha_G-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{3}\alpha_K\right.\\&+\frac{4(1+\nu)(1-2\nu)}{15(1-\nu)}\alpha_K\alpha_G+\frac{401-1485\nu+1875\nu^2-775\nu^3}{225(1-\nu)}\alpha_G^2\\&+\frac{4\alpha_G}{45(1-\nu)^2}\left[(1+\nu)^2(1-2\nu)^2\alpha_K^2+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)(23-50\nu+35\nu^2)}{10}\alpha_K\alpha_G\right.\\&\left.\left.+\frac{(23-50\nu+35\nu^2)^2}{75}\alpha_G^2\right]\right\}\alpha_G^2c^3+O(c^4)\end{aligned}\tag{4.35}$$

(4.36)

式中 α_K 与 α_G 见(4.28)式。二次项的系数不同于稀疏解(4.26)与(4.27)。含有空洞($K_c = G_c = 0$)或含有刚性夹杂（$K_c = \infty, G_c = \infty$）的复合体的杨氏模量与基体杨氏模量的比值 $\overline{E}/E$ 示于表 2-3 与表 2-4，表中也列出了稀疏解与下文其他解的结果。

2.4.3 广义自洽方法

为了更好地计及基体与夹杂之间的相互作用，采用广义自洽方法（例如，Christensen 与 Lo（1979））来计算夹杂的平均应变，即不像自洽方法那样把夹杂直接嵌于有效介质之中。如图 2-10 所示，取一孤立的夹杂嵌于有限厚度的基体材料中，而后者又嵌于其弹性模量尚未知的等效无限大介质之中。

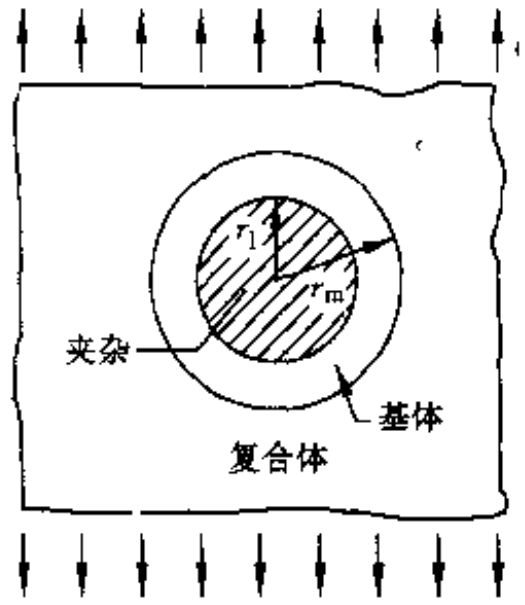


图 2-10 广义自洽方法模型

如果只有一个相的圆球形夹杂，夹杂半径 r_c 与球形基体半径 r_m 之间的比值由夹杂体积分数决定，即

$$c = \frac{r_c^3}{r_m^3} \tag{4.37}$$

设基体与夹杂材料均为各向同性。Huang 等（1994）求出在静水应力 $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^0 \boldsymbol{\delta}$ 作用下夹杂的平均体积应变

$$\overline{\varepsilon}_{kk}^c = \frac{(3\overline{K} + 4\overline{G})(3K + 4G)}{\overline{K}[(3K + 4\overline{G})(3K_c + 4G) + 12c(K - K_c)(\overline{G} - G)]}\sigma_0 \tag{4.38}$$

Huang，Hu，Wei 等(1994)也求出了在轴对称剪切型应力(4.16)式，即 $(-\tau^0, -\tau^0, 2\tau^0)$ 作用下夹杂的平均应变 $\overline{\varepsilon}_{33}^c$。将这些夹杂平均应变值（例如(4.38)）代入(4.15)与(4.17)，就可以联立求解出 $\overline{K}$ 与 $\overline{G}$。有趣的是，可以得到封闭形式的解，而且解的表达式与 Christensen 等（1979，1990）用特征函数求解的结果完全一致。因此广义自洽方法也可以纳入能量方

法的框架，只是以其独特的方式（见图 2-10 的模型）来计算夹杂平均应变。体积模量的封闭形式为

$$\overline{K}=K\left\{1+\frac{c\left(\frac{K_c}{K}-1\right)}{1+(1-c)\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\left(\frac{K_c}{K}-1\right)}\right\} \tag{4.39}$$

其 Taylor 展开式为

$$\frac{\overline{K}}{K}=1+\alpha_K c+\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\alpha_K^2 c^2+\frac{(1+\nu)^2}{9(1-\nu)^2}\alpha_K^3 c^3+O(c^4) \tag{4.40}$$

剪切模量 $\overline{G}$ 的解析表达式非常复杂,可见 Christensen 与 Lo（1979），它涉及若干非整次方项如 $c,c^{5/3},c^{7/3}$ 与 $c^{10/3}$。其 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned}\frac{\overline{G}}{G}=&1+\alpha_G c+\frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}\alpha_G^2 c^2+\frac{4(4-5\nu)^2+54}{225(1-\nu)^2}\alpha_G^3 c^3\\&-\frac{12}{25(1-\nu)^2}\alpha_G^3 c^{11/3}+O(c^4)\end{aligned} \tag{4.41}$$

第一个 c 的非整次方为出现在第 5 项的 $c^{11/3}$。(4.40)与(4.41)的 c^2 项不同于其他方法的结果。对于空洞与刚体夹杂的情况，Taylor 展开式各见于表 2-3 与表 2-4（对于不同的 ν 值）。

Christensen 等广义自洽方法的特征函数解法,只限于各向同性材料圆球形或圆柱形单相夹杂嵌于各向同性基体之中的情况。用能量方法可以把广义自洽方法推广到各向异性材料、非圆球形、非圆柱形、多相夹杂嵌于各向异性基体及含微裂纹的情况（Huang，Hu，Wei 等，1994；Huang，Hu 和 Chandra，1994；Huang 和 Hu，1995）。

2.4.4 Mori-Tanaka 方法

Mori-Tanaka 方法相当于在能量方法中计算夹杂平均应变的一种独特的、具有清晰的物理意义的方法。Mori-Tanaka 方法更详尽的细节可见 Weng（1984）与 Benveniste（1987）。本节中所给出的是 Mori-Tanaka 方法的基于物理描述的快速推导

自洽方法（图 2-9）与广义自洽方法（图 2-10）比稀疏解（图 2-8）更好地考虑夹杂物之间的相互作用，它们所采用的办法是把夹杂分别嵌于复合体（即等效介质，图 2-9）与嵌于被复合体包围的一层基体材料中（图 2-10）。用这两方法计算介质平均应变时，远处的应力就是外部施加的应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$。如图 2-11 所示，另一种考虑介质相互作用的办法是改变远处的应力，夹杂仍旧嵌于无限大基体材料之中，但基体在远处所受的应力不是外部施加的应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$，而是基体的平均应力 $\boldsymbol{\sigma}^m$。这基体平均应力 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^m$ 可以合理地反映存在于介质之间的相互作用，因为每个夹杂被周围的基体材料所包围，通过基体平均应力 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^m$ 而与邻近的夹杂与基体相互作用。因此对于材料为各向同性且只有一个相的圆球形夹杂的情况，只

要在稀疏解法 2.4.1 的(4.21)与(4.22)中把代表外部施加应力的两个数 σ^0 与 τ^0 各改为代表基体平均应力的两个数 $\bar{\sigma}^{\mathrm{m}}$ 与 $\bar{\tau}^{\mathrm{m}}$,即

$$\bar{\varepsilon}_{kk}^{c} = \frac{1}{K + \alpha(K_c - K)}\bar{\sigma}^{\mathrm{m}} \tag{4.42}$$

$$\bar{\varepsilon}_{33}^{c} = \frac{1}{G + \beta(G_c - G)}\bar{\tau}^{\mathrm{m}} \tag{4.43}$$

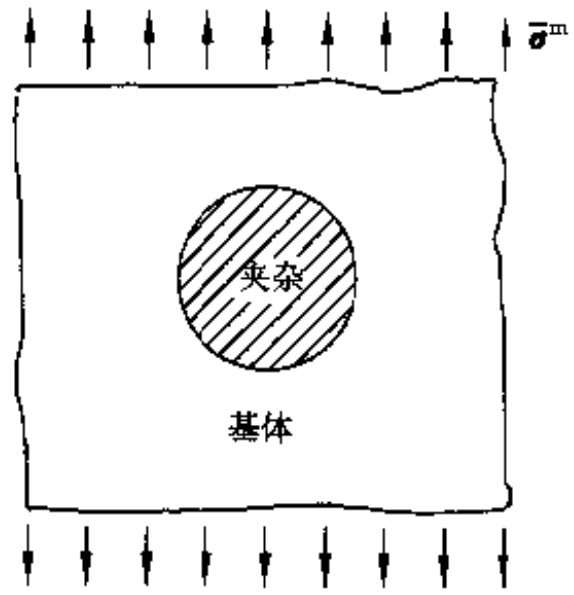


图 2-11 Mori-Tanaka 方法模型

式中 α,β 见(1.9)，$\bar{\sigma}^{\mathrm{m}}$ 为在外部施加的静水应力 $\boldsymbol{\sigma}^0 = \sigma^0\boldsymbol{\delta}$ 作用下基体的平均静水应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}} = \bar{\sigma}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{\delta}$，$\bar{\tau}^{\mathrm{m}}$ 代表在外部施加的轴对称剪切型应力(4.16)(即 $\sigma_{33}^0 = 2\tau^0, \sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = -\tau^0$)作用下基体的平均应力

$$\bar{\sigma}_{33}^{\mathrm{m}} = 2\bar{\tau}^{\mathrm{m}},\quad \bar{\sigma}_{11}^{\mathrm{m}} = \bar{\sigma}_{22}^{\mathrm{m}} = -\bar{\tau}^{\mathrm{m}}$$

基体平均应力可以按照 Mori 与 Tanaka（1973）及前引的 Weng（1984）的办法求出，这里给出一个根据图 2-11 的物理描述，更为简单的办法。在 2.4.1 稀疏解中夹杂平均应变的 (4.18)式仍旧适用，但必须把远处应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 改为基体平均应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{m}}$。设只有一个相的夹杂，按矩阵运算写法，有

$$\bar{\varepsilon}^{c} = \mathbf{A}_c \mathscr{M} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{m}} \tag{4.44a}$$

$$\mathbf{A}_c = \{I + S\mathscr{M}(\mathscr{L}_c - \mathscr{L})\}^{-1} \tag{4.44b}$$

假定夹杂与基体按体积平均的应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 等于外部施加的应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$，可得矩阵等式

$$\bar{\sigma} = c\sigma^{c} + (1-c)\bar{\sigma}^{\mathrm{m}} = \sigma^0 \tag{4.45}$$

当 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 给定，可由(4.45)求出 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{m}}$。利用(4.44)，由(4.45)可得矩阵等式

$$c\mathscr{L}_c A_c \mathscr{M}\bar{\sigma}^m + (1-c)\bar{\sigma}^m = \sigma^0 \tag{4.46}$$

故

$$\bar{\sigma}^m = \left[c\mathscr{L}_c A_c \mathscr{M} + (1-c)I\right]^{-1}\sigma^0 \tag{4.47}$$

也可把(4.46)式写作

$$\bar{\sigma}^m - c\left[I - \mathscr{L}_c A_c \mathscr{M}\right]\bar{\sigma}^m = \sigma^0 \tag{4.46$'$}$$

因为(4.44b) A_c 式又可写作

$$A_c = \left(\mathscr{L}_c - \mathscr{L}\right)^{-1}\mathscr{L}\left[S + \left(\mathscr{L}_c - \mathscr{L}\right)^{-1}\mathscr{L}\right]^{-1}$$

由(4.46)′可得

$$\bar{\sigma}^m - c\mathscr{L}(S-I)\left[S + (\mathscr{L}_c - \mathscr{L})^{-1}\mathscr{L}\right]^{-1}\mathscr{M}\bar{\sigma}^m = \sigma^0$$

故得 $\bar{\sigma}^m$ 解的另一通过 Eshelby 张量 S 的表示形式

$$\bar{\sigma}^m = \mathscr{L}\left\{I - c(S-I)\left[S + (\mathscr{L}_c - \mathscr{L})^{-1}\mathscr{L}\right]^{-1}\right\}^{-1}\mathscr{M}\sigma^0 \tag{4.48}$$

设夹杂颗粒为圆球形，则由(1.8) $S = (\alpha, \beta)$，A_c 见(2.17)，$\mathscr{L}_c = (3K_c, 2G_c)$，$\mathscr{M} = \left(\frac{1}{3K}, \frac{1}{2G}\right)$，(4.47)式右端的矩阵可由计算得到

$$[c\mathscr{L}_c A_c \mathscr{M} + (1-c)I]^{-1} = \left(\frac{K + \alpha(K_c - K)}{K + [\alpha + (1-\alpha)c](K_c - K)}, \frac{G + \beta(G_c - G)}{G + [\beta + (1-\beta)c](G_c - G)}\right) \tag{4.49}$$

因此，由(4.47)可得到在外加静水应力 $\boldsymbol{\sigma}^0 = \sigma^0\boldsymbol{\delta}$ 作用下的平均基体静水应力的标量等式

$$\bar{\sigma}^m = \frac{K + \alpha(K_c - K)}{K + [\alpha + (1-\alpha)c](K_c - K)}\sigma^0 \tag{4.50}$$

以及在外加轴对称剪切型应力(4.16)（以 τ^0 表示）作用下的平均基体应力（以 $\bar{\tau}^m$ 表示）的标量等式为

$$\bar{\tau}^m = \frac{G + \beta(G_c - G)}{G + [\beta + (1-\beta)c](G_c - G)}\tau^0 \tag{4.51}$$

将(4.50)，(4.51)代入(4.42)，(4.43)，得到在外加静水应力 σ^0 与外加轴对称剪切型应力 τ^0 作用下夹杂平均应变为

$$\bar{\varepsilon}_{kk}^c = \frac{1}{K + [\alpha + (1-\alpha)c](K_c - K)}\sigma^0 \tag{4.52}$$

$$\bar{\varepsilon}_{33}^{c}=\frac{1}{G+[\beta+(1-\beta)c](G_c-G)}\tau^0 \tag{4.53}$$

将(4.52)与(4.53)分别代入(4.15)与(4.17)，得到按 Mori-Tanaka 方法求出解复合体模量的公式

$$\frac{1}{\bar{K}}=\frac{1}{K}\left\{1-\frac{c(K_c-K)}{K+[\alpha+(1-\alpha)c](K_c-K)}\right\} \tag{4.54}$$

$$\frac{1}{\bar{G}}=\frac{1}{G}\left\{1-\frac{c(G_c-G)}{G+[\beta+(1-\beta)c](G_c-G)}\right\} \tag{4.55}$$

故

$$\bar{K}=K\left[1+\frac{c\left(\frac{K_c}{K}-1\right)}{1+\alpha(1-c)\left(\frac{K_c}{K}-1\right)}\right] \tag{4.56}$$

$$\bar{G}=G\left[1+\frac{c\left(\frac{G_c}{G}-1\right)}{1+\beta(1-c)\left(\frac{G_c}{G}-1\right)}\right] \tag{4.57}$$

式中α,β见(1.9)式。

比较(4.56)与(4.39)，可见 Mori-Tanaka 方法与广义自洽方法所得的体积模量$\bar{K}$相同。这当然只是各向同性材料圆球形夹杂情况的巧合。(4.57)的 Taylor 展开式为

$$\frac{\bar{G}}{G}=1+\alpha_G c+\frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}\alpha_G^2c^2+\frac{4(4-5\nu)^2}{225(1-\nu)^2}\alpha_G^3c^3+O(c^4) \tag{4.58}$$

它与广义自洽方法所得剪切模量(4.41)式c^3项系数有差别。

值得指出，Mori-Tanaka 方法与稀疏解法的差别仅在于基体平均应力$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{m}}$的计算。如图 2-8 所示，在稀疏解法中略去夹杂之间的相互作用，因此基体平均应力就是外部施加的应力$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{m}}=\boldsymbol{\sigma}^0$。按照 Mori-Tanaka 方法，由(4.45)式，当夹杂体积分数$c\to 0$时，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{m}}\to\boldsymbol{\sigma}^0$，因此 Mori-Tanaka 方法退化到稀疏解法。对于含微裂纹的固体材料，把微裂纹看作夹杂相，其“体积分数”恒为零（但适当定义的裂纹“密度”不是零）。因此，对于微裂纹问题，Mori-Tanaka 方法与稀疏解法一致。

还应指出，如 Wang 与 Weng（1992）所讨论过，按“标准的”Mori-Tanaka 方法得到

的复合材料弹性刚度张量有可能是非对称的（$\overline{\mathscr{L}}_{ijkl} \neq \overline{\mathscr{L}}_{klij}$）。但按本节能量框架的 Mori-Tanaka 方法可以克服这一缺点，给出的弹性张量恒为对称。如复合体的弹性张量为对称，由本节方法所得的结果总是与“标准的”Mori-Tanaka 方法一致。

2.4.5 各种方法的比较

表 2-3 给出了按上述各方法得到的含空洞材料的杨氏模量 $\overline{E}$ 与基体材料杨氏模量 E 之比值 $\overline{E}/E$ 的 Talyor 展开式，其中也包含按“微分方法”（Norris，1985，Zimmerman，1991）所得结果与按 Hashin 与 Shtrikman（1962，1963）的方法给出的上界与下界。从表中可看出大小次序为

$$\overline{E}_{\text{dilute}} > \overline{E}_{\text{MT}} = \overline{E}_{\text{HS}}^{\text{up}} > \overline{E}_{\text{gsc}} > \overline{E}_{\text{diff}} > \overline{E}_{\text{sc}} > \overline{E}_{\text{HS}}^{\text{lo}} = 0$$

式中下标的意义为：dilute—稀疏解，MT—Mori-Tanaka 方法，HS—Hashin 与 Shtrikman 上界（upper bound）或下界（lower bound）,gsc—广义自洽方法，diff—微分方法。除了 Hashin 与 Shtrikman 上界以外，各展开式之间的差别从 c^2 项开始。图 2-12 给出按各种方法计算出（非按 Taylor 展开式）的体积模量比 $\overline{K}/K$ 与剪切模量比 $\overline{G}/G$。假定 $\nu = 0.2$，故 $\alpha = \beta = 0.5$，图 2-12 可兼用于 $\overline{K}/K$ 与 $\overline{G}/G$。

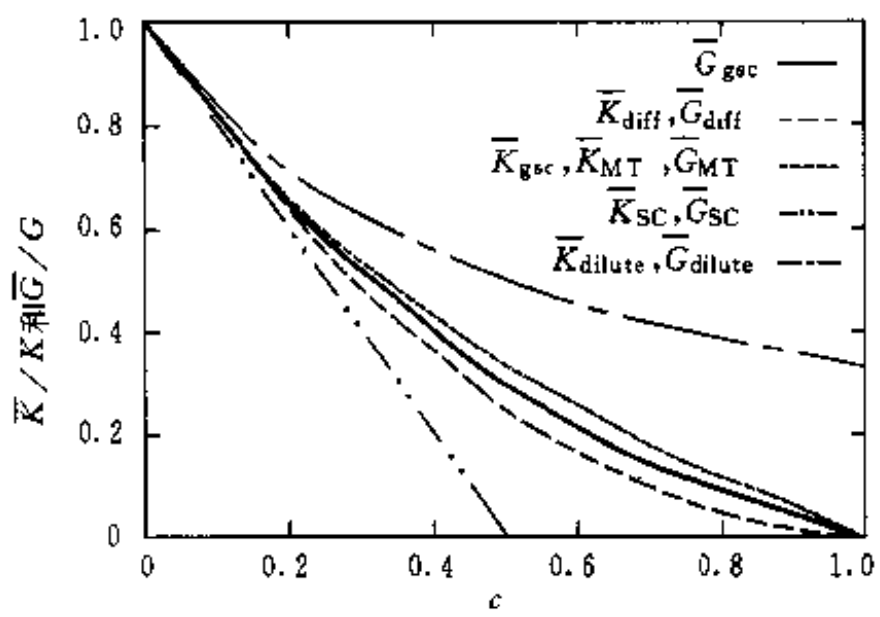


图 2-12 含空洞的固体的体积模量与剪切模量

Christensen 与 Lo（1990）对含刚性夹杂的固体按各种方法所得结果作了评述。表 2-4 给出 Taylor 展开式。从表中可看出大小次序为

$$\overline{E}_{\text{HS}}^{\text{up}} = \infty > \overline{E}_{\text{dilute}} > \overline{E}_{\text{sc}} > \overline{E}_{\text{diff}} > \overline{E}_{\text{gsc}} > \overline{E}_{\text{MT}} > \overline{E}_{\text{HS}}^{\text{lo}}$$

除了 Hashin 与 Shtrikman 上界以外，各展开式之间的差别也是从 c^2 项开始。但 Mori-Tanaka

方法与广义自洽方法的差别从 c^3 项开始。

能量方法用于含微裂纹的固体可参考 Huang 和 Hwang（1995）等文。许多有限元直接数值计算结果表明,广义自洽方法结果最接近实际。

表 2-3　含空洞的固体等效杨氏模量 $\bar{E}/E$ 的 Talor 展开式（到 c^3 项）

方法	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.5$
稀疏解	$1-2.00c+4.00c^2-8.00c^3$	$1-2.00c+4.02c^2-8.05c^3$	$1-1.92c+3.67c^2-7.04c^3$
Mori-Tanaka 方法与 HS 上界	$1-2.00c+2.00c^2-2.00c^3$	$1-2.00c+2.01c^2-2.02c^3$	$1-1.92c+1.76c^2-1.61c^3$
广义自洽方法	$1-2.00c+2.00c^2-4.40c^3+4.80c^{11/3}$	$1-2.00c+2.01c^2-4.98c^3+5.91c^{11/3}$	$1-1.92c+1.76c^2-6.05c^3+8.89c^{11/3}$
微分方法	$1-2.00c+1.00c^2$	$1-2.00c+1.00c^2+0.01c^3$	$1-1.92c+0.72c^2+0.36c^3$
自洽方法	$1-2.00c$	$1-2.00c-0.01c^2+0.01c^3$	$1-1.92c-0.33c^2+0.12c^3$
HS 下界	0	0	0

表 2-4　含刚性夹杂的固体等效杨氏模量 $\bar{E}/E$ 的 Talor 展开式（到 c^3 项）

方法	$\nu=0.2$	$\nu=0.3$	$\nu=0.5$
HS 上界	∞	∞	∞
稀疏解	$1+2.00c+4.00c^2+8.00c^3$	$1+2.04c+4.14c^2+8.43c^3$	$1+2.50c+6.25c^2+15.62c^3$
自洽方法	$1+2.00c+4.00c^2+8.00c^3$	$1+2.04c+4.10c^2+8.20c^3$	$1+2.50c+6.25c^2+15.62c^3$
微分方法	$1+2.00c+3.00c^2+4.00c^3$	$1+2.04c+3.05c^2+4.06c^3$	$1+2.50c+4.37c^2+6.56c^3$
广义自洽方法	$1+2.00c+2.00c^2+4.40c^3-4.80c^{11/3}$	$1+2.04c+2.01c^2+5.96c^3-7.86c^{11/3}$	$1+2.50c+2.50c^2+17.50c^3-30.00c^{11/3}$
Mori-Tanaka 方法与 HS 上界	$1+2.00c+2.00c^2+2.00c^3$	$1+2.04c+2.01c^2+2.03c^3$	$1+2.50c+2.50c^2+2.50c^3$

2.4.6　注记

在本章中介绍了细观力学中所用的一种基本方法。虽然本章只用来求解复合体的弹性模量，但这种方法也可以用于更复杂的变形情况。实际工程材料,例如形状记忆合金与陶瓷，含有可相变的颗粒，当载荷或温度变化时，发生相变的材料体积分数随之变化而引起的变形称为相变塑性。黄克智领导的研究组利用 Mori-Tanaka 方法，建立了相变塑性本构模型

（黄克智（Hwang）等，1990、1991，1995；孙庆平（Sun）等 1991，1992，1993a，1993b，1994；Yan（严文裔）等，1996，1998；方岱宁（Fang）等，1998）。这个本构模型能够较好地描述形状记忆合金在任意加载路径下的相变条件与本构关系。Budiansky 等（1983）对于陶瓷增韧机制的力学分析曾被认为是本世纪力学与材料科学相结合的研究典范，但是在他们的模型中认为只需要考虑陶瓷相变应变的体积变形部分。孙等（1991a）根据上述相变塑性本构模型证明考虑陶瓷相变应变的偏斜部分十分重要，可以显著改善理论与试验结果符合的程度。

习 题 2

2.1 含椭球孔的无限大弹性介质，在无限远处作用应力 $\boldsymbol{\sigma}$（见图 2-13），证明空洞的变形为

$$\varepsilon_{\text{hole}} = (\mathscr{M} + \mathscr{M}^*)\,\sigma = S^{-1}\mathscr{M}^*\sigma = \mathscr{M}T^{-1}\sigma = A_{\text{hole}}\varepsilon$$

式中 $\varepsilon = \mathscr{M}\sigma$ 为无限远处的应变。

$$A_{\text{hole}} = S^{-1}\mathscr{M}^*\mathscr{L} = \mathscr{M}T^{-1}\mathscr{L}$$

提示：利用叠加原理。

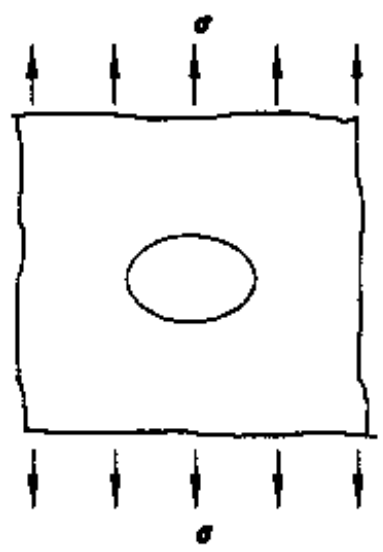
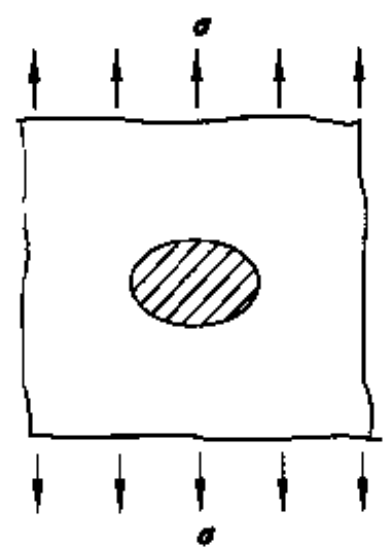


图 2-13 习题 2.1 图



2-14 习题 2.2 图

2.2 如图 2-14 所示，无限大弹性介质含有一椭球体刚性夹杂。证明在无限远处应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 作用下，刚性夹杂内的应力为

$$\sigma_{\text{rigid}} = (\mathscr{L}^* + \mathscr{L})\mathscr{M}\sigma = \sigma + \mathscr{L}^*\mathscr{M}\sigma = \mathscr{L}S^{-1}\mathscr{M}\sigma = T^{-1}\mathscr{L}^*\mathscr{M}\sigma \overset{\Delta}{=} B_{\text{rigid}}\sigma$$

式中 $B_{\text{rigid}} = \mathscr{L}S^{-1}\mathscr{M} = T^{-1}\mathscr{L}^*\mathscr{M}$。

2.3 证明以下矩阵等式

$$P = \mathscr{M}(I - T), \quad Q = \mathscr{L}(I - S)$$

$$P\mathscr{L} + \mathscr{M}Q = I, \qquad S + \mathscr{M}T\mathscr{L} = \mathscr{L}S\mathscr{M} + T = I$$

2.4 在 Eshelby 相变应变问题中当弹性介质为各向同性且Ω为圆球形时，证明

$$T=(1-\alpha,1-\beta),\quad P=\left(\frac{\alpha}{3K},\frac{\beta}{2G}\right),\quad Q=(3K(1-\alpha),2G(1-\beta))$$

$$A_{\text{hole}}=S^{-1}\mathscr{M}^{*}\mathscr{I}=\mathscr{M}T^{-1}\mathscr{I}=\left(\frac{1}{1-\alpha},\frac{1}{1-\beta}\right)$$

$$B_{\text{rigid}}=\mathscr{I}S^{-1}\mathscr{M}=T^{-1}\mathscr{I}\mathscr{M}=\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)$$

α与β 已于(1.8)，(1.9)，A_{hole}，B_{rigid}的意义各见习题 2.1 与习题 2.2。

2.5 直接由式(3.54b)导出(3.66)

2.6 直接由式(3.68a)导出(3.69)。

2.7 由式$(3.69)_1$导出$(3.67)_1$ $(N=2)$。

2.8 由式(3.73)证明$\overline{G}\to G_c^{(1)}$当$c_2\to 0$，及$\overline{G}\to 0$当$c_2\to\frac{1}{2}$。

2.9 由式(3.75) 证明 (3.76)。

第 3 章　连续介质力学概述

本章内容可参考黄克智编著，《非线性连续介质力学》，1989 年 4 月，清华大学出版社出版。

3.1　变形几何

在图 3-1 中 $\mathscr{R}$ 表示参考构形，它可以取物体变形前的自然状态，也可以取任意状态，例如某些文献中(特别是流体力学中)常取当前构形为参考构形。X_{I}，X_{II}，X_{III} 为 Lagrange 坐标。$\mathscr{R}$ 中每一质点都对应一组固定的 X_A 值（A=I，II，III）。假定 Lagrange 坐标为嵌入坐标（或称随体坐标），即质点无论变位至何处，它都记住最初的 X_A 值，并仍以 X_A 为坐标。这样，即使变形前选择直角坐标 X_A 为 Lagrange 坐标，变形后 X_A 一般变为非正交曲线坐标。因此,只掌握笛卡尔张量分析就无法在描述整个变形的过程中使用嵌入坐标。图 3-1 中 $\mathscr{r}(t)$ 表示变形后 t 时刻的构形，称为当前构形或即时构形。x_i（i = 1，2，3）称 Euler 坐标，它对应着空间点的位置。我们用矢径 $\boldsymbol{X}$（从 $\mathscr{R}$ 中坐标原点 O 至物质点 X）表示 $\mathscr{R}$ 中物质点 X 的位置。X'为 X 的邻近点，用 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 表示微线元 $\overline{XX'}$。t 时刻质点 X 和 X'分别变位到 $\mathscr{r}(t)$ 中的 x 点和 x'点。同样，以 $\boldsymbol{x}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 分别表示 x 点的矢径（从 $\mathscr{r}(t)$ 坐标原点 o 至 x 点）和微线元 $\overline{xx'}$。两种坐标系的基矢量分别为 $\boldsymbol{e}_A$（A = I，II，III）和 $\boldsymbol{e}_i$（i = 1，2，3）如图 3-1 所示。这样在 $\mathscr{R}$ 构形中可写出矢径 $\boldsymbol{X}$ 和坐标 X_A 的关系

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(X_A), \quad A = \mathrm{I,II,III} \tag{1.1}$$

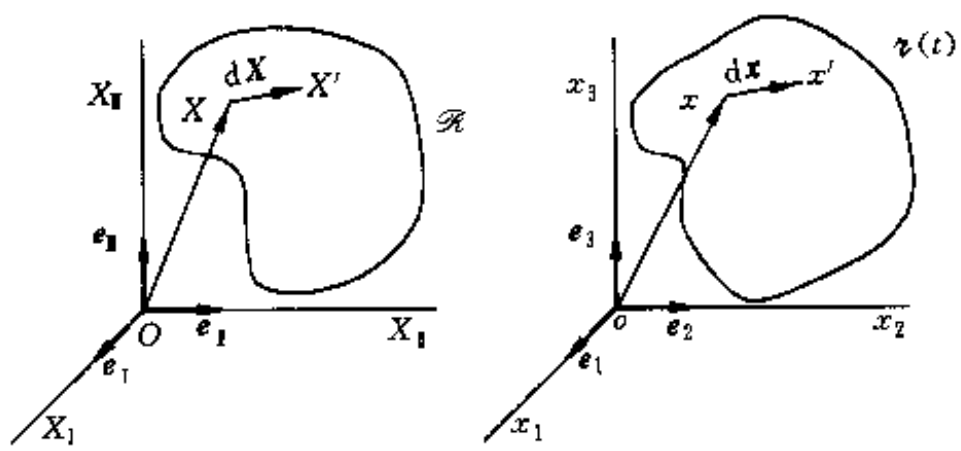


图 3-1　参考构形 $\mathscr{R}$ 与即时构形 $\mathscr{r}(t)$

或，当 X_A 为直角坐标时

$$\boldsymbol{X} = X_A \boldsymbol{e}_A \tag{1.2}$$

当采用直角坐标时 X_A 就是矢径 $\boldsymbol{X}$ 的三个投影。同理在 $\boldsymbol{x}(t)$构形中

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x_i), \quad i = 1,2,3 \tag{1.3}$$

或，当 x_i 为直角坐标时

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.4}$$

同一质点 $\boldsymbol{X}$ 在不同时刻 t 将占据不同的位置 $\boldsymbol{x}$，因此描写质点运动的方程可以写作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \tag{1.5}$$

或

$$x_i = x_i(X_A, t) \tag{1.6}$$

(1.5)与(1.6)的逆函数为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.5$'$}$$

$$X_A = X_A(x_i, t) \tag{1.6$'$}$$

在直角坐标中,变形前后的线元各为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}X_A \boldsymbol{e}_A \tag{1.7}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.8}$$

以后除特别声明外，均设 X_A 与 x_i 为直角坐标。若取 Lagrange 坐标轴与 Euler 坐标轴完全重合，则

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{III}} = \boldsymbol{e}_3 \tag{1.9}$$

由(1.6)有

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \mathrm{d}X_A \tag{1.10}$$

式中 $\frac{\partial x_i}{\partial X_A}$ 表示(1.6)式 x_i 对 X_A 的偏导数，t 保持一定。引入二阶张量 $\boldsymbol{F}$，其分量为上式中的 $\frac{\partial x_i}{\partial X_A}$，则 $\boldsymbol{F}$ 的实体形式为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_A = F_{iA} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_A \tag{1.11a}$$

由于 $\boldsymbol{F}$ 表达式(1.11a)中的前矢量在构形 $\varkappa(t)$ 中而后矢量在构形 $\mathscr{P}$ 中，有人称它为“两点”张量。利用(1.11a)，(1.10)式可写作

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1.12a}$$

$\boldsymbol{F}$ 称为变形梯度张量，(1.12a)式表明 $\boldsymbol{F}$ 所对应的线性变换把每一变形前的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 变为变形后的 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，将(1.7)，(1.8)和(1.11a)代人(1.12a)，则可得到(1.10)式，从而验证(1.12a)是正确的。演算如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_i\boldsymbol{e}_i &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A\right)\cdot(\mathrm{d}X_B\boldsymbol{e}_B)\\ &= \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\mathrm{d}X_B\delta_{AB}\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\mathrm{d}X_A\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

此即(1.10)式。实际上，(1.10)式就是(1.12a)的分量形式。但抽象形式的(1.12a)式却给出一个非常有用的张量 $\boldsymbol{F}$。以下将看到有了变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 就可以算出一切变形几何的信息。变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的转置张量为

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\boldsymbol{e}_A\boldsymbol{e}_i = F^{\mathrm{T}}_{Ai}\boldsymbol{e}_A\boldsymbol{e}_i \tag{1.11b}$$

由变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的几何意义，可知它必有逆。可以验证其逆为[1)]

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_A\boldsymbol{e}_i = F^{-1}_{Ai}\boldsymbol{e}_A\boldsymbol{e}_i \tag{1.11c}$$

验证如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A\right)\cdot\left(\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_B\boldsymbol{e}_j\right)\\ &= \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial X_A}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \mathbf{1}\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{1}$ 表示二阶单位张量（在第 1 章中记为$\boldsymbol{\delta}$）。同样也可验证

$$\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{F} = \mathbf{1}$$

变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的逆转置张量为

---

1) F^{-1}_{Ai} 表示张量 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 的第 A，i 分量，而不表示 F_{Ai} 的倒数 $1/F_{Ai}$。有时为了避免混淆，记作 $\overset{-1}{F}_{Ai}$。类似于后(4.6)式的记号。

$$\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}=\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A=\boldsymbol{F}_{iA}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A \tag{1.11d}$$

(1.12a)也可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.12b}$$

当已知在构形 $\varkappa(t)$ 中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，欲求构形 $\mathscr{R}$ 中对应的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 时，则可利用(由(1.12a))

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.12c}$$

或（由(1.12b)）

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{1.12d}$$

3.1.1 $\boldsymbol{F}$ 的极分解

可以将变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 作如下的乘法分解：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{U} \qquad \text{右极分解} \tag{1.13a}$$

$$=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}_2 \qquad \text{左极分解} \tag{1.13b}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 称为右伸长张量，$\boldsymbol{V}$ 为左伸长张量，它们都是对称正定的；$\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 为正交张量。下面将证明 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}$。(1.13)各部分都可以由 $\boldsymbol{F}$ 计算出来（见下），所以这种分解是唯一的。因其类似于平面极坐标（复数变量 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$）的分解，故又称极分解。

1. 右极分解

定义右 Cauchy-Green 变形张量（或称 Green 变形张量）

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F} \tag{1.14}$$

可以证明 $\boldsymbol{C}$ 是对称的二阶张量，即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}$，而且是正定的，因为取 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 为构形 $\mathscr{R}$ 中的任意线元有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=(\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}s)^2>0$$

式中 $\mathrm{d}s$ 为构形 $\varkappa(t)$ 中对应线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的长度，以 $\boldsymbol{N}_{\Gamma}$（$\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$）表示 $\boldsymbol{C}$ 的主方向单位矢量，λ_{Γ}^2（$\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$）为其主分量，则 $\boldsymbol{C}$ 可写成标准形式(对角形)：

$$\boldsymbol{C}=\lambda_{\mathrm{I}}^2\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}+\lambda_{\mathrm{II}}^2\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}+\lambda_{\mathrm{III}}^2\boldsymbol{N}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{III}}=\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}^2\boldsymbol{N}_{\Gamma}\boldsymbol{N}_{\Gamma} \tag{1.15}$$

将(1.13a) $\boldsymbol{F}$ 代入(1.14),并注意已设 $\boldsymbol{U}$ 为对称，$\boldsymbol{R}_1$ 为正交张量，得

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{U})=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^2 \tag{1.16}$$

因此，利用(1.14)，可得 $\boldsymbol{U}$ 通过 $\boldsymbol{F}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{C}^{1/2}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}\right)^{1/2} \tag{1.16$'$}$$

已设 $\boldsymbol{U}$ 为对称正定，故必有

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{C}^{1/2}=\lambda_{\mathrm{I}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}+\lambda_{\mathrm{II}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}+\lambda_{\mathrm{III}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{III}}=\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}\boldsymbol{N}_{\Gamma}\boldsymbol{N}_{\Gamma} \tag{1.17}$$

其逆为

$$\boldsymbol{U}^{-1}=\lambda_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}+\lambda_{\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}+\lambda_{\mathrm{III}}^{-1}\boldsymbol{N}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{III}} \tag{1.17$'$}$$

$\lambda_{\mathrm{I}},\lambda_{\mathrm{II}},\lambda_{\mathrm{III}}$ 称为主长度比，均为正。由(1.13a)可计算 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}$，式中 $\boldsymbol{U}$ 由(1.16)′决定。可验证 $\boldsymbol{R}_1$ 为正交张量，即（记二阶单位张量 $\boldsymbol{\delta}$ 为 $\mathbf{1}$）

$$\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}=\mathbf{1}$$

于是我们证明了右极分解式(1.13a)。$\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}},\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}},\boldsymbol{N}_{\mathrm{III}}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 的主方向单位矢量。由 $\boldsymbol{N}_{\Gamma}$(Γ=I,II,III) 所构成的标架称为 Lagrange 标架。N_{Γ} 称为 Lagrange 标架基矢量。

为了看清右极分解(1.13a)式的几何意义，可将它代入线元变换公式(1.12a)，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1.18}$$

将线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 在 Lagrange 标架上分解为[1)]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}X_{\mathrm{I}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}+\mathrm{d}X_{\mathrm{II}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}+\mathrm{d}X_{\mathrm{III}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{III}}=\sum_{\Gamma}\mathrm{d}X_{\Gamma}\boldsymbol{N}_{\Gamma} \tag{1.19}$$

将（1.19）代入（1.18）右端，第一步得到

$$\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}\mathrm{d}X_{\Gamma}\boldsymbol{N}_{\Gamma} \tag{1.20}$$

也就是把沿三个主方向的线段 $\mathrm{d}X_{\Gamma}$(Γ=I,II,III) 各放大 λ_{Γ} 倍，如图 3-2 所示。λ_{Γ} 称为主伸长比。（1.18）式右端演算的第二步得到

$$\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{R}_1\cdot\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}\mathrm{d}X_{\Gamma}\boldsymbol{N}_{\Gamma}=\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}\mathrm{d}X_{\Gamma}\boldsymbol{n}_{\gamma} \tag{1.21}$$

式中

$$\boldsymbol{n}_{\gamma}=\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{N}_{\Gamma}\qquad(\gamma=\Gamma,\gamma=1,2,3,\Gamma=\mathrm{I,II,III}) \tag{1.22}$$

---

1) 注意勿将(1.19)式与 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 在固定标架 $\boldsymbol{e}_A$(A=I,II,III)中的分解式(1.7)混淆。注意区别 $\mathrm{d}X_{\mathrm{I}}$，$\mathrm{d}X_{\mathrm{II}}$，$\mathrm{d}X_{\mathrm{III}}$ 与 $\mathrm{d}X_{\mathrm{I}}$，$\mathrm{d}X_{\mathrm{II}}$，$\mathrm{d}X_{\mathrm{III}}$。

由 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$（$\gamma=1,2,3$）所构成的标架称为 Euler 标架。$\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$ 称为 Euler 标架基矢量。(1.22)式表示如图 3-3 所示的转动，即从 Lagrange 标架旋转到 Euler 标架。因此(1.18)式的几何意义是线元从(1.19) $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 到(1.20)$\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}$，再到(1.21)$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 这一先变形、后转动的过程。最后实现

$$\underset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{N}}\to\lambda_{\mathrm{I}}\underset{1}{\boldsymbol{n}},\quad \underset{\mathrm{II}}{\boldsymbol{N}}\to\lambda_{\mathrm{II}}\underset{2}{\boldsymbol{n}},\quad \underset{\mathrm{III}}{\boldsymbol{N}}\to\lambda_{\mathrm{III}}\underset{3}{\boldsymbol{n}} \tag{1.23}$$

由(1.22)可得 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}$ 的并矢表示

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}=\underset{1}{\boldsymbol{n}}\underset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{N}}+\underset{2}{\boldsymbol{n}}\underset{\mathrm{II}}{\boldsymbol{N}}+\underset{3}{\boldsymbol{n}}\underset{\mathrm{III}}{\boldsymbol{N}}=\sum_{\Gamma}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\qquad(\gamma=\Gamma,\gamma=1,2,3,\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}) \tag{1.24}$$

将(1.17)$\boldsymbol{U}$ 与(1,.24)$\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}$ 代入(1.13a)式，可得变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的并矢表示

$$\boldsymbol{F}=\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\qquad(\gamma=\Gamma) \tag{1.25a}$$

因此 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F}^{-1}$，$\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}$的并矢表示为

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\qquad(\gamma=\Gamma) \tag{1.25b}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}^{-1}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\qquad(\gamma=\Gamma) \tag{1.25c}$$

$$\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}=\sum_{\Gamma}\lambda_{\Gamma}^{-1}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\qquad(\gamma=\Gamma) \tag{1.25d}$$

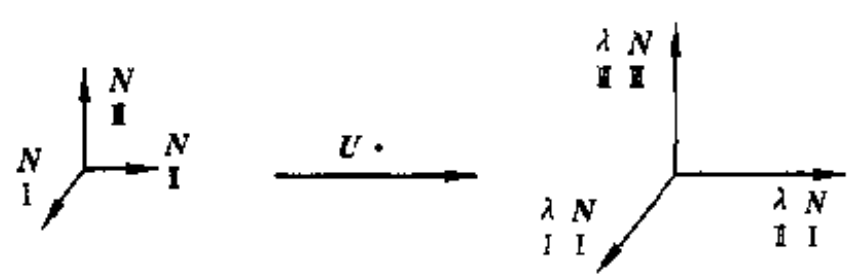


图 3-2　在 Lagrange 标架中的变形

由右 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$ 可定义 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-1)=\sum_{\Gamma}\frac{1}{2}(\lambda_{\Gamma}^{2}-1)\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}} \tag{1.26}$$

2. 左极分解

定义 Cauchy 变形张量

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} \tag{1.27}$$

及其逆（称左 Cauchy-Green 变形张量）

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{c}^{-1}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.28}$$

与对(1.14)式 $\boldsymbol{C}$ 的讨论类似，也可以证明 $\boldsymbol{c}$ 是对称的二阶张量，而且是正定的，因为对于构形 $\kappa(t)$中任意的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}&=(\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x})\\&=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=(\mathrm{d}S)^2>0\end{aligned}$$

式中 $\mathrm{d}S$ 为构形 $\mathscr{R}$ 中对应线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 的长度。因此 $\boldsymbol{c}$ 的逆 $\boldsymbol{B}$ 必也是对称且正定的二阶张量。将(1.25 a, b, c, d)并矢表示式代入(1.27)与(1.28)，得到 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的并矢表示（为书写方便，定义 $\underset{1}{\lambda}=\underset{\mathrm{I}}{\lambda}$，$\underset{2}{\lambda}=\underset{\mathrm{II}}{\lambda}$，$\underset{3}{\lambda}=\underset{\mathrm{III}}{\lambda}$）：

$$\boldsymbol{c}=\sum_{\gamma}\underset{\gamma}{\lambda}^{-2}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\qquad \underset{\gamma}{\lambda}=\underset{\Gamma}{\lambda}\quad(\gamma=\Gamma) \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{c}^{-1}=\sum_{\gamma}\underset{\gamma}{\lambda}^{2}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\qquad \underset{\gamma}{\lambda}=\underset{\Gamma}{\lambda}\quad(\gamma=\Gamma) \tag{1.30}$$

将(1.13b)的 $\boldsymbol{F}$ 代入(1,28)，并注意 $\boldsymbol{V}$ 为对称，$\boldsymbol{R}_2$ 为正交张量，得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}_2)\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}_2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^2 \tag{1.31}$$

已设 $\boldsymbol{V}$ 为对称正定，故必有

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}^{1/2}=\sum_{\gamma}\underset{\gamma}{\lambda}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\qquad \underset{\gamma}{\lambda}=\underset{\Gamma}{\lambda}\quad(\gamma=\Gamma) \tag{1.32}$$

其逆为

$$\boldsymbol{V}^{-1}=\sum_{\gamma}\underset{\gamma}{\lambda}^{-1}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\qquad \underset{\gamma}{\lambda}=\underset{\Gamma}{\lambda}\quad(\gamma=\Gamma) \tag{1.32$'$}$$

利用(1.32)′与(1.25a)，由(1.13b)可计算

$$\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{F}=\sum_{\Gamma}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\qquad(\gamma=\Gamma) \tag{1.33}$$

因此，比较(1.33)与(1.24)，可知

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}=\sum_{\Gamma}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\qquad(\gamma=\Gamma) \tag{1.34}$$

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{-1}=\sum_{\Gamma}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\qquad(\gamma=\Gamma) \tag{1.34$'$}$$

将左极分解(1.13b)式代入线元变换公式(1.12a)，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1.35}$$

上式右端表示由(1.19)线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 先旋转到 $\boldsymbol{R}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}$（从 Lagrange 标架旋转到 Euler 标架，$\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\to\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$,见图 3-3），然后再变形到 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}$（在 Euler 标架中变形，$\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\to\lambda_\gamma\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$，见图 3-4）的过程。最后同样实现(1.23)。由 Cauchy 变形张量 $\boldsymbol{c}$ 可定义 Almensi 应变张量 $\boldsymbol{e}$：

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{c}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{B}^{-1}\right) = \sum_{\gamma}\frac{1}{2}(1-\lambda_\gamma^{-2})\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}} \tag{1.36}$$

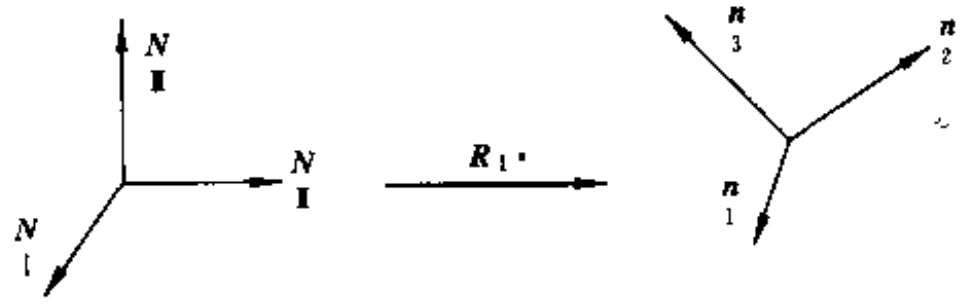


图 3-3　从 Lagrange 标架到 Euler 标架的旋转

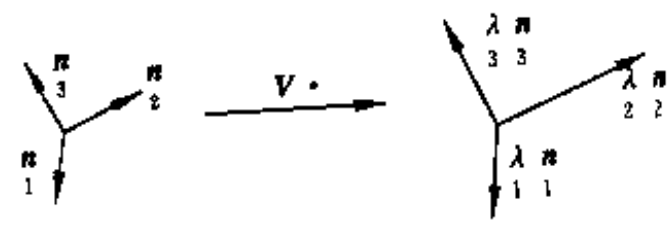


图 3-4　在 Euler 标架中的变形

以上我们遇到三类张量：

(1) 参考构形（或初始构形）$\mathscr{P}$ 中的张量，例如右 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$（见(1.15)），右伸长张量 $\boldsymbol{U}$（见(1.17)）等．它们都是在构形 $\mathscr{P}$ 中以 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}$ 为基矢量的张量。在本书中一律用大写黑体字母表示。

(2) 当前构形或即时构形 $\varkappa$ 中的张量，例如 Cauchy 变形张量 $\boldsymbol{c}$（见(1.29)），左 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{c}^{-1}$（见(1.30)），左伸长张量 $\boldsymbol{V}$（见(1.32)）等，它们都是在 $\varkappa$ 构形中以 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$ 为基矢量的张量。在本书中一般用小写黑体字母表示。只有 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 是例外，照顾文献中的习惯，用大写黑体字母表示。

(3) 两点张量。在它们的分解式中，同时出现基矢量 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$ 与 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}$。例如：$\boldsymbol{F}$（见(1.25a)），$\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}$（见(1.25d)），$\boldsymbol{R}$（见(1.24)，(1.34)），其分解式中 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$ 在左，$\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}$ 在右；$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$（见(1.25b)），$\boldsymbol{F}^{-1}$（见(1.25c)），$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{-1}$（见(1.34)′）其分解式中 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}$ 在左，$\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$ 在右。

用 $\{\underset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{e}}\ \underset{\mathrm{II}}{\boldsymbol{e}}\ \underset{\mathrm{III}}{\boldsymbol{e}}\}$ 表示三维空间中的固定标架(绝对标架)[1]，用正交张量 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{Lag}}$ 表示由绝对标架到 Lagrange 标架的转动的正交张量，$\boldsymbol{R}^{\mathrm{Eul}}$ 表示由绝对标架到 Euler 标架的转动的正交张量．则

$$\begin{aligned}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}} &= \boldsymbol{R}^{\mathrm{Lag}}\cdot\underset{\Gamma}{\boldsymbol{e}}\\ \underset{\gamma}{\boldsymbol{n}} &= \boldsymbol{R}^{\mathrm{Eul}}\cdot\underset{\Gamma}{\boldsymbol{e}} \qquad (\gamma=\Gamma)\end{aligned} \tag{1.37}$$

1) 例如，可取 Lagrange 直角坐标基矢量 $\boldsymbol{e}_A$（见图 3-1 与(1.2)）为固定坐标架，则 $\underset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}}$，$\underset{\mathrm{II}}{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}}$，$\underset{\mathrm{III}}{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{III}}$

(1.37)代入(1.22)得

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{Eul}} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{Lag}} \tag{1.38}$$

3.1.2 线元、面元与体元的变换

线元的变换公式已见(1.12a)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1.12a}$$

在讨论面元与体元的变换之前先介绍一下二阶张量的不变量。由张量的不变量理论，任一对称的二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 有三个不变量，记作 J_1^{T}，J_2^{T}，J_3^{T} 或 $J_1(\boldsymbol{T})$，$J_2(\boldsymbol{T})$，$J_3(\boldsymbol{T})$。变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的第三不变量在变形几何学中具有特别重要的含义。

$$J_3(\boldsymbol{F}) = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right| = J \tag{1.39}$$

式中|...|表示行列式。右 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$ 的第三不变量为

$$J_3(\boldsymbol{C}) = J_3(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}) = J_3(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}) J_3(\boldsymbol{F}) = J^2 \tag{1.40}$$

(1.40)式可用矩阵行列式乘积的性质证明。同理

$$J_3(\boldsymbol{B}) = J_3(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}) = J^2$$

故

$$J_3(\boldsymbol{U}) = J_3(\boldsymbol{V}) = J$$

体元的变换公式在直角坐标情况下为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right| = J, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{J} = j \tag{1.41}$$

其中 $\mathrm{d}V$ 和 $\mathrm{d}v$ 分别为变形前和变形后的体元，它们是由同一些物质点所组成的。由于(1.41)式，$\boldsymbol{F}$ 的第三不变量 J 又称为体积比。现在我们来推导面元的变换公式。

如图 3-5 所示，在 $\mathscr{B}$ 构形中 $\boldsymbol{X}$ 点附近面元的面积为 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$，其单位法线矢量为 $\boldsymbol{N}$，可以用矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}\mathrm{d}A$ 来表示面元。变形后在 $\kappa(t)$ 构形中，$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 变为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 变为 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$，$\mathrm{d}a$ 为面积，$\boldsymbol{n}$ 为单位法线矢量。以 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 为底、以 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 为斜高的微六面体，它变形后成为 $\kappa(t)$中以 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 为底、以 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 为斜高的另一六面体。由体积变换公式(1.41)，可以写出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = J \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{1.42}$$

(1.12d)代入上式 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = J \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

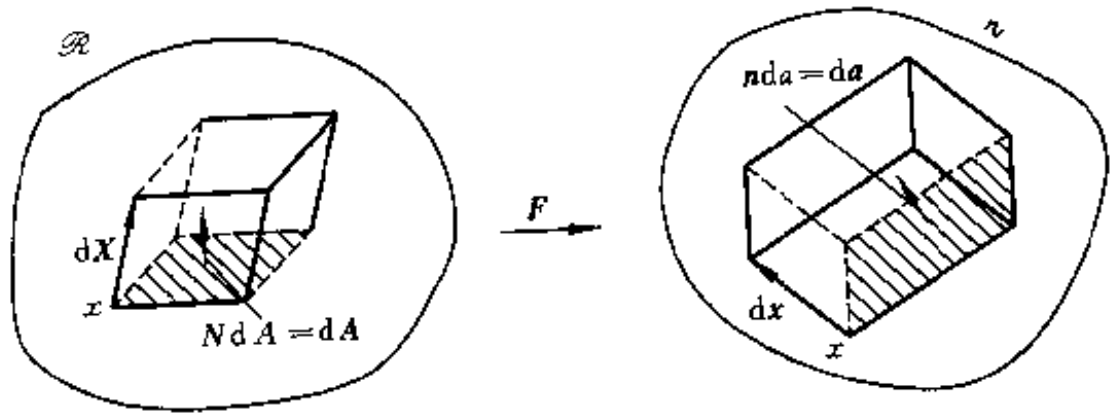


图 3-5　面元的变换

因为上式对任意的 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 成立，所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{1.43}$$

(1.43)就是著名的 Nanson 公式，即面元矢量变换公式。利用(1.11d)，可得(1.43)的分量形式为

$$\mathrm{d}a_i=J\frac{\partial X_M}{\partial x_i}\mathrm{d}A_M \tag{1.43$'$}$$

式中 $\mathrm{d}a_i$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 在 Euler 坐标中的分量，$\mathrm{d}A_M$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 在 Lagrange 坐标中的分量。如果没有变形只有转动，则

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R}^{-\mathrm{T}}=\boldsymbol{R},\quad J=J_3(\boldsymbol{R})=1$$

由(1.43)，这时

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

即面元只做转动。

3.1.3　Hill 应变度量与 Seth 应变度量

由前节已知 λ_I（或 λ_γ）表示伸长比，$\lambda_I=1$ 表示无伸长。在大变形情况可用作应变度量的量有很多，例如

$$\lambda-1$$

$$\ln\lambda=(\lambda-1)-\frac{1}{2}(\lambda-1)^2+\frac{1}{3}(\lambda-1)^3+\cdots$$

$$\frac{1}{2}(\lambda^2-1)=(\lambda-1)+\frac{1}{2}(\lambda-1)^2$$

当 $\lambda=1$ 也即无变形时，它们都等于零；当 $\lambda\to1$ 也即小变形时，它们与小应变度量 $(\lambda-1)$ 只差高阶小量。所以 Hill 提出，任何 λ 的递增函数 $f(\lambda)$，如果它满足 $f(1)=0$，$f'(1)=1$ 就可以作

为应变度量。因此 Hill 应变度量可写为

$$\mathscr{E} = f(\underset{\mathrm{I}}{\lambda})\underset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{N}}\underset{\mathrm{I}}{\boldsymbol{N}} + f(\underset{\mathrm{II}}{\lambda})\underset{\mathrm{II}}{\boldsymbol{N}}\underset{\mathrm{II}}{\boldsymbol{N}} + f(\underset{\mathrm{III}}{\lambda})\underset{\mathrm{III}}{\boldsymbol{N}}\underset{\mathrm{III}}{\boldsymbol{N}} = \sum_{I} f(\underset{\Gamma}{\lambda})\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}} = f(\boldsymbol{U}) \tag{1.44}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 见(1.17)式。$\mathscr{E}$ 的主方向与 $\boldsymbol{U}$ 相同，其主值是具有 Hill 提出的上述性质（即 $f(1)=0$，$f'(1)=1$）的函数 $f\left(\underset{\Gamma}{\lambda}\right)$。Seth 具体构造了一类函数

$$f(\lambda) = \frac{1}{2n}(\lambda^{2n} - 1) \tag{1.45}$$

它是递增函数，且满足 Hill 提出的两个条件 $f(1)=0$，$f'(1)=1$。其中 n 为实数（不限整数）。与(1.45)式 $f(\lambda)$ 对应的一类张量 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 则称 Seth 应变度量类

$$\boldsymbol{E}^{(n)} = \frac{1}{2n}\sum_{\Gamma}(\underset{\Gamma}{\lambda}^{2n} - 1)\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}} = \frac{1}{2n}(\boldsymbol{U}^{2n} - \boldsymbol{1}) \tag{1.46}$$

Seth 应变度量是 Hill 应变度量的特例。下面举几个例子。

例 1

$$n = 1, \qquad f(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$

$$\boldsymbol{E}^{(1)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{1}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{1}) = \boldsymbol{E} \tag{1.47}$$

这就是在连续介质力学中最常见的 Green 应变张量（见(1.26)）。

例 2

$$n = -1, \qquad f(\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2})$$

$$\boldsymbol{E}^{(-1)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{U}^{-2}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{C}^{-1}) \tag{1.48}$$

$\boldsymbol{E}^{(-1)}$ 称为 Alamnsi 应变度量。注意它不同于通常的 Almansi 应变张量 $\boldsymbol{e}$（见(1.36)）

$$\boldsymbol{e} = \sum_{\Gamma}\frac{1}{2}(1 - \underset{\gamma}{\lambda}^{-2})\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$$

$\boldsymbol{E}^{(-1)}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 主值虽然相同，但 $\boldsymbol{E}^{(-1)}$ 的主方向沿 Lagrange 标架，而 $\boldsymbol{e}$ 的主方向则沿 Euler 标架。

例 3

$$n = \frac{1}{2}, \qquad f(\lambda) = \lambda - 1$$

$$\boldsymbol{E}^{(1/2)} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{1} = \sum_{\Gamma}\left(\underset{\Gamma}{\lambda} - 1\right)\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}} \tag{1.49}$$

这就是常用的工程应变张量。

例 4 $n=0$，在(1.45)式中令 $n\to 0$，则

$$f(\lambda)=\lim_{n\to 0}\frac{1}{2n}(\lambda^{2n}-1)=\ln\lambda$$

$$\boldsymbol{E}^{(0)}=\ln\boldsymbol{U}=\sum_{\Gamma}\left(\ln\lambda_{\Gamma}\right)\boldsymbol{N}_{\Gamma}\boldsymbol{N}_{\Gamma} \tag{1.50}$$

这就是熟知的对数应变张量。

3.2 变形运动学

由于物体随着时间 t 的变化（例如由于载荷随时间 t 的变化）经历着不同的变形状态，所以必须研究各变形量对时间 t 的变化率。

3.2.1 速度梯度、变形率、旋率

设已知物体的运动方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) \tag{1.5}$$

$$x_i=x_i(X_A,t) \tag{1.6}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 的定义是对一定的物质点，其矢径 $\boldsymbol{x}$ 对时间的变化率为

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}\right)_X=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \tag{2.1a}$$

式中 $(\partial/\partial t)_X$ 表示对于一定物质点 $\boldsymbol{X}$ 对时间求导，称为物质导数。(2.1a)的分量形式为

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i,\qquad v_i=\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{X_A} \tag{2.1b}$$

速度梯度 $\boldsymbol{l}$ 表示在即时构形 φ 中速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的梯度：

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{v}\nabla=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=v_{i,j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{2.2}$$

如果把(1.6)的 x_i 代入(2.1b)，得到的 v_i 是自变量 Lagrange 直角坐标 X_A 与时间 t 的函数 $v_i(X_A, t)$，但在(2.2)式中的 v_i 是被看作 Euler 直角坐标 x_i 与时间 t 的函数。这个函数可以在 $v_i(X_A, t)$中将 X_A 用(1.6)′代入而得到，即 $v_i(X_A(x_j, t), t)$，为简单起见，记作 $v_i(x_j, t)$。$v_{i,j}$ 表示时间 t 一定，$v_i(x_j, t)$对 x_j 的偏导数，所以(2.2)式中的梯度符号∇表示在即时构形中的梯度[1] $(\cdots)\nabla=\partial(\cdots)/\partial x_j\boldsymbol{e}_j$。

---

1) 另外一种梯度∇为参考构形中的梯度，$(\cdots)\nabla=\partial(\cdots)/\partial X_A\boldsymbol{e}_A$，在郭仲衡著《非线性弹性理论》（1980）书中用 $\overset{\circ}{\nabla}$ 表示，而(2.2)式中的梯度则用 $\overset{\varphi}{\nabla}$ 表示。

对 $\boldsymbol{l}$ 进行加法分解，分解为对称与反对称张量两部分：

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w} \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\nabla + \nabla\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{w} &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\nabla - \nabla\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\boldsymbol{d}$ 为对称张量，称为变形率(rate of deformation)或应变率(strain rate)，$\boldsymbol{w}$ 为反对称张量，称为旋率(spin)或物质旋率(material spin)。(2.4)的分量形式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= d_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j, \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \\ \boldsymbol{w} &= w_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j, \quad w_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{w}$ 都是即时构形 $\bullet$ 中的张量。有了速度梯度 $\boldsymbol{l}$，就可以计算许多变形张量的率，也即它们的物质导数。

变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的物质导数用 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 表示。由 $\boldsymbol{F}$ 的(1.11a)式，利用(1.6) $x_i(X_A,t)$对自变量求导次序可以互换的规则：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{F}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\right)_P = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A \\ &= \frac{\partial}{\partial X_A}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A = \frac{\partial v_i}{\partial X_A}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A \end{aligned} \tag{2.6}$$

由于 v_i 常作为 x_j 的函数 $v_i(x_j,t)$给出，所以利用复合函数求导公式，上式又可写作

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{F}} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_A}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k\right)\cdot\left(\frac{\partial x_j}{\partial X_A}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_A\right) \\ &= \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{2.7a}$$

或

$$\boldsymbol{l} = \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} \tag*{(2.7)$'$}$$

利用等式 $\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{F} = \mathbf{1}$（或 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = \mathbf{1}$），求物质导数

$$\left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^{\bullet}\cdot\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{F}} = \mathbf{0}$$

故

$$\left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^{\cdot}=-\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}$$

利用(2.7)′，可得

$$\left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^{\cdot}=-\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l} \tag{2.7b}$$

取(2.7a 与 b)的转置

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tag{2.7c}$$

$$\left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{\cdot}=-\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{2.7d}$$

线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的物质导数$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}$（对于一定的物质线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$）

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}=(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

将(2.7a)代入，并利用线元变换公式(1.12a)，得到

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}=\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.8}$$

(2.8)表明，欲求即时构形中线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的物质导数，只需要知道该时刻 t 的速度梯度 $\boldsymbol{l}$，而无需追溯在初始构形中对应于 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的初始线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$。将 $\boldsymbol{l}$ 的分解式(2.3)代入上式，得

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}=\boldsymbol{d}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.9}$$

将对称张量 $\boldsymbol{d}$ 写作主对角形

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}&=\mathrm{d}_{1}(t)\boldsymbol{n}_{1}^{d}\boldsymbol{n}_{1}^{d}+\mathrm{d}_{2}(t)\boldsymbol{n}_{2}^{d}\boldsymbol{n}_{2}^{d}+\mathrm{d}_{3}(t)\boldsymbol{n}_{3}^{d}\boldsymbol{n}_{3}^{d}\\&=\sum_{\gamma}\mathrm{d}_{\gamma}(t)\boldsymbol{n}_{\gamma}^{d}\boldsymbol{n}_{\gamma}^{d}\end{aligned} \tag{2.10}$$

由 $\boldsymbol{d}$ 的主方向构成的标架$\left\{\boldsymbol{n}_{1}^{d}\ \boldsymbol{n}_{2}^{d}\ \boldsymbol{n}_{3}^{d}\right\}$称为变形率标架。$\boldsymbol{n}_{\gamma}^{d}$ 称为变形率标架的基矢量。$\boldsymbol{d}$ 的主值与主方向都是随时间 t 而变化的。变形率标架与 Larange 标架和 Euler 标架是完全不同的标架。引入正交张量 $\boldsymbol{R}^{d}$，它表示从固定标架$\left\{\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}}\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{II}}\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{III}}\right\}$到变形率标架的转动：

$$\boldsymbol{n}_{\gamma}^{d}=\boldsymbol{R}^{d}\cdot\boldsymbol{e}_{\Gamma},\qquad(\gamma=\Gamma) \tag{2.11}$$

反对称张量 $\boldsymbol{w}$ 乘以时间增量 $\mathrm{d}t$ 以后，$\boldsymbol{w}\mathrm{d}t$ 代表无限小转动。由张量分析理论可知，对应于反对称张量 $\boldsymbol{w}$ 一定存在一个反偶矢量$\boldsymbol{\omega}$，使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{\omega}&=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{w}\end{aligned} \tag{2.12}$$

式中$\boldsymbol{\varepsilon}$为置换张量（三阶）[1]。$\boldsymbol{\omega}$ 表示旋转角速度。借助(2.10)式可以看出，(2.9)式中第一项$\boldsymbol{d}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 表示在 $\boldsymbol{v}(t)$构形中 x 点附近沿 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^{d}$ （$\gamma=1,2,3$）方向的线元长度每单位时间增大 $\underset{\gamma}{\mathrm{d}}(t)$ 倍而方向不变。第二项 $\boldsymbol{w}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 则表示 x 点附近小邻域以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 作刚体转动。

值得注意，Lagrange 标架，Euler 标架以及变形率标架都不是物质的。它们在这一时刻 t 与某物质线元重合，在下一时刻 $t+\mathrm{d}t$ 则可能与另外的物质线元重合。

变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 在本构理论的研究中起着非常重要的作用。所有在即时构形 $\boldsymbol{v}$ 中写出的率形式本构关系，都是指变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 与某种应力率之间的关系式。必须指出，变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 并不是某一个应变张量的物质导数。但是 $\boldsymbol{d}$ 与 Green 应变张量的物质导数 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 存在着非常重要的关系（见下面(2.13)式），推导如下。

先来求 Green 变形张量（右 Cauchy-Green 变形张量)$\boldsymbol{C}$ 的物质导数。由(1.14)$\boldsymbol{C}$ 式，求物质导数（即对于一定的物质质点 X，对时间求导）为

$$\dot{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}+\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}$$

将(2.7a)$\dot{\boldsymbol{F}}$ 与(2.7c)$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}$ 代入，并利用$(2.4)_1$，可得

$$\dot{\boldsymbol{C}}=2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}$$

将上式代入(1.26)的物质导数式

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F} \tag{2.13}$$

(2.13)就是 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 之间的重要关系式。在下文（节 3.6 张量的转移）中还将详细讨论。$\boldsymbol{d}$ 是即时构形 $\boldsymbol{v}$ 中的张量，可以在 Euler 标架基矢量 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$ 中分解，而 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 是初始构形（参考构形）$\mathscr{R}$ 中的张量，可以在 Lagrange 标架基矢量 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}$ 中分解。(2.13)式将给出 $\boldsymbol{d}$ 在 Euler 标架中的分量与 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 在 Lagrange 标架中的分量之间的关系（见下文(2.18)式）。推导如下。

变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 在固定直角坐标系中的分解式见(2.5)，而在变形率标架中的分解式见(2.10)，为主对角形。设 $\boldsymbol{d}$ 在 Euler 标架中的分解式为

$$\boldsymbol{d}=\sum_{i,j}d_{(ij)}\underset{i}{\boldsymbol{n}}\underset{j}{\boldsymbol{n}} \tag{2.14}$$

(2.14)式中分量 $d_{(ij)}$的下标用(ij)表示，加上了圆括弧（）是为了与(2.5)式中在固定 Euler 直角坐标系(x_1, x_2, x_3)中的分量 d_{ij} 相区别。如果沿着 Euler 标架 $\underset{1}{\boldsymbol{n}},\underset{2}{\boldsymbol{n}},\underset{3}{\boldsymbol{n}}$ 方向取局部的直角坐标系$(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)})$，那么类似于$(2.5)_1$，亦有

$$d_{(ij)}=\frac{1}{2}\left(v_{(i),(j)}+v_{(j),(i)}\right) \tag{2.15}$$

1) 以后，例如在第 6 章中，有时用 $\boldsymbol{e}$ 表示置换张量。

设 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 在 Lagrange 标架中的分解式为

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\sum_{I,J}\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)_{(IJ)}\underset{I}{\boldsymbol{N}}\underset{J}{\boldsymbol{N}} \tag{2.16}$$

这里分量 $\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)_{(IJ)}$，或记作 $\dot{E}_{(IJ)}$，其下标(IJ)也加上了圆括弧（）是为了与固定 Lagrange 直角坐标系$(X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{II}}, X_{\mathrm{III}})$中的分量 $\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)_{(IJ)}$ 或 $\dot{E}_{IJ}$ 相区别。另一方面，将(2.14)$\boldsymbol{d}$，(1.25a)$\boldsymbol{F}$ 和(1.25b) $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 诸分解式代入(2.13) $\dot{\boldsymbol{E}}$ 式，也可以得到

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\sum_{i,j}\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}d_{(ij)}\underset{I}{\boldsymbol{N}}\underset{J}{\boldsymbol{N}}\qquad(i=I,\ j=J) \tag{2.17}$$

比较(2.16)与(2.17)，就可以得到

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)_{(IJ)}=\underset{i}{\lambda}\underset{j}{\lambda}d_{(ij)}\qquad(i=I,\ j=J) \tag{2.18}$$

3.2.2 各种旋率

$(2.4)_2$ 式旋率 $\boldsymbol{w}$ 表示在所研究的质点附近的小邻域材料的旋转速率（见(2.12)式下面的一段文字说明），故又称物质旋率。在材料的运动与变形过程中，Lagrange 标架在初始构形 $\mathscr{P}$ 中，Euler 标架与变形率标架在即时构形 $\boldsymbol{e}$ 中，也都是不停地旋转，它们各自的基矢量 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$，$\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$，$\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^{d}$ $(\gamma=1,2,3)$的方向也都是不断地随时间 t 而变化。现在来求这些标架的旋率（Cheng 与 Hwang，1987）。

由$(1.37)_1$ $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}$ 式，对于一定的质点 X，取物质导数（对时间的导数记作 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 或用$\dot{(\ )}$表示）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)=\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{Lag}}(t)\cdot\underset{\Gamma}{\boldsymbol{e}} \tag{2.19}$$

由$(1.37)_1$ 求逆

$$\underset{\Gamma}{\boldsymbol{e}}=\left(\boldsymbol{R}^{\mathrm{Lag}}(t)\right)^{\mathrm{T}}\cdot\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t) \tag{2.20}$$

将(2.20)代入(2.19)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)=\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}(t)\cdot\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t) \tag{2.21}$$

式中

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}(t)=\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{Lag}}(t)\cdot\left(\boldsymbol{R}^{\mathrm{Lag}}(t)\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.22}$$

$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}(t)$ 称为 Lagrange 旋率，它表示对于一定的质点 Lagrange 标架旋转的速率。

同样，利用(1.37)$_2$ $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}$ 式，可以求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}(t)=\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Eul}}(t)\cdot\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}(t) \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Eul}}(t)=\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{Eul}}(t)\cdot\left(\boldsymbol{R}^{\mathrm{Eul}}(t)\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.24}$$

$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Eul}}(t)$ 称为 Euler 旋率，它表示对于一定的质点，Euler 标架旋转的速率。利用(2.11) $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^{d}$ 式，同样可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^{d}=\boldsymbol{\Omega}^{d}(t)\cdot\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^{d}(t) \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{d}(t)=\dot{\boldsymbol{R}}^{d}(t)\cdot\left(\boldsymbol{R}^{d}(t)\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.26}$$

$\boldsymbol{\Omega}^{d}(t)$ 称为变形率标架旋率，它表示变形率标架旋转的速率。

3.1.1 中 $\boldsymbol{F}$ 的极分解（1.13)所得到的正交张量 $\boldsymbol{R}$ 表示从 Lagrange 标架到 Euler 标架的旋转（见(1.22)，(1.38)式），它表示对于站立在 Lagrange 标架上的观察者所看到的 Euler 标架的相对方位。仿照上面各种旋率的公式，可以定义一个相对旋率

$$\boldsymbol{\Omega}(t)=\dot{\boldsymbol{R}}(t)\cdot\left(\boldsymbol{R}(t)\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.27}$$

$\boldsymbol{\Omega}(t)$ 表示 Euler 标架相对于 Lagrange 标架旋转的速率。

上面谈到的所有的旋率，$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}(t)$，$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Eul}}(t)$，$\boldsymbol{\Omega}^{d}(t)$，$\boldsymbol{\Omega}(t)$ 都是反对称张量，因为它们的形式都是某一正交张量，例如 $\boldsymbol{R}$ 的物质导数 $\dot{\boldsymbol{R}}$ 与 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$（$\boldsymbol{R}$ 的转置）的点积。由正交张量性质 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{1}$，取物质导数，易证速率 $\boldsymbol{\Omega}=\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 的反对称性。

由(2.13)，可知 $\dot{\boldsymbol{E}}\neq\boldsymbol{d}$，因为 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 是以初始构形 $\mathscr{K}$ 为基准的应变率，而 $\boldsymbol{d}$ 是以即时构形 κ 为基准的应变率，而即时构形 κ 是不断变化着的。仅当即时构形 κ 与初始构形 $\mathscr{K}$ 重合（或取即时构形 κ 为参考构形）时，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{1}$，才有

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{d} \tag{2.13$'$}$$

对于小变形情况（$\boldsymbol{F}\approx\boldsymbol{1}$），$\dot{\boldsymbol{E}}\approx\boldsymbol{d}$，所以只有在小变形情况，$\boldsymbol{d}$ 对时间的积分

$$\boldsymbol{E}\approx\int_0^t\boldsymbol{d}\mathrm{d}t$$

才具有应变张量的意义。

3.2.3 Hill 应变度量、Seth 应变度量的率

应变张量 $\boldsymbol{E}$ 是 Hill 应变度量或 Seth 应变度量的特例（见(1.47)）。Green 应变张量的率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 与变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 之间存在着如(2.13)所示的简单关系，但是 Hill 或 Seth 应变度量的率

$\dot{\mathscr{E}}$ 或 $\dot{\boldsymbol{E}}^{(n)}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 之间一般却没有这样简单的关系。

Hill（1968，1972）证明 $\dot{\mathscr{E}}$ 在 Lagrange 标架中的分量 $(\dot{\mathscr{E}})_{(IJ)}$ 与变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 在 Euler 标架中的分量 $d_{(ij)}$ 存在着类似于(2.18)的关系。这就是著名的主轴法。过程如下。

取 Hill 应变度量 $\mathscr{E}$ 的定义式(1.44)

$$\mathscr{E}=\sum_{\Gamma} f\left(\underset{\Gamma}{\lambda}\right)\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\,\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}} \tag{1.44}$$

求它的物质导数（对于一定的质点），并注意到标架本身的基矢量 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)$ 方向也是随时间而变化的：

$$\dot{\mathscr{E}}=\sum_{\Gamma}\left[\frac{\mathrm{d}f\left(\underset{\Gamma}{\lambda}\right)}{\mathrm{d}t}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\,\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}+f\left(\underset{\Gamma}{\lambda}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)\right)\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)+f\left(\underset{\Gamma}{\lambda}\right)\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)\right] \tag{2.28}$$

由(2.21)，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)$ 可以通过 Lagrange 旋率 $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}$ 表示。设 $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}$ 在 Lagrange 标架中的分解式为（以下常略去自变量 t 不写）

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}=\sum_{I,J}\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)}\underset{(I)}{\boldsymbol{N}}\,\underset{(J)}{\boldsymbol{N}} \tag{2.29}$$

则由(2.21)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(t)=\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}\cdot\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}=\sum_{I}\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(I\Gamma)}\underset{I}{\boldsymbol{N}} \tag{2.30}$$

将(2.30)代入(2.28)

$$\dot{\mathscr{E}}=\sum_{I}f\left(\underset{\Gamma}{\lambda}\right)\dot{\underset{\Gamma}{\lambda}}\,\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\,\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}+\sum_{I,\Gamma}f\left(\underset{\Gamma}{\lambda}\right)\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(I\Gamma)}\underset{I}{\boldsymbol{N}}\,\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}+\sum_{\Gamma,J}f\left(\underset{\Gamma}{\lambda}\right)\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(J\Gamma)}\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}\,\underset{J}{\boldsymbol{N}} \tag{2.31}$$

更换哑指标，并注意 $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}$ 的反对称性，可将上式改写为

$$\dot{\mathscr{E}}=\sum_{I,J}\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(IJ)}\underset{I}{\boldsymbol{N}}\,\underset{J}{\boldsymbol{N}} \tag{2.32}$$

式中

$$\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(IJ)}=f\left(\underset{I}{\lambda}\right)\dot{\underset{I}{\lambda}}\,\delta_{IJ}+\left[f\left(\underset{J}{\lambda}\right)-f\left(\underset{I}{\lambda}\right)\right]\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)}\quad\text{（不对指标取和）} \tag{2.33}$$

式中 δ_{IJ} 为 Kronecker delta，即当 $I=J$ 时

$$\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(II)}=f\left(\underset{I}{\lambda}\right)\dot{\underset{I}{\lambda}}\qquad\text{（对 }I\text{ 不取和）} \tag{2.33a}$$

而当 $I \neq J$ 时

$$\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(IJ)} = \left[f\left(\lambda_J\right) - f\left(\lambda_I\right)\right]\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)} \quad \text{（不对指标取和）} \tag{2.33b}$$

(2.32)就是 Hill 应变度量率 $\dot{\mathscr{E}}$ 在 Lagrange 标架中的分解式。但(2.33)中还有 $\dot{\lambda}_I$ 与 $\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)}$ 是未知的，我们可以利用前面已知的 Green 应变张量率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 与变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 分量之间的关系(2.18)来定出。取 $f(\lambda) = (\lambda^2 - 1)/2$，则由(1.47)，$\mathscr{E} = \boldsymbol{E}^{(1)} = \boldsymbol{E}$。(2.33a，b)给出

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)_{(II)} = \lambda_I \dot{\lambda}_I \qquad \text{（对 } I \text{ 不取和）} \tag{2.34a}$$

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)_{(IJ)} = \frac{1}{2}\left(\lambda_J^2 - \lambda_I^2\right)\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)} \qquad \text{（} I \neq J \text{，不对指标取和）} \tag{2.34b}$$

另一方面由前面的(2.18)，又有

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)_{(II)} = \lambda_i^2 d_{(ii)} \qquad \text{（取 } I \text{ 或 } i \text{ 不取和）} \tag{2.35a}$$

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)_{(IJ)} = \lambda_i \lambda_j d_{(ij)} \qquad \text{（} i = I \neq j = J \text{，不对指标取和）} \tag{2.35b}$$

对比(2.34a,b)与(2.35a,b)，并注意(1.29)$_2$ $\lambda_\gamma = \lambda_\Gamma$ $(\gamma = \Gamma)$，可求得 $\dot{\lambda}_i$ 与 $\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)}$。

$$\dot{\lambda}_i / \lambda_i = d_{(ii)} \qquad \text{（不对 } i \text{ 取和）} \tag{2.36}$$

$$\Omega^{\mathrm{Lag}}_{(IJ)} = \left(\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}\right)_{(IJ)} = \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} d_{(ij)} \quad (i \neq j) \tag{2.37}$$

(2.36)式说明当变形的主轴方向不随时间 t 变化时（即 Lagrange 标架与 Euler 标架基矢量方向都不变，例如沿固定方向的单向拉伸，轴对称变形过程），$d_{(ii)}$ 对时间的积分表示对数应变 $\ln \lambda_i$。(2.37)给出了 $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Lag}}$ 沿 Lagrange 标架的分量。将(2.36)与(2.37)代入(2.33a,b)，最后得到 $\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(IJ)}$ 与 $d_{(ij)}$ 之间的关系：

$$\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(II)} = \lambda_i f'\left(\lambda_i\right) d_{(ii)} \qquad \text{（} i = I \text{，不对 } i \text{ 或 } I \text{ 取和）} \tag{2.38a}$$

$$\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(IJ)} = \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_j + \lambda_i} \frac{f\left(\lambda_j\right) - f\left(\lambda_i\right)}{\lambda_j - \lambda_i} d_{(ij)} \qquad \text{（} i = I, j = J, i \neq j \text{，不对指标取和）} \tag{2.38b}$$

当 $\lambda_i = \lambda_j$ 时，(2.38)式中的

$$\frac{f\left(\lambda_j\right)-f\left(\lambda_i\right)}{\lambda_j-\lambda_i}$$

可以用 $f'\left(\lambda_i\right)$ 代替。(2.38a,b)可写成统一的形式：

$$\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(IJ)}=\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_j+\lambda_i}\varphi(i,j)d_{(ij)} \qquad (i=I,\ j=J，不对指标求和) \tag{2.38)'}$$

式中

$$\varphi(i,j)=\begin{cases}\dfrac{f\left(\lambda_j\right)-f\left(\lambda_i\right)}{\lambda_j-\lambda_i} & 当\lambda_i\neq\lambda_j \\ f'\left(\lambda_i\right) & 当\lambda_i=\lambda_j\end{cases} \tag{2.39}$$

由(2.38a,b)式可以看出，当即时构形 $\mathscr{r}$ 与初始构形 $\mathscr{R}$ 重合（或取即时构形 $\mathscr{r}$ 为参考构形）时，$\lambda_i=1$，利用度量函数 $f(\lambda)$ 的性质，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，

$$\dot{\mathscr{E}}=\boldsymbol{d} \tag{2.40}$$

对于小变形情况，(2.40)近似成立。

对于 Seth 应变度量 $\boldsymbol{E}^{(n)}$，可在(2.38a,b)式中取 $f(\lambda)$ 如(1.45)，得到

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(n)}=\sum_{I,J}\left(\dot{\boldsymbol{E}}^{(n)}\right)_{(IJ)}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{N}_J \tag{2.41}$$

式中

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}^{(n)}\right)_{(IJ)}=\frac{1}{2n}\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_j+\lambda_i}\frac{\lambda_j^{2n}-\lambda_i^{2n}}{\lambda_j-\lambda_i}d_{(ij)} \qquad (i=I,\ j=J,\ \lambda_i\neq\lambda_j,不对指标取和) \tag{2.42a}$$

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}^{(n)}\right)_{(IJ)}=\lambda_i^{2n}d_{(ij)} \qquad (i=I,\ j=J,\ \lambda_i=\lambda_j，不对指标取和) \tag{2.42b}$$

举几个特例。

例 1 Green 应变张量(n=1)，已见(2.17)式。

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\sum_{I,J}\lambda_i\lambda_j d_{(ij)}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{N}_J \qquad (i=I,j=J) \tag{2.17}$$

例 2 Almansi 应变度量($n=-1$)。

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(-1)}=\sum_{I,J}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}d_{(ij)}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{N}_J \quad (i=I,j=J) \tag{2.43}$$

例 3 工程应变张量$\left(n=\frac{1}{2}\right)$

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(1/2)}=\dot{\boldsymbol{U}}=\sum_{I,J}\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_j+\lambda_i}d_{(ij)}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{N}_J \quad (i=I,j=J) \tag{2.44}$$

例 4 对数应变(n=0)

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(0)}=(\ln\boldsymbol{U})^{\bullet}=\sum_{I,J}\left(\dot{\boldsymbol{E}}^{(0)}\right)_{(IJ)}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{N}_J \tag{2.45}$$

式中

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}^{(0)}\right)_{(IJ)}=\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_j+\lambda_i}\frac{\ln\lambda_j-\ln\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}d_{(ij)} \quad (i=I,\ j=J,\ \lambda_i\neq\lambda_j,\text{不对指标取和}) \tag{2.46a}$$

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}^{(0)}\right)_{(IJ)}=d_{(ij)} \quad (i=I,\ j=J,\ \lambda_i=\lambda_j) \tag{2.46b}$$

3.3 应力理论

3.3.1 Cauchy 应力，第一类与第二类 P-K 应力

1. Cauchy 应力 σ

又称真应力，其分解式为

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{3.1}$$

设$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_1=\sigma_{i1}\boldsymbol{e}_i\equiv\boldsymbol{\sigma}_{(1)}$表示作用在六面体的正 x_1 面（其法线为正 x_1 方向的面）每单位面积上的应力矢量。（见图 3-6(a)）。同样设

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_2=\sigma_{i2}\boldsymbol{e}_i\equiv\boldsymbol{\sigma}_{(2)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_3=\sigma_{i3}\boldsymbol{e}_i\equiv\boldsymbol{\sigma}_{(3)}$$

各为作用在正 x_2 面上与作用在正 x_3 面上每单位面积的应力矢量。故(3.1)可写作

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_{(1)}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{\sigma}_{(2)}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\sigma}_{(3)}\boldsymbol{e}_3 \tag{3.1$'$}$$

若外向法线为 $\boldsymbol{n}$ 的斜截面每单位面积上的应力矢量记作$\boldsymbol{\sigma}_n$，斜截面面积为 da，如图 3-6(b)所示。考虑图 3-6(b)中四面体的力的平衡[1]，得到

1) 如果物体受体积力（包括惯性力）作用，则体积力项将作为高阶小量出现于(3.2)，故(3.4)仍然正确。

$$\boldsymbol{\sigma}_n \mathrm{d}a - \boldsymbol{\sigma}_{(1)}\mathrm{d}a_{(1)} - \boldsymbol{\sigma}_{(2)}\mathrm{d}a_{(2)} - \boldsymbol{\sigma}_{(3)}\mathrm{d}a_{(3)} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

式中 $\mathrm{d}a_{(i)}(i=1,2,3)$为四面体的三个坐标面的面积。

$$\mathrm{d}a_{(i)} = \mathrm{d}a\, \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.3}$$

将(3.3)式代入(3.2)式，并消去 $\mathrm{d}a$，可得到

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.4}$$

作用于 $\mathrm{d}a$ 面上的力则为

$$\boldsymbol{\sigma}_n \mathrm{d}a = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}a = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{3.5}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 为面元矢量。由以上讨论可见，Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 点乘 $\mathscr{r}$ 构形中任何面元的单位外向法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 就得到作用于该面上每单位面积的应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}_n$。以上多次提到的单位面积都是指在即时构形 $\mathscr{r}$ 中的面积，也就是应力所实际作用的面积。因此我们称 Cauchy 应力是以即时构形 $\mathscr{r}$ 中的面积为基准来度量的，同时又把 Cauchy 应力称为真应力。但请注意在即时构形中的单位面积在参考构形中所对应的就不是单位面积了。考虑图 3-6(a)所示的微六面体的力矩平衡，可知在无偶应力作用的经典连续介质力学理论中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为对称张量：$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$。

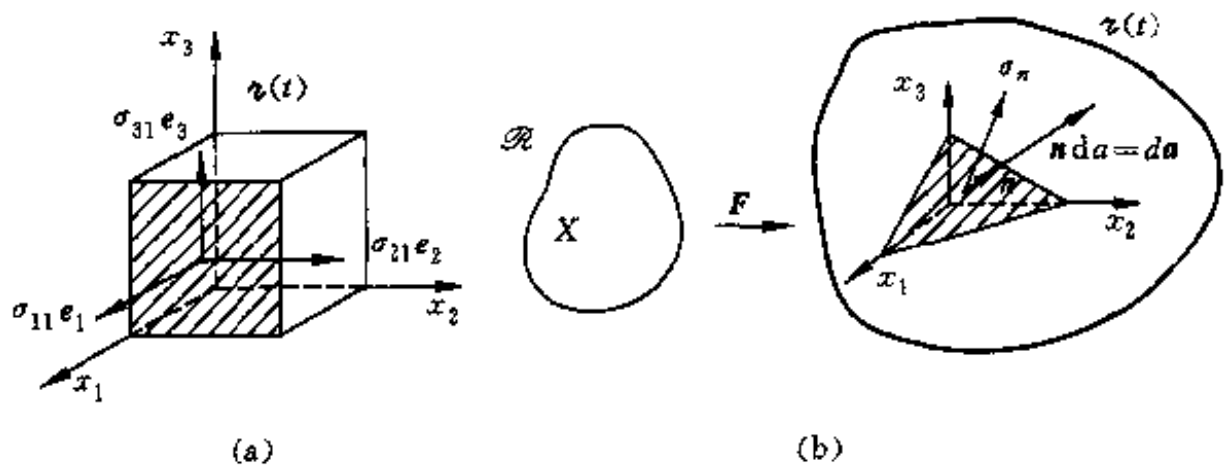


图 3-6　Cauchy 应力张量

2. 第一类 P-K(Piola-Kirchhoff)应力 $\boldsymbol{P}$

又称名义应力 $\mathscr{r}$ 构形中的面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 对应于参考构形 $\mathscr{R}$ 中的面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 满足 Nanson 公式(1.43)。如果已知参考构形 $\mathscr{R}$ 中的面元 $\mathrm{d}A$，欲求它所对应的在即时构形 $\mathscr{r}$ 中的面元 $\mathrm{d}a$ 上作用的内力，则可利用 Nanson 公式(1.43)得到

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot J\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}A \tag{3.6}$$

或记作

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}A \tag{3.7}$$

式中

$$\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{3.8}$$

$\boldsymbol{P}$ 称为第一类 P-K 应力。由(3.7)可见，当已知参考构形 $\mathscr{A}$ 中面元 dA，$\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 就是实际作用在即时构形 $\mathscr{a}$ 中面元 d$\boldsymbol{a}$ 上的力。注意，这个力不是作用在 dA 上。例如，若取 $\mathscr{A}$ 为自然状态，dA 上根本没有任何内力作用。但第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{P}$ 是以参考构形 $\mathscr{A}$ 中的每单位面积为基准来折算的。将(1.11d)式代入(3.8)，可得 $\boldsymbol{P}$ 的分解式

$$\boldsymbol{P} = J(\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)\cdot\left(\frac{\partial X_A}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_A\right) = P_{iA}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A \tag{3.9}$$

式中

$$P_{iA} = J\sigma_{ij}\frac{\partial X_A}{\partial x_j} \tag{3.8$'$}$$

(3.8)′就是(3.8)的分量形式。$\boldsymbol{P}$ 是两点张量。$P_{iA}(i = 1, 2, 3, A = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$表示作用在原构形 $\mathscr{A}$ 中曾经是垂直于 X_A 的单位面积而在即时构形 $\mathscr{a}$ 中已非单位面积上的内力沿 x_i 方向的分量。作为两点张量 $\boldsymbol{P}$ 的分量，P_{iA} 已无所谓对称性。引入 Kirchhoff 应力张量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= J\boldsymbol{\sigma}\\ \tau_{ij} &= J\sigma_{ij}\end{aligned} \tag{3.10}$$

$\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 一样，也是对称张量。由(3.8)，(3.10)，则

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{3.11}$$

其分量形式为

$$P_{iA} = \tau_{ij}\frac{\partial X_A}{\partial x_j} \tag{3.11$'$}$$

以后我们将看到，引入 Kirchhoff 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 并非仅仅为了将(3.8)与(3.8)′右端倍数 J 吸收于 $\boldsymbol{\sigma}$，它还有更深刻的意义和作用。

由(3.11)可将 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 通过第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{P}$ 表示为

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{3.12}$$

其分解式为

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{3.13}$$

式中

$$\tau_{ij} = J\sigma_{ij} = P_{iA}\frac{\partial x_j}{\partial X_A} \tag{3.12)'}$$

(3.12)′就是(3.12)的分量形式。

3. 第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$

构造一个新的应力张量 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{P} \tag{3.14}$$

利用(1.11c)，(3.9)，可得其分解式

$$\boldsymbol{T} = T_{AB}\boldsymbol{e}_A\boldsymbol{e}_B \tag{3.15}$$

式中

$$T_{AB} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}P_{iB} \tag{3.14)'}$$

(3.14)′为(3.14)的分量形式。将(3.11)代入(3.14)，得

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{3.16}$$

(3.16)的分量形式为

$$T_{AB} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\tau_{ij}\frac{\partial X_B}{\partial x_j} = \tau_{ij}\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j} \tag{3.16)'}$$

利用(3.16)可证如果 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$（或 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$）为对称张量，则 $\boldsymbol{T}$ 也是对称张量。由(3.14)与(3.12)′可将第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{P}$ 与 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 用第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 表示：

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{3.18}$$

它们的分量形式各为

$$P_{iB} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}T_{AB} \tag{3.17)'}$$

$$\tau_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}T_{AB}\frac{\partial x_j}{\partial X_B} = T_{AB}\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B} \tag{3.18)'}$$

由(3.7)和(3.17)式，作用于即时构形 φ 中面元 da 上的内力可以有三种表示方法：

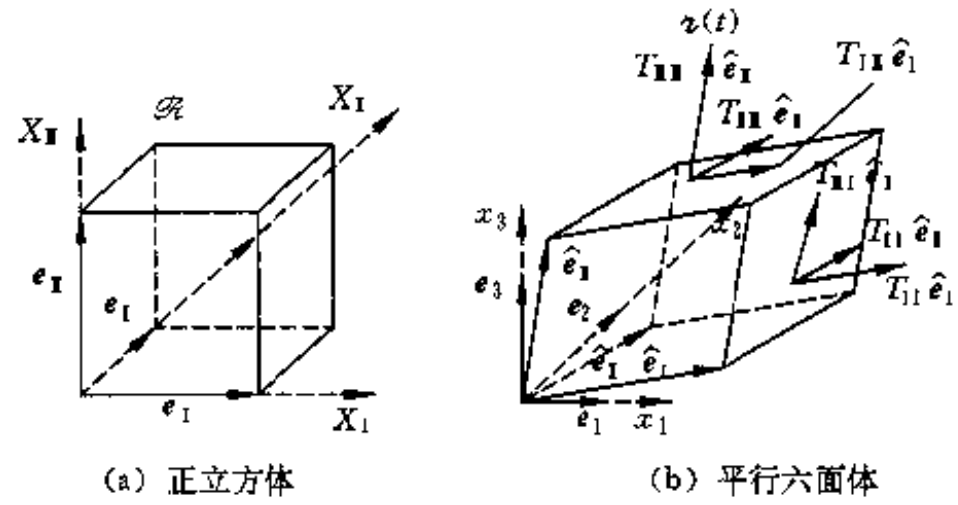
$$\sigma\cdot\mathrm{d}a = \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.19}$$

由(3.19)式可以看到，如果已知 d$\boldsymbol{A}$，欲求即时构形 φ 中作用在 da 上的内力，可以用第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{P}$ 直接点乘 d$\boldsymbol{A}$，也可以先用第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 点乘 d$\boldsymbol{A}$，然后还必须做一个类似

丁线元的变换（见(1.12a)）．即用 $\boldsymbol{F}$ 去点乘($\boldsymbol{T}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$）才能得到作用在 d$a$ 上的内力。

设第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{T}$ 在 Lagrange 直角坐标系中的分解式为(3.15)。如图 3-7(a)所示，在初始构形 $\mathscr{R}$ 中取一个以单位基矢量 $\boldsymbol{e}_I(I=\mathrm{I,II,III,})$ 为边的正立方体。由线元变换公式(1.12a)，变形以后，这个正立方体变成一个在即时构形 $\mathscr{r}$ 中的平行六面体，如图 3-7(b)所示．其三个边为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_K=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_K \qquad (K=\mathrm{I,II,III}) \tag{3.20}$$



（a）正立方体　　（b）平行六面体

图 3-7　第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 的说明

欲求作用在图 3-7(b)平行六面体的六个面上的内力，只需求右、前、上侧的三个面（称为正面）上的内力，另外三个面（左、后、下侧的三个面，称为负面）上的内力．则各与它们大小相等，方向相反。图 3-7(a)正立方体的各面为单位面积，而变形以后，在图 3-7(b)中的平行六面体各面已不是单位面积了。由(3.19)，并利用(3.20)，作用在图 3-7(b)平行六面体的三个正面上的内力为

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_K=T_{AK}\hat{\boldsymbol{e}}_A \qquad (K=\mathrm{I,II,III}) \tag{3.21}$$

由此可见，第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 相关的每单位面积是指变形前 $\mathscr{R}$ 构形中的每单位面积，而力的单位也必须按 $\mathscr{R}$ 构形中沿 Lagrange 坐标方向线元的伸长比例放大。由(3.20)、并利用(1.11a)，$\hat{\boldsymbol{e}}_K$ 的长度 $|\hat{\boldsymbol{e}}_K|$ 比 $|\boldsymbol{e}_K|=1$ 放大倍数为

$$|\hat{\boldsymbol{e}}_K|=\left|\frac{\partial x_i}{\partial X_K}\boldsymbol{e}_i\right|=\left[\sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_K}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.22}$$

3.3.2　动量方程

在即时构形 $\mathscr{r}$ 中，任意取一个域 v，体积元记为 dv，v 的封闭表面用 a 表示，面元 da 的外向法线单位矢量为 $\boldsymbol{n}$。

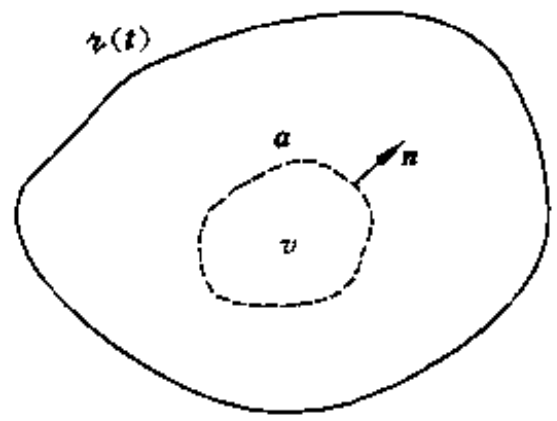


图 3-8　物体内的任意域 v

对域 v 用动量定理，有

$$\oint_a \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a+\int_v \rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}v=\int_v \rho\boldsymbol{a}\mathrm{d}v \tag{3.23}$$

式中ρ表示即时构形 $\mathscr{v}$ 中的质量密度（每单位体积的质量），左端第一项为作用在表面 a 的力，第二项为作用于域 v 的体积力，右端 $\boldsymbol{a}$ 为加速度。对(3.23)左端第一项用面积积分转换为体积积分的 Green 公式，则有

$$\int_v \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\mathrm{d}v+\int_v \rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}v=\int_v \rho\boldsymbol{a}\mathrm{d}v \tag{3.24}$$

由于域 v 是任意的，所以由(3.24)可得

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{a} \tag{3.25}$$

(3.25)称为 Cauchy 动量方程。如果体积力 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$，且物体是静止的（或作等速运动），$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则(3.25)成为

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla=\boldsymbol{0} \tag{3.25$'$}$$

这就是连续介质力学中的平衡方程。

对 v 域用动量矩定理，在连续介质力学中可证明如果不存在偶应力，则 Cauchy 应力张量$\boldsymbol{\sigma}$必为对称张量：$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$。这个结论也可以通过考虑图 3-6(a)所示的微六面体用动量矩定理得到。

3.3.3　变形功率

变形功率 w 定义为

$$w=J\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}=\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d} \tag{3.26}$$

它表示参考构形 $\mathscr{V}$ 中每单位体积（也就是即时构形 $\mathscr{v}$ 中单位体积的 J 倍）的变形功率，因为$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}$ 表示即时构形 $\mathscr{v}$ 中每单位体积的变形功率。变形功率 w 也可以通过两类 P-K 应力 $\boldsymbol{P}$

或 $\boldsymbol{T}$ 表示。

我们先来证明两个二阶张量的点积公式。设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为二阶张量，则有

$$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}:\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \tag{3.27}$$

(3.27)的分量形式

$$a_{ij}b_{ij}=a_{ij}b_{ji}^{\mathrm{T}}=a_{ji}^{\mathrm{T}}b_{ij}=a_{ji}^{\mathrm{T}}b_{ji}^{\mathrm{T}} \tag{3.27$'$}$$

是显然的。另一个公式是

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{3.28}$$

其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的循环顺序不变。(3.28)的分量形式

$$a_{ij}b_{jk}c_{ki}=b_{jk}c_{ki}a_{ij}=c_{ki}a_{ij}b_{jk} \tag{3.28$'$}$$

也是显然的。(3.28)可以推广于多个张量点积的情况，例如 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$。

为了推导变形功率 w 通过第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{P}$ 的表示式，先将(3.26)式改写成

$$w=\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{l} \tag{3.29}$$

这是因为(3.29)式右端 $\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{l}$ 与(3.26)式右端 $\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d}$ 的差别为 $\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{w}$（见(2.3)）。$\boldsymbol{\tau}$为对称张量，$\boldsymbol{w}$ 为反对称张量，它们的双点积必为零 $\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{w}=\tau_{ij}w_{ij}=0$，将 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$通过第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{P}$ 的表示式(3.12)代入(3.29)，并多次运用张量点积公式(3.27)与(3.28)，可得

$$\begin{aligned}w&=\left(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right):\boldsymbol{l}=\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{l}\right]=\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{l}\right]\\&=\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{F}\right]=\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{F}\right)\end{aligned}$$

再利用(2.7a)，可得

$$w=\boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{F}} \tag{3.30}$$

所以变形功率 w 就是第一类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{P}$ 与变形梯度的率 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 的双点积。

同样，将 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 通过第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 的表示式(3.18)代入(3.26)，并多次利用张量点积公式(3.27)与(3.28)，可得（注意 $\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{T}$ 为对称）

$$\begin{aligned}w&=\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right):\boldsymbol{d}=\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}\right]=\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}\right]\\&=\boldsymbol{T}:\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}:\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}\right)\end{aligned}$$

利用(2.13)，由上式可得

$$w=\boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{3.31}$$

因此参考构形 $\mathscr{P}$ 每单位体积变形功率 w 是第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{T}$ 与 Green 应变张量的率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 的双点积。我们称 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 为一对共轭的应力与应变张量，或称 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{E}$ “功共轭”（work

conjugate）。

3.3.4 与 $\mathscr{E}$, $\boldsymbol{E}^{(n)}$功共轭的应力度量

Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 是 Hill 应变度量的特例 $\boldsymbol{E}^{(1)}$。(3.31)式表明：与 $\boldsymbol{E}^{(1)}$功共轭的应力张量就是第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{T}$。与 Hill，Seth 应变度量 $\mathscr{E}$, $\boldsymbol{E}^{(n)}$功共轭的应力度量（简称 Hill，Seth 应力度量），各记作 $\mathscr{T}$, $\boldsymbol{T}^{(n)}$。由(1.47)与(3.31)，当 $n=1$ 时，有

$$\boldsymbol{E}^{(1)}=\boldsymbol{E}\,,\qquad \boldsymbol{T}^{(1)}=\boldsymbol{T} \tag{3.31$'$}$$

在一般情况下

$$w=\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d}=\mathscr{T}:\dot{\mathscr{E}}=\boldsymbol{T}^{(n)}:\dot{\boldsymbol{E}}^{(n)} \tag{3.32}$$

取 $\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d}$ 在 Euler 标架中的分解式与 $\mathscr{T}:\dot{\mathscr{E}}$ 在 Lagrange 标架中的分解式，得

$$\sum_{i,j}\tau_{(ij)}d_{(ij)}=\sum_{I,J}\mathscr{T}_{(IJ)}\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(IJ)} \tag{3.33}$$

将(2.38)$'$ $\left(\dot{\mathscr{E}}\right)_{(IJ)}$ 代入，比较对应项 $d_{(ij)}$ 的系数，可得 Hill 应力度量在 Lagrange 标架中的分量：

$$\mathscr{T}_{(IJ)}=\frac{1}{\varphi(i,j)}\frac{\lambda_j+\lambda_i}{2\lambda_i\lambda_j}\tau_{(ij)}\qquad (i=I,\ j=J,\ \text{不对指标取和}) \tag{3.34}$$

显然(3.34)式中右端的系数恰与(2.38)$'$式中右端的系数互为倒数。式中 $\varphi(i,j)$ 见(2.39)。

在(3.34)式中令 $f(\lambda)=(\lambda^{2n}-1)/2n$ 就可得到 Seth 应力度量在 Lagrange 标架中的分量。下面专门研究与对数应变度量 $\boldsymbol{E}^{(0)}$ 功共轭的应力度量 $\boldsymbol{T}^{(0)}$。由(3.34)，令 $f(\lambda)=\ln\lambda$，可得

$$\boldsymbol{T}^{(0)}=\sum_{I,J}T^{(0)}{}_{(IJ)}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{N}_J \tag{3.35}$$

式中

$$T^{(0)}{}_{(IJ)}=\frac{\lambda_j^2-\lambda_i^2}{2\lambda_i\lambda_j}\frac{1}{\ln\lambda_j-\ln\lambda_i}\tau_{(ij)}\qquad (i=I,\ j=J,\ \lambda_i\neq\lambda_j,\ \text{不对指标取和}) \tag{3.36a}$$

$$T^{(0)}{}_{(II)}=\tau_{(ii)}\qquad (i=I,\ j=J,\ \lambda_i=\lambda_j,\ \text{不对指标取和}) \tag{3.36b}$$

将(3.36b)在 $\lambda_j/\lambda_i=1$ 附近作 Taylor 展开，可得

$$T^{(0)}{}_{(IJ)} = \tau_{(ij)}\left[1+\frac{1}{6}\left(\ln\lambda_j - \ln\lambda_i\right)^2+\cdots\right] \qquad (i=I,\ j=J,\ \lambda_i \neq \lambda_j,\text{不对指标取和}) \quad (3.37)$$
$$= \tau_{(ij)}\left[1+\frac{1}{6}\left(E^{(0)}_{(JJ)} - E^{(0)}_{(II)}\right)^2+\cdots\right]$$

式中由(1.50)，$E^{(0)}_{(II)} = \ln\lambda_i$。由(3.36a)与(3.36b)或(3.37)式可以看出：当 Kirchhoff 应力张量$\boldsymbol{\tau}$的主方向沿 Euler 标架基矢量 $\boldsymbol{n}_{(\gamma)}$ $(\gamma = 1,2,3)$ 方向（例如轴对称问题）时，$\tau_{(ij)} = 0$，当 $i \neq j$；因此$T^{(0)}{}_{(IJ)} = 0$，当$I \neq J$，且由(3.35)和(3.36)可得

$$\boldsymbol{T}^{(0)} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{R} \tag{3.38}$$

此式右端称为 Lagrange 标架 Kirchhoff 应力，它表示把 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$从 Euler 标架旋转到 Lagrange 标架的结果为

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i,j} \tau_{(ij)}\, \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_j$$

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{R} = \sum_{i,j} \tau_{(ij)}\, \boldsymbol{N}_I \boldsymbol{N}_J \qquad (i=I, j=J) \tag{3.39}$$

但是若 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$的主方向不是沿 Euler 标架基矢量$\boldsymbol{n}_\gamma$方向，则(3.38)式只是近似成立，由(3.37)可以看出，(3.38)式两端之差属于对数应变（或 Green 应变）分量的二次项。因此，通常就把 Lagrange 标架 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{R}$ 近似当作与对数应变张量 $\boldsymbol{E}^{(0)}$ 功共轭的应力。

最后指出，当即时构形 $\mathscr{e}$ 与初始构形 $\mathscr{R}$ 重合（或取即时构形 $\mathscr{e}$ 为参考构形）时，由(3.32)与(2.40)或直接由(3.34)，可知

$$\mathscr{T} = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \tag{3.40}$$

3.4 质量与能量的守恒或平衡律

动量的平衡方程已见(3.25)，动量矩的平衡方程导致 Cauchy 应力$\boldsymbol{\sigma}$的对称性：$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$（见 3.3.2 末段文字）。本节讨论质量的守恒律、机械能与总能[1]的平衡律。

3.4.1 质量守恒律

以 ρ_0 与ρ各表示初始构形 $\mathscr{R}$ 与即时构形 $\mathscr{e}$ 中的质量密度（每单位体积的质量）。质量守恒律可表示为

1) 本书只考虑机械能与热能，而不考虑其他形式的能量(如电、磁形式的能)。

$$\rho \mathrm{d}v = \rho_0 \mathrm{d}V \quad 或 \quad \rho J = \rho_0 \tag{4.1}$$

式中 J 表示体积比 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}V$ （见(1.41)）。将(4.1)对时间求导（即求物质导数），可得率形式的质量守恒律

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\dot{J}}{J} = 0$$

下面将证明

$$\frac{\dot{J}}{J} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{d} \tag{4.2}$$

式中 $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}$ （或记 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ ）表示在即时构型 $\bullet$ 中速度 $\boldsymbol{v}$ 的散度。（由(2.4)，也就是变形率 $\boldsymbol{d}$ 的迹。）利用(4.2)，率形式的质量守恒律可写作

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{4.3}$$

现在来证明(4.2)式。

先来证明一个常用的行列式对其元素求导的公式。元素 a_{mn} （例如，为讨论简单起见，设 m,n=1,2,3）构成一个矩阵，记作 $\boldsymbol{a}$，其行列式的值记作 $\boldsymbol{a}$，元素 a_{mn} 的代数余子式记作 A_{mn}。将行列式 $\boldsymbol{a}$ 看作它的 9 个元素的函数，则显然

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial a_{mn}} = A_{mn} \tag{4.4}$$

矩阵 $\boldsymbol{a}$ 的逆记作 $\boldsymbol{a}^{-1}$，其元素 [1]记为 $\overset{-1}{a}_{mn}$，由行列式的理论，可知

$$\overset{-1}{a}_{mn} = \frac{1}{\boldsymbol{a}} A_{nm} \tag{4.5}$$

由(4.4)与(4.5)，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial a_{mn}} = \boldsymbol{a}\, \overset{-1}{a}_{nm} \tag{4.6}$$

(4.6)以后还会用到，它表示一矩阵的行列式对其每一元素的偏导数等于该行列式值乘以逆矩阵相应的转置元素。

现在利用(4.6)式来证明(4.2)。由(1.41)与(1.11a)，体积比 J 等于变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 元素 $\partial x_i / \partial X_A$ 的行列式：

---

1) 注意，$\overset{-1}{a}_{mn}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{a}^{-1}$ 的第 m 行 n 列元素，而不表示 a_{mn} 的倒数 $1/a_{mn}$ 。

$$J=\left|\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\right|=\left|F_{iA}\right| \tag{4.7}$$

式中规定 F_{iA} 的第一指标 i 表示行，第二指标 A 表示列。由(4.6)，取 $\boldsymbol{a}$ 为 J，并利用 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 的(1.11c)式，可得[1]

$$\frac{\partial J}{\partial F_{iA}}=J\overset{-1}{F}_{Ai}=J\frac{\partial X_A}{\partial x_i} \tag{4.8}$$

现在把 J 看作其 9 个元素 $F_{iA}\left(=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_A}\right)$ 的函数，对时间求物质导数 $\left(\mathrm{d}/\mathrm{d}t=(\partial/\partial t)_{X_A}\right)$

$$\dot{J}=\frac{\partial J}{\partial F_{iA}}\frac{\mathrm{d}F_{iA}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial J}{\partial F_{iA}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\right)=\frac{\partial J}{\partial F_{iA}}\frac{\partial v_i}{\partial X_A} \tag{4.9}$$

将(4.8)代入，得

$$\dot{J}=J\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial X_A}=J\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=J\,\mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{4.10}$$

因此(4.2)得证。注意(4.9)与(4.10)式中几个对坐标 x_i 或 X_A 的偏导数都应理解为时间 t 保持固定。

3.4.2 机械能平衡律

在图 3-8 所示即时构形 $\mathscr{v}$ 中任意 v 域内的动能为

$$K=\int_v\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2\mathrm{d}v \tag{4.11}$$

式中 $\boldsymbol{v}^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$，求 v 域动能(4.11)的物质导数，并注意到质量元 $\rho\mathrm{d}v$ 是不随时间 t 而变化的，得

$$\dot{K}=\int_v\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}^2\right)\mathrm{d}v \tag{4.12}$$

被积函数可计算如下：

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}^2\right)=\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}$$

将动量方程(3.25) $\rho\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{f}$ 代入，利用张量分析公式：

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)+(\boldsymbol{v}\nabla):\boldsymbol{\sigma}$$

---

1) (4.8)式也就是第 4 章关于张量不变量对张量的导数(3.5b)的第 3 式。

(4.12)可写作

$$\dot{K}=\int_v(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla\mathrm{d}v+\int_v\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}v-\int_v\boldsymbol{\sigma}:(\boldsymbol{v}\nabla)\mathrm{d}v \tag{4.13}$$

用 Green 定理将(4.13)右端第一项沿 v 的体积积分转换为沿其表面 a（图 3-8）的面积分，右端第三项被积函数可改为

$$\boldsymbol{\sigma}:(\boldsymbol{v}\nabla)=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{l}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}$$

可得积分形式的机械能平衡律

$$\dot{K}=\int_a\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n\mathrm{d}a+\int_v\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}v-\int_v\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}\mathrm{d}v \tag{4.14}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}_n=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$（见(3.4)）为作用于即时构形 κ 中 v 域表面 a 每单位面积上的力。(4.14)左端表示构形 κ 中 v 域内的动能的物质变化率，右端第一项表示作用于 v 域表面 a 上的面力的功率，右端第二项表示作用于 v 域上的体积力的功率。右端第三项表示 v 域内的内力功率。因此在构形 κ 中，每单位体积的内力功率应该是 $-\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}$，即与变形功率相差一负号。

3.4.3 能量平衡律

在图 3-8 所示构型 κ 中任意 v 域内的总能量 P 由动能 K（见(4.11)）与内能 E 组成，即

$$P=K+E \tag{4.15}$$

式中若以 e 表示每单位质量的内能

$$E=\int_v e\rho\mathrm{d}v \tag{4.16}$$

根据热力学第一定律，总能量 P 的物质导数，即对时间的变化率应等于作用于 v 域的外力功率与每单位时间从 v 域外部所加的热[1]：

$$\dot{P}=\int_a\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n\mathrm{d}a+\int_v\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}v-\int_a\boldsymbol{h}\cdot\mathrm{d}a+\int_v\kappa\rho\mathrm{d}v \tag{4.17}$$

式中 $\boldsymbol{h}$ 表示热流矢量（或称热通量），即每单位时间每单位面积的热流，κ表示每单位质量接受外部的热（称为热源）。为了要得到 v 域内能的物质导数 $\dot{E}$，只需计算(4.17) $\dot{P}$ 与(4.14) $\dot{K}$ 之差，可得

$$\dot{E}=\int_v\dot{e}\rho\mathrm{d}v=-\int_a\boldsymbol{h}\cdot\mathrm{d}a+\int_v\kappa\rho\mathrm{d}v+\int_v\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}\mathrm{d}v \tag{4.18}$$

(4.18)式称为积分形式的热力学第一定律。右端第一项表示每单位时间经过表面 a 流入 v 域的热量，第二项为每单位时间从外部加给 v 域的热量，第三项表示 v 域的变形功率。对比

1) (4.17)式右端各项有的以热为单位，有的以功为单位，在具体运算时需进行热与功的当量换算。以后同。

(4.14) $\dot{K}$ 与 (4.18) $\dot{E}$ 右端的变形功率项，可见在 (4.14) $\dot{K}$ 式中变形功率项带有一负号，因为该项表示内力的功率，而在内能率 (4.18) $\dot{E}$ 式中变形功率项不带负号，它表示变形功率转化为内能。

利用 Green 定理，将(4.18)右端第一项沿 a 的面积分转换为沿 v 域的体积积分，并考虑到 v 域为任意，可得

$$\rho\dot{e} = -\boldsymbol{h}\cdot\nabla + \rho\kappa + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d} \tag{4.19}$$

(4.19)称为微分形式的热力学第一定律。

3.4.4 熵不等式，熵平衡律

以 η 表示每单位质量的熵，则图 3-8 所示 v 域的总熵为

$$H = \int_v \eta\rho \mathrm{d}v \tag{4.20}$$

以 θ 表示温度（绝对温度，$\theta > 0$），则由热力学第二定律，必有

$$\dot{H} \geqslant -\int_a \frac{1}{\theta}\boldsymbol{h}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_v \frac{1}{\theta}\kappa\rho\mathrm{d}v \tag{4.21}$$

式中 $\boldsymbol{h}/\theta$ 称为熵流，κ/θ 称为熵源。(4.21)称为熵不等式，或 Clausius-Duhem 不等式，也称为积分形式的热力学第二定律。对于不可逆过程，(4.21)式中取“>”号，而对于可逆过程，则取“=”号。(4.21)右端表明 v 域从邻域或从外部吸收热量的结果是使其总熵增加。熵的实际增加超过(4.21)右端这一增加量的部分是不可逆的，称为总熵的生成率。定义 v 域的熵生成率为(4.21)式两端之差，即由下式定义的 Γ 为

$$\dot{H} = \int_v \dot{\eta}\rho\mathrm{d}v = -\int_a \frac{1}{\theta}\boldsymbol{h}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_v \frac{1}{\theta}\kappa\rho\mathrm{d}v + \Gamma, \quad \Gamma \geqslant 0 \tag{4.22}$$

式中若以 γ 表示每单位质量的熵生成率，则

$$\Gamma = \int_v \gamma\rho\mathrm{d}v, \qquad \gamma \geqslant 0 \tag{4.23}$$

(4.22)称为积分形式的熵平衡方程（或熵平衡律）。利用 Green 定理，将(4.22)中右端第一项沿 v 域表面 a 的面积分化为沿 v 域的体积积分，可得

$$\rho\dot{\eta} = -\left(\frac{1}{\theta}\boldsymbol{h}\right)\cdot\nabla + \rho\left(\frac{1}{\theta}\kappa + \gamma\right) \tag{4.24}$$

(4.24)称为微分形式的熵平衡方程。利用张量分析公式

$$(c\boldsymbol{h})\cdot\nabla = c(\boldsymbol{h}\cdot\nabla) + (c\nabla)\cdot\boldsymbol{h} \tag{4.25}$$

化简(4.24)式右端第一项，令$c=1/\theta$，可将(4.24)乘以θ/ρ后写作

$$\theta\dot{\eta}=-\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)+\frac{1}{\rho\theta}(\theta\nabla)\cdot\boldsymbol{h}+\kappa+\theta\gamma \tag{4.24$'$}$$

即

$$\theta\gamma=\theta\gamma_{\text{th}}+\theta\gamma_{\text{int}}\geqslant 0 \tag{4.26}$$

式中

$$\begin{aligned}\theta\gamma_{\text{th}}&=-\frac{1}{\rho\theta}\boldsymbol{h}\cdot(\theta\nabla)\\ \theta\gamma_{\text{int}}&=\theta\dot{\eta}-\left[-\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)+\kappa\right]\end{aligned} \tag{4.27}$$

(4.26)表明熵生成率γ可分成两部分，一部分γ_{th}（见$(4.27)_1$）是由热传导所产生的熵生成率；另一部分γ_{int}是由于熵增率$\dot{\eta}$超过每单位质量从邻域及从外部吸收的热的率所产生的。γ_{int}称为内禀(intrinsic)熵生成率。热力学第二定律要求γ_{th}与γ_{int}之和$\gamma\geqslant 0$，但是人们通常都更强地假设γ_{th}与γ_{int}分别都$\geqslant 0$：

$$\theta\gamma_{\text{th}}\geqslant 0,\quad \theta\gamma_{\text{int}}\geqslant 0 \tag{4.28}$$

$\theta\gamma$，$\theta\gamma_{\text{th}}$与$\theta\gamma_{\text{int}}$各称为每单位质量的总耗散率，热耗散率与内禀耗散率。由(4.27)，$\theta\gamma_{\text{th}}\geqslant 0$的意义是热流矢量$\boldsymbol{h}$必与温度梯度$\theta\nabla$成钝角。对于具有各向同性热学性质的材料，按 Fourier 热传导定律

$$\boldsymbol{h}=-k(\theta\nabla) \tag{4.29}$$

k为热传导系数，热流矢量$\boldsymbol{h}$与温度梯度$\theta\nabla$成180°角。

利用微分形式热力学第一定律(4.19)式，可将$(4.27)_2$改写为

$$\theta\gamma_{\text{int}}=\theta\dot{\eta}-\left[\dot{e}-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}\right] \tag{4.30}$$

式中右端[…]表示每单位质量内能增加率超过每单位质量变形功率的部分，它正是$(4.27)_2$右端[…]所表示的每单位质量吸收热的率。

如果我们为了方便，不以熵η为自变量，而采用温度θ为自变量，可以不采用内能e为热力学函数，而采用每单位质量的 Hemholtz 自由能ψ为热力学函数，其定义为

$$\psi=e-\theta\eta \tag{4.31}$$

因此ψ与e之率之间存在关系

$$\dot{\psi}+\eta\dot{\theta}=\dot{e}-\theta\dot{\eta} \tag{4.32}$$

(4.30)可改写为

$$\theta\gamma_{\text{int}} = -\eta\dot{\theta} - \left[\dot{\psi} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}\right] \tag{4.33}$$

3.5 本构理论的客观性原理

本构理论研究应力张量与物体运动历史的关系。本构关系是材料在变形过程中所必须遵循的规律。客观性原理又是建立本构关系所必须遵守的基本前提。只有满足客观性原理的本构关系才可能是正确的本构关系。因此，客观性原理可指导我们建立正确的本构理论的框架。当然，其中的待定函数和常数尚需由实验确定。如果本构框架是错误的，无论做多少试验也是徒劳的。

3.5.1 客观量

按照一定的标准，物理量可分为客观的与非客观的两种。为说明这一概念，首先考虑一个物体的两个不同的运动。如图 3-9 所示，χ 和 $\tilde{\chi}$ 表示同一物体的两个不同的运动，它们从时刻 t_0 的同一参考构形 $\mathscr{R}(t_0)$出发，构形 $\mathscr{R}(t_0)$中的 $\boldsymbol{X}$ 质点，在时刻 t 分别变为构形 $\boldsymbol{r}(t)$ 和构形 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ 中的 x 与 $\tilde{x}$。设对于这两个不同的运动 χ 和 $\tilde{\chi}$，运动方程(1.5)各为

$$\boldsymbol{x} = x(\boldsymbol{X},t) \tag{5.1a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{x}(\boldsymbol{X},t) \tag{5.1b}$$

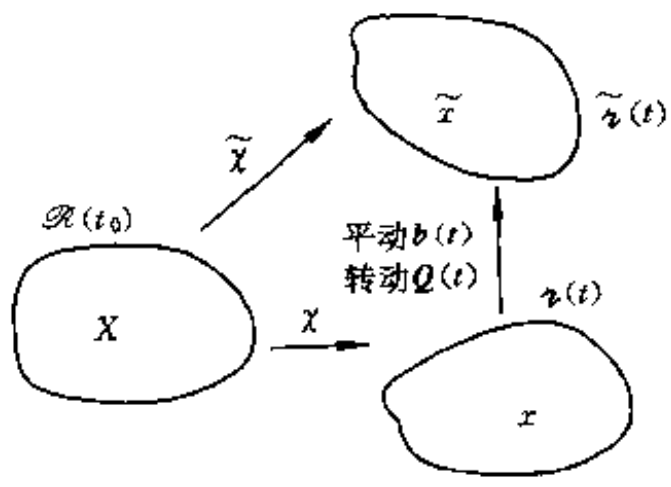


图 3-9 两个等价的运动 χ 与 $\tilde{\chi}$，$t \geqslant t_0$

在直角坐标中，χ 与 $\tilde{\chi}$ 的运动方程(5.1)可表示为

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i, \qquad x_i = x_i(\boldsymbol{X}_A,t) \tag{5.2a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{x}_i\boldsymbol{e}_i, \qquad \tilde{x}_i = \tilde{x}_i(X_A,t) \tag{5.2b}$$

以后设 χ 与 $\tilde{\chi}$ 这两个运动存在以下关系：

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) \tag{5.3}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(t)$为任意正交张量[1]，$\boldsymbol{b}(t)$为任意矢量，$\boldsymbol{Q}(t)$与 $\boldsymbol{b}(t)$只随时间 t 而变化，而不依赖于 $\boldsymbol{X}$。可见 $\tilde{\chi}$ 运动是在χ运动上再迭加一个移动 $\boldsymbol{b}(t)$和转动 $\boldsymbol{Q}(t)$，也即二者相差一个任意的刚体运动。我们称 χ 与 $\tilde{\chi}$ 为等价运动。

在同一 Euler 坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中，(5.3)的分量形式为

$$\tilde{x}_i = b_i(t) + Q_{ij}(t)x_j(X_A, t) \tag{5.4}$$

(5.3)和(5.4)式的逆表达式分别为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\cdot(\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}(t)) \tag{5.5}$$

和

$$x_i = Q_{ij}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{x}_j - b_j(t)) \tag{5.6}$$

一般说来，还可以考虑运动 χ 与 $\tilde{\chi}$ 的计时“表”的起点不同，即在时间变量 t 与 $\tilde{t}$ 之间相差一个常数 d，即

$$\tilde{t} = t + d \tag{5.7}$$

但这对讨论客观性原理没有本质影响。为简单起见，今后略去时间差，取 d=0。

以下将按照 Truesdell 等（1965）的观点介绍标量、矢量和张量场[2]客观性的标准。对于任意两个等价的运动，任何物理量都有一定的关系，称为该物理量的标架转换关系。

1. 标量（场）的客观性

设 χ 与 $\tilde{\chi}$ 为任意两个等价的运动（图 3-9），设有某物理量（例如温度）为标量，它在构形 $\boldsymbol{\varkappa}(t)$ 中为 $f(\boldsymbol{X},t)$，在构形 $\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}(t)$ 中为 $\tilde{f}(\boldsymbol{X},t)$。若对于任意的 $\boldsymbol{X}$ 与 t，有

$$\tilde{f}(\boldsymbol{X},t) = f(\boldsymbol{X},t) \tag{5.8}$$

则称 f 为客观标量。(5.8)是客观标量的标架转换关系。例如图 3-9 构形 $\mathscr{P}(t_0)$中的质点 $X_{(1)}$，$X_{(2)}$在构形 $\boldsymbol{\varkappa}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}(t)$ 中分别为 $x_{(1)}$，$x_{(2)}$和 $\tilde{x}_{(1)}$，$\tilde{x}_{(2)}$，显然线元 $\overrightarrow{x_{(1)}x_{(2)}}$ 与 $\overrightarrow{\tilde{x}_{(1)}\tilde{x}_{(2)}}$ 的长度相等，$\left|\overrightarrow{x_{(1)}x_{(2)}}\right| = \left|\overrightarrow{\tilde{x}_{(1)}\tilde{x}_{(2)}}\right|$，即两质点间的距离为客观量。此外，温度、质量和质量密度也均为客观量。

2. 矢量（场）的客观性

设 χ 与 $\tilde{\chi}$ 为任意两个等价的运动。设有某物理量（如力）为矢量，它在构形 $\boldsymbol{\varkappa}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}(t)$ 中分别为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$和 $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X},t)$。若对于任意的 $\boldsymbol{X}$ 与 t，它们之间满足关系式

---

1) 我们假定 $\boldsymbol{Q}(t)$为正常正交张量，即行列式 $|\boldsymbol{Q}| = 1$。因此 $\boldsymbol{Q}(t)$表示刚体旋转，而不包括镜面反射。

2) 如果物理量不仅随时间 t 而变化，还依赖于质点，则称为“场”

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t) \tag{5.9}$$

则称 $\boldsymbol{u}$ 为客观矢量。(5.9)是客观矢量的标架转换关系。设 $\boldsymbol{u}$ 在 Euler 直角坐标系中的分解式为

$$\boldsymbol{u}=u_i(X_A,t)\boldsymbol{e}_i \tag{5.10a}$$

代入(5.9)得到

$$\tilde{\boldsymbol{u}}=u_i(X_A,t)\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) \tag{5.10b}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{e}_i \tag{5.10c}$$

(5.9)式表明客观矢量 $\boldsymbol{u}$ 跟着物体一起旋转。(5.10)式表明，如果把 Euler 直角坐标轴也跟着物体一起旋转，基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 旋转到 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$，则 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 在 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ 中的分量与 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 中的分量相同，即 $\tilde{\boldsymbol{u}}=\tilde{u}_i(X_A,t)\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$，$\tilde{u}_i(X_A,t)=u_i(X_A,t)$。(5.10)与(5.9)是矢量客观性标准的等价表述。

由(5.3)式可知，矢径不是客观量，但任意两点矢径之差是客观的，即

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}_2-\tilde{\boldsymbol{x}}_1)=\boldsymbol{Q}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1) \tag{5.11}$$

此外，面元的单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 也是客观的，今后我们假定物体受的力也跟着物体一起旋转，因此是客观的。由速度的定义(2.1a)并利用(5.3)式，有

$$\tilde{\boldsymbol{v}}=\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{b}}(t)+\dot{\boldsymbol{Q}}(t)\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)+\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t) \tag{5.12}$$

分量形式

$$\tilde{v}_i=\dot{b}_i(t)+\dot{Q}_{ij}(t)x_j(X_A,t)+Q_{ij}(t)v_j(X_A,t) \tag{5.13}$$

显然，速度不是客观量，加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$ 也不是客观量。

3. 张量（场）的客观性

设 χ 与 $\tilde{\chi}$ 为任意两个等价的运动。设有某物理量（如应力）为二阶张量，它在构形 $\boldsymbol{\varkappa}(t)$ 中为 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{X},t)$，在构形 $\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}(t)$ 中为 $\tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{X},t)$。若对于任意的 $\boldsymbol{X}$ 与 t，有

$$\tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.14}$$

则称 $\boldsymbol{c}$ 为客观张量。(5.14)是客观张量的标架转换关系，式中 $[\boldsymbol{Q}(t)]^{\mathrm{T}}$ 记作 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)$。若 $\boldsymbol{c}$ 在 Euler 直角坐标系中的分解式为

$$\boldsymbol{c}=c_{ij}(X_A,t)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{5.15a}$$

将(5.15a)代入(5.14)，得到

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = c_{ij}(X_A,t)\ \tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)\ \tilde{\boldsymbol{e}}_j(t) \tag{5.15b}$$

其中$\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$见(5.10c)。(5.15)式表明，如果把 Euler 直角坐标轴也跟着物体一起旋转，则$\tilde{\boldsymbol{c}}$在$\tilde{\boldsymbol{e}}_i$中的分量与$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{e}_i$中的分量相同，即$\tilde{\boldsymbol{c}} = \tilde{c}_{ij}(X_A,t)\ \tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)\ \tilde{\boldsymbol{e}}_j(t)$，$\tilde{c}_{ij}(X_A,t) = c_{ij}(X_A,t)$。(5.14)与(5.15)为张量客观性标准的等价表述。(5.14)式右端的“$\boldsymbol{Q}(t)\cdot$”表示对$\boldsymbol{c}$的前矢量作正交变换，将$\boldsymbol{e}_i$变换为$\tilde{\boldsymbol{e}}_i$，而“$\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)$”则表示对$\boldsymbol{c}$的后矢量作正交变换，将$\boldsymbol{e}_j$变换为$\tilde{\boldsymbol{e}}_j$。我们称所得到的张量$\tilde{\boldsymbol{c}}$为$\boldsymbol{c}$的正交变换。容易证明，客观张量具有一系列的性质，例如

(1) 若$\boldsymbol{c}$为客观张量，则行列式$\det \boldsymbol{c}$（或记为$|\boldsymbol{c}|$）为客观标量；

(2) 若$\boldsymbol{c}$为客观张量，则$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}^{-1}$，$\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}$，以及$\boldsymbol{c}^n = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\cdots\boldsymbol{c}$等亦为客观张量[1]。

(3) 若$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$为客观张量，则$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}$为客观张量，$\boldsymbol{c}:\boldsymbol{d}$为客观标量，等等。

(4) 设$\boldsymbol{c}$为张量。若对于任意的客观矢量$\boldsymbol{n}$，由下式

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} \tag{5.16}$$

计算所得的$\boldsymbol{m}$均为客观矢量，则$\boldsymbol{c}$必为客观张量。

证 对于运动χ，由(5.16)计算$\boldsymbol{m}$，而对于运动$\tilde{\chi}$，则有

$$\tilde{\boldsymbol{c}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} = \tilde{\boldsymbol{m}} \tag{5.16$'$}$$

因$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$为客观矢量，故对于任意的正交张量$\boldsymbol{Q}(t)$，由(5.9)有

$$\tilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{n}, \qquad \tilde{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{m} \tag{5.17}$$

将(5.17)代入(5.16)′，并进行$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\cdot$的运算，得

$$\left[\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\tilde{\boldsymbol{c}}\cdot\boldsymbol{Q}(t)\right]\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} \tag{5.18}$$

对比(5.18)与(5.16)，由于$\boldsymbol{n}$为任意，必有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\tilde{\boldsymbol{c}}\cdot\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{c}$$

即

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.19}$$

(5.19)就是客观张量的标架转换关系(5.14)，因此$\boldsymbol{c}$为客观张量。

现在把上述性质(4)用于作用在任何以$\boldsymbol{n}$为单位法向矢量的面元上的应力矢量$\boldsymbol{\sigma}_n$。由(3.4)式，对于任意的$\boldsymbol{n}$有

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}_n \tag{5.20}$$

---

1) 设对于等价运动，点积、转置、求逆等运算关系仍成立，即$\widetilde{(\boldsymbol{c}^2)} = (\tilde{\boldsymbol{c}})^2$，$\widetilde{(\boldsymbol{c}^n)} = (\tilde{\boldsymbol{c}})^n$，$\widetilde{(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})} = (\tilde{\boldsymbol{c}})^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{(\boldsymbol{c}^{-1})} = (\tilde{\boldsymbol{c}})^{-1}$。

前面已提到，面元单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 为客观矢量。今后如果假定χ运动中位于 x 处的质点附近面元所受的应力矢量$\boldsymbol{\sigma}_n$跟着刚体运动一起旋转到$\tilde{\chi}$运动中位于$\tilde{x}$处同一质点附近相应的面元上，即

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}_n \tag{5.21}$$

因此$\boldsymbol{\sigma}_n$是客观矢量。由上述性质(4)，Cauchy 应力$\boldsymbol{\sigma}$，因而 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$必是客观的：

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} &= \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{5.22}$$

在连续介质力学中还有另一种完全不同的关于客观性的定义，称之为 Hill 客观性。若对于图 3-9 所示任意两个等价的运动χ与$\tilde{\chi}$，某物理量（例如标量f、张量$\boldsymbol{U}$，见下面的例 2，(5.28)）的值相同，即

$$\tilde{f} = f,\quad \tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} \tag{5.23}$$

则称该物理量为 Hill 客观。将(5.23)与 Truesdell 的客观性条件(5.8)，(5.9)，(5.14)比较，可见只有对于标量，两种客观性的定义是一致的（见(5.23)，与(5.8)）。二阶单位张量 $\mathbf{1}$ 既是 Truesdell 客观又是 Hill 客观。

下面来考虑一些张量的客观性。

例 1 变形梯度 $\boldsymbol{F}$

由线元变换公式(1.12a)，对于运动χ与$\tilde{\chi}$分别有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{5.24a}$$

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{5.24b}$$

由图 3-9 与(5.11)，显然线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是客观的，即

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{5.25}$$

将(5.25) $\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}$ 代入(5.24b)，得

$$\boldsymbol{Q}(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

再将(5.24a)$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 代入，并注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 为任意的线元矢量，故有

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{F} \tag{5.26}$$

由(5.26)可见 $\boldsymbol{F}$ 不满足客观张量的标架转换关系(5.14)，因此不是客观张量。事实上，(5.26)类似于客观矢量的标架转换关系(5.9)，这是因为 $\boldsymbol{F}$ 是两点张量，其前矢量在即时构形$\mathscr{R}(t)$中，而后矢量却在初始构形$\mathscr{R}(t_0)$中。由(5.26)，可得$\tilde{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{F}}^{-1}$，$\tilde{\boldsymbol{F}}^{-\mathrm{T}}$的标架转换关系：

$$\tilde{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t),\quad \tilde{\boldsymbol{F}}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t),\quad \tilde{\boldsymbol{F}}^{-\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{5.26$'$}$$

例 2 右 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$，极分解正交张量 $\boldsymbol{R}$

由(1.14)与(1.16)式，对于运动χ与运动 $\tilde{\chi}$ 分别有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}^2 \tag{5.27a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}=\tilde{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\cdot\tilde{\boldsymbol{F}}=\tilde{\boldsymbol{U}}^2 \tag{5.27b}$$

将例 1 中的(5.26) $\tilde{\boldsymbol{F}}$ 式代入(5.27b)，可得

$$\tilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C},\quad \tilde{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{U} \tag{5.28}$$

因此右 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$ 与右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 不是这里所定义的客观张量，而是 Hill 客观张量。它们是初始构形 $\mathscr{R}(t_0)$中的张量，在 Lagrange 标架中的分解式各见(1.15)与(1.17)，其中 $\underset{\Gamma}{\lambda}$ 与 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}$ 都依赖于 $\boldsymbol{X}$ 与 t。这分解式既适用于运动χ也适用于运动 $\tilde{\chi}$ 。从运动χ到运动 $\tilde{\chi}$ 的正交张量 $\boldsymbol{Q}(t)$所起的作用只是把运动χ的 Euler 标架 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}(\gamma=1,2,3)$ 旋转到运动 $\tilde{\chi}$ 的 Euler 标架 $\underset{\gamma}{\tilde{\boldsymbol{n}}}(\gamma=1,2,3)$ ：

$$\underset{\gamma}{\tilde{\boldsymbol{n}}}=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}\qquad(\gamma=1,2,3) \tag{5.29}$$

而不影响 $\mathscr{R}(t_0)$构形中的 Lagrange 标架 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$ 。由(1.13a)，并注意(1.34)，对运动χ与运动 $\tilde{\chi}$ 分别有

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} \tag{5.30a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1} \tag{5.30b}$$

将(5.26) $\tilde{\boldsymbol{F}}$ 与$(5.28)_2\tilde{\boldsymbol{U}}$ 代入(5.30b)，并利用(5.30a)，可证

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{R} \tag{5.31}$$

因此，$\boldsymbol{R}$ 的标架转换关系(5.31)同变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的标架转换关系(5.26)一样，$\boldsymbol{R}$ 也不是客观张量。同 $\boldsymbol{F}$ 一样，$\boldsymbol{R}$ 也是两点张量（见(1.34)）。

例 3 左 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{B}$、Cauchy 变形张量 $\boldsymbol{c}$，左伸长张量 $\boldsymbol{V}$

利用它们的定义式(1.28)，(1.13b)，易证 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 都是客观张量。它们都是构形 $\kappa(t)$中的张量（见(1.30)，(1.29)，(1.32)）。

例 4 速度梯度 $\boldsymbol{l}$，变形率 $\boldsymbol{d}$ 与旋率 $\boldsymbol{w}$

由(2.7)′，对运动χ与运动 $\tilde{\chi}$ 分别有

$$\boldsymbol{l}=\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} \tag{5.32a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{l}}=\dot{\tilde{\boldsymbol{F}}}\cdot\tilde{\boldsymbol{F}}^{-1} \tag{5.32b}$$

由(5.26)，对时间 t 求物质导数，得

$$\dot{\tilde{F}} = Q(t)\cdot\dot{F} + \dot{Q}(t)\cdot F \tag{5.33}$$

仿照(2.24)，(2.26)或(2.27)，定义图 3-9 所示运动χ到运动$\tilde{\chi}$之间的转动旋率$\boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)$如下，称为等价运动标架旋率（或简称标架旋率）：

$$\boldsymbol{\Omega}^{Q}(t) = \dot{Q}(t)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.34}$$

将(5.34)代入(5.33)，得

$$\dot{\tilde{F}} = Q(t)\cdot\dot{F} + \boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)\cdot Q(t)\cdot F \tag{5.33$'$}$$

将(5.33)′ $\dot{\tilde{F}}$与(5.26)$\tilde{F}$代入(5.32b)，利用(5.32a)，最后得到速度梯度$\boldsymbol{l}$的标架转换关系：

$$\tilde{l} = Q(t)\cdot l\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^{Q}(t) \tag{5.35}$$

与(5.14)的形式对比，(5.35)右端多出一项标架旋率$\boldsymbol{\Omega}^{Q}(t)$。由(2.4)，对于运动$\tilde{\chi}$，有

$$\tilde{d} = \frac{1}{2}\left(\tilde{l} + \tilde{l}^{\mathrm{T}}\right), \qquad \tilde{w} = \frac{1}{2}\left(\tilde{l} - \tilde{l}^{\mathrm{T}}\right) \tag{5.36}$$

将(5.35)代入(5.36)，得

$$\tilde{d} = Q(t)\cdot d\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.37}$$

$$\tilde{w} = Q(t)\cdot w\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^{Q}(t) \tag{5.38}$$

由(5.37)，变形率$\boldsymbol{d}$是客观张量。物质旋率$\boldsymbol{w}$的标架转换关系(5.38)的形式与速度梯度$\boldsymbol{l}$的(5.35)形式一样，所以也不是客观张量。由(5.35)，(5.38)等易证，所有满足这种标架转换关系的张量，都有等式：

$$\tilde{l}\cdot Q(t) - Q(t)\cdot l = \dot{Q}(t) \tag{5.39a}$$

$$\tilde{w}\cdot Q(t) - Q(t)\cdot w = \dot{Q}(t) \tag{5.39b}$$

例 5 相对旋率$\boldsymbol{\Omega}$（见(2.27)）

由(2.27)，对运动χ与运动$\tilde{\chi}$分别有（略去自变量 t）

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{R}\cdot R^{\mathrm{T}} \tag{5.40a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\tilde{R}}\cdot\tilde{R}^{\mathrm{T}} \tag{5.40b}$$

利用$\boldsymbol{R}$的标架转换关系(5.31)及其物质导数，易证

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = Q(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^{Q}(t) \tag{5.41}$$

因此相对旋率$\boldsymbol{\Omega}$不是客观张量，它也服从与(5.35)$\boldsymbol{l}$及(5.38)$\boldsymbol{w}$同一形式的标架转换关系，类似(5.39a,b)也有

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\boldsymbol{Q}(t)-\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}-\dot{\boldsymbol{Q}}(t) \tag{5.42}$$

例 6 任何二阶对称客观张量 $\boldsymbol{b}$ 的主方向 $\left(\underset{1}{\boldsymbol{n}}^b,\underset{2}{\boldsymbol{n}}^b,\underset{3}{\boldsymbol{n}}^b\right)$ 的旋率

因设 $\boldsymbol{b}$ 为对称，故必有三个互相正交的主方向，记作 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^b(\gamma=1,2,3)$。因 $\boldsymbol{b}$ 为客观，服从标架转换关系(5.14)，类似于(5.29)式，正交张量 $\boldsymbol{Q}(t)$ 把运动 χ 中的 $\boldsymbol{b}$ 张量主方向 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^b$ 旋转到运动 $\widetilde{\chi}$ 中的 $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ 张量主方向 $\underset{\gamma}{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^b$：

$$\underset{\gamma}{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^b=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^b \qquad (\gamma=1,2,3) \tag{5.43}$$

类似于(2.23)~(2.26)，定义 $\boldsymbol{\Omega}^b(t)$ 为构形 κ 中 $\boldsymbol{b}$ 的主方向标架 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^b$ 旋转的旋率，即对于运动 χ 与运动 $\widetilde{\chi}$ 分别有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^b=\boldsymbol{\Omega}^b(t)\cdot\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^b \qquad (\gamma=1,2,3) \tag{5.44a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{\gamma}{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^b=\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^b(t)\cdot\underset{\gamma}{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^b \qquad (\gamma=1,2,3) \tag{5.44b}$$

(5.43)对时间求物质导数，并利用(5.34)与(5.44a,b)，可得

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^b\cdot\underset{\gamma}{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^b=\left[\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}^b\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^Q\right]\cdot\underset{\gamma}{\widetilde{\boldsymbol{n}}}^b \qquad (\gamma=1,2,3)$$

因此

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^b=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}^b\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^Q(t) \tag{5.45}$$

$\boldsymbol{b}$ 的主方向标架 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}^b$ 的旋率 $\boldsymbol{\Omega}^b$，和相对旋率(5.41)$\boldsymbol{\Omega}$式一样，也不是客观张量，也服从与(5.35)$\boldsymbol{l}$ 及(5.38)$\boldsymbol{w}$ 同一形式的标架转换关系。因此，类似于(5.39a,b)与(5.42)也有等式

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^b\cdot\boldsymbol{Q}(t)-\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}^b=\dot{\boldsymbol{Q}}(t) \tag{5.46}$$

作为特例，取 $\boldsymbol{b}$ 为例 3 的 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{V}$，它们的主方向标架就是 Euler 标架（见(1.30)，(1.29)，(1.32)）。于是(5.45)，(5.46)各成为

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Eul}}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^Q(t) \tag{5.47}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{Eul}}\cdot\boldsymbol{Q}(t)-\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Eul}}=\dot{\boldsymbol{Q}}(t) \tag{5.48}$$

若取 $\boldsymbol{b}$ 为变形率 $\boldsymbol{d}$ 客观张量，（见例 4(5.37)），则其主方向标架就是变形率标架（见(2.10)），(5.45)，(5.46)各成为

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^d = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}^d\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^Q(t) \tag{5.49}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^d\cdot\boldsymbol{Q}(t)-\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Omega}^d=\dot{\boldsymbol{Q}}(t) \tag{5.50}$$

例 7 Cauchy 应力张量$\boldsymbol{\sigma}$，第一类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{P}$，第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{T}$

前已证明，如果假定作用于构形 κ 中面元的应力矢量$\boldsymbol{\sigma}_n$为客观矢量，则 Cauchy 应力$\boldsymbol{\sigma}$和 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$为客观张量（见(5.22)）。

对于运动χ与运动$\tilde{\chi}$，由(3.11)与(3.16)，分别有

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{\ \mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{5.51}$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}=\tilde{\boldsymbol{\tau}}\cdot\tilde{\boldsymbol{F}}^{-\mathrm{T}},\qquad \tilde{\boldsymbol{T}}=\tilde{\boldsymbol{F}}^{-1}\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}}\cdot\tilde{\boldsymbol{F}}^{-\mathrm{T}} \tag{5.52}$$

因$\boldsymbol{\tau}$为客观张量（见(5.22)），利用变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的标架转换关系(5.26)以及(5.51)，由(5.52)可得 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 的标架转换关系：

$$\tilde{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{P} \tag{5.53}$$

$$\tilde{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{T} \tag{5.54}$$

(5.53)说明第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{P}$ 不是客观张量。$\boldsymbol{P}$ 是两点张量（见(3.9)），满足类似于客观矢量的标架转换关系(5.53)。(5.54)说明第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 不是客观张量，而是 Hill 客观张量。

3.5.2 张量的客观率（或客观导数）

假定二阶张量$\boldsymbol{\zeta}$是客观的，其标架转换关系如(5.14)：

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(X,t)=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\zeta}(X,\mathrm{t})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.55}$$

上式对时间 t 求物质导数，并略去自变量 X，t 不写，得

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}=\boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{\zeta}}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\zeta}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}} \tag{5.56}$$

我们现在来研究如何构造$\boldsymbol{\zeta}$的客观导数（或称客观率）。有一类张量，记作$*$，如速度梯度 $\boldsymbol{l}$（见(5.35)），物质旋率 $\boldsymbol{w}$（见(5.38)），相对旋率$\boldsymbol{\Omega}$（见(5.41)），任何二阶对称张量 $\boldsymbol{b}$ 的主方向标架的旋率$\boldsymbol{\Omega}^b$（见(5.45)）等，它们不是客观张量，但它们的标架转换关系均为以下相同的形式：

$$\tilde{*}=\boldsymbol{Q}(t)\cdot *\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^Q(t)\qquad (*=\boldsymbol{l},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega}^b\text{等}) \tag{5.57}$$

它们也都满足由(5.57)可导出的下列关系式(见(5.39a)，(5.39b)，(5.42)，(5.46)等)：

$$\tilde{*}\cdot\boldsymbol{Q}(t)-\boldsymbol{Q}(t)\cdot *=\dot{\boldsymbol{Q}}(t)\qquad (*=\boldsymbol{l},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega}^b\text{等}) \tag{5.58}$$

将(5.58)及其转置各代入(5.56)式右端第二项的$\dot{\boldsymbol{Q}}$与第三项的$\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}$，利用$\boldsymbol{\zeta}$的客观性(5.55)式，并移项后得

$$\dot{\tilde{\zeta}}-\tilde{*}\cdot\tilde{\zeta}-\tilde{\zeta}\cdot\tilde{*}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\left[\dot{\zeta}-*\cdot\zeta-\zeta\cdot*^{\mathrm{T}}\right]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.59}$$

记$\zeta^{\mathrm{obj}}[*]$如下式，称为ζ相对于速度场$*$（或简称为ζ相对于$*$）的客观导数（或客观率）

$$\zeta^{\mathrm{obj}}[*]=\dot{\zeta}-*\cdot\zeta-\zeta\cdot*^{\mathrm{T}} \qquad (*=\boldsymbol{l},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega}^{b}\text{等}) \tag{5.60a}$$

$$\tilde{\zeta}^{\mathrm{obj}}[\tilde{*}]=\dot{\tilde{\zeta}}-\tilde{*}\cdot\tilde{\zeta}-\tilde{\zeta}\cdot\tilde{*}^{\mathrm{T}} \qquad (*=\boldsymbol{l},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega}^{b}\text{等}) \tag{5.60b}$$

则(5.59)式可写作

$$\tilde{\zeta}^{\mathrm{obj}}[\tilde{*}]=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\zeta^{\mathrm{obj}}[*]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \qquad (*=\boldsymbol{l},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega}^{b}\text{等}) \tag{5.61}$$

(5.61)式表明$\zeta^{\mathrm{obj}}[*]$是客观张量。

取$*=\boldsymbol{l}$，得 Oldroyd 客观率：

$$\zeta^{\mathrm{Oldr}}=\dot{\zeta}-\boldsymbol{l}\cdot\zeta-\zeta\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tag{5.62}$$

(5.62)式的物理意义如下：假设有一个观察者某甲，他不能感觉到(2.8)式$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\bullet}=\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$所表示的线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的变化，或者换句话说，某甲不能感觉到如图 3-7 与(3.20)式所示的基矢量$\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}},\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}},\boldsymbol{e}_{\mathrm{III}}$随这物体一起运动（变形）到$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{I}},\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{II}},\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{III}}$的变化。设张量$\zeta$按照嵌入于物体之中并随物体一起运动（变形）的基矢量$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{I}},\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{II}},\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{III}}$的分解式为

$$\zeta=\sum_{I,J}\hat{\zeta}_{IJ}\hat{\boldsymbol{e}}_{I}\hat{\boldsymbol{e}}_{J} \tag{5.63}$$

在(5.63)式中，观察者某甲所能感受到的只是分量$\hat{\zeta}_{IJ}$的变化。(5.63)对时间 t 求物质导数为

$$\dot{\zeta}=\sum_{I,J}\left[\frac{\mathrm{d}\hat{\zeta}_{IJ}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_{I}\hat{\boldsymbol{e}}_{J}+\hat{\zeta}_{IJ}\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_{I}\hat{\boldsymbol{e}}_{J}+\hat{\zeta}_{IJ}\hat{\boldsymbol{e}}_{I}\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_{J}\right] \tag{5.64}$$

由线元物质导数公式(2.8)，可知

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_{\Gamma}=\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_{\Gamma} \qquad (\Gamma=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}) \tag{5.65}$$

将(5.65)代入(5.64)，得

$$\dot{\zeta}=\sum_{I,J}\left[\frac{\mathrm{d}\hat{\zeta}_{IJ}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_{I}\hat{\boldsymbol{e}}_{J}\right]+\boldsymbol{l}\cdot\zeta+\zeta\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}$$

代入(5.62)，可见

$$\zeta^{\mathrm{Oldr}}=\sum_{I,J}\frac{\mathrm{d}\hat{\zeta}_{IJ}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_{I}\hat{\boldsymbol{e}}_{J} \tag{5.66}$$

(5.66)式充分说明了 Oldroyd 导数的意义，它就是上述某甲所能感觉到的ζ的变化率。

如果$*$为某一旋率（例如 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega}^b$ 等），则$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{obj}}[*]$的物理意义是对于一个随着该旋率$*$一起旋转（因而不能感觉到该旋率$*$）的观察者所能感受到的$\boldsymbol{\zeta}$的变化率。取$*$为物质旋率$\boldsymbol{w}$，得到$\boldsymbol{\zeta}$的 Jaumann 客观率（或简称 Jaumann 率）：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{obj}}[\boldsymbol{w}] = \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{w} \tag{5.67}$$

取$*$为相对旋率$\boldsymbol{\Omega}$，得到$\boldsymbol{\zeta}$的广义 Jaumann 率：

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{obj}}[\boldsymbol{\Omega}] = \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{5.68}$$

取$*$为变形率标架旋率$\boldsymbol{\Omega}^d$，得到

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{obj}}[\boldsymbol{\Omega}^d] = \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{\Omega}^d\cdot\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}\cdot\left(\boldsymbol{\Omega}^d\right)^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{\Omega}^d\cdot\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\Omega}^d \tag{5.69}$$

下面以受单向拉伸的杆为例说明张量客观导数的意义。

设有一杆件受轴向均匀拉应力 k 的作用，如图 3-10 所示。保持 k 值不变，但整个杆件在图示平面内以角速度ω作等速逆时针刚性转动。在本例中$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\Omega}$。取$\boldsymbol{\zeta}$为 Cauchy 应力$\boldsymbol{\sigma}$即

$$\boldsymbol{\sigma} = k\,\underset{1}{\boldsymbol{n}}\,\underset{1}{\boldsymbol{n}} \tag{5.70}$$

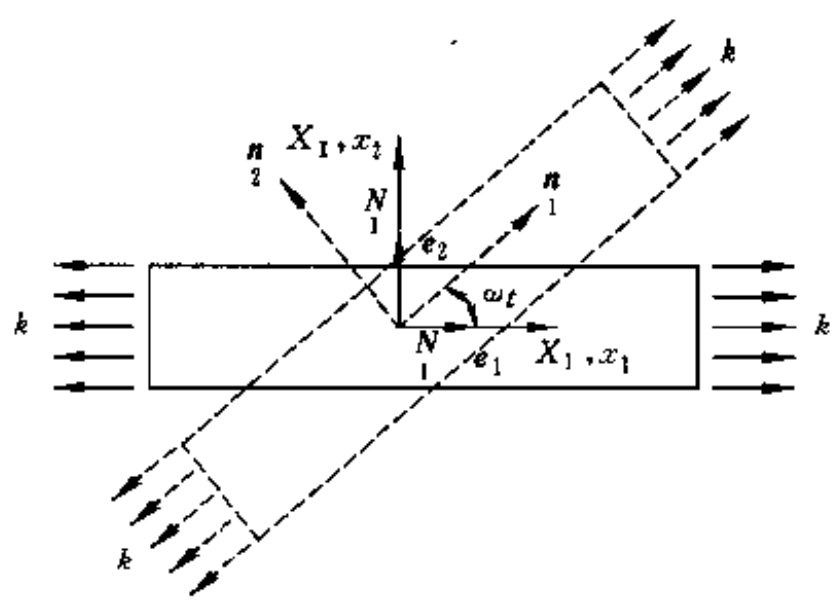


图 3-10　旋转中的单向拉伸

式中$\underset{1}{\boldsymbol{n}}$为 Euler 标架中沿杆轴方向的单位矢量：

$$\underset{1}{\boldsymbol{n}} = \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\omega t\,\boldsymbol{e}_2 \tag{5.71}$$

(5.71)代入(5.70)，则

$$\boldsymbol{\sigma} = k\left[\cos^2 \omega t\, \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \sin^2 \omega t\, \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \sin \omega t \cos \omega t \left(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\right)\right] \tag{5.72}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \omega k\left[-\sin 2\omega t\, \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \sin 2\omega t\, \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \cos 2\omega t \left(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\right)\right] \neq 0 \tag{5.73}$$

由(5.73)，$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \neq 0$，但杆件受力情况沿杆轴单向拉伸 k 值并无变化。这说明物质导数 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 不能描述应力状态的变化。以下我们来计算 Jaumann 导数 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$。$x(x_1, x_2)$点的速度为

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2, \quad v_1 = -x_2\omega, \quad v_2 = x_1\omega$$

速度梯度 $\boldsymbol{l}$，变形率 $\boldsymbol{d}$ 与旋转率 $\boldsymbol{w}$ 各为

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}\nabla = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = -\omega\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \omega\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{l} = -\omega\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \omega\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 \tag{5.74}$$

利用(5.72)和(5.74)式有

$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \omega k\left[-\boldsymbol{e}_1\left(\sin \omega t \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin^2 \omega t\, \boldsymbol{e}_2\right) + \boldsymbol{e}_2\left(\cos^2 \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin \omega t \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_2\right)\right] \tag{5.75}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{w} = \omega k\left[\left(\sin \omega t \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin^2 \omega t\, \boldsymbol{e}_2\right)\boldsymbol{e}_1 - \left(\cos^2 \omega t\, \boldsymbol{e}_1 + \sin \omega t \cos \omega t\, \boldsymbol{e}_2\right)\boldsymbol{e}_2\right] \tag{5.76}$$

由(5.73)，(5.75)，(5.76)得

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

Cauchy 应力的 Jaumann 导数 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{0}$ 说明杆中材料的应力状态没有变化。

利用相对旋率 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 的定义式(2.27)可以证明有关广义 Jaumann 率(5.68)的一个等式：

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{R})^{\bullet}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{5.77}$$

(5.77)给出广义 Jaumann 导数 $\overset{\Delta}{\boldsymbol{\zeta}}$ 的另一解释，即将 $\mathscr{P}(t)$ 构形中的 $\boldsymbol{\zeta}$ 先转到 $\mathscr{R}(t_0)$ 构形，成为 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{R}$，求物质导数，然后再转回到 $\mathscr{P}(t)$ 构形。

3.5.3 本构理论的客观性原理

在连续介质力学中，关于本构理论有许多原理要遵循，其中有：

坐标不变性原理 任何一个物理过程与所选用描述它的坐标系无关。如果采用张量的抽象记法描述，则坐标不变性自然满足。

应力确定性原理 物体所受的应力只取决于它过去的全部运动（变形）历史，而与将来的运动（变形）无关。

局部作用原理 假设 X 点的应力只与 X 点附近无限小邻域的运动状态有关。例如在虎克定律中，一点的应力就只与该点的应变有关。

目前有人正在研究非局部理论，即认为一点的应力与其附近一个有限大邻域的运动有关。有人想用这种办法得到断裂力学中裂纹尖端非奇异的应变和应力。

作为局部作用原理和应力确定性原理应用的一个特例，我们进一步假定，$\boldsymbol{X}$ 点在 t 时刻的应力$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)$只取决于 $\boldsymbol{X}$ 点在 t 时刻以前的变形梯度 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau)$，$-\infty \leqslant \tau \leqslant t$，即

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau),\ -\infty \leqslant \tau \leqslant t) \tag{5.78}$$

其中 f 为材料泛函。(5.78)式就是以变形梯度 F 为自变量、以应力为响应的最一般泛函形式的本构关系。本构关系符合(5.78)式的材料称为简单材料（此处暂不考虑温度）。由(1.11a)简单材料也就是应力依赖于 $\dfrac{\partial x_i}{\partial X_A}$ 的材料。局部作用原理也可以包括应力依赖于 $\dfrac{\partial x_i}{\partial X_A}$，$\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial X_A \partial X_B}$ 直至 $\dfrac{\partial^n x_i}{\partial X_{A_1}\partial X_{A_2}\cdots\partial X_{A_n}}$ 的材料，分别称为一阶、二阶直至 n 阶材料。简单材料是 n=1 的特例。尽管如此，它仍是很广泛的一类材料。

客观性原理

客观性原理又称标架无差异原理（frame indifference principle），它最简单的表述是：

Cauchy 应力$\boldsymbol{\sigma}$是客观张量

在图 3-9 所示的两个等价运动χ与 $\tilde{\chi}$ 中，同一 X 质点在构形 $\kappa(t)$ 与 $\tilde{\kappa}(t)$ 中占有的位置分别记为 x 与 $\tilde{x}$。由于运动（变形）χ与 $\tilde{\chi}$ 所引起于 x 与 $\tilde{x}$ 点的 Cauchy 应力分别记为 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X},t)$，则客观性原理的数学表示式为：

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.79}$$

(5.79)式说明 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X},t)$ 是 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)$ 的正交变换。正交变换的张量 $\boldsymbol{Q}(t)$就是图 3-9 所示从运动χ到运动 $\tilde{\chi}$ 之间在 t 时刻的转动张量，而与在 t 时刻以前的转动张量 $\boldsymbol{Q}(\tau)$ ($\tau<t$)无关。换句话说，无论在 t 时刻以前的 $\boldsymbol{Q}(\tau)$ ($\tau<t$)是时间 τ的什么样函数，如果知道运动χ中 X 质点在 t 时刻的 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)$，只要用同一时刻 t 的 $\boldsymbol{Q}(t)$就可以由(5.79)计算运动 $\tilde{\chi}$ 中同一质点 X 在该时刻 t 的 Cauchy 应力 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X},t)$。由前面节 3.5.1 所述客观张量性质(4)及由(5.21)到(5.22)的推导可知，客观性原理实质上就是说面元上的应力矢量$\boldsymbol{\sigma}_n$是客观矢量。

事实上，人们在日常生活中已经习以为常地承认这个客观性原理。设想有一个弹簧在 t_0 时刻初始长度为 l_0。沿弹簧方向在变化力 $\sigma(t)$作用下弹簧长度变化为 $l(t)$。这个弹簧由 $l(t)$所描述的沿自身方向的运动称为 χ（见图 3-9）。现在假设弹簧在长度 $l(t)$这一变化的同时，还作按 $\boldsymbol{Q}(t)$所描述的旋转，如图 3-11 的虚线所示。这一与 χ 等价的运动称为 $\tilde{\chi}$（见图 3-9）。那么按客观性原理，在等价运动 $\tilde{\chi}$ 中 t 时刻的弹簧拉力 $\tilde{\sigma}(t)$可由 χ 运动中 t 时刻的弹簧拉力 $\sigma(t)$经过与弹簧同一时刻 t 的旋转 $\boldsymbol{Q}(t)$而得到，而不必顾及弹簧在 t_0 与 t 时刻中间 $t_0 \leqslant \tau < t$ 是如何旋转的（即不必顾及 $\boldsymbol{Q}(\tau)$如何）。

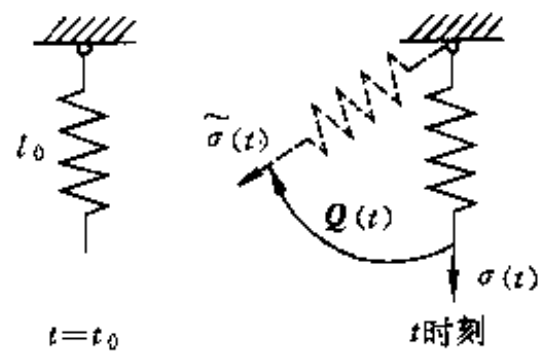


图 3-11　客观性原理的说明

现在来研究客观性原理(5.79)式对本构关系(5.78)式中的材料泛函 $\boldsymbol{f}$ $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\ t))$ 提出了什么要求。由(5.78)式，对运动χ与运动$\tilde{\chi}$，Cauchy 应力分别为[1)]

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau),\ \tau\leqslant t) \tag{5.80a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},\tau),\ \tau\leqslant t) \tag{5.80b}$$

以上两式右端的$\boldsymbol{f}$是同一材料泛函，而自变量则是两个等价运动χ与$\tilde{\chi}$的变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{F}}$。$\boldsymbol{F}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{F}}$ 的关系见(5.26)。将(5.80a 与 b)代入(5.79)，得到

$$\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t)=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.81}$$

式中由(5.26)

$$\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},\tau)=\boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{F}(\mathbf{X},\tau),\qquad \tau\leqslant t \tag{5.82}$$

应特别指出，这里的正交张量 $\boldsymbol{Q}(\tau)$是时间τ的任意函数。对 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau)$进行(1.13a)式所表示的右极分解

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\tau)\cdot\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau),\qquad \tau\leqslant t \tag{5.83}$$

既然(5.82)式中的 $\boldsymbol{Q}(\tau)$是任意的，可以参考(5.83)式，故意选择 $\boldsymbol{Q}(\tau)$就是我们所研究的 X 质点的 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\tau)$的转置(逆)，即

$$\boldsymbol{Q}(\tau)=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X},\tau),\qquad \tau\leqslant t \tag{5.84}$$

于是，(5.82)式成为

$$\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},\tau)=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau),\qquad \tau\leqslant t \tag{5.85}$$

(5.84)与(5.85)的物理意义如下：在图 3-9 中我们把χ运动中构形 $\kappa(\tau)$在 X 质点处的 Euler 标架 $\underset{\gamma}{\boldsymbol{n}}(\gamma=1,2,3)$ 经过(5.84)式的旋转，使得旋转后所得 $\tilde{\chi}$ 运动中构形 $\tilde{\kappa}(\tau)$ 在同一 $\boldsymbol{X}$ 质点处同

1)　$-\infty\leqslant\tau\leqslant t$ 简写成 $\tau\leqslant t$

一时刻τ的 Euler 标架$\underset{\gamma}{\tilde{\boldsymbol{n}}}(\gamma=1,2,3)$恰好与初始构形 $\mathscr{R}(t_0)$中 X 质点处同一时刻τ的 Lagrange 标架$\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(\Gamma=\mathrm{I,II,III})$平行。因此在$\tilde{\chi}$运动中在 X 质点处每时每刻的变形梯度$\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},\tau)$只有变形$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau)$，而无转动。那么(5.81)式成为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t)=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X},\mathrm{t})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t)\cdot\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},t) \tag{5.86}$$

(5.86)式就是客观性原理所要求材料泛函$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t)$应满足的条件。利用(5.80a)，由(5.86)可解出

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X},t) \tag{5.87}$$

(5.87)有很重要的物理意义：欲求任何一个运动χ的变形梯度过程$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t$，所引起在 X 质点处 t 时刻的 Cauchy 应力$\boldsymbol{\sigma}(X,t)$，可以先让 X 质点处只发生纯变形过程$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t$,求出 t 时刻的应力$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t)$，然后令这个应力从 t 时刻的 Lagrange 标架旋转到 t 时刻的 Euler 标架。

将 Cauchy 应力$\boldsymbol{\sigma}(X,t)$(5.87)式与$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)$极分解(5.83)式(令$\tau=t$)代入(3.16)，可得第二类 P-K 应力$\boldsymbol{T}$。

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t)=J(\boldsymbol{X},t)\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t)\cdot\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{X},t) \tag{5.88}$$

式中由(1.41)，体积比J为（以$|\cdots|$表示张量直角坐标分量的行列式）

$$J(\boldsymbol{X},t)=\left|\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\right|=|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)|=|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},t)||\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)|=|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)|$$

以$\boldsymbol{g}$表示(5.88)的右端，$\boldsymbol{g}$只取决于$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)$，因此(5.88)可改写为

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t) \tag{5.89}$$

$\boldsymbol{g}$也是一个材料泛函。由前节 3.5.1 的例 2 $(5.28)_2$与例 7 (5.54)，$\boldsymbol{U}$与$\boldsymbol{T}$都是 Hill 客观张量。因此，(5.89)的形式对于运动χ与运动$\tilde{\chi}$完全相同。由(1.16)与(1.26)

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}^2-\mathbf{1}\right)$$

故本构方程(5.89)也可写作

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{g}^{(1)}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t) \tag{5.90}$$

(5.90)中$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{T}$是 Seth 应变度量$\boldsymbol{E}^{(n)}$与应力度量$\boldsymbol{T}^{(n)}$的特例n=1。以一般的 Seth 应变度量$\boldsymbol{E}^{(n)}$为自变量，有

$$\boldsymbol{T}^{(n)}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{g}^{(n)}(\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t) \tag{5.91}$$

而对于一般的 Hill 应变度量 $\mathscr{E}$（度量函数为 $f(\lambda)$），则有

$$\mathscr{T}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{I}^{f}(\mathscr{E}(\boldsymbol{X},\tau),\tau\leqslant t) \tag{5.92}$$

对于同一种材料，(5.91)中材料泛函 $\boldsymbol{g}^{(n)}$ 因 n 而异，(5.92)中的材料泛函 $\boldsymbol{I}^{f}$ 因度量函数 $f(\lambda)$ 而异。

3.6 Lagrange 嵌入（或随体）曲线坐标，张量的转移

3.6.1 Lagrange 嵌入曲线坐标系

在本章的前面几节中，我们采用了两套坐标系，即在构形 $\mathscr{R}$ 中的 Lagrange 直角坐标系 $\boldsymbol{X}_A$ 与构形 $\boldsymbol{\kappa}$ 中的 Euler 直角坐标系 x_i（见图 3-1），X_A 对应于质点，x_i 对应于空间位置。在本节中，我们只采用 Lagrange 嵌入坐标系 X^A (A = I, II, III)。如节 3.1 一开始就指出，即使 X^A 是初始构形 $\mathscr{R}$ 中的直角坐标，在即时构形 $\boldsymbol{\kappa}$ 中 X^A 不再是直角坐标了。因此我们索性假定 X^A 是初始构形 $\mathscr{R}$ 中的曲线坐标。由(1.1)式

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(X^{A}),\qquad A=\mathrm{I,II,III} \tag{6.1}$$

可得线元 d$\boldsymbol{X}$ 表达式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}X^{A}\boldsymbol{G}_{A} \tag{6.2}$$

以取代直角坐标系的(1.7)式，(6.2)式中 $\boldsymbol{G}_A$ 称为在构形 $\mathscr{R}$ 中坐标系 X^A 的协变基矢量：

$$\boldsymbol{G}_{A}=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial X^{A}},\qquad A=\mathrm{I,II,III} \tag{6.3}$$

$\boldsymbol{G}_A$ 表示坐标 X^A 每变化一个单位时矢径 $\boldsymbol{X}$ 的变化量，其方向沿 X^A 坐标曲线的切线方向。我们称坐标增量 dX^A 是线元矢量 d$\boldsymbol{X}$ 的逆变分量[1]。在构形 $\mathscr{R}$ 中的物质线元 d$\boldsymbol{X}$ 变形后变成构形 $\boldsymbol{\kappa}(t)$ 中的线元 d$\boldsymbol{x}$。可以有两种方法来表示线元 d$\boldsymbol{x}$：

1. 采用 Euler 曲线坐标系

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x^{i})\qquad i=1,2,3 \tag{6.4}$$

线元 d$\boldsymbol{x}$ 的表示式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x^{i}\boldsymbol{g}_{i} \tag{6.5}$$

以取代直角坐标系的(1.8)式。(6.5)式中 $\boldsymbol{g}_i$ 称为构形 $\boldsymbol{\kappa}$ 中 Euler 坐标系 x^i 的协变基矢量：

$$\boldsymbol{g}_{i}=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^{i}}\qquad i=1,2,3 \tag{6.6}$$

---

1) 注意在曲线坐标下，坐标 X^A 本身不是矢量的分量。

$\boldsymbol{g}_i$ 表示 Euler 坐标 x^i 每变化一个单位时矢径 $\boldsymbol{x}$ 的变化量，其方向沿 x^i 坐标曲线的切线方向。我们称 Euler 坐标增量 $\mathrm{d}x^i$ 是线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的逆变分量。当物体运动时，通过运动方程(1.5)，(1.6)把 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 联系起来：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) \\ x^i &= x^i(X^A,t) \end{aligned} \tag{6.7}$$

2. 采用 Lagrange 嵌入曲线坐标系 X^A

对于一定的时刻 t，x^i 与 X^A 之间满足$(6.7)_2$的关系。我们把$(6.7)_2$看作是对于一定时刻 t，坐标 x^i 与 X^A 之间的转换关系，对构形 $\mathscr{R}(t)$也采用 X^A 为坐标。因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}X^A \hat{\boldsymbol{g}}_A \tag{6.8}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{g}}_A$ 称为构形 $\mathscr{R}$ 中 Lagrange 嵌入坐标系 X^A 的协变基矢量：

$$\hat{\boldsymbol{g}}_A = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial X^A}, \qquad A = \mathrm{I,II,III} \tag{6.9}$$

构形 $\mathscr{R}$ 中协变基 $\boldsymbol{g}_i$ 与 $\hat{\boldsymbol{g}}_A$ 之间满足坐标转换关系：

$$\hat{\boldsymbol{g}}_A = \frac{\partial x^i}{\partial X^A}\boldsymbol{g}_i, \qquad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial X^A}{\partial x^i}\hat{\boldsymbol{g}}_A \tag{6.10}$$

指出一个重要的事实，即在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中物质线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$（见(6.2)）与 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$（见(6.8)）有相同的逆变分量 $\mathrm{d}X^A$。

对于曲线坐标系，除了上述的协变基矢量以外，还要引进逆变基矢量。它们是两组互为对偶的基矢量。在构形 $\mathscr{R}$ 中协变基矢量 $\boldsymbol{G}_A(A=\mathrm{I,II,III})$ 如(6.3)式，逆变基矢量以 $\boldsymbol{G}^A(A=\mathrm{I,II,III})$ 表示，对偶条件为

$$\boldsymbol{G}^B \cdot \boldsymbol{G}_A = \delta_A^B \qquad A,B = \mathrm{I,II,III} \tag{6.11}$$

δ_B^A 为 Kronecker delta，记度量张量协变与逆变分量各为

$$G_{AB} = \boldsymbol{G}_A \cdot \boldsymbol{G}_B, \qquad G^{AB} = \boldsymbol{G}^A \cdot \boldsymbol{G}^B \qquad A,B = \mathrm{I,II,III} \tag{6.12}$$

可以证明矩阵$[G_{AB}]$与$[G^{AB}]$互为逆。度量张量可表示为

$$\boldsymbol{G} = G_{AB}\boldsymbol{G}^A\boldsymbol{G}^B = G^{AB}\boldsymbol{G}_A\boldsymbol{G}_B = \delta_B^A\boldsymbol{G}_A\boldsymbol{G}^B = \delta_A^B\boldsymbol{G}^A\boldsymbol{G}_B = \mathbf{1} \tag{6.13}$$

它就是单位张量 $\mathbf{1}$。用度量张量分量 G^{AB} 与 G_{AB} 进行指标升降。

在构形 $\mathscr{R}$ 中对于两种坐标系 x^i 与 X^A，分别有

(1) 对于 Euler 曲线坐标系 x^i，对应于(6.11)~(6.13)有

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta_j^i \qquad i,j = 1,2,3 \tag{6.14}$$

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j, \quad g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j, \qquad i, j = 1,2,3 \tag{6.15}$$

矩阵$[g_{ij}]$与$[g^{ij}]$互为逆。度量张量$\boldsymbol{g}$为

$$\boldsymbol{g} = g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = \delta^i_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = \delta^j_i\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j = \mathbf{1} \tag{6.16}$$

用g^{ij}与g_{ij}进行指标升降。

(2) 对于 Lagrange 嵌入曲线坐标系X^A：类似于(6.14)~(6.16)，有

$$\hat{\boldsymbol{g}}^B \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_A = \delta^B_A, \qquad A, B = \mathrm{I,II,III} \tag{6.17}$$

$$\hat{g}_{AB} = \hat{\boldsymbol{g}}_A \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_B, \quad \hat{g}^{AB} = \hat{\boldsymbol{g}}^A \cdot \hat{\boldsymbol{g}}^B, \quad A, B = \mathrm{I,II,III} \tag{6.18}$$

矩阵$[\hat{g}_{AB}]$与$[\hat{g}^{AB}]$互为逆。度量张量为

$$\hat{\boldsymbol{g}} = \hat{g}_{AB}\hat{\boldsymbol{g}}^A\hat{\boldsymbol{g}}^B = \hat{g}^{AB}\hat{\boldsymbol{g}}_A\hat{\boldsymbol{g}}_B = \delta^A_B\hat{\boldsymbol{g}}_A\hat{\boldsymbol{g}}^B = \delta^B_A\hat{\boldsymbol{g}}^A\hat{\boldsymbol{g}}_B = \mathbf{1} \tag{6.19}$$

即时构形$\mathscr{r}$中的基矢量$\boldsymbol{g}_i$已见(6.6)，$\boldsymbol{g}^i$可利用对偶条件(6.14)求出。构形$\mathscr{r}$中的基矢量$\hat{\boldsymbol{g}}_A$，$\hat{\boldsymbol{g}}^B$可以通过初始构形$\mathscr{R}$中的基矢量$\hat{\boldsymbol{G}}_A$，$\hat{\boldsymbol{G}}^B$表示，推导如下。将(6.2)式 d$\boldsymbol{X}$ 与(6.8)式 d$\boldsymbol{x}$ 代入线元变换公式(1.12a)，可得

$$\mathrm{d}X^A\hat{\boldsymbol{g}}_A = \mathrm{d}X^A\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}_A \tag{6.20}$$

因为 dX^A 为任意，故必有

$$\hat{\boldsymbol{g}}_A = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}_A, \qquad A = \mathrm{I,II,III} \tag{6.21}$$

(6.21)式表明可以把协变基矢量$\boldsymbol{G}_A$与$\hat{\boldsymbol{g}}_A$看作是变形前后的物质线元。有了协变基矢量$\hat{\boldsymbol{g}}_A$以后，逆变基矢量$\hat{\boldsymbol{g}}^A$可以利用对偶条件(6.17)求出。可以证明$\hat{\boldsymbol{g}}^B$与$\boldsymbol{G}^B$的关系为

$$\hat{\boldsymbol{g}}^B = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{G}^B, \quad B = \mathrm{I,II,III} \tag{6.22}$$

这只需要验证(6.22)$\hat{\boldsymbol{g}}^B$与(6.21)$\hat{\boldsymbol{g}}_A$满足对偶条件(6.17)，即

$$\hat{\boldsymbol{g}}^B\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_A = \left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{G}^B\right)\cdot\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}_A\right) = \boldsymbol{G}^B\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}_A = \boldsymbol{G}^B\cdot\boldsymbol{G}_A = \delta^B_A$$

在初始构形$\mathscr{R}$中面元矢量 d$\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}A^K\boldsymbol{G}_K = \mathrm{d}A_K\boldsymbol{G}^K \tag{6.23}$$

在即时构形$\mathscr{r}$中对应的物质面元矢量 d$\boldsymbol{a}$ 可将(6.23)d$\boldsymbol{A}$ 代入 Nanson 公式(1.43)：

$$\frac{1}{J}\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

并注意(6.22)而得

$$\frac{1}{J}\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{1}{J}\mathrm{d}a^{K}\hat{\boldsymbol{g}}_{K}=\frac{1}{J}\mathrm{d}a_{K}\hat{\boldsymbol{g}}^{K} \tag{6.24}$$

式中

$$\frac{1}{J}\mathrm{d}a_{K}=\mathrm{d}A_{K},\quad \mathrm{d}a^{K}=\hat{g}^{KL}\mathrm{d}a_{L} \tag{6.25}$$

$(6.25)_1$ 式说明在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中物质面元矢量除以体积比即 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}/J$ 与 $\mathrm{d}A$ 有相同的协变分量。

3.6.2 张量的转移

首先研究矢量的转移。第一种是从初始构形 $\mathscr{R}$ 中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 转移至即时构形 $\mathscr{r}$ 中的物质线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，关系式是线元变换公式(1.12a)与(1.12c)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6.26}$$

其中由(6.2)，(6.8)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}X^{A}\boldsymbol{G}_{A},\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}X^{A}\hat{\boldsymbol{g}}_{A} \tag{6.27}$$

在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 具有相同的逆变分量 $\mathrm{d}X^A$。称这第一种转移为矢量的逆变转移（记作 # 转移[1]）。(6.26)给出这种转移的运算，即 $\boldsymbol{F}\cdot$ 与 $\boldsymbol{F}^{-1}\cdot$。从构形 $\mathscr{R}$ 中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 转移到构形 $\mathscr{r}$ 中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 称为 # 前推（见$(6.26)_1$），反之称为 # 后拉（见$(6.26)_2$）。第二种转移是从初始构形 $\mathscr{R}$ 中的面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 转移至即时构形 $\mathscr{r}$ 中的面元矢量除以体积比 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}/J$，关系式是 Nanson 公式(1.43)，即

$$\frac{1}{J}\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A},\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\frac{1}{J}\mathrm{d}\boldsymbol{a}\right) \tag{6.28}$$

其中由(6.25)

$$\frac{1}{J}\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\mathrm{d}A_{K}\hat{\boldsymbol{g}}^{K},\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_{K}\boldsymbol{G}^{K} \tag{6.29}$$

在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}/J$ 与 $\mathrm{d}A$ 具有相同的协变分量 $\mathrm{d}A_K$。称这第二种转移为矢量的协变转移（记为 b 转移）。(6.28)给出这种转移的运算，即 $\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot$ 与 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot$。从构形 $\mathscr{R}$ 中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 转移到构形 $\mathscr{r}$ 中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}/J$ 称为 b 前推（见$(6.28)_1$），反之称为 b 后拉（见$(6.28)_2$）。

现在研究二阶张量的转移。

1. 第一种转移——张量的逆变转移（记为 ## 转移）。

由 Kirchhoff 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 与第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{T}$ 的关系式(3.18)

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{6.30a}$$

---

1) 逆变分量采用上标，协变分量采用下标，借用乐谱中的高低半音符号，各以#、b 表示。

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{6.30b}$$

设在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 的分解式各为

$$\boldsymbol{T}=T^{AB}\boldsymbol{G}_A\boldsymbol{G}_B \tag{6.31}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\tau^{AB}\hat{\boldsymbol{g}}_A\hat{\boldsymbol{g}}_B \tag{6.32}$$

将(6.31)代入关系式(6.30a)，并注意(6.21)，可知

$$\tau^{AB}=T^{AB} \tag{6.33}$$

因此在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 具有相同的逆变分量。我们称这第一种转移为张量的逆变转移（记为##转移）。(6.30)给出这种转移的运算，并可记作 $(\boldsymbol{FF})^{**}$ 与 $(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1})^{**}$，例如

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{FF})^{**}\boldsymbol{T} \tag{6.34a}$$

(6.34a)的第二个等式实际上是运算符 $(\boldsymbol{FF})^{**}$ 的定义。张量 $\boldsymbol{T}$ 总可以写成若干个并矢项之和。以一并矢 $\boldsymbol{ab}$ 为例，(6.34a)的第二个等式成为

$$\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{ab})\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a})\left(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)=(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{FF})^{**}(\boldsymbol{ab}) \tag{6.35}$$

(6.34a)式在 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 中 $\boldsymbol{T}$ 后面的“$\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$”表示 $\boldsymbol{T}$ 的后矢量（见(6.35)的 $\boldsymbol{b}$）点乘 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{F}^{T}$，这等同于用 $\boldsymbol{F}$ 点乘 $\boldsymbol{T}$ 的后矢量 $\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{b}$。(6.34a)之逆为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\right)^{**}\boldsymbol{\tau} \tag{6.34b}$$

从构形 $\mathscr{R}$ 的 $\boldsymbol{T}$ 转移到构形 $\mathscr{r}$ 的 $\boldsymbol{\tau}$（见(6.34a)），称为逆变（##）前推，反之（见(6.34b)）称为逆变（##）后拉。

2. 第二种转移——张量的协变转移（记为 bb 转移）

由(1.26)，(1.14)与(1.36)，(1.27)，分别有

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{1})=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{1}\right) \tag{6.36}$$

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\right) \tag{6.37}$$

因此在 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与 Almansi 应变张量 $\boldsymbol{e}$ 之间存在着关系（仿照(6.34)的记法）：

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}=\left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{**}\boldsymbol{E} \tag{6.38a}$$

设在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的分解式各为

$$\boldsymbol{E}=E_{AB}\boldsymbol{G}^A\boldsymbol{G}^B \tag{6.39}$$

$$\boldsymbol{e} = e_{AB}\hat{\boldsymbol{g}}^A\hat{\boldsymbol{g}}^B \tag{6.40}$$

将(6.39)与(6.40)代入关系式(6.38a)，并注意(6.22)，可知

$$e_{AB} = E_{AB} \tag{6.41}$$

因此在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 具有相同的协变分量。我们称这第二种转移为张量的协变转移（记为 bb 转移）。(6.38a)给出这种转移的运算，并可记作$\left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{*}_{*}$。(6.38a)之逆为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)^{*}_{*}\boldsymbol{e} \tag{6.38b}$$

从构形 $\mathscr{R}$ 的 $\boldsymbol{E}$ 转移到构形 $\boldsymbol{\kappa}$ 的 $\boldsymbol{e}$（见(6.38a)），称为协变（bb）前推，反之称为协变（bb）后拉（见(6.38b)）。

第二种转移的另一个例子是 $\boldsymbol{d}$ 与 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 的关系式。由(2.13)，可得

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = \left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{*}_{*}\dot{\boldsymbol{E}} \tag{6.42}$$

设在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 的分解式各为

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{E}_{AB}\boldsymbol{G}^A\boldsymbol{G}^B \tag{6.43}$$

$$\boldsymbol{d} = d_{AB}\hat{\boldsymbol{g}}^A\hat{\boldsymbol{g}}^B \tag{6.44}$$

则为(6.41)的证明，将(6.43)与(6.44)代入(6.42)，可得

$$d_{AB} = \dot{E}_{AB} \tag{6.45}$$

因此在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中变形率 $\boldsymbol{d}$ 与 Green 应变张量率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 具有相同的协变分量。$\boldsymbol{d}$ 与 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 也是作为协变张量的相互转移（bb 转移）。

我们现在很容易理解变形功率 w 的等式(3.26)与(3.31)的等同性：

$$w = \boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d} = \boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{6.46a}$$

在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中，上式可写作

$$w = \tau^{AB}d_{AB} = T^{AB}\dot{E}_{AB} \tag{6.46b}$$

由(6.33)，$\tau^{AB} = T^{AB}$，及(6.45) $d_{AB} = \dot{E}_{AB}$，上述等式是显然的。

3. 第三种转移——张量的混合转移（记为#b 转移）

设 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 各为初始构形 $\mathscr{R}$ 与即时构形 $\boldsymbol{\kappa}$ 中的张量，它们在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中具有相同的#b 分量，即

$$\boldsymbol{M} = M^{A}_{\cdot B}\boldsymbol{G}_A\boldsymbol{G}^B \tag{6.47}$$

$$\boldsymbol{m} = m^{A}_{\cdot B}\hat{\boldsymbol{g}}_{A}\hat{\boldsymbol{g}}^{B} \tag{6.48}$$

且

$$m^{A}_{\cdot B} = M^{A}_{B} \tag{6.49}$$

利用(6.21)与(6.22)，可得 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = \left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{\#}_{\#}\boldsymbol{M} \tag{6.50a}$$

我们称这第三种转移为张量的混合转移（记为#b 转移）。(6.50a)给出这种转移的运算，并记作 $\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{\#}_{\#}$ 。(6.50a)之逆为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)^{\#}_{\#}\boldsymbol{m} \tag{6.50b}$$

从构形 $\mathscr{R}$ 的 $\boldsymbol{M}$ 转移到构形 $\mathscr{r}$ 的 $\boldsymbol{m}$，称为#b 前推（见(6.50a)），反之称为#b 后拉（见(6.50b)）。

4. 第四种转移——张量的混合转移（记为 b#转移）

设 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 各为初始构形 $\mathscr{R}$ 与即时构形 $\mathscr{r}$ 中的张量，它们在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中具有相同的 b#分量，即

$$\boldsymbol{S} = S^{\cdot B}_{A}\boldsymbol{G}^{A}\boldsymbol{G}_{B} \tag{6.51}$$

$$\boldsymbol{s} = s^{\cdot B}_{A}\hat{\boldsymbol{g}}^{A}\hat{\boldsymbol{g}}_{B} \tag{6.52}$$

且

$$s^{B}_{A} = S^{\cdot B}_{A} \tag{6.53}$$

利用(6.21)与(6.22)，可得 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right)^{\#}_{\#}\boldsymbol{S} \tag{6.54a}$$

我们也称这第四种转移为张量的混合转移（但记为 b#转移）。(6.54a)给出这种转移的运算，并记作 $\left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right)^{\#}_{\#}$ 。(6.54a)之逆为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-1}\right)^{\#}_{\#}\boldsymbol{s} \tag{6.54b}$$

从构形 $\mathscr{R}$ 的 $\boldsymbol{S}$ 转移到构形 $\mathscr{r}$ 的 $\boldsymbol{s}$，称为 b#前推（见(6.54a)），反之称为 b#后拉（见(6.54b)）。

3.6.3 张量的四个客观导数

以 $\hat{\boldsymbol{g}}_{A}$，$\hat{\boldsymbol{g}}^{A}$ 与 $\tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}_{A}$，$\tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}^{A}$（$A$=I, II, III）各表示图 3-9 中等价运动 χ 与 $\tilde{\chi}$ 之 Lagrange 嵌入曲线坐标系 X^{A} 的协变及逆变基矢量。由(6.21)，(6.22)

$$\hat{\boldsymbol{g}}_{A} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}_{A}, \qquad \hat{\boldsymbol{g}}^{A} = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{G}^{A} \qquad (A=\mathrm{I, II, III}) \tag{6.55}$$

$$\tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}_A = \tilde{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{G}_A, \qquad \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}^A = \tilde{\boldsymbol{F}}^{-\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{G}^A \qquad (A=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) \tag{6.56}$$

将变形梯度的标架转换关系(5.26)代入(6.56)，并利用(6.55)，可得基矢量的标架转换关系：

$$\tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}_A = \boldsymbol{Q}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_A, \qquad \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}^A = \boldsymbol{Q}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{g}}^A \qquad (A=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) \tag{6.57}$$

因此对于图 3-9 中所示的运动 χ 与 $\tilde{\chi}$，基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_A$，$\hat{\boldsymbol{g}}^A$ 服从客观矢量的标架转换关系（见(5.9)），也就是 $\boldsymbol{Q}(t)$所表示的转动关系。

设 $\boldsymbol{\zeta}$ 为即时构形 $\varkappa$ 中的客观张量。对于图 3-9 所示的运动 χ，$\boldsymbol{\zeta}$ 在 Lagrange 嵌入曲线坐标系中的分解式为

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta^{AB} \hat{\boldsymbol{g}}_A \hat{\boldsymbol{g}}_B = \zeta_{AB} \hat{\boldsymbol{g}}^A \hat{\boldsymbol{g}}^B = \zeta^{A}_{\cdot B} \hat{\boldsymbol{g}}_A \hat{\boldsymbol{g}}^B = \zeta_{A}^{\cdot B} \hat{\boldsymbol{g}}^A \hat{\boldsymbol{g}}_B \tag{6.58}$$

对于图 3-9 所示的等价运动 $\tilde{\chi}$，$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ 的分解式为

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \tilde{\zeta}^{AB} \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}_A \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}_B = \tilde{\zeta}_{AB} \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}^A \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}^B = \tilde{\zeta}^{A}_{\cdot B} \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}_A \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}^B = \tilde{\zeta}_{A}^{\cdot B} \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}^A \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}_B \tag{6.59}$$

已设 $\boldsymbol{\zeta}$ 为客观张量，故服从客观张量的标架转换关系(5.14)：

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{Q}(t) \cdot \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{6.60}$$

将(6.58)与(6.59)代入(6.60)，并利用(6.57)，可知

$$\tilde{\zeta}^{AB} = \zeta^{AB}, \quad \tilde{\zeta}_{AB} = \zeta_{AB}, \quad \tilde{\zeta}^{A}_{\cdot B} = \zeta^{A}_{\cdot B}, \quad \tilde{\zeta}_{A}^{\cdot B} = \zeta_{A}^{\cdot B} \tag{6.61}$$

因此对于图 3-9 所示的运动 χ 与 $\tilde{\chi}$，虽然它们在 Lagrange 嵌入坐标系中各自的基矢量不同（见(6.57)），但客观张量 $\boldsymbol{\zeta}$ 的分量是相同的（见(6.61)）。

$\boldsymbol{\zeta}$ 的四个客观导数的定义是

$$\boldsymbol{\zeta}^{\#\#} = \frac{\mathrm{d}\zeta^{AB}}{\mathrm{d}t} \hat{\boldsymbol{g}}_A \hat{\boldsymbol{g}}_B = \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{Oldr}} \tag{6.62a}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{bb}} = \frac{\mathrm{d}\zeta_{AB}}{\mathrm{d}t} \hat{\boldsymbol{g}}^A \hat{\boldsymbol{g}}^B = \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{Cott\text{-}Riv}} \tag{6.62b}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\#\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{d}\zeta^{A}_{\cdot B}}{\mathrm{d}t} \hat{\boldsymbol{g}}_A \hat{\boldsymbol{g}}^B \tag{6.62c}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{b}\#} = \frac{\mathrm{d}\zeta_{A}^{\cdot B}}{\mathrm{d}t} \hat{\boldsymbol{g}}^A \hat{\boldsymbol{g}}_B \tag{6.62d}$$

利用(6.61)与(6.57)，容易证明(6.62a-d)四个导数的客观性。转动 $\boldsymbol{Q}(t)$只是把基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_A, \hat{\boldsymbol{g}}^B$ 变成 $\tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}_A, \tilde{\hat{\boldsymbol{g}}}^B$，而不改变 ζ^{AB}，ζ_{AB}，$\zeta^{A}_{\cdot B}$，$\zeta_{A}^{\cdot B}$。因此出现于(6.62a-d)式中的分量 $\mathrm{d}\zeta^{AB}/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\zeta_{AB}/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\zeta^{A}_{\cdot B}/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\zeta_{A}^{\cdot B}/\mathrm{d}t$ 也不受转动 $\boldsymbol{Q}(t)$的影响。所以(6.62a-d)的四个张量都是客观的。

当应用(6.58) $\boldsymbol{\zeta}$ 的四个表达式求物质导数 $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ 时，需要考虑到基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_A$ 与 $\hat{\boldsymbol{g}}^B(A,B=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$ 的变化率。由(6.21) $\hat{\boldsymbol{g}}_A$ 与(6.22) $\hat{\boldsymbol{g}}^B$ 式，利用(2.7a) $\dot{\boldsymbol{F}}$ 与(2.7d) $\left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{\cdot}$ 式，可得（注意 $\boldsymbol{G}_A$，$\boldsymbol{G}^B$ 不随时间 t 变化）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_A=\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_A=\hat{\boldsymbol{g}}_A\cdot\boldsymbol{l}^T,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^B=-\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{g}}^B=-\hat{\boldsymbol{g}}^B\cdot\boldsymbol{l} \tag{6.63}$$

利用(6.63)，可得(6.62a-d)四个客观导数与物质导数 $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ 的关系：

$$\boldsymbol{\zeta}^{\#\#}=\dot{\boldsymbol{\zeta}}-\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{Oldr}} \tag{6.64a}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{bb}}=\dot{\boldsymbol{\zeta}}+\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{l}=\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{Cott\text{-}Riv}} \tag{6.64b}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\#\mathrm{b}}=\dot{\boldsymbol{\zeta}}-\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{l} \tag{6.64c}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{b}\#}=\dot{\boldsymbol{\zeta}}+\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tag{6.64d}$$

在文献中称 $\boldsymbol{\zeta}^{\#\#}$ 为 Oldroyd 导数，记为 $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{Oldr}}$，称 $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{bb}}$ 为 Cotter-Rivlin 导数，记为 $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{Cott\text{-}Riv}}$。当 X^A 为构形 $\mathscr{R}$ 中的直角坐标（图 3-7）时，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}},\quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}},\quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{III}}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{III}}\\ &\hat{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{I}}=\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{I}},\quad \hat{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{II}}=\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{II}},\quad \hat{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{III}}=\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{III}}\end{aligned} \tag{6.65}$$

此时(6.62a)成为前面的(5.66)。易证以下公式

$$\boldsymbol{\zeta}^{\#\#}=\boldsymbol{F}\cdot\left(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{\cdot}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{6.66a}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{bb}}=\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{F}\right)^{\cdot}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} \tag{6.66b}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\#\mathrm{b}}=\boldsymbol{F}\cdot\left(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{F}\right)^{\cdot}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} \tag{6.66c}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{b}\#}=\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{\cdot}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{6.66d}$$

(6.66a-d)的几何意义是：第一步：先把 $\boldsymbol{\zeta}$ 从构形 $\mathscr{r}$ 各自##、bb、#b、b#后拉转移到构形 $\mathscr{R}$，这时 $\hat{\boldsymbol{g}}_A,\hat{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{B}}$ 都变成 $\boldsymbol{G}_A,\boldsymbol{G}^B$；然后第二步：对时间求导，这时只需考虑分量 $\zeta^{AB},\zeta_{AB},\zeta^{A}_{\cdot B},\zeta^{\cdot B}_{A}$ 的导数项，因为 $\boldsymbol{G}_A,\boldsymbol{G}^B$ 的导数为零；最后第三步：再从构形 $\mathscr{R}$，##，bb，#b，b#前推到构形 $\mathscr{r}$。

在本节中我们采用 Lagrange 嵌入曲线坐标系，导出了许多有用的关系。为了避免曲线坐标计算的复杂性，人们往往把用 Lagrange 嵌入曲线坐标系所导出的张量公式，在即时构形 $\mathscr{r}$ 中用坐标转换的办法在 Euler 直角坐标中写出分量形式。

3.7 小变形弹塑性本构关系形式上的推广

有些作者为了得到大变形情况的弹塑性本构关系，采用一种简单的办法，即把小变形弹塑性本构关系作形式上的推广。这里最重要的考虑是要遵守客观性原理。

本节假定所研究的变形过程是恒温的，即暂不考虑温度（或熵）等热力学变量。本节内容可参考黄克智编著，《非线性连续介质力学》，第九章塑性§9.1—§9.3，清华大学出版社，1989。

几乎所有的大变形弹塑性本构关系均假定变形率张量 $\boldsymbol{d}$ 可分解为弹性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 两部分：

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} \tag{7.1}$$

以后除特别声明采用 Lagrange 嵌入曲线坐标系的情况外，一律采用 Lagrange 直角坐标 X_A 与 Euler 直角坐标 x_i。

3.7.1 弹性本构关系(率形式)

小变形情况的弹性本构关系已见第 1 章(1.29)的弹性率部分：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}=\mathscr{M}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.2}$$

式中 $\mathscr{M}$ 为弹性柔度张量，见第 1 章(1.8)或(1.8)'式，对于各向同性介质（假设弹性模量 G 与 K 为常数）

$$\begin{aligned}\mathscr{M}&=\frac{1}{2G}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{9K}\mathbf{1}\mathbf{1}=\frac{1}{E}[(1+\nu)\boldsymbol{I}-\nu\mathbf{1}\mathbf{1}]\\ \mathscr{M}_{ijkl}&=\frac{1}{2G}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)I_{ijkl}-\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\end{aligned} \tag{7.3}$$

$\boldsymbol{I}$ 表示四阶“等同张量”，$\bar{\boldsymbol{I}}$ 表示“特殊等同张量”，由第 1 章(1.2),(1.4)式

$$\begin{aligned}I_{ijkl}&=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)\\ \bar{I}_{ijkl}&=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\end{aligned} \tag{7.4}$$

把(7.2)式推广于大变形情况，一般用 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$ 取代 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$。和节 3.5.1 中例 4 的变形率 $\boldsymbol{d}$（见(5.37)）一样，弹性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$ 也是客观张量。由节 3.5.3 本构理论的客观性原理，任意两个等价的运动 χ 与运动 $\tilde{\chi}$ 均以客观的 Cauchy 应力张量满足同一材料的本构方程。因此(7.2)式左端改为 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$ 客观量以后，右端的 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 也应改为一客观的应力率。在研究大变形弹塑性本构方程时，B.Budiansky 在他的一篇未发表的文章中曾采用 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的 Jaumann 导数 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ (见(5.67))，即：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{w} \tag{7.5}$$

而后，J.W.Hutchinson（1973）将其改为 Kirchhoff 应力的 Jaumann 导数 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$，即

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{w} \tag{7.6}$$

并证明只有改动以后边值问题才对应于一定的泛函变分问题。于是大变形情况的弹性本构关系成为

$$\boldsymbol{d}^{e} = \mathscr{M} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} \tag{7.7}$$

而逆弹性本构关系为

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathscr{L} : \boldsymbol{d}^{e} \tag{7.8}$$

式中$\mathscr{L}$为弹性刚度张量，见第 1 章(1.32)或(1.32)′式：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= 2G\bar{\boldsymbol{I}} + K\mathbf{1}\mathbf{1} = 2G\boldsymbol{I} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\mathbf{1}\mathbf{1} \\
&= 2\mu\boldsymbol{I} + \lambda\mathbf{1}\mathbf{1} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{I} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{1}\mathbf{1}\right) \\
\mathscr{L}_{ijkl} &= 2G\bar{I}_{ijkl} + K\delta_{ij}\delta_{kl} = 2GI_{ijkl} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} \\
&= 2\mu I_{ijkl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{E}{1+\nu}\left[I_{ijkl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right]
\end{aligned} \tag{7.9}$$

这里λ，μ 为 Lamé 参数：

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \mathrm{G} = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)} \tag{7.10}$$

最后指出，在计算 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$的 Janmann 导数$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$(7.6)式中，需要用到$\boldsymbol{\tau}$对时间 t 的物质导数$\dot{\boldsymbol{\tau}}$，在 Euler 直角坐标系中，设

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{kl}(x_i, t)\ \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \tag{7.11}$$

式中由(1.6)式，$x_i = x_i(X_A, t)$。求 $\boldsymbol{\tau}$ 的物质导数$\dot{\boldsymbol{\tau}}$时，应注意保持 X_A 不变，故

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\tau}_{kl}(x_i, t)\ \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \tag{7.12}$$

式中，注意到(2.1b)式，

$$\dot{\tau}_{kl}(x_i, t) = \left.\frac{\partial \tau_{kl}}{\partial t}\right|_{X_A} = \left.\frac{\partial \tau_{kl}(x_i, t)}{\partial t}\right|_{x_i} + \left.\frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_i}\right|_{t} v_i \tag{7.13}$$

在(7.13)中，右端第一项称为局部导数，第二项称为对流导数。

3.7.2 各向同性硬化 Prandtl-Reuss 弹塑性本构方程

将第 1 章小变形情况的(2.6)，作类似于上述 3.7.1 中的推广，即$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$改为 $\boldsymbol{d}$，$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$改为$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$，得

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^{e} + \boldsymbol{d}^{p} = \boldsymbol{M}^{ep} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} \tag{7.14}$$

式中$\boldsymbol{M}^{ep}$为弹塑性柔度张量：

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}} = \mathscr{M} + \alpha \frac{9}{4E_p Y^2} \boldsymbol{\tau}' \boldsymbol{\tau}'$$
$$M_{ijkl}^{\mathrm{ep}} = \mathscr{M}_{ijkl} + \alpha \frac{9}{4E_{\mathrm{p}} Y^2} \tau'_{ij} \tau'_{kl} \tag{7.15}$$

式中$\boldsymbol{\tau}'$为 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$的偏量：

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\tau})\mathbf{1}$$

定义 d^{p} 为等效塑性变形率，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 为累积塑性应变：

$$d^{\mathrm{p}} = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2}, \qquad \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \int d^{\mathrm{p}} \mathrm{d}t \tag{7.16a,b}$$

材料的屈服面表示式为

$$\tau_{\mathrm{eq}} = Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{7.17}$$

式中 τ_{eq} 为 Kirchhoff 等效应力

$$\tau_{\mathrm{eq}} = \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\tau}' : \boldsymbol{\tau}'\right)^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\tau'_{ij}\tau'_{ij}\right)^{1/2} \tag{7.18}$$

Y 是材料的流动应力（指 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$），它是 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的已知函数 $Y(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$。$E_{\mathrm{p}}$ 为塑性模量：

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{7.19}$$

Y 与 E_{p} 可由材料单向拉伸实验得到。对于单向拉伸实验，变形主轴方向保持不变。取 x_1 沿拉伸方向，$Y=\tau_{11}$，$d^{\mathrm{p}} = d_{11}^{\mathrm{p}}$，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \int d_{11}^{\mathrm{p}} \mathrm{d}t$。以 $\underset{1}{\lambda}$ 表示拉伸方向的伸长比，由(2.36)：

$$\ln \underset{1}{\lambda} = \int \mathrm{d}_{11} \mathrm{d}t = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$$

式中

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{e}} = \int d_{11}^{\mathrm{e}} \mathrm{d}t$$

$\ln \underset{1}{\lambda}$ 对 τ_{11} 求导，得

$$\frac{1}{E_{\mathrm{t}}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_{\mathrm{p}}} \tag{7.20}$$

式中 E 为弹性模量。E_{t} 为切线模量，以后还会用到割线模量 E_{s}，它们都可以由以 Kirchhoff

应力τ_{11}为纵坐标，以对数应变$\ln\lambda_1$为横坐标的单向拉伸实验曲线得到。

$$\frac{1}{E}=\frac{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}\tau_{11}},\quad \frac{1}{E_{\mathrm{p}}}=\frac{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\tau_{11}},\quad \frac{1}{E_{\mathrm{t}}}=\frac{\mathrm{d}\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{e}}+\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}\tau_{11}},\quad \frac{1}{E_{\mathrm{s}}}=\frac{\bar{\varepsilon}^{\mathrm{e}}+\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\tau_{11}} \tag{7.21}$$

E_{p}由(7.20)定出。(7.15)式中 α 为加载参数：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上,且}\boldsymbol{\tau}':\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面内,或}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上,且}\boldsymbol{\tau}':\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}\leqslant 0\end{cases} \tag{7.22}$$

逆本构关系可由第 1 章小变形情况的(2.9)式推广而得：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{d} \tag{7.23}$$

式中$\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}$为弹塑性刚度张量：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}&=\mathscr{L}-\frac{\alpha}{g}\frac{E^2}{(1+\nu)^2}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}'\\ L_{ijkl}^{\mathrm{ep}}&=\mathscr{L}_{ijkl}-\frac{\alpha}{g}\frac{E^2}{(1+\nu)^2}\tau_{ij}'\tau_{kl}'\end{aligned} \tag{7.24}$$

$$g=\frac{4}{9}EY^2\left[\frac{E_{\mathrm{p}}}{E}+\frac{3}{2(1+\nu)}\right] \tag{7.25}$$

$\mathscr{L}$为弹性刚度张量，见(7.9)。α 为加载参数如下：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在应力空间屈服面上,且}\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{d}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在应力空间屈服面内, 或在应力空间屈服面上,且}\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{d}\leqslant 0\end{cases} \tag{7.26}$$

3.7.3 混合硬化

本构关系可由第 1 章小变形情况的(2.32)式推广而得：

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{M}:\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} \tag{7.27}$$

式中弹塑性柔度张量$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}$为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}&=\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\sigma_{\mathrm{F}}^2(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}')(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}')\\ M_{ijkl}^{\mathrm{ep}}&=\mathscr{M}_{ijkl}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\sigma_{\mathrm{F}}^2(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}(\tau_{ij}'-b_{ij}')(\tau_{kl}'-b_{kl}')\end{aligned} \tag{7.28}$$

加载参数α由第 1 章(2.24)式推广如下：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上,且}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}'):\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面内,或在屈服面上,且}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}'):\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}\leqslant 0\end{cases} \tag{7.29}$$

背应力偏量$\boldsymbol{b}'$的演化方程可由第 1 章(2.29)推广而得：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{b}'}=\sqrt{\frac{2}{3}}d^{\mathrm{p}}E_{\mathrm{b}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\boldsymbol{n} \tag{7.30}$$

式中d^{p}见式(7.16a)，并由第 1 章(2.22)，

$$\boldsymbol{n}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sigma_{\mathrm{F}}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}') \tag{7.31}$$

逆本构关系可由第 1 章小变形情况的(2.43)式推广而得：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{d} \tag{7.32}$$

式中弹塑性刚度张量$\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}$为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}&=\mathscr{L}-\frac{\alpha}{g}\frac{E^2}{(1+\nu)^2}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}')(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}')\\ L^{\mathrm{ep}}_{ijkl}&=\mathscr{L}_{ijkl}-\frac{\alpha}{g}\frac{E^2}{(1+\nu)^2}(\tau'_{ij}-b'_{ij})(\tau'_{kl}-b'_{kl})\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$g=\frac{4}{9}E\sigma_{\mathrm{F}}^2\left[\frac{E_{\mathrm{p}}}{E}+\frac{3}{2(1+\nu)}\right] \tag{7.34}$$

加载参数α由第 1 章(2.45)推广的下式决定：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在应力空间屈服面上,且}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}'):\boldsymbol{d}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在应力空间屈服面内,或在应力空间屈服面上,且}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{b}'):\boldsymbol{d}\leqslant 0\end{cases} \tag{7.35}$$

3.7.4 J_2形变理论

Needleman 等（1977）将小变形情况的J_2形变理论推广到大变形情况，由第 1 章(3.23)式，推广后得到

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{s}}}-\frac{1}{E}\right)\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}'}+\frac{3}{2}\frac{\dot{\tau}_{\mathrm{eq}}}{\tau_{\mathrm{eq}}}\left(\frac{1}{E_{\mathrm{t}}}-\frac{1}{E_{\mathrm{s}}}\right)\boldsymbol{\tau}' \tag{7.36}$$

式中τ_{eq}为 Kirchhoff 等效应力，见(7.18)，E_{t}与E_{s}为切线模量与割线模量，都是累积塑性

应变$\bar{\varepsilon}^{p}$的函数，可由单向拉伸实验定出（见(7.21)式）。由(7.36)可导出率形式的本构关系：

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{M}_{s} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} \tag{7.37}$$

式中由第1章(3.12)，(3.14)，(3.25)式

$$\boldsymbol{M}_{s} = \mathscr{M}_{s} + \frac{9}{4Y^{2}}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}'\left(\frac{1}{E_{t}} - \frac{1}{E_{s}}\right) \tag{7.38}$$

$$\mathscr{M}_{s} = \frac{1}{2G_{s}}\bar{\boldsymbol{I}} + \frac{1}{9K}\mathbf{11}, \quad \frac{I}{2G_{s}} = \frac{1}{2G} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_{s}} - \frac{1}{E}\right) \tag{7.39}$$

(7.38)的形式与(7.15)的形式相类似。

逆本构关系可由第1章(3.27)—(3.30)推广而得：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{L}_{s} : \boldsymbol{d} \tag{7.40}$$

式中

$$\boldsymbol{L}_{s} = \boldsymbol{M}_{s}^{-1} = \mathscr{L}_{s} - \frac{4}{g_{s}}G_{s}^{2}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}' \tag{7.41}$$

$$g_{s} = \frac{4}{9}Y^{2}\left[\left(\frac{1}{E_{t}} - \frac{1}{E_{s}}\right)^{-1} + 3G_{s}\right] \tag{7.42}$$

3.8 局限性

3.7 所述将小变形弹塑性本构方程在形式上推广到大变形情况，这只是一种简单的办法，缺少理论上的依据，有时会得到极不合理的结果，以大变形弹性本构关系(7.8)为例，利用(7.9)，它也可写成以下的形式：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \lambda J_{1}(\boldsymbol{d})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{d} \tag{8.1}$$

式中$J_{1}(\boldsymbol{d}) = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{d}$为变形率$\boldsymbol{d}$的第一不变量，$\lambda$，$\mu$为 Lamé 参数,见（7.10）。

J.K.Dienes（1979）用本构关系(8.1)计算一个剪切变形的例子，得到随着剪应变的增大，剪应力发生振荡这一不合理的结果。具体演算过程如下。

给定一个运动$x_{i} = x_{i}(X_{A}, t)$具体表达式如下：

$$\begin{aligned} x_{1} &= X_{1} + v(X_{2})t \\ x_{2} &= X_{2} \\ x_{3} &= X_{3} \end{aligned} \tag{8.2}$$

(8.2)式所代表的运动可用图 3-12 表示。取 Lagrange 直角坐标与 Euler 直角坐标重合，X_{3}, x_{3}轴垂直纸面。变形前 $OABC$ 变形后为 $OabC$。以下将计算各有关张量，并以其 9 个

分量构成的矩阵表示。首先由(8.2)代入(1.11a)计算变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 如下：

$$\boldsymbol{F}=\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_A \ : \ \begin{pmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{8.3}$$

其中

$$\gamma=\frac{\mathrm{d}v(X_2)}{\mathrm{d}X_2}t=\frac{\mathrm{d}v(x_2)}{\mathrm{d}x_2}t \tag{8.4}$$

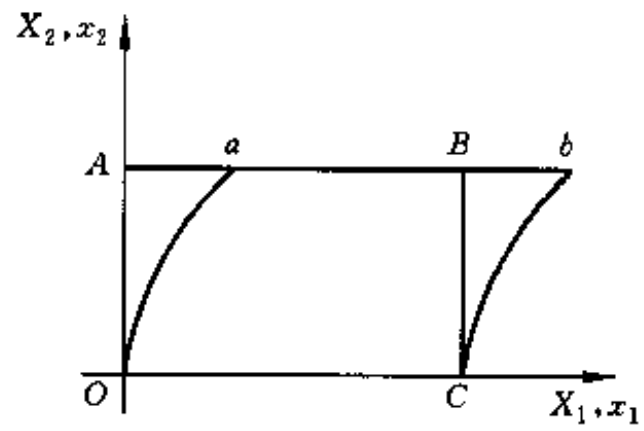


图 3-12　剪切大变形算例

为了计算左伸长张量 $\boldsymbol{V}$，首先计算左 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{B}$，将(8.3)$\boldsymbol{F}$ 代入(1.28)，利用(1.31)，可得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \ : \ \begin{pmatrix}1+\gamma^2 & \gamma & 0\\ \gamma & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{8.5}$$

经过较长的常规推导由 $\boldsymbol{B}$ 求得 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\boldsymbol{V} \ : \ \begin{pmatrix}\dfrac{1+\sin^2\beta}{\cos\beta} & \sin\beta & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{8.6}$$

其中

$$\beta=\tan^{-1}\frac{\gamma}{2} \quad 或 \quad \gamma=2\tan\beta \tag{8.7}$$

由(1.13)可得转动张量

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{F} \ : \ \begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta & 0\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{8.8}$$

由(2.27)可得相对旋率

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}:\begin{pmatrix}0 & \dot{\beta} & 0\\ -\dot{\beta} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{8.9}$$

相对旋率 $\boldsymbol{\Omega}$ 的反偶矢量记作 $\boldsymbol{\omega}_{\Omega}$，为

$$\boldsymbol{\omega}_{\Omega}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\Omega}$$

$$\omega_{\Omega j}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\Omega_{ik}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为置换张量。这样，由(8.9)式可求得

$$\boldsymbol{\omega}_{\Omega}:\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\dot{\beta}\end{pmatrix} \tag{8.10}$$

为得到变形率 $\boldsymbol{d}$ 和物质旋率 $\boldsymbol{w}$，首先计算速度 $\boldsymbol{v}$ 和速度梯度 $\boldsymbol{l}$。(8.2)代入(2.1b)，得

$$v_1=v(X_2)=v(x_2),\qquad v_2=v_3=0 \tag{8.11}$$

(8.11)代入(2.2)得

$$\boldsymbol{l}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j:\begin{pmatrix}0 & \dot{\gamma} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{8.12}$$

因此由(2.4)、(2.5)

$$\boldsymbol{d}:\begin{pmatrix}0 & \dot{\gamma}/2 & 0\\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{8.13}$$

$$\boldsymbol{w}:\begin{pmatrix}0 & \dot{\gamma}/2 & 0\\ -\dot{\gamma}/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{8.14}$$

同样计算 $\boldsymbol{w}$ 的反偶矢量 $\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{w}$，得

$$\boldsymbol{\omega}:\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\frac{\dot{\gamma}}{2}\end{pmatrix} \tag{8.15}$$

由(8.13)式，tr$\boldsymbol{d}$=0。由质量守恒律(4.2)，体积变形率为零，$\dot{J}=0$，J=1（或直接由(1.41)，计算(8.3)的行列式），$\rho=\rho_0$。因此，在本例中 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$与 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$无差别，$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\sigma}$。利用(5.67)，(8.1)式成为

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{w}=2\mu\boldsymbol{d} \tag{8.16}$$

将(8.13)与(8.14)代入，化简后，得分量形式

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_{11}-a\tau_{21}&=0\\ \dot{\tau}_{12}-\frac{1}{2}a(\tau_{22}-\tau_{11})&=\mu a\\ \dot{\tau}_{22}+a\tau_{21}&=0\end{aligned} \tag{8.17}$$

式中 a 为一与 t 无关的、仅依赖于 x_2=X_2 的函数：

$$a=\dot{\gamma}=\frac{\mathrm{d}v(X_2)}{\mathrm{d}X_2} \tag{8.18}$$

(8.17)是一组以 t 为自变量的关于 $\tau_{11},\tau_{22},\tau_{12}=\tau_{21}$ 的常微分方程，x_2=X_2 看作不变的参数。设初始条件为

$$\tau_{11}=\tau_{22}=\tau_{12}=0 \qquad 当\ t=0 \tag{8.19}$$

不难求出(8.17)的解为

$$\begin{aligned}\tau_{11}&=-\tau_{22}=\mu(1-\cos at)=\mu(1-\cos\gamma)\\ \tau_{12}&=\mu\sin at=\mu\sin\gamma\end{aligned} \tag{8.20}$$

(8.20)式表明：随着剪切角γ 的增大，剪应力的变化是振荡的，剪应力τ_{12}对于剪切角γ 的关系如图 3-13 中的虚线所示。从物理上考虑，这显然是不合理的。

J.K.Dienes 试着把弹性本构关系(8.1)中的 Jaumann 导数$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$改为广义 Jaumann 导数$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}}$，即

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}}=\lambda J_1(\boldsymbol{d})\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{d} \tag{8.21}$$

因此取代(8.16)，有

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Omega}=2\mu\boldsymbol{d} \tag{8.22}$$

将(8.9) $\boldsymbol{\Omega}$与(8.13)$\boldsymbol{d}$ 代入并化简后，利用(8.7)，得分量形式：

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_{11}-2\dot{\beta}\tau_{21}&=0\\ \dot{\tau}_{12}-\dot{\beta}\tau_{22}+\dot{\beta}\tau_{11}&=\mu\dot{\gamma}=2\mu(\sec^2\beta)\dot{\beta}\\ \dot{\tau}_{22}+2\dot{\beta}\tau_{12}&=0\end{aligned} \tag{8.23}$$

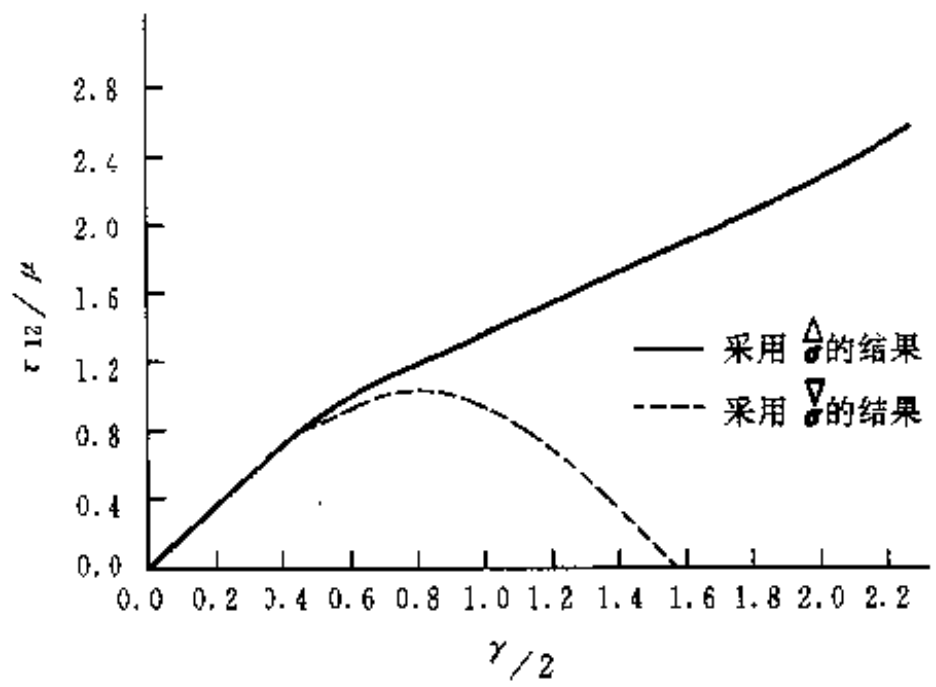


图 3-13　剪切问题(8.2)的解

由于材料的率无关性，可以选用任何一随时间递增的参数作为时间参数。这里选β为时间参数，则(8.23)成为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}\beta}-2\tau_{21}=0\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{\mathrm{d}\beta}-\tau_{22}+\tau_{11}=2\mu\sec^2\beta\\
&\frac{\mathrm{d}\tau_{22}}{\mathrm{d}\beta}+2\tau_{12}=0
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

(8.24)是一组以β 为自变量的关于$\tau_{11},\tau_{22},\tau_{12}=\tau_{21}$的常微分方程。它满足初始条件(8.19)（当$\beta=0$）的解为

$$
\begin{aligned}
&\tau_{11}=-\tau_{22}=4\mu(\cos 2\beta\ \ln\cos\beta+\beta\sin 2\beta-\sin^2\beta)\\
&\tau_{12}=2\mu\cos 2\beta(2\beta-2\tan 2\beta\ \ln\cos\beta-\tan\beta)
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

当$\beta\to\pi/2$时，由(8.7)，$\gamma\to\infty$，$\tau_{22}=-\tau_{11}\to\infty,\tau_{12}\to\infty$。剪应力$\tau_{12}$与剪切角$\gamma$的关系是递增的，如图 3-13 中实线所示。图中实线与虚线在$\gamma/2\leqslant 0.4$段相差甚微。

根据以上两种结果的对比，J.K.Dienes 认为采用应力的广义 Jaumann 导数$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}}$比 Jaumann 导数$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$作为客观率更为合理。杨卫等（1992）曾采用相对于变形率标架旋率$\boldsymbol{\Omega}^d$的客观导数$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[\boldsymbol{\Omega}^d]$（见(5.69)），也得到没有剪应力振荡现象的结果。

但是，更为科学与合理的途径是根据热力学的第二定律来推导大变形弹塑性本构关系，这就是下面两章要研究的内容。第 4 章研究大变形弹性本构关系，第 5 章研究大变形弹塑性本构关系。

习 题 3

3.1 已知二维空间中的变形：$x_1 = 2X_1 - 0.8X_2$，$x_2 = 4X_1 + 4.4X_2$。试求$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{F}^{-1}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{E}^{(0)}$，$\boldsymbol{E}^{(0.5)}$及$\boldsymbol{C}$的主值和方向。

3.2 已知二维空间中的变形：$x_1 = (1+t)X_1 - 0.8X_2$，$x_2 = 4X_1 + (1+3.4t)X_2$。试求$t=1$时刻的$\boldsymbol{I}$，$\dot{\boldsymbol{F}}$，$(\boldsymbol{F}^{-1})^{\cdot}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{w}$，$\dot{\boldsymbol{E}}$，$\dot{\boldsymbol{E}}^{(0)}$，$\dot{\boldsymbol{E}}^{(0.5)}$。

3.3 已知二维空间中的变形：$x_1 = 4X_1 + X_2$，$x_2 = X_1 + 4X_2$，如图 3-14 所示。试求变形后的：$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{I}}$，$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{II}}$；$bc$，$cd$ 边上的力分别沿 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}}$ 和$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{I}}$，$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{II}}$的分解，并指出是什么应力；画出 Cauchy 应力、第一类 P-K 应力和第二类 P-K 应力的示意图。

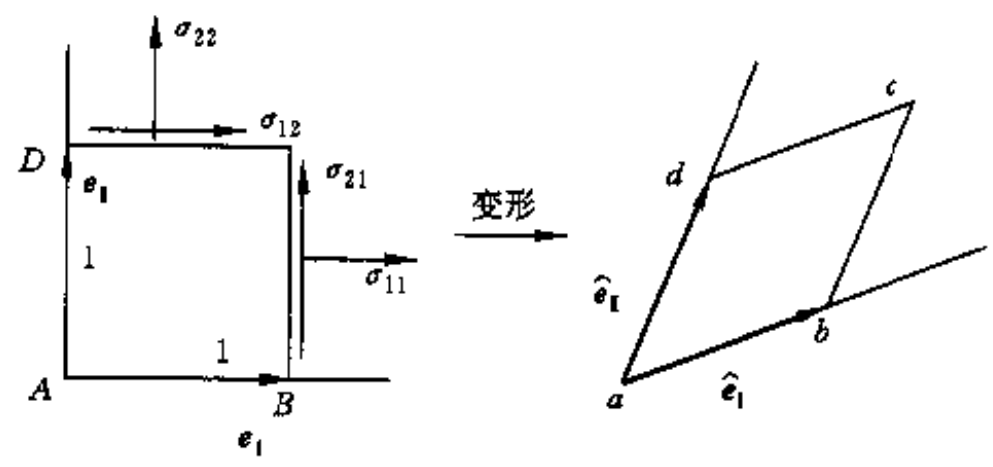


图 3-14 题 3.3 图

3.4 给出第 3 章 3.8 节剪切变形例子(8.2)以后(8.3)～(8.25)各式全部的推导。

第 4 章　大变形弹性本构关系

在研究第 5 章大变形弹塑性本构关系之前，作为基础，我们先来研究大变形弹性本构关系。

4.1　弹性本构关系与热传导

所谓弹性就是指材料每单位质量的耗散率$\theta\gamma$ 的两部分中只有热耗散率$\theta\gamma_{\text{th}}$为正或零，而内禀耗散率$\theta\gamma_{\text{int}}$（见第 3 章(4.27)与(4.30)式）恒为零：

$$\rho\theta\gamma = \rho\theta\gamma_{\text{th}} + \rho\theta\gamma_{\text{int}} \tag{1.1}$$

$$\rho\theta\gamma_{\text{th}} = -\frac{1}{\theta}(\theta\nabla)\cdot\boldsymbol{h} \geqslant 0 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\rho\theta\gamma_{\text{int}} &= \rho\theta\dot{\eta} - \left[-(\boldsymbol{h}\cdot\nabla) + \rho\kappa\right] \\ &= \rho\theta\dot{\eta} - \left[\rho\dot{e} - \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}\right] = 0\end{aligned} \tag{1.3}$$

(1.1) ~ (1.3)式表明弹性体的能量耗散的唯一来源是热传导。

4.1.1　弹性本构关系

首先讨论(1.3)式。设取材料的状态变量为 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与每单位质量的熵η。每单位质量的内能 e 设为状态变量的函数：

$$e = e(\boldsymbol{E},\eta) \tag{1.4}$$

因此 e 的变化率为

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{E}}:\dot{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial e}{\partial \eta}\dot{\eta} \tag{1.5}$$

利用变形功率的表达式第 3 章(3.26)，(3.31)与质量守恒律(4.1)，则

$$\frac{1}{J}w = \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d} = \frac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{1.6}$$

将(1.6)代入(1.3)，可得

$$\rho_0\dot{e} = \rho_0\theta\dot{\eta} + \boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{1.7}$$

将(1.7)与(1.5)进行比较，并注意自变量的率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 与 $\dot{\eta}$ 是任意的，可得通过内能函数 e 表示的热弹性本构关系：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \rho_0\left(\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_\eta, \qquad \theta = \left(\frac{\partial e}{\partial \eta}\right)_{\boldsymbol{E}} \\ T_{AB} &= \rho_0\left(\frac{\partial e}{\partial E_{AB}}\right)_\eta, \quad \theta = \left(\frac{\partial e}{\partial \eta}\right)_{E_{AB}} \end{aligned} \tag{1.8}$$

式中在括号右下方标明的是在求偏导数时假定不变的另一自变量。求偏导数 $\partial e/\partial E_{AB}$ 时，还要假定张量 $\boldsymbol{E}$ 除 E_{AB} 以外的其它分量固定不变。

本构关系(1.8)中 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与每单位质量的熵 η 为自变量，而第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 与绝对温度 θ 为响应函数。由于温度是可直接测量的量，通常更为方便的是取温度 θ 为自变量，而把熵 η 作为响应函数。这时可取第 3 章(4.31)式每单位质量的 Hemholtz 自由能 $\psi = e - \theta\eta$ 作为热力学函数，ψ 被看作是状态变量 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与温度 θ 的函数。(4.31)式称为 Legendre 变换，这个变换被用来换掉自变量 η 与响应函数 θ 的位置。利用第 3 章(4.32)与(4.33)，可将本征耗散率表达式(1.3)写作

$$\rho\theta\gamma_{\text{int}} = -\rho\dot{\psi} - \rho\eta\dot{\theta} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d} = 0 \tag{1.9}$$

利用(1.6)，由上式可得

$$\rho_0\dot{\psi} = -\rho_0\eta\dot{\theta} + \boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{1.10}$$

上式也可直接由(1.7)利用第 3 章(4.32)而得。于是，类似于从(1.7)导出(1.8)，可由(1.10)导出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \rho_0\left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_\theta, \qquad \eta = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_{\boldsymbol{E}} \\ T_{AB} &= \rho_0\left(\frac{\partial \psi}{\partial E_{AB}}\right)_\theta, \quad \eta = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_{E_{AB}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

这里本构关系(1.11)中 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与绝对温度 θ 为自变量，而第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 与每单位质量的熵 η 为响应函数。

如果我们欲选第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 与绝对温度 θ 为自变量，而 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与每单位质量的熵 η 为响应函数，可以对 Henholtz 自由能 ψ 再进行一次 Legendre 变换来换掉自变量 $\boldsymbol{E}$ 与响应函数 $\boldsymbol{T}$ 的位置：

$$\psi_G = \psi - \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\boldsymbol{E} \tag{1.12}$$

式中ψ_G称为 Gibbs 自由能。$\dot{\psi}_G$与$\dot{\psi}$之间存在关系：

$$\dot{\psi}_G + \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{E}:\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\psi} - \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{1.13}$$

于是(1.10)可改写为

$$\rho_0\dot{\psi}_G = -\rho_0\eta\dot{\theta} - \boldsymbol{E}:\dot{\boldsymbol{T}} \tag{1.14}$$

由此可得本构关系的另一形式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\rho_0\left(\frac{\partial\psi_G}{\partial\boldsymbol{T}}\right)_\theta, \qquad \eta = -\left(\frac{\partial\psi_G}{\partial\theta}\right)_{\boldsymbol{T}} \\ E_{AB} &= -\rho_0\left(\frac{\partial\psi_G}{\partial T_{AB}}\right)_\theta, \qquad \eta = -\left(\frac{\partial\psi_G}{\partial\theta}\right)_{T_{AB}} \end{aligned} \tag{1.15}$$

最后指出，如果要选第二类 P-K 应力张量$\boldsymbol{T}$与每单位质量的熵η为自变量，则只要对内能e采用如下的 Legendre 变换：

$$\psi_H = e - \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\boldsymbol{E} \tag{1.16}$$

式中ψ_H称为每单位质量的焓。$\dot{\psi}_H$与$\dot{e}$之间存在着关系

$$\dot{\psi}_H + \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{E}:\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{e} - \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{1.17}$$

于是由(1.7)，可得

$$\rho_0\dot{\psi}_H = \rho_0\theta\dot{\eta} - \boldsymbol{E}:\dot{\boldsymbol{T}} \tag{1.18}$$

由此可得又一形式的本构关系

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\rho_0\left(\frac{\partial\psi_H}{\partial\boldsymbol{T}}\right)_\eta, \qquad \theta = \left(\frac{\partial\psi_H}{\partial\eta}\right)_{\boldsymbol{T}} \\ E_{AB} &= -\rho_0\left(\frac{\partial\psi_H}{\partial T_{AB}}\right)_\eta, \qquad \theta = \left(\frac{\partial\psi_H}{\partial\eta}\right)_{T_{AB}} \end{aligned} \tag{1.19}$$

无论上面哪一种本构关系，(1.8)，(1.11)，(1.15)或(1.19)，如果自变量经过一个任意的循环变化后回到原值，响应函数也回到原值。

在结束本小节 4.1.1 之前，我们讨论一下热力学函数，例如$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$，对于二阶对称张量自变量$\boldsymbol{E}$的导数的计算问题。自变量$\boldsymbol{E}$与$\theta$的增量$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$与$\mathrm{d}\theta$所导致的函数变化为

$$\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{E},\theta) = \frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial\boldsymbol{E}}:\mathrm{d}\boldsymbol{E} + \frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial E_{AB}}\mathrm{d}E_{AB} + \frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta$$

上式可以看作是$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial\boldsymbol{E}},\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial\theta}$的定义式。因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 为对称张量，$\mathrm{d}E_{AB}=\mathrm{d}E_{BA}$，所以$\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)/\partial\boldsymbol{E}$ 可以任意加减一个反对称张量，而不影响上式的结果。因此，可以有权人为地规定$\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)/\partial\boldsymbol{E}$ 是一个对称的张量。换句话说，如果$\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)/\partial\boldsymbol{E}$ 不是对称张量，则要加以对称化，其 AB 分量为[1]

$$\left(\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial\boldsymbol{E}}\right)_{AB}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial E_{AB}}+\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial E_{BA}}\right] \tag{1.20a}$$

如果$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$作为 $\boldsymbol{E}$ 的变量 E_{AB} 的函数，已经是对称化了的，那么当然有

$$\left(\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial\boldsymbol{E}}\right)_{AB}=\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial E_{AB}}=\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial E_{BA}} \tag{1.20b}$$

例如，若 $\psi=E_{\mathrm{I\,II}}E_{\mathrm{II\,I}}$，必须用(1.20a)式。只当对 ψ 函数加以对称化以后，即 $\psi=\left(E_{\mathrm{I\,II}}+E_{\mathrm{II\,I}}\right)^2/4$，才可以用(1.20b)式。

4.1.2 一个特例

取 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与绝对温度θ为自变量，假设材料为各向同性，因此 Hemholtz 自由能ψ只通过 $\boldsymbol{E}$ 的三个不变量而依赖于 $\boldsymbol{E}$。在张量分析[2] 中可以证明任何一个对称的二阶张量只有三个独立的不变量。这三个独立的不变量有不同的取法。对于 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$，这里取以下的三个不变量，并简写为I_1,I_2,I_3：

$$\begin{aligned}
I_1&=I_1(\boldsymbol{E})=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}\\
I_2&=I_2(\boldsymbol{E}')=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E}'\right)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}'^2\right)\\
I_3&=I_3(\boldsymbol{E}')=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E}'\right)=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}'^3\right)
\end{aligned} \tag{1.21}$$

式中$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}-(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E})\mathbf{1}/3$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 的偏量。易证I_1,I_2,I_3对自变量 $\boldsymbol{E}$ 的导数为（以右上角一撇“′”表示偏量）

$$\frac{\partial I_1}{\partial\boldsymbol{E}}=\mathbf{1},\quad \frac{\partial I_2}{\partial\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}',\quad \frac{\partial I_3}{\partial\boldsymbol{E}}=\bar{\boldsymbol{I}}:(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E}')=(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{E}')' \tag{1.22a}$$

或（分量形式）

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial I_1}{\partial E_{AB}}=\delta_{AB},\qquad \frac{\partial I_2}{\partial E_{AB}}=E'_{AB}\\
&\frac{\partial I_3}{\partial E_{AB}}=\bar{I}_{ABCD}\left(E'_{CK}E'_{KD}\right)=E'_{AK}E'_{KB}-\frac{2}{3}I_2\delta_{AB}
\end{aligned} \tag{1.22b}$$

---

1) 注意，在求偏导数时 E_{AB} 与 E_{BA} 在形式上被看作是独立的变量。

2) 可参考黄克智，薛明德，陆明万著，张量分析，第三章§3.2,§3.3 清华大学出版社，1986；台北市台东书局，1992。

这里$\bar{\boldsymbol{I}}$为特殊等同张量（见前第 3 章(7.4)式，或第 1 章(1.4)式）。

设在参考构形（或初始构形）$\mathscr{R}$，温度$\theta=\theta_0$。把 Hemholtz 自由能$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$函数在参考构形$\mathscr{R}(\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0},\theta=\theta_0)$附近进行 Taylor 展开，并只取到第二项，则

$$\begin{aligned}\rho_0\psi(\boldsymbol{E},\theta)=&-\rho_0\eta_0(\theta-\theta_0)-\frac{1}{2\theta_0}\rho_0c_{V0}(\theta-\theta_0)^2-p_0I_1\\&-\alpha KI_1(\theta-\theta_0)+\frac{1}{2}KI_1^2+2GI_2\end{aligned}\tag{1.23}$$

式中ρ_0为参考构形$\mathscr{R}$每单位体积的质量密度。(1.23)右端表达式有 6 项，每项都含一个待定常数，即$\eta_0,c_{V0},p_0,\alpha,K,G$，它们的意义将在下文阐明。将(1.23)$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$代入本构关系(1.11)，并利用$(1.22a)_{1,2}$，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=-p_0\boldsymbol{1}+K[I_1(\boldsymbol{E})-\alpha(\theta-\theta_0)]\boldsymbol{1}+2G\boldsymbol{E}'\\\eta&=\eta_0+c_{v0}\frac{1}{\theta_0}(\theta-\theta_0)+\frac{1}{\rho_0}K\alpha I_1(\boldsymbol{E})\end{aligned}\tag{1.24}$$

容易求(1.24)之逆。取$(1.24)_1$两端之迹与偏量，各得

$$\begin{aligned}I_1(\boldsymbol{T})&=-3p_0+3K[I_1(\boldsymbol{E})-\alpha(\theta-\theta_0)]\\\boldsymbol{T}'&=2G\boldsymbol{E}'\end{aligned}$$

式中仿$(1.21)_1$，$I_1(\boldsymbol{T})=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}$。利用上式，可求出(1.24)之逆：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{1}{3}\alpha(\theta-\theta_0)\boldsymbol{1}+\frac{1}{9K}[I_1(\boldsymbol{T})+3p_0]\boldsymbol{1}+\frac{1}{2G}\boldsymbol{T}'\\\theta&=\theta_0+\frac{1}{c_{V0}}\theta_0(\eta-\eta_0)-\frac{1}{\rho_0c_{V0}}K\alpha\theta_0I_1(\boldsymbol{E})\end{aligned}\tag{1.25}$$

定义材料的比定容热容为

$$c_V=\left(\frac{\partial e}{\partial\theta}\right)_{\boldsymbol{E}}\tag{1.26}$$

由(1.26)，利用(1.7)，可得

$$c_V=\theta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right)_{\boldsymbol{E}}\tag{1.26$'$}$$

将$(1.24)_2\,\eta$代入，得到

$$c_V=\frac{1}{\theta_0}c_{V0}\theta\tag{1.27}$$

由以上各式可以看出(1.23)中 6 个待定常数的意义如下。由$(1.24)_1$，p_0为参考状态（即参考

构形 $\mathscr{R}$ 且绝对温度 $\theta=\theta_0$）的三向均压。如参考状态无初应力，则 $p_0=0$；$\alpha/3$ 为对于温度的线膨胀系数。K 为体积模量，G 为剪切模量。由$(1.24)_2$，η_0 为参考状态每单位质量的熵；如取参考状态的熵为基准，则 $\eta_0=0$。由(1.27)，c_{v0} 为参考状态$(\theta=\theta_0)$的比定容热容。由$(1.25)_2$可看出，若保持绝热（熵保持不变，$\eta=\eta_0$），则当出现体积膨胀应变时$(I_1>0)$，温度θ下降$(\theta<\theta_0)$。

我们对第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 与 Green 应变 $\boldsymbol{E}$ 及温度θ之间的弹性本构关系$(1.24)_1$特别感兴趣。可以对$(1.24)_1$取物质导数，得到率形式的本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{T}}=K(I_1(\dot{\boldsymbol{E}})-\alpha\dot{\theta})\mathbf{1}+2G\dot{\boldsymbol{E}}' \tag{1.28}$$

式中 $I_1(\dot{\boldsymbol{E}})=\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{E}}$。可把(1.28)写成以下形式：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{T}}&=\boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{m}\dot{\theta}\\ \dot{T}_{AB}&=L_{ABCD}\dot{E}_{CD}+m_{AB}\dot{\theta}\end{aligned} \tag{1.29}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 为弹性刚度张量（四阶），可写成第 1 章(1.32)的形式（λ与μ表示 Lamé 参数，见第 3 章(7.10)）。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=2G\bar{\boldsymbol{I}}+K\mathbf{1}\mathbf{1}\\ &=2G\boldsymbol{I}+\left(K-\frac{2}{3}G\right)\mathbf{1}\mathbf{1}=2\mu\boldsymbol{I}+\lambda\mathbf{1}\mathbf{1}\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}L_{ABCD}&=2G\bar{I}_{ABCD}+K\delta_{AB}\delta_{CD}\\ &=2GI_{ABCD}+\left(K-\frac{2}{3}G\right)\delta_{AB}\delta_{CD}\\ &=\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}(\delta_{AC}\delta_{BD}+\delta_{AD}\delta_{BC})+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{AB}\delta_{CD}\right]\end{aligned}$$

$\boldsymbol{m}$ 为温度系数张量（二阶）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}&=-K\alpha\mathbf{1}\\ m_{AB}&=-K\alpha\delta_{AB}\end{aligned} \tag{1.31}$$

同样，也可以对$(1.25)_1$求物质导数，得到率形式的本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{3}\alpha\dot{\theta}\mathbf{1}+\frac{1}{9K}I_1(\dot{\boldsymbol{T}})\mathbf{1}+\frac{1}{2G}\dot{\boldsymbol{T}}' \tag{1.32}$$

或以下形式

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}&=\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{n}\dot{\theta}\\ \dot{E}_{AB}&=M_{ABCD}\dot{T}_{CD}+n_{AB}\dot{\theta}\end{aligned} \tag{1.33}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为弹性柔度张量（四阶），可写成第 1 章(1.8)或(1.8)′的形式：

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2G}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{9K}\mathbf{1}\mathbf{1}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\boldsymbol{I}-\nu\mathbf{1}\mathbf{1}\right]$$

$$\begin{aligned}M_{ABCD}&=\frac{1}{2G}\bar{I}_{ABCD}+\frac{1}{9K}\delta_{AB}\delta_{CD}\\&=\frac{1}{E}\left[\frac{1+\nu}{2}(\delta_{AC}\delta_{BD}+\delta_{AD}\delta_{BC})-\nu\delta_{AB}\delta_{CD}\right]\end{aligned}\tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=\frac{1}{3}\alpha\mathbf{1}\\n_{AB}&=\frac{1}{3}\alpha\delta_{AB}\end{aligned}\tag{1.35}$$

上面的率形式本构关系(1.29)或(1.33)式是在参考构形 $\mathscr{R}$ 中的应力率 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 与应变率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 之间的关系。为了得到在即时构形 τ 中的率形式的本构关系，我们可以把(1.29)或(1.33)式从参考构形 $\mathscr{R}$ 转移（前推）到即时构形 τ 中。下面我们来进行这种转移。

由第 3 章(6.34b)式，求物质导数，得

$$\dot{\boldsymbol{T}}=\left(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)^{\cdot}$$

利用第 3 章(2.7b),(2.7d)，由上式可得

$$\dot{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\tag{1.36a}$$

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}=\boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F})\overset{*}{*}\dot{\boldsymbol{T}}\tag{1.36b}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 表示 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 的 Oldroyd 导数（见第 3 章(5.62)）：

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\tag{1.37a}$$

$$\tau_{ij}^{\mathrm{Oldr}}=\dot{\tau}_{ij}-l_{ik}\tau_{kj}-\tau_{ik}l_{jk}\tag{1.37b}$$

(1.36)式说明 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 是 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 的逆变(##)前推，$\dot{\boldsymbol{T}}$ 是 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 的逆变(##)后拉（见第 3 章(6.34)）。又由第 3 章(6.42)，

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}=\left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)\overset{*}{*}\dot{\boldsymbol{E}}\tag{1.38a}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{d}\tag{1.38b}$$

故变形率 $\boldsymbol{d}$ 是 Green 应变张量率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 的协变(bb)前推，$\dot{\boldsymbol{E}}$ 是 $\boldsymbol{d}$ 的协变(bb)后拉。弹性刚度张量

$\boldsymbol{L}$（四阶）的逆变(####)前推为[1)]

$$\mathscr{L} = (\boldsymbol{FFFF}) \overset{*}{\underset{*}{\vdots}} \boldsymbol{L} \tag{1.39a}$$

$$\mathscr{L}_{ijkl} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\frac{\partial x_k}{\partial X_C}\frac{\partial x_l}{\partial X_D} L_{ABCD} \tag{1.39b}$$

取温度系数张量 $\boldsymbol{m}$（见(1.31)）的逆变(##)前推为 $\mathscr{m}$：

$$\mathscr{m} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{FF}) : \boldsymbol{m} \tag{1.40a}$$

$$\mathscr{m}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B} m_{AB} \tag{1.40b}$$

将(1.30) L_{ABCD} 代入(1.39b)，(1.31) m_{AB} 代入(1.40b)，得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{ijkl} &= 2G\frac{1}{2}\left(B_{ik}B_{jl} + B_{il}B_{jk}\right) + \left(K - \frac{2}{3}G\right)B_{ij}B_{kl} \\ &= \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\left(B_{ik}B_{jl} + B_{il}B_{jk}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}B_{ij}B_{kl}\right]\end{aligned} \tag{1.41}$$

及

$$\mathscr{m}_{ij} = -K\alpha B_{ij} \tag{1.42}$$

式中 $\boldsymbol{B}$ 为左 Cauchy-Green 变形张量，见第 3 章(1.28)：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \\ B_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_A}\end{aligned} \tag{1.43}$$

现在把弹性本构关系(1.29)从构形 $\mathscr{R}$ 逆变(##)前推到构形 τ，其中由(1.36b) $\dot{\boldsymbol{T}}$ 逆变(##)前推到构形 τ 成为 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$，$\boldsymbol{L}$（四阶）与 $\boldsymbol{m}$（二阶）各逆变(####与##)前推到构形 τ 成为 $\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{m}$，$\dot{\boldsymbol{E}}$ 协变(bb)前推到构形 τ 成为 $\boldsymbol{d}$。于是弹性本构关系(1.29)成为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} &= \mathscr{L} : \boldsymbol{d} + \mathscr{m}\dot{\theta} \\ \tau_{ij}^{\mathrm{Oldr}} &= \mathscr{L}_{ijkl} d_{kl} + \mathscr{m}_{ij}\dot{\theta}\end{aligned} \tag{1.44}$$

同样本构关系(1.33)也可以从参考构形 $\mathscr{R}$ 协变(bb)前推到构形 τ，其中由(1.38a) $\dot{\boldsymbol{E}}$ 协变(bb)前推到构形 τ 成为 $\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{M}$（四阶）与 $\boldsymbol{n}$（二阶）各协变(bbbb 与 bb)前推到构形 τ 成为 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{n}$，

---

1) $\overset{*}{\underset{*}{\vdots}}$ 表示将其左侧各二阶张量依次点乘其右侧张量的并矢中每一矢量。

$\dot{\boldsymbol{T}}$ 逆变(##)前推到构形 τ 成为 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 。于是弹性本构关系(1.33)成为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= \mathscr{M} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} + \boldsymbol{n}\dot{\theta} \\ d_{ij} &= \mathscr{M}_{ijkl}\tau_{kl}^{\mathrm{Oldr}} + n_{ij}\dot{\theta} \end{aligned} \tag{1.45}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathscr{M} &= \left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right) \vdots\vdots \boldsymbol{M} \\ \mathscr{M}_{ijkl} &= \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\frac{\partial X_C}{\partial x_k}\frac{\partial X_D}{\partial x_l} M_{ABCD} \end{aligned} \tag{1.46}$$

及

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \left(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right) : \boldsymbol{n} \\ n_{ij} &= \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j} n_{AB} \end{aligned} \tag{1.47}$$

将$(1.34)_2$ M_{ABCD} 与$(1.35)_2$ n_{AB} 各代入$(1.46)_2$与$(1.47)_2$，得

$$\mathscr{M}_{ijkl} = \frac{1}{E}\left[\frac{1+\nu}{2}\left(c_{ik}c_{jl} + c_{il}c_{jk}\right) - \nu c_{ij}c_{kl}\right] \tag{1.46$'$}$$

$$n_{ij} = \frac{1}{3}\alpha c_{ij} \tag{1.47$'$}$$

式中 $\boldsymbol{c}$ 为 Cauchy 变形张量(见第 3 章(1.27))：

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \tag{1.48}$$

$$c_{ij} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_A}{\partial x_j} \tag{1.49}$$

将本节的(1.41) $\mathscr{L}_{ijkl}$ 与第 3 章(7.9)的 $\mathscr{L}_{ijkl}$ 比较，本节的(1.46)′ $\mathscr{M}_{ijkl}$ 与第 3 章(7.3)的 $\mathscr{M}_{ijkl}$ 比较，可以看出它们是不同的。

4.1.3 热传导

在 4.1.1 中我们根据内禀耗散率 $\theta\gamma_{\mathrm{int}} = 0$ ，即(1.3)式导出了弹性本构关系，现在来讨论内禀耗散率(1.2)式。(1.2)式表明构形 τ 每单位体积的热耗散率 $\rho\theta\gamma_{\mathrm{th}}$ 为负温度梯度 $(-\theta\nabla)$ 与熵流 $\boldsymbol{h}/\theta$ 的点积，且为恒正：

$$\rho\theta\gamma_{\text{th}} = (-\theta\nabla)\cdot\left(\frac{1}{\theta}\boldsymbol{h}\right) \geqslant 0 \tag{1.50}$$

对于具有各向同性热学性质的材料，由 Fourier 热传导定律(第 3 章(4.29))，有

$$\boldsymbol{h} = -k(\theta\nabla) \tag{1.51}$$

(1.50)式热耗散率成为

$$\rho\theta\gamma_{\text{th}} = \frac{1}{\theta}k(\theta\nabla)^2 \geqslant 0 \tag{1.52}$$

对于一般非各向同性的情况，则 Fourier 热传导定律(1.51)应推广为

$$\boldsymbol{h} = -\boldsymbol{k}\cdot(\theta\nabla) \tag{1.53}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 为热传导张量（二阶），(1.50)式热耗散率则成为

$$\rho\theta\gamma_{\text{th}} = \frac{1}{\theta}(\theta\nabla)\cdot\boldsymbol{k}\cdot(\theta\nabla) \geqslant 0 \tag{1.54}$$

当 $\boldsymbol{k}$ 为反对称张量时，由(1.53)热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 与温度梯度 $\theta\nabla$ 正交，由(1.54)热耗散率 $\rho\theta\gamma_{\text{th}} = 0$。我们排除这种无耗散的热传导现象，假定热传导张量 $\boldsymbol{k}$ 为对称张量。

记负温度梯度 $(-\theta\nabla)$ 与熵流 $\boldsymbol{h}/\theta$ 各为

$$\boldsymbol{A} = -\theta\nabla, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{1}{\theta}\boldsymbol{h}$$

$\boldsymbol{A}$ 称为耗散驱动力，$\boldsymbol{B}$ 称为耗散流。由(1.50)耗散率可记作

$$\varphi = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \geqslant 0 \tag{1.55}$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 依赖于 $\boldsymbol{A}$（见(1.51)，(1.53)），故 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{A})$。Ziegler（1977）（又见 Besseling et al.(1993)）曾作一个热力学假定，即 $\boldsymbol{B}$ 与 $\partial\varphi/\partial\boldsymbol{A}$ 平行：

$$\boldsymbol{B} = \lambda\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{A})}{\partial\boldsymbol{A}} \tag{1.56}$$

式中 λ 可由等式 $\varphi = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 定出，即

$$\lambda = \frac{\varphi(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{A}}} \tag{1.57}$$

对于热传导问题，由(1.54)式

$$\varphi = \frac{1}{\theta}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{A}} = \frac{2}{\theta}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}$$

由(1.57)定出 $\lambda = 1/2$，(1.56)导致(1.53)。

下面讨论一个简单的热传导问题。假设没有或者可略去变形功率，即 $\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}=0$，(1.3)简化为

$$\theta\dot{\eta} - \dot{e} = 0$$

因此

$$\theta = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\eta} \tag{1.58}$$

(1.58)式为前面$(1.8)_2$式（设 $e = e(\eta)$）之特例。设 c 为材料的比热，则有

$$c\dot{\theta} = \theta\dot{\eta} \tag{1.59}$$

设比热 c 为一与温度θ 无关的常数。设$\theta = \theta_0$时，η的初始值$\eta_0 = 0$。由上式可求得熵η与温度θ 的关系：

$$\eta = c\ln\frac{\theta}{\theta_0} \qquad 或 \qquad \theta = \theta_0\exp\frac{\eta}{c} \tag{1.60}$$

将$(1.60)_2$的θ代入(1.58)，并设$\eta = \eta_0 = 0$时，$e = 0$，积分可得

$$e = c\theta_0\left(\exp\frac{\eta}{c} - 1\right) \tag{1.61}$$

相继利用(1.59)，(1.3)得

$$\rho c\dot{\theta} = \rho\theta\dot{\eta} = -(\boldsymbol{h}\cdot\nabla) + \rho\kappa$$

将(1.53)$\boldsymbol{h}$ 代入，可得热传导方程：

$$\rho c\dot{\theta} = [\boldsymbol{k}\cdot(\theta\nabla)]\cdot\nabla + \rho\kappa \tag{1.62}$$

4.1.4 率形式弹性本构关系

4.1.2 只给出了一个特例的率形式弹性本构关系，即(1.44)（与(1.41),(1.42)）或(1.45)(与(1.46),(1.47))。现在给出一般情况的率形式弹性本构关系。在 4.1.1 的四种弹性本构关系即(1.8),(1.11),(1.15)与(1.19)中，我们这里只选以 Hemholtz 自由能$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$为热力学函数的弹性本构关系(1.11)进行讨论，把它写成率形式。其它三种也可类似处理。将弹性本构关系(1.11)对时间 t 求物质导数，可得与(1.29)相同的率形式弹性本构关系：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{T}} &= \boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{m}\dot{\theta} \\ \dot{T}_{AB} &= L_{ABCD}\dot{E}_{CD} + m_{AB}\dot{\theta} \end{aligned} \tag{1.63}$$

与

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\boldsymbol{m} : \dot{\boldsymbol{E}} + \zeta\dot{\theta}\right) = -\frac{1}{\rho_0}\left(m_{AB}\dot{E}_{AB} + \zeta\dot{\theta}\right) \tag{1.64}$$

但式中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E}\partial \boldsymbol{E}} \\ L_{ABCD} &= \frac{\partial T_{AB}}{\partial E_{CD}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial E_{AB}\partial E_{CD}} \end{aligned} \tag{1.65}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &= \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{E}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E}\partial \theta} \\ m_{AB} &= \frac{\partial T_{AB}}{\partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial E_{AB}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial E_{AB}\partial \theta} \end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\zeta = -\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \tag{1.67}$$

现在把在参考构形 $\mathscr{R}$ 中的率形式本构关系(1.63)，(1.64)逆变（##）前推到即时构形 $\mathscr{r}$ 中，与前(1.44)式相类似，得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} &= \mathscr{L} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{m}\dot{\theta} \\ \tau_{ij}^{\mathrm{Oldr}} &= \mathscr{L}_{ijkl} d_{kl} + m_{ij}\dot{\theta} \end{aligned} \tag{1.68}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\boldsymbol{m} : \boldsymbol{d} + \zeta\dot{\theta}\right) = -\frac{1}{\rho_0}\left(m_{ij} d_{ij} + \zeta\dot{\theta}\right) \tag{1.69}$$

式中，与前(1.39),(1.40)相类似，

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= (\boldsymbol{FFFF}) \vdots \boldsymbol{L} = \rho_0 (\boldsymbol{FFFF}) \vdots \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E}\partial \boldsymbol{E}} \\ \mathscr{L}_{ijkl} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\frac{\partial x_k}{\partial X_C}\frac{\partial x_l}{\partial X_D} L_{ABCD} = \rho_0 \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\frac{\partial x_k}{\partial X_C}\frac{\partial x_l}{\partial X_D}\frac{\partial^2 \psi}{\partial E_{AB}\partial E_{CD}} \end{aligned} \tag{1.70}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{FF}) : \boldsymbol{m} = \rho_0 (\boldsymbol{FF}) : \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E}\partial \theta} \\ m_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B} m_{AB} = \rho_0 \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\frac{\partial^2 \psi}{\partial E_{AB}\partial \theta} \end{aligned} \tag{1.71}$$

$$\zeta = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \tag{1.72}$$

可以验证，如果取$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$表达式如 4.1.2 中的二次式(1.23)，则一般的率形式本构关系(1.68)（与(1.70),(1.71)）导致 4.1.2 特例中的率形式本构关系(1.44)(与(1.41),(1.42))。

在本节的本构关系中，我们采用的客观应力率是 Kirchhoff 应力的 Oldroyd 导数$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$。它也可通过 Cauchy 应力$\sigma$表示。将第 3 章(3.10)式$\boldsymbol{\tau}=J\boldsymbol{\sigma}$代入$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$的表达式(1.37a)，并利用质量守恒律（第 3 章(4.2)），$\dot{J}=J\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d}$，可得

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} = J\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.73}$$

式中$\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}$称为 Cauchy 应力的 Truesdell 导数，其定义为

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{Oldr}} + (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d})\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned}\overset{\square}{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}^{\mathrm{Oldr}} + d_{kk}\sigma_{ij} \\ &= \dot{\sigma}_{ij} + d_{kk}\sigma_{ij} - l_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}l_{jk}\end{aligned}$$

因此率形式弹性本构关系(1.68)也可写成以下形式：

$$\begin{aligned}\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{J}\left(\mathscr{L}:\boldsymbol{d} + \boldsymbol{m}\dot{\theta}\right) \\ \overset{\square}{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{J}\left(\mathscr{L}_{ijkl}d_{kl} + m_{ij}\dot{\theta}\right)\end{aligned} \tag{1.75}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\boldsymbol{m}:\boldsymbol{d} + \zeta\dot{\theta}\right) = -\frac{1}{\rho_0}m_{ij}d_{ij} + \zeta\dot{\theta} \tag{1.76}$$

本节所给出的率形式本构关系可以保证若自变量经过一个循环后返回原值，响应函数也返回原值，也就是说，是真正意义下的弹性，我们称之为超弹性(superelastic)本构关系。例如，率形式本构关系方程(1.68)是由响应函数$\boldsymbol{T},\eta$与自变量$\boldsymbol{E},\theta$之间的函数形式本构关系(1.11)导出的，因此自然可以保证经过一个应变张量$\boldsymbol{E}$与温度θ的循环，应力张量$\boldsymbol{T}$与熵η也与$\boldsymbol{E},\theta$一样返回原值。但是第 3 章 3.7.1 由率形式的小变形弹性本构关系作形式上的推广所得到的本构关系，不属于超弹性本构关系。不能由它们通过积分得到函数形式的弹性本构关系。但在这些关系中，应力率（例如$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$）与变形率$\boldsymbol{d}$间保持线弹性关系，故称为次弹性（或低弹性）(hypoelastic)本构关系。

应力的 Jaumann 导数是最常用的客观导数。本节中所用的应力客观导数为 Oldroyd 或 Truesdell 导数，但它们都可以通过 Jaumann 导数表示。由第 3 章 Oldroyd 导数(5.62)与 Jaumann 导数(5.67)，可以得到这两个导数之间的关系：

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{d}) \tag{1.77}$$

因此本构关系(1.68)可写作

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathscr{L} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{m}\dot{\theta} \tag{1.78}$$

定义一个四阶张量$\mathscr{G}^{\tau}$，使得

$$\mathscr{G}^{\tau} : \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{d} \tag{1.79}$$

故$\mathscr{G}^{\tau}$的分量为

$$\mathscr{G}^{\tau}_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\tau_{ik}\delta_{jl} + \tau_{il}\delta_{jk} - \tau_{jk}\delta_{il} + \tau_{jl}\delta_{ik}\right) \tag{1.79$'$}$$

则(1.78)可写作

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \left(\mathscr{L} + \mathscr{G}^{\tau}\right) : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{m}\dot{\theta} \tag{1.78$'$}$$

四阶弹性张量$\mathscr{L}$显然满足 Voigt 对称性（见(1.70)）。由(1.79)$\mathscr{G}^{\tau}$也满足 Voigt 对称性，因此$\mathscr{L} + \mathscr{G}^{\tau}$满足 Voigt 对称性。类似地，由(1.74)可得到

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{d}) + (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d})\boldsymbol{\sigma} \tag{1.80}$$

将(1.80)$\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}$代入(1.75)，可得

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{1}{J}\mathscr{L} + \mathscr{G}^{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}\right) : \boldsymbol{d} + \frac{1}{J}\boldsymbol{m}\dot{\theta} \tag{1.81}$$

式中$\mathscr{G}^{\sigma}$为四阶张量，其分量如(1.79)，但将(1.79)中$\boldsymbol{\tau}$的分量改为$\boldsymbol{\sigma}$的分量。(1.81)式中右端的四阶张量(　　)，由于有$-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}$项存在，不具有 Voigt 对称性。

4.2　弹性张量必须满足的条件

在参考构形$\mathscr{R}$中率形式的超弹性本构关系(1.63)与(1.64)中的各参量：弹性刚度张量$\boldsymbol{L}$（分量L_{ABCD}），应力的温度系数张量$\boldsymbol{m}$（分量m_{AB}）与熵的温度系数ζ都是从同一个热力学函数即 Hemholtz 自由能$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$导出的，所以它们必满足一定的条件或它们之间必满足一定的关系。可以证明这些关系是：

(1)　弹性刚度张量$\boldsymbol{L}$满足 Voigt 对称性，即

$$L_{ABCD} = L_{BACD} = L_{ABDC} = L_{CDAB} \tag{2.1a}$$

(2)　应力的温度系数张量$\boldsymbol{m}$为对称，即

$$m_{AB} = m_{BA} \tag{2.1b}$$

(3)　在$\boldsymbol{L},\boldsymbol{m},\zeta$三者之间满足微分关系：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_{ABCD}}{\partial E_{EF}} &= \frac{\partial L_{ABEF}}{\partial E_{CD}} \\
\frac{\partial L_{ABCD}}{\partial \theta} &= \frac{\partial m_{AB}}{\partial E_{CD}} \\
\frac{\partial m_{AB}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \zeta}{\partial E_{AB}}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

以上的条件可以很容易从各参量通过ψ函数的表达式(1.65)~ (1.67)得出，只需假定ψ是其自变量E_{AB}与θ的三次连续可微函数，因而偏导数对自变量求导次序无关。因此(2.1)与(2.2)是超弹性本构关系各参量$\boldsymbol{L},\boldsymbol{m},\zeta$须满足的必要条件。

可以证明(2.1)与(2.2)也是$\boldsymbol{L},\boldsymbol{m},\zeta$构成超弹性本构关系(1.63)的充分条件。换句话说，如果(2.1)与(2.2)成立。那么一定可以找出一 Hemholtz 自由能函数$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$，使得$\boldsymbol{L},\boldsymbol{m},\zeta$都可以通过此$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$用(1.65)~(1.67)的微分关系表示。证明过程如下。

第一步：由于$(2.2)_2$条件满足，一定可以找到$T_{AB}(\boldsymbol{E},\theta)$，使得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T_{AB}}{\partial E_{CD}} &= L_{ABCD} \\
\frac{\partial T_{AB}}{\partial \theta} &= m_{AB}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

第二步：由于$(2.2)_3$条件满足，一定可以找到$\eta(\boldsymbol{E},\theta)$，使得

$$
\begin{aligned}
-\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial E_{AB}} &= m_{AB} \\
-\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial \theta} &= \zeta
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

第三步：由$(2.3)_2$与$(2.4)_1$两式，可知

$$
\frac{\partial T_{AB}}{\partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial E_{AB}}
$$

因此一定可以找到$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$，使得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial E_{AB}} &= \frac{1}{\rho_0} T_{AB} \\
-\frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \eta
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

综合(2.3)~(2.5)就可以得到各参量$\boldsymbol{L},\boldsymbol{m},\zeta$通过$\psi$的微分关系如(1.65)~(1.67)。 [证毕]

现在我们用$(2.2)_1$式来检验一个形式最简单的率形式弹塑性本构关系，即(1.68)式，设等温情况$\dot{\theta}=0$：

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} = \mathscr{L} : \boldsymbol{d}$$
$$\tau_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{Oldr}} = \mathscr{L}_{ijkl} d_{kl} \tag{2.6}$$

式中弹性刚度张量 $\mathscr{L}$ 不按照(1.70)式由某一给定的 Hemholtz 自由能函数 $\psi(\boldsymbol{E},\theta)$ 计算，而直接取通常小变形情况推广而来的第 3 章(7.9)式：

$$\mathscr{L} = \lambda \mathbf{1}\mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{I}$$
$$\mathscr{L}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.7}$$

将(2.6)从即时构形 τ 逆变(##)后拉到参考构形 $\mathscr{R}$，即 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ ##后拉，$\mathscr{L}$####后拉，$\boldsymbol{d}$ bb 后拉，并注意(1.36a)，(1.38b)，得到

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{L} : \dot{\boldsymbol{E}}$$
$$\dot{T}_{\mathrm{AB}} = L_{ABCD} \dot{E}_{CD} \tag{2.8}$$

式中

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}) \vdots \mathscr{L}$$
$$L_{\mathrm{ABCD}} = \lambda \overset{-1}{C}_{AB} \overset{-1}{C}_{CD} + \mu\left(\overset{-1}{C}_{AC} \overset{-1}{C}_{BD} + \overset{-1}{C}_{AD} \overset{-1}{C}_{BC}\right) \tag{2.9}$$

此处以 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示第 3 章(1.14)右 Cauchy-Green 变形张量之逆：

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}\right)^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{2.10}$$

$(2.9)_2$ 中 $\overset{-1}{C}_{\cdot\cdot}$ 表示 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 的分量，例如，利用第 3 章(1.11c) $\boldsymbol{F}^{-1}$ 与(1.11d) $\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}$ 式，可得

$$\overset{-1}{C}_{AB} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_i} \tag{2.11}$$

现在来检验$(2.9)_2$式的 L_{ABCD} 是否满足$(2.2)_1$式。为此先证明一个预备公式：

$$\frac{\partial \overset{-1}{C}_{AB}}{\partial C_{MN}} = -\overset{-1}{C}_{AM} \overset{-1}{C}_{NB} \tag{2.12}$$

证　由张量等式

$$\boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{C} = \mathbf{1}$$
$$\overset{-1}{C}_{AB} C_{BK} = \delta_{AK} \tag{2.13}$$

矩阵 $\left[\overset{-1}{C}_{AB}\right]$ 与 $[C_{CD}]$ 互为逆．因此逆矩阵元素 $\overset{-1}{C}_{AB}$ 乃是矩阵 9 个元素 C_{CD} 的函数。由$(2.13)_2$，

对某一元素 C_{MN} 求偏导数，得

$$\frac{\partial \overset{-1}{C}_{AB}}{\partial C_{MN}} C_{BK} + \overset{-1}{C}_{AB} \frac{\partial C_{BK}}{\partial C_{MN}} = 0 \tag{2.14}$$

矩阵 9 个元素 C_{MN} 看作是独立自变量，因此当 $M \neq N$ 时，尽管 $C_{MN} = C_{NM}$，但 C_{MN} 与 C_{NM} 也被看作两个独立的变量。因此有

$$\frac{\partial C_{BK}}{\partial C_{MN}} = \delta_{BM} \delta_{KN} \tag{2.15}$$

将(2.15)代入(2.14)，得

$$\frac{\partial \overset{-1}{C}_{AB}}{\partial C_{MN}} C_{BK} + \overset{-1}{C}_{AM} \delta_{KN} = 0 \tag{2.16}$$

(2.16)式乘以 $\overset{-1}{C}_{KP}$，并利用$(2.13)_2$，得

$$\frac{\partial \overset{-1}{C}_{AB}}{\partial C_{MN}} \delta_{BP} + \overset{-1}{C}_{AM} \overset{-1}{C}_{NP} = 0$$

因此

$$\frac{\partial \overset{-1}{C}_{AP}}{\partial C_{MN}} = -\overset{-1}{C}_{AM} \overset{-1}{C}_{NP}$$

把指标 P 改为 B，即为(2.12)式。 [证毕]

现在来检验$(2.9)_2$ L_{ABCD} 是否满足$(2.2)_1$。利用公式(2.12)，$(2.9)_2$ 式 L_{ABCD} 对 C_{MN} 求导，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{ABCD}}{\partial C_{MN}} = &-\lambda\left(\overset{-1}{C}_{AM} \overset{-1}{C}_{NB} \overset{-1}{C}_{CD} + \overset{-1}{C}_{AB} \overset{-1}{C}_{CM} \overset{-1}{C}_{ND}\right) \\ &-\mu\left(\overset{-1}{C}_{AM} \overset{-1}{C}_{NC} \overset{-1}{C}_{BD} + \overset{-1}{C}_{AC} \overset{-1}{C}_{BM} \overset{-1}{C}_{ND} + \overset{-1}{C}_{AM} \overset{-1}{C}_{ND} \overset{-1}{C}_{BC} + \overset{-1}{C}_{AD} \overset{-1}{C}_{BM} \overset{-1}{C}_{NC}\right)\end{aligned} \tag{2.17}$$

因为(2.17)对于指标 M 与 N 不对称，而$(2.2)_1$ 式是假定等式两端已经进行指标对称化，因此，参考前面(1.20a)式的推导，应该把欲检验的条件$(2.2)_1$ 写作

$$\frac{\partial L_{ABCD}}{\partial C_{EF}} + \frac{\partial L_{ABCD}}{\partial C_{FE}} = \frac{\partial L_{ABEF}}{\partial C_{CD}} + \frac{\partial L_{ABEF}}{\partial C_{DC}} \tag{2.18}$$

在$(2.2)_1$ 中对张量 $\boldsymbol{E}$ 分量求导，在(2.18)中改为对张量 $\boldsymbol{C}$ 分量求导，这是因为由第 1 章(1.26)

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\mathbf{1})$$
$$E_{AB}=\frac{1}{2}(C_{AB}-\delta_{AB}) \tag{2.19}$$

故有

$$\frac{\partial}{\partial E_{AB}}=2\frac{\partial}{\partial C_{AB}}$$

将(2.17)代入(2.18)，整理后得到与$(2.2)_1$等价的下式：

$$\lambda\left\{\left[\overset{-1}{C}_{AC}\overset{1}{C}_{BD}+\overset{1}{C}_{AD}\overset{1}{C}_{BC}\right]\overset{1}{C}_{EF}-\left[\overset{1}{C}_{AE}\overset{-1}{C}_{BF}+\overset{-1}{C}_{AF}\overset{-1}{C}_{BE}\right]\overset{-1}{C}_{CD}\right\}=0 \tag{2.20}$$

因为$\lambda>0$，(2.20)式显然不满足。因此由小变形情况推广而来的在即时构形 z 中率形式弹性本构关系(2.6),(2.7)不是超弹性本构关系。

Simo 与 Pister（1984）曾讨论率形式弹性本构关系(1.75)：

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{J}\mathscr{L}:\boldsymbol{d} \tag{2.21}$$

式中$(1/J)\mathscr{L}$如(2.7)式，即

$$\mathscr{L}=J[\lambda\mathbf{1}\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{I}]$$
$$\mathscr{L}_{ijkl}=J(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+2\mu\boldsymbol{I}_{ijkl}) \tag{2.22}$$

并证明此时$(2.2)_1$可化为

$$J(\lambda+\mu)\left\{\left[\overset{-1}{C}_{AC}\overset{-1}{C}_{BD}+\overset{1}{C}_{AD}\overset{-1}{C}_{BC}\right]\overset{-1}{C}_{EF}-\left[\overset{-1}{C}_{AE}\overset{1}{C}_{BF}+\overset{-1}{C}_{AF}\overset{-1}{C}_{BE}\right]\overset{1}{C}_{CD}\right\}=0 \tag{2.23}$$

因为$\lambda+\mu>0$，(2.22)式显然也不满足。因此(2.21)，(2.22)不是超弹性本构关系。

读者可以自己验证第 3 章由小变形推广而来的大变形率形式弹性本构关系(7.8),(7.9)不满足条件$(2.2)_1$，因此不是超弹性本构关系。

4.3 各向同性材料大变形弹性本构关系

参见 Simo 与 Pister（1984）所著文献。

为了简单起见，我们假设等温情况，$\dot{\theta}=0$，因此每单位质量 Hemholtz 自由能$\psi(\boldsymbol{E},\theta)$只依赖于 Green 应变张量。由(2.19)，也可设$\psi=\psi(\boldsymbol{C})$为右 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}$ 的函数。因材料为各向同性，ψ只通过 $\boldsymbol{C}$ 的三个不变量而依赖于 $\boldsymbol{C}$。$\boldsymbol{C}$ 的三个不变量定义为

$$\mathrm{I}=\mathrm{I}(C)=C_{\mathrm{I\,I}}+C_{\mathrm{II\,II}}+C_{\mathrm{III\,III}}$$

$$\mathrm{II}=\mathrm{II}(C)=\begin{vmatrix}C_{\mathrm{I\,I}} & C_{\mathrm{I\,II}}\\ C_{\mathrm{II\,I}} & C_{\mathrm{II\,II}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}C_{\mathrm{II\,II}} & C_{\mathrm{II\,III}}\\ C_{\mathrm{III\,II}} & C_{\mathrm{III\,III}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}C_{\mathrm{III\,III}} & C_{\mathrm{III\,I}}\\ C_{\mathrm{I\,III}} & C_{\mathrm{I\,I}}\end{vmatrix} \tag{3.1}$$

$$\mathrm{III}=\mathrm{III}(C)=\begin{vmatrix}C_{\mathrm{I\,I}} & C_{\mathrm{I\,II}} & C_{\mathrm{I\,III}}\\ C_{\mathrm{II\,I}} & C_{\mathrm{II\,II}} & C_{\mathrm{II\,III}}\\ C_{\mathrm{III\,I}} & C_{\mathrm{III\,II}} & C_{\mathrm{III\,III}}\end{vmatrix}$$

由(3.1)易见，I($\boldsymbol{C}$)为 $\boldsymbol{C}$ 的三个主分量之和，II($\boldsymbol{C}$)为 $\boldsymbol{C}$ 的三个主分量两两乘积之和，III($\boldsymbol{C}$)为 $\boldsymbol{C}$ 的分量行列式，等于主分量之积。由第 3 章(1.15)，可知

$$\mathrm{I}=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2,\quad \mathrm{II}=\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2,\quad \mathrm{III}=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \tag{3.2}$$

由第 3 章(1.30)，左 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{c}^{-1}$ 与右 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}$ 具有相同的主值 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2$，故 I,II,III 也是 $\boldsymbol{B}$ 的三个主不变量：

$$\mathrm{I}=\mathrm{I}(\boldsymbol{C})=\mathrm{I}(\boldsymbol{B}),\quad \mathrm{II}=\mathrm{II}(\boldsymbol{C})=\mathrm{II}(\boldsymbol{B}),\quad \mathrm{III}=\mathrm{III}(\boldsymbol{C})=\mathrm{III}(\boldsymbol{B}) \tag{3.3}$$

张量分析中证明任何二阶对称张量都满足 Cayley-Hamilton 等式，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^3-\mathrm{I}\boldsymbol{C}^2+\mathrm{II}\boldsymbol{C}-\mathrm{III}\mathbf{1}=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{B}^3-\mathrm{I}\boldsymbol{B}^2+\mathrm{II}\boldsymbol{B}-\mathrm{III}\mathbf{1}=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.4}$$

张量分析中也证明了三个主不变量对于张量的导数公式[1)]：

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \boldsymbol{C}}=\mathbf{1},\quad \frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \boldsymbol{C}}=\mathrm{I}\mathbf{1}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}},\quad \frac{\partial \mathrm{III}}{\partial \boldsymbol{C}}=\mathrm{III}\boldsymbol{C}^{-\mathrm{T}} \tag{3.5a}$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial C_{AB}}=\delta_{AB},\quad \frac{\partial \mathrm{II}}{\partial C_{AB}}=\mathrm{I}\delta_{AB}-C_{BA},\quad \frac{\partial \mathrm{III}}{\partial C_{AB}}=\mathrm{III}\overset{-1}{C}_{BA} \tag{3.5b}$$

式中，因 $\boldsymbol{C}$ 为对称，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}$，$C_{AB}=C_{BA}$；$\boldsymbol{C}^{-\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$，$\overset{-1}{C}_{BA}=\overset{-1}{C}_{AB}$。由第 3 章(1.14)，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}$，利用$(3.1)_3$、第 3 章(4.7)与矩阵乘法的行列式关系，可知

$$\mathrm{III}=J^2 \tag{3.6}$$

因此$(3.5\mathrm{b})_3$成为

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{C}}=\frac{1}{2}J\boldsymbol{C}^{-\mathrm{T}},\quad \frac{\partial J}{\partial C_{AB}}=\frac{1}{2}J\overset{-1}{C}_{BA} \tag{3.5c}$$

---

1) 取张量为变形梯度 $\boldsymbol{F}$，由(3.5b)的第一式可导出第 3 章的(4.8)式。

将$\psi(\boldsymbol{C})$代入本构关系$(1.11)_1$,可得

$$\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}=2\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{C}}=2\left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{I}}\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial\boldsymbol{C}}+\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{II}}\frac{\partial\mathrm{II}}{\partial\boldsymbol{C}}+\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{III}}\frac{\partial\mathrm{III}}{\partial\boldsymbol{C}}\right] \tag{3.7}$$

将(3.5a)代入,得

$$\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}=2\left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{I}}\mathbf{1}+\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{II}}(\mathrm{I}\mathbf{1}-\boldsymbol{C})+\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{III}}\mathrm{III}\boldsymbol{C}^{-1}\right] \tag{3.8}$$

将(3.8)式从参考构形$\mathscr{K}$逆变(##)前推到即时构形κ，即按第 3 章(6.30a)的运算，$\boldsymbol{F}\cdot(3.8)\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，并注意第 3 章 (1.14) $\boldsymbol{C}$， (1.28) $\boldsymbol{B}$ 及 $\tau/\rho_0=\sigma/\rho$，得到

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}=2\left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{I}}\boldsymbol{B}+\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{II}}(\mathrm{I}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^2)+\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{III}}\mathrm{III}\mathbf{1}\right] \tag{3.9}$$

为了使(3.9)右端为 $\boldsymbol{B}$ 的线性式，即不出现$\boldsymbol{B}^2$项，我们假定

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{II}}=0 \tag{3.10}$$

（3.10）表示ψ只依赖于 $\boldsymbol{C}$ 的第一不变量 I 与第三不变量 III。利用(3.6)，换变量 III 为J，设

$$\psi=\psi(I,J) \tag{3.11}$$

则(3.8)与(3.9)可写作：

$$\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}=2\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{I}}\mathbf{1}+J\frac{\partial\psi}{\partial J}\boldsymbol{C}^{-1} \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}=2\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{I}}\boldsymbol{B}+J\frac{\partial\psi}{\partial J}\mathbf{1} \tag{3.13}$$

将(3.12)代入$(1.65)_1$，求 $\boldsymbol{L}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{T}}}{\partial\boldsymbol{E}}=2\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\boldsymbol{C}}=2\rho_0\Bigg\{&2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial I^2}\frac{\partial I}{\partial\boldsymbol{C}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial I\partial J}\frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{C}}\right)\mathbf{1}\\&+\left[\frac{\partial}{\partial I}\left(J\frac{\partial\psi}{\partial J}\right)\frac{\partial I}{\partial\boldsymbol{C}}+\frac{\partial}{\partial J}\left(J\frac{\partial\psi}{\partial J}\right)\frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{C}}\right]\boldsymbol{C}^{-1}+J\frac{\partial\psi}{\partial J}\frac{\partial\boldsymbol{C}^{-1}}{\partial\boldsymbol{C}}\Bigg\}_{\text{对称化}}\end{aligned} \tag{3.14a}$$

(3.14a)右端尚必须对指标进行对称化。利用(3.5a,b,c)与(2.12)，可得上式的分量形式：

$$
\begin{aligned}
L_{ABCD} = 2\rho_0 \Bigg\{ & 2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial I^2} \delta_{AB} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I \partial J} \frac{1}{2} J \overset{-1}{C}_{AB} \right) \delta_{CD} \\
& + \left[J \frac{\partial^2 \psi}{\partial I \partial J} \delta_{AB} + \frac{\partial}{\partial J} \left(J \frac{\partial \psi}{\partial J} \right) \frac{1}{2} J \overset{-1}{C}_{AB} \right] \overset{-1}{C}_{CD} - J \frac{\partial \psi}{\partial J} \overset{-1}{C}_{AC} \overset{-1}{C}_{DB} \Bigg\}_{\text{对称化}}
\end{aligned}
\tag{3.14b}
$$

为了使(3.14b) L_{ABCD} 获得如$(2.9)_2$的简单形式，应令

$$
\frac{\partial^2 \psi}{\partial I^2} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial I \partial J} \equiv 0
$$

故 $\partial \psi / \partial I$ 为常数，并记作 a

$$
\frac{\partial \psi}{\partial I} \equiv a \tag{3.15}
$$

因此(3.14b)成为

$$
\begin{aligned}
L_{ABCD} &= 2\rho_0 \left\{ \frac{1}{2} J \frac{\partial}{\partial J} \left(J \frac{\partial \psi}{\partial J} \right) \overset{-1}{C}_{AB} \overset{-1}{C}_{CD} - J \frac{\partial \psi}{\partial J} \overset{-1}{C}_{AC} \overset{-1}{C}_{DB} \right\}_{\text{对称化}} \\
&= \rho_0 \left\{ J \frac{\partial}{\partial J} \left(J \frac{\partial \psi}{\partial J} \right) \overset{-1}{C}_{AB} \overset{-1}{C}_{CD} - J \frac{\partial \psi}{\partial J} \left(\overset{-1}{C}_{AC} \overset{-1}{C}_{BD} + \overset{-1}{C}_{AD} \overset{-1}{C}_{BC} \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{3.16a}
$$

对称化以后的 L_{ABCD} (3.16a)满足 Voigt 对称性。将弹性刚度张量 $\boldsymbol{L}$ 从参考构形 $\mathscr{R}$ 逆变(####)前推到即时构形 τ，并注意由(2.10)，$\boldsymbol{C}^{-1}$ 的前推为

$$
(\boldsymbol{FF}) \cdot\cdot \boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = 1 \tag{3.17}
$$

得到在即时构形 τ 中的弹性刚度张量为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= (\boldsymbol{FFFF}) \cdot\cdot\cdot\cdot \boldsymbol{L} \\
\mathscr{L}_{ijkl} &= \rho_0 \left\{ J \frac{\partial}{\partial J} \left(J \frac{\partial \psi}{\partial J} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} - J \frac{\partial \psi}{\partial J} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{3.16b}
$$

对 $\psi(I,J)$的选择还应满足两个要求：

(1) 在参考状态 $\mathscr{R}(\boldsymbol{C}=\boldsymbol{1}, I=3, J=1)$，无初应力作用，即由(3.12)，在参考构形 $\mathscr{R}$：

$$
2\frac{\partial \psi}{\partial I} + \frac{\partial \psi}{\partial J} = 0
$$

利用(3.15)，由此得

$$\frac{\partial \psi}{\partial J} = -2a \qquad 当 I = 3, J = 1 \tag{3.18}$$

(2) 在小变形情况下，(3.16a) L_{ABCD} 能过渡到$(2.9)_2$的 L_{ABCD}（λ与μ为 Lamé 系数），即在参考状态$\mathscr{R}$：

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial J}\left(J \frac{\partial \psi}{\partial J} \right) = \lambda, \qquad -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J} = \mu$$

故

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial J^2} + \frac{\partial \psi}{\partial J} \right) = \lambda, \qquad -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J} = \mu \qquad 当 I = 3, J = 1 \tag{3.19}$$

比较(3.18)与$(3.19)_2$，可知$a = \mu / 2\rho_0$。因此，由(3.15)

$$\frac{\partial \psi}{\partial I} = \frac{\mu}{2\rho_0} \tag{3.20}$$

(3.19)要求

$$\frac{\partial \psi}{\partial J} = -\frac{\mu}{\rho_0}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial J^2} = \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \qquad 当 I = 3, J = 1 \tag{3.21}$$

选择满足条件(3.20)与(3.21)的ψ的形式为

$$\psi = \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{1}{2}\mu I + \lambda U(J) - \mu \ln J \right] \tag{3.22}$$

则(3.21)变成

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}J^2} = 1 \qquad 当 J = 1 \tag{3.23}$$

于是弹性本构方程(3.12)与(3.13)各成为

$$\boldsymbol{T} = \mu \mathbf{1} + \left[\lambda J \frac{\mathrm{d}U(J)}{\mathrm{d}J} - \mu \right] \boldsymbol{C}^{-1} \tag{3.24}$$

$$J\boldsymbol{\sigma} = \mu \boldsymbol{B} + \left[\lambda J \frac{\mathrm{d}U(J)}{\mathrm{d}J} - \mu \right] \mathbf{1} \tag{3.25}$$

(3.16a)与(3.16b)各成为

$$L_{ABCD} = \lambda J \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J}\left(J \frac{\mathrm{d}U(J)}{\mathrm{d}J} \right) C^{-1}_{AB} C^{-1}_{CD} + \left(\mu - \lambda J \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J} \right)\left(C^{-1}_{AC} C^{-1}_{BD} + C^{-1}_{AD} C^{-1}_{BC} \right) \tag{3.26a}$$

$$\mathscr{L}_{ijkl} = \lambda J \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J}\left(J\frac{\mathrm{d}U(J)}{\mathrm{d}J}\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \left(\mu - \lambda J\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J}\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{3.26b}$$

Simo 与 Pister 选择满足条件(3.23)的最简单的函数 $U(J)$形式为

$$U(J) = \frac{1}{2}(\ln J)^2 \tag{3.27}$$

弹性本构关系(3.24)与(3.25)成为

$$\boldsymbol{T} = \mu\mathbf{1} + (\lambda\ln J - \mu)\boldsymbol{C}^{-1} \tag{3.28}$$

$$J\boldsymbol{\sigma} = \mu\boldsymbol{B} + (\lambda\ln J - \mu)\mathbf{1} \tag{3.29}$$

在参考构形 $\mathscr{R}$ 中率形式的弹性本构方程为(1.63)(设 $\dot{\theta} = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{T}} &= \boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{E}} \\ \dot{T}_{AB} &= L_{ABCD}\dot{E}_{CD} \end{aligned} \tag{3.30}$$

式中 L_{ABCD} 可将(3.27)代入(3.26a)而得

$$L_{ABCD} = \lambda \overset{-1}{C}_{AB}\overset{-1}{C}_{CD} + (\mu - \lambda\ln J)\left(\overset{-1}{C}_{AC}\overset{-1}{C}_{BD} + \overset{-1}{C}_{AD}\overset{-1}{C}_{BC}\right) \tag{3.31}$$

在即时构形 $\boldsymbol{\tau}$ 中率形式的弹性本构方程为(1.68)（设 $\dot{\theta} = 0$）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} &= \mathscr{L}:\boldsymbol{d} \\ \tau_{ij}^{\mathrm{Oldr}} &= \mathscr{L}_{ijkl}d_{kl} \end{aligned} \tag{3.32}$$

式中 $\mathscr{L}_{ijkl}$ 可将(3.27)代入(3.26b)而得

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{ijkl} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + (\mu - \lambda\ln J)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu' I_{ijkl} \end{aligned} \tag{3.33}$$

式中

$$\mu' = \mu - \lambda\ln J \tag{3.34}$$

(3.30)，(3.31)与(3.32)，(3.33)是等价的，是率形式超弹性本构关系。

将(3.33)与第 1 章(1.32)′小变形情况弹性刚度张量比较，可看出其差别只是把小变形情况的 Lamé 参数μ改为(3.34)的μ'。因此借用第 1 章 $\mathscr{M} = \mathscr{L}^{-1}$ 的公式第 1 章(1.8)″，可得(3.33) $\mathscr{L}$ 的逆为

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_{ijkl} &= \frac{1}{2\mu'}\bar{I}_{ijkl} + \frac{1}{3(2\mu' + 3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{1}{2\mu'}I_{ijkl} + \frac{\lambda}{2\mu'(2\mu' + 3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl} \\ &= \frac{1}{4\mu'}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{\lambda}{2\mu'(2\mu' + 3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl} \end{aligned} \tag{3.35}$$

因此(3.32)逆形式为

$$\boldsymbol{d} = \mathscr{M} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$$
$$d_{ij} = \mathscr{M}_{ijkl}\tau_{kl}^{\mathrm{Oldr}} \tag{3.36}$$

(3.36)为即时构形 τ 中率形式的弹性本构方程（变形率通过应力率表示）。可以把(3.36)从即时构形 τ 协变(bb)后拉到参考构形 $\mathscr{R}$ 中（见第 3 章(6.42)式），得到

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{T}}$$
$$\dot{E}_{AB} = M_{ABCD}\dot{T}_{CD} \tag{3.37}$$

式中

$$\boldsymbol{M} = \left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)^{*}_{*} : \mathscr{M} \tag{3.38a}$$

将(3.35) $\mathscr{M}$ 代入(3.38a)，并利用第 3 章(1.14)式

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)^{*}_{*} \boldsymbol{g}$$

式中 $\boldsymbol{g} = \mathbf{1}$ 表示即时构形 τ 中的单位张量，可得到 $\boldsymbol{M}$ 的分量为

$$M_{ABCD} = \frac{1}{4\mu'}\left(C_{AC}C_{BD} + C_{AD}C_{BC}\right) - \frac{\lambda}{2\mu'\left(2\mu' + 3\lambda\right)}C_{AB}C_{CD} \tag{3.38b}$$

式中 μ' 见(3.34)。(3.36)与(3.37)各为在即时构形 τ 与参考构形 $\mathscr{R}$ 中的率形式超弹性本构关系，它们各是(3.32)与(3.30)之逆。

习 题 4

4.1 设各向同性弹性材料每单位质量 Hemholtz 自由能为（设等温情况）

$$\psi = \psi(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) \qquad ①$$

式中 I, II, III 为右 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}$（或左 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{B}$）的三个不变量（见(3.3)）。求证材料的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta_0\mathbf{1} + \beta_1\boldsymbol{B} + \beta_2\boldsymbol{B}^{-1} \qquad ②$$

式中

$$\beta_0 = 2\rho_0\frac{1}{\sqrt{\mathrm{III}}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{II}}\mathrm{II} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{III}}\mathrm{III}\right)$$

$$\beta_1 = 2\rho_0 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{III}}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{I}}, \quad \beta_2 = -2\rho_0 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{III}}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{II}} \qquad ③$$

β_0，β_1，β_2都是三个主不变量 I，II，III 的函数。

提示：利用(3.9)与$(3.4)_2$式。

4.2 设材料受剪切变形，x_i与X_A的关系为（见第 3 章(8.2)）

$$x_1 = X_1 + \gamma X_{\mathrm{II}}, \quad x_2 = X_{\mathrm{II}}, \quad x_3 = X_{\mathrm{III}}$$

式中γ为常数，称为剪切角。

(1) 证明：

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{I} = 3+\gamma^2, \ \mathrm{II} = 3+\gamma^2, \quad \mathrm{III} = 1$$

(2) 设材料为各向同性弹性，利用习题 4.1③式可知β_0，β_1，β_2均为γ^2的函数，证明

$$\sigma_{11} = \gamma^2 \beta_1 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$$

$$\sigma_{22} = \gamma^2 \beta_2 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2), \quad \sigma_{33} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$$

因而有 Poynting 效应：　　$\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$

且σ_{11}，σ_{22}，σ_{12}之间存在一与材料无关的关系式：

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = \gamma \sigma_{12}$$

4.3 设材料受均匀拉伸

$$x_1 = \lambda X_1, \quad x_2 = \pi X_{\mathrm{II}}, \quad x_3 = \pi X_{\mathrm{III}}$$

式中λ，π为常数。设材料为各向同性弹性。利用习题 4.1，证明材料的应力状态为：

$$\sigma_{11} = \beta_0 + \beta_1 \lambda^2 + \beta_2 \lambda^{-2}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \beta_0 + \beta_1 \pi^2 + \beta_2 \pi^{-2}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

式中β_0，β_1，β_2为λ^2与π^2的函数（通过不变量 I，II，III）。

4.4 把弹性本构关系(3.8)写成率形式，并转移到即时构形κ中。

4.5 试用弹性本构关系(3.29)式：$J\boldsymbol{\sigma} = \mu \boldsymbol{B} + (\lambda \ln J - \mu)\mathbf{1}$，计算习题 4.2 的剪切变形情况，绘出 Kirchhoff 剪切应力τ_{12}/μ与$\gamma/2$的变化关系（作为第 3 章图 3-13 的补充）。

第 5 章　大变形弹塑性本构关系

5.1　弹性变形与塑性变形[1)]

在大变形弹塑性本构理论中有两种途径，一种是给出弹性变形与塑性变形的定义；另一种是对弹性变形与塑性变形不加以定义，而只定义弹性变形率与塑性变形率。

我们现在给出 Green 弹性应变张量 $\boldsymbol{E}^{e}$ 与 Green 塑性应变张量 $\boldsymbol{E}^{p}$ 的一种定义。

图 5-1 中示出同图 3-1 一样的参考构形 $\mathscr{R}$ 与时刻 t 的即时构形 $\mathscr{r}(t)$。假定时刻 t 为一定，并略去自变量不写。由第 3 章(1.6)，(1.11a)与(1.12a)，则有运动（变形）方程、变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 与线元变换公式如下：

$$x_i = x_i(X_B) \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_B}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_B = \boldsymbol{F}_{iB}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_B \tag{1.2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1.3}$$

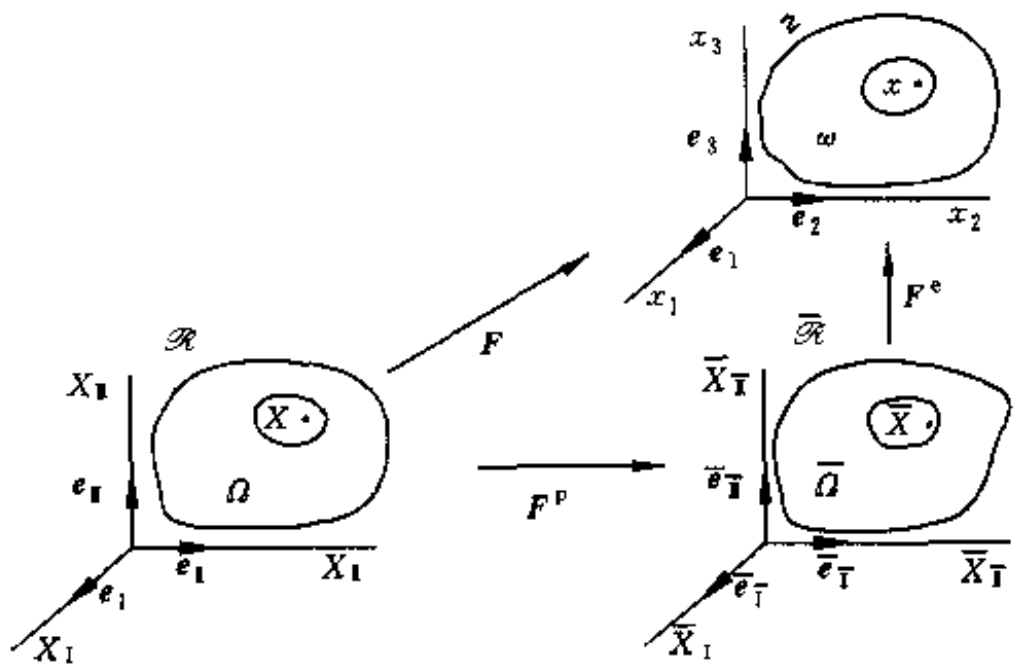


图 5-1　参考构形 $\mathscr{R}$，中间或卸载构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 与即时构形 $\mathscr{r}$

现在我们假定从参考构形 $\mathscr{R}$ 到即时构形 $\mathscr{r}$ 的变形分两步走。第一步，由参考构形 $\mathscr{R}$ 先变形到一中间构形 $\bar{\mathscr{R}}$，$\boldsymbol{X}$ 点变位到 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 点，仿照(1.1)与(1.2)，运动（变形）方程、变形梯度 $\boldsymbol{F}^{p}$ 与线元变换公式各为：

1) 本节内容可参考黄克智，程莉(1989)。

$$\overline{X}_{\overline{A}} = \overline{X}_{\overline{A}}(X_B) \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = \frac{\partial \overline{X}_{\overline{A}}}{\partial X_B} \overline{\boldsymbol{e}}_{\overline{A}} \boldsymbol{e}_B \tag{1.5}$$

$$\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1.6}$$

式中 $\overline{X}_{\overline{A}}(\overline{A} = \overline{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}})$ 为在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中选定的直角坐标系，$\overline{\boldsymbol{e}}_{\overline{A}}$ 为沿坐标方向的单位矢量。然后进行第二步，由中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 变形到即时构形 $\mathscr{R}$，其运动（变形）方程、变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 与线元变换公式各为：

$$x_i = x_i(\overline{X}_{\overline{A}}) \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} = \frac{\partial x_i}{\partial \overline{X}_{\overline{A}}} \boldsymbol{e}_i \overline{\boldsymbol{e}}_{\overline{A}} \tag{1.8}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}} \tag{1.9}$$

将(1.6)代入(1.9)，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1.10}$$

(1.10)与(1.3)对比，并注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 为任意，可得 [1)]

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \tag{1.11}$$

现在我们来研究 X 点及其附近的一小邻域（物质的）。假定中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 是由即时构形 $\mathscr{R}$ 卸载而得，也称为卸载构形。如果每点附近的小邻域都完全卸载，那么卸载后的各个微元之间变形可能不协调，卸载构形不可能是一个连续体。因此我们只限于研究 X 点的一个小邻域，想象把它从物体的其余部分割开，而中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 专指此一小邻域的卸载构形。因此(1.4) $\overline{X}_{\overline{A}}(X_B)$ 与(1.7) $x_i(\overline{X}_{\overline{A}})$ 两个连续函数已不存在。但仍可以把(1.5)$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 与(1.8)$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 表示成以下形式：

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = F^{\mathrm{p}}_{\overline{A}B} \overline{\boldsymbol{e}}_{\overline{A}} \boldsymbol{e}_B \tag{1.5$'$}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} = F^{\mathrm{e}}_{i\overline{A}} \boldsymbol{e}_i \overline{\boldsymbol{e}}_{\overline{A}} \tag{1.8$'$}$$

因为 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$（即 $F^{\mathrm{p}}_{\overline{A}B}$）与 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$（即 $F^{\mathrm{e}}_{i\overline{A}}$）只是局部的量，不能对它们进行空间的微分运算，而只能对时间进行微分运算。$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 各称为弹性变形梯度与塑性变形梯度。分解式(1.11)最早是由 E. H. Lee(1969)提出的，可称为变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的弹塑性分解式。

附带指出，在图 5-1 所示从即时构形 $\mathscr{R}$ 完全卸载到中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的过程中不产生新的反

---

1) 若 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 与 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 如(1.5)与(1.8)所示，(1.11)的分量形式就是复合函数求导公式

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_B} = \frac{\partial x_i}{\partial \overline{X}_{\overline{A}}} \frac{\partial \overline{X}_{\overline{A}}}{\partial X_B}$$

向塑性变形。以图 5-2 所示的单向拉伸情况为例，O 点相当于参考构形 $\mathscr{R}$，B 点相当于即时构形 $\mathscr{r}$，卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 相当于 A 点。尽管实际上从 B 点卸载还未到达 A 点之前可能已经开始产生新的反向塑性变形，但是我们仍然假定有一个状态即 A，为卸载状态。

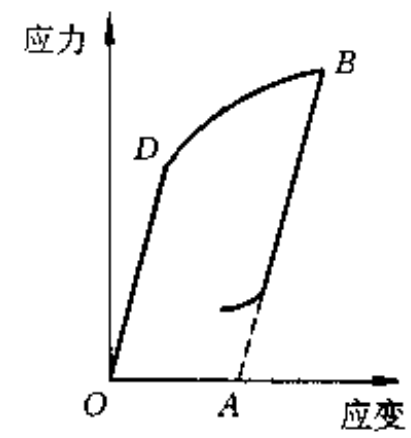


图 5-2　卸载状态 A

根据(1.11)式的变形梯度 $\boldsymbol{F}$，可以计算其它的几何张量，例如右 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$（第 3 章(1.14)）与 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$(第 3 章(1.26))：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G})=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}-\boldsymbol{G}\right) \tag{1.13}$$

式中 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{1}$ 表示在参考构形 $\mathscr{R}$ 中的度量张量。记 $\overline{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{1}$ 为在卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的度量张量。以后一律用大写字母表示参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量，大写字母加横表示卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的张量，小写字母表示即时构形 $\mathscr{r}$ 中的张量[1]。仿照第 3 章由变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 构造右 Cauchy-Green 变形张量(1.14)$\boldsymbol{C}$ 与 Green 应变张量(1.26)$\boldsymbol{E}$，我们可以对弹性变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 构造类似的张量：

$$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}},\qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \tag{1.14}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}-\overline{\boldsymbol{G}}\right),\qquad \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}-\boldsymbol{G}\right) \tag{1.15}$$

也可以仿照第 1 章公式构造其它的几何张量，例如仿照第 3 章左 Cauchy-Green 变形张量(1.28)

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.16}$$

可以构造

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}},\qquad \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} \tag{1.17}$$

利用(1.14)与(1.15)式，可将(1.13)$\boldsymbol{E}$ 式改写为

---

1) 因此以前用 $\boldsymbol{B}$ 表示的 $\mathscr{r}$ 构形中的左 Cauchy-Green 变形张量，在本章中用小写字母 $\boldsymbol{b}$ 表示。

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{-1}} \cdot \overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}} \tag{1.18}$$

若记

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} \cdot \overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \tag{1.19}$$

则

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}} \tag{1.20}$$

(1.20)就是 Green 应变张量分解为弹塑性两部分之和的公式。$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 称为 Green 弹性应变张量而 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 称为 Green 塑性应变张量，它们都是参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量。以上推导过程的实质在于以 $(1.15)_2$ 作为 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 的定义，而把 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 定义为 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}-\boldsymbol{G}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}) \tag{1.21}$$

这个定义最早是由 Green 与 Naghdi(1965,1971)提出的。Simo 与 Ortiz(1985)把参考构形 $\mathscr{R}$ 的若干几何张量（记作 $\boldsymbol{Z}$）列成表 5-1 中的第 1 列，将 $\boldsymbol{Z}$ 从参考构形 $\mathscr{R}$ 协变(bb)前推到卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中得到表 5-1 中的第 2 列 $\overline{\boldsymbol{Z}}$，协变(bb)前推到即时构形 $\varkappa$ 中得到表 5-1 中的第 3 列 $\boldsymbol{z}$。由第 3 章 3.6.2 中张量的第二种转移，即协变(bb)转移的公式（见第 3 章(6.38a)），$\boldsymbol{Z}$、$\overline{\boldsymbol{Z}}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 三者间的关系为：

$$\boldsymbol{z} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{Z} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}, \qquad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{F} \tag{1.22a}$$

$$\overline{\boldsymbol{Z}} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{Z} \cdot \overset{1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}}, \quad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} \cdot \overline{\boldsymbol{Z}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \tag{1.22b}$$

$$\boldsymbol{z} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{Z}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}, \qquad \overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \tag{1.22c}$$

第 2 列 $\overline{\boldsymbol{Z}}$ 既是第 1 列 $\boldsymbol{Z}$ 的协变(bb)前推，也是第 3 列 $\boldsymbol{z}$ 的协变(bb)后拉。表 5-1 中的 $\boldsymbol{G}$，$\overline{\boldsymbol{G}}$，$\boldsymbol{g}$ 各表示构形 $\mathscr{R}$，$\overline{\mathscr{R}}$，$\varkappa$ 中的度量张量，它们都是单位张量：$\boldsymbol{G}=\overline{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{g}=\boldsymbol{1}$。表 5-1 中第 4, 5, 6 行各为第 1, 2, 3 行中两行差之半。

表 5-1　基本几何张量的协变(bb)转移

构形 $\mathscr{R}$ $\boldsymbol{Z}$	构形 $\overline{\mathscr{R}}$ $\overline{\boldsymbol{Z}}$	构形 $\varkappa$ $\boldsymbol{z}$
度量张量 $\boldsymbol{G}$	$\overset{1}{\overline{\boldsymbol{B}}}{}^{\mathrm{p}} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}}$ $= \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{-1}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$
Green 塑性变形张量 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{-1}} \cdot \overline{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$	$\overline{\boldsymbol{G}}$	$\overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^{\mathrm{e}} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{G}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}$
Green 变形张量 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{F}$	$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}}$ $= \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \cdot \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{g}$

续表

构形 $\mathscr{R}$ $\boldsymbol{Z}$	构形 $\overline{\mathscr{R}}$ $\overline{\boldsymbol{Z}}$	构形 τ $\boldsymbol{z}$
Green 应变张量 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G})$	$\overline{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}-\overset{-1}{\overline{\boldsymbol{B}}}{}^{\mathrm{p}}\right)$	$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{b}^{-1}\right)$
Green 塑性应变张量 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}-\boldsymbol{G}\right)$	$\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{G}}-\overset{-1}{\overline{\boldsymbol{B}}}{}^{\mathrm{p}}\right)$	$\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{b}^{-1}\right)$
Green 弹性应变张量 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)$	$\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}-\overline{\boldsymbol{G}}\right)$	$\boldsymbol{e}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{g}-\overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^{\mathrm{e}}\right)$
Green 应变分解 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$	$\overline{\boldsymbol{E}}=\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}+\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$	$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}$

现在我们来说明表 5-1 中各几何张量的意义。以 $\mathrm{d}\boldsymbol{X},\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}},\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 各表示在构形 $\mathscr{R},\overline{\mathscr{R}},\tau$ 中的相同物质点所构成的线元，它们相互之间是逆变转移关系。因此用表 5-1 中第 1, 2, 3 列的张量各与三个构形的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X},\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}},\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 进行双点积，结果应该相等。例如对第 1, 2, 3 行进行此运算，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S^2&=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\cdot\overset{-1}{\overline{\boldsymbol{B}}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
\mathrm{d}\overline{S}^2&=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\cdot\overline{\boldsymbol{G}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{b}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
\mathrm{d}s^2&=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

式中 $\mathrm{d}S,\mathrm{d}\overline{S},\mathrm{d}s$ 各表示线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X},\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}},\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的长度。对第 4, 5, 6 行用 $\mathrm{d}\boldsymbol{X},\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}},\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 进行双点积的结果为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}S^2\right)&=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\overline{S}^2-\mathrm{d}S^2\right)&=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}\overline{S}^2\right)&=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
\tag{1.23$'$}
$$

(1.22)说明表 5-1 中第 1 至 3 行各几何张量的意义，(1.23)′ 说明第 4 至 6 行各几何张量的意义。

最后指出，图 5-1 中所示卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 不是唯一的，从即时构形 τ 卸载以后所达到的卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 可以相差一个刚体转动。例如，我们把图 5-1 中的卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 经过以任一正交张量 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 表示的刚体转动以后所得到的构形 $\overline{\mathscr{R}}_{\beta}$ 取作卸载构形。则相当于把变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的分解式改为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{(\beta)} \tag{1.24}$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}&=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}&=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}\end{aligned} \tag{1.25}$$

由(1.25)可得

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}},\qquad \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}=\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{(\beta)} \tag{1.26}$$

由$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_{(\beta)},\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}$所构造的在卸载构形$\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$中的几何张量与由$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$所构造的在卸载构形$\overline{\mathscr{R}}$中的几何张量是不同的。例如，由$(1.14)_1$，可得

$$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}_{(\beta)}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_{(\beta)} \tag{1.27}$$

将$(1.25)_1$代入(1.27)，可得$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$与$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$的关系：

$$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \tag{1.28}$$

(1.28)式表明$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$与$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$的前矢量与后矢量都相差一个以$\overline{\boldsymbol{\beta}}$表示的转动。满足类似与(1.28)关系式的还有其它一些张量，例如表 5-1 中第 2 列所示的卸载构形$\overline{\mathscr{R}}$中所有的张量。但是表 5-1 中第 1 列所示的参考构形$\mathscr{R}$中的张量$\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}},\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$等与第 3 列所示的即时构形$\tau$中的张量$\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}$等，均不受卸载构形刚性转动$\overline{\boldsymbol{\beta}}$的影响，即与$\overline{\boldsymbol{\beta}}$无关。

5.2 弹性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$

首先说明长度率的概念。第 3 章图 3-1 所示在参考构形$\mathscr{R}$中线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$，在即时构形τ中变成 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。随着时间 t，线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的大小与方向不断地变化。由第 3 章(2.8)线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的物质导数公式：

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}=\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tag{2.1}$$

线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的长度$|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|$记作 $\mathrm{d}s$。我们来求 $\mathrm{d}s$ 的变化率。根据长度的计算公式：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

对时间求导，并利用(2.1)与第 3 章$(2.4)_1$式，可得

$$(\mathrm{d}s)(\mathrm{d}s)^{\cdot}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.2}$$

定义 $\boldsymbol{n}$ 为沿线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 方向的单位矢量，即

$$\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} \tag{2.3}$$

定义 d_n 为构形 τ 中沿 $\boldsymbol{n}$ 方向线元每单位长度的变化率，d_n 称为 $\boldsymbol{n}$ 方向的长度率，即

$$d_n=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|^{\cdot}}{\mathrm{d}s} \tag{2.4}$$

由(2.2)，(2.4)可得

$$d_n=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n} \tag{2.5}$$

d_n 称为 $\boldsymbol{d}$ 沿 $\boldsymbol{n}$ 的法分量。(2.5)式说明只要知道变形率张量 $\boldsymbol{d}$，就可确定沿任一方向 $\boldsymbol{n}$ 的长度率。如果我们把变形率 $\boldsymbol{d}$ 分解为弹性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 两部分之和（见下(2.13)式），就相当于把长度率分解为弹性与塑性两部分之和。

5.2.1 Moran-Ortiz-Shih 定义

由第 3 章(2.7a)与(2.7)′，变形梯度的率 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 与速度梯度 $\boldsymbol{l}$ 之间存在关系式：

$$\dot{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{F},\qquad \boldsymbol{l}=\boldsymbol{v}\nabla=\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.6}$$

仿照(2.6)，也可以定义弹性速度梯度 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}$ 与塑性速度梯度 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 如下：

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}},\qquad \boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}=\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}} \tag{2.7}$$

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}=\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}},\qquad \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}=\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}} \tag{2.8}$$

这里 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}$ 是即时构形 τ 中的张量，而 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 是卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的张量。取(1.11)式 $\boldsymbol{F}$ 对时间 t 的物质导数，并利用$(2.7)_1$ 与$(2.8)_1$，得

$$\dot{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$$

上式两端点乘 $\boldsymbol{F}^{-1}$，并利用$(2.6)_2$及(1.11)，得

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}} \tag{2.9}$$

定义上式的右端第二项为即时构形 τ 中的塑性速度梯度 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$，即

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}} \tag{2.10}$$

因此(2.9)式可理解为速度梯度 $\boldsymbol{l}$ 分解为弹性与塑性两部分：

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} \tag{2.11}$$

但应注意，正好像位移不能分解为弹性与塑性两部分一样，速度 $\boldsymbol{v}$ 也不能分解为所谓弹性速度 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{e}}$ 与塑性速度 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{p}}$ 使得 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{e}}\nabla$ 与 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{p}}\nabla$。取(2.11)式张量的对称与反对称部分（见第

3 章$(2.4)_1$式）：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}=\{\boldsymbol{l}\}_{\mathrm{sym}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right), && \boldsymbol{w}=\{\boldsymbol{l}\}_{\mathrm{antisym}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right)\\
&\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}=\left\{\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\right\}_{\mathrm{sym}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\right), && \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}=\left\{\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\right\}_{\mathrm{antisym}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\right)\\
&\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\left\{\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}\right\}_{\mathrm{sym}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}+\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\right), && \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\left\{\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}\right\}_{\mathrm{antisym}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

可得

$$
\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}, \qquad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} \tag{2.13}
$$

$(2.13)_1$就是 Moran，Ortiz 和 Shih (1990)定义的变形率 $\boldsymbol{d}$ 的分解式。在他们之前，北川浩(1987)也提到过。其实质就是由$(2.12)_3$式定义 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$，由(2.13)式定义 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$，即 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$。

下面先补充几个公式．首先可以把(2.10)式扩充为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{l}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\ \overset{1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}\right)\overset{*}{*}\overline{\boldsymbol{L}}\\
&\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\ \overset{1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}\right)\overset{*}{*}\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}}\\
&\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\ \overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}\right)\overset{*}{*}\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

由$(2.14)_2$，并利用$(2.7)_2$，可得

$$
\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}}=\overset{1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}} \tag{2.15}
$$

(2.14)表明在即时构形 $\varkappa$ 中的速度梯度张量 $\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 与卸载构形 $\overline{\varkappa}$ 中的速度梯度张量 $\overline{\boldsymbol{L}},\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}},\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 之间是第 3 章 3.6.2 所述的第三种转移（即#b 混合转移），见第 3 章(6.50a)式．(2.11)式由即时构形 $\varkappa$ 混合(#b)后拉到卸载构形 $\overline{\varkappa}$，就成为

$$
\overline{\boldsymbol{L}}=\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}}+\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} \tag{2.16}
$$

在即时构形 $\varkappa$ 中线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的物质导数$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\bullet}$已见(2.1)．在中间构形 $\overline{\varkappa}$ 中线元 $\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}$ 的物质导数$(\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}})^{\bullet}$，可由(1.6)式求得：

$$
(\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}})^{\bullet}=\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{2.17}
$$

利用$(2.8)_1$的 $\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}$ 代入，并再利用(1.6)，可得

$$
(\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}})^{\bullet}=\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} \tag{2.18}
$$

(2.7)式 $(\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}})^{\cdot}$ 的形式与(2.1) $(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}$ 的形式相类似，这说明 $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 在中间构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 中的意义犹如在即时构形 $\mathscr{r}$ 中的速度梯度 $\boldsymbol{l}$。

按照(2.11)速度梯度 $\boldsymbol{l}$ 分解为弹性与塑性部分 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$，可以把(2.1)线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的率 $(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}$ 也分解为弹性与塑性部分，$\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{e}}$ 与 $\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}}$，称为线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的弹性率与塑性率：

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}=\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{e}}+\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}} \tag{2.19}$$

式中

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}=\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x},\qquad \left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x},\qquad \left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.20}$$

比较(2.18)与$(2.20)_3$，可以看出：因为 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 为构形 $\mathscr{r}$ 与 $\bar{\mathscr{R}}$ 之间的#b混合转移（见(2.14)），$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 与 $\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}$ 之间为逆变(#)转移（见(1.9)），因此在 $\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}}$ 与 $(\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}})^{\cdot}$ 之间为逆变(#)转移，即

$$\begin{aligned}\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}}&=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot(\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}})^{\cdot}\\(\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}})^{\cdot}&=\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}\cdot\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}}\end{aligned} \tag{2.21}$$

表 5-2 中把即时构形 $\mathscr{r}$ 中的变形率 $\boldsymbol{d},\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 协变(bb)后拉到参考构形 $\mathscr{R}$ 与卸载构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 中，得到 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{D}},\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}},\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$。利用第 3 章(2.13)或(6.42)，可证

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}=\dot{\boldsymbol{E}} \tag{2.22}$$

表 5-2 中各构形中张量 $\boldsymbol{Z},\bar{\boldsymbol{Z}},\boldsymbol{z}$ 满足与表 5-1 相同的转移公式(1.22a-c)。由(2.13)，表 5-2 的第 1 行为第 2、第 3 行之和，第 4 行为第 5、第 6 行之和，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}},\qquad \bar{\boldsymbol{D}}=\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}+\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}\\\boldsymbol{W}&=\boldsymbol{W}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{p}},\qquad \bar{\boldsymbol{W}}=\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{e}}+\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}}\end{aligned} \tag{2.13$'$}$$

类似于(1.23)的推导，利用(2.2)，可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)(\mathrm{d}s)^{\cdot}&=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}\cdot\bar{\boldsymbol{D}}\cdot\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}\\(\mathrm{d}s)\left[(\mathrm{d}s)^{\cdot}\right]^{\mathrm{e}}&=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}\cdot\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}\\(\mathrm{d}s)\left[(\mathrm{d}s)^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}}&=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}\cdot\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}\end{aligned} \tag{2.23}$$

式中线元长度的率 $(\mathrm{d}s)^{\cdot}$ 分解为弹性与塑性两部分：

$$(\mathrm{d}s)^{\cdot}=\left[(\mathrm{d}s)^{\cdot}\right]^{\mathrm{e}}+\left[(\mathrm{d}s)^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}} \tag{2.24}$$

表 5-2　变形率与旋率的分解与协变(bb)转移（Moran-Ortiz-Shih）

	构形 $\mathscr{R}$ $\boldsymbol{Z}$	构形 $\overline{\mathscr{R}}$ $\overline{\boldsymbol{Z}}$	构形 $\mathscr{r}$ $\boldsymbol{z}$
变形率	$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}=\dot{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{F}^{p^{-T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F}^{p^{-1}}$ $=\boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$	$\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}^{T}\right)$
弹性变形率	$\boldsymbol{D}^{e}=\boldsymbol{F}^{T}\cdot\boldsymbol{d}^{e}\cdot\boldsymbol{F}$	$\overline{\boldsymbol{D}}^{e}=\boldsymbol{F}^{p^{T}}\cdot\boldsymbol{D}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{p^{-1}}$ $=\boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{d}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{e}=\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{e}$	$\boldsymbol{d}^{e}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{e}+\boldsymbol{l}^{e^{T}}\right)$
塑性变形率	$\boldsymbol{D}^{p}=\boldsymbol{F}^{T}\cdot\boldsymbol{d}^{p}\cdot\boldsymbol{F}$	$\overline{\boldsymbol{D}}^{p}=\boldsymbol{F}^{p^{-T}}\cdot\boldsymbol{D}^{p}\cdot\boldsymbol{F}^{p^{-1}}$ $=\boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{d}^{p}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$	$\boldsymbol{d}^{p}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{p}+\boldsymbol{l}^{p^{T}}\right)$
旋率	$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}^{T}\cdot\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{F}$	$\overline{\boldsymbol{W}}=\boldsymbol{F}^{p^{-T}}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{F}^{p^{-1}}$ $=\boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$	$\boldsymbol{w}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}^{T}\right)$
弹性旋率	$\boldsymbol{W}^{e}=\boldsymbol{F}^{T}\cdot\boldsymbol{w}^{e}\cdot\boldsymbol{F}$	$\overline{\boldsymbol{W}}^{e}=\boldsymbol{F}^{p^{-T}}\cdot\boldsymbol{W}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{p^{-1}}$ $=\boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{w}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$	$\boldsymbol{w}^{e}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{e}-\boldsymbol{l}^{e^{T}}\right)$
塑性旋率	$\boldsymbol{W}^{p}=\boldsymbol{F}^{T}\cdot\boldsymbol{w}^{p}\cdot\boldsymbol{F}$	$\overline{\boldsymbol{W}}^{p}=\boldsymbol{F}^{p^{-T}}\cdot\boldsymbol{W}^{p}\cdot\boldsymbol{F}^{p^{-1}}$ $=\boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{w}^{p}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$	$\boldsymbol{w}^{p}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{p}-\boldsymbol{l}^{p^{T}}\right)$

可以证明两个公式：

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{e}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{e}+\overline{\boldsymbol{L}}^{e^{T}}\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\right),\qquad \overline{\boldsymbol{W}}^{e}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{e}-\overline{\boldsymbol{L}}^{e^{T}}\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\right)\tag{2.25a}$$

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{p}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{p}+\overline{\boldsymbol{L}}^{p^{T}}\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\right),\qquad \overline{\boldsymbol{W}}^{p}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{p}-\overline{\boldsymbol{L}}^{p^{T}}\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\right)\tag{2.25b}$$

它们的证明用到$(1.21c)_2$，$(2.12)_{2,3}$，$(2.14)_{2,3}$和$(1.14)_1$。利用$(1.21c)_2$，$(2.12)_2$，$(2.7)_2$，$(1.14)_{1,3}$，还可以证明：

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{e}=\frac{1}{2}\dot{\overline{\boldsymbol{C}}}^{e}=\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{e}\tag{2.26}$$

其实(2.26)就是 Moran、Ortiz 与 Shih(1990)定义的实质所在。他们的弹塑性理论（见后 5.6）是在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中建立的。所以把中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的 Green 弹性应变张量 $\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{e}$ 的率定义为弹性变形率 $\overline{\boldsymbol{D}}^{e}$，通过表 5-2 的协变(bb)转移而定义在参考构形 $\mathscr{R}$ 中的弹性变形率 $\boldsymbol{D}^{e}$ 与即时构形 $\mathscr{r}$ 中的弹性变形率 $\boldsymbol{d}^{e}$。

现在以单晶体的单滑移为例来说明$(2.20)_3$即$(2.21)_1$式的几何意义。图 5-3 示单晶体的参考构形 $\mathscr{R}$，中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$，与即时构形 $\mathscr{r}$。在参考构形 $\mathscr{R}$ 中，以 $\boldsymbol{m}$ 表示垂直于滑移面的单位矢量，$\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 表示在滑移面上的两个互相正交的单位矢量，其中 $\boldsymbol{s}_2$ 垂直于纸面向内。在卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 由于沿滑移面上 $\boldsymbol{s}_1$ 方向的滑移所造成的剪切角为 γ，因此从构形 $\mathscr{R}$ 到构形

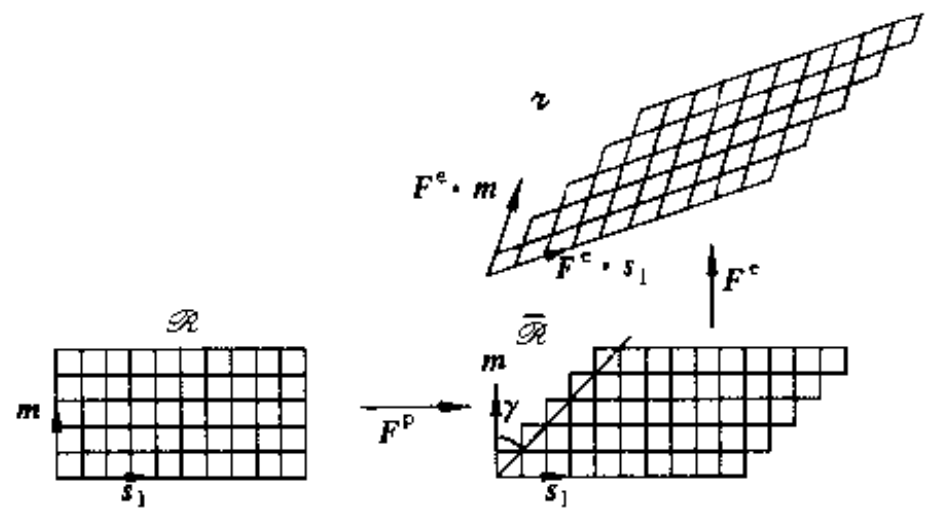


图 5-3　单晶滑移

$\bar{\mathscr{R}}$ 的变形梯度为

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = \mathbf{1} + \gamma \boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{m} \tag{2.27}$$

上式表明在参考构形 $\mathscr{R}$ 中线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 每跨越一个 $\boldsymbol{m}$，沿 $\boldsymbol{s}_1$ 方向滑移γ。显然

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i \quad (i = 1,2), \qquad \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} + \gamma \boldsymbol{s}_1 \tag{2.28}$$

(2.28)式表明变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 不改变 $\boldsymbol{s}_i$ (i=1,2)的大小与方向，但是把构形 $\mathscr{R}$ 中的矢量 $\boldsymbol{m}$ 变成构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 中的 $\boldsymbol{m}+\gamma \boldsymbol{s}_1$。可以验证(2.27)$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 之逆为

$$\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} = \mathbf{1} - \gamma \boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{m} \tag{2.29}$$

将(2.27)的导数 $\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma} \boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{m}$ 与(2.29) $\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}}$ 代入$(2.8)_2$，得

$$\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma} \boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{m} \tag{2.30}$$

将(2.30)代入(2.18)，可得

$$\left(\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}\right)^{\cdot} = \bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}} = \dot{\gamma} \boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{m} \cdot \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}} \tag{2.31}$$

将(2.31) $\left(\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}\right)^{\cdot}$ 代入线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的率的塑性部分 $\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}}$ 即$(2.21)_1$ 中，得

$$\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \left(\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}\right)^{\cdot} = \dot{\gamma}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{s}_1\right)\left(\boldsymbol{m} \cdot \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}\right) \tag{2.32}$$

(2.32)表示在中间构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 中 $\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}$ 沿 $\boldsymbol{m}$ 方向每跨越单位长度，在即时构形 $\mathscr{r}$ 中线元的塑性率 $\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}}$ 增加 $\dot{\gamma}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{s}_1\right)$。将 $\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{X}}$ 由(1.9)代入(2.32)，得

$$\left[(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}\right]^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{s}_1\right)\left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{m}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.32$'$}$$

因此在即时构形 $\varkappa$ 中线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 每跨越一个矢量 $\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{m}$，线元的塑性率增加 $\dot{\gamma}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{s}_1\right)$。

最后指出两点：

(1) Moran，Ortiz 和 Shih(1990)只定义了弹性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 如表 5-2，但是没有定义弹性变形与塑性变形。如果一定要的话，只能把表 5-2 中构形 $\mathscr{K}$ 中的弹性变形率 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形率 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}$ 对时间的积分定义为弹性变形与塑性变形，它们都是构形 $\mathscr{K}$ 中的张量，记作

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{MOS}}&=\int\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MOS}}&=\int\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{2.33}$$

这里用下标 MOS 表示 Moran，Ortiz 和 Shih。因为 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}=\dot{\boldsymbol{E}}$，显然有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{MOS}}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MOS}}\tag{2.33$'$}$$

(2) 虽然速度梯度 $\boldsymbol{l}$ 及其对称部分变形率 $\boldsymbol{d}$ 作为即时构形 $\varkappa$ 中的张量，不受卸载构形刚性转动（以正交张量 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 表示，见(1.25)）的影响，即

$$\boldsymbol{l}_{(\beta)}=\boldsymbol{l},\quad \boldsymbol{d}_{(\beta)}=\boldsymbol{d}$$

但是 $\boldsymbol{l}$ 分解的 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 两部分（见(2.11)），因而 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$(见(2.12))，却受到卸载构形刚性转动的影响，即（见黄克智，《非线性连续介质力学》，清华大学、北京大学出版社，1989，452 页(9.5.37)式。）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}&\neq\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}},\quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}\neq\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}\\ \boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}&\neq\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}},\quad \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}\neq\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\end{aligned}\tag{2.34}$$

因此，表 5-2 中所示 9 个变形率，只有 $\boldsymbol{D}=\dot{\boldsymbol{E}}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 不受卸载构形刚性转动的影响，与正交张量 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 无关。在卸载构形 $\overline{\mathscr{K}}$，材料一般为各向异性，例如图 5-3 所示单晶材料都具有一定的特征方向，$\boldsymbol{m},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$。Mandel（1971,1973,1974），Van der Giessen（Besseling 与 Van der Giessen，1993）都对在卸载构形 $\overline{\mathscr{K}}$ 的材料取向加以规定。他们都认为材料具有细观结构。Mandel 引进“取向矢量”(director vectors)，规定取向矢量在一定的方向，构形 $\overline{\mathscr{K}}$ 称为“等向构形”(isoclinic configuration)。Van der Giessen 引进“自然参考状态”(natural reference state)的概念，也规定卸载构形 $\overline{\mathscr{K}}$ 的取向为一定。但是如果在卸载构形材料是各向同性，不具有细观结构，本构方程（包括弹性与塑性）的形式与卸载构形 $\overline{\mathscr{K}}_{(\beta)}$ 的刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 无关，则可人为地规定卸载构形 $\overline{\mathscr{K}}$ 的刚性转动方式，使得塑性速度梯度 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 不含有旋转部分，即 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 为对称：

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}},\qquad \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{0}\tag{2.35}$$

5.2.2 Green-Naghdi 与 Simo-Ortiz 的定义

根据 5.1 中 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 分解为弹性与塑性部分，即 $\boldsymbol{E}^{e}$ 与 $\boldsymbol{E}^{p}$，由(1.20)式对时间求导得

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\boldsymbol{E}}^{e} + \dot{\boldsymbol{E}}^{p} \tag{2.36}$$

Green 与 Naghdi（1965，1971）把 $\dot{\boldsymbol{E}}^{e}$ 与 $\dot{\boldsymbol{E}}^{p}$ 各定义为在参考构形 $\mathscr{R}$ 中的弹性变形率与塑性变形率。Simo 与 Ortiz（1985）把 $\dot{\boldsymbol{E}},\dot{\boldsymbol{E}}^{e},\dot{\boldsymbol{E}}^{p}$ 从参考构形 $\mathscr{R}$ 协变(bb)前推到卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 与即时构形 τ 中，得到卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的变形率分解式（下标 SO 表示 Simo 与 Ortiz）：

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{D}} &= \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^{p}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{p} = \overline{\boldsymbol{D}}^{e}_{SO} + \overline{\boldsymbol{D}}^{p}_{SO} \\
\overline{\boldsymbol{D}}^{e}_{SO} &= \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^{p}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{e}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{p} \\
\overline{\boldsymbol{D}}^{p}_{SO} &= \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^{p}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{p}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{p}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

和在即时构形 τ 中的变形率分解式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d} &= \overset{-T}{\boldsymbol{F}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{d}^{e}_{SO} + \boldsymbol{d}^{p}_{SO} \\
\boldsymbol{d}^{e}_{SO} &= \overset{-T}{\boldsymbol{F}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{e}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}} \\
\boldsymbol{d}^{p}_{SO} &= \overset{-T}{\boldsymbol{F}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{p}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

表5-3中各列，即各构形中的张量，与表5-1及表5-2一样满足张量的协变(bb)转移关系(1.22)。注意表 5-3（Simo 与 Ortiz）与表 5-2（Moran-Ortiz-Shih）关于变形率的第 1 行是一样的，差别只在于两表把变形率分解为弹性与塑性两部分的方法不同。将$(1.15)_2$ $\boldsymbol{E}^{p}$ 对时

表 5-3　变形率分解(Simo-Ortiz)

	构形 $\mathscr{R}$ $\boldsymbol{Z}$	构形 $\overline{\mathscr{R}}$ $\overline{\boldsymbol{Z}}$	构形 τ $\boldsymbol{z}$
变形率	$\dot{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{D}} = \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^{p}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{p}$ $= \boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$	$\boldsymbol{d} = \overset{-T}{\boldsymbol{F}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}$
弹性变形率	$\dot{\boldsymbol{E}}^{e}$	$\overline{\boldsymbol{D}}^{e}_{SO} = \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^{p}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{e}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{p}$ $= \boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{d}^{e}_{SO}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$	$\boldsymbol{d}^{e}_{SO} = \overset{-T}{\boldsymbol{F}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{e}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}$
塑性变形率	$\dot{\boldsymbol{E}}^{p}$	$\overline{\boldsymbol{D}}^{p}_{SO} = \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^{p}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{p}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{p}$ $= \boldsymbol{F}^{e^{-1}}\cdot\boldsymbol{d}^{p}_{SO}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$	$\boldsymbol{d}^{e}_{SO} = \overset{-T}{\boldsymbol{F}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{e}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}$

间求导，利用$(1.14)_2$，得

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}+\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}\right) \tag{2.39}$$

将$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}$ $(2.8)_1$式代入(2.39)，然后再将上式$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$代入$(2.37)_3$，可证：

$$\overline{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}+\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\right)=\left\{\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\right\}_{\mathrm{sym}} \tag{2.40}$$

将(2.40)$\overline{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}$与(2.25b)$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$进行比较，可见它们之间的差别。因此表 5-3 中 Simo 与 Ortiz 的弹塑性变形率分解的方法是与表 5-2 中 Moran-Ortiz-Shih 的分解方法是不同的。利用$(1.15)_1$可以证明(2.25b)的$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$与(2.40)的$\overline{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}$的关系：

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}=\overline{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}+\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}+\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}} \tag{2.41}$$

为了看出$\boldsymbol{d}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}$与$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$的差别，我们把(2.40)的$\overline{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}$从卸载构形$\overline{\mathscr{R}}$协变(bb)前推到即时构形$\tau$，得到

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\left(\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}+\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\right)\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \tag{2.42}$$

而将(2.10)代入$(2.12)_5$，则得

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}+\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\right) \tag{2.43}$$

当卸载构形$\overline{\mathscr{R}}$与即时构形τ只差一个刚性转动，即$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$为正交张量时，$\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}$，由$(1.15)_1$，$\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$，则由(2.41)，$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}=\overline{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}$，由(2.42)与(2.43)，$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{d}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}$，表 5-2 与表 5-3 的差别消失。

最后指出，表 5-3 中构形$\mathscr{R}$中的变形率$\dot{\boldsymbol{E}},\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$与构形$\tau$中的变形率$\boldsymbol{d},\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$均不受卸载构形刚性转动的影响，即与正交张量$\overline{\boldsymbol{\beta}}$无关。

5.2.3 Rice 与 Hill 的定义

在 Rice-Hill（Rice(1971,1975)，Hill 与 Rice(1972,1973)）的弹塑性本构理论中做了以下的假设：

(1) 对于率无关的材料，在应力空间或应变空间[1]中有一个弹性区存在，它是该空间屈服面以内的区域；对于率相关材料，应力和应变的瞬时响应是弹性的。

(2) 塑性变形是由材料的内部结构经过变化所引起的（例如位错、孪晶，扩散、相变等）；内部结构可以想象通过某种约束来固定住，而此时（即内部结构不变）应力与应变

1) 当温度也变化时，应考虑应力-温度空间或者应变-温度空间。

遵循弹性关系。

虽然 Rice-Hill 允许采用任何的 Hill 应力度量 $\mathscr{T}$ 与应变度量 $\mathscr{E}$，我们这里为简单起见，采用第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}^{(1)}=\boldsymbol{T}$ 与 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}^{(1)}=\boldsymbol{E}$。这相当于选 Hill 应变度量函数 $f(\lambda)=(\lambda^2-1)/2$（见第 3 章(1.47)与(3.31)′）。除了第 4 章弹性本构关系的变量 $\boldsymbol{T}$ 或应变 $\boldsymbol{E}$，绝对温度 θ 或熵 η 以外，我们这里还要引进材料的内部结构，记为 PIR（Pattern of internal rearrangement，指材料的内部重新排列模式），或者引进与 PIR 相对应的材料塑性变形历史，记为 $\mathscr{H}$。PIR 或 $\mathscr{H}$ 的数学表达是很复杂的，例如 PIR 涉及到位错网的几何表达，$\mathscr{H}$ 涉及到把塑性变形的过程表示成时间 t 的函数。一般说来，PIR 或 $\mathscr{H}$ 不能用一组变量来表示，例如在晶体塑性本构理论中，尽管当前的状态各滑移系的滑移角 $\gamma^{(\alpha)}$ 都具有一定的值，若仅知道各滑移系的滑移角 $\gamma^{(\alpha)}$（α 表示不同的滑移系）还不能唯一地决定当前状态的塑性变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$，因为当前的 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 还与各滑移系的滑移次序（历史）有关。但为了简单起见，在以下的数学推演中，我们有时假设 PIR 或 $\mathscr{H}$ 可以用一组变量 ξ_α 表示(α=1,2,3)。这一组变量称为内变量。但是状态量（例如 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 等）与内变量之间不一定是函数关系。只有当状态量是内变量的函数时，对内变量的导数(例如下文中(2.47)$_2$ 的 $\partial\boldsymbol{E}/\partial\xi_\alpha$ 与(2.48)$_2$ 的 $\partial\eta/\partial\xi_\alpha$）才有意义。

按照 Rice-Hill 的理论，第 4 章大变形弹性本构关系仍旧适用，只不过自变量还要加上 PIR（或记作 $\mathscr{H}$），或 $\xi_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$。假定在温度 θ 与熵 η 这两个变量中，取 θ 为自变量，则本构关系可写作，对应于第 4 章(1.11)：

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H}),\qquad \eta=\eta(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H}) \tag{2.44}$$

或，对应于第 4 章(1.15)：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H}),\qquad \eta=\eta(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H}) \tag{2.45}$$

Rice 与 Hill 不对弹性变形与塑性变形下定义，而只把变形率分为弹性与塑性两部分。(2.45)对时间求物质导数，得

$$\dot{\boldsymbol{E}}=(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}+(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}},\qquad \dot{\eta}=(\dot{\eta})^{\mathrm{e}}+(\dot{\eta})^{\mathrm{p}} \tag{2.46}$$

式中 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}$ 为变形率的弹性部分（称为弹性变形率），$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$ 为变形率的塑性部分（称为塑性变形率），$(\dot{\eta})^{\mathrm{e}}$ 与 $(\dot{\eta})^{\mathrm{p}}$ 各为熵率的弹性与塑性部分（称为弹性熵率与塑性熵率）

$$\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}&=\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\boldsymbol{T}}\right)_{\theta,\mathscr{H}}:\dot{\boldsymbol{T}}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\theta}\right)_{\boldsymbol{T},\mathscr{H}}\dot{\theta}\\(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}&=\lim_{\mathrm{d}t\to\infty}\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H})-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\xi_\alpha}\right)_{\boldsymbol{T},\theta}\dot{\xi}_\alpha\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$
\begin{aligned}
(\dot{\eta})^{\mathrm{e}} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{T}}\right)_{\theta,\mathscr{H}} : \dot{\boldsymbol{T}} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)_{\boldsymbol{T},\mathscr{H}} \dot{\theta} \\
(\dot{\eta})^{\mathrm{p}} &= \lim_{\mathrm{d}t\to\infty} \frac{\eta(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H}) - \eta(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi_\alpha}\right)_{\boldsymbol{T},\theta} \dot{\xi}_\alpha
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

只当 PIR 或 $\mathscr{H}$可以用一组内变量$\xi_\alpha(\alpha=1,2\cdots,n)$表示时，$(2.47)_2$与$(2.48)_2$可以通过内变量的率$\dot{\xi}_\alpha(\alpha=1,2\cdots,n)$表示，所谓$\dot{\boldsymbol{E}}$或$\dot{\eta}$的塑性部分就是指由于内变量的变化所引起的部分。

Rice-Hill 定义与 5.2.2 中 Simo-Ortiz 定义的差别在于 Rice-Hill 不定义$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$与$\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$这两个量，而只把$\dot{\boldsymbol{E}}$分成(2.46)的两部分。因此我们把表 5-3 修改成表 5-4，只需要把$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$与$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$各改为$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}$与$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$。下标 RH 表示 Rice 和 Hill。

表 5-4　变形率分解(Rice-Hill)的协变(bb)转移

	构形 $\mathscr{R}$ $\boldsymbol{Z}$	构形 $\overline{\mathscr{R}}$ $\overline{\boldsymbol{Z}}$	构形 τ $\boldsymbol{z}$
变形率	$\dot{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{D}} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{-1}} \cdot \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{d} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}$
变形率的弹性部分	$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}$	$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{RH}} = \overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} \cdot (\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \cdot \boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{RH}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{RH}} = \overset{-1}{\boldsymbol{F}} \cdot (\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}$
变形率的塑性部分	$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$	$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} \cdot (\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \cdot \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}} \cdot (\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}$

我们也可以对(2.44)进行与上述对(2.45)同样的处理，(2.44)对时间求物质导数后，得到

$$
\dot{\boldsymbol{T}} = (\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{e}} + (\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{p}}, \qquad \dot{\eta} = (\dot{\eta})^{\mathrm{e}} + (\dot{\eta})^{\mathrm{p}}
\tag{2.49}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
(\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{e}} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{\theta,\mathscr{H}} : \dot{\boldsymbol{E}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \theta}\right)_{\boldsymbol{E},\mathscr{H}} \dot{\theta} \\
(\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{p}} &= \lim_{\mathrm{d}t\to\infty} \frac{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi_\alpha}\right)_{\boldsymbol{E},\theta} \dot{\xi}_\alpha
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

$$
\begin{aligned}
(\dot{\eta})^{\mathrm{e}} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{\theta,\mathscr{H}} : \dot{\boldsymbol{E}} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)_{\boldsymbol{E},\mathscr{H}} \dot{\theta} \\
(\dot{\eta})^{\mathrm{p}} &= \lim_{\mathrm{d}t\to\infty} \frac{\eta(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H}) - \eta(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi_\alpha}\right)_{\boldsymbol{E},\theta} \dot{\xi}_\alpha
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

最后指出两点：

(1) 中间构形。Rice-Hill 理论只是把变形率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 分成弹性与塑性两部分，即 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}$ 与 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$，本来并不需要中间构形的概念。Rice（1975）曾给出一个“塑性变形” $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 的定义[1)]，即令温度 θ 与材料内部结构 $\mathscr{H}$ 保持不变，应力全部卸除以后的残余变形，或即由(2.45)，令 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})=\boldsymbol{E}(0,\theta,\mathscr{H}),\qquad \eta^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})=\eta(0,\theta,\mathscr{H}) \tag{2.52}$$

(2.52)的状态相当于中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$，塑性变形 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 就是中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的 Green 应变 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$。$(2.52)_1$ 对时间求物质导数：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=(\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}})^{\cdot}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta}\dot{\theta}+\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H})-\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha\end{aligned} \tag{2.53}$$

将(2.53)与$(2.47)_2$比较，显然有

$$(\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}})^{\cdot}\neq(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}} \tag{2.54}$$

这说明塑性变形 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 的率不同于变形率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 的塑性部分 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$。我们更关心的是后者，即 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$，所以把它称为塑性变形率。为了和 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}=(\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}})^{\cdot}\mathrm{d}t$ 相区别，定义

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}=(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t \tag{2.55}$$

为塑性变形增量，而把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}=(\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}})^{\cdot}\mathrm{d}t$ 称为残余变形增量。与(2.55)相类似，定义

$$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}=(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t \tag{2.56}$$

为弹性变形增量。由$(2.46)_1$，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\dot{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}+\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E} \tag{2.57}$$

注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 是 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的微分，但 $\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}$ 与 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}$ 都不是某一个变形张量的微分，它们只代表 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 分解的两个部分。

举例来说，假定材料的弹性行为，变形 $\boldsymbol{E}$ 与应力 $\boldsymbol{T}$ 为线性关系：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})=\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})+\boldsymbol{M}(\theta,\mathscr{H}):\boldsymbol{T} \tag{2.58}$$

式中，由于弹塑性耦合，弹性柔度张量 $\boldsymbol{M}$ 还依赖于塑性变形历史 $\mathscr{H}$。由(2.58)可得弹性变形率 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形率 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$：

---

1) $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 实际上为残余变形。

$$
\begin{aligned}
(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}} &= \frac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}\frac{\partial \boldsymbol{M}(\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta}:\boldsymbol{T} + \boldsymbol{M}(\theta,\mathscr{H}):\dot{\boldsymbol{T}} \\
(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}} &= \frac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}(\theta,\mathscr{H})}{\partial \xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha + \dot{\xi}_\alpha\frac{\partial \boldsymbol{M}(\theta,\mathscr{H})}{\partial \xi_\alpha}:\boldsymbol{T}
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

比较$(2.59)_2$与(2.53)，易见(2.54)。设温度不变，$\dot{\theta}=0$，则有

$$
(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}} = (\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}})^{\cdot} + \dot{\xi}_\alpha\frac{\partial \boldsymbol{M}(\theta,\mathscr{H})}{\partial \xi_\alpha}:\boldsymbol{T} \qquad (\dot{\theta}=0) \tag{2.60}
$$

图 5-4 用单向拉伸图说明 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 的差别。当弹塑性不耦合，即 $\boldsymbol{M}(\theta,\mathscr{H})$与 $\mathscr{H}$无关时，才有

$$
(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}} = (\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}})^{\cdot}, \qquad \mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}} \qquad （弹塑性不耦合，且\dot{\theta}=0） \tag{2.61}
$$

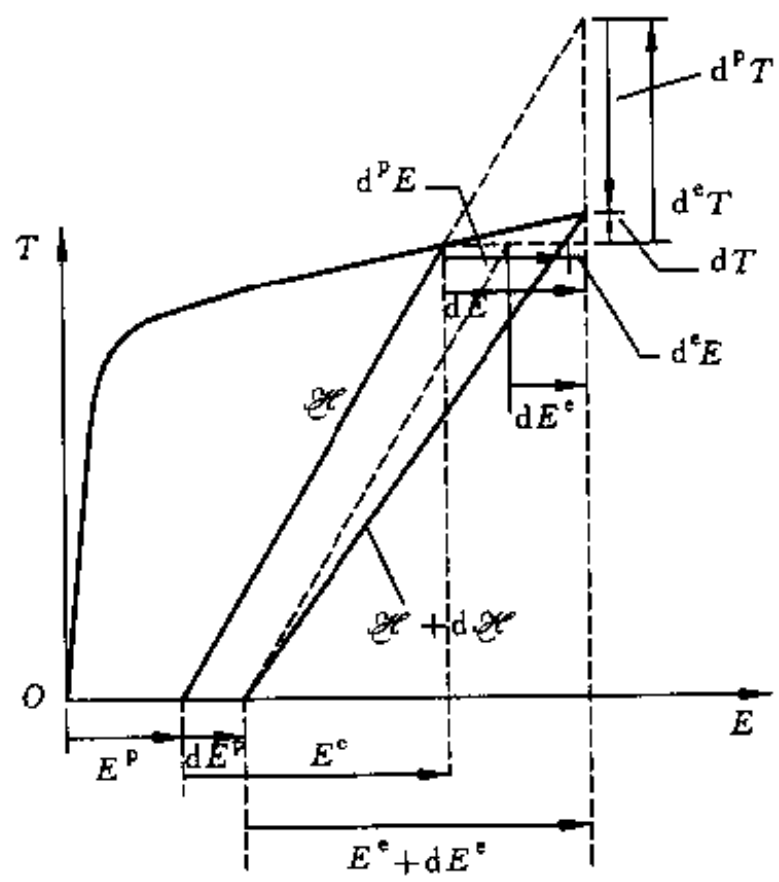


图 5-4 应变增量 $\mathrm{d}E$ 与应力增量 $\mathrm{d}T$ 分为弹塑性两部分 $\mathrm{d}^{\mathrm{e}}E$ 与 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}E$，$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}T$ 与 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}T$，E^{p} 为残余应变

(2) 度量相关性。在第 3 章 3.1.3 我们引进了 Hill 应变度量 $\mathscr{E}$(Seth 应变度量 $\boldsymbol{E}^{(n)}$为其特例，见第 3 章(1.45),(1.46))，第 3 章 3.2.3 引进了 Hill 应力度量的率 $\dot{\mathscr{E}}$，第 3 章 3.3.4 引进了功共轭的概念及 Hill 应力度量 $\mathscr{T}$。他们都是参考构形 $\mathscr{R}$中的张量，其定义取决于度量函数 $f(\lambda)$，只要 $f(\lambda)$满足条件 $f(1)=0$，$f'(1)=0$。选择不同的度量函数，例如 $f(\lambda)$与 $f^*(\lambda)$，那么对应的应变度量 $\mathscr{E}$与 $\mathscr{E}^*$，应力度量 $\mathscr{T}$与 $\mathscr{T}^*$也互不相同。当物体从 t 时刻的构形 τ 运动（变形）到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的构形 τ'，虽然是同一物理过程，以不同的度量函数 $f(\lambda)$与 $f^*(\lambda)$来描述，应变（应力）度量也互不相同。但由第 3 章(3.32)计算所得的变形功率 w，因而元功 $w\mathrm{d}t$ 都

是相同的：

$$
\begin{aligned}
w &= \mathscr{T} : \dot{\mathscr{E}} = \mathscr{T}^* : \dot{\mathscr{E}}^* \\
w\mathrm{d}t &= \mathscr{T} : \mathrm{d}\mathscr{E} = \mathscr{T}^* : \mathrm{d}\mathscr{E}^*
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

实际上，在第 3 章 3.3.4 中，正是利用这一条件来定义应力度量 $\mathscr{T}$的。因此我们称由(2.62)所表示的 w（或 $w\mathrm{d}t$）是“度量无关”的。

但是在本节 5.2.3 中，曾为简单起见，采用某一种应力与应变度量，即第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 与 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$，这相当于取 $f(\lambda)=\left(\lambda^2-1\right)/2$。细心的读者必然会发现在把变形率 $\dot{\boldsymbol{E}}$（或变形增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\dot{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}t$）分解为(2.46)式的弹性与塑性两部分 $\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{e}}$ 与 $\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}$（或弹性变形增量 $\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}=\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t$ 与塑性变形增量 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}=\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$）时，由$(2.47)_2$，塑性变形增量 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}=\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$ 是保持应力 $\boldsymbol{T}$ 与温度θ 不变条件下，由于内部结构 $\mathscr{H}$或内变量ξ_α 而引起的变形增量。保持应力 $\boldsymbol{T}$ 不变，这就意味着：其它的应力度量 $\mathscr{T}$会有变化。因此，对于同一个材料的同一个物理过程把变形增量分为弹性与塑性两部分的方式是因度量函数 $f(\lambda)$而异的，因而不是“度量无关”的，而是“度量相关”的。我们在节 5.4 还要专门讨论度量相关性问题。

5.2.4 三种定义的比较及卸载构形刚性转动 $\boldsymbol{\beta}$ 的影响

我们以图 5-4 的单向拉伸为例，说明 5.2.3 Rice 与 Hill 定义的塑性变形增量 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}$（见(2.55)式）与 5.2.2 Green-Naghdi 与 Simo-Ortiz 定义的塑性变形增量（实际为残余变形张量）$\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}=\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$ 的差别。Rice 与 Hill 把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 分别可逆与不可逆的两部分 $\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}$ 与 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}$，把不可逆的部分 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}$ 称为塑性变形增量，而 Green-Naghdi 与 Simo-Ortiz 所定义的(1.21)式 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 表示从卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 到即时构形 $\mathscr{R}$ 的变形，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 表示变形增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 与残余变形增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 之差，因此 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 不但反映了即时构形 $\mathscr{R}$ 的变形增量，而且也反映了残余变形的增量。至于 5.2.1 Moran，Ortiz 与 Shih 是在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中建立本构关系，把中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的 Green 应变张量的率 $\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{\mathrm{e}}$ 定义为弹性变形率 $\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}$，因此 $\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}=\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t$ 同样既反映了即时构形 $\mathscr{R}$ 变形的变化，也反映了中间构形变形（即残余变形）的变化。

现在我们来讨论卸载构形刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$（见 5.1 最后一段）的影响。设卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$ 与 $\overline{\mathscr{R}}$ 相差一刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$，则 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$、$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}$ 与 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 的关系见(1.25)。以反对称张量 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}_{(\beta)}$ 表示 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 的旋率

$$
\begin{aligned}
\dot{\overline{\boldsymbol{\beta}}} &= \overline{\boldsymbol{\Omega}}_{(\beta)} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}, \\
\overline{\boldsymbol{\Omega}}_{(\beta)} &= \dot{\overline{\boldsymbol{\beta}}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

以后以下标(β)表示以 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$ 为中间构形的量。由(2.15)、$(2.8)_2$ 与(2.16)可得到速度梯度 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$，$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}$，$\overline{\boldsymbol{L}}_{(\beta)}$ 与 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}}$，$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$，$\overline{\boldsymbol{L}}$ 的关系式：

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} - \overline{\boldsymbol{\Omega}}_{(\beta)}$$
$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} + \overline{\boldsymbol{\Omega}}_{(\beta)} \tag{2.64}$$
$$\overline{\boldsymbol{L}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{L}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}$$

把(2.64)按(2.14)转移到即时构形 τ 中，可得到 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$，$\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}$，$\boldsymbol{l}_{(\beta)}$ 与 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}$，$\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$，$\boldsymbol{l}$ 的关系式：

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}_{(\beta)} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{e}} - \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}_{(\beta)} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{l}_{(\beta)} = \boldsymbol{l} \tag{2.65}$$

式中

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\boldsymbol{\Omega}}_{(\beta)} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}} \tag{2.66}$$

由(2.12)，取(2.65)的对称部分与反对称部分，可得

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}_{(\beta)} = \boldsymbol{d}^{\mathrm{e}} - \{\boldsymbol{a}\}_{\mathrm{sym}}, \qquad \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{(\beta)} = \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} + \{\boldsymbol{a}\}_{\mathrm{sym}}, \qquad \boldsymbol{d}_{(\beta)} = \boldsymbol{d} \tag{2.67}$$

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}_{(\beta)} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}} - \{\boldsymbol{a}\}_{\mathrm{antisym}}, \qquad \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}_{(\beta)} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} + \{\boldsymbol{a}\}_{\mathrm{antisym}}, \qquad \boldsymbol{w}_{(\beta)} = \boldsymbol{w} \tag{2.68}$$

由(2.67)与(2.68)可见，把变形率 $\boldsymbol{d}$ 与旋率 $\boldsymbol{w}$ 分解为弹性与塑性两部分 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$，$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 与 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$，分解的方式是随着中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 之不同而不同的，即 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 相关的。将(2.67)，(2.68)按表 5-2 协变(bb)转移到中间构形 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$，或者直接由(2.25a,b)，利用(1.28)与(2.64)，可得在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$ 与 $\overline{\mathscr{R}}$ 中变形率与旋率的关系：

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} - \{\overline{\boldsymbol{A}}\}_{\mathrm{sym}}, \quad \overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} + \{\overline{\boldsymbol{A}}\}_{\mathrm{sym}}, \quad \overline{\boldsymbol{D}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{D}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \tag{2.69}$$

$$\overline{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} - \{\overline{\boldsymbol{A}}\}_{\mathrm{antisym}}, \overline{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} + \{\overline{\boldsymbol{A}}\}_{\mathrm{antisym}}, \overline{\boldsymbol{W}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{W}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \tag{2.70}$$

式中

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\boldsymbol{\Omega}}_{(\beta)} \tag{2.71}$$

因此虽然 $\overline{\boldsymbol{D}}_{(\beta)}$ 与 $\overline{\boldsymbol{W}}_{(\beta)}$ 是 $\overline{\boldsymbol{D}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{W}}$ 的 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 刚性旋转（见$(2.69)_3$与$(2.70)_3$），但分解成弹塑性两部分 $\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$，$\overline{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$ 与 $\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}$，$\overline{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}$ 则不是相应的 $\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}$，$\overline{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{e}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$，$\overline{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}}$ 的 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 刚性旋转。也就是说，中间构形的变形率与旋率分解为弹性与塑性两部分的分解方式也是随刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 而异，即 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 相关的。至于 5.2.3 中 Rice 与 Hill 所定义的参考构形 $\mathscr{R}$ 中变形率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 的两部分即弹性变形率 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形率 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$，本来就不需要中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的概念（见 5.2.3 最后(1)中间构形），因此 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}$ 与 $(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$ 不受中间构形刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 的影响，由表 5-4，从参考构形 $\mathscr{R}$ 到即时构形 τ 的协变(bb)转移所得的 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{RH}}$，$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}$，$\boldsymbol{d}$ 也不受中间构形刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 的影响。至于中间构形

$\overline{\mathscr{H}}$ 中的变形率，则利用表 5-2 的转移关系与(1.25)，可证以下的 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 转动关系：

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{RH}(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{RH}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}},\qquad \overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}},\qquad \overline{\boldsymbol{D}}_{(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\overline{\boldsymbol{D}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \tag{2.72}$$

同样，因为$(1.14)_2\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 无关，5.2.2 中 Green-Naghdi 与 Simo-Ortiz 所定义的参考构形 $\mathscr{R}$ 中的变形率 $\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$，$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$，$\dot{\boldsymbol{E}}$ 与即时构形 $\mathscr{C}$ 中的变形率 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{SO}}$，$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{SO}}$，$\boldsymbol{d}$ 也都与 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 转动无关（见表 5-3），只有中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的变形率满足类似于(2.72)的 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 转动关系：

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{SO}(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{SO}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}},\qquad \overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{SO}(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{SO}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}},\qquad \overline{\boldsymbol{D}}_{(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\overline{\boldsymbol{D}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \tag{2.73}$$

因此在下面所介绍的几种主要的大变形弹塑性本构理论[1)]中，对于节 5.3 Rice 与 Hill 大变形弹塑性理论与 5.5 Simo 与 Ortiz 大变形弹塑性理论，都不必要去关心中间构形刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 的影响。只对于 5.6 Moran，Ortiz 与 Shih 大变形弹塑性理论，必须密切注意本构方程对 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 的相关性，因为本构方程是对中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 写出的，对某一中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 适用的本构方程可能对另一经刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 的中间构形 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$ 就不适用。

下面介绍几种主要的大变形弹塑性本构理论[1)]。

5.3 Rice-Hill 大变形弹塑性理论

本节内容参见文献 Rice-Hill(1971, 1972, 1973, 1975)。

在绝对温度 θ 与每单位质量的熵 η 两个变量之中，为了方便我们选择温度 θ 为自变量，熵 η 为响应（见第 4 章节 4.1）。在第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{T}$ 与 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 两者之中，可以选一者为自变量，另一者为响应。记 ψ 与 ψ_{G} 为每单位质量的 Hemholtz 自由能与 Gibbs 自由能(见第 4 章节 4.1)：

$$\psi=\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H}) \tag{3.1}$$

$$\psi_{\mathrm{G}}=\psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})=\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\boldsymbol{E} \tag{3.2}$$

由第 4 章(1.9)式，并利用第 4 章(1.6)式，可得热力学第二定律的表达式：

$$\theta\gamma_{\mathrm{int}}=-\dot{\psi}-\eta\dot{\theta}+\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}}\geqslant 0 \tag{3.3}$$

利用第 4 章(1.13)式，上式又可写作

$$\theta\gamma_{\mathrm{int}}=-\dot{\psi}_{\mathrm{G}}-\eta\dot{\theta}-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{E}:\dot{\boldsymbol{T}}\geqslant 0 \tag{3.4}$$

---

1) 程莉，大变形弹塑性理论——关于本构理论的若干问题，清华大学博士论文，1988 年 9 月，曾作过比较系统的叙述和比较。关于考虑内变量的本构理论的介绍，可参见黄克智(1989)，余寿文等(1989)文献。

将(3.1)代入(3.3)，得[1)]

$$\theta\gamma_{\text{int}}=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}}+\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}\right):\dot{\boldsymbol{E}}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\right)\dot{\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha\geqslant 0 \tag{3.5}$$

同样将(3.2)代入(3.4)，得

$$\theta\gamma_{\text{int}}=-\left(\frac{\partial\psi_{\text{G}}}{\partial\boldsymbol{T}}+\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{E}\right):\dot{\boldsymbol{T}}-\left(\frac{\partial\psi_{\text{G}}}{\partial\theta}+\eta\right)\dot{\theta}-\frac{\partial\psi_{\text{G}}}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha\geqslant 0 \tag{3.6}$$

注意，在实际进行的物理过程中，自变量 $\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{T}$）与θ是可以控制的。但内变量的率$\dot{\xi}_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$却取决于自变量$\dot{\boldsymbol{E}}$（或$\dot{\boldsymbol{T}}$）与$\dot{\theta}$的率。若在(3.5)中取$\dot{\boldsymbol{E}}$与$\dot{\theta}$为指向应变-温度空间中弹性区（如$\dot{\theta}=0$，则$\dot{\boldsymbol{E}}$指向应变空间中弹性区）的任意方向的应变率与温度率，因为响应为弹性，所有的$\dot{\xi}_\alpha=0$，(3.5)式成为

$$\theta\gamma_{\text{int}}=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}}+\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}\right):\dot{\boldsymbol{E}}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\right)\dot{\theta}=0 \tag{3.5$'$}$$

由(3.5)′可导出

$$\boldsymbol{T}=\rho_0\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}},\qquad \eta=-\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta} \tag{3.7}$$

同样，欲使(3.6)的不等式成立，必须有

$$\boldsymbol{E}=-\rho_0\frac{\partial\psi_{\text{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{T}},\qquad \eta=-\frac{\partial\psi_{\text{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta} \tag{3.8}$$

而热力学第二定律(3.5)或(3.6)则成为

$$\theta\gamma_{\text{int}}=F_\alpha\dot{\xi}_\alpha\geqslant 0 \tag{3.9}$$

式中

$$F_\alpha=-\frac{\partial\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\xi_\alpha}=-\frac{\partial\psi_{\text{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\xi_\alpha} \tag{3.10}$$

$F_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$称为热力学作用力[2)]。$F_\alpha$既可以表示为$\boldsymbol{E}$，$\theta$，$\mathscr{H}$的函数，也可以表示为$\boldsymbol{T}$，

---

1) 约定下标α重复出现时，对α取和。

2) 可以利用ψ_{G}与ψ的关系$(3.2)_2$式证明F_α的两个表达式相等，因为：

$$\left.\frac{\partial\psi_G}{\partial\xi_\alpha}\right|_{\boldsymbol{T},\theta}=\left.\frac{\partial\left(\psi-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\boldsymbol{E}\right)}{\partial\xi_\alpha}\right|_{\boldsymbol{T},\theta}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\alpha}\right|_{\boldsymbol{E},\theta}+\left.\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}}\right|_{\theta,\xi}:\left.\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\xi_\alpha}\right|_{\boldsymbol{T},\theta}-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{T}:\left.\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\xi_\alpha}\right|_{\boldsymbol{T},\theta}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\alpha}\right|_{\boldsymbol{E},\theta}$$

上式中最后一个等式利用了$(3.7)_1$。

θ、$\mathscr{H}$的函数。虽然两种表示的函数不同，但为简单起见，均用同一字母 F_α表示。

5.3.1 率形式本构关系

现在分两种选择，分别讨论本构关系(3.8)与(3.7)，把它们分别写成率形式。

1. 以第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 为自变量，Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 为响应函数

将(3.8)代入(2.46)~(2.48)，得到率形式本构方程如下：

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{e}} + \left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}, \qquad \dot{\eta} = (\dot{\eta})^{\mathrm{e}} + (\dot{\eta})^{\mathrm{p}} \tag{3.11}$$

式中

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{n}\dot{\theta}, \qquad \left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{P}_\alpha \dot{\xi}_\alpha \tag{3.12}$$

$$(\dot{\eta})^{\mathrm{e}} = \frac{1}{\rho_0}\left(\boldsymbol{n} : \dot{\boldsymbol{T}} - \zeta\dot{\theta}\right), \qquad (\dot{\eta})^{\mathrm{p}} = \frac{1}{\rho_0} p_\alpha \dot{\xi}_\alpha \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}\partial \boldsymbol{T}} \\
\boldsymbol{n} &= \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}\partial \theta} \\
\zeta &= -\rho_0 \frac{\partial \eta(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta^2} \\
\boldsymbol{P}_\alpha &= \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \xi_\alpha} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}\partial \xi_\alpha} \\
p_\alpha &= \rho_0 \frac{\partial \eta(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \xi_\alpha} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta\partial \xi_\alpha}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.11)~(3.14)的分量形式为

$$\dot{E}_{AB} = \left(\dot{E}\right)^{\mathrm{e}}_{AB} + \left(\dot{E}\right)^{\mathrm{p}}_{AB}, \qquad \dot{\eta} = (\dot{\eta})^{\mathrm{e}} + (\dot{\eta})^{\mathrm{p}} \tag{3.11$'$}$$

式中

$$\left(\dot{E}\right)^{\mathrm{e}}_{AB} = M_{ABCD}\dot{T}_{CD} + n_{AB}\dot{\theta}, \qquad \left(\dot{E}\right)^{\mathrm{p}}_{AB} = \left(P_\alpha\right)_{AB}\dot{\xi}_\alpha \tag{3.12$'$}$$

$$(\dot{\eta})^{\mathrm{e}} = \frac{1}{\rho_0}\left(n_{AB}\dot{T}_{AB} - \zeta\dot{\theta}\right), \qquad (\dot{\eta})^{\mathrm{p}} = \frac{1}{\rho_0} p_\alpha \dot{\xi}_\alpha \tag{3.13$'$}$$

$$
\begin{aligned}
M_{ABCD} &= \frac{\partial E_{AB}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial T_{CD}} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial T_{AB}\partial T_{CD}} \\
n_{AB} &= \frac{\partial E_{AB}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial T_{AB}\partial \theta} \\
\zeta &= -\rho_0 \frac{\partial \eta(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta^2} \\
(P_\alpha)_{AB} &= \frac{\partial E_{AB}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \xi_\alpha} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial T_{AB}\partial \xi_\alpha} \\
p_\alpha &= \rho_0 \frac{\partial \eta(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \xi_\alpha} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta \partial \xi_\alpha}
\end{aligned}
\tag{3.14)'}
$$

把本构关系(3.11)从参考构形 $\mathscr{H}$ 协变(bb)前推到即时构形 z 中[1)]，其中(3.12)的 $\boldsymbol{M}$ 作协变(bbbb)前推，$\dot{\boldsymbol{T}}$ 作逆变(##)前推，并利用表 5-4 与第 4 章(1.36b)式，得到

$$
\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{RH}} + \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}, \qquad \dot{\eta} = (\dot{\eta})^{\mathrm{e}} + (\dot{\eta})^{\mathrm{p}} \tag{3.15}
$$

式中[2)]，下标 RH 表示 Rice 与 Hill。

$$
\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{RH}} = \mathscr{M} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} + \boldsymbol{n}\dot{\theta}, \qquad \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}} = \mathscr{P}_\alpha \dot{\xi}_\alpha \tag{3.16}
$$

$$
(\dot{\eta})^{\mathrm{e}} = \frac{1}{\rho_0}\left(\boldsymbol{n} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} - \zeta\dot{\theta}\right), \qquad (\dot{\eta})^{\mathrm{p}} = \frac{1}{\rho_0} p_\alpha \dot{\xi}_\alpha \tag{3.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{M} &= \left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right) \overset{*}{\underset{*}{\underset{*}{\underset{*}{:}}}} \boldsymbol{M} = -\rho_0 \left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right) \overset{*}{\underset{*}{\underset{*}{\underset{*}{:}}}} \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}\partial \boldsymbol{T}} \\
\boldsymbol{n} &= \left(\overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right) \overset{*}{\underset{*}{:}} \boldsymbol{n} = -\rho_0 \left(\overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right) \overset{*}{\underset{*}{:}} \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}\partial \theta} \\
\zeta &= \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta^2} \\
\mathscr{P}_\alpha &= \left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right) \overset{*}{\underset{*}{:}} \boldsymbol{P}_\alpha = -\rho_0 \left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right) \overset{*}{\underset{*}{:}} \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}\partial \xi_\alpha} \\
p_\alpha &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \theta \partial \xi_\alpha}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

(3.15)~(3.18)的分量形式为（略去表示 Rice 与 Hill 的下标 RH）

$$
d_{ij} = d^{\mathrm{e}}_{ij} + d^{\mathrm{p}}_{ij}, \qquad \dot{\eta} = (\dot{\eta})^{\mathrm{e}} + (\dot{\eta})^{\mathrm{p}} \tag{3.15)'}
$$

---

1) 前推到即时构形 z 中，我们就可以采用 Euler 坐标 x_i，而且为了方便起见，可以采用 Euler 直角坐标。

2) (3.18)式中 $\overset{*}{\underset{*}{\underset{*}{:}}}$ 表示将运算符左侧各个二阶张量依次点乘运算符右侧张量并矢中的每一矢量。

式中

$$d_{ij}^{e} = \mathscr{M}_{ijkl}\tau_{kl}^{\mathrm{Oldr}} + \varkappa_{ij}\dot{\theta}, \qquad d_{ij}^{p} = (\mathscr{P}_{\alpha})_{ij}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.16)'$$

$$(\dot{\eta})^{e} = \frac{1}{\rho_0}\left(\varkappa_{ij}\tau_{ij}^{\mathrm{Oldr}} - \zeta\dot{\theta}\right) \qquad (\dot{\eta})^{p} = \frac{1}{\rho_0}p_{\alpha}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.17)'$$

$$\mathscr{M}_{ijkl} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\frac{\partial X_C}{\partial x_k}\frac{\partial X_D}{\partial x_l}M_{ABCD} = -\rho_0\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\frac{\partial X_C}{\partial x_k}\frac{\partial X_D}{\partial x_l}\frac{\partial^2\psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial T_{AB}\partial T_{CD}}$$

$$\varkappa_{ij} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}n_{AB} = -\rho_0\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\frac{\partial^2\psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial T_{AB}\partial\theta}$$

$$\zeta = \rho_0\frac{\partial^2\psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta^2} \tag{3.18)'$$

$$(\mathscr{P}_{\alpha})_{ij} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}(\boldsymbol{P}_{\alpha})_{AB} = -\rho_0\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_j}\frac{\partial^2\psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial T_{AB}\partial\xi_{\alpha}}$$

$$p_{\alpha} = -\rho_0\frac{\partial^2\psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta\partial\xi_{\alpha}}$$

$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 及其分量表达式见第 4 章(1.37a,b)。

2. 以 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 为自变量，以第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 为响应函数

将(3.7)代入(2.49)~(2.51)，得到率形式本构方程如下：

$$\dot{\boldsymbol{T}} = (\dot{\boldsymbol{T}})^{e} + (\dot{\boldsymbol{T}})^{p}, \qquad \dot{\eta} = (\dot{\eta})^{e} + (\dot{\eta})^{p} \tag{3.19}$$

式中

$$(\dot{\boldsymbol{T}})^{e} = \boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{m}\dot{\theta}, \qquad (\dot{\boldsymbol{T}})^{p} = \boldsymbol{Q}_{\alpha}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.20}$$

$$(\dot{\eta})^{e} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\boldsymbol{m}:\dot{\boldsymbol{E}} + \zeta\dot{\theta}\right) \qquad (\dot{\eta})^{p} = \frac{1}{\rho_0}q_{\alpha}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.21}$$

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}} = \rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}\partial\boldsymbol{E}}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{\partial\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta} = \rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}\partial\theta}$$

$$\zeta = -\rho_0\frac{\partial\eta(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta} = \rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta^2} \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\alpha} = \frac{\partial\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\xi_{\alpha}} = \rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}\partial\xi_{\alpha}}$$

$$q_{\alpha} = \rho_0\frac{\partial\eta(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\xi_{\alpha}} = -\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta\partial\xi_{\alpha}}$$

(3.19)-(3.22)的分量形式为

$$\dot{T}_{AB}=\left(\dot{T}\right)^{\mathrm{c}}_{AB}+\left(\dot{T}\right)^{\mathrm{p}}_{AB},\qquad \dot{\eta}=(\dot{\eta})^{\mathrm{c}}+(\dot{\eta})^{\mathrm{p}} \tag{3.19$'$}$$

式中

$$\left(\dot{T}\right)^{\mathrm{c}}_{AB}=L_{ABCD}\dot{E}_{CD}+m_{AB}\dot{\theta},\qquad \left(\dot{T}\right)^{\mathrm{p}}_{AB}=(Q_{\alpha})_{AB}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.20$'$}$$

$$(\dot{\eta})^{\mathrm{c}}=-\frac{1}{\rho_0}\left(m_{AB}\dot{E}_{AB}+\zeta\dot{\theta}\right),\qquad (\dot{\eta})^{\mathrm{p}}=\frac{1}{\rho_0}q_{\alpha}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.21$'$}$$

$$\begin{aligned}
L_{ABCD}&=\frac{\partial T_{AB}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial E_{CD}}=\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial E_{AB}\partial E_{CD}}\\
m_{AB}&=\frac{\partial T_{AB}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta}=\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial E_{AB}\partial\theta}\\
\zeta&=-\rho_0\frac{\partial\eta(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta}=\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta^2}\\
(Q_{\alpha})_{AB}&=\frac{\partial T_{AB}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\xi_{\alpha}}=\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial E_{AB}\partial\xi_{\alpha}}\\
q_{\alpha}&=\rho_0\frac{\partial\eta(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\xi_{\alpha}}=-\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta\partial\xi_{\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.22$'$}$$

把本构关系(3.19)从参考构形 $\mathscr{R}$ 逆变(##)前推到即时构形 τ 中，其中(3.20)的 $\boldsymbol{L}$ 作逆变(####)前推，$\dot{\boldsymbol{E}}$ 作协变(bb)前推，并利用表 5-4 与第 4 章(1.36b)式，得到

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}=\left(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\right)^{\mathrm{e}}+\left(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\right)^{\mathrm{p}},\qquad \dot{\eta}=(\dot{\eta})^{\mathrm{e}}+(\dot{\eta})^{\mathrm{p}} \tag{3.23}$$

式中

$$\left(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\right)^{\mathrm{c}}=\mathscr{L}:\boldsymbol{d}+\boldsymbol{m}\dot{\theta},\qquad \left(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\right)^{\mathrm{p}}=\mathscr{Q}_{\alpha}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.24}$$

$$(\dot{\eta})^{\mathrm{e}}=-\frac{1}{\rho_0}\left(\boldsymbol{m}:\boldsymbol{d}+\zeta\dot{\theta}\right),\qquad (\dot{\eta})^{\mathrm{p}}=\frac{1}{\rho_0}q_{\alpha}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}&=(\boldsymbol{FFFF})\overset{*}{\cdot}\boldsymbol{L}=\rho_0(\boldsymbol{FFFF})\overset{*}{\cdot}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}\partial\boldsymbol{E}}\\
\boldsymbol{m}&=(\boldsymbol{FF})\overset{*}{\cdot}\boldsymbol{m}=\rho_0(\boldsymbol{FF})\overset{*}{\cdot}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}\partial\theta}\\
\zeta&=\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta^2}\\
\mathscr{Q}_{\alpha}&=(\boldsymbol{FF})\overset{*}{\cdot}\boldsymbol{Q}_{\alpha}=\rho_0(\boldsymbol{FF})\overset{*}{\cdot}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}\partial\xi_{\alpha}}\\
q_{\alpha}&=-\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta\partial\xi_{\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.23)~(3.26)的分量形式为

$$\tau_{ij}^{\mathrm{Oldr}}=\left(\tau^{\mathrm{Oldr}}\right)_{ij}^{\mathrm{e}}+\left(\tau^{\mathrm{Oldr}}\right)_{ij}^{\mathrm{p}},\qquad \dot{\eta}=(\dot{\eta})^{\mathrm{e}}+(\dot{\eta})^{\mathrm{p}} \tag{3.23$'$}$$

式中

$$\left(\tau^{\mathrm{Oldr}}\right)_{ij}^{\mathrm{e}}=\mathscr{L}_{ijkl}d_{kl}+m_{ij}\dot{\theta},\qquad \left(\tau^{\mathrm{Oldr}}\right)_{ij}^{\mathrm{p}}=\left(\mathscr{C}_{\alpha}\right)_{ij}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.24$'$}$$

$$(\dot{\eta})^{\mathrm{e}}=-\frac{1}{\rho_0}\left(m_{ij}d_{ij}+\zeta\dot{\theta}\right),\qquad (\dot{\eta})^{\mathrm{p}}=\frac{1}{\rho_0}q_{\alpha}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.25$'$}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{ijkl}&=\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\frac{\partial x_k}{\partial X_C}\frac{\partial x_l}{\partial X_D}L_{ABCD}=\rho_0\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\frac{\partial x_k}{\partial X_C}\frac{\partial x_l}{\partial X_D}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial E_{AB}\partial E_{CD}}\\
m_{ij}&=\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\boldsymbol{m}_{AB}=\rho_0\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial E_{AB}\partial\theta}\\
\zeta&=\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta^2}\\
\left(\mathscr{C}_{\alpha}\right)_{ij}&=\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\left(Q_{\alpha}\right)_{AB}=\rho_0\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_j}{\partial X_B}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial E_{AB}\partial\xi_{\alpha}}\\
q_{\alpha}&=-\rho_0\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\theta\partial\xi_{\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.26$'$}$$

5.3.2 内变量的演化，正交法则

分两种情况讨论：

1. 取第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 与绝对温度 θ 为自变量

为了要确定塑性响应，我们要根据已知的应力率 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 来确定内变量的演化率 $\dot{\xi}_{\alpha}(\alpha=1,2,\cdots,n)$。Rice(1971)把热力学作用力 F_{α}（见$(3.10)_2$）看作是屈服函数，在应力 $\boldsymbol{T}$ 空间中屈服面由 $F_{\alpha}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})$=常数值表示，但这个常数值是随着加载历史而演化的。由$(3.12)_2$，利用$(3.14)_4$与$(3.10)_2$，可得

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}=\rho_0\frac{\partial F_{\alpha}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{T}}\dot{\xi}_{\alpha} \tag{3.27}$$

每个 $\dot{\xi}_{\alpha}$ 对应于一定机制的塑性变形。如果这个机制不开动，则 $\dot{\xi}_{\alpha}=0$。如果把正反向看成不同的机制（即不同的α），则有权利规定 $\dot{\xi}_{\alpha}\geqslant 0$。如果 $\dot{\xi}_{\alpha}>0$，则称这个内变量 ξ_{α} “开动”(active)。(3.27)式 $\partial F_{\alpha}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})/\partial\boldsymbol{T}$ 是沿着应力 $\boldsymbol{T}$ 空间屈服面的外向法线方向的。如果只有一个内变量 ξ_{α} 开动，(3.27)式表明的正是正交法则（见第 1 章(1.10)式与节 1.6）。这里(3.27)

具体指的是 Green 应变率的塑性部分$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$（可称 Green 塑性变形率）沿第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 空间中屈服面外法线方向。如果有若干个内变量ξ_α开动，即$\alpha\in\{A\}$，A 表示开动的ξ_α序号α的集合，则(3.27)表明塑性变形率$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$是由该若干开动内变量对应的屈服面外法向矢量相加而成。这说明在屈服面的角点上塑性变形率$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$必在塑性锥内（见第 1 章图 1-22）。设屈服面表达式为

$$F_\beta(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})=Y_\beta(\theta,\mathscr{H})\qquad \beta=1,2,\cdots,n \tag{3.28}$$

若$F_\beta<Y_\beta$，则应力点 $\boldsymbol{T}$ 在第β屈服面之内，ξ_β不开动，$\dot{\xi}_\beta=0$。因 A 表示开动的ξ_α序号α的集合$(\dot{\xi}_\alpha>0)$，则由(3.28)对时间求导，可得一致性条件

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial \boldsymbol{T}}:\dot{\boldsymbol{T}}+\frac{\partial F_\beta}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial F_\beta}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha=\frac{\partial Y_\beta}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial Y_\beta}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha\qquad \alpha,\beta\in A \tag{3.29}$$

假定存在着唯一的一个内变量序号集合 A，使(3.29)联立方程组满足，且对集合 A 以外的内变量ξ_γ序号$(\gamma\notin A)$，两者必居其一，或者应力 $\boldsymbol{T}$ 在屈服面内（弹性区），即$F_\gamma<Y_\gamma$，或者虽然应力 $\boldsymbol{T}$ 在屈服面上，即$F_\gamma=Y_\gamma$，但属于卸载，即

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial \boldsymbol{T}}:\dot{\boldsymbol{T}}+\frac{\partial F_\gamma}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial F_\gamma}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha<\frac{\partial Y_\gamma}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial Y_\gamma}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha,\qquad \gamma\notin A \tag{3.30}$$

由(3.29)确定了$\dot{\xi}_\alpha$以后，可用(3.27)确定$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$。

如上所述，(3.27)表明在第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 空间中，Green 塑性变形率$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$的正交法则。我们把(3.27)从参考构形$\mathscr{R}$协变(bb)前推到即时构形$\tau$中，可得到

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\rho_0\left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right)\overset{*}{*}\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{T}}\dot{\xi}_\alpha \tag{3.31}$$

此式也就是$(3.16)_2$的$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}$。利用第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 与 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$的转移关系（第 3 章(6.34a)），

$$\boldsymbol{\tau}=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F})\overset{*}{*}\boldsymbol{T},\qquad \boldsymbol{T}=\left(\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{\tau} \tag{3.32}$$

可对屈服面函数$F_\alpha(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})$进行换变量，得到在 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 空间中的屈服面函数：

$$f_\alpha(\boldsymbol{\tau},\theta,\mathscr{H},\boldsymbol{F})=F_\alpha(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})=F_\alpha\left(\left(\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{\tau},\theta,\mathscr{H}\right) \tag{3.33}$$

注意因为$\boldsymbol{\tau}$与 $\boldsymbol{T}$ 的关系式(3.32)中含有变形梯度 $\boldsymbol{F}$，所以在(3.33)中经过换变量以后，f_α不但依赖于$\boldsymbol{\tau}$，θ，$\mathscr{H}$，而且还依赖于 $\boldsymbol{F}$，定义$\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\tau}$为$(3.32)_1$$\boldsymbol{\tau}$由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ 引起的变化($\boldsymbol{F}$ 被看作固定)，即

$$\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\tau}=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F})\cdot\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{T}-(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F})\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}t=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\mathrm{d}t \tag{3.34}$$

(3.34)的最后一个等式用到第 4 章(1.36b)，同时定义

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\tau}}=\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{\tau},\theta,\mathscr{H},\boldsymbol{F})}{\partial\boldsymbol{\tau}}\Big|_{\theta,\mathscr{H},\boldsymbol{F}} \tag{3.35}$$

式中右端对$\boldsymbol{\tau}$求导时，$\boldsymbol{F}$ 被看作固定，则由(3.33)，计算由 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ 引起的两端的变化

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\tau}}:\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{T}}:\mathrm{d}\boldsymbol{T}$$

利用上式及(3.34)，可证

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\tau}}=\left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\cdot\right)\cdot\cdot\,\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{T}} \tag{3.36}$$

因此利用(3.36)，可将(3.31)写作

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\rho_0\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{\tau}}\dot{\xi}_\alpha \tag{3.37}$$

(3.37)式表明在 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$空间中的正交法则：如果只有一个内变量ξ_α开动，塑性变形率$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$必沿屈服面，$f_\alpha(\boldsymbol{\tau},\theta,\mathscr{H})=$ 常数值，的外法线方向(3.35)。这性质是由第二类 P-K 应力$\boldsymbol{T}$空间的正交法则(3.27)式转移而来的。

2. 取 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与绝对温度θ为自变量

类似于(3.27)的推导，由$(3.20)_2$，利用$(3.22)_4$与$(3.10)_1$，可得[1)]

$$(\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{p}}=-\rho_0\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}}\dot{\xi}_\alpha \tag{3.38}$$

上式中$-\partial F_\alpha(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})/\partial\boldsymbol{E}$是沿着 Green 应变 $\boldsymbol{E}$ 空间中第α屈服面的内向法线方向。因此，应力率塑性部分$(\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{p}}$是由若干开动内变量对应的屈服面的内法向张量相加而成。也就是说，在屈服面的角点上应力率的塑性部分$(\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{p}}$或$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{T}=(\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$的相反方向必在塑性锥内。

内变量的演化（即求$\dot{\xi}_\alpha$）也可仿照情况 1 的(3.28)，(3.29)式进行。3.3.2 中屈服面表达式(3.28)可以通过自变量 $\boldsymbol{E}$ 表示：

$$F_\beta(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})=Y_\beta(\theta,\mathscr{H}),\qquad \beta=1,2,\cdots,n \tag{3.39}$$

和前面情况 1 类似，我们试图把(3.38)从参考构形$\mathscr{R}$逆变(##)前推到即时构形$\mathscr{r}$中，由第 3 章(6.38a)式，Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与 Almansi 应变张量 $\boldsymbol{e}$ 之间的转换关系为

---

1) 和情况 1 的(3.31)不同，这里屈服面函数 F_α 表示为 $\boldsymbol{E}$、θ、$\mathscr{H}$的函数，但为简单起见，也用 F_α 表示。

$$\boldsymbol{e}=\left(\overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{E}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{e} \tag{3.40}$$

令

$$f_\alpha(\boldsymbol{e},\theta,\mathscr{H},\boldsymbol{F})=\boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})=F_\alpha\left(\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{e},\theta,\mathscr{H}\right) \tag{3.41}$$

类似于情况 1，由(3.27)到(3.37)的推导，由(3.38)可导出

$$\left(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\right)^{\mathrm{p}}=-\rho_0\frac{\partial f_\alpha\left(\boldsymbol{e},\theta,\mathscr{H},\boldsymbol{F}\right)}{\partial\boldsymbol{e}}\dot{\xi}_\alpha \tag{3.42}$$

(3.41)式表明在 Almansi 应变 $\boldsymbol{e}$ 空间中的正交法则：如果只有一个内变量 ξ_α 开动，Kirchhoff 应力 Oldroyd 导数的塑性部分 $\left(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\right)^{\mathrm{p}}$ 必沿屈服面，$f_\alpha\left(\boldsymbol{e},\theta,\mathscr{H},\boldsymbol{F}\right)=$ 常数值，的内向法线方向。这性质是由 Green 应变 $\boldsymbol{E}$ 空间中的正交法则(3.38)转移而来的。

最后指出，在以上所述 Rice-Hill 大变形弹塑性理论中（包括 5.3.1 率形式本构关系与 5.3.2 内变量演化），所有的关系式或是在参考构形 $\mathscr{R}$ 中给出，或是在即时构形 $\mathscr{r}$ 中给出，而不必涉及中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的概念

5.3.2.1 弹性增量与塑性增量

在 5.2.3 中提到当状态量（例如 Green 应变 $\boldsymbol{E}$，或第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 等）与内变量之间不一定是函数关系，这时状态量对内变量的导数就没有意义。这时为了表达状态量与内变量的关系，可以用增量型的关系，或称“演化关系”。任何一个状态量 $\boldsymbol{\Phi}$（标量或张量），它与自变量 $\boldsymbol{T}$ 或 $\boldsymbol{E}$，θ 或 η 之间为函数关系，但它与内变量 ξ_α 之间不是函数关系。则可把在时间 $\mathrm{d}t$ 内 $\boldsymbol{\Phi}$ 的增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}$ 分成两部分：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\Phi}+\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{\Phi} \tag{3.43}$$

其中 $\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\Phi}$ 是由自变量 $\boldsymbol{T}$（或 $\boldsymbol{E}$），θ（或 η）的变化所引起的，可表示为（以自变量取 $\boldsymbol{T}$ 与 θ 为例）：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\Phi}&=\left(\dot{\boldsymbol{\Phi}}\right)^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{T}}:\mathrm{d}\boldsymbol{T}+\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\\ \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}}\right)^{\mathrm{e}}&=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{T}}:\dot{\boldsymbol{T}}+\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\theta}\dot{\theta}\end{aligned} \tag{3.44}$$

而 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{\Phi}$ 是由于材料内部结构（记为 PIR 或 $\mathscr{H}$），或者内变量 $\xi_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 的变化所引起的：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{\Phi}&=\left(\dot{\boldsymbol{\Phi}}\right)^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})\\ &=\boldsymbol{\Phi}_\alpha\mathrm{d}\xi_\alpha\qquad(\alpha=1,2,\cdots,\mathrm{n})\\ \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}}\right)^{\mathrm{p}}&=\boldsymbol{\Phi}_\alpha\dot{\xi}_\alpha\end{aligned} \tag{3.45}$$

式中如果Φ与内变量$\xi_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$之间是函数关系，则有

$$\Phi_\alpha=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\alpha}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n)\tag{3.46}$$

否则，如果Φ与ξ_α之间不是函数关系，则(3.45)就是一个独立的“演化方程”，其中的Φ_α也是按一定的规律演化的。按照这一表示，凡是$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\alpha}\mathrm{d}\xi_\alpha$都应改写为$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\Phi$。Hemholtz 自由能$\psi(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})$(3.1)的增量可表示为：

$$\mathrm{d}\psi=\dot{\psi}\mathrm{d}t=\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\psi+\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi\tag{3.47a}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\psi=(\dot{\psi})^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}}:\mathrm{d}\boldsymbol{E}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\tag{3.47b}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi=(\dot{\psi})^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=-F_\alpha\mathrm{d}\xi_\alpha\tag{3.47c}$$

式中，以F_α表示热力学作用力(见$(3.10)_1$)。而 Gibbs 自由能$\psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})$(3.2)式的增量则可表示为：

$$\mathrm{d}\psi_{\mathrm{G}}=\dot{\psi}_{\mathrm{G}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\psi_{\mathrm{G}}+\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}}\tag{3.48a}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\psi_{\mathrm{G}}=(\dot{\psi}_{\mathrm{G}})^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t=\frac{\partial\psi_{\mathrm{G}}}{\partial\boldsymbol{T}}:\mathrm{d}\boldsymbol{T}+\frac{\partial\psi_{\mathrm{G}}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\tag{3.48b}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}}=(\dot{\psi}_{\mathrm{G}})^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=-F_\alpha\mathrm{d}\xi_\alpha\tag{3.48c}$$

式中，以F_α表示热力学作用力(见$(3.10)_2$)。比较$(3.47)_{\mathrm{c}}$与$(3.48)_{\mathrm{c}}$，可知

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi=\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}}\tag{3.49}$$

本构关系(3.11)的增量形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\dot{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}+\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E},\qquad\mathrm{d}\eta=\dot{\eta}\mathrm{d}t=\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\eta+\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\eta\tag{3.50a}$$

式中

$$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}=(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t=-\rho_0\frac{\partial(\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\psi_{\mathrm{G}})}{\partial\boldsymbol{T}},\qquad\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}=(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=-\rho_0\frac{\partial(\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}})}{\partial\boldsymbol{T}}\tag{3.50b}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\eta=(\dot{\eta})^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t=-\frac{\partial(\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\psi_{\mathrm{G}})}{\partial\theta},\qquad\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\eta=(\dot{\eta})^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=-\frac{\partial(\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}})}{\partial\theta}\tag{3.50c}$$

而本构关系(3.19)的增量形式则为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}=\dot{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{T}+\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{T},\qquad \mathrm{d}\eta=\dot{\eta}\mathrm{d}t=\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\eta+\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\eta \tag{3.51a}$$

式中

$$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{T}=\left(\dot{\boldsymbol{T}}\right)^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t-\rho_0\frac{\partial\left(\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\psi\right)}{\partial\boldsymbol{E}},\qquad \mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{T}=\left(\dot{\boldsymbol{T}}\right)^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\rho_0\frac{\partial\left(\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi\right)}{\partial\boldsymbol{E}} \tag{3.51b}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\eta=(\dot{\eta})^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t=-\frac{\partial\left(\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\psi\right)}{\partial\theta},\qquad \mathrm{d}^{\mathrm{p}}\eta=(\dot{\eta})^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=-\frac{\partial\left(\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi\right)}{\partial\theta} \tag{3.51c}$$

易证(3.38)$\left(\dot{\boldsymbol{T}}\right)^{\mathrm{p}}$与(3.27)$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}$之间存在着关系：

$$\left(\dot{\boldsymbol{T}}\right)^{\mathrm{p}}=-\boldsymbol{L}:\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}} \tag{3.52}$$

式中$\boldsymbol{L}$为弹性刚度张量。证明(3.52)式只需利用以下关系式：

$$\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}}=\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{T}}:\frac{\partial\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}}$$

上式右端的第二因子$\partial\boldsymbol{T}/\partial\boldsymbol{E}$就是四阶弹性刚度张量$\boldsymbol{L}$（见$(3.22)_1$）。因为$\boldsymbol{L}$具有 Voigt 对称性，故

$$\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{E},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{L}:\frac{\partial F_\alpha(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\boldsymbol{T}} \tag{3.53}$$

(3.53)乘以$-\rho_0\dot{\xi}_\alpha$并对α取和，左右端各利用(3.38)与(3.27)，就得到(3.52)。(3.52)乘以时间增量$\mathrm{d}t$以后，可写成

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{L}:\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E} \tag{3.54}$$

由此

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{M}:\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{T} \tag{3.55}$$

$\boldsymbol{M}$为弹性柔度张量。图 5-4 中可以找到一维情况$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}$与$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{T}$的表示。

5.3.2.2　在参考构形$\mathscr{R}$中提屈服条件

1.　等向硬化情况

(1)　率形式本构关系

现在我们假定只有一个(n=1)内变量$\xi_1=\xi$，对应的热力学作用力$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}$设为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{eq}} \tag{3.56}$$

式中$\boldsymbol{T}_{\mathrm{eq}}$称为等效应力（第二类 P-K 等效应力），其定义为

$$T_{\mathrm{eq}}=\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{T}':\boldsymbol{T}'\right)^{1/2} \tag{3.57}$$

$\boldsymbol{T}'$ 为 $\boldsymbol{T}$ 之偏量：

$$\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{T}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T})\boldsymbol{G} \tag{3.58}$$

由(3.56)

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}=\frac{3}{2F}\boldsymbol{T}', \qquad \frac{\partial F}{\partial T_{AB}}=\frac{3}{2F}T'_{AB} \tag{3.59}$$

代入(3.27)，得到

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2F}\rho_0\dot{\xi}\boldsymbol{T}', \qquad \left(\dot{E}\right)^{\mathrm{p}}_{AB}=\frac{3}{2F}\rho_0\dot{\xi}T'_{AB} \tag{3.60}$$

定义 $\dot{E}^{\mathrm{p}}$ 为累积塑性变形率，E^{p} 为累积塑性变形：

$$\begin{aligned}\dot{E}^{\mathrm{p}}&=\left[\frac{2}{3}\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}:\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}\right]^{1/2}\\ E^{\mathrm{p}}&=\int\dot{E}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.61}$$

式中对时间 t 的积分从材料进入塑性的时刻开始。显然，$\dot{E}^{\mathrm{p}}\geqslant 0$，$E^{\mathrm{p}}$ 随着加载过程恒为递增的。将(3.60)代入$(3.61)_1$，并利用(3.56)，(3.57)，得到

$$\dot{E}^{\mathrm{p}}=\rho_0\dot{\xi}, \qquad E^{\mathrm{p}}=\rho_0\xi \tag{3.62}$$

因此，内变量 ξ 的含义就是累积塑性变形率 E^{p} 除以质量密度（构形 $\mathscr{R}$ 每单位体积的质量）ρ_0。设材料的屈服条件（硬化规律）为

$$T_{\mathrm{eq}}=F=Y\left(E^{\mathrm{p}}\right) \tag{3.63}$$

取(3.63)对时间 t 的导数，得到一致性条件：

$$\dot{T}_{\mathrm{eq}}=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}}\dot{E}^{\mathrm{p}} \tag{3.64}$$

式中[1] $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}$ 称为塑性模量 E_{p}，可由材料的单向拉伸曲线得到

$$E_{\mathrm{p}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)=\frac{\mathrm{d}Y\left(E^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}} \tag{3.65}$$

---

1) 注意上、下标 p 的区别：E^{p} 为累积塑性变形，E_{p} 为塑性模量。

由(3.57)，对时间 t 求导，得

$$\dot{T}_{\mathrm{eq}}=\frac{3}{2T_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{T}':\dot{\boldsymbol{T}} \tag{3.66}$$

(3.66)代入一致性条件(3.64)，并利用(3.63)，(3.65)，可求出内变量的率：

$$\dot{E}^{\mathrm{p}}=\rho_0\dot{\xi}=\frac{3}{2E_{\mathrm{p}}(E^{\mathrm{p}})Y(E^{\mathrm{p}})}\boldsymbol{T}':\dot{\boldsymbol{T}} \tag{3.67}$$

(3.67)代入(3.60)，得变形率塑性部分

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}=\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(E^{\mathrm{p}}\right)\right]^2}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}':\dot{\boldsymbol{T}} \tag{3.68}$$

令 $\boldsymbol{M}$ 为弹性柔度张量，例如可取第 4 章(1.34)或(3.37)式。弹塑性率形式本构关系为（设等温条件，$\dot{\theta}=0$）

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}&=\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}:\dot{\boldsymbol{T}}\\ \dot{E}_{\mathrm{AB}}&=M^{\mathrm{ep}}_{ABCD}\dot{T}_{CD}\end{aligned} \tag{3.69}$$

式中 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}$ 为弹塑性柔度张量

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}=\boldsymbol{M}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(E^{\mathrm{p}}\right)\right]^2}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}' \tag{3.70}$$

α为加载参数。因 $\dot{E}^{p}\geqslant 0$，由(3.67)可知

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上, 且}\boldsymbol{T}':\dot{\boldsymbol{T}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上, 且}\boldsymbol{T}':\dot{\boldsymbol{T}}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.71}$$

本构关系(3.69)对应于在应力 $\boldsymbol{T}$ 空间中屈服面等向硬化（各向同性硬化）的情况。类似于前面的(3.11)从参考构形 $\mathscr{R}$ 协变(bb)前推到即时构形 τ 得到(3.15)，将本构关系(3.69)从参考构形 $\mathscr{R}$ 协变(bb)前推到即时构形 τ 中。可得变形率 $\boldsymbol{d}$ 与 Kirchhoff 应力 Oldroyd 导数 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 间的本构关系式：

$$\boldsymbol{d}=\mathscr{M}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \tag{3.72}$$

式中

$$\mathscr{M}^{\mathrm{ep}}=\left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right)\overset{*}{\cdot}\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}=\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(E^{\mathrm{p}}\right)\right]^2}(\boldsymbol{cccc})\overset{*}{\cdot}(\boldsymbol{\tau}*\boldsymbol{\tau}*) \tag{3.73}$$

$$\mathscr{M} = \left(\overset{-T}{F}\,\overset{-T}{F}\,\overset{-T}{F}\,\overset{-T}{F}\right) \overset{*}{\cdot}\cdot \overset{*}{\cdot}\cdot \boldsymbol{M} \tag{3.74}$$

$\mathscr{M}$ 为弹性柔度张量，$\mathscr{M}^{ep}$ 为弹塑性柔度张量，它们都是即时构形 τ 中的张量。

加载系数α 由(3.71)决定，可表示成

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上, 且}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^{*}\cdot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} > 0 \\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面内或当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上, 且}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^{*}\cdot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.75}$$

(3.73)与(3.75)式中$\boldsymbol{\tau}^*$为(3.58) $\boldsymbol{T}'$ 的逆变(##)前推

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^* &= (\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}) \overset{*}{\cdot}\cdot \boldsymbol{T}' = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} J_1(\boldsymbol{T})\boldsymbol{c}^{-1} \\ \boldsymbol{T}' &= \left(\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\right) \overset{*}{\cdot}\cdot \boldsymbol{\tau}^* \end{aligned} \tag{3.76}$$

$\boldsymbol{c}^{-1} = \boldsymbol{b}$ 称为左 Cauchy-Green 变形张量，见第 3 章(1.28)$\boldsymbol{B}$（此处改写为小写 $\boldsymbol{b}$）。注意 $\boldsymbol{T}$ 的逆变(##)前推是$\boldsymbol{\tau}$，但偏量 $\boldsymbol{T}'$ 的逆变(##)前推$\boldsymbol{\tau}^*$ 不是偏量。$\boldsymbol{\tau}$的偏量表达式应为 [1)]

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} J_1(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{g}^{-1}, \qquad \left(\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^{-1} = \mathbf{1}\right) \tag{3.77}$$

$\boldsymbol{T}'$ 的协变(bb)前推为

$$\begin{aligned} \left(\overset{-T}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-T}{\boldsymbol{F}}\right) \overset{*}{\cdot}\cdot \boldsymbol{T}' &= \overset{-T}{\boldsymbol{F}}\cdot\left(\boldsymbol{T} - \frac{1}{3} J_1(\boldsymbol{T})\mathbf{1}\right)\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}} \\ &= \overset{-T}{\boldsymbol{F}}\cdot\left[\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\overset{-T}{\boldsymbol{F}} - \frac{1}{3} J(\boldsymbol{T})\mathbf{1}\right]\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{c} - \frac{1}{3} J_1(\boldsymbol{T})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^*\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}) \overset{*}{\cdot}\cdot \boldsymbol{\tau}^* \end{aligned} \tag{3.78}$$

屈服面(3.63)在 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$空间的表示为（利用(3.57)与$(3.76)_2$）

$$\left[\frac{3}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^*\cdot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^*\right)\right]^{1/2} = Y\left(E^{\mathrm{p}}\right) \tag{3.79}$$

如果采用第 4 章(1.34)为弹性柔度张量 $\boldsymbol{M}$，代入(3.74)后，可得

$$\mathscr{M}_{ijkl} = \frac{1}{E}\left[\frac{1+\nu}{2}\left(c_{ik}c_{jl} + c_{il}c_{jk}\right) - \nu c_{ij}c_{kl}\right] \tag{3.80}$$

如果采用第 4 章(3.38b)为弹性柔度张量 $\boldsymbol{M}$，则 $\mathscr{M}$ 的分量 $\mathscr{M}_{ijkl}$ 就是第 4 章(3.35)式。

现在来讨论本构关系(3.69)所对应的 Gibbs 自由能（每单位质量）$\psi_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})$。设$\psi_{\mathrm{G}}$

---

1) 可证 $J_1(\boldsymbol{\tau}) = J_1\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right) = J_1\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}\right) = \boldsymbol{C}:\boldsymbol{T} = C_{AB}T_{AB}$，式中 $\boldsymbol{C}$ 为 Green 变形张量(见第 3 章(1.14))。

由弹性与塑性两部分组成：

$$\psi_G(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})=\psi_G^e(\boldsymbol{T},\theta)+\psi_G^p(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H}) \tag{3.81}$$

将(3.81)代入热力学作用力(3.10)，得

$$\frac{\partial\psi_G^p(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial\xi}=-F \tag{3.82}$$

因此，利用(3.56)与(3.62)，由(3.82)，有

$$\psi_G^p(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})=-\int F\mathrm{d}\xi=-\frac{1}{\rho_0}\int T_{eq}\mathrm{d}E^p \tag{3.83}$$

所以本征耗散率(3.9)（每单位质量）为（利用(3.63)）

$$\theta\gamma_{int}=\frac{1}{\rho_0}T_{eq}\dot{E}^p=\frac{1}{\rho_0}Y\left(E^p\right)\dot{E}^p\geqslant 0 \tag{3.84}$$

由(3.9)，$(3.48)_c$，(3.56)，(3.62)，在 $\mathrm{d}t$ 时间内的内禀耗散（每单位质量）为

$$-\mathrm{d}^p\psi_G=\theta\gamma_{int}\mathrm{d}t=F\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\rho_0}T_{eq}\mathrm{d}E^p\geqslant 0 \tag{3.85}$$

(2) 率形式逆本构关系

(3.69)，(3.70)是变形率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 通过应力率 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 表示的率形式本构关系，其形式类似于小变形情况第 1 章中的(1.29)，(1.30)。比较第 1 章(1.30)与此处的(3.70)，可见该处的 $1/h$ 相当于此处的

$$\frac{1}{h}=\frac{9}{4E_p\left(E^p\right)\left[Y\left(E^p\right)\right]^2},\qquad \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{T}' \tag{3.86}$$

类似于第 1 章中从率形式本构关系第 1 章(1.29)，(1.30)到率形式逆本构关系(1.31)，(1.33)的推导，可以得到此处本构关系(3.69)，(3.70）之逆：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{T}}&=\boldsymbol{L}^{ep}:\dot{\boldsymbol{E}}\\ \dot{T}_{AB}&=L_{ABCD}^{ep}\dot{E}_{CD}\end{aligned} \tag{3.87}$$

式中以 $\boldsymbol{L}$ 表示弹性刚度张量

$$\boldsymbol{L}^{ep}=\left(\boldsymbol{M}^{ep}\right)^{-1}=\boldsymbol{L}-\frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda} \tag{3.88}$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}^{-1} \tag{3.89}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{L}:\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{T}':\boldsymbol{L} \tag{3.90}$$

$$g = h + \boldsymbol{T}' : \boldsymbol{\Lambda} = h + \boldsymbol{T}' : \boldsymbol{L} : \boldsymbol{T}' \tag{3.91}$$

将(3.86)$_1$代入(3.91)，得

$$g = \frac{4}{9} E_{\mathrm{p}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(E^{\mathrm{p}}\right)\right]^2 + \boldsymbol{T}' : \boldsymbol{L} : \boldsymbol{T}' \tag{3.91$'$}$$

加载参数α为

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{T}' : \boldsymbol{L} : \dot{\boldsymbol{E}} > 0 \\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{T}' : \boldsymbol{L} : \dot{\boldsymbol{E}} \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.92}$$

把率形式逆本构关系(3.87)从参考构形 $\mathscr{R}$ 逆变(##)前推到即时构形 $\mathscr{r}$ 中，读者不难自己完成（见习题 5.4）。

如果采用第 4 章(1.34)式为弹性柔度张量 $\boldsymbol{M}$（类似于第 1 章(1.8)），则 $\boldsymbol{L}$（类似于第 1 章(1.32)），有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}^{-1} &= 2G\bar{\boldsymbol{I}} + 3K\left(\frac{1}{3}\mathbf{1}\mathbf{1}\right) \\ L_{ABCD} &= 2G\bar{I}_{ABCD} + K\delta_{AB}\delta_{CD} \end{aligned} \tag{3.93}$$

如果采用第 4 章(3.38b)式为弹性柔度张量 $\boldsymbol{M}$，则 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}^{-1}$ 的分量 L_{ABCD} 就是第 4 章(3.31)式。

如第 1 章节 1.1 最后所指出，对于软化材料，不能按照应力率的方向，而必须根据变形率的方向来判断加载与卸载。因此必须采用变形张量为自变量。因此只能取 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 与绝对温度θ为自变量，采用率形式本构关系(3.87)。

2. 混合硬化情况

(1) 率形式本构关系

类似于等向硬化情况，取(3.61)，(3.62)所定义的累积塑性变形 E^{p}/ρ_0 为内变量ξ，对应的热力学作用力为（取代等向硬化情况的(3.56)）

$$F = T_{\mathrm{F}} \tag{3.94}$$

式中

$$T_{\mathrm{F}} = \left[\frac{3}{2}\left(\boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'\right) : \left(\boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'\right)\right]^{1/2} \tag{3.95}$$

$\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'$表示背应力 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}$ 的偏量。取代等向硬化情况的(3.85)（将 T_{eq} 改为 T_{F}），在 $\mathrm{d}t$ 时间内的内禀耗散（每单位质量）为

$$-\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}} = \theta\gamma_{\mathrm{int}}\mathrm{d}t = F\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\rho_0} T_{\mathrm{F}}\mathrm{d}E^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{3.96}$$

由(3.95)，对 $\boldsymbol{T}$ 求偏导数，可得

$$\frac{\partial T_{\mathrm{F}}}{\partial \boldsymbol{T}}=\frac{3}{2T_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'\right) \tag{3.97}$$

利用(3.96)，(3.97)，$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}$ 可由$(3.50\mathrm{b})_2$式给出：

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}=\frac{3}{2T_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'\right)\mathrm{d}E^{\mathrm{p}} \tag{3.98}$$

式中的累积塑性变形增量 $\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}$ 由一致性条件求出。设材料的屈服条件（硬化规律）为

$$T_{\mathrm{F}}=Y_{\mathrm{F}}\left(E^{\mathrm{p}}\right) \tag{3.99}$$

则一致性条件为（取代等向硬化情况的(3.64)）

$$\dot{T}_{\mathrm{F}}=\frac{\mathrm{d}Y_{\mathrm{F}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}}\dot{E}^{\mathrm{p}} \tag{3.100}$$

式中 $\mathrm{d}Y_{\mathrm{F}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)/\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}$ 称为各向同性（等向）硬化模量 E_{F}：

$$E_{\mathrm{F}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)=\frac{\mathrm{d}Y_{\mathrm{F}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}} \tag{3.101}$$

为了写成增量形式，将(3.100)乘以 $\mathrm{d}t$ 并用(3.95)T_{F} 式代入，得

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{N}:\mathrm{d}\boldsymbol{T}'-\sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{N}:\mathrm{d}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'=E_{\mathrm{F}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)\mathrm{d}E^{\mathrm{p}} \tag{3.102}$$

式中 $\boldsymbol{N}$ 为沿屈服面法线（即沿 $\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'$）的单位张量：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{N}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{T_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'\right),\\&\boldsymbol{N}:\boldsymbol{N}=1\end{aligned} \tag{3.103}$$

由以下两式定义塑性模量 $E_{\mathrm{p}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)$与机动硬化模量 $E_{\mathrm{b}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)$（各对应于第 1 章的$(1.27)'''$、与$(2.29)\cdot\boldsymbol{n}$）：

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{N}:\mathrm{d}\boldsymbol{T}'=E_{\mathrm{p}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}\\&\sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{N}:\mathrm{d}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}'=E_{\mathrm{b}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)\mathrm{d}E^{\mathrm{p}}\end{aligned} \tag{3.104}$$

则由(3.102)可得（对应于第 1 章(2.30)）

$$E_{\mathrm{p}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)=E_{\mathrm{b}}\left(E^{\mathrm{p}}\right)+E_{\mathrm{F}}\left(E^{\mathrm{p}}\right) \tag{3.105}$$

此式表明塑性模量 E_p 为机动硬化模量 E_b 与各向同性硬化模量 E_F 之和。

当给定应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}$，由$(3.104)_1$计算 $\mathrm{d}E^p$，然后代入(3.98)，利用(3.99)与(3.103)可得，

$$\mathrm{d}^p\boldsymbol{E}=\frac{9}{4E_p\left(E^p\right)\left[Y_F\left(E^p\right)\right]^2}\left(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_b'\right)\left(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_b'\right):\mathrm{d}\boldsymbol{T}' \tag{3.106}$$

由此可得混合硬化情况的率形式本构关系：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}&=\boldsymbol{M}^{ep}:\dot{\boldsymbol{T}}\\ \dot{E}_{AB}&=M^{ep}_{ABCD}\dot{T}_{CD}\end{aligned} \tag{3.107}$$

式中

$$\boldsymbol{M}^{ep}=\boldsymbol{M}+\alpha\frac{9}{4E_p\left(E^p\right)\left[Y_F\left(E^p\right)\right]^2}\left(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_b'\right)\left(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_b'\right) \tag{3.108}$$

α为加载参数。由$(3.104)_1$与(3.103)，可知

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上，且}(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_b'):\dot{\boldsymbol{T}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上，且}(\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}_b'):\dot{\boldsymbol{T}}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.109}$$

由$(3.104)_2$可求 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}_b'$，但必须假定 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}_b'$ 的方向。类似于第 1 章(2.29)式，无论是按 Prager 假定，$\boldsymbol{T}_b$ 为偏量，$\boldsymbol{T}_b=\boldsymbol{T}_b'$，$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_b\,/\!/\,\boldsymbol{N}$，或是按 Ziegler 假定 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}_b\,/\!/\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_b\right)$，都可由$(3.104)_2$得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_b'=\sqrt{\frac{2}{3}}E_b\boldsymbol{N}\mathrm{d}E^p,\qquad \dot{\boldsymbol{T}}_b'=\sqrt{\frac{2}{3}}E_b\boldsymbol{N}\dot{E}^p \tag{3.110}$$

本构关系(3.107)可以从参考构形 $\mathscr{R}$ 协变(bb)前推到即时构形 τ，得到

$$\boldsymbol{d}=\mathscr{M}^{ep}:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \tag{3.111}$$

式中仿照(3.73)

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^{ep}&=\left(\overset{-T}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-T}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-T}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-T}{\boldsymbol{F}}\right)\overset{*}{\cdot}\boldsymbol{M}^{ep}\\ &=\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4E_p\left(E^p\right)\left[Y\left(E^p\right)\right]^2}(\boldsymbol{cccc})\overset{*}{\cdot}\left[\left(\boldsymbol{\tau}^*-\boldsymbol{\tau}_b^*\right)\left(\boldsymbol{\tau}^*-\boldsymbol{\tau}_b^*\right)\right]\end{aligned} \tag{3.112}$$

$\mathscr{M}$同(3.74)，α为加载参数，仿(3.75)，有

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{\tau}^*-\boldsymbol{\tau}_b^*)\cdot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面内或当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{\tau}^*-\boldsymbol{\tau}_b^*)\cdot\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.113}$$

$\boldsymbol{\tau}^*$同(3.76)$_1$，而$\boldsymbol{\tau}_b^*$为$\boldsymbol{T}_b'$的逆变(##)前推

$$\boldsymbol{\tau}_b^* = (\boldsymbol{FF}) \vdots \boldsymbol{T}_b' \tag{3.114}$$

将(3.110)式逆变(##)前推可得背应力演化率为

$$\boldsymbol{\tau}_b^{*\mathrm{Oldr}} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_b \boldsymbol{n}^* E^p \tag{3.110$'$}$$

式中，由(3.103)

$$\boldsymbol{n}^* = (\boldsymbol{FF}) \vdots \boldsymbol{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{T_F} (\boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}_b^*) \tag{3.103$'$}$$

仿(3.79)，屈服面(3.99)在 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 空间中的表示为

$$\left[\frac{3}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{c}\cdot\left(\boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}_b^*\right)\boldsymbol{c}\cdot\left(\boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}_b^*\right)\right)\right]^{1/2} = Y_F\left(E^p\right) \tag{3.115}$$

(2) 率形式逆本构关系

类似于等向硬化情况率形式逆本构关系(3.87)的推导，可得混合硬化情况(3.106)，(3.107)之逆，即率形式逆本构关系

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{T}} &= \boldsymbol{L}^{ep} : \dot{\boldsymbol{E}} \\ \dot{T}_{AB} &= L_{ABCD}^{ep} : \dot{E}_{CD} \end{aligned} \tag{3.116}$$

式中，以 $\boldsymbol{L}$ 表示弹性刚度张量，已见(3.89)，

$$\boldsymbol{L}^{ep} = \left(\boldsymbol{M}^{ep}\right)^{-1} = \boldsymbol{L} - \frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda} \tag{3.117}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{L} : \left(\boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}_b'\right) = \left(\boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}_b'\right) : \boldsymbol{L} \tag{3.118}$$

$$g = \frac{4}{9} E_p\left(E^p\right)\left[Y_F\left(E^p\right)\right]^2 + (\boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}_b') : \boldsymbol{L} : (\boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}_b') \tag{3.119}$$

α为加载参数，

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上，且}(\boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}_b') : \boldsymbol{L} : \dot{\boldsymbol{E}} > 0 \\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上，且}(\boldsymbol{T}' - \boldsymbol{T}_b') : \boldsymbol{L} : \dot{\boldsymbol{E}} \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.120}$$

利用以前类似的方法可以把率形式逆本构关系(3.116)从参考构形 $\mathscr{R}$ 逆变(##)前推到即时构形 τ 中。

5.3.2.3　在即时构形 τ 中提屈服条件

作为例子，我们只讨论等向硬化情况（等温条件 $\dot{\theta}=0$ ）。混合硬化情况可由读者自己补充。

1.　**率形式本构关系**

假定只有一个内变量 ξ，对应的热力学作用力（见(3.9)F，此处改记为 f，以区别于 5.3.2.2 的(3.56)）为

$$f=\tau_{\mathrm{eq}} \tag{3.121}$$

式中 τ_{eq} 为 Kirchhoff 等效应力，其定义为

$$\tau_{\mathrm{eq}}=\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}'\right)^{1/2} \tag{3.122}$$

$\boldsymbol{\tau}'$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 的偏量：

$$\boldsymbol{\tau}'=\boldsymbol{\tau}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{g}^{-1} \tag{3.123}$$

$\boldsymbol{g}^{-1}=\boldsymbol{g}=\mathbf{1}$ 为即时构形 τ 中的单位张量。在(3.123)式中把单位张量写作 $\boldsymbol{g}^{-1}$ 是由于我们将要对(3.123)式进行逆变(##)转移，以区别于表 5-1 中作为协变(bb)张量转移的 $\boldsymbol{g}$。将(3.123)从即时构形 τ 逆变(##)后拉（见第 3 章 3.6.2，第一种转移）到参考构形 $\mathscr{R}$，利用第 3 章(1.14)式，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}, && C_{AB}=\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\frac{\partial x_i}{\partial X_B}\\
&\overset{-1}{\boldsymbol{C}}=\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}, && \overset{-1}{C}_{AB}=\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\frac{\partial X_B}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{3.124}$$

并将 $\boldsymbol{\tau}'$ 从即时构形 τ 逆变(##)后拉到参考构形 $\mathscr{R}$ 中，得到 $\boldsymbol{T}^*$ 为[1)]

$$\boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}'\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{3.125}$$

得到[2)]

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{T}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\\
&T^*_{AB}=T_{AB}-\frac{1}{3}(T_{CD}C_{CD})\overset{-1}{C}_{AB}
\end{aligned} \tag{3.126}$$

以 $p=-\sigma_{ii}/3$ 表示 Cauchy 应力的三向均压部分（球形张量），J 表示体积比，(3.126)式中

---

1)　注意 $\boldsymbol{T}'$ 不是第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{T}$ 的偏量 $\boldsymbol{T}'$。

2)　参考(3.77)式的脚注 1）。

右端第二项系数为

$$-\frac{1}{3}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}=-\frac{1}{3}\tau_{ii}=-\frac{1}{3}J\sigma_{ii}=Jp \tag{3.127}$$

易证等式

$$\boldsymbol{T}^*:\boldsymbol{C}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C})=0 \tag{3.128}$$

将(3.125)解出的$\boldsymbol{\tau}'$代入(3.121)，(3.122)，得

$$\begin{aligned} f=\tau_{\mathrm{eq}}&=\left[\frac{3}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right)\right]^{1/2}\\ &=\left[\frac{3}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\right)\right]^{1/2}\\ &=\left[\frac{3}{2}T^*_{AB}C_{BC}T^*_{CD}C_{DA}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{3.129}$$

(3.129)也可表示为(将式(3.123)代入(3.122))

$$f=\tau_{\mathrm{eq}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T})-\frac{1}{3}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})^2\right]^{1/2} \tag{3.129$'$}$$

为了要求$\partial f/\partial\boldsymbol{T}$与$\partial f/\partial\boldsymbol{C}$，可以取(3.129)式两端平方，然后计算$\mathrm{d}\boldsymbol{T}$与$\mathrm{d}\boldsymbol{C}$引起的$\mathrm{d}f$变化，利用张量点积公式第 3 章(3.28)，得

$$2f\,\mathrm{d}f=3\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{T}^*\right)+3\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{C}\right) \tag{3.130}$$

式中由(3.126)可得$\mathrm{d}\boldsymbol{T}^*$为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}^*=\mathrm{d}\boldsymbol{T}-\frac{1}{3}(\mathrm{d}\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}+\boldsymbol{T}:\mathrm{d}\boldsymbol{C})\overset{-1}{\boldsymbol{C}}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})\mathrm{d}\overset{-1}{\boldsymbol{C}} \tag{3.131}$$

$\mathrm{d}\overset{1}{\boldsymbol{C}}$易由$\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{1}$求出，得

$$\mathrm{d}\overset{-1}{\boldsymbol{C}}=-\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{C}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{C}} \tag{3.132}$$

将(3.131)代入(3.130)，注意(3.132)并利用(3.128)，化简后得

$$2f\mathrm{d}f=3(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}):\mathrm{d}\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})\boldsymbol{T}^*:\mathrm{d}\boldsymbol{C} \tag{3.133}$$

由定义

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{T}}:\mathrm{d}\boldsymbol{T}+\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{C}}:\mathrm{d}\boldsymbol{C} \tag{3.134}$$

对比(3.134)与(3.133)的$\mathrm{d}f$，可知

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}=\frac{\partial \tau_{\mathrm{eq}}}{\partial \boldsymbol{T}}=\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C},$$
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{C}}=\frac{\partial \tau_{\mathrm{eq}}}{\partial \boldsymbol{C}}=\frac{1}{2\tau_{\mathrm{eq}}}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})\boldsymbol{T}^{*} \tag{3.135}$$

Kirchhoff 应力 τ_{eq} 的增量为

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{eq}}=\mathrm{d}f=\frac{1}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\left[3\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right):\mathrm{d}\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})\boldsymbol{T}^{*}:\mathrm{d}\boldsymbol{C}\right] \tag{3.136}$$

将(3.135)$_1$代入(3.27)，得变形率塑性部分

$$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}=\rho_0\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\dot{\xi} \tag{3.137}$$

将$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}$按表 5-4 从参考构形 $\mathscr{R}$ 协变(bb)前推到即时构形 $\varkappa$，并利用(3.124)与(3.125)得到

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}=\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\cdot(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}=\rho_0\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{\tau}'\dot{\xi} \tag{3.138}$$

上式与自身双点积，并按下式定义累积塑性变形率 $\dot{\varepsilon}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}$ 和累积塑性变形 $\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}$，可得

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2}=\rho_0\dot{\xi}$$
$$\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}=\int\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2}\mathrm{d}t=\rho_0\xi \tag{3.139}$$

因此可以把内变量ξ改为累积塑性变形 $\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}/\rho_0$，把(3.137)与(3.138)各写作

$$(\dot{\boldsymbol{E}})^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}} \tag{3.137$'$}$$

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}=\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{\tau}'\dot{\varepsilon}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}} \tag{3.138$'$}$$

设材料的硬化规律[1)]为

$$\tau_{\mathrm{eq}}=Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right) \tag{3.140}$$

一致性条件为

$$\dot{\tau}_{\mathrm{eq}}=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}} \tag{3.141}$$

式中$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}$称为塑性模量$E_{\mathrm{p}}$，可由材料的单向拉伸曲线得到[2)]：

---

1) 现有的试验数据还不能确定材料是更好地服从按参考构形 $\mathscr{R}$ 写出的硬化规律(3.63)，还是按即时构形 $\varkappa$ 写出的硬化规律(3.140)。

2) (3.142)定义的塑性模量 E_{p}不同于(3.65)定义的塑性模量 E_{p}。

$$E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)=\frac{\mathrm{d}Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}} \tag{3.142}$$

(3.122)与(3.129)分别是由$\boldsymbol{\tau}$与$\boldsymbol{T}$表示的等效应力τ_{eq}。将利用它们二者之中的任一个代入一致性条件(3.141)，可以求出$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}$。例如由(3.122)式[1)]

$$\tau_{\mathrm{eq}}\dot{\tau}_{\mathrm{eq}}=\frac{3}{2}\boldsymbol{\tau}':\dot{\boldsymbol{\tau}}' \tag{3.143}$$

因为(3.143)中的应力率$\dot{\boldsymbol{\tau}}'$为非客观张量，我们可改用客观应力率。例如，由$\boldsymbol{\tau}'$相对于某一旋率$*$的客观导数公式（见第 3 章(5.60a)，$*=\boldsymbol{w},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{b}}$等反对称张量，它们都满足第 3 章(5.58)的标架转换关系）

$$\boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{obj}}[*]=\dot{\boldsymbol{\tau}}'-*\cdot\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'\cdot*^{\mathrm{T}} \tag{3.144}$$

利用第 3 章的公式(3.8)，并注意$\boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{obj}}[*]$与$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*]$只相差一个球形张量，可证

$$\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*]=\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{obj}}[*]=\boldsymbol{\tau}':\dot{\boldsymbol{\tau}}'-\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\tau}'\cdot\boldsymbol{\tau}'\cdot\left(*+*^{\mathrm{T}}\right)\right]=\boldsymbol{\tau}':\dot{\boldsymbol{\tau}}' \tag{3.145}$$

上式中最末一个等式是因为旋率$*$为反对称张量，$*+*^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$。因此(3.143)可通过客观应力率表示：

$$\tau_{\mathrm{eq}}\dot{\tau}_{\mathrm{eq}}=\frac{3}{2}\boldsymbol{\tau}':\dot{\boldsymbol{\tau}}'=\frac{3}{2}\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*] \tag{3.143$'$}$$

将$\dot{\tau}_{\mathrm{eq}}$由(3.143)′代入一致性条件(3.141)，并注意(3.140)与(3.142)，得到

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{E_{\mathrm{p}}(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}})}\dot{\tau}_{\mathrm{eq}}=\frac{3}{2E_{\mathrm{p}}(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}})Y(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}})}\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*] \tag{3.145$'$}$$

因此(3.138)′塑性应变率$\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}$成为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}&=\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}':\dot{\boldsymbol{\tau}}'\\&=\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*]\end{aligned} \tag{3.146}$$

(3.146)中的$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*]$可取 Jaumann 导数$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$（见第 3 章(5.67)，$*=\boldsymbol{w}$），广义 Jaumann 导数$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}}$（见第 3 章(5.68)，$*=\boldsymbol{\Omega}$）等。

弹性本构关系可由$(3.16)_1$得到（等温条件，$\dot{\theta}=0$）

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{e}}=\mathscr{M}:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \tag{3.147}$$

1) 采用(3.129)τ_{eq}式的推导见后(3.156)式。

将(3.146)与(3.147)叠加，得到在即时构形 τ 中写出的率形式本构关系：

$$\boldsymbol{d}=\mathscr{M}:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}+\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*] \tag{3.148}$$

在上式中弹性变形率（右端第一项）是用 Kirchhoff 应力的 Oldroyd 导数 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 表示，而塑性变形率（右端第二项）则是用相对于旋率 $*$ 的客观导数 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*]$ 表示的。取 $*=\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*]=\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$，利用 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 与 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ 的关系（即第 4 章(1.77)）与第 4 章(1.79)四阶张量 $\mathscr{G}^{\tau}$，可得在即时构形 τ 中用 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ 表示的本构关系：

$$\left(\boldsymbol{I}+\mathscr{M}:\mathscr{G}^{\tau}\right):\boldsymbol{d}=\left[\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}'\right]:\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} \tag{3.149}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为四阶等同张量（见第 3 章(7.4)或第 1 章(1.2)）。α 为加载系数，由(3.146)：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{\tau}':\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面内，或当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上，且}\boldsymbol{\tau}':\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.150}$$

由(3.148)同样也可以得到在即时构形 τ 中用 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$ 表示的本构关系：

$$\left[\boldsymbol{I}-\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\tau}'\left(\boldsymbol{\tau}':\mathscr{G}^{\tau}\right)\right]:\boldsymbol{d}=\left[\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}'\right]:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \tag{3.151}$$

如果要把率形式本构关系(3.151)在参考构形 $\mathscr{R}$ 中写出，则应把(3.151)从即时构形 τ 协变(bb)后拉到参考构形 $\mathscr{R}$ 中。由(3.125)知 $\boldsymbol{T}^{*}$ 是 $\boldsymbol{\tau}'$ 的逆变(##)后拉，并可证 $\boldsymbol{\tau}'$ 的协变(bb)后拉为

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\tau}'\cdot\boldsymbol{F} \tag{3.152}$$

利用第 4 章(1.36b)与本章表 5-4 第 1 行，可得(3.151)的协变(bb)后拉为

$$\begin{aligned}&\left[\boldsymbol{I}-\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right):\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\right]:\dot{\boldsymbol{E}}\\&=\left[\boldsymbol{M}+\alpha\frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)\right]:\dot{\boldsymbol{T}}\end{aligned} \tag{3.153}$$

式中 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathscr{G}^{\tau}$ 的逆变(####)后拉：

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}=\left(\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\,\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\right)\overset{****}{\cdot}\mathscr{G}^{\tau} \tag{3.154}$$

由第 4 章(1.79)$\mathscr{G}^{\mathrm{T}}$ 的分量式，并注意 $\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\cdot\overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}=\overset{-1}{\boldsymbol{C}}$（由第 3 章(1.14)），可计算出 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$ 的分量：

$$G^{\mathrm{T}}_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(T_{AC}\ \overset{-1}{C}_{BD}+T_{AD}\ \overset{-1}{C}_{BC}+T_{BC}\ \overset{-1}{C}_{AD}+T_{BD}\ \overset{-1}{C}_{AC}\right) \tag{3.155}$$

α为加载系数，已见(3.150)，因涉及 Jaumann 导数 $\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}$，在参考构形 $\mathscr{R}$ 中的表示较为复杂。

上面是先求得在即时构形 $\mathscr{r}$ 中写出的率形式本构关系(3.148)，然后后拉到参考构形 $\mathscr{R}$ 中成为(3.153)。我们也可以直接建立在参考构形 $\mathscr{R}$ 中的率形式本构关系；这只需要将用等效应力 τ_{eq} 通过 $\boldsymbol{T}$ 的表达式(3.129)来取代上面推导中所用的(3.122)。将由(3.129)所导出的(3.136) $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{eq}}$ 除以 $\mathrm{d}t$ 后得 $\dot{\tau}_{\mathrm{eq}}$，代入(3.141)，得

$$\frac{1}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\left[3\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right):\dot{\boldsymbol{T}}+2\left(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{T}^{*}:\dot{\boldsymbol{C}}\right]=E_{\mathrm{p}}\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}} \tag{3.156}$$

利用(1.13)，(3.11)，$(3.12)_1$（其中设 $\dot{\theta}=0$）与(3.137)′，

$$\dot{\boldsymbol{C}}=2\dot{\boldsymbol{E}}=2\left[\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{e}}+\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}\right]=2\left[\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{T}}+\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}\right] \tag{3.157}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为弹性柔度张量；将 $\dot{\boldsymbol{C}}$ 代入(3.156)，并利用(3.129)，可解出 $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}$：

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}=\frac{1}{2\tau_{\mathrm{eq}}[E_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}]}\left[3\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}+2\left(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{T}^{*}:\boldsymbol{M}\right]:\dot{\boldsymbol{T}} \tag{3.158}$$

将(3.158)代入(3.137)′，得

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}=\frac{9}{4\tau^{2}_{\mathrm{eq}}[E_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}]}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)\left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}+\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{T}^{*}:\boldsymbol{M}\right]:\dot{\boldsymbol{T}} \tag{3.159}$$

(3.158)也可以用 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 表示(注意 $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}=\mathrm{tr}\boldsymbol{\tau}$)：

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}=\frac{1}{2\tau_{\mathrm{eq}}[E_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}]}\left[3\boldsymbol{\tau}'+2\left(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}\right)\boldsymbol{\tau}':\mathscr{M}\right]:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \tag{3.160}$$

将(3.160)代入(3.138)′，可得

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{RH}}=\frac{9}{4\tau^{2}_{\mathrm{eq}}[E_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}]}\boldsymbol{\tau}'\left[\boldsymbol{\tau}'+\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}\right)\boldsymbol{\tau}':\mathscr{M}\right]:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \tag{3.161}$$

将(3.159)塑性变形率 $\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}$ 加上弹性变形率 $\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{e}}$ $(3.12)_1$（等温条件，$\dot{\theta}=0$）得到率形式本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}:\dot{\boldsymbol{T}} \tag{3.162}$$

式中

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}=\boldsymbol{M}+\alpha\frac{9}{4\left[E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)-\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right]\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)\left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})\boldsymbol{T}^{*}:\boldsymbol{M}\right] \tag{3.163}$$

α为加载系数：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上,且}\left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})\boldsymbol{T}^{*}:\boldsymbol{M}\right]:\dot{\boldsymbol{T}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内,或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上,且}\left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})\boldsymbol{T}^{*}:\boldsymbol{M}\right]:\dot{\boldsymbol{T}}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.164}$$

可以将率形式本构关系(3.162)从参考构形 $\mathscr{R}$ 协变(bb)前推到即时构形 τ 中，后者直接将(3.161)塑性变形率 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}$ 加上弹性变形率 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{e}}$ $(3.16)_1$，得到

$$\boldsymbol{d}=\mathscr{M}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \tag{3.165}$$

式中

$$\mathscr{M}^{\mathrm{ep}}=\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4\left[E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)-\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}\right]\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\tau}'\left[\boldsymbol{\tau}'+\frac{2}{3}(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g})\boldsymbol{\tau}':\mathscr{M}\right] \tag{3.166}$$

α为加载系数：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上,且}\left[\boldsymbol{\tau}'+\frac{2}{3}(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g})\boldsymbol{\tau}':\mathscr{M}\right]:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内,或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上,且}\left[\boldsymbol{\tau}'+\frac{2}{3}(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g})\boldsymbol{\tau}':\mathscr{M}\right]:\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.167}$$

由(3.163)与(3.166)可见，弹塑性柔度张量 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}$ 与 $\mathscr{M}^{\mathrm{ep}}$ 都不满足 Voigt 对称性。但是对于金属材料说来，在大变形情况下，弹性变形仍然很小，因此在(3.163) $\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}$ 与(3.166) $\mathscr{M}^{\mathrm{ep}}$ 表达式中，可略去右端第 2 项中含弹性柔度张量 $\boldsymbol{M}$ 或 $\mathscr{M}$ 的项，即

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}=\boldsymbol{M}+\alpha\frac{9}{4\left[E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)-\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right]\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{3.163$'$}$$

α为加载参数：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上,且}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}):\dot{\boldsymbol{T}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内,或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上,且}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}):\dot{\boldsymbol{T}}\leqslant 0\end{cases} \tag{3.164$'$}$$

$$\mathscr{M}^{\mathrm{ep}}=\mathscr{M}+\alpha\frac{9}{4\left[E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)-\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}\right]\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}' \tag{3.166$'$}$$

α为加载参数：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}'\text{在屈服面上,且}\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}'\text{在屈服面内,或当}\boldsymbol{\tau}'\text{在屈服面上,且}\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\leqslant 0\end{cases}\tag{3.167)'}$$

利用(3.121)与(3.139)，由(3.49)与(3.47c)可得 Gibbs 自由能ψ_{G}增量的塑性部分

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}}=-f\mathrm{d}\xi=-\frac{1}{\rho_0}\tau_{\mathrm{eq}}\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\tag{3.168}$$

内禀耗散率(3.9)为

$$\theta\gamma_{\mathrm{in}}=f\dot{\xi}=\frac{1}{\rho_0}\tau_{\mathrm{eq}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\tag{3.169}$$

2. 率形式逆本构关系

为简单起见，设弹性变形很小，本构关系形式可取(3.163)′或(3.166)′。为了求率形式本构关系(3.163)′弹塑性柔度张量$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}$之逆，仿照(3.87)的推导，把(3.86)改为

$$\frac{1}{h}=\frac{9}{4\left[E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)-\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right]\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^2}\tag{3.170}$$

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}$$

将(3.170)的$1/h$与$\boldsymbol{\mu}$代入(3.88)~(3.91)，得到作为(3.163)′的逆的率形式本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}:\dot{\boldsymbol{E}}\tag{3.171}$$

式中，以$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}^{-1}$表示弹性刚度张量。

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}=\left(\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}\right)^{-1}=\boldsymbol{L}-\frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}\tag{3.172}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{L}:\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{L}:\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}\right)=\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}\right):\boldsymbol{L}\tag{3.173}$$

$$g=h+\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{L}:\boldsymbol{\mu}=\frac{4}{9}\left[E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)-\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right]\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^2+\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}\right):\boldsymbol{L}:\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}\right)\tag{3.174}$$

加载参数α为：

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上,且}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}):\boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{E}}>0\\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内,或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上,且}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}):\boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{E}}\leqslant 0\end{cases}\tag{3.175}$$

也可以把率形式逆本构关系(3.171)从参考构形$\mathscr{R}$逆变(##)前推到即时构形$\mathscr{r}$中，得到

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} = \mathscr{L}^{\mathrm{ep}} : \boldsymbol{d} \tag{3.176}$$

式中 $\mathscr{L}^{\mathrm{ep}}$ 为 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}}$ 由参考构形 $\mathscr{K}$ 到即时构形 τ 的逆变(####)前推，由(3.172)，并利用(3.152)，可得

$$\mathscr{L}^{\mathrm{ep}} = (\boldsymbol{FFFF}) \vdots \boldsymbol{L}^{\mathrm{ep}} = \mathscr{L} - \frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\lambda\lambda} \tag{3.177}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathscr{L} : \boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}' : \mathscr{L} \tag{3.178}$$

$$g = \frac{4}{9}\left[E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right) - \boldsymbol{T} : \boldsymbol{C}\right]\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^2 + \boldsymbol{\tau}' : \mathscr{L} : \boldsymbol{\tau}' \tag{3.179}$$

3. 一点注记

在 5.3.2.3 中假设热力学作用力 F 为(3.121)中用 f 表示的 Kirchhoff 等效应力 τ_{eq}，由(3.129)，它可表示为

$$F = \left[\frac{3}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\right)\right]^{1/2} \tag{3.180}$$

式中 $\boldsymbol{T}^{*}$ 见(3.126)，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{1} + 2\boldsymbol{E}$ (见第 3 章(1.26))。因此这里的热力学作用力 F 实际上已假定为 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的函数（此处未考虑温度 θ 的变化）。按照 Rice 与 Hill 理论，5.3.1 中$(3.12)_2$，$(3.14)_4$ 与$(3.10)_2$，塑性变形率为（设只有一个内变量 ξ）

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}} = \rho_0 \frac{\partial F(\boldsymbol{T},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}}\dot{\xi} \tag{3.181}$$

(3.181)表明正交法则(在 Rice-Hill 理论框架中，F 只依赖于 $\boldsymbol{T}$, θ, $\mathscr{H}$)。但是(3.180)中假设的 F 不仅依赖于应力 $\boldsymbol{T}$（通过 $\boldsymbol{T}^{*}$），而且也依赖于 $\boldsymbol{E}$（通过 $\boldsymbol{C}$）。这实际上已经超出了 Rice-Hill 的理论框架，也就是假定当屈服面函数不仅像 Rice 与 Hill 所假定依赖于 $\boldsymbol{T}$, θ, $\mathscr{H}$ 而且还依赖于 $\boldsymbol{C}$（或 $\boldsymbol{E}$）时，仍然有

$$\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}} = \rho_0 \left.\frac{\partial F(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\theta,\mathscr{H})}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{\boldsymbol{C},\theta,\mathscr{H}}\dot{\xi} \tag{3.182}$$

在前面推导$(3.135)_1$ 的 $\partial F/\partial \boldsymbol{T}$ 正好就是(3.182)右端的意义，即在对 $\boldsymbol{T}$ 求偏导数时，假定 $\boldsymbol{C}$, θ, ξ都不变。所以应该认为，严格说来，5.3.2.3 不属于 Rice-Hill 弹塑性大变形理论的结果。我们称(3.182)为广义的正交法则，也有不少作者采用它（见后节 5.5，(5.5)式）。

5.4 度量相关性

本节内容参见文献(Hill，1978)。

在第 4 章节 4.1 弹性本构关系与本章节 5.3 Rice-Hill 弹塑性本构关系中，我们采用的是第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{T}$，与 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$。它们是 Hill 或 Seth 应力度量 $\mathscr{T}$ 或 $\boldsymbol{T}^{(n)}$ 与应变度量 $\mathscr{E}$ 或 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 的“功共轭对”的一个特例，相当于选择度量函数为 $f(\lambda)=(\lambda^2-1)/2$（见第 3 章(1.47)、(3.31)′）。我们也可以选择其他的应力度量 $\mathscr{T}$ 与应变度量 $\mathscr{E}$ “功共轭对”代替 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 来建立弹性本构关系。那么第 4 章节 4.1 中同一材料热力学函数，如每单位质量的内能 e，Hemholtz 自由能 ψ，Gibbs 自由能 ψ_G 与焓 ψ_H 的表达式也因所选择的“功共轭对”而异，即因 $f(\lambda)$ 而异。Rice-Hill 的弹塑性本构关系本来就是针对任一“功共轭对”而建立的（见 5.2.3 所引文献 Rice(1971,1975)，Hill 与 Rice(1972,1973)）。在 5.2.3 最末，我们提出了度量相关性问题，并指出把变形率分解为弹性与塑性两部分是与度量有关的。可以想见，若采用的度量函数 $f(\lambda)$ 不同，同一材料的本构关系也是不同的。本节主要讨论选择不同的度量函数 $f(\lambda)$，对应变度量、应力度量及其率，以及对本构关系的影响。

5.4.1 应变度量 $\mathscr{E}$ 及率 $\dot{\mathscr{E}}$，应力度量 $\mathscr{T}$ 及率 $\dot{\mathscr{T}}$

应变度量 $\mathscr{E}$ 依赖于参考构形 $\mathscr{R}$，即时构形 τ，与选择的度量函数 $f(\lambda)$，见第 3 章(1.44)式。我们现在假定参考构形 $\mathscr{R}$ 与即时构形 τ 均为一定，只讨论对应于不同的度量函数 $f(\lambda)$ 的 $\mathscr{E}$，$\dot{\mathscr{E}}$，$\mathscr{T}$，$\dot{\mathscr{T}}$ 之间存在的关系。如果对于某一度量函数 $f(\lambda)$，应变度量 $\mathscr{E}$ 为已知，那么由第 3 章(1.44)，Lagrange 标架的方向 $\underset{\Gamma}{\boldsymbol{N}}(\Gamma=\mathrm{I,II,III})$ 与主长度比 $\underset{\Gamma}{\lambda}(\Gamma=\mathrm{I,II,III})$ 也就确定了。于是，对应于另一度量函数 $f^*(\lambda)$ 的应变度量 $\mathscr{E}^*$ 也随之确定。因此 $\mathscr{E}^*$ 是 $\mathscr{E}$ 的函数，反之，$\mathscr{E}$ 也是 $\mathscr{E}^*$ 的函数，它们在 Lagrange 坐标系 X_A 中的 6 个分量也互为函数：

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{E}^*=\mathscr{E}^*(\mathscr{E}), \qquad \mathscr{E}=\mathscr{E}(\mathscr{E}^*)\\
&\mathscr{E}_{IJ}^*=\mathscr{E}_{IJ}^*(\mathscr{E}_{KL}), \qquad \mathscr{E}_{KL}=\mathscr{E}_{KL}(\mathscr{E}_{IJ}^*)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

因为参考构形 $\mathscr{R}$ 是一定的，故当 $\mathscr{E}=\mathbf{0}$ 时，必有 $\mathscr{E}^*=\mathbf{0}$，反之亦然。当已知 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 时，(4.1)关系的显式过于复杂。但我们可以选择以 $f(\lambda)=\lambda-1$ 为度量函数的 Seth 应变度量 $\boldsymbol{E}^{(1/2)}=\boldsymbol{U}-\mathbf{1}$（见第 3 章(1.49)）来表示它们。利用级数关系：

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda)=(\lambda-1)+\frac{1}{2}f''(1)(\lambda-1)^2+\cdots\\
&\lambda-1=f(\lambda)-\frac{1}{2}f''(1)f^2(\lambda)+\cdots
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

可得 $\mathscr{E}$ 与 $\boldsymbol{E}^{(1/2)}$ 的相互级数表示：

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{E}=\boldsymbol{E}^{(1/2)}+\frac{1}{2}f''(1)\left(\boldsymbol{E}^{(1/2)}\right)^2+\cdots\\
&\boldsymbol{E}^{(1/2)}=\mathscr{E}-\frac{1}{2}f''(1)\mathscr{E}^2+\cdots
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

将(4.3)式中$f''(1)$改为$f^{*''}(1)$，$\mathscr{E}$改为$\mathscr{E}^*$，也同样成立。因此可以得到$\mathscr{E}^*$与$\mathscr{E}$的级数关系：

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^* &= \mathscr{E} + m\mathscr{E}^2 + O\left[\mathscr{E}^3\right] \\ \mathscr{E} &= \mathscr{E}^* - m\mathscr{E}^{*2} + O\left[\mathscr{E}^{*3}\right]\end{aligned} \tag{4.4}$$

式中

$$m = \frac{1}{2}\left[f^{*''}(1) - f''(1)\right] \tag{4.5}$$

(4.4)对时间t求导，可得$\dot{\mathscr{E}}^*$与$\dot{\mathscr{E}}$的级数关系：

$$\begin{aligned}\dot{\mathscr{E}}^* &= \dot{\mathscr{E}} + m\left(\mathscr{E}\cdot\dot{\mathscr{E}} + \dot{\mathscr{E}}\cdot\mathscr{E}\right) + O\left(\mathscr{E}^2\cdot\dot{\mathscr{E}}\right) \\ \dot{\mathscr{E}} &= \dot{\mathscr{E}}^* - m\left(\mathscr{E}^*\cdot\dot{\mathscr{E}}^* + \dot{\mathscr{E}}^*\cdot\mathscr{E}\right) + O\left(\mathscr{E}^{*2}\cdot\dot{\mathscr{E}}^*\right)\end{aligned} \tag{4.6}$$

根据参考构形$\mathscr{R}$每单位体积变形功率w的等式第3章(3.32)：

$$w = \mathscr{T}^* : \dot{\mathscr{E}}^* = \mathscr{T} : \dot{\mathscr{E}} \tag{4.7}$$

利用(4.7)与(4.1)可以建立$\mathscr{T}^*$与$\mathscr{T}$的关系。由(4.7)式有

$$\mathscr{T}_{IJ}^* \mathrm{d}\mathscr{E}_{IJ}^* = \mathscr{T}_{KL}\mathrm{d}\mathscr{E}_{KL} \tag{4.8}$$

由(4.1)，有

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_{KL} = \frac{\partial \mathscr{E}_{KL}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*}\mathrm{d}\mathscr{E}_{IJ}^* \tag{4.9}$$

将(4.9)代入(4.8)，并注意$\mathrm{d}\mathscr{E}_{IJ}^*$为任意，可得$\mathscr{T}^*$与$\mathscr{T}$的分量关系：

$$\mathscr{T}_{IJ}^* = \mathscr{T}_{KL}\frac{\partial \mathscr{E}_{KL}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*} \tag{4.10}$$

注意(4.1)式表明$\mathscr{E}^*$与$\mathscr{E}$互为函数，(4.10)表示$\mathscr{T}^*$与$\mathscr{T}$之间为线性关系，但其中却涉及到变形$\mathscr{E}^*$或$\mathscr{E}$。

利用(4.7)与(4.6)可以得到$\mathscr{T}^*$与$\mathscr{T}$关系的级数形式。将(4.6)中之任一式，例如$(4.6)_2$，代入(4.7)，并注意(4.7)对于任意的$\dot{\mathscr{E}}^*$均成立，可得

$$\mathscr{T}^* = \mathscr{T} - m\left(\mathscr{T}\cdot\mathscr{E} + \mathscr{E}\cdot\mathscr{T}\right) + O\left(\mathscr{T}\cdot\mathscr{E}^2\right) \tag{4.11}$$

(4.11)也可写成如下形式：

$$\begin{aligned}&\mathscr{T}^* + \frac{1}{2}f^{*''}(1)\left(\mathscr{T}^*\cdot\mathscr{E}^* + \mathscr{E}^*\cdot\mathscr{T}^*\right) + O\left(\mathscr{T}^*\cdot\mathscr{E}^{*2}\right) \\ &= \mathscr{T} + \frac{1}{2}f''(1)\left(\mathscr{T}\cdot\mathscr{E} + \mathscr{E}\cdot\mathscr{T}\right) + O\left(\mathscr{T}\cdot\mathscr{E}^2\right)\end{aligned} \tag{4.11$'$}$$

(4.11)或(4.11)′就是$\mathscr{T}^*$与$\mathscr{T}$的关系式。对时间t求导，可得$\dot{\mathscr{T}}^*$与$\dot{\mathscr{T}}$的关系式：

$$\begin{aligned}&\dot{\mathscr{T}}^* + \frac{1}{2}f^{*\prime\prime}(1)\left(\mathscr{T}^*\cdot\dot{\mathscr{E}}^* + \dot{\mathscr{E}}^*\cdot\mathscr{T}^*\right) + O\left(\dot{\mathscr{T}}^*\cdot\mathscr{E}^*, \mathscr{T}^*\cdot\mathscr{E}^*\cdot\dot{\mathscr{E}}^*\right)\\ &= \dot{\mathscr{T}} - \frac{1}{2}f''(1)\left(\mathscr{T}\cdot\dot{\mathscr{E}} + \dot{\mathscr{E}}\cdot\mathscr{T}\right) + O\left(\dot{\mathscr{T}}\cdot\mathscr{E}, \mathscr{T}\cdot\mathscr{E}\cdot\dot{\mathscr{E}}\right)\end{aligned} \tag{4.12}$$

当即时构形τ与初始构形$\mathscr{R}$重合（或取即时构形为参考构形）时，$\mathscr{E}^* = \mathscr{E} = \mathbf{0}, \mathscr{T}^* = \mathscr{T}$，由(4.12)，利用第 3 章(2.40)与(3.40)式，可得

$$\dot{\mathscr{T}}^* + \frac{1}{2}f^{*\prime\prime}(1)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\tau}) = \dot{\mathscr{T}} + \frac{1}{2}f''(1)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\tau}) \qquad (取\ \tau = \mathscr{R}) \tag{4.13}$$

利用第 4 章(1.79)式的四阶张量$\mathscr{G}^\tau$，上式可写作

$$\dot{\mathscr{T}}^* + \frac{1}{2}f^{*\prime\prime}(1)\mathscr{G}^\tau : \boldsymbol{d} = \dot{\mathscr{T}} + \frac{1}{2}f''(1)\mathscr{G}^\tau : \boldsymbol{d} \qquad (取\ \tau = \mathscr{R}) \tag{4.13$'$}$$

注意，虽然在推导过程中用到若干级数展开式，但(4.13)与(4.13)′都是精确式，条件是取即时构形为参考构形。

最后指出，虽然在理论上说来，如(4.1)式所示，对应于一种度量函数$f(\lambda)$的变形张量分量$\mathscr{E}_{KL}$是对应于另一种度量函数$f^*(\lambda)$的变形张量分量$\mathscr{E}^*_{IJ}$的函数，但是这个函数的具体表达形式却往往很复杂。例如取（见第 3 章(1.49)与(1.50)）

$$\begin{aligned}&f(\lambda) = \lambda - 1, \qquad \mathscr{E} = \boldsymbol{E}^{(1/2)}, \qquad \mathscr{E}_{AB} = \boldsymbol{E}^{(1/2)}_{AB}\\ &f^*(\lambda) = \ln\lambda, \qquad \mathscr{E}^* = \boldsymbol{E}^{(0)}, \qquad \mathscr{E}^*_{AB} = \boldsymbol{E}^{(0)}_{AB}\end{aligned}$$

根据$\ln\lambda$与$(\lambda-1)$的关系

$$(\lambda - 1) = \mathrm{e}^{\ln\lambda} - 1$$

可以得到张量等式

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \exp(\mathscr{E}^*) - \mathbf{1}\\ &= \mathscr{E}^* + \frac{1}{2!}\mathscr{E}^*\cdot\mathscr{E}^* + \cdots\end{aligned}$$

上式的分量形式为

$$\mathscr{E}_{KL} = \mathscr{E}^*_{KL} + \frac{1}{2}\mathscr{E}^*_{KP}\mathscr{E}^*_{PL} + \cdots$$

这就是$(4.1)_4$所指的函数$\mathscr{E}_{KL} = \mathscr{E}_{KL}(\mathscr{E}^*_{IJ})$之一例。由上式求导，可得此例的$\mathscr{E}_{KL}$对$\mathscr{E}^*_{IJ}$的偏导数（出现于下面的(4.16)）：

$$\frac{\partial\mathscr{E}_{KL}}{\partial\mathscr{E}^*_{IJ}} = \frac{1}{2}(\delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}) + \frac{1}{4}\left(\mathscr{E}^*_{IK}\delta_{JL} + \mathscr{E}^*_{JK}\delta_{IL} + \mathscr{E}^*_{IL}\delta_{JK} + \mathscr{E}^*_{JL}\delta_{IK}\right) + \cdots$$

5.4.2 度量不变量

不随度量函数 $f(\lambda)$ 而改变的量，即“度量无关”的量，称为度量不变量。例如，对于一定的参考构形 $\mathscr{R}$ 与即时构形 $\varkappa$，对应于两个不同的度量函数 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$，应变度量各为 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{E}^*$，而应力度量各为 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}^*$。则可证明：

$$\mathscr{T}^*\cdot\mathscr{E}^*-\mathscr{E}^*\cdot\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cdot\mathscr{E}-\mathscr{E}\cdot\mathscr{T} \tag{4.14}$$

利用第3章(1.44)与(3.34)，可以证明(4.14)式两端都等于一个与度量函数 $f(\lambda)$ 无关的表达式：

$$\sum_{I,J}\frac{\lambda_j^2-\lambda_i^2}{2\lambda_i\lambda_j}\tau_{(ij)}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{N}_J,\qquad (i=I,j=J)$$

式中 $\tau_{(ij)}$ 为 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 在 Euler 标架中的分量。因此，对于一定的参考构形 $\mathscr{R}$ 与即时构形 $\varkappa$，$\mathscr{T}\cdot\mathscr{E}-\mathscr{E}\cdot\mathscr{T}$ 为度量不变量。

现在我们假定不但度量函数 $f(\lambda)$ 可以改变，参考构形 $\mathscr{R}$ 也可以改变。对于一定的即时构形 $\varkappa(t)$，设即时构形 $\varkappa$ 相对于参考构形 $\mathscr{R}$ 且以 $f(\lambda)$ 为度量函数的应变度量为 $\mathscr{E}$，而相对于参考构形 $\mathscr{R}^*$ 且以 $f^*(\lambda)$ 为度量函数的应变张量为 $\mathscr{E}^*$。在 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{E}^*$ 之间必仍然存在一定的函数关系，这个关系也可以写成(4.1)的一般形式。但因为 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{E}^*$ 是相对于两个不同的参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}^*$，当 $\mathscr{E}=\mathbf{0}$ 时 $\mathscr{E}^*\neq\mathbf{0}$，反之亦然。但是(4.7)不再成立。如果已知函数关系(4.1)，则可由每单位质量的变形功率公式（取代(4.7)式）

$$\frac{1}{\rho_0^*}\mathscr{T}^*:\dot{\mathscr{E}}^*=\frac{1}{\rho_0}\mathscr{T}:\dot{\mathscr{E}} \tag{4.15}$$

式中 ρ_0 与 ρ_0^* 各为参考构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}^*$ 每单位体积的质量，并利用(4.9)式，而得到 $\mathscr{T}^*$ 与 $\mathscr{T}$ 的关系式（取代(4.10)）：

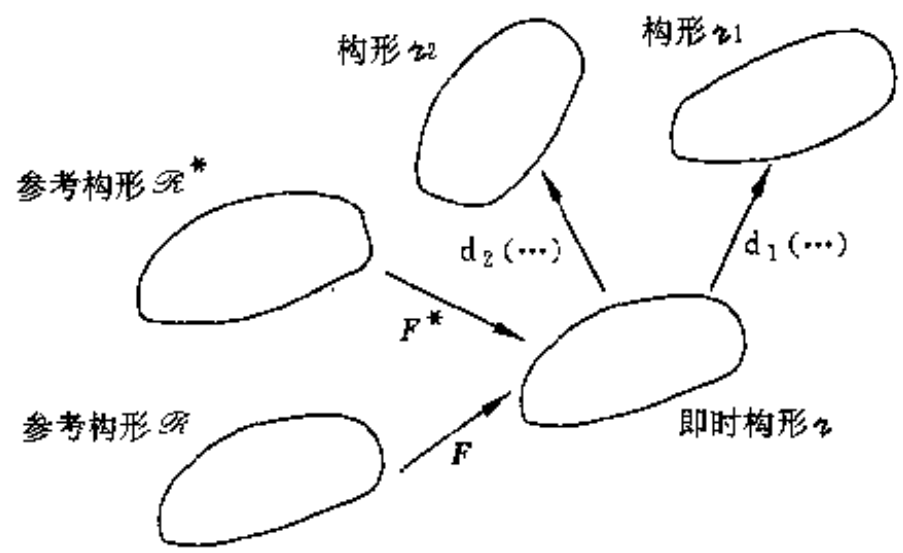


图 5-5 度量相关性

$$\frac{1}{\rho_0^*}\mathscr{T}_{IJ}^* = \frac{1}{\rho_0}\mathscr{T}_{KL}\frac{\partial \mathscr{E}_{KL}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*} \tag{4.16}$$

现在假定图 5-5 中从即时构形 τ 到邻近的构形 τ_1，应变度量 $\mathscr{E}$ 与应力度量 $\mathscr{T}$ 的增量各为 $\mathrm{d}_1\mathscr{E}$ 与 $\mathrm{d}_1\mathscr{T}$，而应变度量 $\mathscr{E}^*$ 与应力度量 $\mathscr{T}^*$ 的相应的增量则各为 $\mathrm{d}_1\mathscr{E}^*$ 与 $\mathrm{d}_1\mathscr{T}^*$。写出(4.16)式的增量：

$$\frac{1}{\rho_0^*}\mathrm{d}_1\mathscr{T}_{IJ}^* = \frac{1}{\rho_0}\mathrm{d}_1\mathscr{T}_{KL}\frac{\partial \mathscr{E}_{KL}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*} + \frac{1}{\rho_0}\mathscr{T}_{KL}\frac{\partial^2 \mathscr{E}_{KL}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*\,\partial \mathscr{E}_{MN}^*}\mathrm{d}_1\mathscr{E}_{MN}^* \tag{4.17}$$

假定图 5-5 中即时构形 τ 到邻近的另一构形 τ_2，应变度量 $\mathscr{E}$ 与应力度量 $\mathscr{T}$ 的增量各为 $\mathrm{d}_2\mathscr{E}$ 与 $\mathrm{d}_2\mathscr{T}$，而应变度量 $\mathscr{E}^*$ 与应力度量 $\mathscr{T}^*$ 的相应的增量则各为 $\mathrm{d}_2\mathscr{E}^*$ 与 $\mathrm{d}_2\mathscr{T}^*$。仿照(4.17)可同样写出：

$$\frac{1}{\rho_0^*}\mathrm{d}_2\mathscr{T}_{IJ}^* = \frac{1}{\rho_0}\mathrm{d}_2\mathscr{T}_{KL}\frac{\partial \mathscr{E}_{KL}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*} + \frac{1}{\rho_0}\mathscr{T}_{KL}\frac{\partial^2 \mathscr{E}_{KL}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*\,\partial \mathscr{E}_{MN}^*}\mathrm{d}_2\mathscr{E}_{MN}^* \tag{4.18}$$

将(4.17)乘以 $\mathrm{d}_2\mathscr{E}_{IJ}^*$，(4.18)乘以 $\mathrm{d}_1\mathscr{E}_{IJ}^*$，然后两式相减，利用(4.9)，可得

$$\frac{1}{\rho_0^*}\left(\mathrm{d}_1\mathscr{T}^*:\mathrm{d}_2\mathscr{E}^* - \mathrm{d}_2\mathscr{T}^*:\mathrm{d}_1\mathscr{E}^*\right) = \frac{1}{\rho_0}\left(\mathrm{d}_1\mathscr{T}:\mathrm{d}_2\mathscr{E} - \mathrm{d}_2\mathscr{T}:\mathrm{d}_1\mathscr{E}\right) \tag{4.19}$$

因此(4.19)式表明两端是一个度量不变量。注意(4.19)式中 $\mathrm{d}_i\mathscr{T}, \mathrm{d}_i\mathscr{E}\,(i=1,2)$ 与 $\mathrm{d}_i\mathscr{T}^*, \mathrm{d}_i\mathscr{E}^*\,(i=1,2)$ 为任意，但要求它们是对同样两物理过程（$i=1$ 是一个，$i=2$ 是另一个）的表示，只是因为度量函数选择不同因而表示也不同。若参考构形 $\mathscr{R}^*$ 与 $\mathscr{R}$ 重合，则 $\rho_0^* = \rho_0$，(4.19)式可消去两端的 ρ_0^* 与 ρ_0。注意，在 5.4.1 与 5.4.2 的讨论中，根本没有涉及到材料的本构关系。

5.4.3 对应于不同度量函数的本构关系

设对某一材料，以 $\mathscr{R}$ 为参考构形，以 $f(\lambda)$ 为度量函数时，本构关系的形式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathscr{T}} &= \boldsymbol{L}:\dot{\mathscr{E}} \\ \dot{\mathscr{T}}_{AB} &= L_{ABCD}\dot{\mathscr{E}}_{CD} \end{aligned} \tag{4.20}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 可以是弹性或弹塑性刚度张量。而对同一材料，以 $\mathscr{R}^*$ 为参考构形，以 $f^*(\lambda)$ 为度量函数时，本构关系的形式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathscr{T}}^* &= \boldsymbol{L}^*:\dot{\mathscr{E}}^* \\ \dot{\mathscr{T}}_{AB}^* &= L_{ABCD}^*\dot{\mathscr{E}}_{CD}^* \end{aligned} \tag{4.21}$$

则可证在 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{L}^*$ 之间存在关系式：

$$\frac{\rho_0}{\rho_0^*}L_{IJKL}^* = \frac{\partial \mathscr{E}_{MN}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*}\frac{\partial \mathscr{E}_{PQ}}{\partial \mathscr{E}_{KL}^*}L_{MNPQ} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}_{MN}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^* \mathscr{E}_{KL}^*}\mathscr{T}_{MN} \tag{4.22}$$

证　将(4.17)式微分记号 $\mathrm{d}_1(...)$改为 $\mathrm{d}(...)$，并改换哑指标，再乘以ρ_0可得：

$$\frac{\rho_0}{\rho_0^*}\mathrm{d}\mathscr{T}_{IJ}^* = \mathrm{d}\mathscr{T}_{MN}\frac{\partial \mathscr{E}_{MN}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^*} + \mathscr{T}_{MN}\frac{\partial^2 \mathscr{E}_{MN}}{\partial \mathscr{E}_{IJ}^* \partial \mathscr{E}_{KL}^*}\mathrm{d}\mathscr{E}_{KL}^* \tag{4.23}$$

由(4.20)与(4.21)，各得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathscr{T}_{MN} &= L_{MNPQ}\mathrm{d}\mathscr{E}_{PQ} = L_{MNPQ}\frac{\partial \mathscr{E}_{PQ}}{\partial \mathscr{E}_{KL}^*}\mathrm{d}\mathscr{E}_{KL}^* \\ \mathrm{d}\mathscr{T}_{IJ}^* &= L_{IJKL}^*\mathrm{d}\mathscr{E}_{KL}^* \end{aligned} \tag{4.24}$$

其中$(4.24)_1$的第二个等式利用了(4.9)。将(4.24)代入(4.23)，并注意$\mathrm{d}\mathscr{E}^*$为任意，即可得(4.22)。[证毕]

5.4.4　应变率与应力率的弹塑性分解

现假定以$\mathscr{R}$为参考构形，以$f(\lambda)$为度量函数，选择应变度量$\mathscr{E}$与温度θ为自变量，应力度量$\mathscr{T}$与熵η为响应，则单位质量的 Hemholtz 自由能ψ可表达为（类似于(3.1)）：

$$\psi = \psi(\mathscr{E}, \theta, \mathscr{H}) \tag{4.25}$$

应力增量塑性部分$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\mathscr{T}$为（类似于$(3.51\mathrm{b})_2$）：

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\mathscr{T} = \rho_0\frac{\partial\left(\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi\right)}{\partial \mathscr{E}} \tag{4.26}$$

式中

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi = \psi\left(\mathscr{E}, \theta, \mathscr{H} + \mathrm{d}\mathscr{H}\right) - \psi\left(\mathscr{E}, \theta, \mathscr{H}\right) \tag{4.27}$$

$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi$表示在保持应变度量$\mathscr{E}$与温度$\theta$不变的条件下由于材料内部结构排列或内变量变化$\mathrm{d}\mathscr{H}$所引起的$\psi$的变化。如果假定以$\mathscr{R}^*$为参考构形，以$f^*(\lambda)$为度量函数，应变度量$\mathscr{E}^*$与温度$\theta$为自变量，应力度量$\mathscr{T}^*$与熵$\eta$为响应，对应于同一种材料，(4.25)~(4.27)的表达形式各应改为

$$\psi^* = \psi^*\left(\mathscr{E}^*, \theta, \mathscr{H}\right) \tag{4.28}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\mathscr{T}^* = \rho_0^*\frac{\partial\left(\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi^*\right)}{\partial \mathscr{E}^*} \tag{4.29}$$

式中

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi^{*}=\psi^{*}\left(\mathscr{E}^{*},\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H}\right)-\psi^{*}\left(\mathscr{E}^{*},\theta,\mathscr{H}\right) \tag{4.30}$$

$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi^{*}$表示在保持应变度量$\mathscr{E}^{*}$与温度 θ不变的条件下由于 $\mathrm{d}\mathscr{H}$所引起的ψ^{*}的变化。当材料内部结构排列 $\mathscr{H}$（或内变量）相同，对于同一应变状态（即相同的即时构形 τ），$\mathscr{E}^{*}$与 $\mathscr{E}$必满足关系(4.1)，而(4.25)与(4.28)必有相同值，因为它们都表示每单位质量的 Hemholtz 自由能：

$$\psi^{*}\left(\mathscr{E}^{*},\theta,\mathscr{H}\right)=\psi\left(\mathscr{E},\theta,\mathscr{H}\right)$$

对于同样的 $\mathrm{d}\mathscr{H}$变化，由(4.1)式，$\mathscr{E}$保持不变必定也使$\mathscr{E}^{*}$保持不变，因此必有

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi^{*}=\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi \tag{4.31}$$

因此由(4.26)与(4.29)，可得 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\mathscr{T}^{*}$与 $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\mathscr{T}$ 的关系：

$$\frac{1}{\rho_0^{*}}\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\mathscr{T}_{IJ}^{*}=\frac{1}{\rho_0}\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\mathscr{T}_{KL}\frac{\partial\mathscr{E}_{KL}}{\partial\mathscr{E}_{IJ}^{*}} \tag{4.32}$$

(4.32)形式与$\mathscr{T}^{*}$与$\mathscr{T}$的关系(4.16)相同。同样，也可以证明$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\mathscr{T}^{*}$与$\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\mathscr{T}$ 之间也满足与(4.32)相同的关系。因此我们由(4.31)与(4.32)得出结论：Hemholtz 自由能增量 $\mathrm{d}\psi$的弹塑性分解与应力度量增量 $\mathrm{d}\mathscr{T}$ 的弹塑性分解是度量无关的（或称度量不变）。

现在假定以 $\mathscr{R}$ 为参考构形，以 $f(\lambda)$为度量函数，选择应力度量 $\mathscr{T}$与温度 θ为自变量，单位质量的 Gibbs 自由能ψ_{G}与其增量的塑性部分的表达式各为

$$\psi_{\mathrm{G}}=\psi_{\mathrm{G}}\left(\mathscr{T},\theta,\mathscr{H}\right) \tag{4.33}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}}=\psi_{\mathrm{G}}\left(\mathscr{T},\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H}\right)-\psi_{\mathrm{G}}\left(\mathscr{T},\theta,\mathscr{H}\right) \tag{4.34}$$

以 $\mathscr{R}^{*}$ 为参考构形，以 $f^{*}(\lambda)$ 为度量函数，则相应的表达式为

$$\psi_{\mathrm{G}}^{*}=\psi_{\mathrm{G}}^{*}\left(\mathscr{T}^{*},\theta,\mathscr{H}\right) \tag{4.35}$$

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}}^{*}=\psi_{\mathrm{G}}^{*}\left(\mathscr{T}^{*},\theta,\mathscr{H}+\mathrm{d}\mathscr{H}\right)-\psi_{\mathrm{G}}^{*}\left(\mathscr{T}^{*},\theta,\mathscr{H}\right) \tag{4.36}$$

对应于同一应力状态，$\mathscr{T}^{*}$与 $\mathscr{T}$ 满足关系式(4.16)，而(4.33)与(4.35)必有相同值，因为它们都表示每单位质量的 Gibbs 自由能：

$$\psi_{\mathrm{G}}^{*}\left(\mathscr{T}^{*},\theta,\mathscr{H}\right)=\psi_{\mathrm{G}}\left(\mathscr{T},\theta,\mathscr{H}\right) \tag{4.37}$$

但比较(4.34)与(4.36)可知

$$\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}}^{*}\neq\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\psi_{\mathrm{G}} \tag{4.38}$$

这是因为(4.34)的 $d^p\psi_G$ 表示在保持 $\mathscr{T}$ 与 θ 不变的条件下，由于 $d\mathscr{H}$ 引起的 ψ_G 增量，而(4.36) $d^p\psi_G^*$ 则表示在保持 $\mathscr{T}^*$ 与 θ 不变的条件下由于 $d\mathscr{H}$ 引起的 ψ_G^* 增量。关键问题在于 $\mathscr{T}^*$ 与 $\mathscr{T}$ 的关系式(4.16)中还涉及应变度量，因此保持 $\mathscr{T}$ 不变时 $\mathscr{T}^*$ 就会随着变形发展而变化，反之亦然。换句话说，$\mathscr{T}^*$ 不变与 $\mathscr{T}$ 不变是不同的条件。因此 Gibbs 自由能增量 $d\psi_G$ 的弹塑性分解与应变度量 $d\mathscr{E}$ 的弹塑性分解是与度量有关的（或称度量相关）。

5.4.5 正交法则的对偶性与度量不变性

我们假定应力度量 $\mathscr{T}$ 在应力空间的屈服面上，因此，相应地，应变度量 $\mathscr{E}$ 亦在应变空间的屈服面上。(4.19)式中第一增量 $d_1(\cdots)$ 与第二增量 $d_2(\cdots)$ 都是任意的。我们假定第一增量 $d_1(\cdots)$ 表示某一卸载增量，并记作 $\delta(\cdots)$，故 $\delta\mathscr{T}$ 指向应力空间的屈服面内，$\delta\mathscr{E}$ 指向应变空间的屈服面内。假定第二增量 $d_2(\cdots)$ 为某一加载增量，并记作 $d(\cdots)$，它的弹塑性分解为：

$$d\mathscr{E} = d^e\mathscr{E} + d^p\mathscr{E} \qquad d\mathscr{T} = d^e\mathscr{T} + d^p\mathscr{T} \tag{4.39}$$

因为第一增量 $\delta(\cdots)$ 为卸载，故

$$\delta\mathscr{T} = \mathscr{L} : \delta\mathscr{E} \qquad \delta\mathscr{E} = \mathscr{M} : \delta\mathscr{T} \tag{4.40}$$

利用率形式本构关系弹性部分，对第二增量 $d(\cdots)$，有

$$d^e\mathscr{T} = \mathscr{L} : d\mathscr{E} \qquad d^e\mathscr{E} = \mathscr{M} : d\mathscr{T}$$

并注意弹性刚度张量 $\mathscr{L}$ 与弹性柔度张量 $\mathscr{M}$ 满足 Voigt 对称性，可证(4.19)右端圆括号内的表达式等于（符号 d_1 换为 δ，d_2 换为 d）

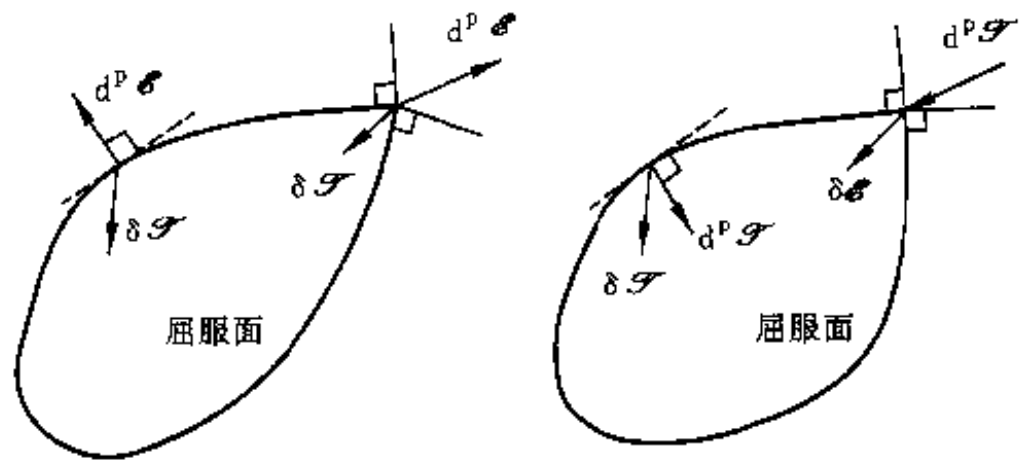
$$\delta\mathscr{T} : d\mathscr{E} - d\mathscr{T} : \delta\mathscr{E} = \delta\mathscr{T} : d^p\mathscr{E} = -\delta\mathscr{E} : d^p\mathscr{T} \tag{4.41}$$

(4.41)表明下列两个不等式等价：

$$\delta\mathscr{T} : d^p\mathscr{E} \leqslant 0 \qquad \text{对于一切的}\ \delta\mathscr{T} \tag{4.42}$$

$$\delta\mathscr{E} : d^p\mathscr{T} \geqslant 0 \qquad \text{对于一切的}\ \delta\mathscr{E} \tag{4.43}$$

换句话说；如果(4.42)成立，则(4.43)亦成立；反之亦然。如图 5-6 所示，(4.42)就是应力空间中的正交法则：当屈服面为光滑时，应变增量的塑性部分 $d^p\mathscr{E}$ 沿屈服面的外法向；在屈服面的角点处，$d^p\mathscr{E}$ 指向外向塑性锥。(4.43)就是应变空间中的正交法则：当屈服面为光滑时，应力增量的塑性部分 $d^p\mathscr{T}$ 沿屈服面的内法向；在屈服面的角点处，$d^p\mathscr{T}$ 指向与外向锥相反的方向。(4.41)式说明正交法则的对偶性。应力空间与应变空间两者只要在一者中正交法则成立，则在另一者中也成立。



(a) 应力$\mathscr{T}$空间　　(b) 应变$\mathscr{E}$空间

图 5-6　应力与应变空间中的正交法则

(4.19)式的度量不变性说明：只要对于一种度量函数，正交法则成立，则对于任一种度量函数，正交法则也成立。这一事实称为正交法则的度量不变性。

5.5　Simo-Ortiz 大变形弹塑性本构理论

5.5.1　一般关系

Simo 与 Ortiz(1985)采用(1.20)式，把 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$ 分解为弹性部分 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 与塑性部分 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$，并同时选择 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 与$\xi_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$为内变量[1]。当内变量保持不变时，材料的响应为弹性。Simo 与 Ortiz 采用弹性应变张量 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 与绝对温度θ为自变量[2]。为简单起见，我们的讨论仅限于恒温情况($\dot{\theta}=0$)。当温度变化时，需要加上熵的变化关系式，这很容易做到（见第 4 章节 4.1，与本章节 5.3）。因此，以后略去自变量 θ 不写。由第 4 章(1.11)或本章(3.7)可得

$$\boldsymbol{T}=\rho_0\frac{\partial\psi\left(\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}},\xi\right)}{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} \tag{5.1}$$

这里 ξ 代表内变量$\xi_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$，它们可以是标量也可以是张量。例如对于各向同性（等向）硬化情况，可取屈服面大小（即屈服应力）为内变量，而对于混合硬化情况，可取屈服曲面大小（即屈服应力）与屈服曲面中心（即背应力）为内变量。

由(5.1)，对时间求物质导数，可得率形式的本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}:\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}+\sum_{\alpha=1}^{n}\boldsymbol{A}_\alpha^{\xi}\dot{\xi}_\alpha \tag{5.2}$$

式中

---

1) Huang ZP，黄筑平(1994)曾选 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 为内变量。

2) 选择弹性应变张量 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 为自变量有一个缺点，就是：可以自由变化的不是 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 而是 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}$。在改变自变量 $\boldsymbol{E}$ 时，并不知道 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ 如何变化。但是 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 的变化毕竟取决于 $\boldsymbol{E}$ 的变化，因此以 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 为自变量在数学上是可行的。

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}}=\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}},\qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{p}}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}}=\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}}$$
$$\boldsymbol{A}_\alpha^{\xi}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi_\alpha}=\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}\partial \xi_\alpha}\tag{5.3}$$

在(5.2)中，应力率$\dot{\boldsymbol{T}}$表示为分别依赖于弹性变形率$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$与塑性变形率$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$的形式。我们也可以利用(2.36)，即$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}=\dot{\boldsymbol{E}}-\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$，把(5.2)写成前面惯用的形式：

$$\dot{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}:\dot{\boldsymbol{E}}-\left[\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{p}}\right):\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}-\sum\boldsymbol{A}_\alpha^{\xi}\dot{\xi}_\alpha\right]\tag{5.2$'$}$$

Simo 与 Ortiz 假定屈服条件（屈服面）方程为

$$\Phi(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\xi)=0\tag{5.4}$$

屈服条件(5.4)中出现左 Cauchy-Green 张量$\boldsymbol{C}$的情况，以前在(3.129)（即(3.129)′）式已经遇到过。Simo 与 Ortiz 假定流动法则的形式为

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=\dot{\gamma}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\xi)\qquad(\dot{\gamma}\geqslant 0)\tag{5.5}$$

内变量的演化规律（硬化规律）为

$$\dot{\xi}_\alpha=\dot{\gamma}H_\alpha(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\xi)\qquad \alpha=1,2,\cdots,n\tag{5.6}$$

这里H_α可以是标量或张量，和ξ_α一样。$\boldsymbol{R}$，H_α都是材料函数。γ是随塑性变形过程而递增的一参量，(5.5)与(5.6)说明塑性应变张量$\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$与所有的内变量$\xi_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$都按照各自的规律随着参量$\gamma$而演化。如果假定广义的正交法则(见(3.182))，则有

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\xi)=\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\xi)}{\partial\boldsymbol{T}}\tag{5.7}$$

Simo 与 Ortiz 认为有必要假定(5.4)Φ，(5.5)$\boldsymbol{R}$与(5.6)H_α依赖于$\boldsymbol{C}$，这样就可以考虑静水应力p对塑性响应的影响（见第 1 章节 1.8），因为静水压力p可表达为

$$p=-\frac{1}{3}J_1(\boldsymbol{\sigma})=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{g}=-\frac{1}{3}J\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}=-\frac{1}{3}J\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\tag{5.8}$$

式中$J=\left[J_3(\boldsymbol{C})\right]^{1/2}$（见第 3 章(1.40)）。(5.8)最后一个等式是因为$\boldsymbol{\tau}$是$\boldsymbol{T}$从参考构形$\mathscr{R}$到即时构形τ的逆变(##)前推（见第 3 章(6.34)），而$\boldsymbol{g}$是$\boldsymbol{C}$的协变(bb)前推（见本章表 5-1 第 3 行）。

将(5.5)与(5.6)代入(5.2)′，得到

$$\dot{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}:\dot{\boldsymbol{E}}+\dot{\gamma}\left[\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{p}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}\right):\boldsymbol{R}+\sum_{\alpha=1}^{n}\boldsymbol{A}_\alpha^{\xi}H_\alpha\right]\tag{5.9}$$

在实际问题中，给定的是 $\dot{\boldsymbol{E}}$ （或 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\dot{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}t$ ），欲求 $\dot{\boldsymbol{T}}$ （或 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}=\dot{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}t$ ），必须知道(5.9)右端的 $\dot{\gamma}$ 。为此，必须利用一致性条件。

取(5.4)对时间的物质导数，得

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\xi)=\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{T}}:\dot{\boldsymbol{T}}+\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{C}}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha=0 \tag{5.10}$$

(5.10)称为一致性条件。将(5.6)代入(5.10)，可将一致性条件写作（注意由(1.13)，$\dot{\boldsymbol{C}}=2\dot{\boldsymbol{E}}$ ）

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\xi)=\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{T}}:\dot{\boldsymbol{T}}+2\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{E}}+\dot{\gamma}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\alpha}H_\alpha=0 \tag{5.10$'$}$$

当 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 给定时，可由(5.9)与(5.10)′联立求解 $\dot{\gamma}$ 与 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 。

但是 Simo 与 Ortiz 没有给出上述解析过程，而只讨论了当给定变形率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ （或变形增量 $\Delta\boldsymbol{E}=\dot{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}t$ ），计算 $\dot{\boldsymbol{T}}$ （或应力增量 $\Delta\boldsymbol{T}=\dot{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}t$ ）的数值计算方法。他建议：

第一步，先略去塑性变形率（即先设 γ 不变，或即 $\dot{\gamma}=0$ ），$\Delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}=\Delta\boldsymbol{E}$ ，$\Delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{0}$ ，由(5.1)计算新的应力 $\boldsymbol{T}+\Delta\boldsymbol{T}$，或由(5.9)计算 $\Delta\boldsymbol{T}$ 。

第二步，检验第一步所计算得的 $\boldsymbol{T}+\Delta\boldsymbol{T}$ 是否超过屈服曲面(5.4)。如果不超过，说明属于卸载情况，按第一步计算的结果有效，计算结束。否则进入第三步。

第三步，利用(5.10)′计算 $\dot{\gamma}$ （或 $\Delta\gamma=\dot{\gamma}\Delta t$ ），然后由(5.5)计算 $\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=\dot{\gamma}\boldsymbol{R}$ （或 $\Delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}=\dot{\gamma}\boldsymbol{R}\Delta t$ ），$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}=\dot{\boldsymbol{E}}-\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$ （或 $\Delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}=\Delta\boldsymbol{E}-\Delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ ），由(5.6)计算 $\Delta\xi$ ，由(5.1)计算 $\boldsymbol{T}+\Delta\boldsymbol{T}$ （或由(5.9)计算 $\Delta\boldsymbol{T}$ ），检验屈服条件(5.4)是否在一定的精度内得到满足。如不满足，重复第三步，更新 $\Delta\gamma$ 与 $\Delta\boldsymbol{T}$ 值。

5.5.2 各向同性硬化（等向硬化）情况

作为例子，现在我们来推导等向硬化情况的公式。假定只有一个内变量 γ ，采用(3.122)与(3.129)式所表示的 Kirchhoff 等效应力 τ_{eq} ，因此屈服条件(5.4)可写作

$$\Phi(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\gamma)=\tau_{\mathrm{eq}}-Y(\gamma)=0 \tag{5.11}$$

式中 Y 为内变量 γ 的函数。由(3.129)与(3.129)′，以 $\boldsymbol{T}^*$ 表示(3.126)表达式，

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{eq}}&=\left[\frac{3}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\right)\right]^{1/2}\\&=\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T})-\frac{1}{3}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C})^2\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{5.12}$$

因此，假定广义正交法则，并利用(3.135)，可得

$$\boldsymbol{R}=\frac{\partial\tau_{\mathrm{eq}}}{\partial\boldsymbol{T}}=\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^*\cdot\boldsymbol{C} \tag{5.13}$$

将(5.13)代入(5.5)，得

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}=\dot{\gamma}\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C} \tag{5.5$'$}$$

将(5.5)′ $\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}$ 与 5.3.2.3 Rice-Hill 理论(3.137) $\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right)^{\mathrm{p}}$ 比较，此处右端的 $\dot{\gamma}$ 相当于该处(3.137)右端的 $\rho_0\dot{\xi}$。类似于(3.138)与(3.139)，可得

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}=\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}=\dot{\gamma}\frac{3}{2\tau_{\mathrm{eq}}}\boldsymbol{\tau}' \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}&=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{d}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{d}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2}=\dot{\gamma}\\ \varepsilon_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}&=\int\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{d}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{d}_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2}\mathrm{d}t=\gamma\end{aligned} \tag{5.15}$$

材料的硬化规律(5.11)可记为

$$\Phi(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C},\gamma)=\tau_{\mathrm{eq}}-Y\left(\varepsilon_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}\right)=0 \tag{5.11$'$}$$

塑性模量为

$$E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}\right)=\frac{\mathrm{d}Y\left(\varepsilon_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}} \tag{5.16}$$

为了建立率形式本构关系(5.2)或(5.2)′，Simo 与 Ortiz 建议采用在中间构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 中，全量形式的弹性本构关系(类似于(5.1)，但改为中间构形 $\bar{\mathscr{R}}$ 的物理量)。我们可以借用第 4 章的大变形本构关系，来建立从中间构形 $\bar{\mathscr{R}}$（而不是第 4 章的初始构形 $\mathscr{R}$）到即时构形 $\mathscr{r}$ 的弹性本构关系，因此应把第 4 章的变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 改为弹性变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$（见图 5-1），因此 $\boldsymbol{C}$ 改为 $\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$（见$(1.14)_1$），第 4 章(3.1)，(3.3)式 $\boldsymbol{C}$ 的不变量 I,II,III 应改为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}$ 的不变量，即

$$\mathrm{I}^{\mathrm{e}}=\mathrm{I}\left(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{I}\left(\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}\right),\quad \mathrm{II}^{\mathrm{e}}=\mathrm{II}\left(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{II}\left(\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}\right),\quad \mathrm{III}^{\mathrm{e}}=\mathrm{III}\left(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{III}\left(\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}\right) \tag{5.17}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 见$(1.14)_1$，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}$ 见$(1.17)_1$，第 4 章(3.6)式的 J 应改为 J^{e} 即 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 的行列式：

$$\mathrm{III}^{\mathrm{e}}=\left(J^{\mathrm{e}}\right)^2,\qquad J^{\mathrm{e}}=\text{行列式}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\right)=\left|F_{iA}^{\mathrm{e}}\right| \tag{5.18}$$

设在中间构形 $\bar{\mathscr{R}}$ (图 5-1)材料为各向同性，即(5.1)式中的 ψ 只通过 $\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 的三个不变量 I^{e}，IIe，$\mathrm{III}^{\mathrm{e}}$（见(5.17)）而依赖于 $\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$，由$(1.14)_1$与(1.11)

$$\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}},\qquad \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}}$$

并利用(1.12)，可得

$$\overline{\boldsymbol{C}}^{e} = \overset{T}{\boldsymbol{F}}{}^{p}\cdot\boldsymbol{F}^{T}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{p} = \overset{T}{\boldsymbol{F}}{}^{p}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{p} \tag{5.19}$$

利用第 3 章的(1.13a)，对 $\boldsymbol{F}^{p}$ 进行右极分解，可得

$$\boldsymbol{F}^{p} = \boldsymbol{R}^{p}\cdot\boldsymbol{U}^{p} = \boldsymbol{R}^{p}\cdot\left(\boldsymbol{C}^{p}\right)^{1/2} \tag{5.20}$$

将(5.20)代入(5.19)，并注意 $\boldsymbol{C}^{p}$ 为参考构形 $\mathscr{R}$ 中的对称张量，可得

$$\overline{\boldsymbol{C}}^{e} = \boldsymbol{R}^{p}\cdot\boldsymbol{C}^{e}\cdot\boldsymbol{R}^{p^{T}} \tag{5.21}$$

式中

$$\boldsymbol{C}^{e} = \left(\boldsymbol{C}^{p}\right)^{1/2}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\left(\boldsymbol{C}^{p}\right)^{-1/2} \tag{5.22}$$

利用$(1.13)_1$，$(1.15)_2$与(1.20)，可将(5.22)$\boldsymbol{C}^{e}$表示为

$$\boldsymbol{C}^{e} = \left(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{E}^{p}\right)^{-1/2}\cdot\left(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{E}^{e}+2\boldsymbol{E}^{p}\right)\cdot\left(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{E}^{p}\right)^{-1/2} \tag{5.23}$$

$\boldsymbol{C}^{e}$是参考构形 $\mathscr{R}$ 中的张量，$\overline{\boldsymbol{C}}^{e}$是中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的张量。由(5.21)，$\overline{\boldsymbol{C}}^{e}$是由$\boldsymbol{C}^{e}$经过旋转$\boldsymbol{R}^{p}$而得，$\overline{\boldsymbol{C}}^{e}$受中间构形刚性转动$\overline{\boldsymbol{\beta}}$的影响（见(1.28)），但$\boldsymbol{C}^{e}$与$\overline{\boldsymbol{\beta}}$无关（即$\boldsymbol{C}^{e}_{(\beta)} = \boldsymbol{C}^{e}$）显然，由(5.21)，$\overline{\boldsymbol{C}}^{e}$与$\boldsymbol{C}^{e}$具有相同的不变量：

$$\mathrm{I}^{e} = \mathrm{I}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\right) = \mathrm{I}\left(\boldsymbol{C}^{e}\right),\qquad \mathrm{II}^{e} = \mathrm{II}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\right) = \mathrm{II}\left(\boldsymbol{C}^{e}\right),\qquad \mathrm{III}^{e} = \mathrm{III}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\right) = \mathrm{III}\left(\boldsymbol{C}^{e}\right) \tag{5.24}$$

由(5.23)可看出$\overline{\boldsymbol{C}}^{e}$（或$\boldsymbol{C}^{e}$）的三个不变量$\mathrm{I}^{e}$，$\mathrm{II}^{e}$，$\mathrm{III}^{e}$都是$\boldsymbol{E}^{e}$与$\boldsymbol{E}^{p}$的函数。因此凡是通过三个不变量$\mathrm{I}^{e}$，$\mathrm{II}^{e}$，$\mathrm{III}^{e}$表示的 Hemholtz 自由能

$$\psi = \psi\left(\mathrm{I}^{e},\mathrm{II}^{e},\mathrm{III}^{e}\right) \tag{5.25}$$

都是$\boldsymbol{E}^{e}$与$\boldsymbol{E}^{p}$的函数（此处 ψ与 ξ无关，为(5.1)之特例）。

如果作为(5.1)中每单位质量的 Hemholtz 自由能 ψ，采用第 4 章(3.22)形式：

$$\psi = \frac{1}{\overline{\rho}}\left[\frac{1}{2}\mu\mathrm{I}^{e} + \lambda U\left(J^{e}\right) - \mu\ln J^{e}\right] = \frac{J^{p}}{\rho_0}\left[\frac{1}{2}\mu\mathrm{I}^{e} + \lambda U\left(J^{e}\right) - \mu\ln J^{e}\right] \tag{5.26}$$

式中 λ与 μ为材料常数（Lamé 常数），$\overline{\rho}$为中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 每单位体积的质量，ρ_0为参考构形 $\mathscr{R}$每单位体积的质量，

$$\overline{\rho} = \frac{\rho_0}{J^{p}},\qquad J^{p} = \text{行列式}\left(\boldsymbol{F}^{p}\right) = \left|F^{p}_{\overline{A}B}\right| \tag{5.27}$$

U是一个满足第 4 章(3.23)式条件的函数：

$$\frac{\mathrm{d}U\left(J^{\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2U\left(J^{\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}\left(J^{\mathrm{e}}\right)^2}=1,\qquad 当J^{\mathrm{e}}=1 \tag{5.28}$$

则弹性本构关系第 4 章(3.24)与(3.25)各成为

$$\overline{\boldsymbol{T}}=\mu\mathbf{1}+\left[\lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U\left(J^{\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}-\mu\right]\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}^{\mathrm{e}} \tag{5.29}$$

$$J^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\sigma}=\mu\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}+\left[\lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U\left(J^{\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}-\mu\right]\mathbf{1} \tag{5.30}$$

式中$\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}$见$(1.17)_1$，$\overline{\boldsymbol{T}}$为在中间构形$\overline{\mathscr{R}}$的第二类 P-K 应力。$\overline{\boldsymbol{T}}$是$J^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\sigma}$从即时构形$\mathscr{r}$到中间构形$\overline{\mathscr{R}}$的逆变(##)后拉。仿第 3 章(3.16)式：

$$\overline{\boldsymbol{T}}=\overset{\mathrm{i}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\left(J^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\sigma}\right)\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \tag{5.31}$$

当取$U(J^{\mathrm{e}})$如第 4 章(3.27)，

$$U(J^{\mathrm{e}})=\frac{1}{2}\left(\ln J^{\mathrm{e}}\right)^2 \tag{5.32}$$

则仿第 4 章的(3.28)与(3.29)，(5.29)与(5.30)各成为

$$\overline{\boldsymbol{T}}=\mu\mathbf{1}+\left(\lambda\ln J^{\mathrm{e}}-\mu\right)\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}^{\mathrm{e}} \tag{5.33}$$

$$J^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\sigma}=\mu\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}}+\left(\lambda\ln J^{\mathrm{e}}-\mu\right)\mathbf{1} \tag{5.34}$$

如果塑性变形无体积变化，则$J^{\mathrm{p}}=1$，$J=J^{\mathrm{e}}$，$J^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\sigma}$就是 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$。

(5.33)是用中间构形$\overline{\mathscr{R}}$中的张量$\overline{\boldsymbol{T}}$与$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$表示的弹性本构关系。但是中间构形$\overline{\mathscr{R}}$本身是随着加载过程（即随时间$t$）而变化的，因此更为方便的是用参考构形$\mathscr{R}$中的张量，即如(5.1)形式用$\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$，$\xi$表示的本构关系。这只需要把每单位质量的 Hemlholtz 函数$\psi\left(\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}},\xi\right)$代入(5.1)即可得到。假设塑性变形无体积变化，即$J^{\mathrm{p}}=1$，因此由(5.27)$\overline{\rho}=\rho_0$，Simo 与 Ortiz(1985)（见该文(2.5)式）把(5.26)写作

$$\psi=\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{1}{2}\mu I^{\mathrm{e}}+\lambda U\left(J^{\mathrm{e}}\right)-\mu\ln J^{\mathrm{e}}\right] \tag{5.35}$$

式中I^{e}与J^{e}已见(5.24)。由(5.23)，它们都是$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$与$\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$的函数。为了要求$I^{\mathrm{e}}$与$J^{\mathrm{e}}$对于$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$的偏导数$\partial I^{\mathrm{e}}/\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$与$\partial I^{\mathrm{e}}/\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$，应设$\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}=\mathbf{0}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{C}=2\mathrm{d}\boldsymbol{E}=2\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$，以计算由于$\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$引起的$\mathrm{d}I^{\mathrm{e}}$与$\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}$。先由(5.22)与(5.23)计算$\mathrm{d}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}$：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}} = \overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{C} \cdot \overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} = 2\overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} \cdot \overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}, \qquad \left(\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}\right) \tag{5.36}$$

因此，由(5.36)与$(5.24)_1$，并利用第 3 章张量点积公式(3.27)，(3.28)，有

$$\mathrm{d}I^{\mathrm{e}} = \mathrm{tr}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\right) = 2\mathrm{tr}\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} \cdot \overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right) = 2\mathrm{tr}\left(\overset{1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}\right) = 2\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}, \left(\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}\right) \tag{5.37}$$

故得偏导数

$$\frac{\partial I^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} = 2\overset{1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \tag{5.38}$$

又由$(5.24)_3$，并利用第 4 章$(3.5\mathrm{a})_3$，即张量的第三不变量对张量的导数公式

$$\mathrm{d}\mathrm{III}^{\mathrm{e}} = \mathrm{III}^{\mathrm{e}}\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}} : \mathrm{d}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}} = \mathrm{III}^{\mathrm{e}}\mathrm{tr}\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\right) \tag{5.39}$$

将(5.36) $\mathrm{d}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}$ 代入(5.39)再利用第 3 章张量点积公式(3.27)，(3.28)，和本章的(5.22)，可得

$$\mathrm{d}\mathrm{III}^{\mathrm{e}} = 2\mathrm{III}^{\mathrm{e}}\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} = 2\mathrm{III}^{\mathrm{e}}\overset{-1}{\boldsymbol{C}} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}, \qquad \left(\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}\right) \tag{5.39$'$}$$

故得偏导数（利用$(5.18)_1$）

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{III}^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} &= 2\mathrm{III}^{\mathrm{e}}\overset{1}{\boldsymbol{C}}, \\ \frac{\partial J^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} &= J^{\mathrm{e}}\overset{-1}{\boldsymbol{C}} \end{aligned} \tag{5.40}$$

利用(5.38)与(5.40)，可计算(5.35) ψ 对 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} &= \frac{\partial \psi}{\partial I^{\mathrm{e}}}\frac{\partial I^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} + \frac{\partial \psi}{\partial J^{\mathrm{e}}}\frac{\partial J^{\mathrm{e}}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{1}{\rho_0}\left[\mu\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} + \left(\lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}} - \mu\right)\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\right] \end{aligned} \tag{5.41}$$

因此当 ψ 如(5.35)时，本构关系(5.1)成为[1)]

$$\boldsymbol{T} = \rho_0\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} = \mu\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} + \left(\lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}} - \mu\right)\overset{-1}{\boldsymbol{C}} \tag{5.42}$$

---

1) 更简便的办法是把(5.29)或(5.30)逆变(##)后拉到参考构形 κ 中利用后文的表 5-5 中的转换关系，即可得到(5.42)

因(5.35) ψ 与内变量 γ 无关，本构关系(5.2)或(5.2)′可以表示为率形式，得到

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{e}} : \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{e}} : \dot{\boldsymbol{E}} + \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}\right) : \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} \tag{5.43}$$

式中

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} \partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}}, \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{p}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} \partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}} \tag{5.44}$$

当取 ψ 如(5.35)时，可直接由(5.42)计算 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 为

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \mu\left(\overset{1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} + \left(\lambda J^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}} - \mu\right)\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\right)^{\bullet} + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\left(J^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\right) \dot{J}^{\mathrm{e}} \overset{-1}{\boldsymbol{C}} \tag{5.45}$$

现在分别计算出现于(5.45)中的 $\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet}$，$\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\right)^{\bullet}$ 与 $\dot{J}^{\mathrm{e}}$。由$(1.15)_2$，并利用 $\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{G} = \boldsymbol{1}$，可得

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p}} = 2\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} \\ &\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} = -\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \dot{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} = -2\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} = -2\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right) \overset{*}{*} \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} \end{aligned} \tag{5.46}$$

由(1.13)并利用 $\overset{-1}{\boldsymbol{C}} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{G} = \boldsymbol{1}$，有

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{C}} = 2\dot{\boldsymbol{E}} \\ &\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\right)^{\bullet} = -\overset{-1}{\boldsymbol{C}} \cdot \dot{\boldsymbol{C}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{C}} = -2\overset{-1}{\boldsymbol{C}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{C}} = -2\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}} \overset{-1}{\boldsymbol{C}}\right) \overset{*}{*} \dot{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{5.47}$$

但是，计算 $\dot{J}^{\mathrm{e}}$ 比较复杂。由(5.39)，注意$(5.18)_1$，可得

$$\dot{J}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} J^{\mathrm{e}} \overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}} : \dot{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} \tag{5.48}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 可用(5.22)计算

$$\dot{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} = \overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \dot{\boldsymbol{C}} \cdot \overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} + \left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right) + \left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right) \cdot \boldsymbol{C} \cdot \left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} \tag{5.49}$$

因为

$$\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} = \left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} = \overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} + \left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} \cdot \overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} \tag{5.50}$$

可记作

$$\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet}=\boldsymbol{Q}:\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)^{\bullet} \tag{5.51}$$

式中 $\boldsymbol{Q}$ 为满足 Voigt 对称性的四阶张量：

$$Q_{ABCD}=\frac{1}{2}\left[\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)_{AC}\delta_{BD}+\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)_{BD}\delta_{AC}+\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)_{AD}\delta_{BC}+\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)_{BC}\delta_{AD}\right] \tag{5.52}$$

欲要 $\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)^{\bullet}$ 通过 $\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet}$ 表示，可求(5.51)之逆，得

$$\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)^{\bullet}=\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} \tag{5.53}$$

式中四阶张量 $\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 之逆，$\boldsymbol{P}$ 也满足 Voigt 对称性，以 $\boldsymbol{I}^{4}$ 表示四阶等同张量（见第 1 章(1.2)）

$$\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}^{4}, \qquad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1} \tag{5.54}$$

因此利用(5.53)，可得

$$\begin{aligned}\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)^{\bullet}&=-\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\cdot\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)^{\bullet}\cdot\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\\&=-\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\cdot\left(\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet}\right)\cdot\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}=-\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet}\end{aligned} \tag{5.55}$$

将(5.55)代入(5.49)，并利用(5.22)

$$\dot{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}=\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)\overset{*}{*}\dot{\boldsymbol{C}}-\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet} \tag{5.56}$$

将(5.56)代入(5.48)，可得

$$\dot{J}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}J^{\mathrm{e}}\left\{\overset{-1}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}}:\left[\left(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)\overset{*}{*}\dot{\boldsymbol{C}}\right]-\overset{-1}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}}:\left[\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\overset{1/2}{\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\bullet}\right]\right\} \tag{5.57}$$

(5.57)右端{ }内第一项，可化简如下：

$$
\begin{aligned}
\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}:\left[\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\ \overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)\overset{*}{*}\dot{\boldsymbol{C}}\right] &= \overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}:\left[\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}\cdot\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right]=\mathrm{tr}\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}\cdot\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)\\
&=\mathrm{tr}\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}\right)=\mathrm{tr}\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}\right)=\overset{-1}{\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{C}}
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

上式中最后一个等式的推导用到(5.22)。同样将(5.57)右端{ }内第二项中四阶张量 $\boldsymbol{P}$ 看作两个二阶张量 $\boldsymbol{K}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 的并乘，即 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{N}$，则可将第二项写作：

$$
\begin{aligned}
&\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}:\left[\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\ \overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}\right]\\
&=\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}:\left[\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\ \overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)\overset{*}{*}\boldsymbol{K}\right]\left[\boldsymbol{N}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}\right]\\
&=\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}:\left[\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\right)-\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{K}\cdot\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)\right]\left[\boldsymbol{N}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}\right]\\
&=\mathrm{tr}\left[\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}+\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{C}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{K}\cdot\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right]\left[\boldsymbol{N}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}\right]\\
&=2\mathrm{tr}\left(\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{K}\right)\left(\boldsymbol{N}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}\right)=2\overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{K}\boldsymbol{N}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}=2\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

将(5.58)与(5.59)代入(5.57)右端，得

$$
\begin{aligned}
\dot{J}^{\mathrm{e}}&=\frac{1}{2}J^{\mathrm{e}}\left[\overset{-1}{\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{C}}-2\overset{-1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}\right]\\
&=J^{\mathrm{e}}\left[\overset{-1}{\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{E}}-2\overset{-/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}\right]
\end{aligned}
\tag{5.60}
$$

将$(5.46)_2\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)^{\cdot}$，$(5.47)\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\right)^{\cdot}$与(5.60) $\dot{J}^{\mathrm{e}}$ 代入(5.45)，可得

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{T}}=&-2\mu\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\ \overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}\right)\overset{*}{*}\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}}+2\left(\mu-\lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\right)\left(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\overset{-1}{\boldsymbol{C}}\right)\overset{*}{*}\dot{\boldsymbol{E}}\\
&+\lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\left(J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\right)\left[\overset{-1}{\boldsymbol{C}}(\overset{-1}{\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{E}})-2\overset{-1}{\boldsymbol{C}}(\overset{1/2}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}})\right]
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

式中由(2.36)

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}} + \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} \tag{2.36}$$

率形式本构关系(5.61)可写成(5.43)的形式

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{T}} &= \boldsymbol{A}^{\mathrm{e}} : \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{e}} : \dot{\boldsymbol{E}} - \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{p}}\right) : \dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} \\ \dot{T}_{AB} &= A^{\mathrm{e}}_{ABCD}\dot{E}^{\mathrm{e}}_{CD} + A^{\mathrm{p}}_{ABCD}\dot{E}^{\mathrm{p}}_{CD} = A^{\mathrm{e}}_{ABCD}\dot{E}^{\mathrm{e}} - \left(A^{\mathrm{e}} - A^{\mathrm{p}}\right)_{ABCD}\dot{E}^{\mathrm{p}}_{CD} \end{aligned} \tag{5.62}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{p}}$ 可由(5.61)得出，经过指标（对 C 与 D）对称化以后可表成

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{e}}_{ABCD} = &\left(\mu - \lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\right)\left(\overset{-1}{C}_{AC}\ \overset{-1}{C}_{BD} + \overset{-1}{C}_{AD}\ \overset{-1}{C}_{BC}\right) \\ &+ \lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\left(J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\right)\ \overset{-1}{C}_{AB}\ \overset{-1}{C}_{CD} \end{aligned} \tag{5.63a}$$

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{p}}_{ABCD} = &-\mu\left(\overset{-1}{C}{}^{\mathrm{p}}_{AC}\ \overset{-1}{C}{}^{\mathrm{p}}_{BD} + \overset{-1}{C}{}^{\mathrm{p}}_{AD}\ \overset{-1}{C}{}^{\mathrm{p}}_{BC}\right) \\ &+ \left(\mu - \lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\right)\left(\overset{-1}{C}_{AC}\ \overset{-1}{C}_{BD} + \overset{-1}{C}_{AD}\ \overset{-1}{C}_{BC}\right) \\ &+ \lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\left(J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\right)\left[\overset{-1}{C}_{AB}\ \overset{-1}{C}_{CD} - 2\,\overset{-1}{C}_{AB}\ \overset{-1/2}{C}{}^{\mathrm{p}}_{MN}\,P_{MNCD}\right] \end{aligned} \tag{5.63b}$$

$$\begin{aligned} \left(A^{\mathrm{e}} - A^{\mathrm{p}}\right)_{ABCD} = &\mu\left(\overset{-1}{C}{}^{\mathrm{p}}_{AC}\ \overset{-1}{C}{}^{\mathrm{p}}_{BD} + \overset{-1}{C}{}^{\mathrm{p}}_{AD}\ \overset{-1}{C}{}^{\mathrm{p}}_{BC}\right) \\ &+ 2\lambda J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\left(J^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}J^{\mathrm{e}}}\right)\ \overset{-1}{C}_{AB}\,\overset{-1/2}{C}{}^{\mathrm{p}}_{MN}\,P_{MNCD} \end{aligned} \tag{5.63c}$$

当材料为弹性时，(5.63a)与第 4 章(3.26a) L_{ABCD} 完全相符。(5.63a) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}$ 具有 Voigt 的三重对称性，但(5.63b) A^{p}_{ABCD} 只具有对 A，B 的对称性与对 C，D 的对称性。

在实际问题中，给定 $\dot{\boldsymbol{E}}$，可能出现两种情况：

卸载情况：可由(5.61)（或(5.62)），令 $\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}$，$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}} = \dot{\boldsymbol{E}}$，计算 $\dot{\boldsymbol{T}}$，但必须校核卸载条件是否满足。卸载条件可由(3.156)式导出：

$$3\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right) : \dot{\boldsymbol{T}} + 4\left(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{T}^{*} : \dot{\boldsymbol{E}} \leqslant 0 \tag{5.64}$$

加载情况：由(5.61)（或(5.62)）与(5.5)′联立求 $\dot{\gamma}$ 与 $\dot{\boldsymbol{T}}$。显然，要求 $\dot{\gamma} \geqslant 0$。$\dot{\gamma} = 0$ 属于中性加载。

虽然上面所建立的率形式本构关系是在参考构形 $\mathscr{R}$ 中写出的，但是很容易把它们前推到中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 或即时构形 $\mathscr{r}$ 中。率形式本构关系(5.62)可以从参考构形 $\mathscr{R}$ 逆变(##)前推到即时构形 $\mathscr{r}$，利用(2.38)与第 4 章(1.36b)的转换关系，得到

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{e}} : \boldsymbol{d}_{SO}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{d}_{SO}^{\mathrm{p}} \tag{5.65}$$

式中下标 SO 表示 Simo 与 Ortiz 定义的弹性与塑性变形率（见(2.38)）：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^{\mathrm{e}} &= (\boldsymbol{FFFF})^{*} \boldsymbol{A}^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{p}} &= (\boldsymbol{FFFF})^{*} \boldsymbol{A}^{\mathrm{p}} \end{aligned} \tag{5.66}$$

5.6 中间构形弹塑性本构理论之一——Moran-Ortiz-Shih 大变形弹塑性本构理论

有一些作者认为既然弹性变形起自中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$（从 $\overline{\mathscr{R}}$ 到即时构形 $\mathscr{r}$、见图 5-1 的变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$），那么弹塑性本构关系应该在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 来建立，例如 Mandel(1971,1973,1974)、Moran，Ortiz 与 Shih(1990)，Van der Giessen(1993)等[1]。作为准备，我们讨论在三个构形 $\mathscr{R}$、$\overline{\mathscr{R}}$ 与 $\mathscr{r}$ 中应力增量的转移。如第 3 章(6.34a,b)所示，第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{T}$ 与 Kirchhoff 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 之间的关系属于逆变(##)转移。表 5-5 列出在初始构形 $\mathscr{R}$、中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 与即时构形 $\mathscr{r}$ 中应力张量的转移关系。表中以 $\rho_0,\overline{\rho},\rho$ 各表示在三个构形 $\mathscr{R}$、$\overline{\mathscr{R}}$ 与 $\mathscr{r}$ 中每单位体积的质量。以 $J,J^{\mathrm{e}},J^{\mathrm{p}}$ 表示体积比，各等于 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 的行列式（已见于第 3 章(1.39)、及本章(5.18)、(5.27)）：

$$J = \det(\boldsymbol{F}), \qquad J^{\mathrm{e}} = \det(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}), \qquad J^{\mathrm{p}} = \det(\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}) \tag{6.1}$$

则必有

$$J = J^{\mathrm{e}} J^{\mathrm{p}}, \qquad J = \frac{\rho_0}{\rho}, \qquad J^{\mathrm{e}} = \frac{\overline{\rho}}{\rho}, \qquad J^{\mathrm{p}} = \frac{\rho_0}{\overline{\rho}} \tag{6.2}$$

表 5-5 中应力张量的第一行所引进的 $\overline{\boldsymbol{T}}$ 就是 5.5(5.31)的 $\overline{\boldsymbol{T}}$。第二行等于第一行乘以 ρ_0，并利用了(6.2)式。类似于在构形 $\mathscr{r}$ 中 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$，这里定义了构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的应力张量 $\overline{\boldsymbol{S}}$：

$$\overline{\boldsymbol{S}} = J^{\mathrm{p}} \overline{\boldsymbol{T}} \tag{6.3}$$

当塑性变形无体积变化时，$J^{\mathrm{p}} = 1$，由(6.3)式定义的 $\overline{\boldsymbol{S}} = J^{\mathrm{p}}\overline{\boldsymbol{T}} = \overline{\boldsymbol{T}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{T}}$ 无区别。表 5-5 第 3 行表示应力张量率的转换关系。由第 4 章(1.36a,b)，$\dot{\boldsymbol{T}}$ 与

$$\boldsymbol{\tau}^{\overset{\cdot}{\mathrm{Oldr}}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tag{6.4}$$

---

1) 在节 5.5 中，弹性本构关系(5.29)也是在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中建立的，但塑性变形率(5.5)或(5.5)′在初始构形 $\mathscr{R}$ 中建立。

之间为构形 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{r}$ 之间的逆变(##)转移关系，即

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} = (\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}) \overset{*}{*} \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} \tag{6.5a}$$

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}) \overset{*}{*} \dot{\boldsymbol{T}} \tag{6.5b}$$

利用类似于本章$(2.6)_2$ $\boldsymbol{l} = \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}$的关系$(2.8)_2$：

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}\cdot\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}\right)^{-1} \tag{6.6}$$

可以证明$\dot{\boldsymbol{T}}$ 与

$$\overline{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{Oldr}} = \dot{\overline{\boldsymbol{S}}} - \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\overline{\boldsymbol{S}} - \overline{\boldsymbol{S}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} \tag{6.7}$$

之间为构形 $\mathscr{R}$ 与 $\overline{\mathscr{R}}$ 之间的逆变(##)转移关系。(6.7)式就是从(6.4)把 $\boldsymbol{\tau}$ 改为 $\overline{\boldsymbol{S}}$，$\boldsymbol{l}$ 改为 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 而得。表 5-5 中最后三行同时还列出了三个度量张量 $\boldsymbol{G} = \overline{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{g} = \boldsymbol{1}$ 的逆变(##)转移结果。在第 4 章从 L_{ABCD} (1.30)到 $\mathscr{L}_{ijkl}$ (1.41)（该处大写 $\boldsymbol{B}$ 此处改为小写 $\boldsymbol{b}$，见本章(1.13)式下面的脚注[1]）。从 $(1.65)_1$ $\boldsymbol{L}$ 到 $(1.70)_1$ $\mathscr{L}$，从 (3.16a) L_{ABCD} 到 (3.16b) $\mathscr{L}_{ijkl}$，曾使用这种逆变转移。

表 5-5　逆变(##)转移

	构形 $\mathscr{R}$ $\boldsymbol{Y}$	构形 $\overline{\mathscr{R}}$ $\overline{\boldsymbol{Y}}$	构形 $\mathscr{r}$ $\boldsymbol{y}$
应力张量	$\dfrac{\boldsymbol{T}}{\rho_0}$	$\dfrac{\overline{\boldsymbol{T}}}{\overline{\rho}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}\cdot\dfrac{\boldsymbol{T}}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}$ $= \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}$	$\dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} = \dfrac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_0} = \boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\boldsymbol{T}}{\rho_0}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$
应力张量	$\boldsymbol{T}$	$\overline{\boldsymbol{S}} = J^{\mathrm{p}}\overline{\boldsymbol{T}}$ $= \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}$ $= \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}$	$J\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$
应力张量率	$\dot{\boldsymbol{T}}$	$\overline{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{Oldr}} = \dot{\overline{\boldsymbol{S}}} - \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\overline{\boldsymbol{S}}$ $- \overline{\boldsymbol{S}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}$	$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$
构形 $\mathscr{R}$ 中的度量张量	$\boldsymbol{G}^{-1} = \boldsymbol{G} = \boldsymbol{1}$	$\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$
构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的度量张量	$\overset{-1}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{p}} = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}}\cdot\overline{\boldsymbol{G}}\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}}$	$\overline{\boldsymbol{G}}^{-1} = \overline{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{b}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{G}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}$
构形 $\mathscr{r}$ 中的度量张量	$\overset{-1}{\boldsymbol{C}} = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{g}\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}$	$\overset{-1}{\overline{\boldsymbol{C}}}{}^{\mathrm{e}} = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{g}\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}$	$\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g} = \boldsymbol{1}$

由第 3 章 3.6.2 张量的第一种转移即逆变(##)转移的公式(6.34)，表 5-5 中张量 $\boldsymbol{Y}, \overline{\boldsymbol{Y}}, \boldsymbol{y}$ 三者之间的关系为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{6.8a}$$

$$\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}, \qquad \boldsymbol{Y} = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} \cdot \overline{\boldsymbol{Y}} \cdot \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{p}} \tag{6.8b}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{Y}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}, \qquad \overline{\boldsymbol{Y}} = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \tag{6.8c}$$

假设等温条件($\dot{\theta} = 0$)，故不考虑温度自变量。

5.6.1 弹性响应

一般说来，每单位质量的 Hemholtz 自由能 ψ^{e} 取决于右 Cauchy-Green 变形张量 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$（或 $\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$，见(1.15)），以及材料塑性状态（或内部结构排列）。设 Hemholtz 自由能不受塑性变形的影响。这一假设对于金属的塑性是合适的，因为位错的产生和运动对金属的晶体或晶格结构影响甚微。因此仿第 4 章(1.11)，可得

$$\overline{\boldsymbol{T}} = \overline{\rho} \frac{\partial \psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}\right)}{\partial \overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}} = 2\overline{\rho} \frac{\partial \psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right)}{\partial \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}} \tag{6.9}$$

式中我们用 ψ^{e}（加上一个上标 e）表示每单位质量的 Hemholtz 自由能，是为了强调(6.9)式中的函数表示式 $\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right)$ 一般是随着中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 而改变的。中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 本身是随着加载过程而改变的；在不同的时刻 t，即时构形 $\tau(t)$ 不同，由之卸载所得的中间构形 $\overline{\mathscr{R}}(t)$ 也不同。即使是同一时刻 t，中间构形可以相差一个刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$，例如 $\overline{\mathscr{R}}$ 与 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$，它们对应的变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的弹塑性分解式也不同（见(1.11)与(1.24)~(1.26)），弹性 Green 变形张量（或右 Cauchy－Green 弹性变形张量）$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$ 也不同。由(1.28)式，它们间的关系为

$$\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)} = \overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \tag{6.10}$$

以 $\overline{\mathscr{R}}$ 为中间构形时，每单位质量的 Hemholtz 自由能函数记作 ψ^{e}，而以 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$ 为中间构形时，每单位质量的 Hemholtz 自由能函数为 $\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$，则显然 ψ^{e} 与 $\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$ 之间存在函数关系：

$$\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\right) = \psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right)$$

即

$$\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\left(\overline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\right) = \psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right) \tag{6.11}$$

如果 $\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}$ 与 ψ^{e} 是相同的函数，即

$$\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\right) = \psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\right) = \psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right) \tag{6.12}$$

我们就称 ψ^{e} 是 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 的各向同性函数，并称在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 材料的弹性性质是各向同性的。例如(5.25)（(5.26)为其特例）通过 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 的三个不变量 I^{e}，IIe，$\mathrm{III}^{\mathrm{e}}$（见(5.24)）而依赖于 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 的函

数ψ就是$\overline{C}^{e}$的各向同性函数。如果选ψ^{e}函数如(5.26)，则(6.9)导致弹性本构关系(5.29)：

$$\overline{\boldsymbol{T}}=\mu\mathbf{1}+\left[\lambda J^{e}\frac{\mathrm{d}U\left(J^{e}\right)}{\mathrm{d}J^{e}}-\mu\right]\overline{\boldsymbol{C}}^{e\,-1} \tag{6.13a}$$

同(5.29)

$$J^{e}\boldsymbol{\sigma}=\mu\boldsymbol{b}^{e}+\left[\lambda J^{e}\frac{\mathrm{d}U\left(J^{e}\right)}{\mathrm{d}J^{e}}-\mu\right]\mathbf{1} \tag{6.13b}$$

同(5.30)

可以把(6.13)写成即时构形τ中的率形式，由第 4 章(1.63)，(1.68)，并利用第 4 章(1.37a)（其中$\boldsymbol{l}$改为$\boldsymbol{l}^{e}$，见本章$(2.7)_2$），在卸载构形$\overline{\mathscr{R}}$与即时构形τ中的弹性本构关系各为[1]

$$\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}=\overline{\boldsymbol{L}}^{e}:\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{e}=\overline{\boldsymbol{L}}^{e}:\overline{\boldsymbol{D}}^{e} \tag{6.14a}$$

$$\left(J^{e}\boldsymbol{\sigma}\right)^{\mathrm{Oldr}(e)}=\left(J^{e}\boldsymbol{\sigma}\right)^{\bullet}-\boldsymbol{l}^{e}\cdot\left(J^{e}\boldsymbol{\sigma}\right)-\left(J^{e}\boldsymbol{\sigma}\right)\cdot\boldsymbol{l}^{e^{\mathrm{T}}}=\mathscr{L}^{e}:\boldsymbol{d}^{e} \tag{6.14b}$$

式中$\boldsymbol{d}^{e}$是$\dot{\overline{\boldsymbol{D}}}_{e}=\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{e}$的协变(bb)前推（见 5.2 的(2.26)与表 5-2），就是 Moran，Ortiz 与 Shih(1990)定义的弹性变形率。$\overline{\boldsymbol{L}}^{e}$之分量$\overline{L}^{e}_{ABCD}$，$\mathscr{L}^{e}$之分量$\mathscr{L}^{e}_{ijkl}$参考第 4 章(3.26a,b)：

$$\begin{aligned}\overline{L}^{e}_{ABCD}=&\lambda J^{e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J^{e}}\left(J^{e}\frac{\mathrm{d}U\left(J^{e}\right)}{\mathrm{d}J^{e}}\right)\overline{C}^{e\,-1}_{AB}\ \overline{C}^{e\,-1}_{CD}\\&+\left[\mu-\lambda J^{e}\frac{\mathrm{d}U\left(J^{e}\right)}{\mathrm{d}J^{e}}\right]\left(\overline{C}^{e\,-1}_{AC}\ \overline{C}^{e\,-1}_{BD}+\overline{C}^{e\,-1}_{AD}\ \overline{C}^{e\,-1}_{BC}\right)\end{aligned} \tag{6.15a}$$

$$\mathscr{L}^{e}_{ijkl}=\lambda J^{e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J^{e}}\left(J^{e}\frac{\mathrm{d}U\left(J^{e}\right)}{\mathrm{d}J^{e}}\right)\delta_{ij}\delta_{kl}+\left[\mu-\lambda J^{e}\frac{\mathrm{d}U\left(J^{e}\right)}{\mathrm{d}J^{e}}\right]\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{6.15b}$$

取$U\left(J^{e}\right)$如(5.32)，则(6.13)成为

$$\overline{\boldsymbol{T}}=\mu\mathbf{1}+\left(\lambda\ln J^{e}-\mu\right)\overline{\boldsymbol{C}}^{e\,-1} \tag{6.16a}$$

同(5.33a)

$$J^{e}\boldsymbol{\sigma}=\mu\boldsymbol{b}^{e}+\left(\lambda\ln J^{e}-\mu\right)\mathbf{1} \tag{6.16b}$$

同(5.33b)

而$\overline{\boldsymbol{L}}^{e}$之分量$\overline{L}^{e}_{ABCD}$(6.15a)与$\mathscr{L}^{e}$之分量$\mathscr{L}^{e}_{ijkl}$(6.15b)则成为，参考第 4 章(3.31)，(3.33)：

$$\overline{L}^{e}_{ABCD}=\lambda\ \overline{C}^{e\,-1}_{AB}\ \overline{C}^{e\,-1}_{CD}+\left(\mu-\lambda\ln J^{e}\right)\left(\overline{C}^{e\,-1}_{AC}\ \overline{C}^{e\,-1}_{BD}+\overline{C}^{e\,-1}_{AD}\ \overline{C}^{e\,-1}_{BC}\right) \tag{6.17a}$$

$$\mathscr{L}^{e}_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\left(\mu-\lambda\ln J^{e}\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{6.17b}$$

---

1) 此处$\overline{\boldsymbol{L}}^{e}$为弹性刚度张量，[illegible]为与(2.15)式的速度梯度张量$\overline{\boldsymbol{L}}^{e}$[illegible]。

5.6.2 塑性响应，率形式本构关系

Moran，Ortiz 与 Shih(1990)不仅是在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中写弹性本构关系，而且也在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中写塑性变形率。假定塑性速度梯度 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ （见$(2.8)_2$）的形式为

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \overline{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{L}}\left(\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}, \overline{\xi}\right) \tag{6.18}$$

式中 $\overline{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{L}}$ 表示 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 的方向，$\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 为一种累积塑性变形(见后(6.31)，(6.32))，$\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 为其率，$\overline{\xi}$ 表示一组内变量 $\overline{\xi}_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots,n)$，它们可以是标量，也可以是卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的张量。内变量的演化规律设为

$$\dot{\overline{\xi}}_\alpha = \dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \overline{\boldsymbol{H}}_\alpha\left(\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}, \overline{\xi}\right) \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n \tag{6.19}$$

(6.19)表明，和节 5.5 的 Simo-Ortiz 理论类似，所有的内变量 $\overline{\xi}_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots,n)$ 都按照各自的规律随着参量 $\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 而演化。后继屈服面方程设为

$$\overline{\Phi}\left(\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}, \overline{\xi}\right) = 0 \tag{6.20}$$

$\overline{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{L}}$、$\overline{\boldsymbol{H}}_\alpha$，$\overline{\Phi}$ 都是材料函数。由屈服面方程对时间 t 求导，可得一致性条件。$\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 由一致性条件决定，$\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \geqslant 0$。$\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} > 0$ 表示加载；卸载（或中性加载）时，$\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = 0$。

将(6.18)代入$(2.25\mathrm{b})_1$

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} + \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} \cdot \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right) \tag{$(2.25\mathrm{b})_1$}$$

可得塑性变形率 $\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$ （卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的张量）：

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}} = \dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \overline{\boldsymbol{R}}\left(\overline{\boldsymbol{T}}, \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}, \overline{\xi}\right) \tag{6.21}$$

式中

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{L}} + \overline{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{L}^{\mathrm{T}}} \cdot \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right) \tag{6.22}$$

将上面的(6.18) $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 按(2.10)从中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 混合(#b)前推到即时构形 τ，得

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \boldsymbol{r}^{\mathrm{L}}, \qquad \boldsymbol{r}^{\mathrm{L}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{L}} \cdot \overset{|}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \tag{6.23}$$

将上面的(6.21) $\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$ 与(6.22) $\overline{\boldsymbol{R}}$ 按表 5-2 第 3 行从中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 协变(bb)前推到即时构形 τ，得

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\right) = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{R}} \cdot \overset{|}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \tag{6.24}$$

下面分两种情况讨论，即在中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中提屈服条件与在即时构形 τ 中提屈服条件。

5.6.2.1 在中间构形 $\overline{\mathscr{B}}$ 中提屈服条件

设后继屈服面方程(6.20)的形式为

$$\overline{\Phi}\left(\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}},\overline{\xi}\right)=\overline{T}_{\mathrm{F}}-\overline{Y}_{\mathrm{F}}=0 \tag{6.25}$$

式中

$$\overline{T}_{\mathrm{F}}=\left[\frac{3}{2}\left(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'\right):\left(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'\right)\right]^{1/2} \tag{6.26}$$

$\overline{\boldsymbol{T}}'$ 为 $\overline{\boldsymbol{T}}$ 的偏量，类似于(3.123)，可表示成

$$\overline{\boldsymbol{T}}'=\overline{\boldsymbol{T}}-\frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\overline{\boldsymbol{T}}\right)\overline{\boldsymbol{G}}^{-1} \tag{6.27}$$

$\overline{T}_{\mathrm{F}}$ 表示在偏应力 $\overline{\boldsymbol{T}}'$ 空间中屈服面的大小，$\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'$ 表示背应力，即屈服面中心的位置。取 $\overline{Y}_{\mathrm{F}}$ 为内变量 $\overline{\xi}_1$ 的函数，$\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'$ 为内变量 $\overline{\xi}_2$：

$$\overline{Y}_{\mathrm{F}}=\overline{Y}_{\mathrm{F}}\left(\overline{\xi}_1\right),\qquad \overline{\xi}_2=\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}' \tag{6.28}$$

由(6.25)可见 $\overline{\Phi}\left(\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}},\overline{\xi}\right)$ 不含 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$，因此在本节 5.6.2.1 中记为 $\overline{\Phi}\left(\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\xi}\right)$。假定在中间构形 $\overline{\mathscr{B}}$ 中的正交法则，取(6.21)中的 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 为

$$\overline{\boldsymbol{R}}=\frac{\partial\overline{T}_{\mathrm{F}}}{\partial\overline{\boldsymbol{T}}}=\frac{3}{2\overline{T}_{\mathrm{F}}}\left(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'\right) \tag{6.29}$$

(6.21)成为

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}=\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\frac{3}{2\overline{T}_{\mathrm{F}}}\left(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'\right) \tag{6.30}$$

将上式与自身双点积，并利用 $\overline{T}_{\mathrm{F}}$ 的定义式(6.26)，可得

$$\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\left[\frac{2}{3}\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}:\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}\right]^{1/2}\geqslant 0 \tag{6.31}$$

故 $\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\geqslant 0$ 表示累积塑性变形率，而累积塑性变形为

$$\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{2}{3}\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}:\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2}\mathrm{d}t \tag{6.32}$$

取 $\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 为内变量 $\overline{\xi}_1$，则(6.28)表示材料的各向同性硬化规律

$$\overline{T}_{\mathrm{F}}=\overline{Y}_{\mathrm{F}}\left(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right) \tag{6.33}$$

定义 $\overline{E}_{\mathrm{F}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 为各向同性（等向）硬化模量：

$$\overline{E}_{\mathrm{F}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})=\frac{\mathrm{d}\overline{Y}_{\mathrm{F}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}{\mathrm{d}\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{6.34}$$

由(6.26)及(6.33)：

$$\mathrm{d}\overline{T}_{\mathrm{F}}=\frac{3}{2\overline{T}_{\mathrm{F}}}(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'):(\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{T}}'-\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}')=\overline{E}_{\mathrm{F}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\mathrm{d}\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{6.35}$$

(6.35)就是一致性条件[1)]。仿照(3.104)，定义塑性模量 $\overline{E}_{\mathrm{p}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 与机动硬化模量 $\overline{E}_{\mathrm{b}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 如下式

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2\overline{T}_{\mathrm{F}}}(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{b}'):\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}=\frac{3}{2\overline{T}_{\mathrm{F}}}(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'):\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}'=\overline{E}_{p}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\\&\frac{3}{2\overline{T}_{\mathrm{F}}}(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'):\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\mathrm{b}}'=\overline{E}_{\mathrm{b}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\end{aligned} \tag{6.36}$$

利用(6.36)，由一致性条件$(6.35)_2$，可得

$$\overline{E}_{\mathrm{p}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})=\overline{E}_{\mathrm{b}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})+\overline{E}_{\mathrm{F}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{6.37}$$

利用(6.37)，可引进一各向同性硬化参数 $\overline{\beta}$，并假定为一材料常数，使

$$\overline{E}_{\mathrm{p}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}):\overline{E}_{\mathrm{F}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}):\overline{E}_{\mathrm{b}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})=1:\overline{\beta}:(1-\overline{\beta}) \tag{6.38}$$

类似于第 1 章 1.2.2 Prager 或 Ziegler 假定，设背应力演化率 $\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\mathrm{b}}'$ 与塑性应变率 $\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$ 平行，即

$$\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\mathrm{b}}'=\overline{\Lambda}\,\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}} \tag{6.39}$$

将(6.30)代入(6.39)，然后再代入$(6.36)_2$中的 $\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\mathrm{b}}'$，可得

$$\overline{\Lambda}=\frac{2}{3}\overline{E}_{\mathrm{b}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})=\frac{2}{3}(1-\overline{\beta})\overline{E}_{\mathrm{p}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{6.40}$$

及

$$\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\mathrm{b}}'=\frac{2}{3}\overline{E}_{\mathrm{b}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}=\frac{2}{3}(1-\overline{\beta})\overline{E}_{\mathrm{p}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}=\dot{\overline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\frac{\overline{E}_{\mathrm{b}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}{\overline{T}_{\mathrm{F}}(\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}') \tag{6.41}$$

在实际问题中，给定的是变形率 $\boldsymbol{d}$，按表 5-2 第二行，可将 $\boldsymbol{d}$ 协变(bb)后拉到中间构形，得

$$\overline{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{-1}}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \tag{6.42}$$

---

1) Moran，Ortiz 与 Shih(1990)还讨论了率相关材料。对于率相关材料不涉及一致性条件。

但是最终要求出应力率$\dot{\overline{T}}$，必须把$\overline{D}$分为弹性与塑性两部分，即$\overline{D}^{e}$与$\overline{D}^{p}$。为此，首先必须要求出累积塑性变形率$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$。过程如下：将(6.14a)$\dot{\overline{T}}=\overline{L}^{e}:\overline{D}^{e}$代入(6.36)$_1$，并解出$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$，得

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}=\frac{1}{\overline{E}_{p}(\bar{\varepsilon}^{p})}\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right):\overline{L}^{e}:\overline{D}^{e} \tag{6.43}$$

为了求出(6.43)式中的$\overline{L}^{e}:\overline{D}^{e}$，利用(6.30)得到

$$\overline{L}^{e}:\overline{D}^{e}=\overline{L}^{e}:\left(\overline{D}-\overline{D}^{p}\right)=\overline{L}^{e}:\overline{D}-\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}\overline{L}^{e}:\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right) \tag{6.44}$$

将(6.44)代入(6.43)右端，解出$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$，可得

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}=\frac{1}{\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right):\overline{L}^{e}:\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right)+\overline{E}_{p}\left(\bar{\varepsilon}^{p}\right)}\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right):\overline{L}^{e}:\overline{D} \tag{6.45}$$

将(6.45)$\dot{\varepsilon}^{p}$重新回代入(6.44)右端，可得

$$\dot{\overline{T}}=\overline{L}^{e}:\overline{D}^{e}=\overline{L}^{ep}:\overline{D} \tag{6.46}$$

式中$\overline{L}^{ep}$称为弹塑性刚度张量

$$\overline{L}^{ep}=\overline{L}^{e}-\frac{1}{\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right):\overline{L}^{e}:\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right)+\overline{E}_{p}\left(\bar{\varepsilon}^{p}\right)}\left[\left(\overline{L}^{e}:\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right)\right)\right]\left[\left(\overline{L}^{e}:\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right)\right)\right] \tag{6.47}$$

因此，利用(6.46)，可将(6.43)累积塑性变形率$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$通过$\overline{D}$表示

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}=\frac{1}{\overline{E}_{p}(\bar{\varepsilon}^{p})}\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{T}'-\overline{T}_{b}'\right):\overline{L}^{ep}:\overline{D}\geqslant 0 \tag{6.48}$$

(6.48)$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$代入(6.30)即为$\overline{D}^{p}$通过$\overline{D}$的表示。$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}=0$的情况表示中性加载。

可以将率形式本构关系(6.46)从中间构形$\overline{\mathscr{B}}$逆变(##)前推到即时构形τ，得到（类似于(6.14a)逆变前推为(6.14b)）$J^{e}\boldsymbol{\sigma}$的弹性 Oldroyd 导数：

$$\left(J^{e}\boldsymbol{\sigma}\right)^{\mathrm{Oldr(e)}}=\left(J^{e}\boldsymbol{\sigma}\right)^{\cdot}-\boldsymbol{l}^{e}\cdot\left(J^{e}\boldsymbol{\sigma}\right)-\left(J^{e}\boldsymbol{\sigma}\right)\cdot\boldsymbol{l}^{e^{T}}=\mathscr{L}^{ep}:\boldsymbol{d} \tag{6.49}$$

式中，以x_i与$X_{\bar{A}}$各表示即时构形τ与中间构形$\overline{\mathscr{B}}$的直角坐标方向，

$$\mathscr{L}^{ep} = \left(\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{e}\right)^{****}\overline{\boldsymbol{L}}^{ep}$$
$$\mathscr{L}^{ep}_{ijkl} = F^{e}_{i\bar{A}}F^{e}_{j\bar{B}}F^{e}_{k\bar{C}}F^{e}_{l\bar{D}}\overline{L}^{ep}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}} \tag{6.50}$$

以上的公式是假定屈服面(6.25)所代表的在应力$\overline{\boldsymbol{T}}$空间中的混合硬化情况导出的。对于一般的情况，设屈服面方程为

$$\overline{\Phi}\left(\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\xi}\right)=0 \tag{6.51}$$

式中$\overline{\Phi}\left(\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\xi}\right)$只与应力$\overline{\boldsymbol{T}}$与内变量$\overline{\xi}_{\alpha}\left(\alpha=1,2,\cdots,n\right)$有关，而与$\overline{\boldsymbol{C}}^{e}$无关。由(6.51)导出的一致性条件为

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\boldsymbol{T}}}:\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}-\sum_{\alpha}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\xi}_{\alpha}}\dot{\overline{\xi}}_{\alpha}=0 \tag{6.52}$$

类似于本节 5.6.2.1 上面的推导，利用(6.14a)，(6.19)，(6.21)，可以得到累积塑性变形率$\dot{\overline{\varepsilon}}^{p}$：

$$\dot{\overline{\varepsilon}}^{p}=-\frac{1}{\sum_{\alpha}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\xi}_{\alpha}}\overline{H}_{\alpha}}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\boldsymbol{T}}}:\overline{\boldsymbol{L}}^{e}:\overline{\boldsymbol{D}}^{e} \tag{6.53}$$

与率形式本构关系：

$$\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}=\overline{\boldsymbol{L}}^{e}:\overline{\boldsymbol{D}}^{e}=\overline{\boldsymbol{L}}^{ep}:\overline{\boldsymbol{D}} \tag{6.54}$$

式中$\overline{\boldsymbol{L}}^{ep}$为弹塑性刚度张量：

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{ep}=\overline{\boldsymbol{L}}^{e}-\frac{1}{\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\boldsymbol{T}}}:\overline{\boldsymbol{L}}^{e}:\overline{\boldsymbol{R}}-\sum_{\alpha}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\xi}_{\alpha}}\overline{H}_{\alpha}}\left(\overline{\boldsymbol{L}}^{e}:\overline{\boldsymbol{R}}\right)\left(\overline{\boldsymbol{L}}^{e}:\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\boldsymbol{T}}}\right) \tag{6.55}$$

当取$\overline{\Phi}$为(6.25)式时，(6.53)与(6.55)各退化为(6.45)与(6.47)[1]。

附记：当屈服面方程(6.20)$\overline{\Phi}\left(\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{C}}^{e},\overline{\xi}\right)$还依赖于$\overline{\boldsymbol{C}}^{e}$（例如 5.6.2.2 的(6.62)式），则一致性条件比(6.52)要复杂的多，(6.53)~(6.55)不成立。

5.6.2.2 在即时构形 z 中提屈服条件

设后继屈服面方程为

$$\overline{\Phi}\left(\overline{\boldsymbol{T}},\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\xi\right)=\tau_{F}-Y_{F}=0 \tag{6.56}$$

式中为了与 5.6.2.1 相区别，内变量用 ξ 表示，τ_{F} 为 Kirchhoff 主动有效应力：

---

1) 此时$\sum_{\alpha}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\xi}_{\alpha}}\dot{\xi}_{\alpha}=-\frac{3}{2\overline{T}_{F}}\left(\overline{\boldsymbol{T}}'-\overline{\boldsymbol{T}}_{h}'\right):\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}_{h}'-\frac{\mathrm{d}\overline{Y}_{F}\left(\overline{\varepsilon}^{p}\right)}{\mathrm{d}\overline{\varepsilon}^{p}}\dot{\overline{\varepsilon}}^{p}$。

$$\tau_F = \left[\frac{3}{2}(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}'_b):(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}'_b)\right]^{1/2} \tag{6.57}$$

$\boldsymbol{\tau}'$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 的偏量，见(3.123)，Y_F 表示在 Kirchhoff 偏应力 $\boldsymbol{\tau}'$ 空间中屈服面的大小，$\boldsymbol{\tau}'_b$ 表示背应力，即屈服面的中心位置。取 Y_F 为内变量 ξ_1 的函数，$\boldsymbol{\tau}'_b$ 为内变量 ξ_2：

$$Y_F = Y_F(\xi_1), \qquad \xi_2 = \boldsymbol{\tau}'_b \tag{6.58}$$

仿(3.125)，把 $\boldsymbol{\tau}'$ 与 $\boldsymbol{\tau}'_b$ 从即时构形 $\mathscr{R}$ 逆变(##)后拉到卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$，定义 $\overline{\boldsymbol{S}}^*, \overline{\boldsymbol{S}}^*_b$ 如下[1]：

$$\overline{\boldsymbol{S}}^* = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^e \cdot \boldsymbol{\tau}' \cdot \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^e, \qquad \overline{\boldsymbol{S}}^*_b = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^e \cdot \boldsymbol{\tau}'_b \cdot \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^e \tag{6.59}$$

仿(3.126)的推导，或直接利用表 5-5 与表 5-1，可得

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{S}}^* &= \overline{\boldsymbol{S}} - \frac{1}{3}\left(\overline{\boldsymbol{S}} : \overline{\boldsymbol{C}}^e\right) \overset{-1}{\overline{\boldsymbol{C}}}{}^e \\
\overline{\boldsymbol{S}}^*_b &= \overline{\boldsymbol{S}}_b - \frac{1}{3}\left(\overline{\boldsymbol{S}}_b : \overline{\boldsymbol{C}}^e\right) \overset{-1}{\overline{\boldsymbol{C}}}{}^e \\
\overline{\boldsymbol{S}}^* - \overline{\boldsymbol{S}}^*_b &= \left(\overline{\boldsymbol{S}} - \overline{\boldsymbol{S}}_b\right) - \frac{1}{3}\left[\left(\overline{\boldsymbol{S}} - \overline{\boldsymbol{S}}_b\right) : \overline{\boldsymbol{C}}^e\right] \overset{-1}{\overline{\boldsymbol{C}}}{}^e
\end{aligned} \tag{6.60}$$

式中由表 5-5 第二行，有

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^e \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^e = J^p \overline{\boldsymbol{T}} \tag{6.61}$$

仿(3.129)~(3.135)的推导，可得

$$\tau_F = \left[\frac{3}{2}\mathrm{tr}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^e \cdot \left(\overline{\boldsymbol{S}}^* - \overline{\boldsymbol{S}}^*_b\right) \cdot \overline{\boldsymbol{C}}^e \cdot \left(\overline{\boldsymbol{S}}^* - \overline{\boldsymbol{S}}^*_b\right)\right)\right]^{1/2} \tag{6.62}$$

$$\frac{\partial \tau_F}{\partial \overline{\boldsymbol{S}}} = -\frac{\partial \tau_F}{\partial \overline{\boldsymbol{S}}^*_b} = \frac{3}{2\tau_F} \overline{\boldsymbol{C}}^e \cdot \left(\overline{\boldsymbol{S}}^* - \overline{\boldsymbol{S}}^*_b\right) \cdot \overline{\boldsymbol{C}}^e \tag{6.63}$$

假定在卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的广义正交法则（类似于(3.182)），塑性变形率 $\overline{\boldsymbol{D}}^p$（卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的张量）正交于屈服面（见(6.56)式），即取(6.21)中的 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 为(6.63)式：

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{R}} &= \frac{3}{2\tau_F} \overline{\boldsymbol{C}}^e \cdot \left(\overline{\boldsymbol{S}}^* - \overline{\boldsymbol{S}}^*_b\right) \cdot \overline{\boldsymbol{C}}^e \\
\overline{R}_{IJ} &= \frac{3}{2\tau_F}\left[\overline{S}^*_{KL} - \left(\overline{S}^*_b\right)_{KL}\right] \overline{C}^e_{IK} \overline{C}^e_{LJ}
\end{aligned} \tag{6.64}$$

---

1) (6.59)可仿(3.125)而得到，只需把 $\boldsymbol{F}$ 改为 $\boldsymbol{F}^e$。注意 $\overline{\boldsymbol{S}}^*$ 与 $\overline{\boldsymbol{S}}^*_b$ 都不是偏量，虽然 $\boldsymbol{\tau}'$ 与 $\boldsymbol{\tau}'_b$ 是偏量。

由节 5.2 表 5-2 变形率的协变(bb)转换关系：

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \tag{6.65}$$

将(6.21)代入(6.65)，并利用(6.64) $\overline{\boldsymbol{R}}$ · (1.14)$_1$ $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 与(6.59)，得到

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r} = \frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right) \tag{6.66}$$

(6.66)式表明在即时构形 τ 中正交法则也成立[1)]。将上式与自身双点积，并利用 τ_{F} 的定义式(6.57)，可得

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2} \geqslant 0 \tag{6.67}$$

这里为了区别于 5.6.2.1(6.31)式的 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，用 $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \geqslant 0$ 表示累积塑性变形率，而累积塑性变形为

$$\varepsilon^{\mathrm{p}} = \int \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2} \mathrm{d}t \tag{6.68}$$

取 ε^{p} 为内变量 ξ_1，则(6.56)与(6.58)$_1$ 表示材料的各向同性硬化规律

$$\tau_{\mathrm{F}} = Y_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) \tag{6.69}$$

(6.69)对时间求导，得一致性条件

$$\dot{\tau}_{\mathrm{F}} = E_{\mathrm{F}} \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{6.70}$$

定义 $E_{\mathrm{F}}(\varepsilon^{\mathrm{p}})$ 为各向同性（等向）硬化模量：

$$E_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) = \frac{\mathrm{d}Y_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}} \tag{6.71}$$

将(6.57) τ_{F} 代入一致性条件(6.70)，得

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{F}} = \frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right) : \left(\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}' - \mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right) = E_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}} \tag{6.72}$$

类似于(3.144)与(3.145)，可将一致性条件(6.72)（除以 dt 后）改写为

$$\frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right) : \left(\dot{\boldsymbol{\tau}}' - \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{b}}'\right) = \frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right) : \left(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*] - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'^{\mathrm{obj}}[*]\right) = E_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{6.73}$$

---

1) 这是因为(6.64)的 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 是根据在卸载构形 $\overline{\mathscr{P}}$ 中的广义正交法则而建立的，转移到即时构形 τ 中所得到的(6.66)也满足正交法则。

这里，根据客观性原理[1)]，必须采用客观导数$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[*]$与$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{robj}}[*]$。当取$*=\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$时，$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{obj}}[\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}]$定义为弹性 Jaumann 导数：

$$\begin{aligned}\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{(\mathrm{e})} &= \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}} \\ \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}_{\mathrm{b}}'^{(\mathrm{e})} &= \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{b}}' - \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}' + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\cdot\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}\end{aligned} \tag{6.74}$$

仿照(3.104)，定义塑性模量$E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)$与机动硬化模量$E_{\mathrm{b}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)$如下式：

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'):\quad \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{(\mathrm{e})} = E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \\ &\frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'):\quad \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}_{\mathrm{b}}'^{(\mathrm{e})} = E_{\mathrm{b}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\end{aligned} \tag{6.75}$$

利用(6.75)，由一致性条件(6.73)可得

$$E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) = E_{\mathrm{b}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) + E_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) \tag{6.76}$$

由(6.76)，可引进一各向同性硬化系数β，使

$$E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right):E_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right):E_{\mathrm{b}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) = 1:\beta:(1-\beta) \tag{6.77}$$

设 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}_{\mathrm{b}}'^{(\mathrm{e})}$与$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$平行（见第 1 章 1.2.2 中 Prager 或 Ziegler 假定），即

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}_{\mathrm{b}}'^{(\mathrm{e})} = \Lambda\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} \tag{6.78}$$

将(6.66)代入(6.78)，然后将后者代入$(6.75)_2$，可得

$$\Lambda = \frac{2}{3}E_{\mathrm{b}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) = \frac{2}{3}(1-\beta)E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) \tag{6.79}$$

及

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}_{\mathrm{b}}'^{(\mathrm{e})} = \frac{2}{3}E_{\mathrm{b}}(\varepsilon^{\mathrm{p}})\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \frac{2}{3}(1-\beta)E_{\mathrm{p}}(\varepsilon^{\mathrm{p}})\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\frac{E_{\mathrm{b}}(\varepsilon^{\mathrm{p}})}{\tau_{\mathrm{F}}(\varepsilon^{\mathrm{p}})}(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}') \tag{6.80}$$

在实际问题中，给定变形率$\boldsymbol{d}$，欲求应力率。为了把$\boldsymbol{d}$分为弹性与塑性两部分，即$\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}$与$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$，首先必须求出累积塑性变形率$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$。设塑性变形无体积变形，即$J^{\mathrm{p}}=1$，$J=J^{\mathrm{e}}$，故$\boldsymbol{\tau}=J^{\mathrm{e}}\boldsymbol{\sigma}$，即时构形$z$中的率形式本构关系(6.14b)可写作

1) 因为 Kirchhoff 应力$\boldsymbol{\tau}$是即时构形z中的客观张量，故率形式本构关系中必须采用客观的应力率。5.6.2.1(6.36)中$\overline{\boldsymbol{T}}$、$\overline{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{b}}'$都是中间构形$\overline{\mathscr{H}}$中的张量，它们的率不受客观性原理的限制，但是受到中间构形转动$\overline{\beta}$的影响。

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}=\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}=\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\left(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\right),\qquad\left(J^{\mathrm{p}}=1\right)\tag{6.81}$$

式中弹性 Oldroyd 导数 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}$ 与(6.74)$_1$ 弹性 Jaumann 导数 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{(\mathrm{e})}$ 的关系为

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{(\mathrm{e})}=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}+\mathscr{G}^{\tau}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}\tag{6.82}$$

$\mathscr{G}^{\tau}$ 为四阶张量，定义见第 4 章(1.79)′，将(6.81)代入(6.82)，得

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{(\mathrm{e})}=\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}=\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\left(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\right),\qquad\left(J^{\mathrm{p}}=1\right)\tag{6.83}$$

将(6.66) $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 代入(6.83)，然后又将(6.83) $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{(\mathrm{e})}$ 代入(6.75)$_1$，可解出

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\frac{\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right):\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\boldsymbol{d}}{\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right):\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right)+E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)},\qquad\left(J^{\mathrm{p}}=1\right)\tag{6.84}$$

将(6.84)重新代入(6.81)右端 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\ (=\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{r})$ 中，得率形式本构关系

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}=\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}=\mathscr{L}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{d}\tag{6.85}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{ep}}=\mathscr{L}^{\mathrm{e}}-\frac{\left[\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right)\right]\left[\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right)\right]}{\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right):\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right)+E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)},\qquad\left(J^{\mathrm{p}}=1\right)\tag{6.86}$$

而(6.82)则可写作

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{(\mathrm{e})}=\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{d}\tag{6.87}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{ep}}=\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right)-\frac{\left[\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right)\right]\left[\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right)\right]}{\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right):\left(\mathscr{L}^{\mathrm{e}}+\mathscr{G}^{\tau}\right):\dfrac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}'_{\mathrm{b}}\right)+E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)},\qquad\left(J^{\mathrm{p}}=1\right)\tag{6.88}$$

当弹性变形很小时（即应力值远小于弹性模量），则由(6.81)，(6.85)~(6.88)

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}\approx\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{(\mathrm{e})}=\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}=\mathscr{L}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{d}\tag{6.89}$$

式中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{ep}}=\mathscr{L}^{\mathrm{e}}-\frac{\left[\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right)\right]\left[\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right)\right]}{\frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right):\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\frac{3}{2\tau_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}'\right)+E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)},\qquad\left(J^{\mathrm{p}}=1,\ |\boldsymbol{\tau}|<<\left|\mathscr{L}^{\mathrm{e}}\right|\right)\tag{6.90}$$

率形式本构关系(6.85)可以从即时构形 τ 逆变(####)后拉到中间构形 $\overline{\mathscr{K}}$（参考(6.14)）：

$$\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}=\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{e}}:\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}}=\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{ep}}:\overline{\boldsymbol{D}},\qquad\left(J^{\mathrm{p}}=1\right)\tag{6.91}$$

式中

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{ep}}=\left(\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\ \overset{1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\ \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\ \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\right)\vdots\vdots\vdots\vdots\ \mathscr{L}^{\mathrm{ep}}\tag{6.92}$$

如 5.2.4 最后指出，我们还需要讨论本节 Moran，Ortiz 与 Shih 大变形弹塑性本构关系的 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 相关性。可以证明弹性关系(6.9)如果适用于某一中间构形 $\overline{\mathscr{K}}$，则必适用于任意刚性转动的中间构形 $\overline{\mathscr{K}}_{(\beta)}$，即下面的(6.97)式成立。证明如下：由(6.11)，取微分

$$\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}}{\partial\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}}:\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}=\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}}{\partial\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}}:\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\tag{6.93}$$

由(6.10)

$$\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}=\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}\tag{6.94}$$

将(6.94) $\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$ 代入(6.93)右端，可得

$$\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}}{\partial\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}}{\partial\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}}\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\tag{6.95}$$

由表 5-5，利用(1.25) $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$，可得中间构形第二类 P-K 应力张量 $\overline{\boldsymbol{T}}_{(\beta)}$ 与 $\overline{\boldsymbol{T}}$ 的 $\boldsymbol{\beta}$ 转动关系：

$$\overline{\boldsymbol{T}}_{(\beta)}=\overline{\boldsymbol{\beta}}\cdot\overline{\boldsymbol{T}}\cdot\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\tag{6.96}$$

因此由(6.9)，利用(6.95)与(6.96)，可导出（注意 $\overline{\rho}_{(\beta)}=\overline{\rho}$）

$$\overline{\boldsymbol{T}}_{(\beta)}=\overline{\rho}\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}}=2\overline{\rho}\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}_{(\beta)}}\tag{6.97}$$

[证毕]

由(6.10)，$\overline{C}^{e}_{(\beta)}$ 与 $\overline{C}^{e}$ 具有相同的不变量，因此假设的 Hemholtz 自由能通过三个不变量 I^{e}，IIe，IIIe 表示的 ψ 函数（或记作 ψ^{e}，见(6.9)）(5.25)或(5.26)对中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 与 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$ 都适用，本构关系(6.13)（其特例为(6.16)）及其率形式(6.14)、(6.15)（其特例为(6.17)）对中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 与 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$ 也都适用。

但是塑性本构关系(6.18)~(6.92)则只适用于某一种中间构形，例如 $\overline{\mathscr{R}}$。而不适用于由 $\overline{\mathscr{R}}$ 经刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 后的中间构形 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$。其根本的原因在于把变形率 $\overline{\boldsymbol{D}}$（见(2.69)）与 $\boldsymbol{d}$（见(2.67)）分解为弹性与塑性两部分的方式就因 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 而异。因此累计塑性变形率（见(6.31) $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ 或(6.67) $\dot{\varepsilon}^{p}$）与累积塑性变形 ε^{p}（见(6.32)或(6.68)）的定义都因刚性转动 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 而异。因此 Moran，Ortiz 与 Shih(1990)规定中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的旋率为零，即由$(2.25b)_2$及表 5-2 末行，有

$$\overline{\boldsymbol{W}}^{p}=\frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{p}-\overline{\boldsymbol{L}}^{p^{T}}\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{e}\right)=0 \tag{6.98}$$

故即

$$\boldsymbol{w}^{p}=\overset{-T}{\boldsymbol{F}}{}^{e}\cdot\overline{\boldsymbol{W}}^{p}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{F}}{}^{e}=0 \tag{6.99}$$

(6.98)式说明中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 不是任意选取的，必须保证塑性旋率 $\overline{\boldsymbol{W}}^{p}$ 为零。(6.99)式说明在即时构形 τ 中把全部的旋率 $\boldsymbol{w}$ 都归于弹性，即

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{e},\qquad \boldsymbol{w}^{p}=0 \tag{6.100}$$

规定(6.98)（或(6.99)），这就等于规定了特殊的中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$。全部的塑性本构关系(6.18)~(6.92)只适用于这个特殊的中间构形 $\overline{\mathscr{R}}$，而对其它经过刚性旋转 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 的中间构形 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$ 则一般不适用。(6.100)不同于前面所讨论的(2.35) $\boldsymbol{w}^{p}=\boldsymbol{0}$。(2.35)指的是当同一形式本构关系（包括弹性与塑性）适用于任何的中间构形 $\overline{\mathscr{R}}_{(\beta)}$，而无论 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ 为何（此种情况下我们称材料在中间构形是各向同性），当然可以人为地规定 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$，使得 $\boldsymbol{w}^{p}=\boldsymbol{0}$（因为由$(2.68)_2$，$\boldsymbol{w}^{p}_{(\beta)}$ 依赖于 $\overline{\boldsymbol{\beta}}$）。所以 Moran，Ortiz 与 Shih(1990)声明，(6.100)式只代表一个简单的宏观塑性模型（a simple phenomenological plasticity model），它相当于多晶体金属材料尚未形成明显织构的变形阶段。

5.6.3 虚位移原理

Moran，Ortiz 与 Shih(1990)还讨论了如何把率形式本构关系用于基于位移的有限元计算。以 V 与 A 表示在参考构形 $\mathscr{R}$ 中物体的域与表面，以 $\boldsymbol{\eta}$ 表示虚位移，参考构形 $\mathscr{R}$ 每单位体积的变形虚功为

$$w=\boldsymbol{\tau}:\left(\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}\right)=\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}\right) \tag{6.101}$$

式中$\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}$与$\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}$各为虚位移 $\boldsymbol{\eta}$在即时构形$\mathscr{r}$与在参考构形$\mathscr{R}$中的梯度：

$$\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i,\qquad \boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}=\sum_{A=\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial X_A}\boldsymbol{e}_A \tag{6.102}$$

显然

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}=\left(\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}=\left(\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{6.103}$$

两个梯度之间的关系为

$$\begin{gathered}\left(\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}\right)\cdot\boldsymbol{F}=\left(\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}\right),\\ \left(\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}\right)=\left(\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}\right)\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}\end{gathered} \tag{6.104}$$

$\boldsymbol{P}$为第一类 Piola-Kirchhoff 应力，它可通过 Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 或第一类 Piola-Kirchhoff 应力$\boldsymbol{T}$表示：

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\tau}\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T} \tag{6.105}$$

基于位移的有限元计算的出发点是动量平衡的弱形式，即虚位移原理：

$$\int_V\boldsymbol{P}:\left(\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}\right)\mathrm{d}V-\int_V\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}V-\int_A\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}A=0 \tag{6.106}$$

式中$\boldsymbol{f}$为作用于物体的体力（参考构形$\mathscr{R}$每单位体积），$\boldsymbol{t}$为表面力（参考构形$\mathscr{R}$每单位表面面积）。取(6.105)式对时间的物质导数（$\boldsymbol{\eta}$保持不变），得到率形式：

$$\int_V\dot{\boldsymbol{P}}:\left(\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}\right)\mathrm{d}V-\int_V\dot{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}V-\int_A\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}A=0 \tag{6.107}$$

由(6.105)，并利用第 3 章(2.7d)$\left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right)^{\bullet}$，可得

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\right)=\left(\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}} \tag{6.108}$$

因此，利用关系式$(6.104)_1$与(6.108)，及第 3 章运算公式(3.27)，(3.28)：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{P}}:\left(\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}\right)&=\mathrm{tr}\left(\dot{\boldsymbol{P}}:\left(\boldsymbol{\eta}\overset{<}{\nabla}\right)^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{tr}\left[\left(\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}\cdot\left(\left(\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}\right)\cdot\boldsymbol{F}\right)^{\mathrm{T}}\right]\\&=\left(\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right):\left(\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}\right)=\left(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\tau}\right):\left(\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}\right)\end{aligned} \tag{6.109}$$

式中$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$为$\boldsymbol{\tau}$的 Oldroyd 导数（见(6.4)）：

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tag{6.110}$$

(6.14b)与(6.81)曾定义弹性 Oldroyd 导数：

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}=\dot{\boldsymbol{\tau}}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \tag{6.111}$$

因此$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}$与$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}$之间的关系为

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}}=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} \tag{6.112}$$

由(6.14b)，设$J^{\mathrm{p}}=1$，$J=J^{\mathrm{e}}$，

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}=\mathscr{L}^{\mathrm{e}}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}} \tag{6.113}$$

由 5.6.2.1 的(6.49)与 5.6.2.2 的(6.85)，可将(6.113)改写为

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr(e)}}=\mathscr{L}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{d} \tag{6.114}$$

利用(6.109)、(6.112)、(6.114)，可将(6.107)改写为

$$\int_V\left(\mathscr{L}^{\mathrm{ep}}:\boldsymbol{d}+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\right):\left(\boldsymbol{\eta}\overset{>}{\nabla}\right)\mathrm{d}V-\int_V\dot{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}V-\int_A\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}A=0 \tag{6.115}$$

(6.115)中$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\tau}$项表示通常所指的几何刚度。还有两项附加的几何项$-\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}$，就是来自于弹性响应是基于本身不断变化的中间构形$\overline{\mathscr{R}}$这一事实。

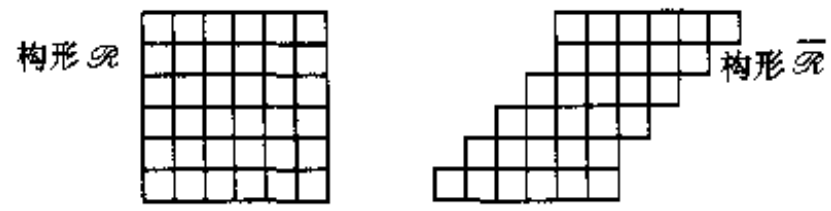
5.7 中间构形弹塑性本构理论之二——Van der Giessen 大变形弹塑性本构理论[1)]

Van der Giessen 的大变形弹塑性本构理论和 5.6 一样也是在中间构形建立弹塑性本构关系。但是 Van der Giessen 在中间构形采用的是一种非对称的应力$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$。

作为其弹塑性本构理论的基础，Van der Giessen 引进了自然参考状态（natural reference state，以后简写为 NRS）的概念。作为热力学状态的函数，材料的一些性质，例如弹性常数、比热、热膨胀系数等，在大变形时近似不变。在手册中示出这些材料性质的实际值，也无需标明材料是块状的或是由块体碾压而成的板状。这是因为材料的塑性变形微观机制仍保持材料的微观结构不变。例如在图 5-7 所示的晶体滑移过程中晶格的微观结构仍保持不变，而材料的一些物理性质正取决于其微观结构，所以基本保持不变。我们把图 5-7(a)称为变形前的自然参考状态（相当于以前所讲的构形$\mathscr{B}$），而把图 5-7(b)称为变形后的自

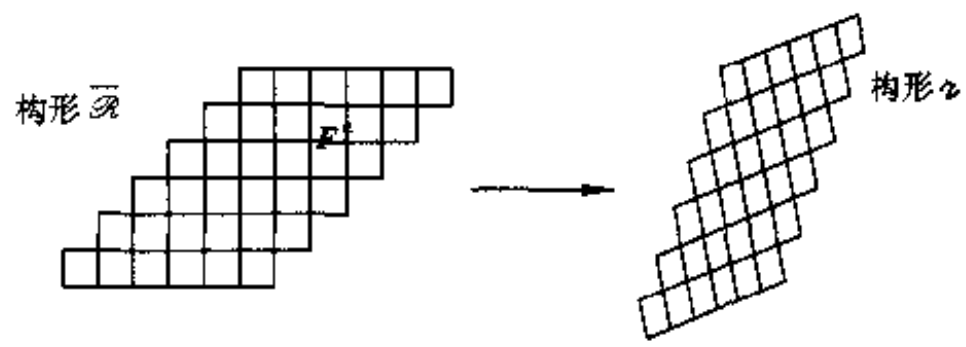
1) 见 J. F. Besseling 与 E. Van der Giessen 书(1993)，第 7 章。

然参考状态（相当于以前所讲的构形 $\overline{\mathscr{R}}$ ）。但是，图 5-7 只考虑了塑性变形过程。实际状态还要经过一个弹性变形和转动，如图 5-8 从(a)构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 到(b)构形 τ 的变化，相当于弹性变形梯度 $\boldsymbol{F}^e$。NRS 概念的目的是把图 5-7 与图 5-8 的图像通过材料的连续介质模型图 5-9 体现出来。



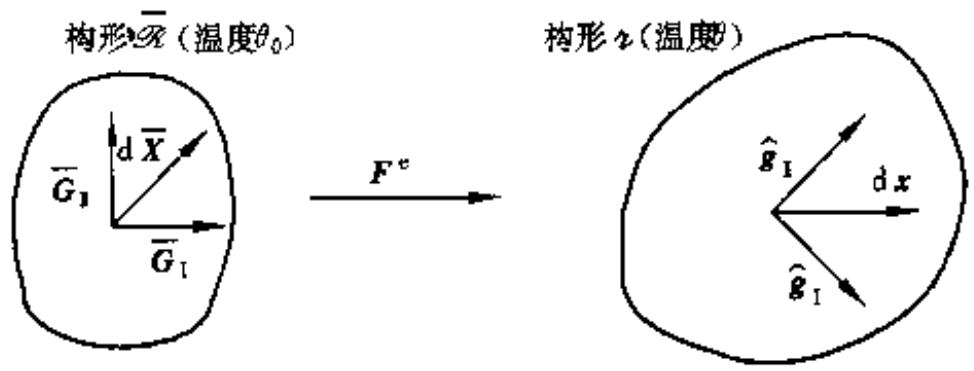
(a) 自然参考状态　　(b) 变形后的自然参考状态

图 5-7　变形前与变形后的自然参考状态 $\mathscr{R}$ 与 $\overline{\mathscr{R}}$



(a) 构形 $\overline{\mathscr{R}}$ ——变形后的自然参考状态　(b) 构形 —— τ 实际状态
（晶格结构保持不变）

图 5-8　变形后的自然参考状态 $\overline{\mathscr{R}}$ 与实际状态 τ



(a) 变形后的自然参考状态　　(b) 即时的实际状态

图 5-9　连续介质体元

图 5-9(a)，(b)各示出在连续介质模型中的变形后自然参考状态（构形 $\overline{\mathscr{R}}$ ，温度 θ_0）与即时实际状态（构形 τ，温度 θ）。但是，应该指出，连续介质模型的构形 $\overline{\mathscr{R}}$ （图 5-9(a)）只是微观模型的构形 $\overline{\mathscr{R}}$ （图 5-7(b)，图 5-8(a)）的宏观表现。从微观说来，它们不是一回事：连续介质模型图 5-9(a)的构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 在变形过程中质点的邻域还保持是邻域，而作为微观模型图 5-7(b)与图 5-8(a)的构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 随着滑移过程质点的邻域不断在变化，相邻的质点不断地更替。

在自然参考状态(NRS)的材料通常是各向异性的。为了表示各向异性，在图 5-9(a)构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中选择一组单位矢量 $\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha,(\alpha=\mathrm{I,II,III})$，来表示 NRS 中各向异性的方向（例如晶体的滑移面内滑移方向，滑移面内法向方向及滑移面的法线方向）。无失广泛性，可以假定 $\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha$ 为一组

正交单位矢量。我们规定在图 5-9(a)的自然参考状态(NRS)即构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的单位矢量 $\{\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha\}$ 在空间中的取向为一定。这和节 5.2.1 所引 Mandel(1971)的“等向构形”的概念相类似，因此就克服了节 5.1 最后与节 5.2.1 所提到的卸载构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的不唯一性（即可相差一刚体转动 $\boldsymbol{\beta}$）。从构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 经过弹性变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$，$\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha$ 变成（作为线元）

$$\hat{\boldsymbol{g}}_\alpha = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{G}}_\alpha \qquad (\alpha = \mathrm{I,II,III}) \tag{7.1}$$

$\hat{\boldsymbol{g}}_\alpha$ 的对偶基则满足关系（见第 3 章(6.22)）：

$$\hat{\boldsymbol{g}}^\alpha = \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{G}}^\alpha \qquad (\alpha = \mathrm{I,II,III}) \tag{7.2}$$

图 5-9(b)构形 τ 与图 5-9(a)构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 的关系是弹性变形加转动，都包括在 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 的极分解中：

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{U}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{e}} \tag{7.3}$$

图 5-9(b)构形 τ 中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 与图 5-9(a)构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中线元 $\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}$ 的关系为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}} \tag{7.4}$$

而图 5-9(a)构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中线元 $\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}$ 的率记作

$$\left(\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\right)^{\cdot} = \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}} \tag{7.5}$$

(7.5)式可看作是张量 $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{p}}$ 的定义。按照本章节 5.2 的分析，由(2.18)式

$$\left(\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}\right)^{\cdot} = \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}} \tag{2.18}$$

将(2.18)与(7.5)比较，可见 Van der Giessien 的 $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{p}}$ 恰好相当于前面节 5.2 中的塑性速度梯度 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$。但是在前面节 5.2 中是从变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的弹塑性分解 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 出发来定义 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 与推导(2.18)式的，而 Van der Giessien 的理论是以(7.4)与 (7.5)为出发点，不需要引进 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$，也不需要讨论应变张量的分解（例如 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$）[1)]。Van der Giessen 认为 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ 没有什么物理意义。譬如说，由块状材料碾压而成的板材材料，已经完全失去对原来形状的记忆。当然，板材现在所处的状态和所具有的性质取决于过去从块体到板材的变形过程，但是这种关系很难清晰地表现出来。因此 Van der Giessen 认为以(7.4)与(7.5)作为本构理论的基础更为合理。但是在数学处理上，节 5.2 的一切结果均可以适用于 Van der Giessen 理论，只需要把 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 改为他的 $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{p}}$。但是这里为了与节 5.2 记号统一起见，仍把他的 $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{p}}$ 记作 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$。下面需要用到的有(2.11)，$(2.7)_2$，(2.10)，(2.12)，(2.13)，$(2.14)_3$ 等，重新写在下面：

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}, \quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{e}} = \dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}, \quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} \cdot \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \tag{7.6a-c}$$

---

1) 当然，在 Van der Giessien 理论中，有了 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 后，可以定义 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{F}$。

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{w},\quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}},\quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} \tag{7.7a-c}$$

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}},\quad \boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\right),\quad \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}+\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\right) \tag{7.8a-c}$$

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}},\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\right),\quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}}\right) \tag{7.9a-c}$$

由(7.6c)可知 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\mathrm{tr}\,\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$。如果材料的塑性变形无体积变化，则 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\mathrm{tr}\,\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}=0$。在即时构形 τ 中线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的率为（由第 3 章(2.8)）

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\cdot}=\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{7.10}$$

而由(7.1)对时间求导，利用(7.6b)，得

$$(\hat{\boldsymbol{g}}_{\alpha})^{\cdot}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha}\right)^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\dot{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\alpha}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\dot{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\alpha}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_{\alpha}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\dot{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\alpha}$$

当 $\dot{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时，有

$$(\hat{\boldsymbol{g}}_{\alpha})^{\cdot}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_{\alpha} \tag{7.11}$$

(7.10)是描写连续介质的运动学，而(7.11)则可看作是描写微结构的运动学。这是两种不同的运动，$\boldsymbol{l}$ 决定连续介质的运动，而 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}$ 描写微结构的运动。$\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}$ 通过 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 由(7.6a)联系起来，因此如果有了确定 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$（或 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$）的本构关系，加上由速度梯度 $\boldsymbol{l}$ 表示的连续介质运动，整个运动学框架就确定了。在变形过程的每一时刻的 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 可由下列关系积分而得：

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}=\left(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}\right)\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \tag{7.12}$$

假定弹性变形很小（例如对于金属材料），则由(7.3)，$\boldsymbol{U}^{\mathrm{e}}\approx\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\approx\boldsymbol{R}^{\mathrm{e}}$，可以更容易看清 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ 的意义，此时

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{e}}\approx\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\approx\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$$

因此由（7.11），微结构 $\{\hat{\boldsymbol{g}}_{\alpha}\}$ 在变形过程中以旋率 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$ 作刚性旋转。连续介质的旋率 $\boldsymbol{w}$ 一般不同于微结构的旋率 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$，两者之间的差别就是塑性旋率 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$。如果在 NRS 材料为各向同性，那么材料的微结构取向就不重要，或者说，材料的微结构旋率 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$ 以及塑性旋率 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$ 都不重要，因此可以令塑性旋率为零，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{0}$（见(2.35)）。

5.7.1 热力学讨论[1)]

取图 5-9(b)即时状态即构形 τ 的自变量为从构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 到构形 τ 的弹性应变张量 $\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$ 与温度

1) 见 Besseling 与 Van der Giessen 书(1993)，节 7.1.2

θ。设 ψ 为每单位质量的 Hemholtz 自由能：

$$\psi = \psi(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}, \theta) \tag{7.13}$$

因为在构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 材料一般为各向异性，所以(7.13) $\psi(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}, \theta)$ 的函数形式因材料的取向（即图 5-9(a)中 $\{\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha\}, (\alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ 在空间中的取向）而异。但是因为 $\{\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha\}$ 表示材料本身各向异性的取向，如果把自变量 $\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$ 在 $\{\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha\}$ 中分解：

$$\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}} = \overline{E}^{\mathrm{e}}_{\alpha\beta} \overline{\boldsymbol{G}}_\alpha \overline{\boldsymbol{G}}_\beta \qquad (\alpha, \beta = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) \tag{7.14}$$

那么(7.13)可表示成

$$\psi = \psi(\overline{E}^{\mathrm{e}}_{\alpha\beta}, \theta) \tag{7.15}$$

通过应变沿材料自身轴 $\{\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha\}$ 中的分量表示，故 (7.15)函数 ψ 的形式是与材料在空间的取向无关的。由热力学第二定律，第 3 章(4.26)，并利用第 3 章$(4.27)_1$ 与(4.33)：

$$\theta\rho\gamma = -\frac{1}{\theta}(\theta\nabla)\cdot\boldsymbol{h} - \rho\eta\dot{\theta} - [\rho\dot{\psi} - \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}] \geqslant 0 \tag{7.16}$$

利用由表 5-5 第 1 行与表 5-2 第 2 行进行双点积所得的等式：

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\boldsymbol{T}}:\overline{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\boldsymbol{T}}:\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{\mathrm{e}} \tag{7.17}$$

可将热力学第二定律(7.16)写作

$$\theta\rho\gamma = -\frac{1}{\theta}(\theta\nabla)\cdot\boldsymbol{h} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} - \left[\rho\dot{\psi} + \rho\eta\dot{\theta} - \frac{\rho}{\overline{\rho}}\overline{\boldsymbol{T}}:\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{\mathrm{e}}\right] \geqslant 0 \tag{7.18}$$

对于无温差($\theta\nabla = 0$)的弹性响应 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}$，$\gamma = 0$。指向弹性区的自变量率 $\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{\mathrm{e}}$ 与 $\dot{\theta}$ 为任意，故(7.18)中方括弧[…]必须为零，可得应力 $\overline{\boldsymbol{T}}$ 及熵 η：

$$\overline{\boldsymbol{T}} = \overline{\rho}\frac{\partial\psi(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}, \theta)}{\partial\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}}, \qquad \eta = -\frac{\partial\psi(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}, \theta)}{\partial\theta} \tag{7.19}$$

$(7.19)_1$ 在 $\{\overline{\boldsymbol{G}}_\alpha\}$ 中的分量形式为

$$\overline{T}_{\alpha\beta} = \overline{\rho}\frac{\partial\psi(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}, \theta)}{\partial\overline{E}^{\mathrm{e}}_{\alpha\beta}} \tag{7.19$'$}$$

热力学第二定律(7.18)成为

$$\theta\rho\gamma = -\frac{1}{\theta}\boldsymbol{h}\cdot(\theta\nabla) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{7.20}$$

利用表 5-5 第 1 行及$(6.8c)_1$，由$(7.19)_1$可得

$$\boldsymbol{\sigma}=\rho\boldsymbol{F}^{e}\cdot\frac{\partial\psi\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{e},\theta\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{E}}^{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{e^{t}}=\rho\left(\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{e}\right)\overset{*}{*}\frac{\partial\psi\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{e},\theta\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{E}}^{e}} \tag{7.21}$$

设以$\{\boldsymbol{e}_i\}$表示即时构形 τ 中的直角坐标基矢量，$\boldsymbol{F}^{e}$ 与 $\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{e}$ 的分解式为：

$$\boldsymbol{F}^{e}=\boldsymbol{F}^{e}_{i\alpha}\boldsymbol{e}_i\overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha},\qquad \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{e}=\overset{1}{F}{}^{e}_{\alpha i}\overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha}\boldsymbol{e}_i \tag{7.22}$$

(7.21)的分量形式为

$$\sigma_{ij}=\rho F^{e}_{i\alpha}\frac{\partial\psi\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{e},\theta\right)}{\partial\overline{E}^{e}_{\alpha\beta}}F^{e}_{j\beta} \tag{7.21$'$}$$

(7.21)对时间求导，利用$(2.7)_1\ \dot{\boldsymbol{F}}^{e}=\boldsymbol{l}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{e}$与表 5-2 第 2 行

$$\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^{e}=\boldsymbol{F}^{e^{t}}\cdot\boldsymbol{d}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{e} \tag{7.23}$$

并利用第 3 章(4.3)式，假设塑性变形无体积变化，$\overline{\rho}=\rho_0$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{d}^{p}=0$，$\dot{\rho}=-\rho\mathrm{tr}\boldsymbol{d}=-\rho\mathrm{tr}\boldsymbol{d}^{e}$，可得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\boldsymbol{\sigma}\mathrm{tr}\boldsymbol{d}^{e}-\boldsymbol{l}^{e}\cdot\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}^{e^{T}}=\mathscr{L}^{e}:\boldsymbol{d}^{e}+\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\theta}\dot{\theta} \tag{7.24}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{e}&=\rho\left(\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{e}\right)\overset{*}{*}\frac{\partial^2\psi\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{e},\theta\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{E}}^{e}\partial\overline{\boldsymbol{E}}^{e}}\\ \mathscr{L}^{e}_{ijkl}&=\rho\boldsymbol{F}^{e}_{i\alpha}F^{e}_{j\beta}\boldsymbol{F}^{e}_{k\gamma}\boldsymbol{F}^{e}_{l\delta}\frac{\partial^2\psi\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{e},\theta\right)}{\partial\overline{E}^{e}_{\alpha\beta}\partial\overline{E}^{e}_{\gamma\delta}}\end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\theta}&=\rho\left(\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{e}\right)\overset{*}{*}\frac{\partial^2\psi\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{e},\theta\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{E}}^{e}\partial\theta}\\ \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\theta}&=\rho\boldsymbol{F}^{e}_{i\alpha}\boldsymbol{F}^{e}_{j\beta}\frac{\partial^2\psi\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{e},\theta\right)}{\delta\overline{E}^{e}_{\alpha\beta}\partial\theta}\end{aligned} \tag{7.26}$$

(7.24)式左端与第 4 章(1.74)之 Truesdell 导数形式有类似之处（但 $\boldsymbol{l}$ 改为 $\boldsymbol{l}^{e}$，$\boldsymbol{d}$ 改为 $\boldsymbol{d}^{e}$）。(7.24)也可改写为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{w}^{e}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{w}^{e}=\mathscr{L}:\boldsymbol{d}^{e}-\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d}^{e}+\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\theta}\dot{\theta} \tag{7.27}$$

式中左端类似于 Jaumann 导数（但 $\boldsymbol{w}$ 改为 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$），

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{\mathrm{e}} + \mathscr{G}^{\sigma}, \qquad \mathscr{L}_{ijkl} = \mathscr{L}^{\mathrm{e}}_{ijkl} + \mathscr{G}^{\sigma}_{ijkl} \tag{7.28}$$

$$\mathscr{G}^{\sigma}_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk} + \sigma_{jk}\delta_{il} + \sigma_{jl}\delta_{ik}\right) \tag{7.29}$$

$\mathscr{L}$满足 Voigt 对称性。对于大多数金属，Cauchy 应力值远比弹性模量小，此时近似有

$$\mathscr{L}_{ijkl} \approx \mathscr{L}^{\mathrm{e}}_{ijkl} \approx \rho_0 R^{\mathrm{e}}_{i\alpha} R^{\mathrm{e}}_{j\beta} R^{\mathrm{e}}_{k\gamma} R^{\mathrm{e}}_{l\delta} \frac{\partial^2 \psi\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}, \theta\right)}{\partial \overline{E}^{\mathrm{e}}_{\alpha\beta} \partial \overline{E}^{\mathrm{e}}_{\gamma\delta}} \tag{7.30}$$

式中ρ_0为 NRS 的质量密度；由于弹性变形小，(7.28)中的$\mathscr{G}^{\sigma}$已略去。

假定塑性变形过程与热传导过程不相互耦合，则热力学第二定律(7.20)式导致两个不等式：

$$\theta\rho\gamma = \theta\rho\gamma_{\mathrm{th}} + \theta\rho\gamma_{\mathrm{in}} = \varphi_{\mathrm{th}} + \varphi_{\mathrm{in}} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{th}} &= \theta\rho\gamma_{\mathrm{th}} = -\frac{1}{\theta}(\theta\nabla)\cdot\boldsymbol{h} \geqslant 0 \\ \varphi_{\mathrm{int}} &= \theta\rho\gamma_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{7.32}$$

第一个不等式$(7.32)_1$与热传导现象有关，第二个不等式$(7.32)_2$与塑性变形过程有关。在(7.32)中假定塑性变形无体积变化，故$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$。

5.7.2 热传导 [1)]

在第 4 章 4.1.3 已对大变形弹性情况的热传导进行了讨论。现在针对自然参考状态(NRS)即在图 5-9(a)构形$\overline{\mathscr{R}}$中来讨论热传导。图 5-9(a)构形$\overline{\mathscr{R}}$与图 5-9(b)构形τ面元之间的关系为（由第 3 章(1.43)）

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = J^{\mathrm{e}}\ \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{A}} \tag{7.33}$$

在构形$\overline{\mathscr{R}}$与构形τ中表示的热流矢量$\overline{\boldsymbol{H}}$与$\boldsymbol{h}$应满足关系 [2)]：

$$\boldsymbol{h}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{H}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{A}} \tag{7.34}$$

由(7.33)与(7.34)可导出$\boldsymbol{h}$与$\overline{\boldsymbol{H}}$之间的关系（已设$\overline{\rho} = \rho_0$）：

$$\boldsymbol{h} = \frac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{H}}, \qquad \overline{\boldsymbol{H}} = \frac{\rho_0}{\rho}\ \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{h} \tag{7.35}$$

---

1) 见 Besseling 与 Van der Giessen 书(1993)5.7.1.3。

2) (7.34)式可看作是$\overline{\boldsymbol{H}}$的定义。

(7.35)式表明$\boldsymbol{h}/\rho$与$\overline{\boldsymbol{H}}/\rho_0$之间属于第 3 章 3.6.2 所述的矢量的逆变(#)转移关系。以$\theta\overline{\nabla}$表示在构形$\overline{\mathscr{R}}$中的温度梯度，以区别于在构形$\mathscr{R}$中的温度梯度$\theta\overset{\backprime}{\nabla}$。它们之间的满足关系：

$$\mathrm{d}\theta = (\theta\overset{\backprime}{\nabla})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\theta\overline{\nabla})\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}$$

因此利用(7.4) $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{X}}$，可证$\theta\overset{\backprime}{\nabla}$与$\theta\overline{\nabla}$之间属于矢量的协变(b)转移关系：

$$\theta\overset{\backprime}{\nabla} = \overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}\cdot(\theta\overline{\nabla}), \qquad \theta\overline{\nabla} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{-1}}\cdot(\theta\overset{\backprime}{\nabla}) \tag{7.36}$$

利用(7.35)与(7.36)，热力学第二定律(7.32)$_1$可改写成

$$\varphi_{\mathrm{th}}^{0} = \theta\rho_0\gamma_{\mathrm{th}} = -\frac{1}{\theta}(\theta\overline{\nabla})\cdot\overline{\boldsymbol{H}} \geqslant 0 \tag{7.37}$$

假设耗散$\varphi_{\mathrm{th}}^{0}$为温度梯度$\theta\overline{\nabla}$与温度$\theta$的函数：

$$\varphi_{\mathrm{th}}^{0} = \varphi_{\mathrm{th}}^{0}(\theta\overline{\nabla},\theta) = \varphi_{\mathrm{th}}^{0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\overline{X}_{\alpha}},\theta\right) \tag{7.38}$$

式中$\overline{X}_{\alpha}$表示图 5-9(a)构形$\overline{\mathscr{R}}$中在材料各向异性方向$\overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha}$的坐标。采用 Ziegler 热力学假定（见第 4 章 4.1.3），令耗散驱动力$\boldsymbol{A}$与耗散流各为

$$\boldsymbol{A} = -\theta\overline{\nabla}, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{1}{\theta}\overline{\boldsymbol{H}} \tag{7.39}$$

可得

$$\frac{1}{\theta}\overline{\boldsymbol{H}} = -\lambda\frac{\partial\varphi_{\mathrm{th}}^{0}(\theta\overline{\nabla},\theta)}{\partial(\theta\overline{\nabla})} \tag{7.40}$$

式中λ可由(7.37)的等式决定

$$\lambda = \varphi_{\mathrm{th}}^{0}(\theta\overline{\nabla},\theta)\left[\frac{\partial\varphi_{\mathrm{th}}^{0}}{\partial(\theta\overline{\nabla})}\cdot(\theta\overline{\nabla})\right]^{-1} \tag{7.41}$$

(7.40)、(7.41)也可表示成

$$\frac{1}{\theta}\boldsymbol{h} = -\lambda\frac{\partial\varphi_{\mathrm{th}}(\theta\nabla,\theta)}{\partial(\theta\nabla)} \tag{7.40$'$}$$

$$\lambda = \varphi_{\mathrm{th}}(\theta\nabla,\theta)\left[\frac{\partial\varphi_{\mathrm{th}}(\theta\nabla,\theta)}{\partial(\theta\nabla)}\cdot(\theta\nabla)\right]^{-1} \tag{7.41$'$}$$

式中：

$$\varphi_{\text{th}}(\theta\nabla,\theta)=\theta\rho\gamma_{\text{th}}=\frac{\rho}{\rho_0}\varphi_{\text{th}}^0\left(F_{i\alpha}^{\text{e}}\frac{\partial\theta}{\partial x_i},\theta\right) \tag{7.42}$$

注意在图 5-9(a)构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 材料的热传导性质不因其微结构而改变，但在图 5-9(b)构形 τ 材料的热传导性质却受到弹性变形梯度 $\boldsymbol{F}^{\text{e}}$ 的影响。

5.7.3 塑性变形率 $\boldsymbol{d}^{\text{p}}$ 与塑性旋率 $\boldsymbol{w}^{\text{p}}$

Van der Giessen 企图证明 $\boldsymbol{w}^{\text{p}}=\boldsymbol{0}$，其证明过程如下[1]：因为 $\boldsymbol{\sigma}$ 为对称，$\boldsymbol{w}^{\text{p}}$ 为反对称，$\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{w}^{\text{p}}=0$，可将(7.32)$_2$ 改写为

$$\varphi_{\text{int}}=\theta\rho\gamma_{\text{int}}=\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{l}^{\text{p}}\geqslant 0 \tag{7.43}$$

利用(2.14)$_3$ 或(7.6c) $\boldsymbol{l}^{\text{p}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\text{p}}$ 的关系：

$$\boldsymbol{l}^{\text{p}}=\boldsymbol{F}^{\text{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\text{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\text{e}}} \tag{7.6c}$$

(7.43)可写作（可利用第 3 章(3.27)，(3.28)关系式）

$$\varphi_{\text{int}}^0=\theta\rho_0\gamma_{\text{int}}=\overline{\boldsymbol{\Sigma}}':\overline{\boldsymbol{L}}^{\text{p}}\geqslant 0 \tag{7.44}$$

式中

$$\begin{aligned}
&\overline{\Sigma}'=\frac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{F}^{\text{e}^{\text{T}}}\cdot\boldsymbol{\sigma}'\cdot\overset{\text{T}}{\boldsymbol{F}^{\text{e}}}, && \boldsymbol{\sigma}'=\frac{\rho}{\rho_0}\overset{-\text{T}}{\boldsymbol{F}^{\text{e}}}\cdot\overline{\Sigma}'\cdot\boldsymbol{F}^{\text{e}^{\text{T}}}\\
&\overline{\Sigma}'_{\alpha\beta}=\frac{\rho_0}{\rho}F_{i\alpha}^{\text{e}}\overset{1}{F}_{\beta j}^{\text{e}}\sigma'_{ij}, && \sigma'_{ij}=\frac{\rho}{\rho_0}\overset{-1}{F}_{\alpha i}^{\text{e}}F_{j\beta}^{\text{e}}\overline{\Sigma}'_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{7.45a}$$

(7.6c)说明 $\boldsymbol{l}^{\text{p}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\text{p}}$ 属于混合(#b)转移关系（见第 3 章 3.6.2 第三种转移）。(7.45a)说明偏斜张量 $\boldsymbol{\sigma}'/\rho$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'/\rho_0$ 属于混合(b#)转移关系（见第 3 章 3.6.2 第四种转移）。$\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ 球形部分 $-p\boldsymbol{1}$ 与 $-\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{1}$ 之间的关系为

$$\overline{\boldsymbol{P}}=\frac{\rho_0}{\rho}p \tag{7.45b}$$

这里 p 表示在构形 τ 中的静水压。注意由(7.45a) $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$（因而 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$）是非对称张量。Van der Giessen 假设(7.44)耗散 φ_{int}^0 为 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ 与温度 θ 的函数

$$\varphi_{\text{int}}^0=\varphi_{\text{int}}^0\left(\overline{\Sigma}'_{\alpha\beta},\theta,\overline{\boldsymbol{P}}\right) \tag{7.46}$$

并采用 Ziegler 热力学假定，得

---

1) 见 Besseling 与 Van der Giessen 书(1993)，257－259 页

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \lambda \frac{\partial \varphi_{\mathrm{int}}^{0}}{\partial \overline{\boldsymbol{\Sigma}}'} = \lambda \frac{\partial \varphi_{\mathrm{int}}^{0}}{\partial \overline{\Sigma}'_{\alpha\beta}} \overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha} \overline{\boldsymbol{G}}_{\beta} \tag{7.47a}$$

$$\lambda = \varphi_{\mathrm{int}}^{0} \left[\frac{\partial \varphi_{\mathrm{int}}^{0}}{\partial \overline{\boldsymbol{\Sigma}}'} : \overline{\boldsymbol{\Sigma}}' \right]^{-1} \tag{7.47b}$$

(7.46)与(7.47)可以通过在图 5-9(b)即时构形 τ 的物理量表示：

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{int}} = \theta \rho \gamma_{\mathrm{int}} &= \frac{\rho}{\rho_0} \varphi_{\mathrm{int}}^{0} \left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'_{\alpha\beta}, \theta, \overline{\boldsymbol{P}} \right) \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \varphi_{\mathrm{int}}^{0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{F}_{i\alpha}^{\mathrm{e}} \boldsymbol{F}_{\beta j}^{\mathrm{e}} \sigma'_{ij}, \theta, \frac{\rho_0}{\rho} p \right) \end{aligned} \tag{7.48}$$

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} = \lambda \frac{\partial \varphi_{\mathrm{int}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \lambda \frac{\partial \varphi_{\mathrm{int}}}{\partial \sigma'_{ij}} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \tag{7.49a}$$

$$\lambda = \varphi_{\mathrm{int}} \left[\frac{\partial \varphi_{\mathrm{int}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{\sigma}' \right]^{-1} \tag{7.49b}$$

由(7.49a)，由于 $\partial \varphi_{\mathrm{int}} / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ 为对称，且迹为零，故

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \lambda \frac{\partial \varphi_{\mathrm{int}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}, \qquad \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} = 0 \tag{7.50a,b}$$

如前所述 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$ 表示微结构的旋率，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{0}$ 表示 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$，即材料的旋率 $\boldsymbol{w}$ 与微结构的旋率 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$ 相同，材料的各向异性轴随着材料一起旋转。

以上是 Van der Giessen 关于 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=0$ 的证明。事实上，在耗散率 φ_{int} 表达式$(7.32)_2$中本来只出现 $\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$，其中根本不出现 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$。Van der Giessen 强行把$(7.32)_2$的 $\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 改为(7.43)式的 $\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$，其中在 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 中出现的 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$ 根本不起作用，因为 $\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=0$。因此(7.49a) $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} = \lambda \partial \varphi_{\mathrm{int}} / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ 本来就应该是(7.50a) $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \lambda \partial \varphi_{\mathrm{int}} / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ 的形式，所以 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$ 是不定的，不能由热力学导出。如前面(2.35)和本节前面提到，当图 5-9(a)构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 材料为各向同性时，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=0$ 结论是可以理解的。但是作为一般情况的结论，即是出人意料的。事实上，如果在 NRS 材料性质为各向异性的，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$ 必然与材料的微结构有关。以晶体滑移为例，以 $\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}}$ 表示滑移方向，$\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{III}}$ 垂直于滑移面，则利用第 3 章节 3.8 的算例(8.12)式，可证(7.5)中的 $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{p}}$，即(2.18)式中的塑性速度梯度 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 应为

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma} \overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}} \overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{II}} \tag{7.51}$$

式中$\dot{\gamma}$为滑移角的率。因此，由(7.6c)，利用(7.1)与(7.2)，可得

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}=\dot{\gamma}\hat{\boldsymbol{g}}_{\mathrm{I}}\hat{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{II}} \tag{7.52}$$

(7.52)的对称与反对称部分即为$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$与$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$，显然都不等于零。

现在来分析以上所述 Van der Giessen 证明$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{0}$的推理过程。首先分析 (7.47)所出现的$\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$与(7.49)所出现的$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$的含义。

先讨论$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$。由于$\boldsymbol{\sigma}'$是对称的张量，且迹为零，故 9 个分量不是独立的，只有 5 个独立分量，所以$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$如不加以规定，是无意义的[1]。$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$的定义式为

$$\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{int}}=\frac{\partial\varphi_{\mathrm{int}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\text{任意} \tag{7.53}$$

上式中$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$可加上一个任意的球形张量和任意的反对称张量，而对等式没有影响。因此只有对$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$作以下两点规定以后，才能由(7.53)唯一地确定$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$，因而$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$才有意义：

(1) 规定$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$为偏量，即其迹为零；

(2) 规定$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$为对称张量。

因此$\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$为对称偏量。

现在来讨论$\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$。由于$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$与$\boldsymbol{\sigma}'$之间存在关系(7.45a)，所以$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$的 9 个分量也是不独立的，也只有 5 个独立分量[2]。易证(7.45a)所加给$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$的限制有：

(1) $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$必为偏量$\left(\text{因为}\operatorname{tr}\overline{\Sigma}'=\dfrac{\rho_0}{\rho}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}'=0\right)$

(2) 应保证由(7.45a)式计算的$\boldsymbol{\sigma}'$为对称，即

$$\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}\cdot\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}=\left(\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}}\cdot\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{7.54}$$

即，利用(1.14)$_1$ $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$，上式可写作

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}=\left(\boldsymbol{\Sigma}'\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{7.54$'$}$$

也就是说，$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\cdot\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}$必须是一个对称张量。因此$\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$也只有在作一些规定之后，才有意义。$\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$的定义式是

$$\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{int}}^{0}=\frac{\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}}{\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'}:\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\Sigma}}' \tag{7.55}$$

---

1) 在第 1 章 1.7.3 中曾讨论过类似的问题。

2) 当弹性变形很小时，(7.45a)简化为正交变换关系，见后(7.122)式。

由(7.45a)，视 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$，$\rho$为不变，$\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$ 之间的关系为

$$\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'=\frac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\cdot\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}},\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'=\frac{\rho}{\rho_0}\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \tag{7.56}$$

将$(7.56)_1$代入(7.55)后，利用第 3 章(3.27)，(3.28)式，可将(7.55)写作

$$\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{int}}^{0}=\frac{\rho_0}{\rho}\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\frac{\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}}{\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\right):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' \tag{7.57}$$

由(7.43)与(7.44)，知 $\varphi_{\mathrm{int}}^{0}=(\rho_0/\rho)\varphi_{\mathrm{int}}$，比较(7.53)与(7.57)，得到

$$\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\frac{\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}}{\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}-\frac{\partial\varphi_{\mathrm{int}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}\right):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'=0,\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\text{ 任意} \tag{7.58}$$

因此上式中圆括弧部分(…)可以是任意的球形张量 $a\mathbf{1}$ 与任何的反对称张量$\boldsymbol{\omega}$之和：

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\frac{\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}}{\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}-\frac{\partial\varphi_{\mathrm{int}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}=a\mathbf{1}+\boldsymbol{\omega} \tag{7.59}$$

前面已经规定了 $\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$ 为对称偏量，所以 $\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$ 已有确定的意义。但(7.59)式说明，如果不对 $\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 作必要的规定，它的值是不确定的，因为式中 a 值与 $\boldsymbol{\omega}$ 的三个独立分量都可取任意值。因此(7.47)的 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 也是不确定的。但是不论(7.59)中 a 与 $\boldsymbol{\omega}$ 取何值，虽然会影响到 $\partial\varphi_{\mathrm{int}}^{0}/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$，因而 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$，但不会影响到 $\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$。既然已经规定 $\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$ 为对称偏量，由(7.49a) $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 也是对称偏量，必然导致(7.50b) $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\mathbf{0}$。总而言之，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\mathbf{0}$ 是我们规定 $\partial\varphi_{\mathrm{int}}/\partial\boldsymbol{\sigma}'$ 为对称偏量的结果，不说明任何物理实质。因此，不能认为 Van der Giessen 提供了 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\mathbf{0}$ 的证明。实际上，具有微结构的材料的 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$，因而 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$，只能通过材料微结构的变形机制的分析而得到（例如，见(7.52)）。如(2.35)所指出，只当材料为各向同性时，可令 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\mathbf{0}$。

以后还会遇到 $\partial(\cdots)/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 的记号，我们按(7.59)式令 $a=0,\ \boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ 理解，即

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial(\cdots)}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}=\rho_0\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\frac{\partial(\cdots)}{\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'}\cdot\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}},\qquad \rho_0\frac{\partial(\cdots)}{\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'}=\rho\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}\cdot\frac{\partial(\cdots)}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\\&\rho\frac{\partial(\cdots)}{\partial p}=\rho_0\frac{\partial(\cdots)}{\partial\overline{P}}.\end{aligned} \tag{7.60}$$

式中 $\partial(\cdots)/\partial\boldsymbol{\sigma}'$ 为对称偏量。

5.7.4 内变量理论[1)]

前面所述的自然参考状态（NRS）理论的重要假定是在 NRS 材料的性质不随变形过程而改变，无论应变有多大。的确，试验表明工程材料的弹性性质与热学性质（热膨胀，热

1) 见 Besseling 与 Van der Giessen 书(1993)，节 7.1.4。

传导）变化很小，在许多应用中可以略去。这是因为多晶体的热弹性性质主要取决于材料总体结构，但是随着变形的过程，材料的塑性性质通常变化显著，而不可忽略。在整个变形过程中，由于硬化，尤其是变形引起的各向异性硬化，使得材料的塑性状态随着变形过程而变化。因此，我们必须推广前述的 NRS 理论，引进一组内变量 $q_k(k=1,2,\cdots,n)$ 来反映材料塑性性质的变化。材料的即时状态取决于前面所引进的自变量 $\{\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\theta\}$ 和内变量 q_k。因为热弹性与塑性在物理上是完全不同的过程，我们假定由 $\{\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\theta\}$ 所描述的与由内变量 q_k 所描述的是不相互耦合的过程。而自由能 ψ 的变化 $\mathrm{d}\psi$ 除了前面 5.7.1(7.13)式的部分（现记作 $\mathrm{d}\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\theta\right)$）以外，还有塑性部分 $\mathrm{d}\psi^{\mathrm{p}}$：

$$\mathrm{d}\psi=\mathrm{d}\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\theta\right)+\mathrm{d}\psi^{\mathrm{p}} \tag{7.61}$$

$\mathrm{d}\psi^{\mathrm{p}}$ 称为塑性储能(stored plastic energy)的变化。我们不假定 ψ^{p} 是内变量 q_k 的函数，而只能假定 ψ^{p} 的演化与内变量变化的关系：

$$\rho_0\dot{\psi}^{\mathrm{p}}=Q_k\dot{q}_k \tag{7.62}$$

式中右端对 $k=1,2,\cdots,n$ 取和，Q_k 表示与 q_k 对应的热力学作用力，或称驱动力。注意 $\dot{\psi}^{\mathrm{p}}$ 只表示 $\mathrm{d}\psi^{\mathrm{p}}$ 与 $\mathrm{d}t$ 的比值，而不是函数 ψ^{p} 的导数（因为我们没有假定函数 ψ^{p} 的存在）。$\dot{\psi}^{\mathrm{p}}$ 可以为正，也可以为负。于是由热力学第二定律 5.7.1(7.18)可以同样得到 5.7.1(7.19)，但其中 ψ 改为 ψ^{e}：

$$\begin{gathered}\overline{\boldsymbol{T}}=\overline{\rho}\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\theta\right)}{\partial\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}},\qquad \eta=-\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\theta\right)}{\partial\theta}\\ \overline{T}_{\alpha\beta}=\rho\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\theta\right)}{\partial\overline{E}^{\mathrm{e}}_{\alpha\beta}}\end{gathered} \tag{7.63}$$

5.7.1 的(7.31)与$(7.32)_1$仍旧成立，而$(7.32)_2$则应改为

$$\varphi_{\mathrm{int}}=\theta\rho\gamma_{\mathrm{int}}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}-\rho\dot{\psi}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}-\frac{\rho}{\rho_0}Q_k\dot{q}_k\geqslant 0 \tag{7.64}$$

当塑性功率 $\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 为正时，(7.64)式表示塑性功一部分被耗散，其余部分被储存为不可恢复的塑性能 $\rho_0\dot{\psi}^{\mathrm{p}}$（见(7.62)）。这个塑性能的释放，也要以耗散为代价（见图 5-10(a)的并联弹簧）。(7.64)区别于$(7.32)_2$在于$(7.32)_2$要求塑性功率 $\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 恒为正，而(7.64)则只要求 $\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 代数值大于 $(\rho/\rho_0)Q_k\dot{q}_k$，可以为负，这时 $0>\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}>\rho\dot{\psi}^{\mathrm{p}}$，材料的塑性储能减少，但耗散率 φ_{int} 永远是正的。以上的内变量理论就是 Van der Giessen 所称“推广状态变量理论”(extended state variable theory)。下面我们举一个例子来说明塑性功率可以为负，同时结合这个例子把节 5.3 Rice-Hill 内变量理论与这里的内变量理论作一个比较。为了简单起见，我们假设小变形情况，因此 $\rho=\rho_0$。

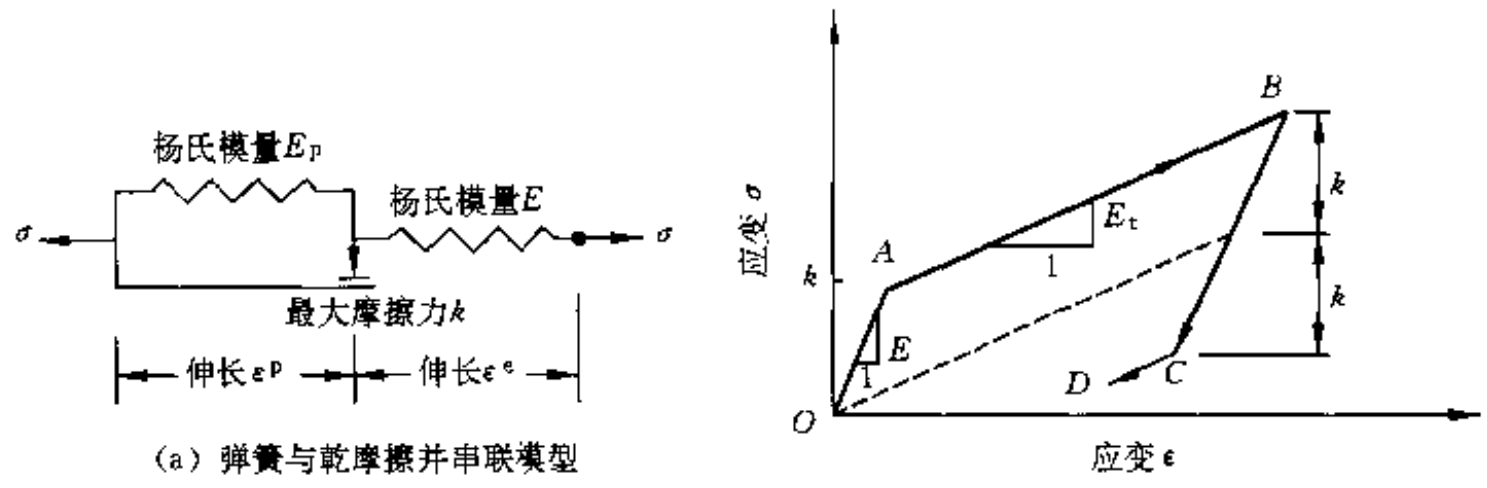


图 5-10 内变量理论之例

图 5-10(a)示弹簧与乾摩擦的并串联一维模型。弹性模量为 E_p 的弹簧与“乾摩擦对”并联，然后与一弹性模量为 E 的弹簧串联。图 5-10(b)示这一模型的应力应变关系图，加载段为双线性，OA 段斜率为 E，AB，CD 段斜率为切线模量 E_t。应力应变关系为

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \\
&\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}, \\
&\varepsilon^p = \frac{\sigma - F}{E_p}, \qquad |F| \leqslant k \\
&\frac{1}{E_t} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_p}
\end{aligned}
\tag{7.65}
$$

式中 F 表示乾摩擦力，$F\dot{\varepsilon}^p \geqslant 0$。注意在 CD 段的塑性功率为负。

(1) 按本节理论，取 $\rho_0\psi^e$ 与 $\rho_0\psi^p$ 各为图 5-10(a)模型中串联弹簧与并联弹簧的应变能（$\rho = \rho_0$）：

$$
\rho_0\psi^e = \frac{1}{2}E\left(\varepsilon^e\right)^2, \qquad \rho_0\psi^p = \frac{1}{2}E^p\left(\varepsilon^p\right)^2 \tag{7.66}
$$

取内变量 $q = \varepsilon^p$，则

$$
Q = \rho_0\frac{\partial\psi^p}{\partial q} = E^p\varepsilon^p \tag{7.67}
$$

$$
\rho_0\dot{\psi}^p = Q\dot{q} = E^p\varepsilon^p\dot{\varepsilon}^p \tag{7.68}
$$

因此 $\dot{\psi}^p$ 可以为正，也可以为负（例如图 5-10(b)中的 CD 段）。由(7.64)，利用(7.65)，得耗散率为

$$
\varphi_{int} = \theta\rho_0\gamma_{int} = \sigma\dot{\varepsilon}^p - E^p\varepsilon^p\dot{\varepsilon}^p = \left(\sigma - E^p\varepsilon^p\right)\dot{\varepsilon}^p = k\left|\dot{\varepsilon}^p\right| \tag{7.69}
$$

(2) 按 Rice-Hill 理论，取内变量ξ_1为图 5-10(a)“乾摩擦对”中滑块向右的累积滑动位移，ξ_2为滑块向左的累积滑动位移（绝对值），则塑性应变ε^{p} 为ξ_1与ξ_2之差：

$$\varepsilon^{\mathrm{p}} = \xi_1 - \xi_2 \tag{7.70}$$

取(7.66)两式之和，得

$$\rho_0\psi = \frac{1}{2}E\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{p}}\right) + \frac{1}{2}E^{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)^2 \tag{7.66$'$}$$

本构方程由$(3.7)_1$式给出：

$$\sigma = \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = E\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{p}}\right)$$

由(3.10)可得热力学作用力f_1与f_2：

$$\begin{aligned}\rho_0 f_1 &= -\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} = E\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{p}}\right) - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}} = \sigma - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}} \\ \rho_0 f_2 &= -\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} = -E\left(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{p}}\right) + E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}} = -\left(\sigma - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\end{aligned} \tag{7.71}$$

由(3.9)得耗散率

$$\varphi_{\mathrm{int}} = \theta\rho_0\gamma_{\mathrm{int}} = \rho_0 f_1\dot{\xi}_1 + \rho_0 f_2\dot{\xi}_2 = \left(\sigma - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\dot{\xi}_1 - \left(\sigma - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\dot{\xi}_2 \tag{7.72}$$

当图 5-10(a)模型中滑块向右滑行时，$\dot{\xi}_1 > 0$，$\dot{\xi}_2 = 0$，且

$$\rho_0 f_1 = \sigma - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}} = k, \qquad \rho_0 f_2 = -\left(\sigma - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) < k$$

当图 5-10(a)模型中滑块向左滑行时，$\dot{\xi}_1 = 0$，$\dot{\xi}_2 > 0$，且

$$\rho_0 f_1 = \sigma - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}} < k, \qquad \rho_0 f_2 = -\left(\sigma - E_{\mathrm{p}}\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) = k$$

(7.71)中$\dot{\xi}_1$与$\dot{\xi}_2$只有一个开动，开动的ξ_α恒递增。Rice-Hill 理论的φ_{int}结果(7.72)与 Van der Giessen 的(7.69) φ_{int}是一致的。

在耗散率φ_{int}表达式(7.64)中出现的耗散流$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$与$q_k(k=1,2,\cdots,n)$是耦合在一起的，因此这属于 Ziegler(1977)（或见 Besseling 与 Van der Giessen(1993)转述）所称的复杂过程。耗散函数φ_{int}除了依赖于$\overline{\Sigma}'_{\alpha\beta},\theta,\overline{P}$（见(7.48)）以外，还可能依赖于驱动力$Q_k(k=1,2,\cdots,n)$。即使有了耗散函数$\varphi_{\mathrm{int}}$的表达式，并采用 Ziegler 假定（见第 4 章 4.1.3），设各耗散流的方向平行于耗散函数对驱动力的偏导数，也难以根据一个耗散函数确定多个耗散流的数值。这个困难迄今尚未很好解决。

5.7.5 持续各向同性介质[1)]

1. 理想塑性材料

采用 NRS 理论和 5.7.1、5.7.3 来建立理想塑性本构关系。如果要考虑材料的各向同性硬化，则还要引进内变量。利用 5.7.4 的结果：对于蠕变或粘塑性材料，Ziegler 假定的意义是耗散流方向正交于“等耗散曲面”。如 Ziegler(1977)与 Rice(1970)所指出，率无关材料可以看作是高度非线性蠕变或粘塑性材料“等耗散曲面”无限密集于屈服曲面的情况。设屈服面的方程为[2)]

$$\Phi\left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}',\theta,\overline{\boldsymbol{P}}\right)=0 \qquad \text{即}\ \Phi\left(\overline{\Sigma}'_{\alpha\beta},\theta,\overline{P}\right)=0 \tag{7.73a}$$

式中自变量同(7.46)，或

$$\Phi\left(\frac{\rho_0}{\rho}F^{\mathrm{e}}_{i\alpha}F^{\mathrm{e}}_{\beta j}\sigma'_{ij},\theta,\frac{\rho_0}{\rho}p\right)=0 \tag{7.73b}$$

式中自变量同(7.48)，由(7.47a)与(7.50)，并注意 $\varphi_{\mathrm{int}}/\varphi^0_{\mathrm{int}}=\rho/\rho_0$，在图 5-9(a)NRS 即构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 的流动法则可表示为

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}=\lambda_0\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'} \tag{7.74}$$

而在图 5-9(b)即时构形 $\mathscr{R}$ 中 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 的流动法则为

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'},\qquad \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{0} \tag{7.75}$$

λ 与 λ_0 的关系为

$$\lambda=\lambda_0\frac{\rho}{\rho_0} \tag{7.76}$$

(7.74)的 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 与(7.75)的 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 满足关系(7.6c)，$\partial\Phi/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 与 $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma}'$ 满足关系(7.60)。(7.74)中 λ_0 或(7.75)中 λ 的值由一致性条件 $\dot{\Phi}=0$ 定出。将(7.73a)代入，得

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{\Sigma}_{\alpha\beta}}\dot{\overline{\Sigma}}_{\alpha\beta}+\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\Phi}{\partial P}\dot{\overline{P}}=0 \tag{7.77}$$

(7.45a) $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 对时间求导，并利用(2.7)$_1$ 与第 3 章(4.3)式

---

1) 引自 Besseling 与 Van der Giessen 书(1993)，第 7.2.1

2) 本节主要讨论塑性变形无体积变化，弹性变形小，故 ρ/ρ_0 是一个近似于 1 的数

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{e}=\boldsymbol{l}^{e}\cdot\boldsymbol{F}^{e},$$

$$\left(\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{e}\right)^{\bullet}=-\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{e}\cdot\boldsymbol{l}^{e}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\bullet}=-\frac{\dot{\rho}}{\rho^{2}}=\frac{1}{\rho}\operatorname{tr}\boldsymbol{d}$$

可得

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}'=\frac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{F}^{e^{\mathrm{T}}}\cdot\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}'+\boldsymbol{l}^{e^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{l}^{e^{\mathrm{T}}}+\boldsymbol{\sigma}'\operatorname{tr}\boldsymbol{d}\right]\cdot\overset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{e} \tag{7.78}$$

因此利用第 3 章张量运算公式(3.27)、(3.28)、可证(7.77)右端第一项为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'}:\dot{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}'&=\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}:\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}'+\boldsymbol{l}^{e^{\mathrm{T}}}\cdot\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{l}^{e^{\mathrm{T}}}+\boldsymbol{\sigma}'\operatorname{tr}\boldsymbol{d}\right]\\&=\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}:\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}'+\boldsymbol{w}^{e}\cdot\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{w}^{e}+\boldsymbol{\sigma}'\operatorname{tr}\boldsymbol{d}\right]\end{aligned} \tag{7.79}$$

在证上式的后一等式时，曾利用 $\boldsymbol{d}^{e}\cdot\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{d}^{e}$ 为反对称，和 $\boldsymbol{w}^{e}\cdot\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{w}^{e}$ 为对称。上式中 $\partial\Phi/\partial\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 与 $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma}'$ 的关系已见(7.60)。利用应力率表达式(7.27)与(7.75)式，由一致性条件(7.77)可得

$$\lambda=\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}:\mathscr{L}:\boldsymbol{d}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\dot{\theta}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}\left(\dot{p}+p\operatorname{tr}\boldsymbol{d}\right)+\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}:\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}'}{\partial\theta}\dot{\theta}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}:\mathscr{L}:\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}} \tag{7.80}$$

式中 $\mathscr{L}$ 见(7.28)，$\partial\boldsymbol{\sigma}'/\partial\theta$ 见(7.26)（ψ 改为 ψ^{f}），

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial P} \tag{7.81}$$

对于各向同性热弹性材料 $\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial\theta$ 为球形张量，故 $\partial\boldsymbol{\sigma}'/\partial\theta=\boldsymbol{0}$，假设略去屈服函数的温度影响（即设 $\partial\Phi/\partial\theta=0$）及压力影响（即设 $\partial\Phi/\partial p=0$），将流动法则(7.75)$\boldsymbol{d}^{p}$ 代入(7.27)中的 $\boldsymbol{d}^{e}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^{p}$、并且利用(7.50b) $\boldsymbol{w}^{p}=\boldsymbol{0}$，最后可得本构关系：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=\left(\mathscr{L}-\mathscr{Y}\right):\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\boldsymbol{d}+\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\theta}\dot{\theta} \tag{7.82}$$

式中

$$\mathscr{Y}=\frac{\left(\mathscr{L}:\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}\right)\left(\mathscr{L}:\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}\right)}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}:\mathscr{L}:\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}} \tag{7.83}$$

$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ 为 Jaumann 导数

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{w}$$

假设材料始终保持各向同性。因此ψ^{e} 通过$\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$的三个不变量而依赖于$\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$。假设弹性变形很小（例如金属材料），在(7.28)$\mathscr{L}$式中可略去 $\mathscr{E}^{\sigma}$，取$\rho_0\psi^{\mathrm{e}}(\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}},\theta)$如第 4 章(1.23)式，其中$\psi$改为$\psi^{\mathrm{e}}$，$I_1$、$I_2$改为$\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{e}}$的不变量$I_1^{\mathrm{e}}$，$I_2^{\mathrm{e}}$，则由第 4 章(1.41)，并注意$b_{ij}^{\mathrm{e}}\approx\delta_{ij}$，可得

$$\mathscr{L}_{ijkl}\approx\mathscr{L}_{ijkl}^{\mathrm{e}}\approx G\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)+\left(K-\frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{7.84}$$

以上的推导适用于理想塑性材料，不需要引入任何内变量。对于各向同性硬化材料则必须引入一个内变量。

2. 各向同性（等向）硬化情况

设在 NRS 材料为各向同性，故屈服条件(7.73a)也只通过应力$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$的不变量而依赖于$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$。因为$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$只有 5 个独立分量，不变量只有两个，它们是

$$J_2^0=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\cdot\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\right),\qquad J_3^0=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\cdot\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\cdot\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'\right) \tag{7.85}$$

Cauchy 偏应力$\boldsymbol{\sigma}'$的两个不变量为

$$J_2=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{\sigma}'),\qquad J_3=\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{\sigma}') \tag{7.86}$$

利用$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$与$\boldsymbol{\sigma}$的关系(7.45a)，与第 3 章张量运算公式(3.27)，(3.28)，可证(7.85)与(7.86)存在关系：

$$J_2^0=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 J_2,\qquad J_3^0=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^3 J_3 \tag{7.87}$$

因此屈服条件(7.73)也可以通过$\boldsymbol{\sigma}'$的不变量J_2，J_3表示。因已设塑性变形无体积变化且弹性变形很小，故$\rho\approx\rho_0$，$\rho_0/\rho\approx 1$。设屈服函数(7.73)为

$$\Phi=\frac{3J_2^0}{\left[Y\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\right]^2}-1\approx\frac{3J_2}{\left[Y\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\right]^2}-1 \tag{7.88}$$

式中ε^{p}，类似于(3.139)的$\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}$与(5.14)的$\varepsilon_{\mathrm{SO}}^{\mathrm{p}}$，为累积塑性变形：

$$\varepsilon^{\mathrm{p}}=\int\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\right)^{1/2}\mathrm{d}t \tag{7.89}$$

可以选ε^{p}作为内变量。$Y(\varepsilon^{\mathrm{p}})$表示材料曲线，可由单向拉伸情况的沿拉伸方向拉应力-对数应变曲线得到。塑性模量E_{p}的定义为

$$E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)=\frac{\mathrm{d}Y\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}} \tag{7.90}$$

由(7.88)可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}=\frac{3}{[Y(\varepsilon^{\mathrm{p}})]^{2}}\boldsymbol{\sigma}', \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial Y}=-\frac{6J_2}{Y^3}=-\frac{2}{Y(\varepsilon^{\mathrm{p}})}$$

对于各向同性硬化材料，一致性条件(7.77)应改为

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\dot{Y}+\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{\boldsymbol{\Sigma}}'}:\dot{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}'+\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\dot{\theta}+\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{P}}\dot{\overline{P}}=0 \tag{7.91}$$

并定义

$$h=-\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial Y}\dot{Y}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}:\mathscr{L}:\boldsymbol{d}} \tag{7.92}$$

最后可得本构关系

$$\overset{\mathrm{v}}{\boldsymbol{\sigma}}=\left[\mathscr{L}-(1-h)\mathscr{Y}\right]:\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d}-\alpha K\dot{\theta}\mathbf{1} \tag{7.93}$$

式中$\mathscr{L}$见(7.82)，由(7.83)与(7.92)可计算得

$$\mathscr{Y}=\begin{cases}\dfrac{3G}{\left[Y\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2}}\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}' & \text{当}\Phi=0\text{且}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{d}>0\\ \mathbf{0} & \text{其他情况}\end{cases} \tag{7.94}$$

$$h=\frac{Y\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)\dot{Y}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)}{3G\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{d}}=\frac{1}{1+\dfrac{3G}{E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)}} \tag{7.95}$$

在推导(7.93)式时，曾用到（见第 4 章(1.31)，(1.42)）：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta}=-\alpha K\mathbf{1}$$

若令$E_{\mathrm{p}}\to 0$，h=0，即得理想塑性材料本构关系。

5.7.6 机动与混合硬化[1)]

本节中将把第 1 章小变形情况的机动与混合硬化模型推广于大变形情况，并在本节最后讨论这一大变形本构模型的适用性。推广的方法不是唯一的。这里将采用前面 5.7.4 的内变量理论。

假设在内变量理论的耗散率表达式(7.64)取内变量率 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 为 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$，对应的驱动力 $\boldsymbol{Q}$ 记为 $\overline{\boldsymbol{M}}$，则热力学第二定律(7.64)成为

$$\varphi_{\mathrm{int}} = \theta\rho\gamma_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} - \frac{\rho}{\rho_0}\overline{\boldsymbol{M}} : \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{7.96}$$

或用 NRS 中的量表示，参考(7.44)

$$\varphi_{\mathrm{int}}^{0} = \theta\rho_0\gamma_{\mathrm{int}} = \overline{\boldsymbol{\Sigma}}' : \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} - \overline{\boldsymbol{M}} : \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}' - \overline{\boldsymbol{M}}\right) : \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{7.97}$$

式中 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}' - \overline{\boldsymbol{M}}$ 称为主动应力。(7.96)用即时构形 τ 中的量表示，成为

$$\varphi_{\mathrm{int}} = \theta\rho\gamma_{\mathrm{int}} = \left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}\right) : \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{7.98}$$

式中已设 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = 0$。$\overline{\boldsymbol{M}}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 满足类似于(7.45a)的关系

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{M}} &= \frac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \cdot \boldsymbol{m} \cdot \overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}}, \\ \boldsymbol{m} &= \frac{\rho}{\rho_0}\overset{-\mathrm{T}}{\boldsymbol{F}}{}^{\mathrm{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{M}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \end{aligned} \tag{7.99}$$

塑性功的一部分被耗散，而另一部分则转化为塑性储能，由(7.62)式表示。

$$\rho_0\dot{\psi}^{\mathrm{p}} = \overline{\boldsymbol{M}} : \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \frac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{m} : \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} \tag{7.100}$$

必须注意，因为已经假设塑性变形无体积变化，$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} = \mathrm{tr}\,\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = 0$（见(7.6c)），$\overline{\boldsymbol{M}}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 本身都是偏斜张量，而 $\boldsymbol{m}$ 是对称的。

假定屈服条件通过 NRS 中的主动应力 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}' - \overline{\boldsymbol{M}}$ 表示，以 σ_{F} 为表示屈服面的大小的参数，称为流动应力，并假设屈服函数与温度 θ 及压力 P 无关，则屈服条件形式为（取代 5.7.5 的(7.73)）

$$\Phi\left(\overline{\Sigma}'_{\alpha\beta} - \overline{M}_{\alpha\beta}, \sigma_{\mathrm{F}}\right) = \Phi\left(\frac{\rho_0}{\rho}F^{\mathrm{e}}_{i\alpha}\overset{-1}{F}{}^{\mathrm{e}}_{\beta j}\left(\sigma'_{ij} - m_{ij}\right), \sigma_{\mathrm{F}}\right) = 0 \tag{7.101}$$

如果假定屈服函数只依赖于 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}' - \overline{\boldsymbol{M}}$ 的第二不变量，则可取

---

1) 见 Besseling 与 Van der Giessen 书(1993)，节 7.22。

$$\Phi = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{\Sigma}' - \overline{\boldsymbol{M}}\right)^2\right]}{\sigma_{\mathrm{F}}^2} - 1 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \frac{3}{2}\frac{\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}\right)^2\right]}{\sigma_{\mathrm{F}}^2} - 1 \tag{7.102}$$

张量 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 可称为在 NRS 与即时构形 τ 中的背应力(取代第 1 章 1.2.2 小变形理论中的 $\boldsymbol{b}'$)，取代 5.7.5 各向同性硬化情况表示正交条件的 $\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ 或 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 的流动法则(7.74)，(7.75)，现在有

$$\overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}' - \overline{\boldsymbol{M}}\right)} \tag{7.103}$$

或

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}\right)} \tag{7.104}$$

因为 $\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}$ 是对称偏量，故 $\boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}$ 是对称的，且

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{p}}, \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0} \tag{7.105}$$

关于背应力 $\overline{\boldsymbol{M}}$ 或 $\boldsymbol{m}$ 的演化规律，要求满足客观性原理，从第 1 章的小变形情况推广到大变形情况有许多种方式。以下介绍两种。

(1) 第一种简单的方法。类似于第 1 章 1.2.2 的 Ziegler 假定，设

$$\dot{\overline{\boldsymbol{M}}} = \mu\left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}' - \overline{\boldsymbol{M}}\right) \tag{7.106}$$

将(7.45a) $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 与(7.99) $\overline{\boldsymbol{M}}$ 代入，上式可通过即时构形 τ 中的量表示

$$\dot{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{l}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \cdot \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{l}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} + \boldsymbol{m}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d} = \mu\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}\right) \tag{7.107}$$

如果假定在变形过程中弹性变形很小，作为近似，令 $\boldsymbol{d} \approx \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$，则上式可写作：

$$\dot{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}} = \mu\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}\right) \tag{7.108}$$

左端为背应力 $\boldsymbol{m}$ 基于微结构旋率 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$ 的 Jaumann 率。由(7.108)式可以证明[1]：只要在某一时刻 $\boldsymbol{m}$ 是对称张量，则在此后的全部变形过程中 $\boldsymbol{m}$ 恒保持为对称的。我们假设在初始状态，背应力 $\boldsymbol{m}$ 为零，因此以后的全部变形过程中 $\boldsymbol{m}$ 为对称。那么，如(7.105)式所示，必有 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}$。(7.108)式成为

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{m}} = \dot{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w} = \mu\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}\right) \tag{7.109}$$

假设弹性变形很小，经过一定的推导以后，可得本构关系（类似于 5.7.5 各向同性硬化情况

---

1) 由(7.108)可证 $\boldsymbol{m}$ 的反对称部分满足以时间 t 为自变量的齐次微分方程。或者更简单些，可证当 $\boldsymbol{m}$ 为对称时，$\dot{\boldsymbol{m}}$ 必也对称

的(7.93)）为

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathscr{L} - (1-h)\mathscr{Y}\right]:\boldsymbol{d} - \boldsymbol{\sigma}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d} - \alpha K\dot{\theta}\mathbf{1} \tag{7.110}$$

式中

$$\mathscr{Y} = \begin{cases} \dfrac{3G}{\sigma_{\mathrm{F}}}(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}) & \text{当}\Phi = 0\text{且}(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}):\boldsymbol{d} > 0 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \tag{7.111}$$

而流动应力σ_{F}的演化，机动硬化参数μ（见(7.109)）与h之间存在关系[1]，

$$\frac{\dot{\sigma}_{\mathrm{F}}}{\sigma_{\mathrm{F}}} = \frac{3G}{\sigma_{\mathrm{F}}^2}h(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}):\boldsymbol{d} - \mu \tag{7.112}$$

由此式可求出h。

(7.110)~ (7.112)是第 1 章小变形情况 Ziegler 混合硬化模型的直接推广，有一些作者曾经由小变形本构关系出发把应力率与应变率改为客观的应力 Jaumann 率与客观的变形率而得到过（见第 3 章 5.7.3），虽然他们并未利用这里的 NRS 概念或者 Lee(1969)的中间构形概念。这个推广模型一直到 Nagtegaal 与 De Jong(1981)的文章发表以前，曾经基本上被广泛接受。Nagtegaal 与 De Jong 按此推广模型对材料在单剪变形下的响应进行了详尽的研究。他们发现在纯机动硬化（即屈服面大小不变，$\dot{\sigma}_{\mathrm{F}} = 0$）情况下，在单剪变形递增过程中剪应力发生振荡。但是杆或薄管扭转试验从未发现过这种应力振荡现象。对这种显然不合理的应力响应，Dafalias(1981)与 Loret(1983)把原因归之于背应力演化规律是通过(7.109)中基于介质旋率$\boldsymbol{w}$的 Jaumann 率，而不是通过(7.108)中基于微结构旋率$\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}$的 Jaumann 率。换句话说，他们认为塑性旋率$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} = \mathbf{0}$是造成 Nagtegaal 与 De Jong(1981)的不合理结果的主要原因。因为当$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} = \mathbf{0}$时，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{w}$，而在单剪问题中$\boldsymbol{w}$为常量，这样无论剪切变形多大，由于机动硬化引起的各向异性以不变的率旋转。但实际上，在单剪过程中任何“微结构”都不能永远旋转下去，最后总要演化到一个择优取向。Dafalias 与 Loret 都分别建议增加一个塑性旋率$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$本构方程显式，这样就能避免产生上述不合理现象。他们运用张量表示的一般定理来提供$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$本构关系的显式。他们所建议的最低一级表达式的形式为

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\rho\left(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{m}\right) \tag{7.113}$$

式中ρ为一新加的材料函数[2]。Dafalias 与 Loret 确实证明了当适当选择ρ时，基于(7.108)与(7.110)的纯机动硬化模型可以得到在单剪情况下应力递增的在物理上合理的结果。注意(7.108)的背应力演化率必须与塑性旋率(7.113)式联立，(7.111)的$\mathscr{Y}$表达式也必须改变

---

1) 这里σ_{F}应理解为ε^{p}（见(7.89)）的材料函数$\sigma_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)$

2) 勿与质量密度ρ混淆

Dafalias(1985)最后得到张量 $\mathscr{Y}$ 已失去对称性 $\mathscr{Y} \neq \mathscr{Y}^{\mathrm{T}}$，而这个对称性在唯一性问题与稳定问题中是很重要的。

(2) 另一种方案：Van der Giessen(1989b)建议在背应力演化率(7.106)中左端 $\dot{\overline{\boldsymbol{M}}}$ 改为第3章(6.64d)形式的客观导数：

$$\overline{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{b\#}} = \dot{\overline{\boldsymbol{M}}} + \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} \cdot \overline{\boldsymbol{M}} - \overline{\boldsymbol{M}} \cdot \overline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}^{\mathrm{T}}} = \mu\left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}' - \overline{\boldsymbol{M}}\right) \tag{7.114}$$

这里采用 b#型的客观导数，是因为 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}'$ 与 $\boldsymbol{\sigma}'$ 之间，$\overline{\boldsymbol{M}}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 之间满足 b#型的张量转移关系(7.45a)与(7.99)，因而能得到下面的(7.115)。将(7.114)从 NRS 即构形 $\overline{\mathscr{N}}$ 转移到即时构形 $\mathscr{N}$ 中来，可得

$$\boldsymbol{m}^{\mathrm{b\#}} = \dot{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{m}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d} = \mu\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}\right) \tag{7.115}$$

它与前面(7.107)的区别在于把 $\boldsymbol{\Gamma}$ 改为 $\boldsymbol{l}$。这个区别是很重要的，它使我们无需求助于弹性变形很小的假设，而使背应力演化方程得到简化。但是背应力演化方程(7.115)最重要的特点是背应力张量 $\boldsymbol{m}$ 成为一个非对称的张量。假定在某一时刻 $\boldsymbol{m}$ 为对称张量，根据(7.115)求解的 $\boldsymbol{m}$ 在此时刻以后不再保持对称，因为尽管在该时刻 $\boldsymbol{m}$ 为对称，由(7.115)计算出该时刻的 $\dot{\boldsymbol{m}}$ 不对称，但是，$\boldsymbol{m}$ 仍是一个偏量，因为若在某一时刻 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{m} = 0$，由(7.115)可证在该时刻 $(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{m})^{\cdot} = \mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{m}} = 0$。因此(7.103)右端 $\partial\Phi/\partial(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})$ 应理解为偏量（但不对称）。若把(7.102)中右端的 tr[…]理解为

$$\mathrm{tr}\left[(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})^2\right] = (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}) : \left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\right)$$

则

$$\mathrm{d}\,\mathrm{tr}\left[(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})^2\right] = 2\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\right) : \mathrm{d}(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})$$

由(7.102)可得 $(\rho \approx \rho_0)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})} \approx \frac{3}{2\sigma_{\mathrm{F}}}\left(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}} &= \frac{1}{2}\lambda\left[\frac{\partial\Phi}{\partial(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})}\right)^{\mathrm{T}}\right] \approx \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\sigma_{\mathrm{F}}^2}\left[\boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\right)\right] \\ \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} &= \frac{1}{2}\lambda\left[\frac{\partial\Phi}{\partial(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{m})}\right)^{\mathrm{T}}\right] \approx \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\sigma_{\mathrm{F}}^2}\left(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\right) \end{aligned} \tag{7.116}$$

λ 因子可由一致性条件 $\dot{\Phi} = 0$ 决定，因此 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$ 与 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$ 一起同时求出。由于 $\boldsymbol{m}$ 的非对称性，推导过程比以前复杂一些。假设弹性变形很小，最后可得到[1]

---

[1] 见 Van der Giessen(1989b).

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathscr{L} - (1-h)\mathscr{Y}\right]:\boldsymbol{d} - \boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\boldsymbol{d} - \alpha K\dot{\theta}\mathbf{1} \tag{7.117}$$

式中

$$\mathscr{Y} = \begin{cases} \dfrac{\left[(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}:\mathscr{L}^0\right]\left[(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}:\mathscr{L}^0\right]}{(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}:\mathscr{L}:(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}} & \text{当}\Phi=0\text{且}(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}:\mathscr{L}^0:\boldsymbol{d}>0 \\ \mathbf{0} & \text{其他情况} \end{cases} \tag{7.118}$$

(7.112)式应改为[1)]

$$\frac{\dot{\sigma}_{\mathrm{F}}}{\sigma_{\mathrm{F}}} = \frac{3}{\sigma_{\mathrm{F}}^2}h(\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}:\mathscr{L}^0:\boldsymbol{d} - \mu \tag{7.119}$$

上两式中出现的四阶张量$\mathscr{L}^0$在直角坐标中的表示为

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^0 &= \mathscr{L}^0_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \\ \mathscr{L}^0_{ijkl} &= \mathscr{L}^{\mathrm{e}}_{ijkl} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{jk}\delta_{il} - \sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{jl}\delta_{ik} - \sigma_{il}\delta_{jk}\right) \end{aligned} \tag{7.120}$$

注意考虑塑性旋率的后果，使得$\mathscr{L}^0_{ijkl}$具有很奇特的结构：对于前两个指标ij，有一个反对称的部分，而对于后两个指标kl仍然保持对称性。但塑性模量张量$\mathscr{Y}$仍保持以前的对称性，其中包括$\mathscr{Y}=\mathscr{Y}^{\mathrm{T}}$，即$\mathscr{Y}_{ijkl}\approx\mathscr{Y}_{klij}$。根据这个本构模型，由于考虑了非零塑性旋率，在均匀单剪变形情况下的应力响应是合理的。

最后我们来讨论在混合硬化模型中所出现的塑性旋率问题。Dafalias(1981)与Loret(1983)所提出的塑性旋率本构关系(7.113)包含一个新的材料函数或参数ρ，需由试验确定。与此相反，这里(7.116)不包括任何新的材料函数或参数。Van der Giessen(1991)对于以上两个以及其他模型进行了详细的比较，同时还作了更多的细观力学的考虑。在这些或其它的塑性旋率本构律中，哪一个最好，最终只能靠与适当的试验进行仔细的比较来决定。这是一个至今尚未解决的问题。如下面将要讨论到，混合硬化作为一个材料在大变形情况下实际行为的理想化模型，其实用性很有限，所以这个问题预期未必能解决。

在本节中讨论了混合硬化模型对大变形情况的推广，而未考虑这个推广是否合适。在小变形情况下（见第 1 章 1.2.2）混合硬化的模型旨在考虑对许多工程材料所观察到的清晰的鲍氏效应（见第 1 章图 1-6）。但是在大变形情况下，还没有能证实明显鲍氏效应的试验结果；反向加载的流动应力与原正向加载的流动应力大致相等。这表明：如果把上述的任一个混合硬化模型用于从小到大变形的全过程，背应力所表示的屈服面中心在应力空间中的移动，只在单调加载路径的小变形阶段起作用，最后要饱和到一个最终背应力值，而大变形阶段的应变硬化主要是屈服曲面的等向长大。这一事实可以通过合理选择出现于(7.112)

1) 这里σ_{F}应理解为ε^{p}（见(7.89)）的材料函数$\sigma_{\mathrm{F}}\left(\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)$。

与(7.119)中的机动硬化函数μ来加以反映，但塑性旋率的选择问题就不显得那么重要了。Van der Giessen 认为，采用等向硬化与机动硬化组合的模型[1]也许更为简单可行．其中机动硬化部分到达一定限度开始饱和。

尽管对于多轴与多向加载过程，大变形混合硬化的实用性有限，但在塑性稳定问题的研究中却有很成功的应用。如所周知，塑性分叉问题的预测结果对于在应力空间中屈服曲面是否存在或发展出角点或顶点非常敏感（例如见 Hutchinson(1974)，Rice(1977)）。为了避免角点模型所带来的复杂性，Tvergaard(1978)采用了一个经过圆滑的角点模型。混合硬化屈服面在某应力点具有小曲率半径，与等向长大的屈服面相比，导致对微小缺陷的敏感性更为显著，因而可以更符合于基于现实微小缺陷的应变局部化试验结果。但这要求在失稳以前的材料加载路径接近于比例加载。在比例加载路径下，塑性旋率也不很重要，因为上述的所有不同的混合硬化模型在比例加载情况下都得到一致相同的结果。细节可参考专门的文献。

5.7.7 各向异性硬化[2]

工程材料在初始状态一般表现为各向同性，但经过大以至非常大的变形过程以后，变成高度的各向异性。对于大变形，可以观察到两种主要的各向异性：(1) 晶体学结构，源于在多晶体中晶格的择优取向；(2) 微结构各向异性，源于颗粒结构的形态变化与第二相的非随机分布。在第(2)种各向异性中，微结构各组元的分布应该与材料整体的变形近似协调一致，而在第(1)种各向异性中，晶体学结构是在不断变形过程中各个晶格逐渐转向同一取向的结果。在变形过程中，由于塑性引起的这两种各向异性通常同时出现并发展，但金属的热/机械加工或成型所产生的各向异性主要来自晶体学结构的发展。

上面讨论的在 NRS 框架内的本构模型，其建立是一个艰巨的任务，迄今还远未完成。因此在本小节的最后，我们仅限于指出与此有关的主要困难。和前面一样，略去结构对热弹性性质的可能影响，我们集中讨论通过屈服面和关联流动法则表示的塑性性质。一般说来，对于具有结构的材料，在 Cauchy 应力$\boldsymbol{\sigma}$空间中屈服面可以有很复杂的形状。当这一材料经过进一步的塑性变形并且各向异性进一步发展，屈服面的形状还会进一步变化。还有，当随着变形的过程，各向异性的方向发生变化时，在$\boldsymbol{\sigma}$空间中屈服面也会同时转动。但如果晶体学织构起主导作用，可以证明屈服面具有某些对称性，并且在$\boldsymbol{\sigma}$空间中不会平移（这与小变形时鲍氏效应显著的特点恰好相反）。图 5-11 是织构材料屈服面的示意图。像 5.7.4 所讨论的那样，可以借助内变量 Q_k 来建立屈服函数。在形式上，这一屈服函数可以通过 NRS（即构形$\overline{\mathscr{K}}$）中的量来表示：

---

1) 见 Besseling 与 Van der Giessen 书(1993)第 6 章组合模型(Fraction models)。

2) 本小节取材于 Besseling 与 Van der Giessen 书(1993)，节 7.2.3。

$$\Phi = \Phi\left(\overline{\Sigma}'_{\alpha\beta}, \theta, P, \overline{Q}_{k(\alpha)}\right) \tag{7.121}$$

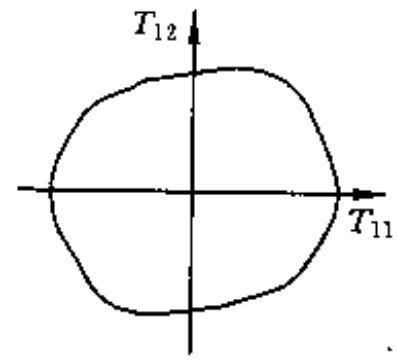


图 5-11　织构材料屈服面示意图

式中 $\overline{Q}_{k(\alpha)}$ 表示内变量 Q_k 在图 5-9(a)所示的微结构单位矢量组 $\{\overline{G}_\alpha\}$ 中的分量。虽然我们这里不准备讨论这一屈服函数的具体形式，但是将讨论它的结构，因为这可更深入地看出 NRS 概念的可能潜力。

在屈服函数(7.121)中，需要由内变量 Q_k 在变形过程中的演化来反映屈服面形状的变化。屈服面在 $\boldsymbol{\sigma}$ 空间中的取向不是由 Q_k 所直接显式控制，而是间接隐式地反映在这样一个事实，即 Φ 取决于 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ 在 $\{\overline{G}_\alpha\}$ 中的分量。假定小弹性变形可以更清楚地看到这一点。这时应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ 之间的转换关系(7.45a,b)简化为正交变换关系：

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \approx \boldsymbol{R}^{e^T} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{R}^e, \qquad \overline{\boldsymbol{\Sigma}}' \approx \boldsymbol{R}^{e^T} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{R}^e \tag{7.122}$$

(7.122)表明，在 NRS 构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中的应力张量 $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ 可由即时构形 τ 中的实际应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 经过转动 $\boldsymbol{R}^{e^T}$ 而得到。这个转动 $\boldsymbol{R}^{e^T}$ 也就是从即时构形 τ 中的各向异性轴 $\{\hat{\boldsymbol{g}}_\alpha\}$（见图 5-9(b)）到达 NRS 构形 $\overline{\mathscr{R}}$ 中固定轴 $\{\overline{G}_\alpha\}$ 的转动：$\overline{G}_\alpha \approx \boldsymbol{R}^{e^T} \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_\alpha$，$\hat{\boldsymbol{g}}_\alpha \approx \boldsymbol{R}^e \cdot \overline{G}_\alpha$，(α=I, II, III)。换句话说，$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ 在 NRS 固定参考系 $\{\overline{G}_\alpha\}$ 中的分量 $\overline{\Sigma}_{\alpha\beta}$ 同 $\boldsymbol{\sigma}$ 在实际构形 τ 参考系 $\{\hat{\boldsymbol{g}}_\alpha\}$ 中的分量相等：

$$\boldsymbol{T} \approx \overline{\Sigma}_{\alpha\beta} \hat{\boldsymbol{g}}_\alpha \hat{\boldsymbol{g}}_\beta$$

因此把屈服函数写成(7.121)的形式，也就保证了应力状态是与即时构形的各向异性方向相联系的。同时，由此显然可见，当各向异性产生变化时，在变形过程的每一时刻都必须知道微结构旋转张量 $\boldsymbol{R}^e$。因为 $\boldsymbol{R}^e$ 的演化取决于 $\boldsymbol{w}^e$，而 $\boldsymbol{w}^e$ 又由 $\boldsymbol{w}^p$ 决定，因此必须通过适当的本构方程来确定 $\boldsymbol{w}^p$。以上的讨论再一次强调指出塑性旋率 $\boldsymbol{w}^p$ 在决定微结构相对于介质的取向所起的重要作用。如上所述，在这里所研究的现象学本构框架中，为了要描述大变形情况变形所引起的各向异性，需要建立(7.121)形式的屈服函数与塑性旋率本构律，以及内变量 Q_k 的演化方程，这是一个非常重要而富有挑战性的问题。我们现在还不能够继续推进这一问题，但是在这里我们要提到更复杂的基于细观力学的本构模型，例如：晶体塑性理论。G. I. Taylor 在 30 年代所提出的晶体塑性理论是根据这样两个基本思想：(1)假设多晶体中所有晶粒的变形与总体变形相同；(2)每一单个晶粒的塑性变形取决于在晶体各滑移面上的滑移。关于这一类模型可进一步参考 Asaro(1983)与 Havner(1992)。此类模型在本质上可以并

且已经成功地用来预计晶体学织构变化与由此引起的各向异性。Van der Giessen 与 Van Houtte(1992)曾利用 Taylor 模型来定义与晶体学织构演化有关的塑性旋率，并且研究在不同的变形过程中塑性旋率的演化。为了数值计算的目的，Asaro 与 Needleman(1985)开创了弹粘塑性模型，这一模型考虑了各个晶粒的弹性各向异性并假定了一个粘塑性滑移律。这一模型解除了以往 Taylor 模型所遇到的一些数学困难。借助于现代的计算能力，这一模型能够更仔细地探索晶体学织构许多方面的问题。

习 题 5

5.1 证明 Hill 对数应变张量 $\boldsymbol{E}^{(0)}$在 Lagrange 标架中的对角线分量为

$$E^{(0)}_{(II)} = d_{(ii)} = \frac{1}{\lambda_i}\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}t} \qquad (i = I，不对\ i\ 或\ I\ 取和)$$

5.2 证明与对数应变张量 $\boldsymbol{E}^{(0)}$互为功共轭的应力张量 $\boldsymbol{T}^{(0)}$在 Lagrange 标架中的对角线分量为

$$T^{(0)}_{(II)} = \tau_{(ii)} \qquad (i = I，不对\ i\ 或\ I\ 取和)$$

式中$\boldsymbol{\tau}$ 为 Kirchhoff 应力张量，$\tau_{(ii)}$是$\boldsymbol{\tau}$ 在 Euler 标架中的对角线分量。而非对角线分量则仅相差应变分量的二次小量

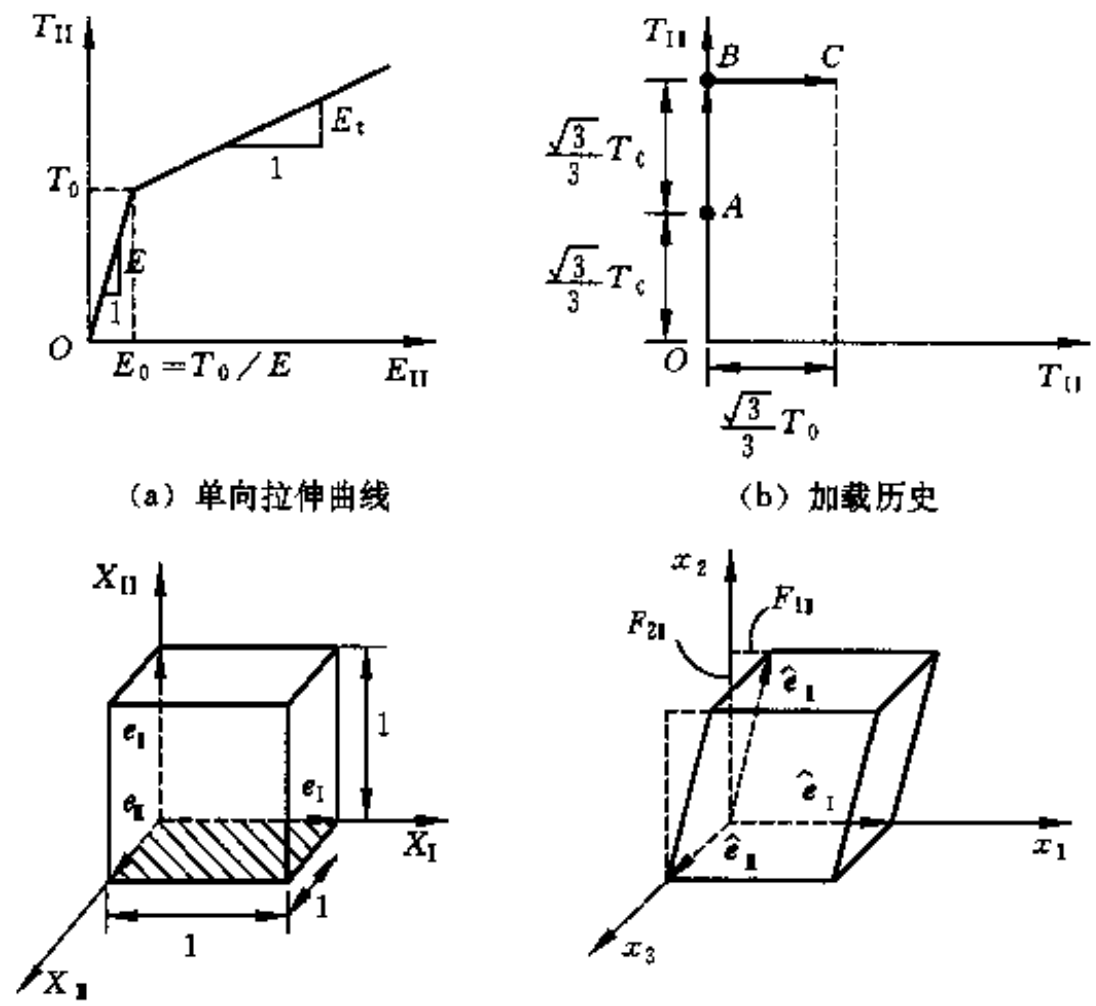
$$T^{(0)}_{(IJ)} = \tau_{(ij)}\left[1 + \frac{1}{6}\left(E^{(0)}_{(JJ)} - E^{(0)}_{(II)}\right)^2 + \cdots\right], \qquad (i = I, j = J, I \neq J)$$

因此可以认为等式

$$\boldsymbol{T}^{(0)} \approx \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

的误差是应变分量的二次小量。（必要时，可参考黄克智著，非线性连续介质力学，260 页）

5.3 设材料的单向拉伸曲线$T_{\mathrm{II}}(E_{\mathrm{II}})$为分段线性，如图 5-12(a)所示，$T_0$ 为屈服应力，E_0 为屈服应变，E 为杨氏模量，E_t 为切线模量。弹性柔度张量 $\boldsymbol{M}$ 采用第 4 章(1.34)式，ν 为泊松比。设材料为各向同性硬化，在参考构形 $\mathscr{R}$ 中提屈服条件，硬化规律如(3.63)式。材料的应力历史如图(b)所示，T_{II}，$T_{\mathrm{I\,II}}$ 以外的应力分量均为零。试用 Rice-Hill 理论(3.69)计算最终的 Green 应变分量 E_{ij}。设画阴影线的水平面 $X_{\mathrm{I}} - X_{\mathrm{II}}$ 仍保持水平，X_{I} 方向的线元保持方向不变。求出在 C 点的变形梯度，并画出在图(c)所示单位立方体在变形后各面上所受的力。



(a) 单向拉伸曲线　　(b) 加载历史

(c) 变形前的立方体与变形后的斜方体

($\hat{e}_{\mathrm{I}}$, $\hat{e}_{\mathrm{I}}$, $\hat{e}_{\mathrm{II}}$ 意义见第3章的(3.20)与图3.7(b))

图 5-12　习题 5.3 图

解答: 在 C 点的 Green 应变分量(未写出的分量为零):

$$E_{\mathrm{II}}=\frac{\sqrt{3}}{3E_t}T_0-\frac{2}{E_p}T_0\arctan\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$E_{\mathrm{II\,II}}=E_{\mathrm{III\,III}}=-\frac{\nu\sqrt{3}}{3E}T_0-\frac{T_0}{E_p}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\arctan\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$E_{\mathrm{I\,II}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3G}+\frac{\sqrt{3}}{2E_p}\right)T_0+\frac{\sqrt{3}T_0}{2E_p}\ln\frac{13}{12}$$

式中 E_p 为塑性模量，$1/E_p=1/E_t-1/E$。变形梯度(未写出的分量为零):

$$F_{\mathrm{II}}=\sqrt{1+2E_{\mathrm{II}}}$$

$$F_{1\mathrm{II}}=\frac{2E_{\mathrm{I\,II}}}{\sqrt{1+2E_{\mathrm{II}}}}$$

$$F_{2\mathrm{II}}=\sqrt{1+2E_{\mathrm{II\,II}}-\frac{4(E_{\mathrm{I\,II}})^2}{1+2E_{\mathrm{II}}}}$$

$$F_{3\mathrm{III}}=\sqrt{1+2E_{\mathrm{III\,III}}}$$

5.4 将率形式逆本构关系(3.87)从参考构形 $\mathscr{A}$ 逆变(##)前推到即时构形 τ 中，得到

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} = \mathscr{L}^{\mathrm{cp}} : \boldsymbol{d}$$

式中以 $\mathscr{L}$ 表示弹性刚度张量，且

$$\mathscr{L} = (\boldsymbol{FFFF})^{\ast\ast\ast} \boldsymbol{L}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{cp}} = \mathscr{L} - \frac{\alpha}{g}\boldsymbol{\lambda\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathscr{L} : \boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\overset{\mathrm{T}-1}{\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{F}}\right) : \boldsymbol{T}' = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{c} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{c}$ 为 Cauchy 变形张量（见第 3 章(1.27)）。加载参数 α 为

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上, 且}\boldsymbol{\mu}:\mathscr{L}:\boldsymbol{d} > 0 \\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面内或当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上, 且}\boldsymbol{\mu}:\mathscr{L}:\boldsymbol{d} \leqslant 0 \end{cases}$$

5.5 推导本构关系(3.149)之逆为（设加载系数 $\alpha = 1$）：

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \left(\mathscr{L} - \frac{1}{g}\boldsymbol{\lambda\lambda}\right) : \left[\boldsymbol{I} + \mathscr{M} : \mathscr{G}^{\tau}\right] : \boldsymbol{d}$$

式中 $\mathscr{L} = \mathscr{M}^{-1}$ 为弹性刚度张量（四阶）

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathscr{L} : \boldsymbol{\tau}'$$

$$g = \frac{4}{9}E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^2 + \boldsymbol{\tau}' : \mathscr{L} : \boldsymbol{\tau}'$$

提示：先将(3.149)写成以下形式

$$\mathscr{M} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \left(\boldsymbol{I} + \mathscr{M} : \mathscr{G}^{\tau}\right) : \boldsymbol{d} - \frac{9}{4E_{\mathrm{p}}Y^2}\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\tau}' : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$$

左乘以 $\mathscr{L}$ 后（即 $\mathscr{L}:$ ），得 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ 的表达式。再用 $\boldsymbol{\tau}'$:进行运算，可算出 $\boldsymbol{\tau}':\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$，代入 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ 的表达式。

5.6 推导本构关系(3.153)之逆为（设加载系数 $\alpha = 1$）：

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \left(\boldsymbol{L} - \frac{1}{g}\boldsymbol{\Lambda\Lambda}\right) : \left[\boldsymbol{I} - \frac{9}{4E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^2}\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right) : \boldsymbol{G}^{\Gamma}\right] : \dot{\boldsymbol{E}}$$

式中 $\boldsymbol{G}^{\Gamma}$ 见(3.145)，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}^{-1}$ 为弹性刚度张量（四阶）

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{L}:\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)$$

$$g = \frac{4}{9}E_{\mathrm{p}}\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\left[Y\left(\varepsilon_{\mathrm{RH}}^{\mathrm{p}}\right)\right]^{2} + \left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right):\boldsymbol{L}:\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)$$

提示：类似于习题 5.5，先由(3.153)迁项得到 $\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{T}}$ 的表达式，用 $\boldsymbol{L}$：进行运算，得 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 的表达式；再用 $\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right)$: 进行运算，可算出 $\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}\right):\dot{\boldsymbol{T}}$，代入 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 的表达式。

5.7 推导本构关系(3.162)之逆为：

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{E}} - \alpha\frac{9}{4\left(E_{\mathrm{p}} - \boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right)Y^{2}\left[1 + \dfrac{9}{\left(E_{\mathrm{p}} - \boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right)Y^{2}}\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{L}:\boldsymbol{\nu}\right]}\left(\boldsymbol{L}:\boldsymbol{\mu}\right)\left(\boldsymbol{L}:\boldsymbol{\nu}\right):\dot{\boldsymbol{E}}$$

式中 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}^{-1}$ 表示弹性刚度张量

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mu} + \frac{2}{3}\left(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{M}:\boldsymbol{T}^{*}$$

$\boldsymbol{T}^{*}$ 见(3.126)，α 为加载系数：

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上，且}(\boldsymbol{L}:\boldsymbol{\nu}):\dot{\boldsymbol{E}} > 0 \\ 0 & \text{当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面内，或当}\boldsymbol{T}\text{在屈服面上，且}(\boldsymbol{L}:\boldsymbol{\nu}):\dot{\boldsymbol{E}} \leqslant 0 \end{cases}$$

当弹性变形很小，$\boldsymbol{\nu} \approx \boldsymbol{\mu}$，本题结果退化为(3.171).

提示：先由(3.162)迁项得到 $\boldsymbol{M}:\boldsymbol{T}$ 的表达式，用 $\boldsymbol{L}$：进行运算，得 $\boldsymbol{T}$ 的表达式。再用 $\boldsymbol{\nu}$: 进行运算，可算出 $\boldsymbol{\nu}:\boldsymbol{T}$。

5.8 推导本构关系(3.165)之逆为：

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{Oldr}} = \mathscr{L}:\boldsymbol{d} - \alpha\frac{9}{4\left(E_{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}\right)Y^{2}\left[1 + \dfrac{9}{\left(E_{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}\right)Y^{2}}\boldsymbol{\tau}':\mathscr{L}:\boldsymbol{\pi}\right]}\left(\mathscr{L}:\boldsymbol{\pi}'\right)\left(\mathscr{L}:\boldsymbol{\pi}\right):\boldsymbol{d}$$

式中 $\mathscr{L} = \mathscr{M}^{-1}$ 为弹性刚度张量

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\tau}' + \frac{2}{3}\left(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{g}\right)\mathscr{M}:\boldsymbol{\tau}'$$

α 为加载系数：

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上，且}(\mathscr{L}:\boldsymbol{\pi}):\boldsymbol{d} > 0 \\ 0 & \text{当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面内，或当}\boldsymbol{\tau}\text{在屈服面上，且}(\mathscr{L}:\boldsymbol{\pi}):\boldsymbol{d} \leqslant 0 \end{cases}$$

当弹性变形很小，$\boldsymbol{\pi} \approx \boldsymbol{\tau}'$，本题结果退化为(3.176)。

5.9 若取即时构形为参考构形，由(4.13)证明

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} - \dot{\boldsymbol{\tau}}^* = m(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = m\mathscr{G}^{\sigma} : \boldsymbol{d}$$

式中

$$m = \frac{1}{2}\left(f^{*\,\prime\prime}(1) - f''(1)\right)$$

$$\mathscr{G}_{ijkl}^{\sigma} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk} + \sigma_{jk}\delta_{il} + \sigma_{jl}\delta_{ik}\right)$$

(1) 设在即时构形的 Cauchy 应力为三向均拉 $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}\delta_{ij}$，对于不同的应变度量，证明体积模量间的关系为

$$K - K^* = \frac{2}{3}m\bar{\sigma}$$

(2) 设在即时构形的 Cauchy 应力为 σ_{ij}，应变率 $d_{12}=d_{21}$，其余 $d_{ij}=0$。定义剪切模量为

$$G = \frac{\mathrm{d}\tau_{12}}{2d_{12}\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\tau}_{12}}{2d_{12}}$$

证明对于不同的应变度量，剪切模量间的关系为

$$G - G^* = \frac{1}{2}m(\sigma_{11} + \sigma_{12})$$

5.10 推导中间构形弹塑性理论各向同性硬化情况的本构关系(7.93)

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathscr{L} - (1-h)\mathscr{Y}\right] : \boldsymbol{d} - \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{d} - \alpha K\dot{\theta}\mathbf{1}$$

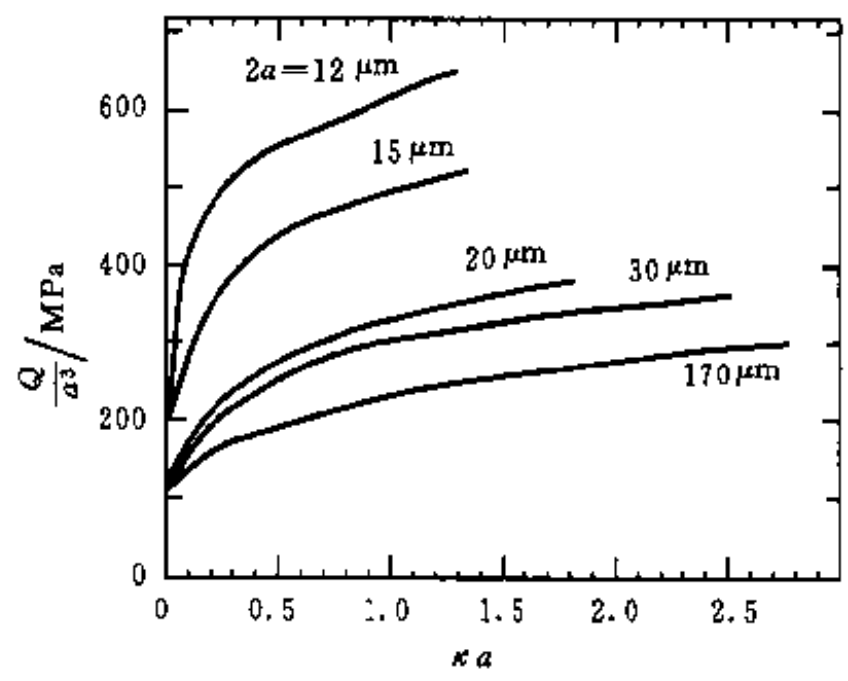
注：设 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}} = 0$。（必要时可参考 J. F. Besseling and E. Van der Giessen, Mathematical Modeling of Inelastic Deformation, 第 7 章）

第 6 章　应变梯度塑性理论

以上五章讨论的都是一阶简单材料（见第 3 章 3.5.3 (5.78)，(5.89)或(5.92)式），即一点的应力只取决于该点的应变或应变的历史。这是经典塑性理论的基本假定。但是近年来的一些试验表明，在某些情况下，一点的应力不仅与该点的应变（历史）有关，而且也与该点的应变梯度（历史）有关，也就是说，材料表现为二阶简单材料。本章介绍近年来发展的应变梯度塑性理论，而且仅限于全量型的理论与小变形情况。假设不发生卸载，全量型理论实际上就是非线性弹性理论。有些增量型理论可以在文献中部分见到。

6.1　引言

新近的试验表明，当非均匀塑性变形特征长度在微米量级时，材料具有很强的尺度效应。例如 Fleck 等（1994）在细铜丝的扭转试验中观察到，当铜丝的直径为 12μm 时，无量纲的扭转硬化增加至 170μm 直径时的 3 倍（图 6-1）；Stolken 和 Evans（1999）在薄梁弯曲试验中也观察到当梁的厚度从 100μm 减至 12.5μm 时，无量纲的弯曲硬化也显著增加；而在单轴拉伸情况，这种尺度效应并不存在。在微米量级的尺度下微观硬度试验与颗粒增强金属基复合材料中也观察到尺度效应，当压痕深度从 10μm 减至 1μm 时，金属的硬度增



丝直径 $2a$ = 12μm ~ 170μm，Q—扭矩，κ—每单位长度扭角
按经典塑性理论对于不同的直径应该是同一条材料曲线

图 6-1　细铜丝扭转曲线

加一倍（Nix 1989, De Guzman 等 1993，Stelmashenko 等 1993，Ma 和 Clarke 1995、Poole 等 1996，McElhaney 等 1998）；对于以碳化硅颗粒加强的铝-硅基复合材料，Lloyd（1994）观察到当保持颗粒体积比为 15%的条件下，将颗粒直径从 16μm 减为 7.5μm 后复合材料的强度显著增加。

由于在传统的塑性理论中本构模型不包含任何尺度，所以它不能预测尺度效应。然而，在工程实践中迫切需要处理微米量级的设计和制造问题，例如，厚度在 1μm 或者更小尺寸下的薄膜；整个系统尺寸不超过 10μm 的传感器、执行器和微电力系统(MEMS)；零部件尺寸小于 10μm 的微电子封装；颗粒或者纤维的尺寸在微米量级的先进复合材料及微加工。现在的设计方法，如有限元方法(FEM)和计算机辅助设计(CAD)，都是基于经典的塑性理论，而它们在这一微小尺度不再适用。另一方面，现在按照量子力学和原子模拟的方法在现实的时间和长度的尺度下处理微米尺度的结构依然很困难。所以，建立连续介质框架下、考虑尺寸效应的本构模型就成为联系经典塑性力学和原子模拟之间必要的桥梁。

建立细观尺寸下连续介质理论的另一个目的是在韧性材料的宏观断裂行为和原子断裂过程之间建立联系。在一系列值得注意的试验中，Elssner 等（1994）测量了单晶铌/蓝宝石界面的宏观断裂韧度和原子分离功。使用专门设计的四点弯曲试件测量宏观断裂功，以测出界面韧性。原子分离功通过界面上的微观孔隙平衡形状来确定。尽管铌是韧性材料，具有很多位错，但这两种材料的界面裂纹仍保持为原子尺度的尖裂纹，即裂尖没有钝化。原子点阵或强界面分离所需要的力约为 $0.03E$ 或者 $10\sigma_y$（E 为弹性模量，σ_y 为拉伸屈服应力）。而按照经典的塑性理论，Hutchinson（1997）指出裂纹前方最大应力水平只能达到 4 至 5 倍 σ_y。很明显这远远不足以导致 Elssner 等（1994）在试验中观察到的结果，不足以达到使原子分离。考虑应变梯度的影响有望解释这一现象。

在下面三节中主要介绍近年来发展起来的三种应变梯度塑性理论及其应用。这三种理论分别为：CS（couple stress）应变梯度塑性理论，SG（stretch and rotation gradients）应变梯度塑性理论和基于细观机制的应变梯度塑性 MSG（mechanism-based strain gradient）理论。

顺便指出，现在已有各种各样的应变梯度理论。例如 Aifantis 和他的合作者（Aifantis 1984, Zbib 与 Aifantis 1989，Muhlhaus 与 Aifantis 1991）把应变梯度表示为等效应变的第一和第二拉普拉斯算子，然而他们在理论中没有定义应变梯度的功共轭量；Acharya 和 Bassani（1995）考虑应变梯度塑性可能的构造形式，它应保持经典塑性的基本结构，并且保证满足热力学的限制，他们提出应变梯度理论可能的构造形式为流动理论，而应变梯度作为一个内变量，表示即时切向硬化模量的增加，但因为还没有一个系统的方法构造切向模量，所以这种方法尚未具体化；Dai 和 Parks（1997）在他们的率相关单晶应变梯度塑性理论中

已经采用了这种内变量理论。

6.2 CS 应变梯度塑性理论——偶应力理论[1)]

位错理论表明材料的塑性硬化来源于几何必需位错（geometrically necessary dislocations）和统计储存位错（statistically stored dislocations）（Nye 1953, Cottrell 1964, Ashby 1970）。据此，Fleck 和 Hutchinson（1993）及 Fleck 等（1994）发展了一种应变梯度塑性理论，它是经典的 J_2 形变或 J_2 流动理论的推广。在该理论中为了考虑旋转梯度的影响，引入了**偶应力**（Toupin 1962, Koiter 1964, Mindlin 1964, 1965）。

Fleck 和 Hutchinson（1997）应用这种理论成功地预测了前面提到的细铜丝扭转（Fleck 等 1994）、薄梁弯曲（Stolken 和 Evans 1998）和颗粒增强金属基复合材料（Lloyd 1998）的尺寸效应。在这个本构关系中，为了平衡应变和应变梯度的量纲引入了材料常数 l（长度量纲），它被认为是材料的**内禀长度**，依赖于材料的微结构（Fleck 和 Hutchinson 1993, 1997, Fleck 等 1994）。Fleck 等（1994）对于铜，估计 $l = 4\mu m$；而 Stolken 和 Evans （1998）对于镍，估计 $l = 6\mu m$。当非均匀变形场的特征尺寸 L 比材料内禀尺寸 l 大得多时，应变梯度效应小到可以略去，因为应变梯度项比应变项 ε 的贡献小得多，即 $l\,\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}x \sim (l/L)\varepsilon << \varepsilon$，故此时该理论退化为经典的 J_2 塑性理论；但是当变形场特征尺寸 L 与材料内禀尺寸 l 属于一个数量级时（例如在上面提到的一些试验中），应变梯度效应就很重要。

6.2.1 偶应力与转角梯度

1. 偶应力

在偶应力理论中，除了 Cauchy 应力以外，还存在偶应力，而且 Cauchy 应力不是对称张量。以 $\boldsymbol{t}$ 表示 Cauchy 应力张量，$\boldsymbol{m}$ 表示偶应力张量，则作用在单位法向矢量为 $\boldsymbol{n}$ 的平面上每单位面积的力（曳力）与力偶矩（曳力矩）各为[2)]

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} \tag{2.1}$$

设无体积力及体力偶作用，物体力与力矩的平衡方程为

$$\boldsymbol{t}\cdot\nabla = 0, \qquad t_{ij,j} = 0 \tag{2.2}$$

与

$$\boldsymbol{m}\cdot\nabla = \boldsymbol{e}:\boldsymbol{t}, \qquad m_{ip,p} = e_{irs}t_{rs} \tag{2.3}$$

---

1) 参见 Fleck 和 Hutchinson 1993，Fleck 等 1994。

2) 此处 Cauchy 应力张量与偶应力张量的定义恰为 Fleck 与 Hutchinson（1993）所定义的相应的张量的转置，此处的定义与黄克智（1989）《非线性连续介质力学》中的定义相同。

式中 $\boldsymbol{e}$ 为置换张量（三阶，见本书附录(2.18)式）。在经典理论中，无偶应力存在，$\boldsymbol{m}\equiv\boldsymbol{0}$，由(2.3) Cauchy 应力 $\boldsymbol{t}$ 为对称张量。反之，只要有偶应力存在，Cauchy 应力 $\boldsymbol{t}$ 一般来说为非对称张量。$\boldsymbol{e}\cdot$(2.3)式，并利用张量分析中的 $\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$ 等式（见黄克智等，1986，张量分析，第二章，58 页(2.2.8)式）：

$$e_{ijk}e_{irs}=\delta_{jr}\delta_{ks}-\delta_{js}\delta_{kr} \tag{2.4}$$

可得

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{m}\cdot\nabla=\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}},\qquad e_{ijk}m_{ip,p}=t_{jk}-t_{kj} \tag{2.5}$$

将 Cauchy 应力 $\boldsymbol{t}$ 进行加法分解，分成对称部分 $\boldsymbol{\sigma}$ 与反对称部分 $\boldsymbol{\tau}$：

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau},\qquad t_{ij}=\sigma_{ij}+\tau_{ij}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\right),\qquad \sigma_{ij}=\frac{1}{2}\left(t_{ij}+t_{ji}\right) \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\right),\qquad \tau_{ij}=\frac{1}{2}\left(t_{ij}-t_{ji}\right)$$

则(2.5)式成为

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{m}\cdot\nabla=\boldsymbol{\tau},\qquad \frac{1}{2}e_{ijk}m_{ip,p}=\tau_{jk} \tag{2.5$'$}$$

(2.5)′式说明反对称应力 $\boldsymbol{\tau}$ 是与偶应力 $\boldsymbol{m}$ 的散度相关的：

$$\frac{1}{2}m_{1p,p}=\tau_{23}=-\tau_{32}$$

$$\frac{1}{2}m_{2p,p}=\tau_{31}=-\tau_{13} \tag{2.5$''$}$$

$$\frac{1}{2}m_{3p,p}=\tau_{12}=-\tau_{21}$$

将 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\tau}$ 与(2.5)′ $\boldsymbol{\tau}$ 代入力平衡方程(2.2)，可得

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla=-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{e}\cdot\left(\boldsymbol{m}\cdot\nabla\right)\right]\cdot\nabla \tag{2.7}$$

将 $\boldsymbol{m}$ 写成偏斜部分 $\boldsymbol{m}'$ 与球形部分 $(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{m})\boldsymbol{1}/3$ 之和，可证(2.7)式右端与该球形部分无关，即

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla=-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{e}\cdot\left(\boldsymbol{m}'\cdot\nabla\right)\right]\cdot\nabla \tag{2.7$'$}$$

如 Fleck 与 Hutchinson（1993）所指出，Koiter（1964）曾证明 $\boldsymbol{m}$ 的球形部分 $(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{m})\boldsymbol{1}/3$ 在所有的场方程中不出现，而且也不出现在本构方程中（见后(2.23)），因此可以假设 $\boldsymbol{m}$ 的

球形部分为零，$\boldsymbol{m}$ 为一无迹张量：

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}', \qquad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{m} = 0 \tag{2.8}$$

$\boldsymbol{m}$ 一般为非对称张量。

2. 转角与转角梯度

以 $\boldsymbol{u}$ 表示位移。两个相邻点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的位移差为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.9}$$

把位移梯度 $\boldsymbol{u}\nabla$ 按加法分解为对称张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与反对称张量 $\boldsymbol{\omega}$：

$$\boldsymbol{u}\nabla = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}, \quad u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla + \nabla\boldsymbol{u}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla - \nabla\boldsymbol{u}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变张量，$\boldsymbol{\omega}$ 为旋度张量。将(2.10)代入(2.9),

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.11}$$

张量分析中证明反对称张量 $\boldsymbol{\omega}$ 与矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的点积可以表示成反偶矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 与矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的叉积（矢积）[1]：

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.12}$$

式中 $\boldsymbol{\theta}$ 表示转动矢量，它与旋度张量 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系为

$$\boldsymbol{\theta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}:\boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\theta} = -\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{e} \tag{2.13}$$

$$\theta_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}\omega_{jk}, \qquad \omega_{ij} = -e_{ijk}\theta_k$$

将$(2.10)_5$的 $\boldsymbol{\omega}$ 代入$(2.13)_1$，得

$$\boldsymbol{\theta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}:\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla - \nabla\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}:(\boldsymbol{u}\nabla) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}:(\nabla\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\times\nabla = \frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{2.14}$$

$$\theta_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}u_{j,k} = \frac{1}{2}e_{ijk}\partial_j u_k$$

---

1) 见黄克智等（1986），《张量分析》第三章，97 页(3.4.21)式，或第九章，281 页(9.3.18)式。

由(2.14)可看出 $\boldsymbol{\theta}$ 的几何意义就是转动矢量。(2.11)可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.11$'$}$$

右端第一项表示在所研究点 $\boldsymbol{x}$ 附近由于变形所造成的位移、第二项表示由于转动所造成的位移。

Fleck 与 Hutchinson（1993）定义二阶张量 $\boldsymbol{\chi}$：

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\theta}\nabla, \quad \chi_{ij} = \theta_{i,j} \tag{2.15}$$

$\boldsymbol{\chi}$ 为转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度（简称为转动或旋转梯度）。如果物体作一个刚体转动，则各点的 $\boldsymbol{\theta}$ 相同，$\boldsymbol{\theta}$ 的梯度 $\boldsymbol{\chi}$ 为零。所以 $\boldsymbol{\chi}$ 实际上是描述物体各点变形特征的一个量。应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$（见$(2.10)_3$）可通过位移对坐标的一阶导数表示，而转动梯度$\boldsymbol{\theta}\nabla$则可通过位移对坐标的二阶导数表示。将(2.14)代入(2.15)可得

$$\boldsymbol{\chi} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}:(\boldsymbol{u}\nabla)\nabla = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\times\nabla)\nabla \tag{2.16}$$

$$\chi_{ij} = -\frac{1}{2}e_{ist}u_{s,tj} = \frac{1}{2}e_{its}u_{s,tj}$$

利用等式$u_{s,tj} = u_{s,jt}$，易证χ_{ij}可通过应变分量ε_{ij}对坐标的导数（应变梯度）表示：

$$\chi_{ij} = -e_{ist}\varepsilon_{js,t} = e_{its}\varepsilon_{js,t} \tag{2.17}$$

(2.17)式称为$\boldsymbol{\varepsilon}\sim\boldsymbol{\chi}$协调方程。$\boldsymbol{\chi}$是一个非对称张量，可证明其迹为零，因为由(2.16)

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\chi} = \chi_{ii} = -\frac{1}{2}e_{ist}u_{s,ti} = 0 \tag{2.18}$$

其实，由(2.15)有 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\theta}\cdot\nabla$，而由(2.14)$\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{u}$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的旋度矢量，显然其散度 $\boldsymbol{\theta}\cdot\nabla = \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot\nabla$ 为零，导致(2.18)。因此，用 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\boldsymbol{\chi}$ 来描述变形状态，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 有 6 个独立分量，$\boldsymbol{\chi}$有 8 个独立的分量。

6.2.2 虚功原理

设$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}$（见$(2.6)_1$）与 $\boldsymbol{m}$ 为在物体中一组平衡的内力（满足(2.2)与(2.3)），$\boldsymbol{\varepsilon}$、$\boldsymbol{\chi}$ 为一组在物体中由位移 $\boldsymbol{u}$ 所产生的应变（满足$(2.10)_3$与(2.16)），则必有[1)]

$$\int_a (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}a = \int_v (\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{m}:\boldsymbol{\chi})\mathrm{d}v \tag{2.19}$$

1) 注意：$(\boldsymbol{t},\boldsymbol{m})$与$(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\chi})$之间无需存在任何关系。

式中 v 为物体所在的域，a 为表面，$\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 为作用于表面的曳力与曳力偶（见(2.1)）：

证　自(2.19)式左端出发

$$
\begin{aligned}
\int_a &= \int_a (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}a = \int_a (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}a \\
&= \int_v [(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{m})\cdot\nabla]\mathrm{d}v \\
&= \int_v [(\boldsymbol{u}\nabla):\boldsymbol{t}+\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{t}\cdot\nabla)+(\boldsymbol{\theta}\nabla):\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\theta}\cdot(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)]\mathrm{d}v
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

式中由(2.2)，积分符号内第二项为零；利用(2.14)与(2.5)′及 $\boldsymbol{e}$ 的指标轮换特性（$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}$）可将第4项化为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}\cdot(\boldsymbol{m}\cdot\nabla) &= -\frac{1}{2}[\boldsymbol{e}:(\boldsymbol{u}\nabla)]\cdot(\boldsymbol{m}\cdot\nabla) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla):\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{m}\cdot\nabla) \\
&= -(\boldsymbol{u}\nabla):\boldsymbol{\tau}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

将(2.21)代入(2.20)，可得

$$
\int_a = \int_v [(\boldsymbol{u}\nabla):\boldsymbol{\sigma}+(\boldsymbol{\theta}\nabla):\boldsymbol{m}]\mathrm{d}v
$$

注意到$\boldsymbol{\sigma}$为对称，及(2.15)，立即有

$$
\int_a = \int_v [\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\chi}:\boldsymbol{m}]\mathrm{d}v
$$

此即(2.19)式。证毕。

顺便指出，因为 $\boldsymbol{\chi}$ 为无迹张量（$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\chi}=0$，见(2.18)），故对(2.19)式右端的 $\boldsymbol{m}:\boldsymbol{\chi}$，$\boldsymbol{m}$ 的球形部分不起作用，即 $\boldsymbol{m}:\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{m}':\boldsymbol{\chi}$。正因为如此，(2.8)已设 $\boldsymbol{m}$ 为无迹张量。

(2.19)式表示外力功与内力功数值相等。因此可看出：对称 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 与应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 互为功共轭，偶应力 $\boldsymbol{m}$ 与转动梯度 $\boldsymbol{\chi}$ 互为功共轭。

6.2.3　CS 应变梯度塑性理论本构关系

如本章最早所指出，我们是在建立应变梯度非线性弹性理论。

令物体每单位体积的变形能为 w[1]，设 w 为应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与转动梯度 $\boldsymbol{\chi}$ 的函数：

$$
w = w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\chi}) \tag{2.22}
$$

则非线性弹性的本构关系为

1) 注意，本章中变形能与余能以每单位体积折算，而不以每单位质量折算。

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad \boldsymbol{m}=\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\chi}} \tag{2.23}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad m_{ij}=\frac{\partial w}{\partial \chi_{ij}}$$

正如第 1 章 1.7.3 中与第 5 章(7.53)式所曾讨论过，因为转动梯度 $\boldsymbol{\chi}$ 是无迹张量（见(2.18)），它的 9 个分量不完全独立，所以 $\boldsymbol{m}=\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\chi}}$ 必须也规定为无迹张量才有意义，这正是(2.8)式所规定的。定义每单位体积的余能为 ϕ

$$\phi=\phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{m})=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{m}:\boldsymbol{\chi}-w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\chi}) \tag{2.24}$$

(2.24)就是(2.23)的 Legendre 变换，把 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 当作自变量，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\boldsymbol{\chi}$ 为由(2.23)所确定的 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 的函数。由(2.23)与(2.24)可导出：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \qquad \boldsymbol{\chi}=\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{m}} \tag{2.25}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad \chi_{ij}=\frac{\partial \phi}{\partial m_{ij}}$$

$(2.25)_2$ 中，因为 $\boldsymbol{m}$ 为无迹张量（见(2.8)），故 $\boldsymbol{\chi}=\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{m}}$ 也规定为无迹张量(见(2.18))。

假定无卸载发生，(2.23)或(2.25)也就是应变梯度塑性（全量理论）的本构关系。只要有了 $w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\chi})$ 或 $\phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{m})$ 的具体表达式，本构关系就可确定。将在 6.2.5 中具体讨论。

6.2.4 最小位能原理与最小余能原理

Fleck 与 Hutchinson（1993）证明了以下两个原理。

设物体在 v 域内边界分 a_u 与 a_T 两部分，在 a_u 上给的是位移与转角边界条件：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^0, \quad \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{在 } a_u \text{ 上} \\ &u_i=u_i^0, \quad \theta_i=\theta_i^0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

而在 a_T 上给出的是力与力偶边界条件：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}^0, \quad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{q}^0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{在 } a_T \text{ 上} \\ &T_i=t_{ij}n_j=T_i^0, \quad q_i=m_{ij}n_j=q_i^0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

式中在右上角带“0”的都是给定的已知量，n 为边界外法向单位矢量。

欲求的解是一组（$\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{m}$），满足平衡方程(2.2)与(2.3)，几何关系$(2.10)_3$（$\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\boldsymbol{u}$

之间），(2.14)（$\boldsymbol{\theta}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 之间）与(2.15)（$\boldsymbol{\chi}$ 与 $\boldsymbol{\theta}$ 之间）与边界条件(2.26)及(2.27)，称为真解。

设有一位移场 $\boldsymbol{u}$，由 $\boldsymbol{u}$ 按(2.14)计算出 $\boldsymbol{\theta}$，且 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{\theta}$ 满足 a_u 上的边界条件(2.26)，则称 $\boldsymbol{u}$ 为几何可能位移。由 $\boldsymbol{\theta}$ 还可按(2.15)计算 $\boldsymbol{\chi}$，最后可计算位能：

$$P(\boldsymbol{u})=\int_v w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\chi})\mathrm{d}v-\int_{a_T}\left(\boldsymbol{T}^0\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q}^0\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\mathrm{d}a \tag{2.28}$$

$P(\boldsymbol{u})$可以看作是几何可能位移 $\boldsymbol{u}$ 的泛函。

最小位能原理 若 w 为 $\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\chi}$ 的严格凸函数，则在所有的几何可能位移 $\boldsymbol{u}$ 中，真解的位能 $P(\boldsymbol{u})$值为绝对最小。

设有一应力场（$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{m}$），满足平衡方程(2.2)与(2.3)，且满足 a_T 上的边界条件(2.27)，则称（$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{m}$）为静力可能应力场。余能的定义是

$$C(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{m})=\int_v \phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{m})\ \mathrm{d}v-\int_{a_u}\left(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}^0+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\right)\mathrm{d}a \tag{2.29}$$

式中在 a_u 上的 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 是由（$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{m}$）按(2.1)计算出来的。$C(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{m})$可以看作是静力可能应力（$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{m}$）的泛函。

最小余能原理 若ϕ为$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{m}$ 的严格凸函数，则在所有的静力可能应力场（$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{m}$）中，真解的余能 $C(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{m})$为绝对最小。

最小位能原理或最小余能原理保证了真解的唯一性。线性情况的详细讨论见 Koiter（1964）。

6.2.5 等效应力与等效应变

在经典塑性全量理论中，Mises 等效应变 $\varepsilon_{\mathrm{eq}}$ 定义为以下的不变量：

$$\varepsilon_{\mathrm{eq}}=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}'\right)^{1/2}=\left(\frac{2}{3}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}\right)^{1/2} \tag{2.30}$$

Fleck 等（1993）用 $\varepsilon_{\mathrm{eq}}$ 代表来自统计储存位错对应变能密度 w 的贡献。Fleck 与 Hutchinson（1994）建议用类似于(2.30)的不变量表达式 χ_{eq} 来表示来自几何必需位错对应变能密度 w 的贡献。但是在 $\varepsilon_{\mathrm{eq}}$ 的定义式(2.30)中出现的是应变张量的偏量 $\boldsymbol{\varepsilon}'$，因此已经刨去了体积应变 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}$。怎样从转动梯度 $\boldsymbol{\chi}$ 中刨去体积应变的贡献，这还是一个有待于研究的问题（见节 6.3，SG 应变梯度塑性理论）。现在暂时回避这一问题，Fleck 与 Hutchinson（1993）假设材料不可压缩[1]。因此，仿照(2.30)，定义

$$\chi_{\mathrm{eq}}=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\chi}:\boldsymbol{\chi}\right)^{1/2}=\left(\frac{2}{3}\chi_{ij}\chi_{ij}\right)^{1/2} \tag{2.31}$$

1) 不仅塑性变形无体积变化，而且弹性变形也无体积变化。

因为 $\boldsymbol{\chi}$ 是非对称张量，还有

$$\boldsymbol{\chi}:\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\chi}\cdot\cdot\boldsymbol{\chi}=\chi_{ij}\chi_{ji} \tag{2.32}$$

也是不变量。但是 Fleck 与 Hutchinson（1993）为简单起见，只考虑(2.31)，而不考虑(2.32)。当然，要考虑也是可以的，但数学上要更复杂（见节 6.3，SG 应变梯度塑性理论）。为了数学上的方便，由(2.30)与(2.31)组合成一个总的参量$\mathscr{E}$，定义如下：

$$\mathscr{E}^2=\varepsilon_{\mathrm{eq}}^2+l^2\chi_{\mathrm{eq}}^2 \tag{2.33}$$

其中，l 为一量纲为长度的材料参数，是为了(2.33)式中的量纲平衡所需要的。$\mathscr{E}$ 称为总等效应变（或简称等效应变）。

假设材料每单位体积的应变能 w 为总等效应变$\mathscr{E}$ 的函数，$w=w(\mathscr{E})$。定义总等效应力Σ为

$$\Sigma=\frac{\mathrm{d}w(\mathscr{E})}{\mathrm{d}\mathscr{E}} \tag{2.34}$$

将 $w(\mathscr{E})$代入(2.23)中的 w，可求出

$$\boldsymbol{\sigma}'=\frac{2}{3}\frac{\Sigma}{\mathscr{E}}\boldsymbol{\varepsilon}\,,\quad \boldsymbol{m}=\frac{2}{3}l^2\frac{\Sigma}{\mathscr{E}}\boldsymbol{\chi} \tag{2.35}$$

$$\sigma_{ij}'=\frac{2}{3}\frac{\Sigma}{\mathscr{E}}\varepsilon_{ij}\,,\quad m_{ij}=\frac{2}{3}l^2\frac{\Sigma}{\mathscr{E}}\chi_{ij}$$

注意，这里已设材料不可压缩，即$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}'$。由(2.23)，$\partial w/\partial\boldsymbol{\varepsilon}$所计算的应力只能是偏应力$\boldsymbol{\sigma}'$。对于不可压缩材料，静水应力 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}/3$ 不能根据本构关系确定。

在经典塑性理论中定义了 Mises 等效应力（见第 1 章 1.2.1）：

$$\sigma_{\mathrm{eq}}=\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'\right)^{1/2} \tag{2.36}$$

仿照(2.36)，可定义等效偶应力：

$$m_{\mathrm{eq}}=\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{m}:\boldsymbol{m}\right)^{1/2} \tag{2.37}$$

将(2.35)代入(2.36)与(2.37)，可分别得到

$$\sigma_{\mathrm{eq}}=\frac{\Sigma}{\mathscr{E}}\varepsilon_{\mathrm{eq}}\,,\qquad m_{\mathrm{eq}}=l^2\frac{\Sigma}{\mathscr{E}}\chi_{\mathrm{eq}} \tag{2.38}$$

由(2.33)与(2.38)可得

$$\Sigma^2 = \sigma_{eq}^2 + l^2 m_{eq}^2 \tag{2.39}$$

所以 Σ 是等效应力 σ_{eq} 与等效偶应力 m_{eq} 的组合，可称为总等效应力（或简称等效应力）。

假设总等效应变 $\mathscr{E}$ 与总等效应力 Σ 之间为幂函数关系：

$$\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_0} = \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_0}\right)^n \tag{2.40}$$

式中 $\mathscr{E}_0$，Σ_0 为材料常数。这时，可定出

$$\begin{aligned} w &= w(\mathscr{E}) = \frac{n}{n+1}\Sigma_0\mathscr{E}_0\left(\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_0}\right)^{\frac{n+1}{n}} \\ \phi &= \phi(\Sigma) = \frac{1}{n+1}\Sigma_0\mathscr{E}_0\left(\frac{\Sigma}{\Sigma_0}\right)^{n+1} \end{aligned} \tag{2.41}$$

CS 应变梯度理论已经获得不少应用。

Fleck 和 Hutchinson（1993）应用应变梯度理论计算了由于稀疏的刚体颗粒夹杂引起的宏观强化，由于稀疏孔洞引起的宏观软化。这种理论也被用来解决与断裂相关的问题，关于应变梯度效应在断裂力学上的应用可以见 Huang 等（1997a）的综述性文章。Xia 和 Hutchinsion（1996）及 Huang 等（1995，1997b）获得了考虑应变梯度效应时弹性-幂硬化材料的裂尖渐近解。

由于在应变梯度塑性理论中获得解析解很困难，所以有限元方法就成为重要手段。有限元方法的主要困难在于，计算结果与单元选取的关系很大。于是提出了一个迫切需要解决的问题，即判断某种有限单元是否合适。这需要用解析解来进行比较，而解析解仅仅在应变梯度弹性情况才有可能。已经有人得到基于偶应力理论弹性材料的应变梯度效应，Sternberg 和 Muki（1967）研究了应变梯度弹性材料无限大介质中有限长裂纹的 I 型应力场；Atkinson 和 Leppington（1977）采用 Wiener-Hopf 方法研究了在半无限长裂纹上作用有随距离指数衰减的法向表面力时的全场解；张林等（1998）得到了无限大弹性介质中 III 型裂纹远处作用 K_{III} 场下的全场解；Huang 等（1998，1999）得到了无限大弹性介质中 I 型和 II 型裂纹远处受 K 场作用的弹性全场解。值得注意的是，弹性解除用于检查有限元计算结果的可信性外，本身还具有很重要的意义：Chen 等（1998）证明蜂窝状结构的连续介质描述等同于具有应变梯度效应的弹性材料，其内禀材料长度 l 就等同于蜂窝胞元的尺寸。同时，他们由胞元壁的简单破坏准则，证明蜂窝状弹性材料的断裂韧度正比于 $\sigma_c h/\sqrt{L}$，这里 σ_c 是胞元壁的抗拉强度，h 和 L 分别为胞元的壁厚和尺寸。Fleck 和 Shu（1995）得到纤维增强复合材料同样具有应变梯度效应，材料内禀长度等同于纤维厚度。Xia 和 Hutchinson（1996）、Huang 等（1997a，1999）还分别进行了全塑性和小范围屈服条件的有限元分析。

应变梯度塑性的偶应力理论在一定程度上成功地估计了上面提到的细铜丝扭转（Fleck

等 1993）、薄梁弯曲（Stolken 和 Evans 1998）和裂尖场应力分析中所出现的尺度效应。然而，Shu 和 Fleck（1998）将这种理论应用到压痕问题上，其结果与微压痕或者纳米压痕试验（Nix 1989, De Guzman 等 1993，Stelmashenko 等 1993，Ma 和 Clarke 1995，Poole 等 1996，McElhaney 等 1998）所观测到的提高 200%甚至 300%，结果符合得不好。按照 Xia 和 Hutchsion（1996）及 Huang 等（1995，1997a，1997b）的解析和数值结果，在裂纹面上距裂尖 r 处，塑性硬化指数 $n=5$ 时，II 型问题的最大剪应力是经典塑性解（经典塑性解就是 II 型的 HRR 解）的 2.5 倍。然而，在 I 型问题中，没有观察到这种结果。原因是在应变梯度偶应力理论中，位移的二阶梯度只涉及旋转梯度，而 I 型问题的裂尖场是无旋的，旋转梯度变为低阶项，因此对裂纹面上的力没有贡献。由于这个原因，Fleck 和 Hutchinson（1997）提出了另一套理论——应变梯度塑性 SG 理论，在这个理论中除了考虑旋转梯度外，还考虑拉伸梯度。在下一节将讨论这种理论。

在 Fleck 和 Hutchinson（1993）文中也提出了一个 CS 应变梯度塑性的增量型理论。

6.3 应变梯度塑性 SG 理论——伸长和旋转梯度理论 [1)]

6.3.1 应变梯度张量 η

除了应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 以外，Fleck 和 Hutchinson（1997）用位移 $\boldsymbol{u}$ 的二阶梯度 $\boldsymbol{\eta}$（三阶张量）来描述变形状态，其定义为

$$\boldsymbol{\eta}=\nabla\nabla\boldsymbol{u}\,,\qquad \eta_{ijk}=\partial_i\partial_j u_k=u_{k,ij} \tag{3.1}$$

$\boldsymbol{\eta}$ 可称为应变梯度张量。显然，$\boldsymbol{\eta}$ 对于其第一与第二指标对称，即 $\eta_{ijk}=\eta_{jik}$。由(2.16)式，可知 $\boldsymbol{\eta}$ 与转动梯度 $\boldsymbol{\chi}$ 存在着关系：

$$\chi_{ij}=-\frac{1}{2}e_{ist}\eta_{jts}=\frac{1}{2}e_{its}\eta_{jts} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\chi}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}:\boldsymbol{\eta}\ \text{(此处:为后二指标缩并)}^{2)}$$

由(3.2)易证关系式：

$$\eta_{ijk}-\eta_{ikj}=2e_{jkp}\chi_{pi} \tag{3.3}$$

Toupin（1962）和 Mindlin（1965）曾经讨论过线弹性固体的情况。对于塑性理论，假定塑性变形无体积变化，因此作为塑性变形的度量，在 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\boldsymbol{\eta}$ 中应该刨去体积变形的贡献。应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 中除去代表体积变化的球形部分（或称静水部分）$(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})1/3$ 以后，得到应

1) 参见 Fleck 和 Hutchinson 1997

2) 一般情况下，:定义为最邻近的前面两个与后面两个指标的缩并(按前后次序)。但(3.2)式中 $\boldsymbol{e}:\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{e}$ 的最后两个指标与 $\boldsymbol{\eta}$ 的最后两个指标缩并。

变偏斜张量（或称应变偏量）$\boldsymbol{\varepsilon}'$。但是，如何把 $\boldsymbol{\eta}$ 分为静水部分和偏斜部分呢？若材料不可压缩，显然有[1]：

$$\eta_{ikk} = \eta_{kik} = 0 \tag{3.4}$$

(3.4)称为“不可压缩”条件。因此我们希望把 $\boldsymbol{\eta}$ 分成静水部分 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}$ 与偏量部分 $\boldsymbol{\eta}'$：

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{\eta}', \quad \eta_{ijk} = \eta^{\mathrm{H}}{}_{ijk} + \eta'_{ijk} \tag{3.5}$$

并要求（1）$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}$ 与 $\boldsymbol{\eta}'$ 均对其第一和第二指标为对称，即 $\eta^{\mathrm{H}}{}_{ijk} = \eta^{\mathrm{H}}{}_{jik}$，$\eta'_{ijk} = \eta'_{jik}$。（2）$\boldsymbol{\eta}'$ 满足“不可压缩”条件 η'_{ikk}，故 $\eta^{\mathrm{H}}_{ikk} = \eta_{ikk}$。（3）$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}$ 与 $\boldsymbol{\eta}'$ 正交，即 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}} \vdots \boldsymbol{\eta}' = \eta^{\mathrm{H}}_{ijk}\eta'_{ijk} = 0$。为了满足（1）和（2）式，设

$$\eta^{\mathrm{H}}_{ijk} = a\delta_{ij}\eta_{kpp} + \frac{1}{4}(1-a)\left(\delta_{ik}\eta_{jpp} + \delta_{jk}\eta_{ipp}\right) \tag{3.6}$$

式中 a 为待选的参数。为了满足（3），须选 $a = 0$。故最后得

$$\eta^{\mathrm{H}}_{ijk} = \frac{1}{4}\left(\delta_{ik}\eta_{jpp} + \delta_{jk}\eta_{ipp}\right) \tag{3.7}$$

类似于 CS 理论中的(2.33)式，把 Mises 等效应变(2.30)与 $\boldsymbol{\eta}'$ 的所有可能的不变量组合为总等效应变 $\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}$，如下：

$$\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}{}^2 = \tfrac{2}{3}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij} + c_1\eta'_{iik}\eta'_{jjk} + c_2\eta'_{ijk}\eta'_{ijk} + c_3\eta'_{ijk}\eta'_{kji} \tag{3.8}$$

(3.2)式给出了 $\boldsymbol{\chi}$ 与 $\boldsymbol{\eta}$ 的关系。由(3.5)式所定义的 $\boldsymbol{\eta}'$，也可按(3.2)式定义相应的 $\boldsymbol{\chi}'$，即

$$\boldsymbol{\chi}' = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}:\boldsymbol{\eta}' \text{（此处:为后二指标缩并）}, \qquad \chi'_{ij} = \frac{1}{2}e_{its}\eta'_{jts} \tag{3.9}$$

注意原来(3.1)式定义 $\boldsymbol{\eta}$ 为位移 $\boldsymbol{u}$ 的二重梯度，现在由(3.5)式所定义的 $\boldsymbol{\eta}'$ 再也不是某一矢量的二重梯度了。同样，原来(2.15)式定义的 $\boldsymbol{\chi}$ 为转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度，现在由(3.9)式所定义的 $\boldsymbol{\chi}'$ 也不再是某一矢量的梯度了。类似于由(3.2)式导出(3.3)，同样也可以由(3.9)导出

$$\eta'_{ijk} - \eta'_{ikj} = 2e_{jkp}\chi'_{pi} \tag{3.10}$$

6.3.2 应变梯度偏量 $\boldsymbol{\eta}'$ 的分解与总等效应变 $\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}$

Smyshlyaev 和 Fleck（1996）把 $\boldsymbol{\eta}'$ 分解为三个互相正交的部分：

$$\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta}'^{(1)} + \boldsymbol{\eta}'^{(2)} + \boldsymbol{\eta}'^{(3)} \tag{3.11}$$

---

1) 但应注意 $\eta_{kki} \neq 0$。

且任意两个 $\boldsymbol{\eta}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ 的不同分解部分之间满足正交条件：

$$\boldsymbol{\eta}'^{(i)}:\tilde{\boldsymbol{\eta}}'^{(j)}=0, \qquad 当 i\neq j \tag{3.12}$$

分解过程如下。

首先由 $\boldsymbol{\eta}'$ 产生一个“完全对称”的 $\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{S}}$，它是 $\boldsymbol{\eta}'$ 的分量经过指标轮换平均的结果，即

$$\eta'^{\mathrm{S}}_{ijk}=\frac{1}{3}\left(\eta'_{ijk}+\eta'_{jki}+\eta'_{kij}\right) \tag{3.13}$$

可以证明 $\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{S}}$ 不但对第一与第二指标对称，即 $\eta'^{\mathrm{S}}_{ijk}=\eta'^{\mathrm{S}}_{jik}$，而且还具有轮换对称的性质，即 $\eta'^{\mathrm{S}}_{ijk}=\eta'^{\mathrm{S}}_{jki}=\eta'^{\mathrm{S}}_{kij}$。因此 η'^{S}_{ijk} 的值只取决于（i, j, k）的组合，而与 i, j, k 的次序无关。按下式定义 $\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{A}}$

$$\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{A}}=\boldsymbol{\eta}'-\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{S}}, \qquad \eta'^{\mathrm{A}}_{ijk}=\eta'_{ijk}-\eta'^{\mathrm{S}}_{ijk} \tag{3.14}$$

由(3.13)与(3.14)，易证 $\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{A}}$ 具有性质：

$$\eta'^{\mathrm{A}}_{ijk}+\eta'^{\mathrm{A}}_{jki}+\eta'^{\mathrm{A}}_{kij}=0 \tag{3.15}$$

且对任意的 $\boldsymbol{\eta}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$，$\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{S}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}'^{\mathrm{A}}$ 互相正交，即

$$\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{S}}:\tilde{\boldsymbol{\eta}}'^{\mathrm{A}}=\eta'^{\mathrm{S}}_{ijk}\tilde{\eta}'^{\mathrm{A}}_{ijk}=0 \tag{3.16}$$

将(3.13)待入(3.14)，并利用(3.10)，可得 $\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{A}}$ 分量通过 $\boldsymbol{\chi}'$ 的分量表达式：

$$\eta'^{\mathrm{A}}_{ijk}=\frac{2}{3}e_{ikp}\chi'_{pj}+\frac{2}{3}e_{jkp}\chi'_{pi} \tag{3.17}$$

现在把二阶张量 $\boldsymbol{\chi}'$ 分为对称的 $\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{s}}$ 与反对称的 $\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{a}}$ 两部分（上标 s 与 a 用小写字母，以区别于（3.14）式的大写上标字母）：

$$\boldsymbol{\chi}'=\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{s}}+\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{a}} \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{s}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\chi}'+\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{T}}\right), \quad \chi'^{\mathrm{s}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\chi'_{ij}+\chi'_{ji}\right)$$

$$\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{a}}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\chi}'-\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{T}}\right), \quad \chi'^{\mathrm{a}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\chi'_{ij}-\chi'_{ji}\right)$$

以 S 和 S^* 表示 $\boldsymbol{\chi}'$ 的两个不变量：

$$S=\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'=\chi'_{ij}\chi'_{ij}$$

$$S^*=\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\chi}'\cdot\cdot\boldsymbol{\chi}'=\chi'_{ij}\chi'_{ji} \tag{3.19}$$

则可证

$$\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{s}}:\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{a}}=\chi'^{\mathrm{s}}_{ij}\chi'^{\mathrm{a}}_{ij}=0$$

$$\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{s}}:\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{s}}=\chi'^{\mathrm{s}}_{ij}\chi'^{\mathrm{s}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(S+S^*\right) \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{\chi}'^{a}:\boldsymbol{\chi}'^{a}=\chi_{ij}'^{a}\chi_{ij}'^{a}=\frac{1}{2}\left(S-S^{*}\right)$$

把$\boldsymbol{\chi}'$的分解式(3.18)代入(3.17)$\boldsymbol{\eta}'^{A}$式，得到$\boldsymbol{\eta}'^{A}$相应的分解式（分解的两部分以小写字母 a 与 s 表示）

$$\boldsymbol{\eta}'^{A}=\boldsymbol{\eta}'^{As}+\boldsymbol{\eta}'^{Aa} \tag{3.21}$$

式中，类似于(3.17)，有

$$\begin{aligned}\eta_{ijk}'^{As}&=\frac{2}{3}e_{ikp}\chi_{pj}'^{s}+\frac{2}{3}e_{jkp}\chi_{pi}'^{s}\\ \eta_{ijk}'^{Aa}&=\frac{2}{3}e_{ikp}\chi_{pj}'^{a}+\frac{2}{3}e_{jkp}\chi_{pi}'^{a}\end{aligned} \tag{3.22a,b}$$

利用(3.9)，可将(3.22)通过$\boldsymbol{\eta}'$的分量表示为

$$\begin{aligned}\eta_{ijk}'^{As}&=\frac{1}{6}\left[e_{ikp}e_{jlm}\eta_{lpm}'+e_{jkp}e_{ilm}\eta_{lpm}'+2\eta_{ijk}'-\eta_{jki}'-\eta_{kij}'\right]\\ \eta_{ijk}'^{Aa}&=\frac{1}{6}\left[-e_{ikp}e_{jlm}\eta_{lpm}'-e_{jkp}e_{ilm}\eta_{lpm}'+2\eta_{ijk}'-\eta_{jki}'-\eta_{kij}'\right]\end{aligned} \tag{3.23}$$

由(3.14)与(3.21)式，我们把$\boldsymbol{\eta}'$分成了三个部分：

$$\boldsymbol{\eta}'=\boldsymbol{\eta}'^{S}+\boldsymbol{\eta}'^{As}+\boldsymbol{\eta}'^{Aa} \tag{3.24}$$

在分解式(3.5)时已经要求$\boldsymbol{\eta}'$满足“不可压缩”条件，即$\eta_{ikk}'=0$。利用(3.22a)式可以证明$\boldsymbol{\eta}'^{As}$（也就是(3.11)式中的$\boldsymbol{\eta}'^{(2)}$，见下面的(3.26)）具有以下性质：

$$\begin{aligned}\eta_{ikk}'^{(2)}&=\eta_{ikk}'^{As}=0\\ \eta_{iik}'^{(2)}&=\eta_{iik}'^{As}=0\\ \eta_{ijk}'^{(2)}+\eta_{jki}'^{(2)}+\eta_{kij}'^{(2)}&=\eta_{ijk}'^{As}+\eta_{jki}'^{As}+\eta_{kij}'^{As}=0\end{aligned} \tag{3.25a,b,c}$$

(3.25a)说明$\boldsymbol{\eta}'^{As}$也满足“不可压缩”条件。为了使得$\boldsymbol{\eta}'$分解的三部分都分别满足“不可压缩”条件，定义如下的分解：

$$\boldsymbol{\eta}'=\boldsymbol{\eta}'^{(1)}+\boldsymbol{\eta}'^{(2)}+\boldsymbol{\eta}'^{(3)} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\eta}'^{(1)}=\boldsymbol{\eta}'^{S}-\boldsymbol{\xi}\,,\quad \boldsymbol{\eta}'^{(2)}=\boldsymbol{\eta}'^{As}\,,\quad \boldsymbol{\eta}'^{(3)}=\boldsymbol{\eta}'^{Aa}+\boldsymbol{\xi} \tag{3.26}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}$ 具有同 $\boldsymbol{\eta}'^{S}$ 一样的对称性，即ξ_{ijk}的值只取决于（i,j,k）的组合，而与 i,j,k 的次序无关：

$$\xi_{ijk}=b\left(\delta_{ij}\eta_{kpp}'^{S}+\delta_{jk}\eta_{ipp}'^{S}+\delta_{ki}\eta_{jpp}'^{S}\right) \tag{3.27}$$

b 为一待定系数，根据 $\boldsymbol{\eta}'^{(1)}$（因而 $\boldsymbol{\eta}'^{(3)}$）满足“不可压缩”条件的要求，即[1)]

$$\eta'^{(1)}_{ikk} = \eta'^{(1)}_{kik} = \eta'^{S}_{ikk} - \xi_{ikk} = 0\,, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.28}$$

可定出 $b = 1/5$，因此利用(3.22)与(3.26)可得 $\boldsymbol{\eta}'$ 的三个部分

$$\begin{aligned}
\eta'^{(1)}_{ijk} &= \eta'^{S}_{ijk} - \xi_{ijk} \\
\eta'^{(2)}_{ijk} &= \frac{2}{3} e_{ikp} \chi'^{s}_{pj} + \frac{2}{3} e_{jkp} \chi'^{s}_{pi} \\
\eta'^{(3)}_{ijk} &= \frac{2}{3} e_{ikp} \chi'^{a}_{pj} + \frac{2}{3} e_{jkp} \chi'^{a}_{pi} + \xi_{ijk}
\end{aligned} \tag{3.29a,b,c}$$

显然，三个部分都对第一、第二指标对称，且都满足“不可压缩”条件：

$$\eta'^{(n)}_{ijk} = \eta'^{(n)}_{jik}\,, \quad \eta'^{(n)}_{ikk} = 0\,, \qquad n = 1, 2, 3 \tag{3.30a,b}$$

习题 6.8 表明 $\boldsymbol{\xi}$ 也可以通过 $\boldsymbol{\chi}'^{a}$ 表出。直接将(3.13)，(3.23)与(3.27)代入(3.26)，可得通过 $\boldsymbol{\eta}'$ 分量的表达式：

$$\begin{aligned}
\eta'^{(1)}_{ijk} &= \eta'^{S}_{ijk} - \frac{1}{5}\left[\delta_{ij}\eta'^{S}_{kpp} + \delta_{jk}\eta'^{S}_{ipp} + \delta_{ki}\eta'^{S}_{jpp}\right] \\
\eta'^{(2)}_{ijk} &= \frac{1}{6}\left[e_{ikp}e_{jlm}\eta'_{lpm} + e_{jkp}e_{ilm}\eta'_{lpm} + 2\eta'_{ijk} - \eta'_{jki} - \eta'_{kij}\right] \\
\eta'^{(3)}_{ijk} &= \frac{1}{6}\left[-e_{ikp}e_{jlm}\eta'_{lpm} - e_{jkp}e_{ilm}\eta'_{lpm} + 2\eta'_{ijk} - \eta'_{jki} - \eta'_{kij}\right] + \\
&\quad + \frac{1}{5}\left[\delta_{ij}\eta'^{S}_{kpp} + \delta_{jk}\eta'^{S}_{ipp} + \delta_{ki}\eta'^{S}_{jpp}\right]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

式中 η'^{S}_{ijk} 见(3.13)。

将 $\boldsymbol{\eta}'$ 分成三部分的(3.11)式代入总等效应变 $\mathscr{E}_{SG}$ 的定义式(3.8)，并利用习题 6.21 与 6.22 的结果，可将 $\mathscr{E}^2_{SG}$ 写成：

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^2_{SG} &= \frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' + c_1 \frac{5}{2}\boldsymbol{\eta}'^{(3)} : \boldsymbol{\eta}'^{(3)} + c_2\left(\boldsymbol{\eta}'^{(1)} : \boldsymbol{\eta}'^{(1)} + \boldsymbol{\eta}'^{(2)} : \boldsymbol{\eta}'^{(2)} + \boldsymbol{\eta}'^{(3)} : \boldsymbol{\eta}'^{(3)}\right) \\
&\quad + c_3\left(\boldsymbol{\eta}'^{(1)} : \boldsymbol{\eta}'^{(1)} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}'^{(2)} : \boldsymbol{\eta}'^{(2)} - \frac{1}{4}\boldsymbol{\eta}'^{(3)} : \boldsymbol{\eta}'^{(3)}\right)
\end{aligned}$$

整理后得

$$\mathscr{E}^2_{SG} = \frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' + l_1^2 \boldsymbol{\eta}'^{(1)} : \boldsymbol{\eta}'^{(1)} + l_2^2 \boldsymbol{\eta}'^{(2)} : \boldsymbol{\eta}'^{(2)} + l_3^2 \boldsymbol{\eta}'^{(3)} : \boldsymbol{\eta}'^{(3)} \tag{3.32}$$

式中

---

1) (3.27)的三个式子（i=1, 2, 3）完全相同，所以定出同一个 $b = 1/5$。

$$l_1^2 = c_2 + c_3\,,\qquad l_2^2 = c_2 - \frac{1}{2}c_3\,;\qquad l_3^2 = \frac{5}{2}c_1 + c_2 - \frac{1}{4}c_3 \tag{3.33}$$

反之，c_1, c_2, c_3 也可以通过 l_1^2，l_2^2，l_3^2 表示

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{15}l_1^2 - \frac{1}{3}l_2^2 + \frac{2}{5}l_3^2 \\ c_2 &= \frac{1}{3}l_1^2 + \frac{2}{3}l_2^2 \\ c_3 &= \frac{2}{3}l_1^2 - \frac{2}{3}l_2^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

利用习题 6.17 与 6.19 的结果（注意(3.19)），还可以把(3.32)的 $\mathscr{E}_{SG}^2$ 通过 $\boldsymbol{\chi}'$ 的不变量表示：

$$\mathscr{E}_{SG}^2 = \frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}':\boldsymbol{\varepsilon}' + l_1^2\boldsymbol{\eta}'^{(1)}:\boldsymbol{\eta}'^{(1)} + \left(\frac{4}{3}l_2^2 + \frac{8}{5}l_3^2\right)\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}' + \left(\frac{4}{3}l_2^2 - \frac{8}{5}l_3^2\right)\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{T}} \tag{3.35}$$

式中 l_1，l_2，l_3 为以长度为量纲的三个材料常数。当 l_2 与 l_3 满足下列关系时，

$$l_3 = \sqrt{\frac{5}{6}}l_2 \tag{3.36}$$

(3.35)右端只出现 $\boldsymbol{\chi}$ 的一个不变量 $\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'$，而不出现另一个不变量 $\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{T}}$。在下列特殊的材料常数下：

$$l_1 = 0\,,\quad l_2 = \frac{1}{2}l\,,\quad l_3 = \sqrt{\frac{5}{24}}l \tag{3.37}$$

(3.35)的 $\mathscr{E}_{SG}^2$ 就过渡到节 6.2 CS 理论的有效应变 (2.33) $\mathscr{E}^2$ 式。因此 CS 理论可以看作是本节 SG 理论的一个材料常数组合特殊情况(3.37)。

通过对薄梁弯曲试验（Stolken 和 Evans 1998）、细铜丝扭转试验（Fleck 等 1994）和微压痕试验（Nix 1989, De Guzman 等 1993，Stelmashenko 等 1993，Ma 和 Clarke 1995，Poole 等 1996，McElhaney 等 1998），Begley 和 Hutchinson（1997）定出了这些材料常数

$$l_1 - \frac{1}{16}l \sim \frac{1}{8}l \qquad l_2 = \tfrac{1}{2}l \qquad l_3 = \sqrt{\frac{5}{24}}l \tag{3.38}$$

也就是铜的 $l = 4\mu\mathrm{m}$，$l_1 = 0.25\mu\mathrm{m} \sim 0.5\mu\mathrm{m}$，$l_2 = 2\mu\mathrm{m}$，$l_3 = 1.8\mu\mathrm{m}$；镍的 $l = 6\mu\mathrm{m}$，$l_1 = 0.38\mu\mathrm{m} \sim 0.75\mu\mathrm{m}$，$l_2 = 3\mu\mathrm{m}$，$l_3 = 2.7\mu\mathrm{m}$。基于旋转梯度的理论中相应的材料长度为(3.37)，但按照这样的材料长度，在微压痕或纳米试验中仅仅能预测 10% ~ 20%的增加，与试验中观察到的增加 200% ~ 300%相差甚远。

CS 理论除了考虑应变偏量 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 之外，只考虑了旋转梯度 $\boldsymbol{\chi}$，而且也不完全，因为略去了不变量 $\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{T}}$。本节的 SG 理论同时考虑了不变量 $\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'$ 与 $\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{T}}$，而且还考虑了 $\boldsymbol{\eta}'^{(1)}$。如果材料不可压缩，而且旋转或旋转梯度为零，按 CS 与 SG 理论各有：

$$\mathscr{E}^2 = \frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}', \qquad \mathscr{E}_{\mathrm{SG}}^2 = \frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' + l_1^2 \boldsymbol{\eta}'^{(1)} : \boldsymbol{\eta}'^{(1)}$$

在 $\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}^2$ 中必然反映了材料的伸长梯度，这就是我们之所以称其为“伸长和旋转梯度理论”。

6.3.3 SG 应变梯度塑性理论的本构关系

设物体每单位体积的应变能 w 为以下两部分之和[1]：

$$w = w_V(\varepsilon_V) + w(\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}) \tag{3.39}$$

式中 w_V 为由于体积变化导致的应变能。对于各向同性弹性，以 ε_V 表示体积变形，则

$$w_V = \frac{1}{2}K\varepsilon_V^2, \qquad \varepsilon_V = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} \tag{3.40}$$

$K = E/3(1-2\nu)$ 为体积模量，E 为杨氏模量，ν为泊松比。类似于(2.34)，定义总等效应力

$$\Sigma = \frac{\partial w(\mathscr{E}_{\mathrm{SG}})}{\partial \mathscr{E}_{\mathrm{SG}}} \tag{3.41}$$

由(3.32)，$\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}$ 取决于 $\boldsymbol{\varepsilon}'$、$\boldsymbol{\eta}'^{(1)}$、$\boldsymbol{\eta}'^{(2)}$ 与 $\boldsymbol{\eta}'^{(3)}$。而 $\boldsymbol{\eta}'^{(1)}$，$\boldsymbol{\eta}'^{(2)}$，$\boldsymbol{\eta}'^{(3)}$ 为由 $\boldsymbol{\eta}'$ 分解的三个相互正交的部分（见(3.11)），它们都可唯一地通过 $\boldsymbol{\eta}'$ 线性地表达，即(3.31)。将(3.39)w 看作 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\boldsymbol{\eta}'$ 的函数 $w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}')$，非线性弹性关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}')}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad \boldsymbol{\tau}' = \frac{\partial w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}')}{\partial \boldsymbol{\eta}'} \tag{3.42}$$

式中$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\tau}'$ 各为与$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\eta}'$ 功共轭的“应力”。因为$\boldsymbol{\varepsilon}$对称，$\boldsymbol{\eta}'$ 对第一、第二指标对称，$\eta'_{ijk} = \eta'_{jik}$，且满足“不可压缩”条件 $\eta'_{ikk} = 0$（见(3.4)），所以这里也必须规定$\boldsymbol{\sigma}$对称，$\boldsymbol{\tau}'$ 对第一、第二指标对称，$\tau'_{ijk} = \tau'_{jik}$，且满足 $\tau'_{ikk} = 0$。为了计算(3.42)的$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\tau}'$ 我们只需要计算 dw。由(3.39)，利用(3.40)，(3.41)，有

$$\mathrm{d}w = \mathrm{d}w_V + \mathrm{d}w(\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}) = K\varepsilon_V \mathbf{1} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \Sigma\,\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{SG}} \tag{3.43}$$

其中 d$\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}$ 可由(3.32)求出

$$\mathscr{E}_{\mathrm{SG}}\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{SG}} = \frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}' + l_1^2\boldsymbol{\eta}'^{(1)} : \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}'^{(1)} + l_2^2\boldsymbol{\eta}'^{(2)} : \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}'^{(2)} + l_3^2\boldsymbol{\eta}'^{(3)} : \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}'^{(3)} \tag{3.44}$$

由(3.12)的正交条件，取$\tilde{\boldsymbol{\eta}}'$ 为 d$\boldsymbol{\eta}'$：

$$\boldsymbol{\eta}'^{(i)} : \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}'^{(j)} = 0 \qquad 当\ i \neq j \tag{3.45}$$

---

1) Fleck 和 Hutchinson(1997)假设材料不可压缩，因此 $w = w(\mathscr{E}_{\mathrm{G}})$。这里(3.39)式试图加上体积变形能以考虑材料的可压缩性。这里假定了体积变形是线弹性的，而且$\boldsymbol{\eta}$的静水部分 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}$（见(3.7)）对应变能无贡献，体积变形只引起静水 Cauchy 应力。在 Hwang 和 Inoue(1998)的综述文中对如何考虑材料可压缩性提出了新的建议。

可将(3.44)写作

$$\mathscr{E}_{SG}\mathrm{d}\mathscr{E}_{SG}=\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}':\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}'+\left[l_1^2\boldsymbol{\eta}'^{(1)}+l_2^2\boldsymbol{\eta}'^{(2)}+l_3^2\boldsymbol{\eta}'^{(3)}\right]:\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}' \tag{3.44$'$}$$

将 $\mathrm{d}\mathscr{E}_{SG}$ 由(3.44)′代入(3.43)，得

$$\mathrm{d}w=\left(K\varepsilon_V\mathbf{1}+\frac{2}{3}\frac{\Sigma}{\mathscr{E}_{SG}}\boldsymbol{\varepsilon}'\right):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{\Sigma}{\mathscr{E}_{SG}}\left[l_1^2\boldsymbol{\eta}'^{(1)}+l_2^2\boldsymbol{\eta}'^{(2)}+l_3^2\boldsymbol{\eta}'^{(3)}\right]:\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}' \tag{3.46}$$

于是，(3.42)与(3.46)给出

$$\boldsymbol{\sigma}=K\varepsilon_V\mathbf{1}+\frac{2}{3}\frac{\Sigma}{\mathscr{E}_{SG}}\boldsymbol{\varepsilon}',\quad 即\ \boldsymbol{\sigma}'=\frac{2}{3}\frac{\Sigma}{\mathscr{E}_{SG}}\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{3.47}$$

$$\boldsymbol{\tau}'=\sum_{n=1}^{3}\boldsymbol{\tau}'^{(n)},\qquad \boldsymbol{\tau}'^{(n)}=\frac{\Sigma}{\mathscr{E}_{SG}}l_n^2\boldsymbol{\eta}'^{(n)},\quad（对\ n\ 不取和），n=1,2,3 \tag{3.48}$$

由(3.47)与(3.48)，并利用(3.32)，可证

$$\Sigma^2=\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'+l_1^{-2}\boldsymbol{\tau}'^{(1)}:\boldsymbol{\tau}'^{(1)}+l_2^{-2}\boldsymbol{\tau}'^{(2)}:\boldsymbol{\tau}'^{(2)}+l_3^{-2}\boldsymbol{\tau}'^{(3)}:\boldsymbol{\tau}'^{(3)} \tag{3.49}$$

类似于由(2.23)导出(2.25)，对于(3.42)进行 Legendre 变换，可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\partial\phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}')}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\qquad \boldsymbol{\eta}'=\frac{\partial\phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}')}{\partial\boldsymbol{\tau}'} \tag{3.50}$$

式中

$$\phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}')=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\tau}':\boldsymbol{\eta}'-w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}') \tag{3.51}$$

类似于(2.40)，设总等效应变 $\mathscr{E}_{SG}$ 与总等效应力 Σ 之间为

$$\left(\frac{\mathscr{E}_{SG}}{\mathscr{E}_{SG0}}\right)=\left(\frac{\Sigma}{\Sigma_0}\right)^n \tag{3.52}$$

式中 $\mathscr{E}_{SG0}$ 与 Σ_0 为材料常数，则类似于(2.41)，可定出

$$\begin{aligned}w&=\frac{1}{2}K\varepsilon_V^2+\frac{n}{n+1}\Sigma_0\mathscr{E}_{SG0}\left(\frac{\mathscr{E}_{SG}}{\mathscr{E}_{SG0}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\\ \phi&=\frac{1}{2K}\sigma_m^2+\frac{1}{n+1}\Sigma_0\mathscr{E}_{SG0}\left(\frac{\Sigma}{\Sigma_0}\right)^{n+1}\end{aligned} \tag{3.53}$$

式中 σ_m 为平均应力。

SG 应变梯度理论的场方程、变分原理和边界条件可参考 Fleck 和 Hutchinson(1997)。这个理论也获得了一些应用。

Fleck 和 Hutchinson（1997）研究了金属基材料由刚性颗粒夹杂导致的强化和孔洞的失稳问题。Chen 等（1999）获得了 I 型、II 型裂纹的渐近解。

对裂纹尖端场的分析同样采用有限元方法。由于在裂尖具有很大的拉伸梯度，且几乎不可压，为了精确地体现裂尖的应变梯度效应，Wei 和 Hutchinson（1998）发展出一种新的有限元方法，这种单元在 $n = 1$ 的极限情况下与 Shi 和 Huang（1998）利用 Wiener-Hopf 方法得到的弹性全场解析解，不仅是在裂尖而且在全场范围内都符合得非常好。这一结果说明 Wei 和 Hutchinson（1998）发展的新有限元方法可以体现裂尖的应变梯度效应，包括旋转梯度和拉伸梯度。Wei 和 Hutchinson（1997）在 I 型裂纹稳态扩展中应用应变梯度塑性 SG 理论，得到了比应用 CS 理论高得多的裂尖应力场。在 Fleck 和 Hutchinson(1997)中也提出了一个 SG 应变梯度塑性的增量型理论。

6.4 基于细观机制的应变梯度塑性理论(MSG)[1)]

6.4.1 应变梯度塑性的试验规律

最近，Nix 和 Gao（1998）通过对压痕试验结果的分析，阐明了 Fleck 和 Hutchinson（1993）引进的材料长度 l 的意义，并且提供了基于细观机制的应变梯度塑性理论所必需的试验规律。Nix 和 Gao 从描述材料的抗剪强度和位错密度的 Taylor 关系出发

$$\tau = \alpha\mu b\sqrt{\rho_{\mathrm{T}}} = \alpha\mu b\sqrt{\rho_{\mathrm{S}} + \rho_{\mathrm{G}}} \tag{4.1}$$

式中 ρ_{T} 为总的位错密度，ρ_{S} 为统计储存位错密度，ρ_{G} 为几何必需位错密度，μ为剪切模量，b 为 Burgers 向量，α 为经验常数，其值为 1 的数量级（例如参考 Nix 和 Gibeling，1985）。应变梯度只与几何必需位错有关，所以等效应变梯度η 可以定义为

$$\eta = \rho_{\mathrm{G}} b \tag{4.2}$$

根据这个表达式，可以把η解释为弯曲问题中的曲率，或者扭转问题中的每单位长度的扭角。

对于多数韧性材料，单向拉伸应力应变关系可以写成幂律形式：

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{ref}}\varepsilon^{N} \tag{4.3}$$

式中 N（$0 < N < 1$）为塑性功硬化指数[2)]，σ_{ref} 为参考应力。对于多晶体，拉伸流动应力σ为剪切流动应力τ 的 $M = 3.06$ 倍（Taylor 1938，Kocks 1970）。在单向拉伸情况下，应变梯度为零，(4.3)式只反映由于统计储存位错造成的硬化，因此 ρ_{S} 可以由单向拉伸应力应变关系决定。(4.1)给出应变梯度塑性的硬化律：

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{ref}}\sqrt{\varepsilon^{2N} + l\eta} \tag{4.4}$$

1) 参见 Gao 等 1999、Huang 等 1999。
2) N 相当于(2.40)与(3.50)式中的 $1/n$。

式中

$$l = M^2\alpha^2\left(\frac{\mu}{\sigma_{\text{ref}}}\right)^2 b \tag{4.5}$$

乃是应变梯度塑性理论中的内禀材料长度，对韧性金属 l 为微米量级。这与根据 Fleck 等（1994）的细铜丝扭转和 Stolken 与 Evans（1998）的镍薄梁弯曲试验估计出来的材料长度属同一个数量级。应指出 Nix 与 Gao（1998）曾经根据各向同性固体的 Mises 准则，在(4.5)式中采用 $M=\sqrt{3}$ 。

Nix 和 Gao（1998）用应变梯度律(4.4)计算微压痕硬度，证明由应变梯度律(4.4)式可导出下面有关压痕硬度 H 的关系式

$$H/H_0 = \sqrt{1+h^*/h} \tag{4.6}$$

这里 H_0 是不考虑应变梯度效应时的硬度，h 是压痕深度，而且有

$$h^* = \frac{81}{2}b\alpha^2\tan^2\theta(\mu/H_0)^2 \tag{4.7}$$

式中θ为压头锥形表面和被压表面平面的夹角。(4.6)和 McElhaney 等（1998）用单晶和冷加工多晶铜做微压痕试验的数据符合得很好，并且与 Ma 和 Clarke（1995）用单晶银做微压痕试验的数据也符合得很好。另外重新考察 Poole 等（1996）的试验数据再一次证实了这种 H^2 与 $1/h$ 的线性关系。由图 6-2 可以看出按照(4.6)计算出来的硬度与压痕深度之间的关系和 McElhaney 等（1998）对(111)单晶铜所做的压痕试验数据符合得非常好。相反地，经典塑性理论给出的是一条水平直线，即硬度与压痕深度无关，图 6-2 中也给出了这条水平直线。

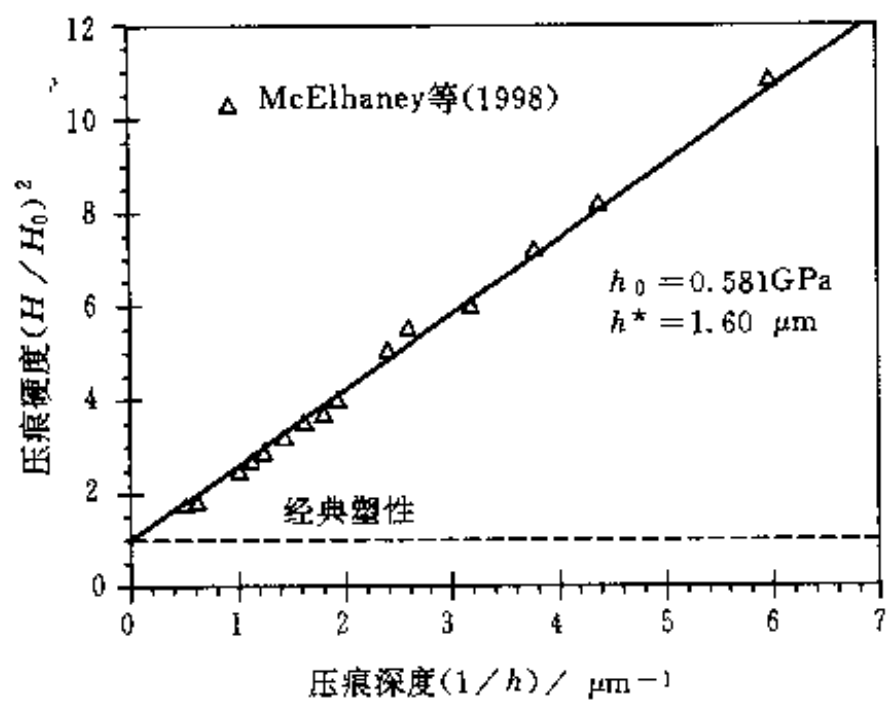


图 6-2 按照(4.6)式得到的(111)单晶铜的压痕深度－硬度关系图

6.4.2 提出基于细观机制的应变梯度塑性理论的动机

虽然 Fleck 和 Hutchinson（1993，1997）把位错理论作为他们提出应变梯度塑性理论的

动机，但实际上只是将高阶等效应力与应变取代经典塑性本构关系中的等效应力与应变，而高阶应变涉及应变梯度与一个或几个需要由试验定出来的材料长度。换句话说，Fleck-Hutchinson 的理论主要是在宏观可以测量的单轴应力应变关系的基础上建立的。而一些微观力学的试验，如微压痕试验、微扭转和微弯曲试验除了用于确定材料长度外，在理论的建立过程中并没有起到什么作用。然而，(4.4)式应用在各种材料的微压痕试验中得到非常好的效果，即 H^2 与 $1/h$ 呈线性关系，说明(4.4)式表明了材料在微尺度下一种基本的、内禀的变形特征。这提供了一个强烈的动机，以(4.4)式作为一个基本假设，以建立另一种理论。Gao 等（1999）和 Huang 等（1999）提出了一种多尺度、分层次的理论框架，来实现塑性理论和位错理论的结合。每一个细观尺度胞元内的应变场按线性规律变化，其内部每一点作为微尺度胞元(图 6-3)。微尺度胞元内的位错交互作用近似遵守 Taylor 关系，所以可以应用应变梯度塑性律(4.4)式。在微尺度胞元内部，η 项是几何必需位错密度的度量，而几何必需位错的积累导致流动应力严格按照 Taylor 模型增大。也就是假设微尺度塑性流动是发生在几何必需位错的背景下统计储存位错的滑移，假设微尺度塑性变形遵守 Taylor 功硬化关系及经典塑性关联律，而几何必需位错的概念和应变梯度的关联是建立在细观尺度胞元的水平上。在细观尺度胞元的水平上建立塑性理论，高阶应力作为应变梯度的热力学共轭量出现，故保证此理论满足连续介质的 Clausius-Duhem 热力学限制。这种分层次的模型提供了一种建立细观本构理论的方法，即在某个代表元上通过微尺度塑性律的平均化处理，得到细观尺度的本构关系。虽然这种新的理论恰好满足 Fleck 和 Hutchinson（1997）建立的唯象理论的数学框架，但是它基于细观机制的出发点使其不同于所有现存的唯象理论。

6.4.3 基本假设

图 6-3 给出了 MSG 理论所采用的多尺度框架。在微尺度胞元上，胞元尺寸比应变场变化的区域小，位错的交互作用可以描述为在几何必需位错的背景下统计储存位错的滑移，而按照应变梯度律(4.4)式，几何必需位错影响微尺度流动应力。在微尺度胞元上按照经典的方式定义应力和应变，记为 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$。在更高层次的分析中，即以后称为细观分析中，与应变梯度塑性相关的概念，例如高阶应力与应变梯度，是为了保证本构模型满足热力学限制的需要。

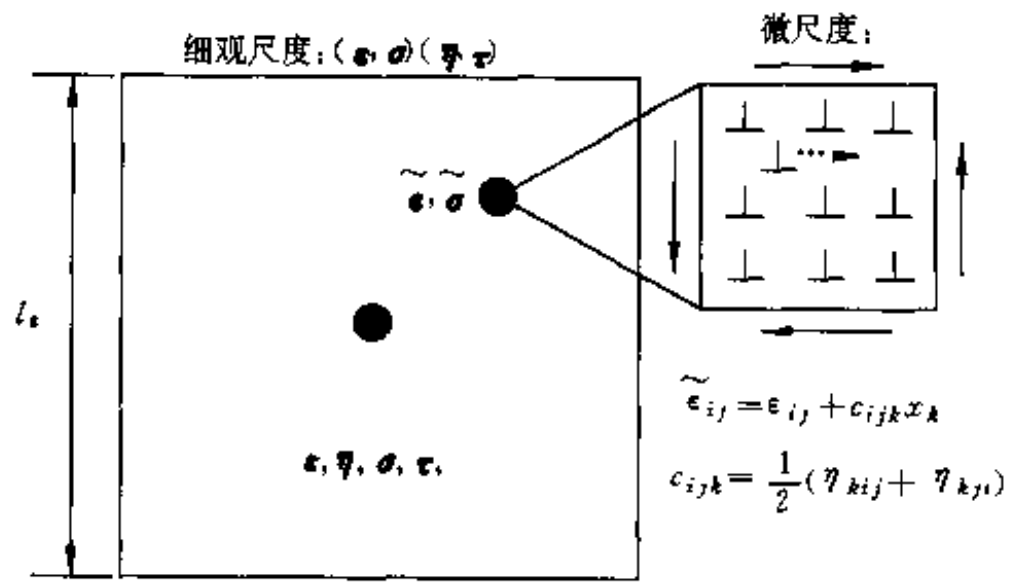


图 6-3 MSG 理论中采用的多尺度框架

为什么在应变梯度塑性理论中需要分层次的框架呢？原因是在微尺度下可以建立与按照 Taylor 模型预测的情况相联系的理论。按照 Taylor 模型，流动应力被定义为使位错在壁垒间滑动的临界力。另一方面，在细观尺度下可建立在几何必需位错与应变梯度之间的联系，并构造满足热力学限制的本构框架。换句话说，多尺度框架可以使几何必需位错成为本构模型的必要部分。细观尺度的变量包括应力$\boldsymbol{\sigma}$、应变$\boldsymbol{\varepsilon}$、高阶应力$\boldsymbol{\tau}$和应变梯度$\boldsymbol{\eta}$。

在建立 MSG 理论细观尺度下的形式时，采用 Fleck 和 Hutchinson（1997）所建立的高阶梯度框架，而这是基于早期 Toupin（1962）、Koiter（1964）和 Mindlin（1964，1965）等人的工作。在这个框架中，广义应变张量包括式$(2.10)_3$的对称应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}$与(3.1)的位移二阶梯度$\boldsymbol{\eta}$。为简单起见，在以下的分析中忽略弹性变形和材料可压缩性。按照 Fleck 和 Hutchinson（1997）的理论，不可压缩性可以表示为$\varepsilon_{ii}=0$和$\eta^{\mathrm{H}}_{ikk}=\eta_{ikk}=0$。所以位移$\boldsymbol{u}$的任意变化导致每单位体积应变能的变化为

$$\delta w=\sigma'_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\tau'_{ijk}\delta\eta_{ijk} \tag{4.8}$$

为了在细观尺度下的应变梯度塑性和微尺度下的 Taylor 硬化关系之间建立联系，在 MSG 理论框架中采用如下的基本假设：

(1) 假设微尺度的流动应力由位错运动控制，并且遵守应变梯度律(4.4)式给出的 Taylor 硬化关系

$$\tilde{\sigma}=\sigma_{\mathrm{y}}\sqrt{f^2(\tilde{\varepsilon})+l\eta} \tag{4.9}$$

(2) 应变梯度塑性是在细观水平上对位错运动的描述，因此它可以从微尺度下基于位错的微尺度塑性律导出。选择细观尺度胞元应尽量小以保证其中的应变可近似按照线性规律变化，且又要足够大以保证可以应用 Taylor 模型。在细观尺度下忽略高阶应变梯度。微观尺度和细观尺度的联系是塑性功相等

$$\int_{V_{\mathrm{cell}}}\tilde{\sigma}'_{ij}\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}V=\left(\sigma'_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\tau'_{ijk}\delta\eta_{ijk}\right)V_{\mathrm{cell}} \tag{4.10}$$

(3) 在微尺度胞元中假设经典塑性的基本结构成立。为此，可假定塑性流动为在几何必需位错的背景下统计储存位错的滑移。在微尺度下的J_2形变理论可以表示为

$$\tilde{\sigma}'_{ij}=\left(2\tilde{\varepsilon}_{ij}/3\varepsilon_{\mathrm{eq}}\right)\tilde{\sigma}_{\mathrm{eq}} \tag{4.11}$$

其中$\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{eq}}$为微尺度等效应变，$\tilde{\sigma}_{\mathrm{eq}}$为微尺度等效应力，

$$\tilde{\sigma}_{\mathrm{eq}}=\sqrt{\frac{2}{3}\tilde{\sigma}'_{ij}\tilde{\sigma}'_{ij}}\qquad\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{eq}}=\sqrt{\frac{2}{3}\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}} \tag{4.12}$$

微尺度的屈服条件为

$$\tilde{\sigma}_{\mathrm{eq}}=\tilde{\sigma} \tag{4.13}$$

这里$\tilde{\sigma}$由(4.9)给出。

6.4.4 位错模型

在由上述基本假设导出 MSG 理论的本构律之前，必须建立(4.2)式中的η与应变梯度$\boldsymbol{\eta}$之间的关系。Gao 等（1999）采用 $\boldsymbol{\eta}$ 的不变量来定义等效应变梯度：

$$\eta = \sqrt{c_1'\eta_{iik}\eta_{jjk} + c_2'\eta_{ijk}\eta_{ijk} + c_3'\eta_{ijk}\eta_{kji}} \tag{4.14}$$

并以 η 作为几何必需位错密度的度量。由于目前缺少应变梯度效应的试验数据，他们不是由试验数据来拟合 c_1', c_2' 与 c_3'，而是由若干个不同的位错模型来决定这些常数，这些模型包括平面应变弯曲，纯扭转与二维轴对称孔洞增长等三种。

必须指出，对于给定的连续应变场，可能有多个对应的几何必需位错图像，使得这些常数不能唯一地确定。假设滑移系取向不同，对应的几何必需位错图像也不同。Gao 等（1999）没有顾及这些复杂性，对给定的变形场，考虑了多种滑移系，但采用了能给出几何必需位错密度为最小值的，即最为有效的位错图像。上述三种位错模型给出 c_1', c_2' 与 c_3' 的三个方程，其解为

$$c_1' = 0, \qquad c_2' = \frac{1}{4}, \qquad c_3' = 0 \tag{4.15}$$

因此对应于最有效位错图像的等效应变梯度为：

$$\eta = \sqrt{\eta_{ijk}\eta_{ijk}/4} \tag{4.16}$$

(4.16)的形式与经典塑性理论中的 $\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}/3}$ 很相似。按照如(3.33)的 c_i' 与 l_i（$i = 1, 2, 3$）间的关系，$l_1^2 = l_2^2 = l_3^2 = 1/4$，因此(4.16)也可写作

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\eta_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)} + \eta_{ijk}^{(2)}\eta_{ijk}^{(2)} + \eta_{ijk}^{(3)}\eta_{ijk}^{(3)}\right)} \tag{4.16$'$}$$

6.4.5 MSG 应变梯度塑性理论本构方程

基于 6.4.3 中讨论的理论假设，新的应变梯度塑性理论(MSG)的框架可以按照下面的方法建立。注意这只是 MSG 的形变理论。

考虑一个细观尺度下的胞元，每边的长度为 l_ε（图 6-3）。假设在这个胞元中位移的变化为

$$\tilde{u}_k = \varepsilon_{ik}x_i + \frac{1}{2}\eta_{ijk}x_ix_j + O(x^3) \tag{4.17}$$

这里 x_i 表示以胞元中心为坐标原点的局部坐标，η_{ijk} 是位移场的二阶梯度。当胞元足够小时，可以忽略位移的高阶梯度，所以应变场的变化可以线性表示为

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(\eta_{kij} + \eta_{kji})x_k \tag{4.18}$$

这样微尺度下的应变 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ 就与细观尺度下的应变 ε_{ij} 和应变梯度 η_{ijk} 建立了联系。

必须强调指出，细观尺度胞元尺寸 l_ε 必须比(4.5)式应变梯度塑性的内禀材料尺度 l 小得多。

把微尺度下的本构关系式(4.11)和运动假设

$$\delta\tilde{\varepsilon}_{ij} = \delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\left(\delta\eta_{kij} + \delta\eta_{kji}\right)x_k \tag{4.18$'$}$$

代入塑性功等式(4.10)，并且令方程两端 $\delta\varepsilon_{ij}$ 的系数和 $\delta\eta_{kij}$ 的系数对应相等，就可得到 MSG 的形变理论本构方程。由方程两端 $\delta\varepsilon_{ij}$ 的系数对应相等可得

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{V_{\text{cell}}}\int_{V_{\text{cell}}} \tilde{\sigma}'_{ij}\mathrm{d}V \tag{4.19}$$

由方程两端 $\delta\eta_{kij}$ 的系数对应相等得到

$$\tau'_{ijk} = \mathrm{Dev}\left[\frac{1}{2}\int_{V_{\text{cell}}}\left(\tilde{\sigma}'_{jk}x_i + \tilde{\sigma}'_{ik}x_j\right)\mathrm{d}V\right]\Big/V_{\text{cell}} \tag{4.20}$$

这里 Dev[…]表示[…]的偏斜部分，定义和(3.5)$\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}$ 的形式相似。

由于坐标 x_k 的原点位于正方体胞元的中心，上面式子的积分可以按照如下的法则进行

$$\frac{1}{V_{\text{cell}}}\int_{V_{\text{cell}}}\mathrm{d}V = 1, \qquad \int_{V_{\text{cell}}} x_k\mathrm{d}V = 0, \qquad \frac{1}{V_{\text{cell}}}\int_{V_{\text{cell}}} x_k x_m\mathrm{d}V = \frac{1}{12}l_\varepsilon^2\delta_{km} \tag{4.21}$$

保留 l_ε 的最低阶项，得到细观尺度下的本构方程

$$\sigma'_{ij} = 2\varepsilon_{ij}\sigma/3\varepsilon \tag{4.22}$$

$$\tau'_{ijk} = l_\varepsilon^2\left[\sigma\left(\Lambda_{ijk} - \Pi_{ijk}\right)/\varepsilon + N\sigma_{\text{ref}}^2\varepsilon^{2N-1}\Pi_{ijk}/\sigma\right] \tag{4.23}$$

其中

$$\sigma = \sigma_{\text{ref}}\sqrt{\varepsilon^{2N} + l\eta} \tag{4.24}$$

$$\Lambda_{ijk} = \frac{1}{72}\left[2\eta_{ijk} + \eta_{kji} + \eta_{kij} - \frac{1}{4}\left(\delta_{ik}\eta_{ppj} + \delta_{jk}\eta_{ppi}\right)\right] \tag{4.25}$$

$$\Pi_{ijk} = \varepsilon_{mn}\left[\varepsilon_{ik}\eta_{jmn} + \varepsilon_{jk}\eta_{imn} - \frac{1}{4}\left(\delta_{ik}\varepsilon_{jp} + \delta_{jk}\varepsilon_{ip}\right)\eta_{pmn}\right]\Big/54\varepsilon^2 \tag{4.26}$$

注意在 σ'_{ij} 中略去了 $O\left(l_\varepsilon^2\right)$，在 τ'_{ijk} 中略去了 $O\left(l_\varepsilon^4\right)$。在上面的式子中，$\varepsilon$ 表示经典塑性理论中的等效应变，η 见(4.16)。

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \qquad \eta = \sqrt{\frac{1}{4}\eta_{ijk}\eta_{ijk}} \tag{4.27}$$

可以看出，用这一多层次处理方法可以由反映于 Taylor 模型中的基于位错机制的微尺度塑性律导出 MSG 塑性的细观(mesoscale)本构律。因此无需假设存在应变能密度函数。事实上，如下节可见，在 MSG 塑性理论中不存在应变能密度函数。

6.4.6 在 MSG 塑性理论中不存在应变能密度函数

一个重要问题是：在 MSG 塑性梯度理论中是否存在应变能密度函数 $w(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta})$，使得本构方程可以通过 w 表示（见(3.42)）：

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad \boldsymbol{\tau}' = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}} \tag{4.28}$$

(4.28)显然不可能成立，因为 MSG 塑性本构方程(4.22)、(4.23)不满足互逆关系，即

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \eta_{kmn}} \neq \frac{\partial \tau'_{kmn}}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{4.29}$$

而(4.29)为应变能密度函数存在的必要条件。这一点对于在 MSG 塑性理论中是否可以应用断裂力学 J 积分提出了疑问。但应指出：应变能密度函数不存在性正是与在微尺度下几何必需位错密切相关的。

6.4.7 细观尺度胞元尺寸[1)]

对 MSG 塑性理论中细观胞元尺寸 l_ε的理解会带来困难，因为在经典塑性理论中没有类似的概念。Gao 等(1999)曾指出，它不是一个只是为方便起见而特地引进的参数，而是一个与塑性变形本身性质相关的基本参数。它是为准确地同时描述应变梯度和流动应力这一基本矛盾的产物。如在 6.4.5 所曾讨论过，细观尺度胞元尺寸 l_ε是一个在计算每一胞元中应变梯度时控制精度的分辨率参数。因此，它必须足够小，以保证应变梯度的精度，即

$$l_\varepsilon << l = M^2\alpha^2\left(\frac{\mu}{\sigma_{\text{ref}}}\right)^2 b \tag{4.30}$$

式中 l 为应变梯度理论中的内禀材料长度（见(4.5)）。另一方面，在胞元中假设 Taylor 关系式成立，因此胞元必须足够大，能包含足够多的位错。这就要求

$$l_\varepsilon >> L_{\text{yield}} \sim \frac{\mu}{\sigma_{\text{y}}} b \tag{4.31}$$

式中 L_{yield} 为材料屈服时统计储存位错的平均间距，估计为$(\mu/\sigma_{\text{y}})b$。σ_{y} 为材料在 0.2%屈服应变时的屈服应力。比较这两个互相制约的要求(4.30)与(4.31)，可得出 l_ε的适宜选择（Gao 等 1999），

1) 参见 Huang、Gao 和 Hwang,1999。

$$l_\varepsilon = \beta \frac{\mu}{\sigma_y} b \tag{4.32}$$

式中 β 为一由实验决定的常系数。

可用韧性材料的以下代表性力学性质来估计β的量级：

$$\begin{aligned} &N = 0.2, \qquad \varepsilon_y = \sigma_y / E = 0.2\%, \qquad \sigma_{ref} / \sigma_y = \varepsilon_y^{-N}, \\ &\mu / E = 3/8, \qquad \alpha = 1, \qquad M = 3.06 \end{aligned} \tag{4.33}$$

此处 ε_y 为屈服应变，而 E 为杨氏模量。内禀材料长度 l 可用(4.5)（或(4.30)）估计：

$$l \approx 27400\, b \tag{4.34}$$

对于铜(b=0.255mm)，这给出 7μm，与应变梯度现象学(phenomenological)理论（Fleck 和 Hutchinson，1997）中的材料长度量级一致。在屈服时统计储存位错的平均间距由(4.31)估计：

$$L_{yield} = 188\, b \tag{4.35}$$

对应于位错密度的量级 $10^{14}\mathrm{m}^{-2}$，(4.35)对铜的值为 50nm。因此，β应为 10 的量级，即

$$\beta \sim 10 \tag{4.36}$$

Huang 等(1999)曾研究 MSG 塑性理论的几个典型例子，包括薄梁弯曲，细丝扭转，微孔洞增长，孔洞失稳与双金属剪切。他们的结果表明，宏观物理量（例如弯矩，扭矩，作用的应力等）对系数 β颇不敏感，但局部变形场却强烈地受 β 的影响。

习 题 6

6.1 用分量（即指标）的形式证明(2.19)式，即

$$\int_a (T_i u_i + q_i \theta_i)\, \mathrm{d}a = \int_v \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}\right) \mathrm{d}v$$

6.2 证明最小位能原理。

6.3 证明最小余能原理。

6.4 利用(3.10)证明

$$\eta'_{qqk} = 2e_{kpq}\chi'_{pq}$$

6.5 设对任意第一、第二指标为对称的三阶张量$\boldsymbol{\zeta}$，以上标 S 与 A 定义按(3.13)与(3.14)式的分解，即

$$\begin{aligned} \zeta^{S}_{ijk} &= \frac{1}{3}\left(\zeta_{ijk} + \zeta_{jki} + \zeta_{kij}\right) \\ \zeta^{A}_{ijk} &= \zeta_{ijk} - \zeta^{S}_{ijk} \end{aligned}$$

以上标 H 与 ′ 定义(3.5)，(3.7)的分解。试计算$(\boldsymbol{\eta}')^{S}$，$(\boldsymbol{\eta}')^{A}$，$(\boldsymbol{\eta}^{S})'$，$(\boldsymbol{\eta}^{A})'$的分量，并注意：

$$\boldsymbol{\eta}' = (\boldsymbol{\eta}')^{S} + (\boldsymbol{\eta}')^{A} = (\boldsymbol{\eta}^{S})' + (\boldsymbol{\eta}^{A})' \qquad ②$$

但是

$$(\boldsymbol{\eta}')^{S} \neq (\boldsymbol{\eta}^{S})', \qquad (\boldsymbol{\eta}')^{A} \neq (\boldsymbol{\eta}^{A})' \qquad ③$$

因此，$\boldsymbol{\eta}'$满足“不可压缩”条件，但分成两部分$(\boldsymbol{\eta}')^{S}$，$(\boldsymbol{\eta}')^{A}$以后，每一部分都不满足“不可压缩”条件，即

$$\eta'^{S}_{ikk} = -\eta'^{A}_{ikk} \neq 0 \qquad ④$$

6.6 证明以下等式

$$\eta'^{S}_{iqq} = \eta'^{S}_{qiq} = \eta'^{S}_{qqi} = \frac{1}{3}\eta'_{qqi} = \frac{2}{3}e_{ipq}\chi'_{pq} \qquad ①$$

（利用(3.13)与习题 6.4）；

$$\eta'^{S}_{ijj}\eta'^{S}_{ikk} = \frac{4}{9}(S - S^{*}) \qquad ②$$

（利用本题①与 $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{\delta}$ 等式），式中 S 与 S^{*}表示 $\boldsymbol{\chi}'$ 的两个不变量，见(3.19)式。

6.7 证明$\boldsymbol{\eta}'^{(2)}$（即$\boldsymbol{\eta}'^{As}$）的性质（3.25a,b,c）。

6.8 证明ξ 也可以通过 $\boldsymbol{\chi}'^{a}$ 表示，

$$\xi_{iqq} = \xi_{qiq} = \xi_{qqi} = \eta'^{S}_{iqq} = \frac{1}{3}\eta'_{qqi} = \frac{2}{3}e_{ipq}\chi'_{pq} = \frac{2}{3}e_{ipq}\chi'^{a}_{pq} \qquad ①$$

（利用(3.27)与习题 6.6）

$$\xi_{ijk} = \frac{1}{5}(\delta_{ij}\xi_{qqk} + \delta_{jk}\xi_{qqi} + \delta_{ki}\xi_{qqj}) \qquad ②$$

$$= \frac{2}{15}(\delta_{ij}e_{kpq} + \delta_{jk}e_{ipq} + \delta_{ki}e_{jpq})\chi'^{a}_{pq} \qquad ③$$

（利用(3.27)与本题①），注意ξ 的下标不论次序，由本题①，ξ_{iqq} 与$\left(\frac{4}{3}\right)\chi'^{a}_{pq}$ 之间属于张量分析中所述的“正偶”关系，故可以互相表示：

$$\chi'^{a}_{pq} = \frac{3}{4}e_{pqk}\xi_{rrk} \qquad ④$$

6.9 证明

$$\eta'^{(3)}_{qqk} = \eta'_{qqk} = 3\xi_{qqk} = 2e_{kpq}\chi'^{a}_{pq} \qquad ①$$

（利用(3.25b)，(3.28)，习题 6.8①）

$$\eta'^{(3)}_{ijk}=\frac{2}{3}e_{ikp}\chi'^{a}_{pj}+\frac{2}{3}e_{jkp}\chi'^{a}_{pi}+\frac{2}{15}\left(\delta_{ij}e_{kpq}+\delta_{jk}e_{ipq}+\delta_{ki}e_{jpq}\right)\chi'^{a}_{pq} \qquad ②$$

（利用(3.29c)习题 6.8③）

6.10 证明

$$\eta'^{Aa}_{iqq}=-\xi_{iqq} \qquad （利用(3.26)_3） \qquad ①$$

$$\eta'^{Aa}_{qqk}=2\xi_{qqk} \qquad （利用(3.26)_3 与习题 6.9①） \qquad ②$$

$$\eta'^{Aa}_{ijk}=\delta_{ij}\xi_{qqk}-\frac{1}{2}\left(\delta_{ki}\xi_{qqj}+\delta_{kj}\xi_{qqi}\right) \qquad ③$$

（将习题 6.8④ χ'^{a}_{pq} 代入(3.22b) η'^{Aa}_{ijk} 式，并利用 $\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$ 等式）

$$\eta'^{(3)}_{ijk}=\frac{6}{5}\delta_{ij}\xi_{qqk}-\frac{3}{10}\delta_{ik}\xi_{qqj}-\frac{3}{10}\delta_{jk}\xi_{qqi} \qquad ④$$

（将本题③ η'^{Aa}_{ijk} 与习题 6.8② ξ_{ijk} 代入$(3.26)_3$ $\eta'^{(3)}_{ijk}$ 式）

$$\begin{aligned}\eta'^{(3)}_{ijk}&=\frac{2}{5}\delta_{ij}\eta'_{qqk}-\frac{1}{10}\delta_{ik}\eta'_{qqj}-\frac{1}{10}\delta_{jk}\eta'_{qqi}\\&=\left(\frac{4}{5}\delta_{ij}e_{kpq}-\frac{1}{5}\delta_{ik}e_{jpq}-\frac{1}{5}\delta_{jk}e_{ipq}\right)\chi'^{a}_{pq}\end{aligned} \qquad ⑤$$

（利用本题④与习题 6.9①）

6.11 对于任意的 $\boldsymbol{\eta}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}$，利用(3.30)，证明 $\boldsymbol{\eta}'^{(n)}$（$n=1,2,3$）分别与 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}^{H}$ 正交。

6.12 以 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 表示由任意的 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}$ 按(3.27)产生的三阶张量，证明 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 与 $\boldsymbol{\eta}'^{As}$ 及 $\boldsymbol{\eta}'^{Aa}$ 正交，即

$$\boldsymbol{\eta}'^{As}:\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=\eta'^{As}_{ijk}\widetilde{\xi}_{ijk}=0 \qquad ①$$

$$\boldsymbol{\eta}'^{Aa}:\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=\eta'^{Aa}_{ijk}\widetilde{\xi}_{ijk}=0 \qquad ②$$

（利用(3.22a,b)及 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 对任意两个指标为对称的性质）。

6.13 证明 $\boldsymbol{\eta}'^{(1)}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ 正交：

$$\boldsymbol{\eta}'^{(1)}:\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=\eta'^{(1)}_{ijk}\widetilde{\xi}_{ijk}=0 \qquad ①$$

（利用(3.27) ξ_{ijk}，并注意 $\boldsymbol{\eta}'^{(1)}$ 满足“不可压缩”条件(3.28)）

$$\boldsymbol{\eta}'^{(2)}:\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=\eta'^{(2)}_{ijk}\widetilde{\xi}_{ijk}=0 \qquad ②$$

（利用 $\boldsymbol{\eta}'^{(2)}$ 满足(3.25c)，及 ξ_{ijk} 分量值与指标次序无关的性质，可先将②式写作

$$\eta'^{(2)}_{ijk}\tilde{\xi}_{ijk}=\frac{1}{3}\eta'^{(2)}_{ijk}\left(\tilde{\xi}_{ijk}+\tilde{\xi}_{jki}+\tilde{\xi}_{kji}\right)$$

的形式）

6.14 证明

$$\boldsymbol{\eta}'^{(1)}:\tilde{\boldsymbol{\eta}}'^{\mathrm{As}}=\eta'^{(1)}_{ijk}\tilde{\eta}'^{\mathrm{As}}_{ijk}=0 \qquad ①$$

$$\boldsymbol{\eta}'^{(1)}:\tilde{\boldsymbol{\eta}}'^{\mathrm{Aa}}=\eta'^{(1)}_{ijk}\tilde{\eta}'^{\mathrm{Aa}}_{ijk}=0 \qquad ②$$

（利用(3.22a,b)及$\boldsymbol{\eta}'^{(1)}$对任意两个指标为对称的性质）

6.15 证明$\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{As}}$与$\tilde{\boldsymbol{\eta}}'^{\mathrm{Aa}}$互相正交，即

$$\boldsymbol{\eta}'^{\mathrm{As}}:\tilde{\boldsymbol{\eta}}'^{\mathrm{Aa}}=\eta'^{\mathrm{As}}_{ijk}\tilde{\eta}'^{\mathrm{Aa}}_{ijk}=0$$

（将(3.22a,b)代入，并利用$\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$等式）

6.16 证明(3.12)，即任意两个$\boldsymbol{\eta}$与$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$的不同分解部分的两两正交性：

$$\boldsymbol{\eta}'^{(i)}:\tilde{\boldsymbol{\eta}}'^{(j)}=0 \qquad 当\ i\neq j$$

（利用(3.26)及习题 6.13～6.15 的结果）

6.17 证明

$$\boldsymbol{\eta}'^{(2)}:\boldsymbol{\eta}'^{(2)}=\eta'^{(2)}_{ijk}\eta'^{(2)}_{ijk}=\frac{4}{3}\left(S+S^*\right)$$

式中S与S^*为$\boldsymbol{\chi}'$的两个不变量，见(3.19)；

（利用(3.29b)及$\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$等式）

6.18 证明

$$\boldsymbol{\xi}:\boldsymbol{\xi}=\xi_{ijk}\xi_{ijk}=\frac{3}{5}\eta'^{\mathrm{S}}_{kpp}\eta'^{\mathrm{S}}_{kqq}=\frac{4}{15}\left(S-S^*\right) \qquad ①$$

（利用(3.27)，$\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$等式与习题 6.6②式）

$$\xi_{iik}\xi_{jjk}=\frac{4}{9}\left(S-S^*\right) \qquad ②$$

（利用习题 6.9①与$\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$等式）

6.19 证明

$$\boldsymbol{\eta}'^{(3)}:\boldsymbol{\eta}'^{(3)}=\eta'^{(3)}_{ijk}\eta'^{(3)}_{ijk}=\frac{8}{5}\left(S-S^*\right)$$

（利用(3.29c)，$\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$等式与习题 6.18）

6.20 证明

$$S=\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'=\chi'_{ij}\chi'_{ij}=\frac{3}{8}\boldsymbol{\eta}'^{(2)}:\boldsymbol{\eta}'^{(2)}+\frac{5}{16}\boldsymbol{\eta}'^{(3)}:\boldsymbol{\eta}'^{(3)} \qquad ①$$

$$S^*=\boldsymbol{\chi}':\boldsymbol{\chi}'^{\mathrm{T}}=\chi'_{ij}\chi'_{ji}=\frac{3}{8}\boldsymbol{\eta}'^{(2)}:\boldsymbol{\eta}'^{(2)}-\frac{5}{16}\boldsymbol{\eta}'^{(3)}:\boldsymbol{\eta}'^{(3)} \qquad ②$$

6.21 证明

$$\eta'_{iik}\eta'_{ijk}=\eta'^{(3)}_{iik}\eta'^{(3)}_{ijk}=4\left(S-S^*\right)=\frac{5}{2}\boldsymbol{\eta}'^{(3)}:\boldsymbol{\eta}'^{(3)}$$

（利用(3.11)，(3.25b)，(3.28)，习题 6.9①，$\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$ 等式与习题 6.19）

6.22 证明

$$\eta'^{(1)}_{ijk}\eta'^{(1)}_{kji}=\eta'^{(1)}_{ijk}\eta'^{(1)}_{ijk},\quad \eta'^{(1)}_{ijk}\eta'^{(2)}_{kji}=0,\quad \eta'^{(1)}_{ijk}\eta'^{(3)}_{kji}=0$$

$$\eta'^{(2)}_{ijk}\eta'^{(1)}_{kji}=0,\quad \eta'^{(2)}_{ijk}\eta'^{(2)}_{kji}=-\frac{2}{3}\left(S-S^*\right)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}'^{(2)}:\boldsymbol{\eta}'^{(2)},\quad \eta'^{(2)}_{ijk}\eta'^{(3)}_{kji}=0$$

$$\eta'^{(3)}_{ijk}\eta'^{(1)}_{kji}=0,\quad \eta'^{(3)}_{ijk}\eta'^{(2)}_{kji}=0,\quad \eta'^{(3)}_{ijk}\eta'^{(3)}_{kji}=-\frac{2}{5}\left(S-S^*\right)=-\frac{1}{4}\boldsymbol{\eta}'^{(3)}:\boldsymbol{\eta}'^{(3)}$$

因此

$$\eta'_{ijk}\eta'_{kji}=\boldsymbol{\eta}'^{(1)}:\boldsymbol{\eta}'^{(1)}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}'^{(2)}:\boldsymbol{\eta}'^{(2)}-\frac{1}{4}\boldsymbol{\eta}'^{(3)}:\boldsymbol{\eta}'^{(3)}$$

(利用(3.29)，$\boldsymbol{e}\sim\boldsymbol{\delta}$ 等式与习题 6.17 和 6.19)。

附录　张量分析（介绍）

本章涉及到的有关内容和详细推证可参考黄克智，薛明德，陆明万编著，张量分析．清华大学出版社，1986 年 3 月。台北亚东书局，1992 年 3 月。

Ⅰ．矢量与张量的概念

1.　矢量

矢量的定义可有三种：

(1) 用一个有大小和方向的量 $\boldsymbol{a}$ 表示一个矢量如图 1 所示。这种简单的几何直观的定义不便于推广到张量。

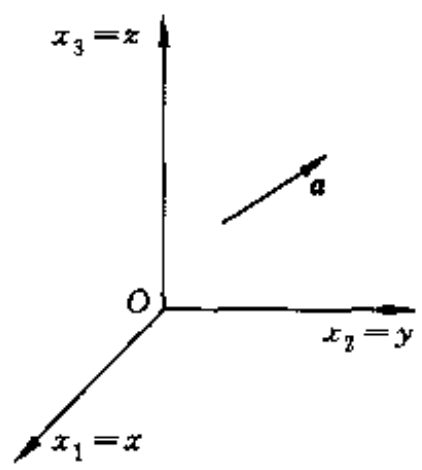


图 1　笛卡尔坐标与矢量

(2) 在较早的教科书中采用传统的定义方法，即用三个数（标量）的集合 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 定义一个三维空间中的矢量。这种定义没有体现矢量的本质。例如一个人的出生年、月、日这三个数的集合显然不构成一个矢量。构成矢量的三个数应与坐标系有关并随着坐标系的改变按一定规则转换。设在直角（笛卡尔）坐标系 $x_i(i=1,2,3)$ 中有一个由三个数组成的集合 $\{a_1,a_2,a_3\}$；在笛卡尔坐标系 $x_{i'}(i'=1,2,3)$ 中组成这个集合的数相应地变为 $\{a'_1,a'_2,a'_3\}$。若它们之间满足关系[1)]

$$a'_{i'}=\beta_{i'j}a_j,\qquad i',j=1,2,3 \tag{1.1a}$$

1) 凡重复出现的指标（称为哑标）均按 1,2,3 取和，这称为求和约定，如不取和，需特别声明。

其中 $\beta_{i'j}$ 为 x_i' 与 x_j 轴之间的方向余弦，即

$$\beta_{i'j} = \cos(x_i', x_j) \tag{1.2a}$$

这时则可以说集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 或 $\{a_1', a_2', a_3'\}$ 定义了一个矢量。不难证明：

$$\beta_{i'j} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \tag{1.2b}$$

$$\begin{aligned} \beta_{i'j}\beta_{k'j} &= \delta_{i'k'}, \\ \beta_{i'j}\beta_{i'k} &= \delta_{jk} \end{aligned} \tag{1.3}$$

式中 $\delta_{..}$ 称为 Kronecker delta，当其两指标相同时取值为 1，两指标不同时取值为零。利用(1.3)式可知，(1.1a)之逆为：

$$a_j = \beta_{i'j} a_i' \tag{1.1b}$$

(1.1b)与(1.1a)是等价的。这种定义方法可推广到张量，但其缺点是方程式依赖于坐标系，写法不够简洁且缺乏几何直观性。

(3) 用分解式定义矢量：以 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_i'$ 表示沿笛卡尔坐标轴的单位矢量，称基矢量。如图 2 所示。

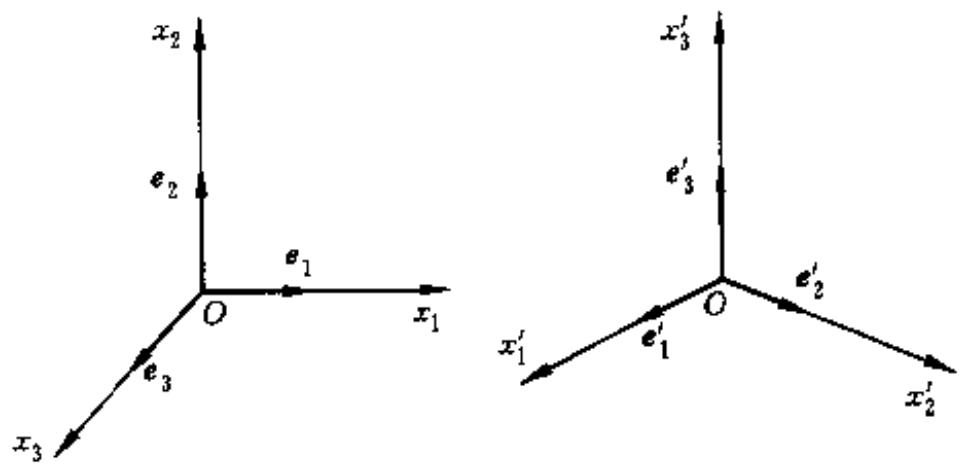


图 2　笛卡尔坐标转换

易知

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i' &= \beta_{i'j}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{e}_j &= \beta_{i'j}\boldsymbol{e}_i' \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

由(1.1a)和(1.4)式有

$$a_i'\boldsymbol{e}_i' = \beta_{i'j} a_j \beta_{i'k}\boldsymbol{e}_k \overset{(1.3)}{=} a_j \delta_{jk}\boldsymbol{e}_k = a_k\boldsymbol{e}_k$$

将上式两端记作

$$\boldsymbol{a} = a_i'\boldsymbol{e}_i' = a_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.5}$$

$\boldsymbol{a}$ 就是我们所定义的矢量，a_i 或 a'_i 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的分量。(1.5)式表明分量与基矢量的这一线性组合是不依赖于坐标系的量 $\boldsymbol{a}$。这种用一个字母记号表示矢量的方法称为抽象记法或绝对记法。(1.5)式称为在坐标系中 $\boldsymbol{a}$ 的分解式。在不同的坐标系中，分量与基矢量均不同，但它们组合起来得到的结果不变。故以 $\boldsymbol{a}$ 记矢量又称不变记法，即与坐标系无关的记法。在本书各章节中，抽象记法与分解式并用。公式采用抽象记法，具体演算仍需要分解式。

2. 张量

用一个二指标量 T_{ij} 表示 9 个数的集合

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

在笛卡尔坐标范围内当坐标转换时，如果这 9 个数据服从与矢量分量(1.1a,b)类似的转换关系，即

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= \beta_{i'k}\beta_{j'l}T_{kl} \\ T_{kl} &= \beta_{i'k}\beta_{j'l}T'_{ij} \end{aligned} \tag{1.6}$$

则这 9 个数的集合定义了一个张量。可以证明

$$\boldsymbol{T} = T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1.7}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j$ 称为并矢基，在某些文献中又记作 $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j$。以上定义的 $\boldsymbol{T}$ 称为二阶张量。它的分量转换关系式(1.6)与矢量分量的转换关系式(1.1)形式相同，只不过转换系数 β 出现两次。$\boldsymbol{T}$ 就是张量的抽象记法，(1.7)为其分解式。(1.5)与(1.7)式表明矢量与张量均具有不变性。应力、应变以及转动惯量都是二阶张量。矢量可以看作一阶张量，而标量则为零阶张量。以后谈到张量的某些运算法则时也包括矢量。同理还可以定义高阶张量，如三阶张量

$$\boldsymbol{T} = T'_{ijk}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k = T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$$

总之，其分量满足以转换系数 $\beta_{\cdot\cdot}$ 表示的转换关系的量称为张量。$\beta_{\cdot\cdot}$ 在转换关系中出现的次数也就是张量的阶数。

上述定义和关系式也可以推广到曲线坐标系（图 3），这时采用的基矢量不再是单位矢量。用 x^i 表示曲线坐标，用 $\boldsymbol{g}_i$ 表示相应的协变基矢量。$\boldsymbol{r}$ 表示所研究点 P 的矢径，则

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}, \qquad i=1、2、3 \tag{1.8}$$

$\boldsymbol{g}_i$ 又称自然基。一旦选定坐标系，它随之被确定。以平面极坐标（二维）为例

$$x^1 = r \qquad |\boldsymbol{g}_1| = 1$$
$$x^2 = \theta \qquad |\boldsymbol{g}_2| = r$$

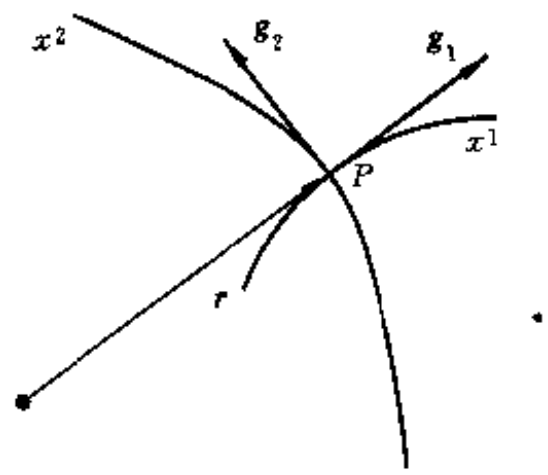


图 3　曲线坐标系（二维，示意）

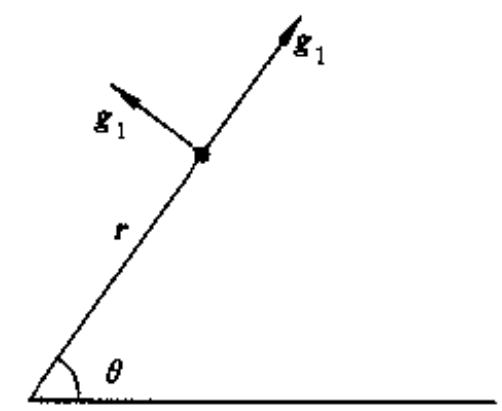


图 4　平面极坐标

由协变基 $\boldsymbol{g}_j$，根据对偶关系(1.9)

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta^i_j \tag{1.9}$$

可以派生出逆变基 $\boldsymbol{g}^i$，式中 δ^i_j 为 Kronecker delta：

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & 当 i = j \\ 0, & 当 i \neq j \end{cases}$$

曲线坐标具有两类基矢量，每一类一般既非单位矢量又非正交，且随点的坐标而变，这就使曲线坐标中的张量运算要比笛卡尔坐标中复杂得多。

代替(1.4)式，曲线坐标中有两套转换系数：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{g}'_i &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \boldsymbol{g}_j = \beta^j_{i'} \boldsymbol{g}_j \\ \boldsymbol{g}_j &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \boldsymbol{g}'_i = \beta^{i'}_j \boldsymbol{g}'_i \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{g}^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \boldsymbol{g}^j = \beta^{i'}_j \boldsymbol{g}^j \\ \boldsymbol{g}^j &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \boldsymbol{g}^{i'} = \beta^j_{i'} \boldsymbol{g}^{i'} \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

在以上两式中我们看到哑标总是一上一下成对出现的。

依选用协变或逆变基的不同，曲线坐标系中矢量有两种分解式：

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{g}_i = a_i \boldsymbol{g}^i \tag{1.12}$$

与协变基同时出现的a^i称为逆变分量，而与逆变基配对的则称协变分量。

这样，二阶张量的分解式则有4种：

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = T^i_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = T_i^{\cdot j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j \tag{1.13}$$

其中T^{ij}，T_{ij}分别为张量的逆变和协变分量，$T^i_{\cdot j}$和$T_i^{\cdot j}$则称混合分量。由基矢量转换关系(1.10)和(1.11)以及张量的不变性很容易写出分量之间的转换关系。

矢量分量的转换关系

$$\begin{aligned} a'_i &= \beta^j_{i'}a_j \qquad & a_j &= \beta^{i'}_j a'_i \\ a'^i &= \beta^{i'}_j a^j \qquad & a^j &= \beta^j_{i'}a'^i \end{aligned} \tag{1.14}$$

二阶张量分量的转换关系

$$\left.\begin{aligned} T'_{ij} &= \beta^k_{i'}\beta^l_{j'}T_{kl} \qquad & T_{kl} &= \beta^{i'}_k\beta^{j'}_l T'_{ij} \\ T'^{ij'} &= \beta^{i'}_k\beta^{j'}_l T^{kl} \qquad & T^{kl} &= \beta^k_{i'}\beta^l_{j'}T'^{ij'} \\ T'^{\cdot j'}_{i'} &= \beta^k_{i'}\beta^{j'}_l T^l_k \qquad & T^l_k &= \beta^{i'}_k\beta^l_{j'}T'^{\cdot j'}_{i'} \\ T'^{i'}_{\cdot j'} &= \beta^{i'}_k\beta^l_{j'}T^k_{\cdot l} \qquad & T^k_{\cdot l} &= \beta^k_{i'}\beta^{j'}_l T'^{i'}_{\cdot j'} \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

本书主要选用直角坐标。此时，张量称为笛卡尔张量。笛卡尔张量的指标不分上下，以后统一采用下标。

II. 张量代数

1. 数乘

设有矢量$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{b} = b_i\boldsymbol{e}_i$，若$\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a}$则$b_i = \alpha a_i$，其中$\alpha$为一标量，反之亦然。即

$$\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a} \Leftrightarrow b_i = \alpha a_i \tag{2.1}$$

同理，若有二阶张量$\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$和$\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，则

$$\boldsymbol{T} = \alpha\boldsymbol{S} \Leftrightarrow T_{ij} = \alpha S_{ij} \tag{2.2}$$

2. 加法

若有$\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$和$\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{S} \Leftrightarrow B_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \tag{2.3}$$

3. 点积

矢量的点积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(b_j\boldsymbol{e}_j) = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i$$

在曲线坐标系中

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^{i}b_{i}=a_{i}b^{i} \tag{2.4}$$

可见点积相当于指标缩并。二阶张量与矢量的点积

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\left(T_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}\right)\cdot\left(a_{k}\boldsymbol{e}_{k}\right)=T_{ij}a_{k}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_{i}=T_{ij}a_{j}\boldsymbol{e}_{i}$$

所以

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}\Leftrightarrow b_{i}=T_{ij}a_{j} \tag{2.5}$$

上右式表示 b_i 是 a_j 的线性组合，其系数为 T_{ij} 。所以一些现代教科书把二阶张量定义为一个线性变换。

曲线坐标中，(2.5)式应记作

$$b_{i}=T_{ij}a^{j}=T_{i}^{\cdot j}a_{j}$$

同理

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}\Leftrightarrow c_{j}=a_{i}T_{ij}$$

二阶张量的迹

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\cdot\boldsymbol{e}_{j}=T_{ij}\delta_{ij}=T_{ii} \tag{2.6}$$

所以“迹”就是二阶张量在其并矢的两个矢量之间取点积，等于对两个指标取和（又称缩并），它等于张量主对角线分量之和。

二阶张量之间的点积和双点积

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j},\qquad \boldsymbol{S}=S_{kl}\boldsymbol{e}_{k}\boldsymbol{e}_{l}$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}=\left(T_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}\right)\cdot\left(S_{kl}\boldsymbol{e}_{k}\boldsymbol{e}_{l}\right)=T_{ij}S_{kl}\left(\boldsymbol{e}_{j}\cdot\boldsymbol{e}_{k}\right)\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{l}=T_{ij}S_{kl}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{l}=T_{ij}S_{jl}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{l}$$

所以

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}\Leftrightarrow U_{il}=T_{ij}S_{jl} \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}=\left(T_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}\right):\left(S_{kl}\boldsymbol{e}_{k}\boldsymbol{e}_{l}\right)=T_{ij}S_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}=T_{ij}S_{ij} \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{T}\cdot\cdot\boldsymbol{S}=\left(T_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}\right)\cdot\cdot\left(S_{kl}\boldsymbol{e}_{k}\boldsymbol{e}_{l}\right)=T_{ij}S_{kl}\delta_{il}\delta_{jk}=T_{ij}S_{ji} \tag{2.9}$$

4. 并乘

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两矢量。定义二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\left(a_{i}\boldsymbol{e}_{i}\right)\left(b_{j}\boldsymbol{e}_{j}\right)=a_{i}b_{j}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}$$

某些文献记作

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

所以

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{ab}\Leftrightarrow T_{ij}=a_ib_j \tag{2.10}$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为矢量，$\boldsymbol{T}$ 为二阶张量。定义三阶张量 $\boldsymbol{W}$ 为

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{aT}=(a_i\boldsymbol{e}_i)\left(T_{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\right)=a_iT_{jk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{aT}\Leftrightarrow W_{ijk}=a_iT_{jk} \tag{2.11}$$

5. 叉乘

引入置换符号

$$e_{ijk}=\begin{cases}0 & \text{当两个或两个以上指标取相同值时}\\ 1 & \text{当}i,j,k\text{按正序(即1,2,3; 2,3,1; 3,1,2)取值}\\ -1 & \text{当}i,j,k\text{按逆序(即1,3,2; 2,1,3; 3,2,1)取值}\end{cases}$$

不难验证

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k&=e_{ijk}\boldsymbol{e}_i\\ \boldsymbol{e}_i&=\frac{1}{2}e_{ijk}\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

利用置换符号，叉乘可表示为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\left(a_j\boldsymbol{e}_j\right)\times\left(b_k\boldsymbol{e}_k\right)=e_{ijk}a_jb_k\boldsymbol{e}_i\\ c_i&=e_{ijk}a_jb_k\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

6. 转置

$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{S}$ 为二阶张量.

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\qquad \boldsymbol{S}=S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

若 $S_{ij}=T_{ji}$，则记 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 互为转置。显然

$$\boldsymbol{S}=T_{ji}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=T_{ij}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$$

用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 表示矢量，显然

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}},\qquad T_{ij}a_j=a_jT_{ji}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{T}&=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{c},\qquad c_iT_{ij}=T_{ji}^{\mathrm{T}}c_i\end{aligned} \tag{2.14}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为二阶张量时

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}&=\boldsymbol{A}\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

若 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，则 $T_{ij}=T_{ji}$，这时称 $\boldsymbol{T}$ 为对称张量。应力张量与应变张量均为对称的二阶张量。若 $-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，则 $T_{ij}=-T_{ji}$，这时称 $\boldsymbol{T}$ 为反对称张量。可以证明，对于对称张量一定可以找到三个互相正交的主方向，沿主方向的坐标系称为主坐标系。若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为主坐标系的基矢量，则对称张量 $\boldsymbol{N}$ 一定可以表示为标准型

$$\boldsymbol{N}=N_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+N_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+N_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

其中 N_1,N_2,N_3 称为对称张量 $\boldsymbol{N}$ 的主值或主分量。在主坐标系中 $\boldsymbol{N}$ 的非对角线分量均为零。如果对于任意的非零矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{a}>0$，则称对称张量 $\boldsymbol{N}$ 为正张量。显然，正张量 $\boldsymbol{N}$ 的三个主值 N_1,N_2,N_3 均为正数；$N_1>0,N_2>0,N_3>0$。

7. 几种常用的二阶张量

(1) 单位张量

可以证明

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{1}&=\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\\ \mathbf{1}&=\delta_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j=\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_1+\boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_2+\boldsymbol{e}'_3\boldsymbol{e}'_3\end{aligned}\right\}\tag{2.16}$$

即在任何笛卡尔坐标系中单位张量的分量都是 Kronecker detla。

性质：若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 分别为任意矢量和任意二阶张量，则

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{1}=\boldsymbol{a}\\ \mathbf{1}\cdot\boldsymbol{T}&=\boldsymbol{T},\qquad \boldsymbol{T}\cdot\mathbf{1}=\boldsymbol{T}\end{aligned}\right\}\tag{2.17}$$

(2) 置换张量　它是以置换符号 e_{ijk} 为分量的三阶张量，记作

$$\boldsymbol{e}=e_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k=e'_{ijk}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\tag{2.18}$$

上式可通过三阶张量的转换关系证明，但需注意若转换前的坐标系为右手系，转换后也必须为右手系，否则上式相差一个负号。利用置换张量可将叉乘表示为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}:(\boldsymbol{ab})\tag{2.19}$$

(3) 逆张量

二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的逆 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 由下式定义：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}&=\mathbf{1},\qquad T_{ij}T^{-1}_{jk}=\delta_{ik}\\ \boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}&=\mathbf{1},\qquad T^{-1}_{ij}T_{jk}=\delta_{ik}\end{aligned}\tag{2.20}$$

并非所有二阶张量都有逆。有逆存在的张量称为可逆张量。

性质：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为可逆张量，则

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1}&=\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\\ (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}&=\boldsymbol{A}\end{aligned}\right\}\tag{2.21}$$

(4) 正交张量

$$\boldsymbol{R}=R_{ij}\boldsymbol{e}_i\dot{\boldsymbol{e}}_j$$

正交张量对应的矩阵

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

为正交矩阵。性质：$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}=\mathbf{1}$，即

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{-1} \tag{2.22}$$

若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a}$，其中 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为矢量，则可证明 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{b})$。所以正交张量对应的线性变换是保持矢量的长度和内积不变的。这种变换代表一个转动。

8. 加法分解

任何二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 均可分解为对称张量 $\boldsymbol{N}$ 和反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 之和，

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T}&=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{N}&=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right) \\ \boldsymbol{\Omega}&=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

而对称张量 $\boldsymbol{N}$ 又可分解为球形张量 $\boldsymbol{P}$ 和偏斜张量 $\boldsymbol{D}$；

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{D}, \qquad N_{ij}=P_{ij}+D_{ij} \\ &\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}N_{kk}\mathbf{1} \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

9. 乘法分解（极分解）

设 $\boldsymbol{T}$ 为任意一个可逆的二阶张量，则它可以分解为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}_2 \tag{2.25}$$

其中 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 为正交张量，实际上可证明 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$ 代表旋转。$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 均为对称的正张量（即其三个主值均为正数），代表纯变形。上式的前后两段分别称为右极分解和左极分解。这样 $\boldsymbol{T}$ 对应的线性变换就可以写为

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.26}$$

等式的前一段表示先变形后转动，等式的后一段则表示先转动后变形。下面我们直接由 $\boldsymbol{T}$ 求出 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{R}$，这也就是证明了 $\boldsymbol{T}$ 可做上述的极分解。

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{T}=\left(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\right)\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^2$$

由于我们已经假设 $\boldsymbol{T}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{T}$ 必为正张量（因 $\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{T}\right)\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a})>0$，$\boldsymbol{a}$ 为任意非零矢量，$\boldsymbol{T}$ 为可逆），显然它也是对称张量，因此我们可以将其写为标准型

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{T}=\lambda_1^2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{U}^2 \tag{2.27}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 均大于零，所以

$$\boldsymbol{U}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{2.28}$$

这样我们就求出了 $\boldsymbol{U}$。利用

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{R} \tag{2.29}$$

则可求出 $\boldsymbol{R}$。$\boldsymbol{R}$ 为正交张量，因为利用(2.27)，可证

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\right)\cdot\left(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})^{-1}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\mathbf{1}$$

利用 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 重复上述步骤则可得 $\boldsymbol{V}$。在进行大变形的几何分析时需要用到乘法分解。

10. 商法则

若某量与任意一个张量的点积为张量，则该量必为张量。例如 $\boldsymbol{a}$ 为任意矢量（一阶张量），$\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 点积所得的 $\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，都是张量（一阶），即 $\boldsymbol{b}$ 的分量服从坐标转换关系，$b_i=b_{j'}\beta_{j'i}$ 则 $\boldsymbol{T}$ 必为张量。

III. 张量的微积分

1. 梯度

设有标量函数 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$，例如物体的温度和密度。当坐标转换时同一点的新老坐标值不同了，函数 φ 的形式也随之改变，但同一点的 φ 值保持不变(即不随坐标变换而改变)。$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ 有三个分量，它们的几何集合是否构成一个矢量？由复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i'}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_{i'}}=\beta_{i'j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

上式表明 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ 是矢量的分量。利用算符 ∇（读作 nabla）把它记作

$$\left.\begin{aligned}\varphi\boldsymbol{\nabla}&=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i'}\boldsymbol{e}_i'\\ \boldsymbol{\nabla}\varphi&=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\boldsymbol{e}_i'\frac{\partial\varphi}{\partial x_i'}\end{aligned}\right\} \tag{3.1a}$$

显然 $\varphi\nabla=\nabla\varphi$，我们称其为标量场 $\varphi(x_i)$ 的梯度。梯度为一矢量场，其方向垂直于 φ 的等值面并指向 φ 增加的方向。

$$\left.\begin{aligned}(\varphi\nabla)_i&=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\varphi_{,i}\\(\nabla\varphi)_i&=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\partial_i\varphi\end{aligned}\right\}\tag{3.1b}$$

梯度可以推广到矢量场和张量场。

设 $\boldsymbol{v}(x_1,x_2,x_3)$ 为一矢量场，例如速度或位移场。

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\nabla&=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=v_{i,j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\\&=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x'_j}\boldsymbol{e}'_j=\frac{\partial}{\partial x'_j}(v'_i\boldsymbol{e}'_i)\boldsymbol{e}'_j=\frac{\partial v'_i}{\partial x'_j}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j=v'_{i,j}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\end{aligned}\tag{3.2a}$$

$$(\boldsymbol{v}\nabla)_{ij}=v_{i,j}\tag{3.2b}$$

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(v_j\boldsymbol{e}_j)=\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\partial_i v_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\\&=\boldsymbol{e}'_i\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x'_i}=\boldsymbol{e}'_i\frac{\partial}{\partial x'_i}(v'_j\boldsymbol{e}'_j)=\frac{\partial v'_j}{\partial x'_i}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j=\partial'_i v'_j\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\end{aligned}\tag{3.3a}$$

$$(\nabla\boldsymbol{v})_{ij}=\partial_i v_j\tag{3.3b}$$

显然 $\boldsymbol{v}\nabla$ 为二阶张量场，$\boldsymbol{v}\nabla=(\nabla\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}$。

2. 散度和旋度

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{v}\nabla)$ 称为矢量场 $\boldsymbol{v}$ 的散度

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{v}\nabla)&=\boldsymbol{v}\cdot\nabla=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_j}\cdot\boldsymbol{e}_j=v_{i,j}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=v_{i,j}\delta_{ij}=v_{i,i}\\\mathrm{tr}(\nabla\boldsymbol{v})&=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}=\partial_i v_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\partial_i v_i\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

散度 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla=\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ 为一标量场。

(2) $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 称为旋度，它是一个矢量场，定义为：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{V}&=\boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}=\partial_i v_j\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\partial_i v_j e_{ijk}\boldsymbol{e}_k\\\boldsymbol{V}\times\nabla&=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_j}\times\boldsymbol{e}_j=v_{i,j}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=v_{i,j}e_{ijk}\boldsymbol{e}_k\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

由置换符号的性质可知$\boldsymbol{v}\times\nabla=-\nabla\times\boldsymbol{v}$。

由上可见，∇运算可施加于任意阶张量 $\boldsymbol{T}$，并可以证明所得到的为高一阶的张量。例如：

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{T}\nabla&=\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k=T_{ij,k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k=T'_{ij,k}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\\ \nabla\boldsymbol{T}&=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_i}=\partial_iT_{jk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k=\partial'_iT'_{jk}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

显然$\boldsymbol{T}\nabla\neq\nabla\boldsymbol{T}$。类似有

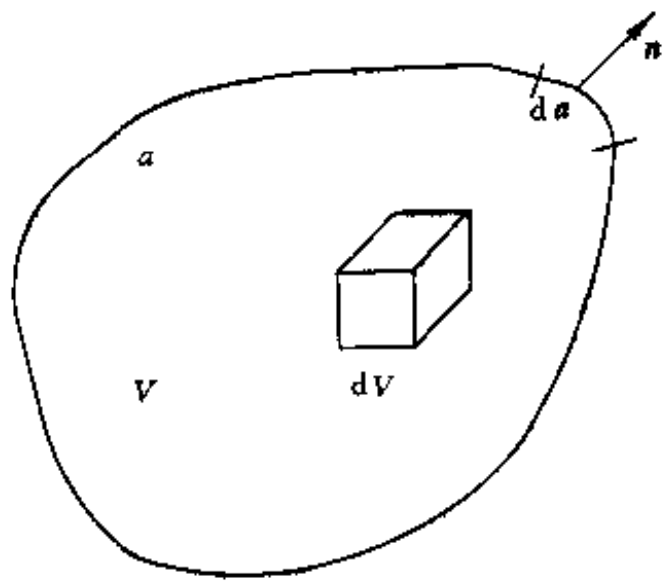
$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{T}\cdot\nabla&=\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_k}\cdot\boldsymbol{e}_k=T_{ij,k}\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)=T_{ij,k}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{T}_{ij,j}\boldsymbol{e}_i\\ \nabla\cdot\boldsymbol{T}&=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_i}=\partial_iT_{jk}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k=\partial_iT_{jk}\delta_{ij}\boldsymbol{e}_k=\partial_iT_{ik}\boldsymbol{e}_k\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{T}\times\nabla&=\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_k}\times\boldsymbol{e}_k=T_{ij,k}\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)=T_{ij,k}e_{jkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l\\ \nabla\times\boldsymbol{T}&=\boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_i}=\partial_iT_{jk}(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k=\partial_iT_{jk}e_{ijm}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_k\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

3. Green 公式和 Stokes 公式

V 为三维空间的域，a 为其封闭表面。面元 da 处的单位外法线记作 $\boldsymbol{n}$。我们可将面元表示为一个矢量 d$\boldsymbol{a}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$$



图III-1　三维空间的域 V 与封闭表面 a

可以证明

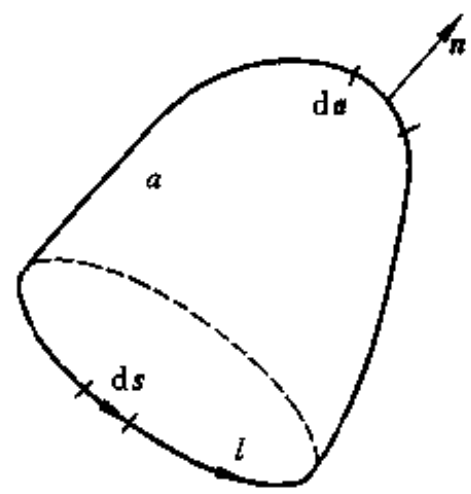
$$\int_V \mathrm{d}V \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} \tag{3.9}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为矢量场（例如速度场）。这就是所谓的 Green 公式。若 $\boldsymbol{v}$ 为速度场，只要注意到等式左端的 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ 表示单位时间内单位体积向外的流量，Green 公式的物理意义是显然的。将 Green 公式中的 $\boldsymbol{v}$ 推广为任意阶的张量场 $\boldsymbol{\varphi}$，不难得到

$$\left.\begin{aligned}
&\int_V \mathrm{d}V \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = \oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \qquad \int_V \mathrm{d}V \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla = \oint_a \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \\
&\int_V \mathrm{d}V \nabla \boldsymbol{\varphi} = \oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a} \boldsymbol{\varphi}, \qquad \int_V \mathrm{d}V \boldsymbol{\varphi} \nabla = \oint_a \boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}\boldsymbol{a} \\
&\int_V \mathrm{d}V \nabla \times \boldsymbol{\varphi} = \oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\varphi}, \qquad \int_V \mathrm{d}V \boldsymbol{\varphi} \times \nabla = \oint_a \boldsymbol{\varphi} \times \mathrm{d}\boldsymbol{a}
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

设开口曲面 a 的封闭边界为 l，l 的指向与面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 成右手系，则

$$\int_a \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \oint_l \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}$$



图III-2　开口曲面 a 与封闭边界 l

这就是 Stokes 公式。将 $\boldsymbol{v}$ 推广为任意阶的张量 $\boldsymbol{\varphi}$，

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) = \int_l \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\varphi} \\
&\int_a (\boldsymbol{\varphi} \times \nabla) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\int_l \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

参 考 文 献

Acharya A, Bassani J L. 1995. On non-local flow theories that preserve the classical structure of incremental boundary value problems. IUTAM Symposium, Paris, Aug 29-Sept 1

Aifantis E C. 1984. On the microstructural origin of certain inelastic models. Trans. ASME J Eng Mater Tech, 106: 326~330

Ashby M F. 1970. The deformation of plastically non-homogeneous alloys. Phil Mag, 21: 399~424

Atkinson A, Leppington F G. 1977. The effect of couple stresses on the tip of a crack. Int J Solids Struct, 13: 1103~1122

Begley M R, Hutchinson J W. 1997. The mechanics of size-dependent indentation. J Mech Phys Solids, 46: 2049~2068

Benveniste Y. 1987. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. Mech Materials, 6: 147~157

Besseling J F, Van der Giessen E. 1993. Mathematical Modelling of Inelastic Deformation. London: Chapman & Hall.

Budiansky B. 1957. Discussion on the Prager's paper. J Appl Mech, 24 (3)

Budiansky B. 1959. A reassessment of deformation theories of plasticity. Journ Appl Mech, 26: 259~264

Budiansky B. 1965. On the elastic moduli of some heterogeneous material. J Mech Phys Solids, 13: 223~227

Budiansky B, Hutchinson J W, Lambropoulos J C. 1983. Continuum theory of dilitant transformation toughening in ceramics. Int J Solids Struct, 19(4): 337~355

Chen J Y, Huang Y, Ortiz M. 1998. Fracture analysis of cellular materials: a strain gradient model. J Mech Phys Solids, 46(5): 789~828

Chen J Y, Wei Y, Huang Y, Hutchinson J W, Hwang K C. The asymptotic crack tip fields in strain gradient plasticity. Eng Fract Mech (in press)

Cheng L, Hwang K C. 1987. On embedded material derivative and frame spin. Acta Mechanica Sinica, 4(2): 190~194 [力学学报，19(6): 524~528]

Christensen R M. 1990. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. J Mech Phys Solids, 38: 379~404

Christensen R M, Lo K H. 1979. Solutions for effective properties in three phases sphere and cylinder models. J Mech Phys Solids, 27: 315~330

Christofferson J, Hutchinson J W. 1979. A class of phenomenological corner theories of plasticity. J Mech Phys Solids, 27: 465~487

Cottrell A H. 1964. The mechanical properties of materials. Wiley, New York, 277

Dai H, Parks D M. 1997. Geometrically-necessary dislocation density in continuum crystal plasticity theory and FEM implementation. (unpublished manuscript).

De Guzman M S, Neubauer G, Flinn P, el al.. 1993. The role of indentation depth on the measured hardness of materials. Mats Res Symp Proc, 308: 613~618

Dienes J K. 1979. On the analysis of rotation and stress state in deforming bodies. Acta Mechanica, 32:217~232

Drucker D C. 1951. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proceedings 1st U.S. National Congress on Applied Mechanics, 487~491

Elssner G, Korn D, Ruehle M. 1994. The influence of interface impurities on fracture energy of UHV diffusion bonded metal-ceramic bicrystals. Scripta Metal Mater, 31: 1037~1042

Eshelby J D. 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. Proc Roy Soc Lond, A241: 376~396

Eshelby J D. 1959. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. Proc Roy Soc Lond. A252: 561~569

Eshelby J D. 1961. Elastic inclusions and inhomogeneitics. In: Sneddon I N, Hill R, ed. Progress in Solid Mechanics, North -Holland, Amsterdam, 2: 89~140

Fang D N, Lu W, Yan W Y, Tatsuo I, Hwang K C. 1999. Stress-strain relation of CuAlNi SMA single crystal under biaxial loading—constitutive model and experiments. Acta Mater, 47(1): 269~280

Fleck N A, Hutchinson J W. 1993. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. J Mech Phys Solids, 41: 1825~1857

Fleck N A, Hutchinson J W. 1997. Strain gradient plasticity. In: Hutchinson J W, Wu T Y, ed. Advanced Applied Mechanics, Academic Press, 33: 295~361

Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, et al.. 1994. Strain gradient plasticity: theory and experiment. Acta Metall Mater, 42: 475~487

Fleck N A, Shu J. 1995. Microbuckle initiation in fiber composites: a finite element study. J Mech Phys Solids, 43: 1887~1918

Gao H, Huang Y, Nix W D, Hutchinson J. W.. 1999. Mechanism-based strain gradient plasticity-I. Theory. J Mech Phys Solids, 47: 1239~1263

Green A E, Naghdi P M. 1965. A general theory of an elastic-plastic continuum. Arch Rat Mech Anal, 18: 251~281

Green A E, Naghdi P M. 1971. Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain. Int J Eng Sci, 9: 1219~1229

Hashin Z, Shtrikman S. 1962. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. J Mech Phys Solids, 10: 343~352

Hashin Z. Shtrikman S. 1963. A variational approach to the elastic behaviour of multiphase materials. J Mech Phys Solids, 11: 127~140

Hershey A V. 1964. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. J Appl Mech, 21: 236~241

Hill R. 1950. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: At the Clarendon Press

Hill R. 1952. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. Proc Phys Soc, A65: 349~354

Hill R. 1963. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. J Mech Phys Solids, 11: 357~372

Hill R. 1965a. Continuum micro-mechanics of elastic-plastic polycrystals, J. Mech Phys Solids, 13: 89~101

Hill R. 1965b. A self -consistent mechanics of composite materials. J Mech Phys Solids, 13: 213~222

Hill R. 1968a. On constitutive inequalities for simple materials, I. J Mech Phys Solids, 16: 209~242

Hill R. 1968b. On constitutive inequalities for simple materials, II. J Mech Phys Solids, 16: 315~322

Hill R. 1972. On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. Proc Roy Soc Lond, A326: 131~147

Hill R. 1978. Aspects of invariance in solids mechanics. In: Yih C S, ed. Advances in Applied Mechanics. Academic Press, 18: 1~75

Hill R, Rice J R. 1972. Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain. J Mech Phys Solids, 20: 401~413

Hill R, Rice J R. 1973. Elastic potential and the structure of inelastic constitutive laws. SIAM J Appl Math. 25(3): 448~461

Huang Y, Chen J Y, Guo T F, Zhang L, Hwang K C. 1999. Analytical and numerical studies on mode I and mode II fracture in elastic-plastic materials with strain gradient effects. Int J Fracture (in press)

Huang Y, Gao H, Hwang K C. 1999. Strain-gradient plasticity at the micron scale. In: Ellyin F, Provan JW, eds. Progress in Mechanical Behaviour of Materials, Fleming Printing Ltd, 1051-1056 (Invited lecture at Eighth International Conference on Mechanical Behavior of Materials, Victoria, British Columbia, Canada, May 16-21)

Huang Y, Gao H, Nix W D, Hutchinson J. W.. 1999. Mechanism-based strain gradient plasticity-II. analysis. J Mech Phys Solids (in press)

Huang Y, Hu K X. 1995. A generalized self-consistent mechanics method for solids containing elliptical inclusions. ASME J Appl Mech, 62: 566~572

Huang Y, Hu K X, Chandra A. 1994. A generalized self-consistent mechanics method for microcracked solids. J Mech Phys Solids, 42: 1273~1291

Huang Y, Hu K X, Wei X, et al.. 1994. A generalized self-consistent mechanics method for composite materials with multiphase inclusions. J Mech Phys Solids, 42: 491~504

Huang Y, Hwang K C. 1995. A unified energy approach to a class of micromechanics models for microcracked solids. Acta Mechanica Solida Sinica, 8(2): 32~42

Huang Y. Hwang K C, Hu K X, et al.. 1995. A unified energy approach to a class of micromechanics

models for composite materials. Acta Mechanica Sinica, 11(1): 59~75

Huang Y, Zhang L, Guo T F, Hwang K C. 1995. Near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects. IUTAM Symposium on Nonlinear Analysis of Fracture, Cambridge University, ed. Willis J R, 231~242

Huang Y, Zhang L, Guo T F, Hwang K C. 1997a. Fracture of materials with strain gradient effects. In: Karihaloo B L, et al., ed. Advances in fracture research, Ninth Int Conf Fracture, Sydney, Australia, Pergamon, 5: 2275~2286

Huang Y, Zhang L, Guo T F, Hwang K C. 1997b. Mixed mode near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects. J Mech Phys Solids, 45: 439~465

Huang ZP. 1994. A rate-independent thermoplastic theory at finite deformation. Arch Mech, 46(6):855-879.

Hutchinson J W. 1970. Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites. Proc Roy Soc Lond, A319: 247~272

Hutchinson J W. 1973. Finite strain analysis of elastic-plastic solids and structures. In: Hartung R P, ed. Numerical Solution of Nonlinear Structural Problems. ASME, 17~29

Hutchinson J W. 1997. Linking scales in fracture mechanics. In: Karihaloo B L, et al. ed. Advances in Fracture Research. Ninth Int Conf Fracture, Sydney, Australia, Pergamon, 1: 1~14

Hwang Keh-Chih. 1958. On hardening of rigid-plastic material. Prikl Mat Mekh, 22: 544~546（俄文）

Hwang K C, Guo T F, Huang Y, et al.. 1998. Fracture in strain gradient elasticity. Metals and Materials, Special Volume Containing the Proceedings of the Fourth Asia-Pacific Syposium on Advances in Engineering Plasticity and Its Applications, Seoul National University, Seoul, Korea, 4: 593~600

Hwang K C, Inone T. 1998. Recent advance in strain gradient plasticity. Mat Sci Res Int, 4(4): 227~238

Hwang K C, Sun Q P. 1991. Transformation plasticity and its application to ceramics toughening. In: Jono M. Tatsuo I, eds. Mechanical Behaviour of Materials-VI, Proceedings of the Sixth Int Conf, Kyoto, Japan. Pergamon Press, 1: 159~164

Hwang K C, Sun Q P. 1995. Thermoelastic martensitic transformation induced plasticity—micromechanical modelling, experiments and simulations. In: Bakker A, ed. Invited Papers of the 7th Int. Conf. on Mechanical Behaviour of Materials. European Structural Integrity Society-ESIS. Delft University Press, 77~100

Hwang K C, Sun Q P, Yu S W. 1990. A micromechanics constitutive theory for forward transformation plasticity with shear and dilatation effect: I. Nonproportional loading history. Acta Mechanica Sinica, 6(4): 324~332

Ilyushin A A. 1961. On a postulate of plasticity. Prikl Mat Mekh, 25: 503~507（俄文）

Kocks U F. 1970. The relation between polycrystal deformation and single crystal deformation. Metall Trans, 1: 1121~1144

Koiter W T. 1953. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. Quart Appl Math, 11: 350~354

Koiter W T. 1960. General theorems for elastic-plastic solids, In: Sueddon I N, Hill R, ed. Progress in Solid Mechanics, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1: 165~221

Koiter W T. 1964. Couple stresses in the theory of elasticity, I and II. Proc Ned Akad Wet (B), 67: 17~44

Kröner E. 1958. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. Z Phys, 151: 504~518

Lee E H. Elastic-plastic deformation at finite strain. J Appl mech, 36: 1~6

Lloyd D J. 1994. Particle reinforced aluminum and magnesium matrix composites. Int Mater Reviews, 39: 1~23

Ma Q, Clarke D R. 1995. Size dependent hardness of silver single crystals. J Mater Res, 10: 853~863

Mandel J. 1971. Plasticité Classique et Viscoplasticité. Cours au Centre International des Sciences Mecaniques, Udine

Mandel J. 1973. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. Int J Solids Struct, 9: 725~740

Mandel J. 1974. Director vectors and constitutive equations for plastic and visco-plastic media. In: Sawczwk A, ed. Problems of Plasticity. 135~143

McElhaney K W, Vlassak J J, NixW D. 1998. Determination of indenter tip geometry and indentation contact area for depth-sensing indentation experiments. J Mat Res, 13: 1300~1306

Mindlin R D. 1964. Micro-structure in linear elasticity. Archive Rational Mechanics Analysis, 16: 51~78

Mindlin R D. 1965. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. Int J Solids Struct, 1: 417~438

Moran B, Ortiz M, Shih C F. 1990. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. Int J Num Meth Eng, 29: 483~514

Mori T, Tanaka K. 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Metall, 21: 571~574

Muhlhaus H B, Aifantis E C. 1991. A variational principle for gradient plasticity. Int J Solids Struct, 28: 845~857

Mura T. 1987. Micromechanics of Defects in Solids. 2nd ed, Martinus Nijhoff Publishers.

Needleman A, Tvergaard V. 1977. Necking of biaxially stretched elastic-plastic circular plates, J Mech Phys Solids, 25: 159~183

Nix W D. 1989. Mechanical properties of thin films. Met Trans A, 20A: 2217~2245

Nix W D, Gao H. 1998. Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity. J Mech Phys Solids, 46: 411~425

Nix W D, Gibeling. 1985. Mechanisms of time-dependent flow and fracture of metals. Metals/Materials Technology Series 8313-004, ASM, Metals Park, OH.

Norris A N. 1985. A differential scheme for the effective moduli of composites. Mech of Materials, 4: 1~16

Nye J F. 1953. Some geometrical relations in dislocated crystal. Acta Metal, 1: 153~162

Poole W J, Ashby F M, Fleck N A. 1996. Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polcrystals. Scripta Metall et Mater, 34: 559~564

Prager W. 1945. Strain hardening under combined stress. J Appl Phys, 16: 837~840

Prager W. 1956. A new method of analyzing stress and strain in work-hardening plastic solids. J Appl Mech, 23(4): 493~496

Reuss A. 1929. Berechnung der Fliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitatsbedingung für Einkristalle. Z angew Math Mech, 9: 49~58（转引自 Mura T 书。）

Rice J R. 1971. Inelastic constitutive relations for solids: an internal-variable theory and its application to metal plasticity. J Mech Phys Solids, 19: 433~455

Rice J R. 1975. Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanics. In: Argon A S, ed. Constitutive Equations in Plasticity, MIT Press, Chapter 2: 23~79

Rudnicki J W, Rice J R. 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. J Mech Phys Solids, 23: 371~394

Sanders J L Jr. 1952. Plastic stress-strain relations based on infinitely many plane loading surfaces. Brown University Report. A11~106

Sanders J L Jr. 1954. Plastic stress-strain relations based on linear loading functions. In: Naghdi P M et al., ed. Proceedings of U.S. 2nd National Congress of Applied Mechanics. ASME, 455~460

Shi M X, Huang Y., Gao H, Hwang K C. 1999. Non-existence of separable crack tip field in mechanism-based strain gradient plasticity. Int J Fracture, (in press)

Shield R T, Ziegler M. 1958. On Prager's hardening rule. Z Ang Math und Phys(ZAMP), 9a: 260~276

Shu J Y, Fleck N A. 1998. The prediction of a size-effect in microindentation. Int J Solids Struct, 35:1363~1383

Simo J C, Ortiz M. 1985. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49: 221~245

Simo S C, Pister K C. 1984. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 46: 201~215

Smyshlyaev V P. Fleck N A. 1996. The role of strain gradients in the grain size effect for polycrystals. J Mech Phys Solids, 44: 465~495

Stelmashenko N A, Walls A G, Brown L M et al.. 1993. Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study. Acta Metal et Mater, 41: 2855~2865

Sternberg E, Muki R. 1967. The effect of couple-stresses on the stress concentration around a crack. Int J Solids Struct, 3: 69~95

Stolken J S, Evans A G. 1998. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. Acta Mater, 46: 5109~5115

Stören S, Rice J R. 1975. Localized necking in thin sheets. J Mech Phys Solids, 23: 421~441

Sun Q P, Hwang K C. 1992. Micromechanics modeling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys. In: Wang R, Drucker D C, ed. Proceeding of the IUTAM Symposium on Constitutive Relations for Finite Plastic Deformation of Polycrystalline Metals, Beijing, July 22~25, 1991. Springer-Verlag, 188~201

Sun Q P, Hwang K C. 1993a. Micromechanics modeling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys-I. Derivation of general relations. J Mech Phys Solids, 41(1): 1~17

Sun Q P, Hwang K C. 1993b. Micromechanics modeling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys-II. Study of the individual phenomena. ibid. 41(1): 19~33

Sun Q P, Hwang K C. 1994. Micromechanics constitutive description of thermoelastic martensite transformations. In: Hutchinsion J W ,Wu T Y, ed. Advances in Applied Mechanics. Academic Press, 31:249~298

Sun Q P, Hwang K C, Yu S W. 1991. A micromechanics constitutive model of transformation plasticity with shear and dilatation effect. J Mech Phys Solids, 39(4): 507~524

Taylor G I. 1938. Plastic strain in metals. J Inst Metals, 62: 307~324

Toupin R A. 1962. Elastic materials with couple stresses. Archive Rational Mechanics Analysis. 11: 385~414

Truesdell C, Noll W. 1965. The Non-linear Fields Theories of Mechanics. In: Flügge W, ed. Handbuch der Physik. Vol. III/3. Springer.

Voigt W. 1889. Uber die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper . Wied Ann，38: 573~587（转引自 Mura T 书。）

Wang Y M, Weng G J. 1992. The influence of inclusion shape on the overall viscoelastic behavior of composites. ASME J Appl Mech, 59: 510~518

Wei Y, Hutchinson J W. 1997. Steady-state crack growth and work of fracture for solids characterized by strain gradient plasticity. J Mech Phys Solids, 45: 1253~1273

Wei Y, Hutchinson J W. 1998. On finite element method for the mixed strain problems. (work in progress).

Weng G J. 1984. Some elastic properties of reinforced solids, with special references to isotropic ones containing spherical inclusions. Int J Eng Sci, 22: 845~856

Xia Z C, Hutchinson J W. 1996. Crack tip fields in strain gradient plasticity. J Mech Phys Solids, 44: 1621~1648

Yamata Y, Yoshimura N. 1968. Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method. Int J Mech Sci, 10: 343~354

Yang W, Cheng L, Hwang K C. 1992. Objective corotational rates and shear oscillation. Int J Plasticity, 8: 643~656

Yan W Y, Sun Q P, Hwang K C. 1996. A generalized transformation constitutive model (invited), In: Abe T, Tsuta T, ed. Proceedings of the 3rd Asia-Pacific Symposium on Advances in Engineering Plasticity and its Applications, 21~24 August, Hiroshiwa, Japan Pergamon, 9~14

Yang W Y, Sun Q P, Hwang K C. 1998. A generalized micromechanics constitutive theory of single crystal with thermoelastic martensitic transformation. Science in China (Series A), 41(8): 878~886 [1998. 中国科学(A辑), 28(3): 275~282]

Zhang L, Huang Y, Chen J Y, Hwang K C. 1999. The mode III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects. Int J Fracture, (in press)

Zbib H, Aifantis E C. 1989. On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation. Part I. On the initiation of shear bands. Part II. On the evolution and thickness of shear bands. Part III. On the structure and velocity of portevin-le chatelier bands. Res Mech, 261~277, 279~292, 293~305.

Ziegler H. 1959. A modification of Prager's hardening rule. Quart Appl Math, 17: 55~65

Ziegler H. 1977. An introduction to Themomechanics. North-Holland, Amsterdam

Zimmerman R W. 1991. Elastic moduli of a solid containing spherical inclusions. Mech of Materials, 12: 17~24

北川浩. 1987. 弹・塑性力学，——非线性解析のための基础理论. 东京：裳华房

郭仲衡. 1980. 非线性弹性理论. 北京：科学出版社

黄克智. 1989. 非线性连续介质力学. 北京：清华大学、北京大学出版社

黄克智. 1989. 损伤与断裂. 见：王仁，黄克智，朱兆祥编. 塑性力学进展. 北京：铁道出版社. 31~65

黄克智，程莉. 1989. 大变形弹塑性本构理论的几个基本问题. 力学学报（增刊），21: 7~17

黄克智，薛明德，陆明万. 1986. 张量分析. 北京：清华大学出版社。[1992. 台北市台东书局]

余寿文，程莉，黄克智. 1989. 大变形与损伤力学. 力学与实践. 11(2): 1~7

[General Information]
书名=固体本构关系
作者=黄克智　　黄永刚
页数=434
SS号=10526235
出版日期=1999年09月第1版

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
第１章　小变形弹塑性本构关系
１．１　经典弹塑性本构关系
１．２　Ｊ２流动理论
１．２．１　各向同性硬化
１．２．２　混合硬化
１．３　Ｊ２形变理论及其与Ｊ２流动理论（各向同性硬化）的比较
１．３．１　Ｊ２形变理论
１．３．２　Ｊ２形变理论与Ｊ２流动理论的比较
１．４　奇异屈服面塑性理论
１．４．１　Ｓａｎｄｅｒｓ理论
１．４．２　Ｋｏｉｔｅｒ理论
１．５　Ｔｒｅｓｃａ流动理论（混合硬化）
１．６　塑性基本假设
１．６．１　Ｄｒｕｃｋｅｒ假设
１．６．２　Ｉｌｙｕｓｈｉｎ假设
１．６．３　对Ｊ２形变理论的重新评价
１．７　Ｊ２角点理论
１．７．１　塑性应变率势
１．７．２　Ｗｐ（σ）为凸函数的条件
１．７．３　逆塑性本构关系
１．７．４　Ｊ２角点理论
１．７．５　应变率势理论
１．８　压力敏感及塑性膨胀模型
习题１
第２章　细观力学基础
２．１　Ｅｓｈｅｌｂｙ相变应变问题
２．１．１　对称张量的矩阵表示
２．１．２　弹性约束张量
２．１．３　与Ｅｓｈｅｌｂｙ张量Ｓ相对偶的张量Ｔ
２．２　夹杂问题
２．３　复合体的平均弹性模量
２．３．１　Ｖｏｉｇｔ近似
２．３．２　Ｒｅｕｓｓ近似
２．３．３　Ｈｉｌｌ理论
２．３．４　自洽方法
２．４　能量方法
２．４．１　稀疏解法（不考虑夹杂相互作用）
２．４．２　自洽方法
２．４．３　广义自洽方法
２．４．４　Ｍｏｒｉ－Ｔａｎａｋａ方法
２．４．５　各种方法的比较
２．４．６　注记
习题２
第３章　连续介质力学概述
３．１　变形几何
３．１．１　Ｆ的极分解
３．１．２　线元、面元与体元的变换
３．１．３　Ｈｉｌｌ应变度量与Ｓｅｔｈ应变度量
３．２　变形运动学
３．２．１　速度梯度、变形率、旋率
３．２．２　各种旋率
３．２．３　Ｈｉｌｌ应变度量、Ｓｅｔｈ应变度量的率
３．３　应力理论
３．３．１　Ｃａｕｃｈｙ应力，第一类与第二类Ｐ－Ｋ应力
３．３．２　动量方程
３．３．３　变形功率
３．３．４　与？，Ｅ（ｎ）功共轭的应力度量

３．４　质量与能量的守恒或平衡律
３．４．１　质量守恒律
３．４．２　机械能平衡律
３．４．３　能量平衡律
３．４．４　熵不等式，熵平衡律
３．５　本构理论的客观性原理
３．５．１　客观量
３．５．２　张量的客观率（或客观导数）
３．５．３　本构理论的客观性原理
３．６　Ｌａｇｒａｎｇｅ嵌入（或随体）曲线坐标，张量的转移
３．６．１　Ｌａｇｒａｎｇｅ嵌入曲线坐标系
３．６．２　张量的转移
３．６．３　张量的四个客观导数
３．７　小变形弹塑性本构关系形式上的推广
３．７．１　弹性本构关系（率形式）
３．７．２　各向同性硬化Ｐｒａｎｄｔｌ－Ｒｅｕｓｓ弹塑性本构方程
３．７．３　混合硬化
３．７．４　Ｊ２形变理论
３．８　局限性
习题３
第４章　大变形弹性本构关系
４．１　弹性本构关系与热传导
４．１．１　弹性本构关系
４．１．２　一个特例
４．１．３　热传导
４．１．４　率形式弹性本构关系
４．２　弹性张量必须满足的条件
４．３　各向同性材料大变形弹性本构关系
习题４
第５章　大变形弹塑性本构关系
５．１　弹性变形与塑性变形
５．２　弹性变形率ｄｅ与塑性变形率ｄｐ
５．２．１　Ｍｏｒａｎ－Ｏｒｔｉｚ－Ｓｈｉｈ定义
５．２．２　Ｇｒｅｅｎ－Ｎａｇｈｄｉ与Ｓｉｍｏ－Ｏｒｔｉｚ的定义
５．２．３　Ｒｉｃｅ与Ｈｉｌｌ的定义
５．２．４　三种定义的比较及卸载构形刚性转动β的影响
５．３　Ｒｉｃｅ－Ｈｉｌｌ大变形弹塑性理论
５．３．１　率形式本构关系
５．３．２　内变量的演化，正交法则
５．３．２．１　弹性增量与塑性增量
５．３．２．２　在参考构形？中提屈服条件
５．３．２．３　在即时构形？中提屈服条件
５．４　度量相关性
５．４．１　应变度量？及率？，应力度量？及率？
５．４．２　度量不变量
５．４．３　对应于不同度量函数的本构关系
５．４．４　应变率与应力率的弹塑性分解
５．４．５　正交法则的对偶性与度量不变性
５．５　Ｓｉｍｏ－Ｏｒｔｉｚ大变形弹塑性本构理论
５．５．１　一般关系
５．５．２　各向同性硬化（等向硬化）情况
５．６　中间构形弹塑性本构理论之一——Ｍｏｒａｎ－Ｏｒｔｉｚ－Ｓｈｉｈ大变形弹塑性本构理论
５．６．１　弹性响应
５．６．２　塑性响应，率形式本构关系
５．６．２．１　在中间构形？中提屈服条件
５．６．２．２　在即时构形？中提屈服条件
５．６．３　虚位移原理
５．７　中间构形弹塑性本构理论之二——Ｖａｎ　ｄｅｒ　Ｇｉｅｓｓｅｎ大变形弹塑性本构理论
５．７．１　热力学讨论
５．７．２　热传导
５．７．３　塑性变形率ｄｐ与塑性旋率ｗｐ
５．７．４　内变量理论

５．７．５　持续各向同性介质
５．７．６　机动与混合硬化
５．７．７　各向异性硬化
习题５
第６章　应变梯度塑性理论
６．１　引言
６．２　ＣＳ应变梯度塑性理论——偶应力理论
６．２．１　偶应力与转角梯度
６．２．２　虚功原理
６．２．３　ＣＳ应变梯度塑性理论本构关系
６．２．４　最小位能原理与最小余能原理
６．２．５　等效应力与等效应变
６．３　应变梯度塑性ＳＧ理论——伸长和旋转梯度理论
６．３．１　应变梯度张量η
６．３．２　应变梯度偏量η'的分解与总等效应变？ＳＧ
６．３．３　ＳＧ应变梯度塑性理论的本构关系
６．４　基于细观机制的应变梯度塑性理论（ＭＳＧ）
６．４．１　应变梯度塑性的试验规律
６．４．２　提出基于细观机制的应变梯度塑性理论的动机
６．４．３　基本假设
６．４．４　位错模型
６．４．５　ＭＳＧ应变梯度塑性理论本构方程
６．４．６　在ＭＳＧ塑性理论中不存在应变能密度函数
６．４．７　微尺度胞元尺寸
习题６
附录　张量分析（介绍）
Ｉ．矢量与张量的概念
１．矢量
２．张量
II．张量代数
１．数乘
２．加法
３．点积
４．并乘
５．叉乘
６．转置
７．几种常用的二阶张量
８．加法分解
９．乘法分解（极分解）
１０．商法则
III．张量的微积分
１．梯度
２．散度和旋度
３．Ｇｒｅｅｎ公式和Ｓｔｏｋｅｓ公式
参考文献
附录页