

序*

损伤力学作为一门学科分支的出现,是近二十多年的事。自1958年卡恰诺夫(Качанов, Kachanov)提出研究蠕变寿命的连续度概念以来,历经拉包特诺夫(Работнов, Rabotnov)、勒墨特(Lemaitre)与夏波希(Chaboche)、胡特(Hult)等人的发展,形成了连续损伤力学的框架,它唯象地考察损伤的发展与演化,并细察这些损伤的细观物理力学过程;与此平行,材料学家揭示了细微观的以微裂纹、微孔洞、剪切带等为损伤基元的事实,为力学家提供了从细观角度来研究其力学行为的可能。由此诞生了以莱斯-屈列西(Rice-Tracey)、格松(Gurson)等为代表的细观损伤力学。由原先平行发展至今成为互补的连续损伤力学与细观损伤力学,构成了损伤力学的主体部分。损伤力学为工程结构的损伤分析与寿命预测和材料细观损伤机理与材料的强韧化,提供了定量分析的力学手段,并呈现旺盛的生机。

在视材料为均匀连续的前提下诞生的材料力学与材料强度理论,依赖工程经验,在考虑安全裕度的基础上,确定强度条件,形成了古典的强度设计理论;以宏观裂纹型缺陷为表征的在裂纹处存在几何间断的均匀介质的裂纹力学,构成以断裂力学为表征的新的结构与材料强韧匹配设计的思想,使人们对结构与材料的破坏过程有了更深入的认识。

实际上,材料与结构的变形与破坏过程是非均匀又非连续的。

* 本书出版得到国家自然科学基金重大项目资助

原生的材料就存在损伤,随着外载与环境的作用,在构件与材料中,微裂纹、微孔洞、剪切带等细观的损伤基元在萌生、串接、汇合、扩展,而形成损伤的动态演化过程。即材料与构件的变形与破坏是作为一个过程而展开的。它要求人们定量地描述这个力学过程,于是损伤力学便应运而生。损伤力学研究在外载与环境的作用下,定量描述材料与结构的性能不可逆劣化的损伤过程的力学行为。它与断裂力学构成描述材料破坏的力学过程的破坏力学理论。并在结构的强度刚度分析与寿命预测,结构与材料的稳定性,材料的韧-脆破坏过程的力学描述与材料强韧化为目标的材料设计中,有着广泛的应用。因此,它也影响着现代强度理论与工程设计和材料设计。

1990年春季,清华大学研究生院组织博士生导师为1989级的博士生开设学科前沿的新课程,作为博士生的指定选修课。清华大学工程力学研究所破坏理论研究室的同仁们,自80年代初在黄克智教授的带动下,在研究室讨论班上,对损伤力学作为新的学科分支,进行讨论和研究,并开设讲座,在此基础上,形成了为清华大学全校博士生开设的损伤力学讲座,共8讲。于1990年起每年春季学期,开设16学时共计8讲的课程。修读课程的有来自校内工程力学系、水利工程系、土木工程系、材料科学与工程系、机械工程系、精密仪器系、核能技术设计研究院等系科的博士生和旁听生,每年均有20余人。除听课外,还展开课堂讨论。其间也介绍了本书作者及其合作者在损伤力学研究的一些新成果。1991级的博士生冯西桥同学,在听课的同时,深入钻研,并在损伤力学的研究中,有所建树。作者遂邀冯君参与本书的著述。本书在课程讲稿基础上,数易其稿,历经近6载,将此博士生指定选修课的材料整理成书,一是为今后教学研究的需要,二是企望得到读者们的指正与交流。

本书的写法与一般的损伤力学书籍相比较,有以下特点:(1)

将连续损伤力学与细观损伤力学作为相互补充的两个方面来阐述；(2) 先从一维的损伤理论入手，逐步引出三维的一般情形；(3) 将损伤力学与断裂力学耦连起来，特别对损伤介质的断裂力学辟一专章介绍；(4) 作者认为损伤力学的发展中，在细观基础上的唯象损伤理论，是最有前途的一种理论，作者们的研究也集中于此，在全书中，贯穿着上述基于细观的唯象损伤理论的观点；(5) 损伤力学的发展历史说明了损伤力学是从应用中发源的，书中简介了损伤力学在强度分析、稳定性研究、蠕变与疲劳的寿命预测、断裂的韧-脆转变机理、材料的强韧化中的应用。

全书共分7章。由于教学的目的，在叙述中强调基本概念与损伤力学的研究方法。损伤力学包括范围广泛，涉及领域颇多，使本书对许多问题，无法涉及。如在所涉及的范围之内，作为一本介绍新学科的著作，能对读者有所帮助，作者的也就达到了。书中不足之处，敬请同仁及读者们指正。

余寿文

1997年元旦于北京清华园

目 录

序

第 1 章 绪论	1
参考文献	7
第 2 章 一维损伤理论	10
2.1 一维损伤状态的描述	10
2.2 损伤对材料强度的影响	13
2.3 一维蠕变损伤理论	17
2.4 一维蠕变损伤结构的承载能力分析	21
2.5 一维脆塑性损伤模型	26
2.6 一维疲劳损伤理论	32
2.7 一维纤维束模型	37
参考文献	44
第 3 章 三维各向同性损伤理论	47
3.1 Lemaitre-Chaboche 塑性损伤理论	47
3.2 Kachanov 蠕变损伤理论	59
3.3 Rousselier 损伤理论	64
3.4 含损伤结构定解问题的求解方法	70
参考文献	75
第 4 章 基于细观力学的损伤理论	78
4.1 细观损伤力学的基本概念	78
4.2 微裂纹损伤材料有效模量的计算方法	80
4.3 Gurson 模型及其应用	94

4.4	临界空穴扩张比理论	111
	参考文献	114
第5章	考虑损伤的断裂力学	120
5.1	引言	120
5.2	考虑损伤的 Dugdale 模型	123
5.3	突然损伤模型下的动力稳态裂纹扩展	128
5.4	脆性材料裂纹尖端的损伤局部化	141
5.5	小损伤的裂纹尖端场和温度分布	149
5.6	蠕变裂纹的扩展和损伤	157
5.7	考虑塑性损伤的断裂问题	179
	参考文献	192
第6章	其它损伤理论	197
6.1	Murakami-Ohno 蠕变损伤理论	198
6.2	Chaboche 各向异性损伤理论	212
6.3	Krajcinovic 的矢量损伤理论	223
6.4	Sidoroff 各向异性损伤理论	237
6.5	含损伤弹性介质的随机场理论	242
6.6	脆性材料的微裂纹扩展区损伤模型	251
6.7	各向同性弹性的双标量损伤模型	270
	参考文献	276
第7章	损伤力学的应用	282
7.1	蠕变和疲劳问题的寿命预测	282
7.2	多孔弹塑性材料的韧脆转变	301
7.3	混凝土结构破坏的损伤力学分析方法	308
7.4	材料强韧化的力学分析	315
	参考文献	325

第1章 绪论

损伤力学是近 20 年发展起来的一门新的学科。它是材料与结构的变形与破坏理论的重要组成部分。自 Kachanov^[1.1]于 1958 年提出连续度的概念、Rabotnov 于 1963 年提出损伤因子的概念^[1.2],到 1977 年 Janson 与 Hult^[1.3]等人提出损伤力学(damage mechanics)的新名词至今,几十年的时间内获得了重要的进展。自 Kachanov 的第一本《连续损伤力学导论》^[1.4]出版以来,国内外陆续出版了一些教材、专著^[1.5~1.24]和评论^[1.25~1.30]。

在外载和环境的作用下,由于细观结构的缺陷(如微裂纹、微孔洞等)引起的材料或结构的劣化过程,称为损伤。损伤力学是研究含损伤介质的材料性质,以及在变形过程中损伤的演化发展直至破坏的力学过程的学科。

损伤力学有两个主要分支:一是连续损伤力学,它利用连续介质热力学与连续介质力学的唯象学方法,研究损伤的力学过程。它着重考察损伤对材料宏观力学性质的影响以及材料和结构损伤演化的过程和规律。而不细察其损伤演化的细观物理与力学过程。只求用连续损伤力学预计的宏观力学行为与变形行为符合实验结果与实际情况。二是细观损伤力学,它通过对典型损伤基元,如微裂纹、微孔洞、剪切带等以及各种基元的组合,根据损伤基元的变形与演化过程,通过某种力学平均化的方法,求得材料变形与损伤过程与细观损伤参量之间的关联。

近年来发展起来的基于细观的唯象损伤理论,则是介于上述

两者之间的一种损伤力学理论,这些理论主要限定在确定性现象的范围内。上述各个分支构成了损伤力学的主要框架。此外还有随机损伤理论,研究随机损伤问题。回顾材料强度与结构强度的历史,便可清楚地看到损伤力学发展到今日所具有的必然性。

古典的材料力学所描述的材料强度理论,是在假设材料为均匀连续的基础上进行研究的,如图 1.1 所示。材料强度设计经历三个步骤:(1) 分析在外载作用下材料或结构的应力状态 σ ; (2) 测量表征材料强度的性能指标 σ_s (屈服极限)、 σ_b (强度极限); (3) 应用复杂应力状态下的材料强度理论: $f(\sigma, \tau) \leq [\sigma]$, 其中 $[\sigma] = \sigma_s/n_s$ 或 σ_b/n_b , n_s 、 n_b 分别为相应于屈服和破坏的安全系数;以此来判断材料和构件是否满足强度的要求。这种由伽利略开始萌发的、基于材料均匀连续假设的起点—终点式的强度观,属于古典的强度理论范围。

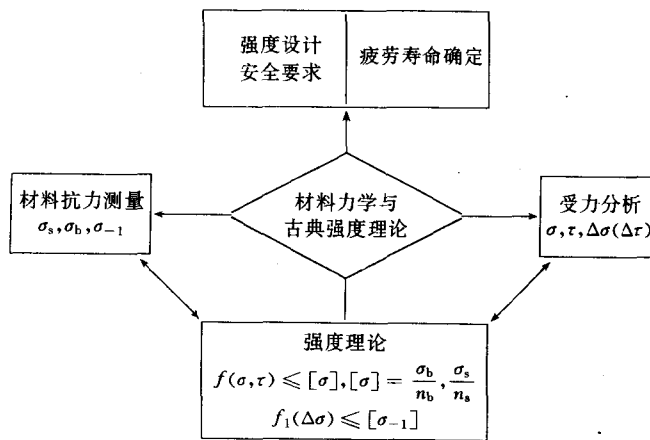


图 1.1

但实际的材料与结构是存在缺陷的。20 世纪 50 年代开始发展的断裂力学,是材料强度理论的重大发展。断裂力学考虑裂纹型

的缺陷。据此,引入表征缺陷尺度的新的几何量 a (缺陷长度或缺陷平均半径)。假设在裂纹型缺陷边界面上,存在位移和构形几何的间断。但在基体介质中,仍然认为是均匀连续的。基于此建立的断裂力学的新的强度分析理论,示如图 1.2。大体上也有三个步骤:(1) 分析含缺陷材料与构件的力学响应;如线弹性断裂力学的应力强度因子 K 或弹塑性断裂力学的 J 积分或裂纹张开位移 δ 等;(2) 测量表征材料抵抗裂纹扩展的能力的指标:平面应变断裂韧性 K_{Ic} 和临界 J 积分值 J_{Ic} 或裂纹张开位移临界值 δ_c ; (3) 根据裂纹扩展的条件——裂纹扩展准则: $f(K, \dots) \leq K_{Ic}$; 或 $g(J) \leq J_{Ic}$ (或 $f_2(\delta) \leq \delta_c$), 判断裂纹是否会发生失稳扩展,或发生稳定扩展(利用裂纹扩展的阻力曲线方法)。

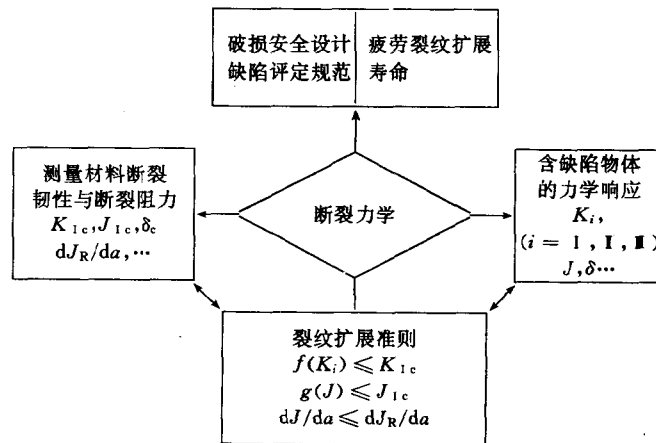


图 1.2

然而,实际情况是:材料和构件存在有初始损伤,从开始变形直至破坏,是一个逐渐劣化的过程。随着外载的增加或环境的作用,其损伤存在一个量变直至破坏的过程。在这个过程中,损伤基元的存在和发展演化,使实际的材料与结构既非均质,也不连续。

因此,人们必须摒弃古典的材料是均匀连续的假设。例如微裂纹、微孔洞本身就存在几何的不连续;而剪切带内变形存在巨大的梯度变化更非均质,并且这种非均匀和不连续还随着变形过程在演化发展。损伤力学的基本特点就在于研究这种演化。同时又要采用一些新的平均化的方法,使之便于力学的处理。损伤力学的内容与方法,既联系和发源于古典的材料力学和断裂力学,又是它们的必然发展和重要补充。

按损伤的分类,可分为弹性损伤、弹塑性损伤、疲劳损伤、蠕变损伤、腐蚀损伤、辐照损伤、剥落损伤等。

通常研究两大类最典型的损伤:由微裂纹萌生与扩展的脆性损伤和由微孔洞的萌生、长大、汇合与扩展的韧性损伤。介乎两者之间的还有准脆性损伤。损伤力学主要研究宏观可见缺陷或裂纹出现以前的力学过程。含宏观裂纹物体的变形以及裂纹的扩展的研究是断裂力学的内容,然而利用连续损伤力学的方法也可以分析裂纹扩展的力学行为。所以,人们将损伤力学与断裂力学联结在一起,构成破坏力学或破坏理论的主要内容。

损伤力学研究的主要内容简要地示如图 1.3。

首先,必须选择表征损伤的合适的状态变量——损伤变量;通过实验途径或连续热力学与连续介质力学途径,确定含损伤变量的损伤演化方程和本构关系,并对上述方程作可能的简化;与连续介质力学的其它场方程一起,形成损伤力学初边值问题或变分问题的数学提法,求解物体的应力应变场和损伤场。然后,根据损伤的临界条件,来衡量材料与结构的损伤程度和可安全使用的界限。注意到损伤是作为一个过程由量变而导致破坏来展开的,因此,利用损伤力学便有可能动态地跟踪描述损伤破坏的过程,对于材料和结构的破坏,给出具体的判断。因此,它存在着工程应用的广阔的范围。

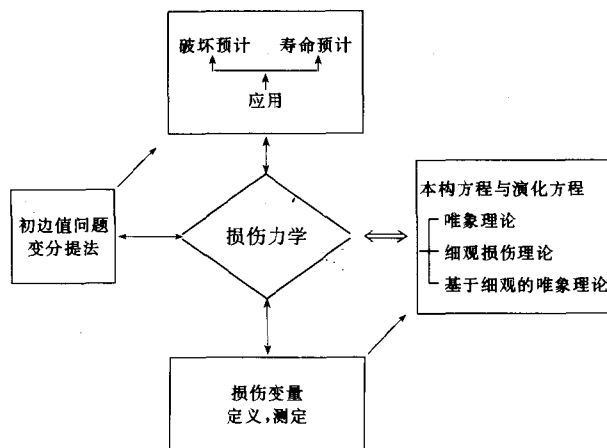


图 1.3

损伤概念的出现,最初是由预计高温蠕变、构件的寿命而发端的。早在1958年,Kachanov^[1,1]在研究这一问题时,提出了连续度的概念,得到了简单情况下的连续度的演化方程,可以说,损伤力学是由应用的推动而发展的。至今,已在许多重要工程问题中,获得广泛的应用。诸如:蠕变与疲劳寿命的预测;脆性体(如混凝土、岩石、煤等)的受力破坏与稳定性的研究;材料受损过程的力学和物理(例如电学、热学)性能的预报;材料的强韧化工艺过程中的损伤机制和增韧力学机理等。

损伤力学研究的难点和重点在于含损伤材料的本构理论和演化方程。有三种研究途径:唯象的宏观本构理论,细观的本构理论,基于统计的考虑非局部效应的本构理论。唯象的模型注意研究损伤的宏观后果;细观的本构理论更易于描述过程的物理与力学的本质。但因为不同材料和不同的损伤过程其细观机制十分复杂,且常常有多种机制交互并存,人们难以在力学模型上穷尽对其机制的力学描述。但是抓住其主要细观损伤机制的力学模型,在一定类

别的材料损伤的描述上,已获得相当的成功。至今人们仍然在寻求新的损伤理论,例如基于细观过程的唯象损伤理论,以及基于非平衡不可逆热力学的损伤统计理论和随机损伤理论。

对于结构的损伤分析,人们常常应用连续损伤理论来解决;而对于材料设计与强韧化以及优化工艺来说,利用细观损伤理论更为合适。总的来讲,从工程应用上看,考虑细观机制的唯象损伤理论更具吸引力。对认识损伤演化的过程规律来说,从统计物理的角度出发研究损伤演化是更为基础的工作。^[1.31,1.32]

著名力学家 Rice 曾有一段话:“从细观模型进行直接计算带来巨大的复杂性,它不太可能替代那种唯象的基于结构参数模型的并且是不太严格的方法。”^[1.30]这可能反映了损伤本构理论研究发展的这种宏-细观并行发展并相互联结的趋势。

损伤力学发展至今,不过二十多年的历史。目前涌现了许许多多各种各样的损伤力学理论,但尚未出现比较公认的普遍的理论。其情形与 20 世纪 50 年代塑性理论大发展的状况很相似。时至今日,经典的塑性本构理论已逐渐汇流成为大家比较常用的增量理论与形变理论。相信过不了很久,工程界将会筛选出一些合用的损伤理论来。至于损伤力学的发展趋势,当前已现出其端倪:一方面在工程应用的基础上,进一步发展合用的损伤理论,其中以基于细观的考虑结构参数模型的损伤理论和随机损伤理论正以强劲的势头吸引研究者;发展新的平均化方法和基于统计的损伤力学,将不断丰富损伤力学的方法论;发展宏观-细观-微观多层嵌套连接的损伤理论已是大势所趋;直到目前为止,我们所研究的损伤都是不可逆的。研究与生长过程相联系的可自修复的损伤理论,是生物力学与生物工程的一个重要组成部分。然而,所有的宏-细-微观各种层次的损伤理论的发展,都离不开损伤的宏、细、微观的观察与测量。因此,发展各种层次的损伤量测方法,并用于研究各种损伤过程是发展损伤理论的基础性的工作,也是一切损伤理论赖以建立

力学模型的源头。审视与改进非平衡不可逆的连续介质力学与热力学的框架,是损伤理论发展正确性的前提。正在发展的非线性科学的理论,^[1,33]如分形、分岔与混沌、自组织理论、逾渗过程、非线性增殖理论等,可能为研究损伤提供丰富的思想库,有赖从事损伤力学的研究者耕耘开拓。

参 考 文 献

1. 1 Качанов Л. М. О Времени разрушения в условиях ползучести, Изв. АН. СССР, ОТН., а1958, 8, 23~31
1. 2 Rabotnov Yu N. On the equations of state for creep. Progress in Applied Mechanics, 1963, 307~315
1. 3 Janson J and Hult J. Fracture mechanics and damage mechanics, a combined approach. J. de Mech. Appl., 1977, 1(1), 59~64
1. 4 Kachanov L. M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1986
1. 5 Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Springer-Verlag, 1992.
1. 6 Lemaitre J. and Chaboche J L. Mecanique des Materiaux Solides, Chap. 7, Endommagement, Dunond, 1985
1. 7 Krajcinovic D and Lemaitre J. Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications. Springer-Verlag, 1987
1. 8 Krajcinovic D. Damage Mechanics. Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1996
1. 9 吴鸿遥. 损伤力学. 国防工业出版社, 1990
1. 10 谢和平. 岩石、混凝土损伤力学. 中国矿业大学出版社,

1990

- 1.11 楼志文. 损伤力学基础. 西安交通大学出版社, 1991
- 1.12 李灏. 损伤力学基础. 山东科学技术出版社, 1992
- 1.13 尹双增. 断裂损伤理论及其应用. 清华大学出版社, 1992
- 1.14 曾攀. 材料的概率疲劳损伤特性及现代结构分析原理. 科学技术文献出版社, 1993
- 1.15 余天庆, 钱济成. 损伤理论及其应用. 国防工业出版社, 1993
- 1.16 王光钦, 高庆. 固体的损伤和断裂. 成都科技大学出版社, 1993
- 1.17 杨光松. 损伤力学与复合材料损伤. 国防工业出版社, 1995
- 1.18 沈为, 彭立华. 损伤力学. 华中理工大学出版社, 1995
- 1.19 杨卫. 宏微观断裂力学. 国防工业出版社, 1995
- 1.20 黄克智, 余寿文. 弹塑性断裂力学. 清华大学出版社, 1985
- 1.21 郑长卿, 周利, 张克实. 金属韧性破坏的细观力学及其应用研究. 国防工业出版社, 1995
- 1.22 Tvergaard V. Material Failure by Void Growth to Coalescence. DCAMM Report No. S54, The Technical University of Denmark, 1988
- 1.23 Kunin I A. Elastic Media with Microstructures, II. Springer-Verlag, 1983
- 1.24 Nemat-Nasser S and Hori M. Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Elastic Solids. Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1993
- 1.25 Krajcinovic D. Damage Mechanics. Mech. Mater., 1989, 8, 117~197

-
1. 26 黄克智. 损伤与断裂. 见:王仁,黄克智,朱兆祥主编. 塑性力学进展. 铁道出版社,1988,31~65
 1. 27 余寿文. 断裂损伤与细观力学. 力学与实践,1988,10(6),12~18
 1. 28 黄克智,余寿文,程莉. 大变形与损伤力学. 力学与实践,1989,11(2),1~6
 1. 29 余寿文. 固体力学发展的某些新趋势——从损伤力学和薄膜力学谈起. 见:黄克智,徐秉业主编. 固体力学发展趋势. 北京理工大学出版社,1995,108~135
 1. 30 Rice J R. Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformations mechanisms. in: Edited by Argon A S. Constitutive Equations in Plasticity MIT Press., Cambridge, 1975
 1. 31 柯孚久,白以龙,夏蒙芬. 理想微裂纹系统演化的特征. 中国科学(A辑),1990,20,621~631
 1. 32 邢修三. 非平衡统计断裂力学基础. 力学进展,1991, 21(2),153~168
 1. 33 白以龙等. 固体中微裂纹系统统计演化的基本描述. 力学学报,1991,21(3),290~298

第2章 一维损伤理论

2.1 一维损伤状态的描述

在外部因素(包括力、温度、辐射等)的作用下,材料内部将形成大量的微观缺陷(如微裂纹和微孔洞),这些微观缺陷的形核、扩展(或胀大)、汇合将造成材料的逐渐劣化直至破坏。从本质上讲,这些微观缺陷是离散的,但作为一种简单的近似,在连续损伤力学中,所有的微观缺陷被连续化,它们对材料的影响用一个或几个连续的内部场变量来表示,这种变量称为损伤变量。

1958年,在一篇具有里程碑意义的文献中^[2.1],Kachanov 提出用连续度的概念来描述材料的逐渐衰变。从而,材料中复杂的、离散的衰坏耗散过程得以用一个简单的连续变量来模拟。这样处理,虽然一定程度上牺牲了材料行为模拟的准确性,但却换来了计算的简便。更为重要的是,Kachanov 损伤理论推动了损伤力学的建立和发展,此后众多的损伤模型的形成都不同程度上借鉴了 Kachanov 损伤模型的思想。因此,Kachanov 的工作^[2.1,2.2]对于损伤力学的重要性就如同 Griffith 的工作对于断裂力学的重要性。

考虑一均匀受拉的直杆(图 2.1),认为材料劣化的主要机制是由于微观缺陷导致的有效承载面积的减小。设其无损状态时的横截面面积为 A ,损伤后的有效承载面积减小为 \bar{A} ,则连续度 ψ 的物理意义为有效承载面积与无损状态的横截面面积之比,即

$$\psi = \frac{\bar{A}}{A} \quad (2.1.1)$$

显然,连续度 ψ 是一个无量纲的标量场变量, $\psi = 1$ 对应于完全没有缺陷的理想材料状态, $\psi = 0$ 对应于完全破坏的没有任何承载能力的材料状态。

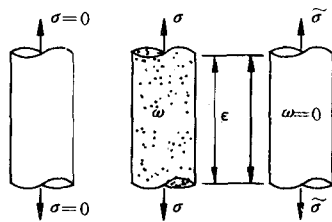


图 2.1 单拉试件的损伤

将外加载荷 F 与有效承载面积 \tilde{A} 之比定义为有效应力 $\tilde{\sigma}$, 即

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{\psi} \quad (2.1.2)$$

式中 $\sigma = F/A$ 为 Cauchy 应力。连续度是单调减小的, 假设当 ψ 达到某一临界值 ψ_c 时, 材料发生断裂, 于是材料的破坏条件表示为

$$\psi = \psi_c \quad (2.1.3)$$

Kachonov 取 $\psi_c = 0$, 但实验表明对于大部分金属材料, $0.2 \leq \psi_c \leq 0.8$ 。关于 Kachonov 对蠕变断裂问题的分析方法将在本章第 3.4 节给出。

1963 年, 著名力学家 Rabotnov 同样在研究金属的蠕变本构方程问题时建议用损伤因子^[2,3,2,4]

$$\omega = 1 - \psi \quad (2.1.4)$$

描述损伤。对于完全无损状态, $\omega = 0$; 对于完全丧失承载能力的状态, $\omega = 1$ 。由式(2.1.1)和(2.1.4), 可得

$$\omega = \frac{A - \tilde{A}}{A} \quad (2.1.5)$$

于是, 有效应力 $\tilde{\sigma}$ 与损伤因子的关系为

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (2.1.6)$$

我们还可以采用如下的损伤变量定义

$$\Phi = \frac{1}{\psi} = \frac{1}{1 - \omega} \quad (2.1.7)$$

此时,有效应力表示为

$$\tilde{\sigma} = \sigma\Phi \quad (2.1.8)$$

Broberg 将损伤变量定义为^[2.5]

$$\omega_B = \ln \frac{A}{\bar{A}} \quad (2.1.9)$$

当 \bar{A} 与 A 比较接近时,由式(2.1.9)得到的损伤变量与式(2.1.5)近似相等。Broberg 定义的优点在于加载过程中的损伤是可以叠加的。例如,假设面积是分两步减缩的,首先有效承载面积从 A 减缩为 \bar{A}' , 然后再减缩为 \bar{A} , 在这两步中的损伤分别为

$$\omega_{B1} = \ln \frac{A}{\bar{A}'}, \quad \omega_{B2} = \ln \frac{\bar{A}'}{\bar{A}} \quad (2.1.10)$$

于是,总的损伤为

$$\omega_B = \ln \frac{A}{\bar{A}} = \omega_{B1} + \omega_{B2} \quad (2.1.11)$$

利用式(2.1.2)和(2.1.9),得

$$\tilde{\sigma} = \sigma \exp \omega_B \quad (2.1.12)$$

对于不可压缩材料,直杆的拉伸应变为

$$\epsilon = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \frac{A_0}{A} \quad (2.1.13)$$

式中 A_0 和 L_0 为加载前的横截面面积和长度, A 和 L 为变形后的横截面面积和长度。于是名义应力为

$$\sigma_0 = \sigma \exp(-\epsilon) \quad (2.1.14)$$

由式(2.1.12)和(2.1.14),得

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 \exp(\epsilon + \omega_B) \quad (2.1.15)$$

2.2 损伤对材料强度的影响

Janson 和 Hult^[2.6,2.7]最早提出将奇异缺陷方法与分布缺陷方法相结合,即将线弹性断裂力学与连续损伤力学相结合,并讨论了一个简单的问题——损伤对材料的理论拉伸强度的影响。

2.2.1 无损伤且表面能密度有限的情况

设材料为无损伤的线弹性晶体材料,其理论拉伸断裂强度 σ'_F 的表达式为

$$\sigma'_F = \sqrt{\frac{\gamma E}{b}} \quad (2.2.1)$$

式中 E 为杨氏模量, b 为晶格间距, γ 为表面能密度。该公式推导过程如下:假设一直杆两端承受均匀的拉伸应力 σ (如图2.2所示),在断裂前的应变能密度为

$$\bar{U} = \frac{(\sigma'_F)^2}{2E} \quad (2.2.2)$$

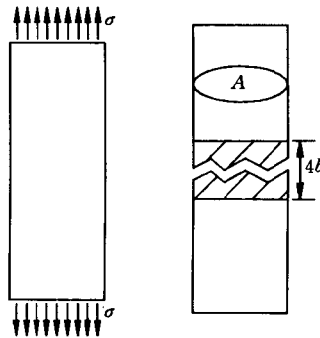


图 2.2 受拉直杆的断裂

在材料断裂时,所需的表面能由两个断裂面附近所储藏的应

变能提供。由于原子间力的作用范围是晶格间距 b 的数量级,提供此能量的区域深度也应是 b 的量级。往往假设在断裂表面两侧提供表面能的深度各为 $2b$,即提供应变能的整个区域深度为 $4b$,它所提供的应变能为

$$U = 4bA\bar{U} = \frac{2A(\sigma_F)^2}{E} \quad (2.2.3)$$

式中 A 为杆的横截面面积。沿横截面出现一对断裂表面所需的能量为

$$W = 2\gamma A \quad (2.2.4)$$

由能量条件 $U = W$,即得理论断裂强度 σ_F 的式(2.2.1)。

这个问题早在 1920 年就由著名力学家 Griffith 研究过。式(2.2.1)考虑了表面能密度,但假设材料不存在任何缺陷或损伤,而实际上这是不可能的,实验结果发现实际的材料强度与 σ_F 相差甚远,一般只达到 σ_F 的几十分之一。

2.2.2 有损伤但表面能密度为无穷大的情况

这是材料的另一种极端情况。有效应力 $\tilde{\sigma}$ 表示为

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (2.2.5)$$

式中损伤变量 ω 定义为式(2.1.5), $0 \leq \omega \leq 1$ 。设应变 ϵ 和损伤变量 ω 依赖于有效应力的关系为

$$\epsilon = G(\tilde{\sigma}), \quad \omega = g(\tilde{\sigma}) \quad (2.2.6)$$

为简单起见,假设式(2.2.6)均为线性函数,即

$$\epsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E}, \quad \omega = \frac{\tilde{\sigma}}{D} \quad (2.2.7)$$

式中 D 称为损伤模量,如图 2.3(a)和(b)所示。式(2.2.6)中第二式对单调加载成立,卸载时 ω 保持不变。对于无损材料, $D = \infty$ 。

由式(2.2.5)和(2.2.7),可得应力应变关系如下

$$\sigma = \tilde{\sigma}(1 - \omega) = E\epsilon \left(1 - \frac{E\epsilon}{D} \right) \quad (2.2.8)$$

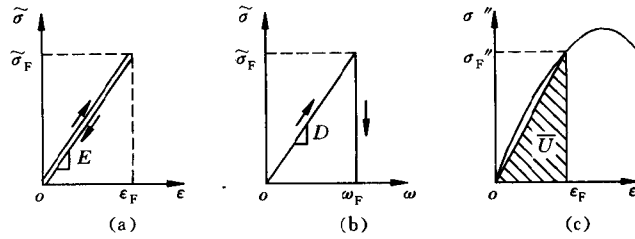


图 2.3 应力与应变、损伤的关系

如图 2.3(c)所示。当应力 σ 达到 σ_F^* 时材料发生断裂。由 $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = 0$ ，可得

$$\sigma_F^* = \frac{D}{4} \quad (2.2.9)$$

因此，损伤模量 D 是材料断裂强度的 4 倍。若不考虑材料的损伤，即 $D = \infty$ ，则 $\sigma_F^* = \infty$ 。

如果采用 Broberg 定义的对数损伤，即

$$\omega = \ln \frac{A}{\bar{A}} \quad (2.2.10)$$

则式(2.2.5)和(2.2.8)变成

$$\tilde{\sigma} = \sigma \exp \omega \quad (2.2.11)$$

$$\sigma = E \epsilon \exp \left(-\frac{E \epsilon}{D} \right) \quad (2.2.12)$$

对数损伤的变化范围为 $0 \leq \omega \leq \infty$ 。仍采用式(2.2.7)，类似于式(2.2.9)，得到断裂应力和损伤模量的关系为

$$\sigma_F^* = \frac{D}{e} \quad (2.2.13)$$

如果既采用对数损伤，又采用对数应变，即

$$\epsilon = \ln \frac{l}{l_0}, \quad \omega = \ln \frac{A}{\bar{A}} \quad (2.2.14)$$

对于不可压缩材料,有

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 \exp(\epsilon + \omega) \quad (2.2.15)$$

式中 $\sigma_0 = P/A_0$ 是名义应力,此时名义断裂应力为

$$\sigma_F^* = \frac{ED}{e(E+D)} \quad (2.2.16)$$

以上讨论的是两种极端情况下材料的断裂应力。实际上,材料既具有有限的表面能密度,同时又有损伤。

2.2.3 有损伤且表面能密度有限的情况

应变和损伤变量依赖于有效应力的关系仍采用式(2.2.7),且假定变形是完全可逆的,而损伤是完全不可逆的,如图 2.3 所示。图中 ϵ_F 表示断裂时的应变值, ω_F 表示临界损伤因子, $\tilde{\sigma}_F$ 表示断裂时的有效应力。 ϵ_F, ω_F 与 σ_F 之间的关系为

$$\epsilon_F = \frac{\tilde{\sigma}_F}{E} = \frac{\sigma_F}{E(1-\omega_F)} \quad (2.2.17)$$

$$\omega_F = \frac{\tilde{\sigma}_F}{D} = \frac{\sigma_F}{D(1-\omega_F)} \quad (2.2.18)$$

因此,为断裂所提供的应变能为

$$\begin{aligned} U &= 4bA\bar{U} \\ &= 2bA\sigma_F\epsilon_F \\ &= \frac{2b(\sigma_F)^2}{E(1-\omega_F)} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

将式(2.2.4)和式(2.2.19)代入断裂时的能量条件,得断裂应力为

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{\gamma E(1-\omega_F)}{b}} \quad (2.2.20)$$

由式(2.2.18)和(2.2.20)联立求解,可得到断裂应力 σ_F 与损伤变量 ω_F 。这样求出的 σ_F 显然低于式(2.2.1)中的 σ_F^* , 也应该低于式(2.2.16)中的 σ_F^* , 否则应采用式(2.2.16)中的 σ_F^* 作为断裂应力值。

2.3 一维蠕变损伤理论

Kachanov 损伤模型最初是在分析金属材料受单向拉伸的蠕变脆性断裂问题时提出的^[2.1.2.2],这一模型很快得到人们的重视,并得以发展和应用^[2.7~2.13]。对于高温下的金属,在载荷较大和较小的情况下,其断裂行为是不同的。当载荷较大时,试件伸长,横截面面积减小,从而引起应力单调增长,直至材料发生延性断裂,对应的细观机制为金属晶粒中微孔洞长大引起的穿晶断裂。当载荷较小时,试件的伸长很小,横截面面积基本上保持常数,但材料内部的晶界上仍然产生微裂纹和微孔洞,其尺寸随时间长大,最终汇合成宏观裂纹,导致材料的晶间脆性断裂。

设试件在加载之前的初始横截面面积为 A_0 , 加载后外观横截面面积减小为 A , 有效的承载面积为 $\tilde{A} = A(1 - \omega)$, 则名义应力 σ_0 、Cauchy 应力 σ 、有效应力 $\tilde{\sigma}$ 分别定义为

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} \quad (2.3.1)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.3.2)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} = \frac{F}{A(1 - \omega)} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (2.3.3)$$

忽略弹性变形,在考虑损伤情况下蠕变律假设为

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B\tilde{\sigma}^n \quad (2.3.4)$$

式中 ε 为总应变, B 和 n 为材料常数。在无损伤情况下, $\tilde{\sigma} = \sigma$, 式 (2.3.4) 常称为 Norton 律。在研究蠕变损伤时,还必须建立损伤的演化方程,即建立损伤演化率 $d\omega/dt$ 与哪些力学量相关联的关系。对于一些简单的情形,可以假设演化率方程也具有指数函数的形式,

$$\frac{d\omega}{dt} = C\tilde{\sigma}^\nu = C\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^\nu \quad (2.3.5)$$

式中 C 和 ν 为材料常数。设名义应力 σ_0 保持不变, 则由材料的体积不可压缩条件 $AL = A_0L_0$, 有效应力表示为

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-\omega} = \frac{\sigma_0 A_0}{A(1-\omega)} = \frac{\sigma_0 L}{L_0(1-\omega)} = \frac{\sigma_0}{1-\omega} \exp \epsilon \quad (2.3.6)$$

下面分三种情况讨论金属材料的蠕变断裂。

2.3.1 无损延性断裂

不考虑损伤(即 $\omega \equiv 0$) 的情况下, 式(2.3.6)简化为

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 \exp \epsilon \quad (2.3.7)$$

代入式(2.3.4), 得

$$\frac{d\epsilon}{dt} = B\sigma_0^n \exp(n\epsilon) \quad (2.3.8)$$

对此式积分, 并利用初始条件 $\epsilon(0) = 0$, 得

$$\epsilon(t) = -\frac{1}{n} \ln(1 - nB\sigma_0^n t) \quad (2.3.9)$$

延性蠕变断裂的条件为 $\epsilon = \infty$, 于是得到延性蠕变断裂的时间为

$$t_{RH} = \frac{1}{nB\sigma_0^n} \quad (2.3.10)$$

这个表达式最初是由 Hoff 于 1953 年导出的^[2.8]。

2.3.2 有损伤无变形的脆性断裂

不考虑变形(即 $\epsilon \equiv 0$) 的情况下, $A = A_0$, 式(2.3.6)中的有效应力简化为

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1-\omega} \quad (2.3.11)$$

代入式(2.3.5)中的损伤演化方程, 得

$$\frac{d\omega}{dt} = C\sigma_0^\nu (1-\omega)^\nu \quad (2.3.12)$$

对此式积分,并利用初始条件 $\omega(0) = 0$, 得

$$\omega = 1 - [1 - (\nu + 1)C\sigma_0^\nu t]^{-\frac{1}{\nu+1}} \quad (2.3.13)$$

设损伤脆性断裂的条件为 $\omega = \omega_c = 1$, 于是得脆性断裂的时间为

$$t_{RK} = \frac{1}{(\nu + 1)C\sigma_0^\nu} \quad (2.3.14)$$

这个表达式是 Kachanov 于 1958 年导出的^[2.1]。

2.3.3 同时考虑损伤和变形

类似于对数应变的定义

$$d\varepsilon = \frac{dL}{L} = -\frac{dA}{A} \quad (2.3.15)$$

采用如下形式的损伤定义^[2.7]

$$d\omega = -\frac{dA_n}{A_n} \quad (2.3.16)$$

式中 A_n 为假想的有效承载面积,其定义为

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{A_n} \quad (2.3.17)$$

于是式(2.3.6)中的有效应力改写为

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 \exp(\varepsilon + \omega) \quad (2.3.18)$$

由式(2.3.4), (2.3.5)和(2.3.18), 得到如下关于有效应力 $\tilde{\sigma}$ 的控制方程

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma} dt} - B\tilde{\sigma} - C\tilde{\sigma} = \frac{d\sigma_0}{\sigma_0 dt} \quad (2.3.19)$$

任意给定加载历史 $\sigma_0(t)$, 即可由上式得到有效应力的变化过程 $\tilde{\sigma}(t)$ 。例如, 对于如图 2.4 所示的 Heaviside 型加载历史, 在 0-1 段, 有

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0} d\sigma_0 \quad (2.3.20)$$

由此得到

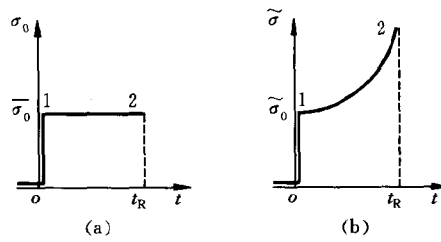


图 2.4 Heaviside 型加载历史 $\sigma_0(t)$ 及有效应力 $\tilde{\sigma}(t)$

$$\tilde{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0 \quad (2.3.21)$$

此式表明在瞬态加载的过程中,既没有蠕变变形,也没有损伤发展。在 1-2 段,式(2.3.19)简化为

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma} dt} - B\tilde{\sigma}^n - C\tilde{\sigma}^m = 0 \quad (2.3.22)$$

对此式积分,并利用初始条件式(2.3.21),得

$$t = \int_{\tilde{\sigma}_0}^{\tilde{\sigma}} (Bx^{n+1} + Cx^{m+1})^{-1} dx \quad (2.3.23)$$

由上式及 $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ 的条件,得到同时考虑损伤演化和蠕变变形的断裂时间为

$$t_R = \int_{\tilde{\sigma}_0}^{\infty} (Bx^{n+1} + Cx^{m+1})^{-1} dx \quad (2.3.24)$$

令 $C = 0$, 即得不考虑损伤的断裂时间,与式(2.3.10)中的 t_{RH} 相同。令 $B = 0$, 得到不考虑蠕变变形的断裂时间

$$t_R = \frac{1}{\nu C \tilde{\sigma}_0^m} \quad (2.3.25)$$

由于所采用的损伤定义不同,式(2.3.25)与(2.3.14)中的 t_{RK} 略有差别。当 $B > 0, C > 0$ 时,可以得到断裂时间的数值积分结果,如图 2.5 所示。由此图可以看出,应力较大时,可以采用忽略损伤的

式(2.3.10);应力较小时,可以采用忽略蠕变变形的式(2.3.25);在中等应力水平时,应同时考虑损伤和蠕变变形。此外, Broberg^[2.5]和 Hult^[2.7]还对式(2.3.19)进行了修正,考虑了瞬态加载时引起的应变和损伤的瞬间增加。

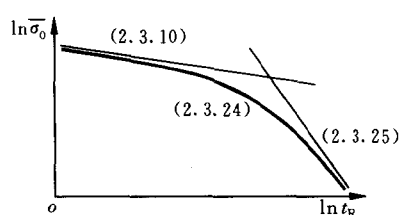


图 2.5 三种情况下的蠕变断裂时间^[2.7]

2.4 一维蠕变损伤结构的承载能力分析

2.4.1 蠕变断裂的两个阶段

在蠕变损伤情况下,如果结构中的应力场是均匀的,损伤也均匀发展,当损伤达到临界值时,结构发生瞬态断裂。如果应力场不均匀,则结构的断裂经历两个阶段。第一阶段称为断裂孕育阶段,所经历的时间为 $0 \leq t \leq t_1$, 结构内诸点的损伤因子均小于其断裂临界值。在 t_1 时刻,结构中某一点(或某一区域)的损伤达到临界值而发生局部断裂。第二阶段称为断裂扩展阶段, $t \geq t_1$, 弥散的微裂纹汇合成宏观裂纹,宏观裂纹在结构中扩展直至结构的完全破坏。

在断裂扩展阶段,结构中存在两种区域(图 2.6), 其一是损伤尚未达到临界值的区域 V_1 , 其二是损伤已经达到临界值的区域 V_2 。前者仍然承受载荷,而后者已完全丧失承载能力。两个区域的交界面称为断裂前缘 Σ 。断裂前缘 Σ 是可动的, V_2 即是 Σ 所扫过的区域。在 Σ 上,恒有 $\omega = \omega_c$, 此处取 $\omega_c = 1$, 因此在 Σ 上有

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{du}{dt} = 0 \quad (2.4.1)$$

式中 u 为断裂前缘沿扩展方向的距离。

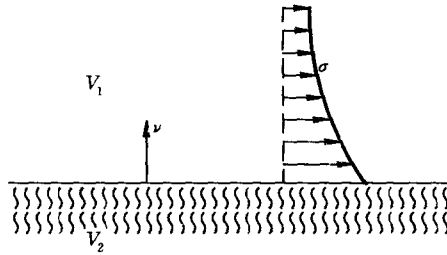


图 2.6 蠕变损伤结构的断裂

采用式(2.3.5)中的损伤演化方程,对于任意一点 P , 其应力为 $\sigma(t)$, 将式(2.3.5)改写为

$$(1 - \omega)^\nu d\omega = C[\sigma(t)]^\nu dt \quad (2.4.2)$$

积分此式并利用初始条件 $\omega(0) = 0$, 得到

$$\omega = 1 - \left[1 - C(\nu + 1) \int_0^t [\sigma(\tau)]^\nu d\tau \right]^{\frac{1}{\nu+1}} \quad (2.4.3)$$

令 $\omega = 1$, 即得到在 t 时刻, 损伤前缘应满足如下的方程

$$C(\nu + 1) \int_0^t [\sigma(\tau)]^\nu d\tau = 1 \quad (2.4.4)$$

将式(2.4.3)代入方程(2.4.1), 得到损伤前缘 Σ 的运动方程为

$$\frac{du}{dt} = - [\sigma_x(t)]^\nu \left[\frac{\partial}{\partial u} \int_0^t [\sigma(\tau)]^\nu d\tau \right]^{-1} \quad (2.4.5)$$

式中下标 Σ 表示在断裂前缘上取值。

在应力均匀的情况下, 式(2.4.5)的右端为无穷大, 因此, 一旦某一点处达到了损伤临界值, 结构将发生瞬态断裂。

2.4.2 纯弯梁的蠕变断裂

考虑一矩形纯弯梁的蠕变断裂问题, 假设为小应变情况。在断裂孕育阶段, 即 $0 \leq t < t_1$, 每一点的损伤因子均小于其临界值, 整个横截面具有抵抗弯曲的能力, 按式(2.3.4)的蠕变律, 横截面上的正应力分布为

$$\sigma = \frac{M}{I_{m0}} y_0^\mu \quad y_0 > 0 \quad (2.4.6)$$

式中 $\mu = 1/n$, M 为弯矩, x_0 和 y_0 为坐标(图 2.7), I_{m0} 为截面的广义惯性矩

$$I_{m0} = \frac{2b}{\mu + 2} h_0^{\mu+2} \quad (2.4.7)$$

式中 b 和 h_0 为梁的宽度和半高。应该指出, 在求式(2.4.6)的应力分布时, 没有考虑损伤对应力场的影响, 即采用的是全解耦方法。

在 $y_0 > 0$ 的受拉区内, 损伤因子 ω 可由式(2.4.3)确定, 而在受压区内, 认为没有损伤发展。最大拉应力 σ_{\max} 发生在 $y_0 = h_0$ 处, 为

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_{m0}} h_0^\mu \quad (2.4.8)$$

将上式代入式(2.4.4), 可以求得最大拉应力点达到损伤临界值的断裂孕育时间为

$$t_1 = \left[(\nu + 1) C \left(\frac{M}{I_{m0}} \right)^\nu h_0^\mu \right]^{-1} \quad (2.4.9)$$

在 $t = t_1$ 时刻, 靠近 $y_0 = h_0$ 的表面层内开始出现断裂区。此后, 断裂前缘 Σ 向梁的内部扩展, 如图 2.7 所示。假设当 $t > t_1$ 时, 断裂层的厚度为 2δ , 承载面的中心移至 o 点, 选取新坐标系 x, y , 剩余承载面的高度为 $2h$, 显然有 $h = h_0 - \delta$ 。此时, 应力分布变为

$$\sigma = \frac{M}{I_m} y^\mu \quad (2.4.10)$$

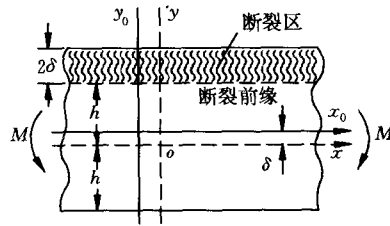


图 2.7 纯弯梁的蠕变破坏^[2.2]

式中的广义惯性矩

$$I_m = \frac{2b}{\mu + 2} h^{\mu+2} \quad (2.4.11)$$

随时间逐渐减小, y 是到当前中性轴的距离, $y = y_0 + h_0 - h$ 。设在 t 时刻, 损伤前缘到达初始坐标为 y_0 的点 P , 对于 P 点, $y(\tau) = 2h(t) - h(\tau), t \geq \tau$ 。由方程(2.4.4)和(2.4.10), 得^[2.2]

$$(\nu + 1)CM^\nu \int_0^t I_m^{-\nu}(\tau) [2h(t) - h(\tau)]^{\mu\nu} d\tau = 1 \quad (2.4.12)$$

为了简单起见, 假设 $\mu\nu = 1$, 对上式微分, 可导出

$$\frac{dh}{dt} \int_0^t [h(\tau)]^{-1-2n} d\tau + \frac{1}{2} h^{-2n} = 0 \quad (2.4.13)$$

其初始条件为

$$h(t_1) = h_0 \quad (2.4.14)$$

因此, 由式(2.4.13)可知, 当 $t = t_1$ 时,

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{h_0}{2t_1} \quad (2.4.15)$$

再将式(2.4.13)对时间求微分, 得到关于 $h(t)$ 的微分方程

$$\frac{d^2h}{dt^2} + 2(n-1) \frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = 0 \quad (2.4.16)$$

对此式积分, 并利用初始条件确定积分常数, 得到 h 与时间 t 的关

系为

$$\frac{t}{t_1} = 1 + \frac{2}{2n-1} \left[1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^{2n-1} \right] \quad (2.4.17)$$

当 $h = 0$ 时, 梁完全断裂, 相应的断裂时间记为 t' , 则有

$$t' = \frac{2n+1}{2n-1} t_1 \quad (2.4.18)$$

如果取 $n = 3$, 则 $t' = 1.4t_1$ 。可见在梁的最外层达到损伤临界值以后, 还有相当长的一段时间, 梁还可以继续承受外载。

上述的分析方法同样适用于任意载荷下梁的弯曲问题。设梁中的最大弯矩为 M^* , 则可以得到断裂孕育时间 t_1^* 和横截面完全断裂的时间 t^{**} 为

$$t_1^* = \left[(\nu + 1) C \left(\frac{M^*}{I_{m0}} \right)^\nu h_0^\nu \right]^{-1} \quad (2.4.19)$$

$$t^{**} = \frac{2n+1}{2n-1} t_1^* \quad (2.4.20)$$

与纯弯梁蠕变断裂的另一区别表现在断裂前缘不再与梁的中轴线平行。图 2.8 所示为三点弯曲梁的蠕变示意图, 损伤仅局限在一个窄的楔形区域内。

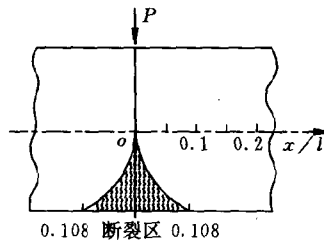


图 2.8 三点弯曲梁的蠕变断裂^[2.2]

2.5 一维脆塑性损伤模型

脆塑性损伤模型适用于诸如岩石、混凝土、陶瓷、石膏、某些脆性或准脆性金属材料。这类材料的损伤和变形响应相当复杂,与延性金属和合金、聚合物等有明显的差别,表现在脆性材料的明显的尺寸效应、拉压性质的不同、应力突然跌落和应变软化、非弹性体积变形和剪胀效应、变形的非正交性等多方面。针对这一类材料,Dragon 和 Mróz 早在 1979 年就提出了一种考虑损伤的三维本构模型^[2.14]。此后,脆性材料的损伤问题得到了相当广泛的研究。关于岩石和混凝土的损伤力学,可以参见文献[2.15],本书后面还将介绍脆性材料损伤方面的一些研究成果。本节侧重于介绍一维脆塑性损伤模型。

2.5.1 Mazars 损伤模型^[2.16]

脆性和准脆性材料的应力应变关系一般可以分为线弹性、非线性强化、应力跌落和应变软化等阶段。但不同脆性材料的行为也差别很大,实验中得到的应力应变曲线还与实验机的刚度、加载方式相关。Mazars^[2.16]将脆性材料的拉伸应力应变关系分两段描述,设 ϵ_c 是损伤开始时的应变,也是峰值应力 σ_c 对应的应变。当 $\epsilon \leq \epsilon_c$ 时,认为材料无损伤即 $D = 0$; 当 $\epsilon > \epsilon_c$ 时,材料有损伤即 $D > 0$ 。Mazars 用如下公式拟合材料的单向拉伸应力应变曲线

$$\sigma = \begin{cases} E_0 \epsilon & (0 \leq \epsilon \leq \epsilon_c) \\ E_0 \left[\epsilon_c (1 - A_T) + \frac{A_T \epsilon}{\exp[B_T (\epsilon - \epsilon_c)]} \right] & (\epsilon \geq \epsilon_c) \end{cases} \quad (2.5.1)$$

式中 E_0 是线弹性阶段的弹性模量, A_T 和 B_T 是材料常数,下标 T 表示拉伸。

这里以割线模量 E 的变化定义损伤 D , 表示为

$$D = 1 - E/E_0 \quad (2.5.2)$$

于是损伤材料的应力应变关系为

$$\sigma = E_0(1 - D)\epsilon \quad (2.5.3)$$

比较式(2.5.1)和(2.5.3), 得到 Mazars 模型中单拉情况下的损伤演化方程

$$D = \begin{cases} 0 & (0 \leq \epsilon \leq \epsilon_c) \\ 1 - \frac{\epsilon_c(1 - A_T)}{\epsilon} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\epsilon - \epsilon_c)]} & (\epsilon \geq \epsilon_c) \end{cases} \quad (2.5.4)$$

由 Mazars 模型得到的名义应力 σ 、有效应力 $\tilde{\sigma} = \sigma/(1 - D)$ 、损伤 D 随应变 ϵ 的变化曲线如图 2.9 所示。经实验验证, 对于一般的混凝土, 材料常数取值范围为 $0.7 \leq A_T \leq 1, 10^4 \leq B_T \leq 10^5, 0.5 \times 10^{-4} \leq \epsilon_c \leq 1.5 \times 10^{-4}$ 。

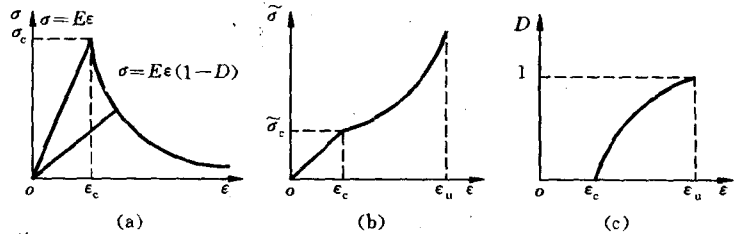


图 2.9 Mazars 模型中名义应力、有效应力和损伤与应变的关系曲线

类似地可以建立单向压缩时的损伤本构关系。单向压缩时的等效应变 ϵ_c 为

$$\epsilon_c = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle^2 + \langle \epsilon_2 \rangle^2 + \langle \epsilon_3 \rangle^2} = -\sqrt{2} \nu \epsilon_1 \quad (2.5.5)$$

式中 ϵ_1, ϵ_2 和 ϵ_3 是主应变, $\epsilon_1 = \epsilon < 0, \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\nu\epsilon$, 角括号定义

为 $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ 。Mazars 认为,当 $\epsilon_c \leq \epsilon_c$ 时材料无损伤,当 $\epsilon_c > \epsilon_c$ 时材料有损伤。单向压缩时的应力应变关系拟合为

$$\sigma = \begin{cases} E_0 \epsilon & (\epsilon_c \leq \epsilon_c) \\ E_0 \left[\frac{\epsilon_c(1 - A_c)}{-\sqrt{2}\gamma} + \frac{A_c \epsilon}{\exp[B_c(-\sqrt{2}\nu\epsilon - \epsilon_c)]} \right] & (\epsilon_c > \epsilon_c) \end{cases} \quad (2.5.6)$$

式中压缩时的材料常数 A_c 和 B_c 的变化范围为 $1 \leq A_c \leq 1.5, 10^3 \leq B_c \leq 2 \times 10^3$ 。单向压缩时的损伤方程为

$$D = \begin{cases} 0 & (\epsilon_c \leq \epsilon_c) \\ 1 - \frac{\epsilon_c(1 - A_c)}{\epsilon_c} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\epsilon_c - \epsilon_c)]} & (\epsilon_c > \epsilon_c) \end{cases} \quad (2.5.7)$$

2.5.2 Loland 模型^[2.17]

对于混凝土等脆塑性材料,当应力接近峰值应力时,应力应变曲线已偏离直线,这意味着应力达到最大值以前,材料中已经发生了连续损伤。于是,Loland 将这类材料的损伤分为两个阶段,第一个阶段是在应力达到峰值应力之前,即当应变小于峰值应力对应的应变 ϵ_c 时,在整个材料中发生分布的微裂纹损伤,第二个阶段是当应变大于 ϵ_c 时,损伤主要发生在破坏区内。材料的有效应力 $\tilde{\sigma} = \sigma/(1 - D)$ 与应变 ϵ 的关系表示为

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \tilde{E}\epsilon & (0 \leq \epsilon \leq \epsilon_c) \\ \tilde{E}\epsilon_c & (\epsilon_c \leq \epsilon \leq \epsilon_u) \end{cases} \quad (2.5.8)$$

式中 ϵ_u 是材料断裂应变,即当 $\epsilon = \epsilon_u$ 时 $D = 1$, \tilde{E} 称为净弹性模量,定义为

$$\tilde{E} = \frac{E}{1 - D_0} \quad (2.5.9)$$

式中 E 为无损的弹性模量, D_0 是加载前的初始损伤值。

利用实验得到的混凝土单拉曲线,经拟合得到如下的损伤演化方程.

$$D = \begin{cases} D_0 + C_1 \epsilon^\beta & (0 \leq \epsilon \leq \epsilon_c) \\ D_0 + C_1 \epsilon_c^\beta + C_2 (\epsilon - \epsilon_c) & (\epsilon_c < \epsilon \leq \epsilon_u) \end{cases} \quad (2.5.10)$$

式中 C_1, C_2 和 β 是材料常数。由 $\epsilon = \epsilon_c$ 时 $\sigma = \sigma_c, \frac{d\sigma}{d\epsilon} = 0$, 并考虑到 $\epsilon = \epsilon_u$ 时 $D = 1$, 得到

$$\beta = \frac{\lambda}{1 - D_0 - \lambda}, \quad C_1 = \frac{(1 - D_0)\epsilon_c^{-\beta}}{1 + \beta}, \quad C_2 = \frac{1 - D_0 - C_1 \epsilon_c^\beta}{\epsilon_u - \epsilon_c}$$

式中 $\lambda = \sigma_c / (\tilde{E}\epsilon_c)$ 。由 Loland 模型得到的名义应力 σ 、有效应力 $\tilde{\sigma}$ 、损伤 D 随应变 ϵ 的变化曲线如图 2.10 所示。

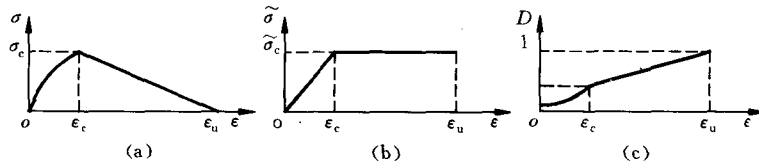


图 2.10 Loland 模型中名义应力、有效应力和损伤与应变的关系曲线

2.5.3 分段线性损伤模型^[2.18]

在余天庆提出的分段线性损伤模型中,应力应变关系也被分为两个阶段。当应力达到峰值应力之前即当 $\epsilon < \epsilon_c$ 时,认为材料中只有初始损伤,没有损伤演化,应力与应变成线弹性关系,称为第一阶段;当 $\epsilon > \epsilon_c$ 以后,损伤按分段线性关系发展,称为第二阶段。应力应变关系可用分段线性的折线表示(图 2.11)。当 $\epsilon > \epsilon_c$ 时,应力应变关系表示为

$$\sigma = E[\epsilon_c - C_1(\epsilon|_M^F - \epsilon_c) - C_2(\epsilon|_M^F - \epsilon_c)] \quad (2.5.11)$$

式中 C_1 和 C_2 为材料常数,对于一般的混凝土, $C_1 = 0.8 \sim 1.2, C_2$

$= 0.2 \sim 0.5$ 。若不考虑初始损伤,即 $D_0 = 0$, 并考虑到当 $\epsilon = \epsilon_R$ 时 $D = 1$, 得到

$$\epsilon_F = \frac{1}{C_1 - C_2} [(1 + C_1)\epsilon_c - C_2\epsilon_R] \quad (2.5.12)$$

该模型的特点是物理概念比较清楚,应用比较方便。

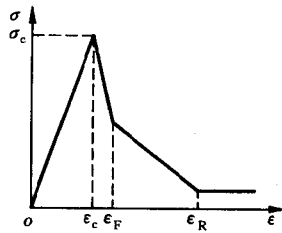


图 2.11 分段线性的应力应变曲线^[2.18]

2.5.4 分段曲线损伤模型^[2.19]

该模型认为在应力达到峰值应力前后都有损伤演化,并用不同的曲线方程来拟合,分别表示为

$$D = A_1 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^{B_1} \quad (0 \leq \epsilon \leq \epsilon_c)$$

$$D = 1 - \frac{A_2}{C_2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} - 1 \right)^{B_2} + \frac{\epsilon}{\epsilon_c}} \quad (\epsilon > \epsilon_c)$$

(2.5.13)

式中 A_1, A_2 和 B_1 为材料常数。由边界条件 $\sigma|_{\epsilon=\epsilon_c} = \sigma_c, \frac{d\sigma}{d\epsilon}|_{\epsilon=\epsilon_c} = 0$ 得到

$$A_1 = \frac{E\epsilon_c - \sigma_c}{E\epsilon_c}, \quad B_1 = \frac{\sigma}{E\epsilon_c - \sigma_c}, \quad A_2 = \frac{\sigma_c}{E\epsilon_c} \quad (2.5.14)$$

B_2 和 C_2 为曲线参数,取 $B_2 = 1.7, C_2 = 0.003\sigma_c^2$ 。由实验数据,得到 $A_1 = 1/6, B_1 = 5, A_2 = 5/6$ 。

由式(2.5.13)得到的损伤随应变的演化曲线如图 2.12(a)所示。由该模型得到的应力应变曲线如图 2.12(b)所示,它与 Mazars 模型很接近。

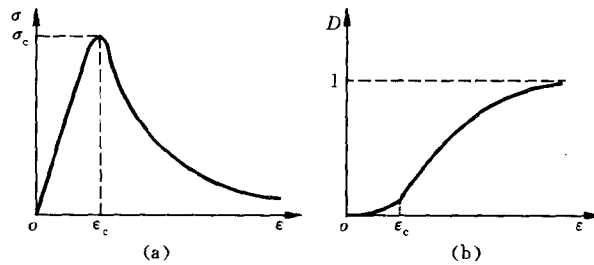


图 2.12 分段曲线损伤模型中的应力应变曲线和损伤演化曲线

此外,钱济成和周建方^[2.19]还将该模型进一步简化,应力应变关系用两条直线代替(图 2.13(a)),损伤演化方程为(图 2.13(b))

$$\begin{aligned}
 D &= 0 & (0 \leq \epsilon \leq \epsilon_c) \\
 D &= \frac{\epsilon_u(\epsilon - \epsilon_c)}{\epsilon(\epsilon_u - \epsilon_c)} & (\epsilon > \epsilon_c)
 \end{aligned}
 \tag{2.5.17}$$

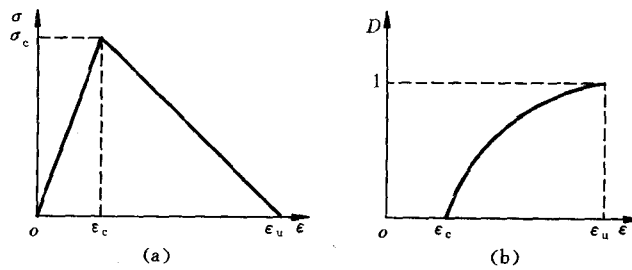


图 2.13 分段曲线损伤模型的简化

2.6 一维疲劳损伤理论

在交变载荷作用下,结构中会有大量的微裂纹形核,并且微裂纹随着载荷循环次数的增加而逐渐扩展,最终形成宏观裂纹导致材料的断裂,这种破坏称为疲劳损伤破坏。在结构破坏之前的载荷循环次数 N_F 称为疲劳寿命。当疲劳寿命高于 5×10^4 时,称为高周疲劳;当疲劳寿命低于 5×10^4 时,称为低周疲劳。对于应力水平较低的高周疲劳,变形主要为弹性变形。对于应力水平较高的低周疲劳,则往往有塑性变形发生。疲劳过程中的损伤问题由于其重要的工程意义而得到了人们的高度重视^[2.13, 2.20~2.24]。

在前面介绍的蠕变损伤理论中,将时间作为参考度量,损伤是时间的函数,而在疲劳损伤理论中,损伤常常表示为载荷循环次数的函数。一般情况下,疲劳损伤的演化方程可表示为如下形式

$$\delta\omega = f(\omega, \Delta\sigma, \bar{\sigma}, \dots) \delta N \quad (2.6.1)$$

式中 $\Delta\sigma$ 为载荷循环中的应力变化幅度,简称应力幅, $\bar{\sigma}$ 为平均应力。随着载荷循环次数的增加,损伤逐渐累积。如何处理损伤的累

$$\sum_k \frac{\Delta N_k}{N_{Fk}} = 1 \quad (2.6.2)$$

因此,在等应力幅的循环载荷作用下,可以认为损伤的演化是线性的,即

$$\omega = \frac{N}{N_F} \quad (2.6.3)$$

这是一种最简单的疲劳损伤定义。事实上,线性累积律也可以用于损伤非线性演化的情况,为此,应该确定损伤因子 ω 和 N/N_F 的一一对应关系,即将 ω 表示为由 N/N_F 唯一决定的函数。例如,在两级加载的情况下,损伤的一种演化曲线如图2.14(a)所示。

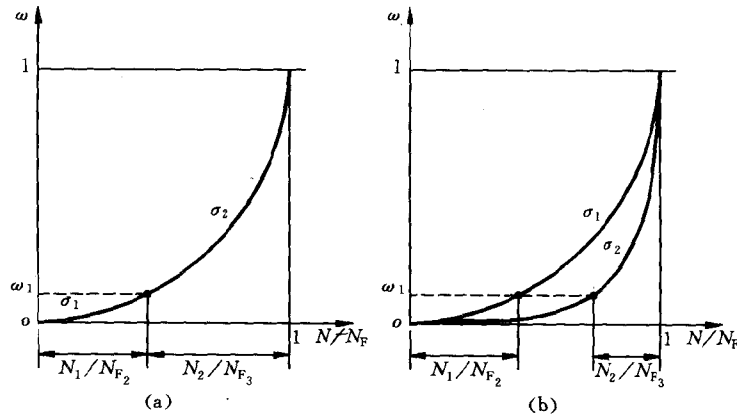


图 2.14 线性的和非线性的损伤累积方法

因此,在采用线性累积律时,可以定义损伤随载荷循环的演化规律为如下的线性形式^[2.13]

$$\delta\omega = \frac{\delta N}{N_F(\Delta\sigma, \sigma, \dots)} \quad (2.6.4)$$

或非线性形式

$$\delta\omega = \frac{(1-\omega)^{-k}}{k+1} \frac{\delta N}{N_F(\Delta\sigma, \bar{\sigma}, \dots)} \quad (2.6.5)$$

在式(2.6.4)和(2.6.5)中,损伤演化与外加的载荷参数无关,载荷参数只隐含于 N_F 中。应该注意,Miner 的损伤线性累积方法只有在应力幅和平均应力变化很小的情况下才得到比较好的结果。

2.6.2 疲劳损伤的非线性累积律

如果损伤演化不仅依赖于 N/N_F , 而且与载荷的循环参数(如应力幅 $\Delta\sigma$ 、平均应力 $\bar{\sigma}$) 相关,即损伤与表示载荷的参数不是独立的变量,则应该采用损伤的非线性累积方法。如图 2.14(b)所示为一个两级加载的例子,显然有 $N_1/N_{F1} + N_2/N_{F2} \neq 1$ 。

在考虑应力幅影响的情况下,一种常用的损伤演化方程为^[2.22]

$$\frac{\delta\omega}{\delta N} = \left[\frac{\Delta\sigma}{2B(1-\omega)} \right]^\beta (1-\omega)^{-\gamma} \quad (2.6.6)$$

式中 B, β 和 γ 是与温度相关的材料参数, B 还依赖于平均应力 $\bar{\sigma}$, $B = B(\bar{\sigma})$ 。

由式(2.6.6),可以导出

$$\omega = 1 - \left(1 - \frac{N}{N_F} \right)^{\frac{1}{\beta+\gamma+1}} \quad (2.6.7)$$

式中疲劳寿命 N_F 的表示式为

$$N_F(\Delta\sigma, \bar{\sigma}) = \frac{1}{\beta + \gamma + 1} \left[\frac{\Delta\sigma}{2B(\bar{\sigma})} \right]^{-\beta} \quad (2.6.8)$$

根据式(2.6.7)和(2.6.8), $\ln(1-\omega)$ 与 $\ln(1-N/N_F)$ 成线性关系,而 $\ln N_F$ 与 $\ln \Delta\sigma$ 也成线性关系,如图 2.15 和 2.16 所示,由此可以实验测定参数 $\beta + \gamma$ 和 B 。

Chaboche 提出了一种更复杂的疲劳损伤演化方程^[2.20]

$$\frac{\delta\omega}{\delta N} = [1 - (1-\omega)^{1+\beta}]^\alpha \left[\frac{\Delta\sigma}{M(1-\omega)} \right]^\beta \quad (2.6.9)$$

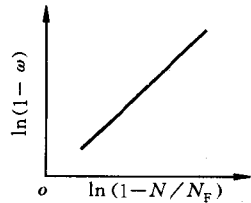


图 2.15 疲劳损伤的演化

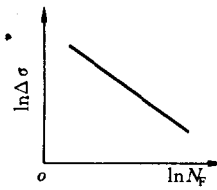


图 2.16 疲劳寿命与应力幅的关系曲线

式中 α, β 和 M 是与温度相关的材料参数, $\alpha = \alpha(\Delta\sigma), M = M(\bar{\sigma})$ 。由式(2.6.9), 得到损伤随载荷循环次数的变化关系式

$$\omega = 1 - \left[1 - \left(\frac{N}{N_F} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\beta+1} \quad (2.6.10)$$

式中

$$N_F(\Delta\sigma, \bar{\sigma}) = \frac{1}{(1-\alpha)(1+\beta)} \left[\frac{\Delta\sigma}{M} \right]^{-\beta} \quad (2.6.11)$$

根据应变等效假设(见下章), 将 Ramberg-Osgood 关系中的 Cauchy 应力替换为有效应力 $\tilde{\sigma}$, 得到在稳定状态下耦合损伤的 Ramberg-Osgood 硬化律为^[2.22]

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-\omega} = K \epsilon^{1/M} \quad (2.6.12)$$

由此假设应力幅 $\Delta\sigma$ 和应变幅 $\Delta\epsilon$ 的关系为

$$\frac{\Delta\sigma}{1-\omega} = K (\Delta\epsilon)^{1/M} \quad (2.6.13)$$

如果没有损伤发生, 在同样的载荷作用下, 应变幅记为 $\Delta\epsilon^*$, 则应有

$$\Delta\sigma = K (\Delta\epsilon^*)^{1/M} \quad (2.6.14)$$

比较以上两式, 得到损伤变量的如下表达式

$$\omega = 1 - \left(\frac{\Delta \epsilon^*}{\Delta \epsilon} \right)^{1/M} \quad (2.6.15)$$

此式表明,在控制应力加载的疲劳实验中,可以根据应变幅的变化来确定损伤的演化。

2.6.3 低周疲劳损伤

在低周疲劳情况下,塑性变形变得更重要。此时,可以将每一载荷循环中的损伤表示为塑性应变 $\Delta \epsilon^p$ 的幂指数函数形式

$$\frac{\delta \omega}{\delta N} = f(\Delta \epsilon^p) = \left(\frac{\Delta \epsilon^p}{C_1} \right)^{\gamma_1} \quad (2.6.16)$$

积分上式,并利用 $N = 0$ 时 $\omega = 0$ 和 $N = N_F$ 时 $\omega = 1$ 的条件,得到从损伤力学导出的疲劳寿命的 Coffin-Manson 关系式

$$N_F = \left(\frac{\Delta \epsilon^p}{C_1} \right)^{-\gamma_1} \quad (2.6.17)$$

当 $\Delta \epsilon^e$ 较小即应力水平较低时,损伤演化方程可以表示为应力幅 $\Delta \sigma$ 的函数,如

$$\frac{\delta \omega}{\delta N} = \left(\frac{\Delta \sigma}{C_2} \right)^{\gamma_2} \quad (2.6.18)$$

类似于式(2.6.17),有

$$N_F = \left(\frac{\Delta \sigma}{C_2} \right)^{-\gamma_2} \quad (2.6.19)$$

利用 $\Delta \sigma = E \Delta \epsilon^e$, 求出 $\Delta \epsilon^e$, 并将 $\Delta \epsilon^e$ 与 Coffin-Manson 关系中的 $\Delta \epsilon^p$ 相加,得到

$$\Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^p = \frac{C_2}{E} N_F^{-1/\gamma_2} + C_1 N_F^{-1/\gamma_1} \quad (2.6.20)$$

式中 C_1, γ_1, C_2 和 γ_2 是与温度相关的材料参数^[2,13]。实验表明,对于很多材料,式(2.6.20)都可以表示为如下的相同形式

$$\Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^p = 3.5 \frac{\sigma_u}{E} N_F^{-0.12} + D_u^{0.6} N_F^{-0.6} \quad (2.6.21)$$

式中 σ_u 为强度极限应力, D_u 是表示材料延性的参数, 它与颈缩时的面积减缩 A_R 的关系为 $D_u = -\ln(1 - A_R)$ 。

2.7 一维纤维束模型

纤维束模型最早是由 Peirce 在 1926 年提出的^[2.25], 之后有不少研究^[2.26~2.30]。在纤维束模型中, 往往应用 Weibull 的强度统计理论^[2.31], 认为固体材料的强度很大程度上决定于局部缺陷, 而不是整体的平均行为(如刚度)。这种模型虽然粗糙, 但是对于定性理解材料的力学行为和破坏机理是很有意义的。

如图 2.17(a), 假设纤维束由大量相互平行的、具有相同长度的纤维组成, 且各根纤维相互独立, 即没有侧向的相互作用力。纤维束的力学性质如强度、刚度等完全取决于每根纤维的性质。一根纤维的断裂, 对应于连续介质中的微裂纹形式的局部断裂, 它可能引起也可能不引起纤维束的整体破坏。

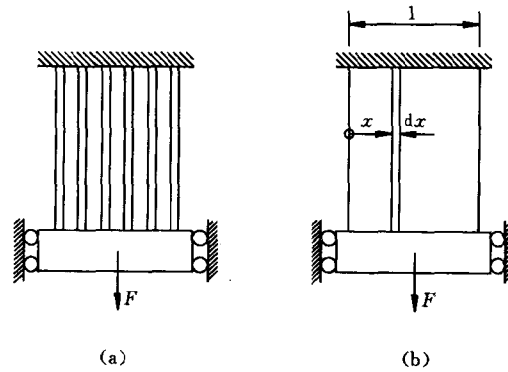


图 2.17 纤维束模型及其连续化

2.7.1 连续化的纤维束模型

如果纤维的数目非常大, 则可以将纤维束连续化^[2.26], 即看作

是由无限大数目的无限薄的纤维组成的一个等效纤维板,如图 2.17(b)所示。由于假设纤维之间没有相互作用,所以纤维的顺序可以任意排列而不影响纤维束总的性质。任意一根纤维在纤维板中的位置用连续变量 x 表示, $0 \leq x \leq 1$ 。如果纤维束总的横截面积为 A_0 ,则一根宽度为 dx 的纤维的横截面积为 $A_0 dx$ 。于是,可以将纤维重新排列,使杨氏模量 $E(x)$ 为可间断的单调增函数,而且假设纤维的杨氏模量和断裂应力 $\sigma_R(x)$ 之间存在一定的关系,从而使得 $\sigma_R(x)$ 也是沿 x 单调变化的函数。为简单起见,这里取 $E(x)$ 和 $\sigma_R(x)$ 均为线性函数,表示为

$$\begin{aligned} E(x) &= \bar{E}[1 + \mu(2x - 1)] \\ \sigma_R(x) &= \bar{\sigma}_R[1 + \nu(2x - 1)] \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

式中 \bar{E} 和 $\bar{\sigma}_R$ 为平均的杨氏模量和断裂应力,系数 μ 和 ν 变化范围为 $0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \nu \leq 1$ 。

这里设纤维是理想脆性和突然损伤的,当 $\sigma < \sigma_R$ 时, $\sigma = E\epsilon$,一旦应力达到 σ_R ,纤维立即断裂。关于弹塑性或其它性质的纤维组成的纤维束的分析可参见文献^[2.7, 2.27~2.30]。

在外载 F 作用下,每根纤维的伸长应变均为 ϵ ,如果对于所有的 x ,有 $\epsilon E(x) < \sigma_R(x)$,则所有纤维都保持线弹性。如果 $0 \leq \nu \leq 1$ 且 $\mu < \nu$, $x = 0$ 处的纤维最先发生断裂,对应的载荷记为 F_0 。载荷继续升高时,越来越多的纤维发生断裂,断裂前缘 $x = c$ 沿 x 的正向扩展。如果 $0 \leq \nu \leq 1$ 且 $\mu > \nu$, $x = 1$ 处的纤维先断裂,断裂前缘 $x = c$ 沿 x 的反向扩展。断裂前缘 c 由以下条件得到

$$\epsilon E(c) = \sigma_R(c) \quad (2.7.2)$$

对于 $0 \leq \nu \leq 1$ 且 $\mu < \nu$ 的情况,对应于断裂前缘 c 的载荷为

$$F(c) = \int_c^1 \epsilon E(x) A_0 dx = \frac{A_0 \sigma_R(c)}{E(c)} \int_c^1 E(x) dx \quad (2.7.3)$$

对于 $0 \leq \nu \leq 1$ 且 $\mu > \nu$ 的情况,相应的载荷 $F(c)$ 与上式类似,只需将积分的上下限分别换为 c 和 0 。由式(2.7.1)和(2.7.3),得

$$F(c) = A_0 \bar{\sigma}_R \frac{(1-c)(1+\mu c)(1-\nu+2\nu c)}{1-\mu+2\mu c} \quad (2.7.4)$$

$F(c)$ 曲线的形状取决于 μ 和 ν 的相对大小, 如图 2.18 所示。

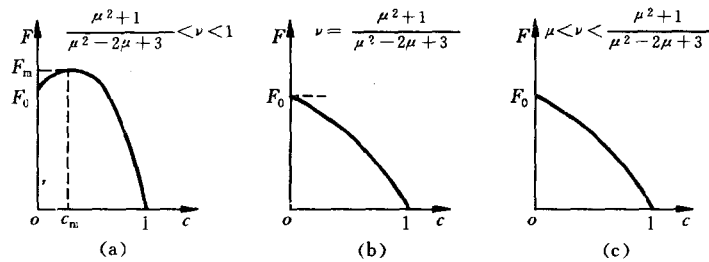


图 2.18 载荷和断裂前缘的关系曲线^[2.26]

如果

$$\frac{1+\mu^2}{3-2\mu+\mu^2} < \nu < 1 \quad (2.7.5)$$

则当载荷达到 F_0 后, 纤维逐渐发生断裂, 但纤维束总的承载能力还可以提高。当 $\partial F/\partial c = 0$ 时, 载荷达到最大值 $F_m(c_m)$, 此时断裂前缘的位置 c_m 由以下方程的最小根得到

$$8\mu^2\nu c^3 + (2\mu^2 + 10\mu\nu - 12\mu^2\nu)c^2 + (2\mu + 4\nu - 2\mu^2 - 10\mu\nu + 6\mu^2\nu)c + 1 - 3\nu + \mu^2 + 2\mu\nu - \mu^2\nu = 0 \quad (2.7.6)$$

如果

$$\mu < \nu < \frac{1+\mu^2}{3-2\mu+\mu^2} \quad (2.7.7)$$

则一旦外载达到 F_0 , 纤维束在瞬间发生完全断裂, 即纤维束承受的最大载荷为

$$F_0 = A_0 \bar{\sigma}_R \frac{1-\nu}{1-\mu} \quad (2.7.8)$$

因此对于 μ 和 ν 的不同范围, 纤维束的破坏形式也不同, 有渐进破

坏和瞬态破坏两种,如图 2.19 所示。

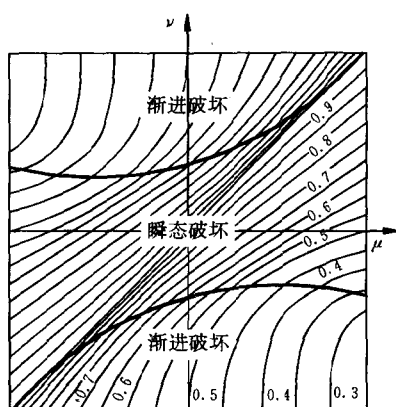


图 2.19 纤维束的破坏形式和破坏载荷^[2.26]

由式(2.7.5)可知,纤维束的性质与杨氏模量的分布有较大关系。如果假设所有纤维的杨氏模量相同,则每根纤维承受的应力也相同,为

$$\sigma^* = \frac{F}{A_0(1-c)} \quad (2.7.9)$$

该式与 Kachanov 定义的有效应力有相同的形式, $1-c$ 在纤维束模型中的物理意义为剩余纤维的横截面面积与所有纤维的横截面面积之比,相当于 Kachanov 损伤模型中的连续度 ψ ,而 c 则是纤维束损伤的一个直观的度量,相当于 Rabotnov 损伤模型中的损伤因子 ω 。

2.7.2 蠕变断裂的纤维束模型

下面将连续化的纤维束模型用于分析材料的延性蠕变问题^[2.7, 2.26]。假使纤维的杨氏模量和断裂应力分布仍为式(2.7.1)。

忽略弹性变形,且假设每根纤维的变形是线性粘性的,即

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma(x,t)}{M(x)} \quad (2.7.10)$$

式中 ϵ 为纤维的蠕变应变, σ 为真实应力(等于纤维承受的载荷除以变形后的截面积), M 为蠕变模量。假设 M 的分布为如下的线性函数

$$M(x) = \bar{M}[1 + \lambda(2x - 1)] \quad (2.7.11)$$

下面讨论 $0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \nu \leq 1, -1 \leq \lambda \leq 1$ 的情况。设纤维是体积不可压缩的,则真实应力 σ 和名义应力 $\sigma_0 = F/A_0$ 的关系为

$$\int_0^1 \sigma(x,t) dx = \sigma_0 \exp \epsilon(t) \quad (2.7.12)$$

由式(2.7.10)~(2.7.12),容易导出在出现纤维断裂之前的应力分布和应变率为

$$\sigma(x,t) = \frac{\sigma_0 \bar{M}[1 + \lambda(2x - 1)]}{\bar{M} - \sigma_0 t} \quad (2.7.13)$$

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{\bar{M} - \sigma_0 t} \quad (2.7.14)$$

一旦某一点的应力 $\sigma(x,t)$ 达到 $\sigma_R(x)$ 时,开始出现纤维断裂。若 $\nu > \lambda$, 在 $x = 0$ 处的纤维最先断裂;若 $\nu < \lambda, x = 1$ 处的纤维最先断裂。开始发生纤维断裂的时间 t_0 为

$$t_0 = \begin{cases} \frac{\bar{M}}{\sigma_0} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_R} \frac{1 - \lambda}{1 - \nu} \right) & (\nu > \lambda) \\ \frac{\bar{M}}{\sigma_0} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_R} \frac{1 + \lambda}{1 + \nu} \right) & (\nu < \lambda) \end{cases} \quad (2.7.15)$$

显然, $t_0 > 0$ 的条件为

$$F < F_1 = \begin{cases} A_0 \bar{\sigma}_R \frac{1 - \lambda}{1 - \nu} & (\nu > \lambda) \\ A_0 \bar{\sigma}_R \frac{1 + \lambda}{1 + \nu} & (\nu < \lambda) \end{cases} \quad (2.7.16)$$

若 $F \geq F_1$, 加载之后, 立即出现纤维的断裂, 并由于 μ 和 ν 的不同取值, 整个纤维束可能发生瞬态断裂或渐进断裂。若 $F < F_1$, 则在发生纤维断裂之前存在一个孕育断裂的阶段, 孕育断裂的时间为 t_0 。达到时刻 t_0 后, 在纤维束的 $x = 0$ 或 $x = 1$ 的一侧开始发生纤维的断裂, 这取决于 $\nu > \lambda$ 还是 $\nu < \lambda$ 。不妨设 $\nu > \lambda$ 且 $\lambda < 0$, 则断裂前缘从 $x = 0$ 开始向右扩展, 在 t 时刻, 范围 $0 < x < c(t)$ 内的所有纤维已经断裂。可以导出断裂前缘的扩展速度 \dot{c} 与应变率 $\dot{\epsilon}$ 的关系为

$$N(c, \lambda, \nu) \dot{c} = \frac{\sigma_0}{\sigma_R} \dot{\epsilon} \exp \epsilon(t) \quad (2.7.17)$$

式中

$$N(c, \lambda, \nu) = \frac{2(\nu - \lambda)(1 + \lambda c)(1 - c) - [1 + \lambda(2c - 1)]^2 [1 + \nu(2c - 1)]}{[1 + \lambda(2c - 1)]^2} \quad (2.7.18)$$

方程 $N(c, \lambda, \nu) = 0$ 的最小根记为 $c_r(\lambda, \nu)$ 。在 $c = c_r$ 之前, 速度 \dot{c} 保持单调增加, 一旦达到 $c = c_r$, 纤维束将立即完全断裂。方程 $N(c, \lambda, \nu) = 0$ 的根如图 2.20 所示, $c_r = 0$ 的两条曲线之间的区域为延迟的瞬态断裂区域, 即在经过断裂孕育阶段之后的 t_0 时刻纤维束

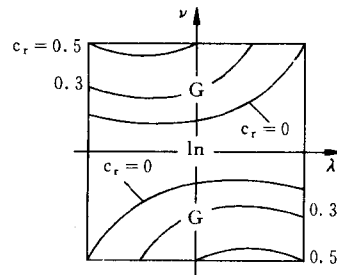


图 2.20 断裂前缘的临界位置和扩展模式^[2.27]

发生瞬态断裂。 $c_r > 0$ 的区域为延迟的渐进断裂区域,即在 t_0 时刻纤维束的一侧发生断裂并逐渐发展到完全断裂,在此情况下纤维束从加载到断裂的总时间为

$$t_r \approx t_0 + c_r \frac{\nu(2 - \lambda + \lambda^2) - \lambda - \lambda^2 \frac{M}{\sigma_R}}{(1 - \nu)^2} \quad (2.7.19)$$

综上所述,纤维束的破坏形式有 4 种,即立即的瞬态断裂(immediate instantaneous rupture 或 II)、立即的渐进断裂(immediate gradual rupture 或 IG)、延迟的瞬态断裂(delayed instantaneous rupture 或 DI)和延迟的渐进断裂(delayed gradual rupture 或 DG)。这 4 种破坏形式与参数 λ 和 ν 的关系如图 2.21 所示,在不同的破坏形式下纤维束的断裂过程如图 2.22 所示。

断裂前缘 $c(t)$ 在纤维束中的扩展相当于 Kachanov-Rabotnov 蠕变损伤理论中的损伤因子的演化,Kachanov 假设当损伤因子达到临界值 $\omega_c = 1$ 时,材料发生断裂,但实验发现实际材料断裂时的损伤因子远低于此值。由图 2.20 可以看出, c 的临界值在 $0 < c_r < 0.547$ 的范围内,这一点与实验结果比较接近。

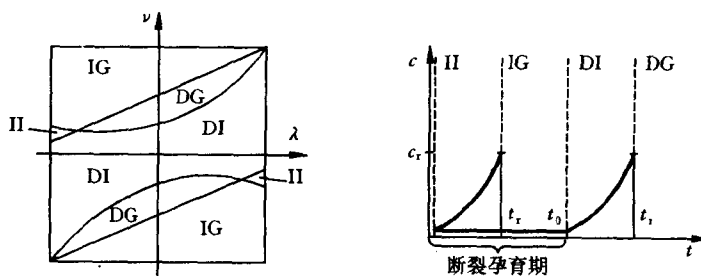


图 2.21 纤维束的 4 种破坏形式^[2.27] 图 2.22 纤维束的破坏过程^[2.27]

参 考 文 献

- 2.1 Kachanov L M. On the time to failure under creep condition. *Izv. Akad. Nauk. USSR. Otd. Tekhn. Nauk.* 1958, 8, 26~31
- 2.2 Kachanov L M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics.* Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1986
- 2.3 Rabotnov Y N. On the equations of state for creep. in: *Progress in Applied Mechanics.* 1963, 307~315
- 2.4 Rabotnov Y N. Creep ruptures. in: *Applied Mechanics, Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics.* (Edited by Hetenyi, M. and Vincenti W G.) Standford-Springer-Verlag, Berlin, 1969, 342~349
- 2.5 Broberg H. *Creep Damage and Rupture.* Dissertation of Chalmers University of Technology, Gothenberg, 1975
- 2.6 Janson J and Hult J. Fracture mechanics and damage mechanics, a combined approach. *J. de Mech. Appl.*, 1977, 1(1), 59~64
- 2.7 Hult J. Introduction and general overview. in: *Continuum Damage Mechanics: Theory and Applications.* (Edited by Krajcinovic D and Lemaitre J.) Wien-New York, Springer-Verlag, 1989
- 2.8 Hoff N J. Necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads. *J. Appl. Mech.*, 1953, 20, 105~108
- 2.9 Hult J and Broberg H. Creep rupture under cyclic loading. *Proceedings of the Second Bulgarian Congress on Mechan-*

ics, 1976, 263~272

- 2.10 Broberg H. A new criterion for brittle creep rupture. *J. Appl. Mech.*, 1974, 11(3), 809~811
- 2.11 Penny R K. The use of damage concepts in component life assessment. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, 1996, 66, 263~280
- 2.12 Leckie F A and Hayhurst D R. Constitutive equations of creep rupture. *Acta Metallurgica*, 1977, 25, 1059~1070
- 2.13 Lemaitre J and Chaboche J L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1990
- 2.14 Dragon A and Mróz Z. A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *Int. J. Eng. Sci.*, 1979, 17, 121~137
- 2.15 谢和平. 岩石、混凝土损伤力学. 中国矿业大学出版社, 1990
- 2.16 Mazars J. Application de la mecanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du beton de structure. These de doctorat d'Etat. Univ. Paris VI, 1984
- 2.17 Loland K E. Continuum damage model for load response estimation of concrete. *Cement and Concrete Research*, 1980, 10, 395~402
- 2.18 余天庆. 混凝土的分段线性损伤模型. 岩石、混凝土断裂与强度, 1982, 2, 14~16
- 2.19 钱济成, 周建方. 混凝土的两种损伤模型及其应用. 河海大学学报, 1989, 3, 40~47
- 2.20 Chaboche J L. Continuum damage mechanics — a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nucl. Eng.*

-
- Design, 1981, 64, 233~247
- 2.21 Walter S. A history of fatigue. Eng. Fract. Mech., 1996, 54(2), 263~300
- 2.22 李灏. 损伤力学基础. 山东科学技术出版社, 1992
- 2.23 楼志文. 损伤力学基础. 西安交通大学出版社, 1991
- 2.24 曾攀. 材料的概率疲劳损伤特性及其现代结构分析原理. 科学技术文献出版社, 1993
- 2.25 Perice F T. Tensile test for cotton yarns vs "the weakest link". J. Textile Inst., 1926, 17, T355~T368
- 2.26 Hult J and Travnicek L. Carrying capacity of fibre bundles with varying strength and stiffness. J. de Mecanique Theorique et Appliquee, 1983, 2(4), 643~657
- 2.27 Chrzanowski M and Hult J. Ductile creep fracture of fibre bundles. Eng. Fract. Mech., 1987, 28(5/6), 681~688.
- 2.28 Krajcinovic D and Lemaitre J. Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications. Wien-New York, Springer-Verlag, 1988
- 2.29 Krajcinovic D. Damage mechanics. Mech. Mater., 1989, 8(2), 117~197
- 2.30 Fanella D and Krajcinovic D. Continuum damage mechanics of fiber reinforced concrete. J. Eng. Mech., 1985, 111(8), 995~1006.
- 2.31 Weibull W. The phenomenon of rupture of solids. I. V. A. Proc., No. 153, Stockholm, 1939

第3章 三维各向同性损伤理论

在第2章中,我们介绍了一维受力情形下的损伤理论,并简单介绍了它们在结构承载能力、寿命预计、蠕变断裂等方面的应用。从本章起,将讨论在三维变形的一般情况下损伤理论的建立和应用等问题。为了叙述上的方便和便于读者的理解,我们从各向同性损伤理论的介绍开始。

3.1 Lemaitre-Chaboche 塑性损伤理论

在一些韧性较好的金属材料中,损伤经常表现在伴随着大的塑性变形而发生的微裂纹和微孔洞的形核和扩展。在 McClintock^[3.1], Rice 和 Tracey^[3.2] 以及后来的一些研究中,从细观力学的角度分析了韧性损伤的物理机制,这类方法能对损伤的细观过程和物理背景作出较好的解释,但是难以直接应用于宏观结构分析。连续损伤力学则从数学的角度引入描述损伤的内变量——损伤变量,虽然损伤变量也常被赋予一些物理解释,但是没有细观力学那样清晰的物理背景,其优点是容易引入到结构分析中去,尤其是借助于 Kachanov 提出的有效应力的概念^[3.3]。在韧性金属材料中,有三类最重要的损伤即塑性损伤、疲劳损伤和蠕变损伤,连续损伤力学已经较好地应用到这三类损伤及其耦合存在的损伤情形^[3.4~3.12]。各向同性损伤的假设对于金属材料的结构承载能力分析、疲劳和蠕变寿命的预测一般是可以接受的一种近似。

Lemaitre 和 Chaboche 继承了 Kachanov 和 Rabotnov 的有效

应力概念,在实验的基础上,通过一些近似处理,建立了一种各向同性的塑性损伤理论^[3.4~3.8]。

3.1.1 损伤变量和应变等效假设

选取材料的一个代表性体积单元,设其在垂直于 n 方向上的总的截面面积为 A , 由于微缺陷(如微裂纹和微空洞)的存在,导致实际的有效承载面积 \tilde{A} 比 A 小,即

$$\tilde{A} = A - A_D \quad (3.1.1)$$

式中 A_D 为考虑了应力集中和缺陷相互作用之后的缺陷面积(图 3.1)。在各向同性假设的前提下,损伤变量 ω 不随截面方向而变化,即与 n 无关,可定义为缺陷面积与总面积之比

$$\omega = \frac{A_D}{A} = \frac{A - \tilde{A}}{A} \quad (3.1.2)$$

式中 $\omega = 0$ 对应于无损状态, $\omega = 1$ 对应于材料的完全断裂, $0 < \omega < 1$ 对应于不同程度的损伤状态。事实上,断裂时的损伤临界值 ω_c 一般小于 1。

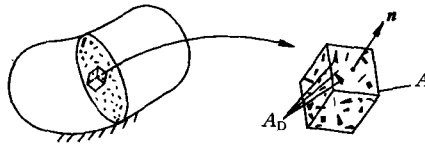


图 3.1 损伤材料单元

由于损伤导致有效承载面积的减小,有效应力将随之升高。定义有效应力张量为

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - \omega} \quad (3.1.3)$$

式中 σ_{ij} 为 Cauchy 应力张量。应该注意到式(3.1.3)包含了一个假设,即认为所有缺陷对拉伸和压缩情况的影响是相同的,这一点限

制了该损伤理论仅适用于拉伸情况和压缩应力较小的情况。因为在压缩情况下,一些微裂纹是闭合的,有效承载面积大于 $\tilde{A} = A - A_D$ 。

在含损伤材料中,要从细观上对每一种缺陷形式和损伤机制进行分析以确定有效承载面积是很困难的,为了能间接地测定损伤,Lemaitre^[3.9]于1971年提出了有重要意义的应变等效假设。这一假设认为:受损材料的变形行为可以只通过有效应力来体现,换言之,损伤材料的本构关系可以采用无损时的形式,只要将其中的应力 σ_{ij} 替换为有效应力 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 即可,如图 3.2 所示。例如,损伤材料的一维线弹性关系为

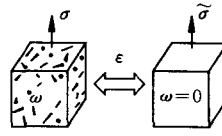


图 3.2 应变等效假设

$$\epsilon^e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-\omega)E} = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \quad (3.1.4)$$

式中 E 为弹性模量,损伤就体现在把无损时的弹性模量 E 减小为损伤后的弹性模量 $\tilde{E} = (1-\omega)E$ 。又如损伤材料中考虑应变强化的 Ramberg-Osgood 关系式为

$$\epsilon^p = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{K} \right)^M = \left[\frac{\sigma}{(1-\omega)K} \right]^M \quad (3.1.5)$$

式中 K 和 M 为材料常数。

3.1.2 热力学势

损伤力学是以含内变量的连续介质热力学为基础建立起来的。在有损伤情况下,构造三维本构关系的一种典型方法是假设存在能量势函数,由它导出动力学本构方程和损伤演化律^[3.5]。根据确定性原理,材料的状态函数(例如应力)将唯一地取决于状态变量(例如应变、温度)的变化历史。材料的力学和热学状态参量,如应力、应变、熵、温度等,可以分成三类,即可观察变量、内变量和与

之功共轭的变量,见表 3.1。利用这些变量可以将三维情况下的弹性、塑性、热效应以及损伤模型化。

表 3.1 热力学中的三类变量^[3,5]

可观察变量	内变量	功共轭变量
总应变张量 ϵ_{ij}		Cauchy 应力张量 σ_{ij}
温度 T		熵 s
	弹性应变张量 ϵ_{ij}^e	应力张量 σ_{ij}
	塑性应变张量 ϵ_{ij}^p	应力张量 - σ_{ij}
	损伤累积塑性应变 γ	屈服面半径 $R_y + R$
	背应变张量 α_{ij}	背应力张量 X_{ij}
	损伤变量 ω	损伤应变能释放率 γ

表中 γ 是累积塑性应变 p 中与各向同性强化对应的部分, \dot{r} 与 \dot{p} 相差一个系数。 R 表示屈服面半径的增长, X_{ij} 表示随动强化引起的屈服面中心的平移。累积塑性应变率的定义为

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)^{1/2} \quad (3.1.6)$$

假设材料的本构方程可以由一个状态势函数导出,选取 Helmholtz 自由能

$$\psi = \psi(\epsilon_{ij}, T, \epsilon_{ij}^e, \epsilon_{ij}^p, p, \alpha_{ij}, \omega) \quad (3.1.7)$$

对于弹塑性材料或弹性粘塑性材料,在 ψ 中应变只通过 $\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p$ 起作用,即

$$\psi = \psi(\epsilon_{ij}^e, T, p, \alpha_{ij}, \omega) \quad (3.1.8)$$

Lemaitre 在实验中发现,许多材料随着损伤的发展,弹性模量越来越小,因此认为损伤和材料的弹性相关,于是把热力学势(比自由能) ψ 分成不耦合的弹性部分 ψ_e 和塑性部分 ψ_p ,只把损伤引入

ψ_e 中,而在 ψ_p 中不反映损伤,即

$$\psi = \psi_e(\epsilon_{ij}^e, T, \omega) + \psi_p(T, \alpha_{ij}, p) \quad (3.1.9)$$

由量纲分析, ψ_e 应是弹性应变张量 ϵ_{ij}^e 的二次函数和 $(1 - \omega)$ 的线性函数,为

$$\psi_e = \frac{1}{2\rho} \epsilon_{ij}^e \epsilon_{kl}^e \alpha_{ijkl} (1 - \omega) \quad (3.1.10)$$

式中 α_{ijkl} 为依赖于温度的 4 阶弹性刚度张量。Lemaitre 给出的 ψ_p 表达式为^[3.5]

$$\psi_p = \frac{R_\infty}{\rho} \left[r + \frac{1}{b} \exp(-br) \right] + \frac{X_\infty \gamma}{3\rho} \alpha_{ij} \alpha_{ij} \quad (3.1.11)$$

式中, R_∞ 和 b 是描述各向同性强化的参数, X_∞ 和 γ 是描述随动强化的参数。作为延性损伤的一种近似,假设质量密度 ρ 是常数。于是,由 Clausius-Duhem 不等式,损伤材料的弹性应力应变关系为

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} = \epsilon_{kl}^e \alpha_{ijkl} (1 - \omega) \quad (3.1.12)$$

以及与损伤变量 ω 功共轭的广义热力学力为

$$y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ij}^e \epsilon_{kl}^e \alpha_{ijkl} \quad (3.1.13)$$

— $y\omega$ 即为损伤的不可逆耗散功率。

3.1.3 损伤准则

弹性应变能 W_e 定义为

$$dW_e = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e \quad (3.1.14)$$

由式(3.1.12)~(3.1.14),得到 y 和 W_e 的关系式

$$-y = \frac{W_e}{1 - \omega} \quad (3.1.15)$$

还可以证明 y 是在恒应力和恒温情况下 W_e 对损伤变量的导数的一半,即

$$-y = \frac{1}{2} \frac{\partial W_e}{\partial \omega} \Big|_{\sigma_{ij} = \text{const.}} \quad (3.1.16)$$

式(3.1.16)表明, $(-y)$ 的物理意义类似于线弹性断裂力学中的能量释放率 G , 因此称之为损伤增长时的应变能释放率, 这种能量释放是由于损伤发生时刚度的降低引起的。现在来求 $(-y)$ 的表达式。弹性应变能 W_e 包括剪切应变能和体积变化能两部分, 它们可以通过弹性模量 E 和泊松比 ν 表示。由损伤材料的本构关系可得应变偏斜张量 e_{ij}^e 和静水应变 $\epsilon_m = \frac{1}{3}\epsilon_{ii}$ 的弹性关系为

$$e_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \frac{s_{ij}}{1-\omega}, \quad \epsilon_m = \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_m}{1-\omega} \quad (3.1.17)$$

式中 $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ 为静水应力, s_{ij} 为偏斜应力张量。于是, 由 $W_e = e_{ij}^e s_{ij} + 3\epsilon_m \sigma_m$, 得

$$-y = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu}{E} \frac{s_{ij}s_{ij}}{(1-\omega)^2} + \frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{\sigma_m^2}{(1-\omega)^2} \right] \quad (3.1.18)$$

定义 Mises 等效应力 σ_{eq} 为

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.19)$$

则式(3.1.18)重新写为

$$-y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-\omega)^2} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (3.1.20)$$

在单轴拉伸情况下, $\sigma_{eq} = \sigma, \sigma_m = \frac{1}{3}\sigma$, 于是

$$-y = \frac{\sigma^2}{2E(1-\omega)^2} \quad (3.1.21)$$

因为 y 是与损伤变量 ω 共轭的热力学力, 所以 ω 的演化应由 y 控制。类似于 Mises 等效应力, 定义损伤等效应力 σ_{eq}^* 为

$$\sigma_{\text{eq}}^* = \sigma_{\text{eq}} \left[\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{eq}}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.22)$$

σ_{eq}^* 在损伤力学中的作用就相当于 σ_{eq} 在塑性力学中的作用, 二者的一个重要差别在于 σ_{eq}^* 中包含了三轴应力比 $\sigma_m/\sigma_{\text{eq}}$ 的影响, 而在塑性力学中塑性变形一般与静水应力无关。大量的实验和理论研究表明, 三轴应力比对材料的损伤演化和断裂起着重要的作用, 三轴应力比越高, 材料断裂时的韧性越差即材料显得越脆。再定义损伤有效等效应力为

$$\tilde{\sigma}_{\text{eq}}^* = \frac{\sigma_{\text{eq}}^*}{(1 - \omega)} \quad (3.1.23)$$

则式(3.1.20)又可写成

$$-y = \frac{1}{2E} (\tilde{\sigma}_{\text{eq}}^*)^2 \quad (3.1.24)$$

在假设内禀力学耗散和热耗散不耦合的情况下, 热力学第二定律可以表示为

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - R \dot{p} - y \dot{\omega} \geq 0 \quad (3.1.25)$$

假定塑性过程和损伤过程是独立的, 则上式要求塑性耗散率和损伤耗散率均非负, 即

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - R \dot{p} \geq 0, \quad -y \dot{\omega} \geq 0 \quad (3.1.26)$$

因为 $(-y)$ 是正的, $\dot{\omega}$ 也必为正, 即损伤变量的演化是单调增的。随着外载荷的增加, 损伤将不断发展直至材料发生完全断裂。类似于线弹性断裂力学中的破坏准则, 定义损伤材料的断裂准则为: 损伤变量达到其临界断裂值 ω_c , 即

$$\omega = \omega_c \quad (3.1.27)$$

或用损伤能量释放率表示为

$$-y = y_c \quad (3.1.28)$$

式中 ω_c 和 y_c 为材料参数, 二者的关系为

$$y_c = \frac{\sigma_R^2}{2E(1 - \omega_c)^2} \quad (3.1.29)$$

式中 σ_R 是单轴拉伸时的破坏应力值。所以

$$\tilde{\sigma}_R = \frac{\sigma_R}{1 - \omega_c} = (2Ey_c)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.30)$$

这就是 Orowan 的脆性断裂条件。由式 (3.1.30), 材料的损伤临界值为

$$\omega_c = 1 - \frac{\sigma_R}{\sqrt{2Ey_c}} \quad (3.1.31)$$

对于金属材料, 实验表明 $0.2 \leq \omega_c \leq 0.8$ 。

3.1.4 损伤演化方程

为了进一步得到损伤变量的演化方程, 假设存在一个外凸的耗散势函数 $f(\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{p}, \dot{\omega}, q_i; \dot{\epsilon}_{ij}, T, p, \omega)$, 其中 q_i 是热流矢量。并由 Legendre 变换得到对偶的势函数 $f^*(\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{p}, y, q_i; \dot{\epsilon}_{ij}, T, p, \omega)$, 根据正交法则可得到损伤演化的动力学方程

$$\dot{\omega} = - \frac{\partial f^*}{\partial y} \quad (3.1.32)$$

以及在应力空间中应变用应力表示的损伤本构方程。但是 Lemaitre 没有采用这种方法, 而是放弃了正交法则, 由应变等效假设和无损材料的本构关系直接写出损伤材料的应力应变关系, 并从实验出发, 假设了损伤演化方程的形式。认为在塑性和损伤均为各向同性的情况下, 耗散势 f^* 仅依赖于 y, \dot{p} 和 T , 且假设为 $-y$ 的二次函数和 \dot{p} 的一次函数, 即

$$f^*(y, \dot{p}, T) = \frac{S_0}{s_0 + 1} \left(\frac{-y}{S_0} \right)^{s_0+1} \dot{p} \quad (3.1.33)$$

式中 S_0 和 s_0 为材料参数。由此得到损伤演化方程为

$$\dot{\omega} = - \frac{\partial f^*}{\partial y} = \left(\frac{-y}{S_0} \right)^{s_0} \dot{p} \quad (3.1.34)$$

对于三维情况, 设弹性应变相对于塑性应变很小而可以忽略,

于是,式(3.1.6)变成

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right)^{1/2} \quad (3.1.35)$$

采用损伤材料的 Ramberg-Osgood 硬化律关系式

$$p = \left[\frac{\sigma_{eq}}{(1-\omega)K} \right]^M \quad \text{或} \quad \frac{\sigma_{eq}}{1-\omega} = K p^{1/M} \quad (3.1.36)$$

并采用式(3.1.20)和(3.1.34),得到损伤演化方程为

$$\dot{\omega} = \left\{ \frac{K^2}{2ES_0} \left[\frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] p^{2/M} \right\}^{s_0} \dot{p} \quad (3.1.37)$$

在比例加载的情况下,各点的主应力方向保持不变,有

$$\sigma_{ij}(x,t) = a(t)\sigma_{ij}(x) \quad (3.1.38)$$

式中 $a(t)$ 为标量因子。此时,三轴应力比 σ_m/σ_{eq} 也保持常数。设 p_D 是损伤的应变阈值,即对于 $p < p_D$, 恒有 $\dot{\omega} = 0$ 。于是,由式(3.1.37)积分,可以得到损伤变量 ω 和累积塑性应变 p 的关系为

$$\omega = \omega_c \left(\frac{p^{(2s_0+M)/M} - p_D^{(2s_0+M)/M}}{p_R^{(2s_0+M)/M} - p_D^{(2s_0+M)/M}} \right) \quad (3.1.39)$$

式中 p_R 是 $\omega = \omega_c$ 时材料的断裂应变,它与三轴应力比相关。损伤变量的临界值 ω_c 为

$$\omega_c = \left\{ \frac{K^2}{2ES_0} \left[\frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \right\}^{s_0} \times \frac{M}{2s_0 + M} \left(p_R^{\frac{2s_0+M}{M}} - p_D^{\frac{2s_0+M}{M}} \right) \quad (3.1.40)$$

对于金属材料,当变形较大时,硬化指数 M 往往很大(对于理想塑性材料, $M = \infty$), 而 s_0 是 1 的量级,因此 $(M + 2s_0)/M$ 接近于 1。虽然 p_R 和 p_D 与三轴应力比相关,但可以近似假设 p_D/p_R 与三轴应力比无关,有

$$\frac{p_D}{p_R} = \frac{\epsilon_D}{\epsilon_R} \quad (3.1.41)$$

式中 ϵ_D 和 ϵ_R 是单向拉伸情况下的损伤应变门槛值和断裂应变值。由式(3.1.40)以及 $(M + 2s_0)/M = 1$, 得到单向拉伸时的断裂应变

$$\epsilon_R = \frac{\omega_c}{1 - \epsilon_D/\epsilon_R} \left(\frac{2ES_0}{K^2} \right)^{s_0} \quad (3.1.42)$$

以及三轴应力下的断裂应变

$$p_R = \epsilon_R \left[\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]^{s_0} \quad (3.1.43)$$

三轴应力比对断裂应变值的影响如图 3.3 所示, 实线为 Lemaitre-Chaboche 损伤理论即式(3.1.43)的结果, 虚线为 McClintock^[3.1] 或 Rice 和 Tracey^[3.2] 的结果, “·”和“×”为两种钢材的实验点。于是, 式(3.1.39)简化为如下的线性形式

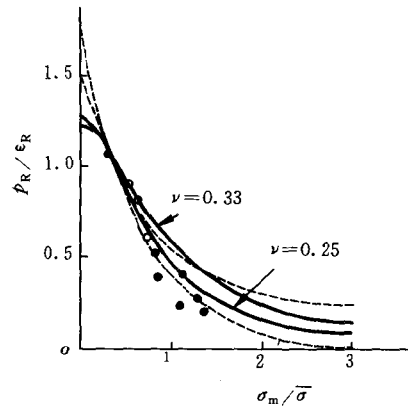


图 3.3 三轴应力比对断裂应变的影响^[3.7]

$$\omega = \omega_c \left\langle \frac{p\epsilon_R/p_R - \epsilon_D}{\epsilon_R - \epsilon_D} \right\rangle \quad (3.1.44)$$

在单向拉伸的情况下, 该式简化为

$$\omega = \omega_c \left\langle \frac{\epsilon - \epsilon_D}{\epsilon_R - \epsilon_D} \right\rangle \quad (3.1.45)$$

3.1.5 参数的实验测定

通过单向拉伸实验可以测定 Lemaitre-Chaboche 损伤模型中的三个材料参数 ϵ_D, ϵ_R 和 ω_c 。 ϵ_D 和 ω_c 的测定需要测量损伤。Lemaitre 利用有效应力的概念,通过单向拉伸过程中弹性模量损伤的变化测量损伤 ω 。由损伤弹性模量 $\tilde{E} = (1 - \omega)E$, 可得

$$\omega = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (3.1.46)$$

室温下 99.9% 的铜的单向拉伸曲线如图 3.4 所示,6 种材料的损伤演化曲线如图 3.5 所示,图中横坐标为对数应变。由损伤演化曲线可以得到损伤模型中的三个材料参数。可以看出,正如上面的理

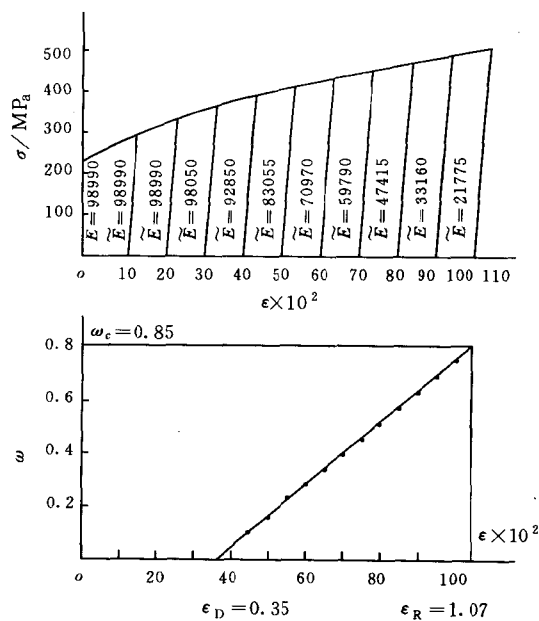


图 3.4 铜的单向拉伸曲线

论预测,在单向拉伸情况下损伤演化与塑性应变近似成线性关系。

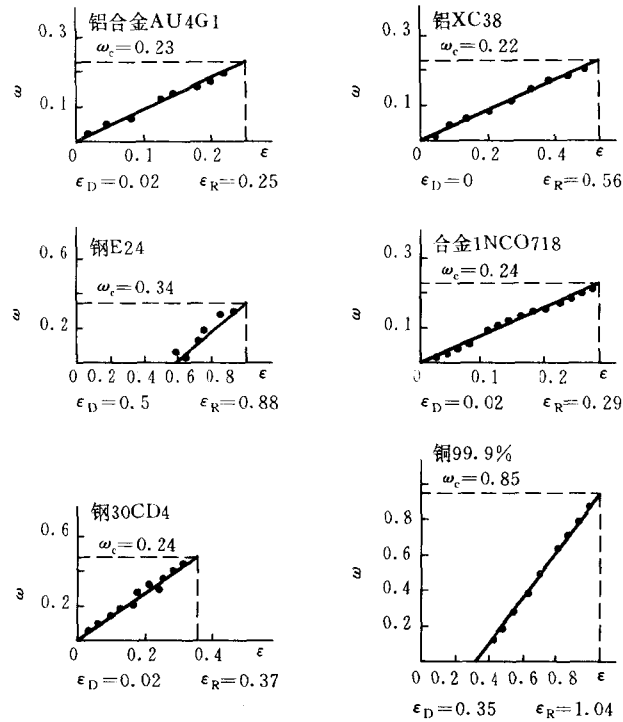


图 3.5 6 种材料的损伤演化曲线

在本节介绍的损伤模型中, Lemaitre 牺牲了正交法则, 而是强制性地假设了损伤演化方程的形式, 以和实验结果相符合, 因此这一损伤理论没有严格满足热力学的全部基本方程。但是对于其所研究的一类材料, 该模型是适用的。而且由于其简单方便, Lemaitre-Chaboche 塑性损伤模型受到工程师的欢迎, 并被推广应用用于蠕变、疲劳以及蠕变与疲劳相互作用的情况^[3,4]。

3.2 Kachanov 蠕变损伤理论^[3.3]

3.2.1 蠕变方程

在 Kachanov 蠕变损伤理论中,只考虑稳定的蠕变阶段,且忽略弹性变形,假设材料是不可压的,即

$$\dot{\epsilon}_{ii} = 0$$

假设应力张量和应变张量的主轴相重合,因此有

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda s_{ij} \quad (3.2.1)$$

式中 λ 是一个标量因子。定义剪切应变率强度 H 和剪切应力强度 Q 如下

$$H = (2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}, \quad Q = \left(\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2} \quad (3.2.2)$$

在 Kachanov 损伤理论中,假设蠕变变形与静水应力 σ_m 无关。剪切应力强度和剪切应变率强度的关系为

$$H = f(Q)Q \quad \text{或} \quad Q = g(H)H \quad (3.2.3)$$

于是有

$$2\dot{\epsilon}_{ij} = f(Q)s_{ij} \quad \text{或} \quad s_{ij} = 2g(H)\dot{\epsilon}_{ij} \quad (3.2.4)$$

在幂次蠕变律的情况下,设

$$H = B'Q^n, \quad Q = \bar{B}'H^\mu \quad (3.2.5)$$

式中 $B' > 0$ 和 $n \geq 1$ 为材料参数。

$$\mu = \frac{1}{n}, \quad \bar{B}' = (B')^{-\mu}, \quad 0 < \mu \leq 1$$

如果结构内的温差不是太大,则可以在一定的温度范围内认为 n 为常数,而 B' 视为温度 θ 的函数,即 $B' = B'(\theta)$ 。

由式(3.2.5)可以导出 B' 和第 2 章的 Kachanov 一维蠕变损伤理论中式(2.3.5)的蠕变系数 B 的关系为

$$B' = 3^{(n+1)/2} B$$

此时,有

$$f(Q) = B'Q^{n-1}, \quad g(H) = \bar{B}'H^{n-1} \quad (3.2.6)$$

容易证明

$$s_{ij} = \frac{\partial Q^2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial Q^2}{\partial s_{ij}} \quad (3.2.7)$$

因此,蠕变方程式(3.2.4)可以写成如下的形式

$$2\dot{\epsilon}_{ij} = f(Q) \frac{\partial Q^2}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.2.8)$$

即在应力空间中,应变率张量 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 垂直于流动面

$$Q^2 = \text{常数}$$

引入一个新的外凸的流动面

$$F(\sigma_{ij}) = \text{常数} \quad (3.2.9)$$

并同样利用正交法则,得到一个具有更一般意义的蠕变流动方程

$$2\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.2.10)$$

式中 λ 为一标量因子。如果考虑材料的强化,有

$$\lambda = \lambda(Q, \Gamma)$$

式中 Γ 称为 Odquist 参数,

$$\Gamma = \int_0^t H dt$$

如果同时考虑塑性变形,则总应变率包括塑性应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 和蠕变应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}^c$, 即

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^c \quad (3.2.11)$$

式中 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 由塑性力学的理论得到。

3.2.2 断裂准则和损伤动力学方程

第2章式(2.3.14)给出了单轴拉伸情况下蠕变脆性断裂时间的表达式

$$t_{\text{RK}} = [(\nu + 1)C\sigma_0^\nu]^{-1}$$

在多轴蠕变情况下,将材料发生脆性断裂的时间 t_{R} 表示为类似的形式

$$t_{\text{R}} = f(\sigma^*) \quad (3.2.12)$$

式中 σ^* 为等效应力。常用的等效应力有三种定义,最简单的是假设等效应力等于最大主应力 σ_1 , 即

$$\sigma^* = \sigma_1 \quad (3.2.13)$$

对于某些金属(如铜和一些钢材),这一定义和实验数据比较符合。如果引入剪切应力强度的影响,等效应力表示为

$$\sigma^* = \alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)Q \quad (3.2.14)$$

式中 $0 \leq \alpha \leq 1$ 为一常数,它与实验数据相符得更好。Hayhurst 等^[3.11]给出了一种更为一般的形式

$$\sigma^* = \alpha\sigma_1 + \beta Q + \gamma\sigma_m \quad (3.2.15)$$

式中 α, β 和 γ 均为材料常数。

假设损伤的演化取决于有效等效应力 σ^*/ψ , 即

$$\frac{d\psi}{dt} = F\left(\frac{\sigma^*}{\psi}\right) \quad (3.2.16)$$

为简单起见,设连续度的演化方程为幂函数形式

$$\frac{d\psi}{dt} = -C\left(\frac{\sigma^*}{\psi}\right)^\nu \quad (3.2.17)$$

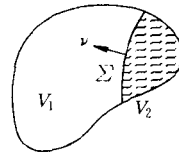
式中 $C > 0$ 和 $\nu \geq 1$ 为材料常数。

3.2.3 断裂前缘

如果结构中的应力是非均匀的,其断裂过程分为两个阶段。第一阶段($0 \leq t \leq t_1$)称为断裂孕育阶段,此时各点的连续度均为正值。在时刻 t_1 , 结构中的某一点或某一区域开始发生断裂,宏观裂纹开始形成。第二阶段($t > t_1$)称为断裂扩展阶段,达到损伤临界值的区域逐渐扩展。

如图 3.6 所示,设在 t 时刻 ($t > t_1$), 区域 V_2 内的各点达到了损伤临界值, 它与结构中剩余区域 V_1 (其内部 $\psi > 0$) 的动态分界面 Σ 定义为断裂前缘。在 Σ 上, 恒有 $\psi = 0$, 因此,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3.2.18)$$



式中 u 为断裂前缘沿扩展方向的距离。由图 3.6 断裂前缘的扩展式 (3.2.17) 和 (3.2.18), 得到断裂前缘的运动方程为

$$\frac{du}{dt} = - (\sigma_{\Sigma}^*)^{\nu} \left[\frac{\partial}{\partial u} \int_0^t [\sigma^*(\tau)]^{\nu} d\tau \right]^{-1} \quad (3.2.19)$$

断裂前缘的方程还可以写成其它的形式。在固定点的等效应力 σ^* 是时间的函数, 如果在 t 时刻, 断裂前缘到达了该点, 即 $\psi = 0$, 则有

$$C(\nu + 1) \int_0^t [\sigma^*(\tau)]^{\nu} d\tau = 1 \quad (3.2.20)$$

3.2.4 厚壁圆筒的断裂^[3.3]

作为一个简单的例子, 我们考虑承受内压的厚壁圆筒的脆性断裂。如图 3.7 所示, 筒的内外半径分别为 a_0 和 b_0 , 断裂前缘的半径为 $b(t)$ 。在稳态蠕变阶段, 筒壁内的应力分布近似为

$$\sigma_r = s \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^{2\mu} \right], \quad \sigma_{\varphi} = s \left[1 + (2\mu - 1) \left(\frac{b}{r} \right)^{2\mu} \right] \quad (3.2.21)$$

式中 $s = s(\beta) = p(\beta^{2\mu} - 1)$, $\beta = b/a_0$, $\beta_0 = b_0/a_0$ 和 $s_0 = s(\beta_0)$

由于 $\sigma_r < 0$, $\sigma_{\varphi} > 0$, 因此取 $\sigma^* = \sigma_{\varphi}$, 即蠕变断裂时间只与 σ_{φ} 有关。如果蠕变指数 $n = 2$, 应力 σ_{φ} 为常数, 筒壁内各点同时达到损伤临界值, 厚壁圆筒瞬间发生完全断裂。如果 $n < 2$, 断裂从内壁开始向外扩展。如果 $n > 2$ 且 $\beta \leq (1 - 2\mu)^{-n/2}$, 筒壁内各点的 σ_{φ}

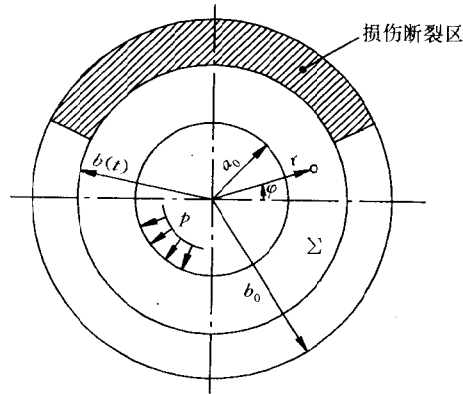


图 3.7 厚壁圆筒的脆性断裂

均为拉应力,断裂从外壁开始向内扩展(图 3.7)。下面只讨论这最后一种情况,断裂孕育时间为

$$t_1 = [(\nu + 1)C(2\mu s)^\nu]^{-1} \quad (3.2.22)$$

在时刻 t_1 ,厚壁圆筒的外壁处形成一断裂前缘,在时刻 t ,断裂前缘的半径扩展为 $b(t)$ 。在式(3.2.19)中,取 $\bar{\sigma} = \sigma_\varphi$,并将 $s = s[\beta(\tau)]$, $b = b(\tau)$, $r/a_0 = \beta(\tau)$ 代入,得到方程

$$\frac{d\beta}{dt} = - \frac{s^\nu(\beta)}{\Phi(\beta, \mu, \nu)} \quad (3.2.23)$$

式中

$$\begin{aligned} \Phi(\beta, \mu, \nu) &= \frac{\nu(1-2\mu)}{(2\mu)^{\nu-1}} \int_0^t s^\nu[\beta(\tau)] \\ &\times \left[1 + (2\mu-1) \left(\frac{\beta(\tau)}{\beta(t)} \right)^{2\mu} \right]^{\nu-1} \left(\frac{\beta(\tau)}{\beta(t)} \right)^{2\mu} \frac{d\tau}{\beta(\tau)} \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

初始条件为当 $t = t_1$ 时

$$\beta = \beta_0 \quad (3.2.25)$$

方程(3.2.23)可以用数值方法分两段($0 \leq t \leq t_1$ 和 $t > t_1$)进行求解。图3.8给出了 $\beta_0 = 2, n = 4$ 和 $n = 6$ 两种情况下 $\beta(t/t_1)$ 的数值解。可以看出,断裂前缘在开始时扩展缓慢,并逐渐变快。在一段相当长的时间内,已经发生局部断裂的厚壁圆筒仍然可以承受内压作用。在内压作用下厚壁圆筒的蠕变脆性断裂过程中,外壁常常出现一组裂纹,这在一定程度上与断裂前缘的扩展有关。最终,一个(或几个)裂纹穿透筒壁(图3.9)。Kachanov^[3.3]用上述损伤模型进一步分析了延性裂纹扩展的问题。

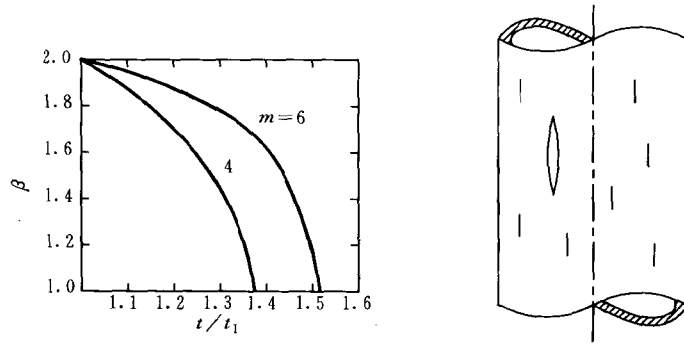


图 3.8 厚壁圆筒断裂前缘的数值解^[3.3] 图 3.9 厚壁圆筒的蠕变脆性断裂

3.3 Rousselier 损伤理论

在前面 3.1 节中, Lemaitre 所定义的损伤是基于损伤材料的弹性模量 \tilde{E} 比初始无损时的弹性模量 E 低, 而 Rousselier 所考虑的损伤则表现在损伤材料的质量密度 ρ 低于无损的质量密度 ρ_0 , 这属于宏观的体膨胀损伤模型。由于塑性损伤和延性断裂往往发生在塑性变形较大的情况, 因此需要考虑大变形^[3.12]。

Rousselier 损伤模型是在广义标准材料和连续热力学的框架下导出的,即假设存在耗散势函数,塑性应变和其它内变量的变化满足正交法则。为简单起见,这里假设材料的硬化是各向同性的,用一个标量内变量 $\alpha_1 = p$ (累积塑性应变)描述,这种假设主要用于单调加载的情况。当然,Rousselier 模型也可以推广到各向异性硬化的情况。同时,假设延性损伤也为各向同性的,用另一个与材料密度相关的标量内变量 $\alpha_2 = \beta$ 表示。

假设材料的变形过程为等温过程,比自由能的形式为

$$\psi(\epsilon_{ij}^e, p, \beta) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^e \Lambda_{ijkl} \epsilon_{kl}^e + \psi_1(p) + \psi_2(\beta) \quad (3.3.1)$$

式中第一项表示可恢复的弹性能 ψ_e , 而其余两项 $\psi_1 + \psi_2$ 表示不可恢复的自由能,与位错、残余应力、微缺陷等有关。将自由能分成以上三项意味着 4 阶的弹性刚度张量 Λ_{ijkl} 是不随损伤和硬化而变化的,损伤过程和硬化过程之间的相互作用也略去不计。弹性本构关系为

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} = \frac{\rho}{\rho_0} \Lambda_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \quad (3.3.2)$$

由于密度 ρ 随损伤变化,因此,有效弹性模量 $\bar{\Lambda}_{ijkl} = \frac{\rho}{\rho_0} \Lambda_{ijkl}$ 也随损伤而变化。将式(3.3.1)中的第一项 ψ_e 、式(3.3.2)中的 σ_{ij} 同式(3.1.10)和(3.1.12)相比较,可以看出,Lemaitre-Chaboche 理论相当于取损伤变量 ω 按下式依赖于质量密度 ρ

$$\omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.3.3)$$

同时取 $a_{ijkl} = \Lambda_{ijkl}$, 这里 ρ_0 表示初始无损构形中的质量密度。此外,Rousselier 损伤理论与 Lemaitre 损伤理论的区别还在于:
(1) Lemaitre 假设损伤只体现在弹性比自由能中,而在 Rousselier 给出的自由能表达式(3.3.1)中,还考虑了与损伤有关的第三项 $\psi_2(\beta)$; (2) Lemaitre 没有研究塑性势,也没有利用全部正交法则,

而 Rousselier 建立了含损伤的塑性势,并按正交法则推导了本构关系和损伤演化方程。

在不计损伤时, Mises 形式的塑性势为

$$F\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ij}, R\right) = J\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ij}\right) - R - \sigma_s \quad (3.3.4)$$

式中 R 表示屈服面的膨胀, σ_s 为初始屈服应力, $J(\sigma_{ij})$ 为应力张量 σ_{ij} 的第二不变量

$$J(\sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \sigma_{eq} \quad (3.3.5)$$

引入损伤以后,塑性势应与静水应力 σ_m 有关, Rousselier 假设在应力空间 $\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ij}, R, Y\right)$ 中的塑性势为

$$F\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ij}, R, Y\right) = J\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ij}\right) - R - \sqrt{3}Yg\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_m\right) - \sigma_s \quad (3.3.6)$$

把塑性应变率 d_{ij}^p 和应力 σ_{ij} 分解成偏斜张量和球形张量之和,即

$$\begin{aligned} d_{ij}^p &= (d_{ij}^p)' + d_m^p \delta_{ij} \\ \sigma_{ij} &= \sigma'_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

由以上各式,得

$$R = \frac{d\psi_1(p)}{dp}, \quad Y = \frac{d\psi_2(\beta)}{d\beta} \quad (3.3.8)$$

$$(d_{ij}^p)' = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{3}{2} \lambda \frac{s_{ij}}{J\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{ij}\right)}$$

$$d_m^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = -\lambda \frac{Y}{\sqrt{3}} \frac{dg\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_m\right)}{d\left(\frac{\rho_0}{\rho}\sigma_m\right)} \quad (3.3.9)$$

$$\dot{p} = \lambda = \left[\frac{2}{3}(d_{ij}^p)'(d_{ij}^p)'\right]^{1/2} \quad (3.3.10)$$

$$\dot{\beta} = \sqrt{3} \lambda g \left(\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_m \right) \quad (3.3.11)$$

由式(3.3.6)可得材料的硬化曲线为

$$\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{eq} - \frac{d\psi_1(p)}{dp} - \sqrt{3} \frac{d\psi_2(\beta)}{d\beta} g \left(\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_m \right) - \sigma_s = 0 \quad (3.3.12)$$

式中 $p = \int \dot{p} dt$ 。若无损伤存在,硬化曲线简化为

$$\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{eq} - \frac{d\psi_1(p)}{dp} - \sigma_s = 0 \quad (3.3.13)$$

下面来确定塑性势(3.3.6)中的函数 $g(\rho_0 \sigma_m / \rho)$ 。由于损伤变量 β 是与质量密度 ρ 相联系的,因此 $\beta = \beta(\rho)$,例如 $\beta = 1 - \rho / \rho_0$ 或其它形式的函数。同时,由式(3.3.9)可以看出函数 $g(\rho_0 \sigma_m / \rho)$ 与体积塑性变形有关。由质量守恒定律以及 $\text{div} V = 3d_m \approx 3d_m^p$, 得

$$\dot{\rho} + 3\rho d_m^p = 0 \quad (3.3.14)$$

将 $\dot{\rho} = \dot{\beta} / (d\beta/d\rho)$ 代入此方程并利用式(3.3.9)和(3.3.11),得

$$\frac{1}{g(\rho_0 \sigma_m / \rho)} \frac{dg(\rho_0 \sigma_m / \rho)}{d(\rho_0 \sigma_m / \rho)} = \frac{1}{Y\rho(d\beta/d\rho)} \quad (3.3.15)$$

根据式(3.3.8),式(3.3.15)右端为 $\beta(\rho)$ 的函数。因此式(3.3.15)两端必须恒等于一常数,记为 C_1/σ_s ,则可解出

$$g \left(\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_m \right) = C_2 \exp \left(\frac{C_1 \rho_0 \sigma_m}{\rho \sigma_s} \right) \quad (3.3.16)$$

式中 C_2 为积分常数。为了保证损伤随三轴应力而增加,同时由于 $\dot{\beta} > 0$,要求常数 C_1 和 C_2 均为正。

由式(3.3.11)和(3.3.16),可得

$$\dot{\beta} = \sqrt{3} \lambda C_2 \exp \left(\frac{C_1 \rho_0 \sigma_m}{\rho \sigma_s} \right) \quad (3.3.17)$$

上式表明损伤变量的增长率和平均应力成指数关系,这和实验及

其它的理论结果是一致的。根据上面的讨论,函数 $\beta(\rho/\rho_0)$ 和 $\psi_2(\beta)$ 之间存在如下关系

$$C_1(\rho/\rho_0)\beta'(\rho/\rho_0)\psi_2(\beta) = \sigma_s \quad (3.3.18)$$

式中函数 $\beta(\rho/\rho_0)$ 和 $\psi_2(\beta)$ 可以由细观力学分析或实验确定,其中一个已经确定,另一个容易由上式导出。例如, $\beta(\rho/\rho_0)$ 的几种简单选择及其对应的 $\psi_2(\beta)$ 为

$$\beta = 1 - \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \psi_2(\beta) = \frac{\sigma_s}{C_1} \ln(1 - \beta) \quad (3.3.19)$$

$$\beta = \frac{\rho_0}{\rho} - 1, \quad \psi_2(\beta) = \frac{\sigma_s}{C_1} \ln(1 + \beta) \quad (3.3.20)$$

$$\beta = f - f_0, \quad \psi_2(\beta) = \frac{\sigma_s}{C_1} \ln(1 - f_0 - \beta) \quad (3.3.21)$$

式中, f 为孔洞的体积百分比, f_0 为 f 的初始值。假设基体材料的塑性变形是不可压的,则有

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 - f}{1 - f_0} \quad (3.3.22)$$

式(3.3.9)中的 λ 可以由 $F = 0, \dot{F} = 0$ 的一致性条件得到。由式(3.3.7)和(3.3.9)可以导出 Rousselier 损伤模型下的塑性本构关系为

$$d_{ij}^p = -\lambda \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\psi_2(\beta)}{d\beta} \frac{dg(\rho_0\sigma_m/\rho)}{d(\rho_0\sigma_m/\rho)} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \lambda \frac{s_{ij}}{J(\rho_0\sigma_{ij}/\rho)} \quad (3.3.23)$$

式(3.3.16)说明 $g(\rho_0\sigma_m/\rho)$ 只能是指数型函数,而 ψ_2 函数则取决于 $\beta(\rho)$ 的选取, $\beta(\rho)$ 可以有若干种选择,相应的 ψ_2 会有不同的形式。

由以上各式,可以得到总的应变率为

$$d_{ij} = \frac{D\epsilon_{ij}^e}{Dt} + d_{ij}^p \quad (3.3.24)$$

利用式(3.3.2),得到

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{ij} \right) = \frac{D\epsilon_{ij}^e}{Dt} \Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ijkl} (d_{ij} - d_{ij}^p) \quad (3.3.25)$$

式中 $\frac{D}{Dt}(\)$ 表示 Jaumann 导数。

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{ij} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{ij} \right) - \frac{\rho_0}{\rho} \omega_{ik} \sigma_{kj} + \frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad (3.3.26)$$

式中 ω_{ij} 为旋转张量。

通过上面的介绍可以看出, Rousselier 理论严格地遵循了连续热力学的理论, 满足了正交法则, 因此, 从连续热力学理论的角度看, 该理论的形式是比较完美的。这一理论的建立曾一度引起力学界的关注, 尽管如此, Rousselier 损伤理论并未得到普遍应用, 其原因是这一理论和 Lemaitre-Chaboche 的损伤模型相比是复杂的, 用材料的质量密度作为损伤变量, 给损伤的测量也带来不便。

以上介绍了三种具有代表性的三维各向同性连续损伤模型, 其共同的特点即认为损伤是各向同性的, 其损伤变量都是标量。从连续损伤力学的现状来看, 其研究方法基本上已经趋于成熟, 但是作为一种为大家普遍接受的损伤理论尚没有出现, 众多的损伤理论正处在发展和优胜劣汰的阶段。损伤力学的研究已经得到了越来越多的重视。从损伤力学的发展过程来看, 我们可以引发出下列的看法:

(1) 建立连续损伤模型的一个基本方法是从连续热力学的框架出发, 正确描述材料的热力学势函数, 并通过热力学的基本方程得到损伤本构关系和损伤的演化方程。目前已经建立的连续损伤理论有很多种, 大都是沿着这样的基本思路得到的。

(2) 损伤力学中很关键的问题是损伤演化方程的建立, 但是人们很难对所有的材料和所有的损伤机制给出一个具有普遍性的损伤演化方程。目前已有的损伤模型, 例如 Lemaitre-Chaboche 模型, 往往只能就某一类材料得到比较好的结果, 而对于其它材料则不便应用。因此, 如果将工程中的材料及其典型的损伤机制进行分

类,分门别类地给出损伤的演化方程,并应用到实际工程问题中去,这或许是损伤力学应用的一条可行路径。

(3) 发展损伤力学的目的之一是应用于工程实际问题的破坏分析,因此如何得到一个工程可用的、又有一定精度的并力求满足连续热力学所有方程的损伤模型,发展简便有效的损伤力学计算方法,是工程力学研究者的一个重要任务。

3.4 含损伤结构定解问题的求解方法

和以往的固体力学理论相比,损伤力学为结构的强度校核、寿命预测、稳定性分析提供了一种更为合理的途径。另一方面,由于损伤变量的引入,含损伤结构定解问题的方程数目需要增加,除了本构关系、平衡方程、几何关系(或协调方程)、初始条件和边界条件以外,还应引入损伤的演化方程,而且含损伤的本构关系较无损的本构关系往往更为复杂,因此,含损伤结构定解问题的求解也变得更为困难。为了得到结构中每一点的应力、应变和损伤随时间(或载荷)的变化,有如下三种方法可供采用。

3.4.1 全解耦方法

在全解耦方法中,认为损伤对结构中的应力应变场没有影响。用全解耦方法进行结构分析的基本过程如图 3.10 所示。首先不考虑损伤,利用无损材料的本构关系、平衡方程求解应力场和应变场,然后代入损伤的演化方程,得到损伤场随时间(或载荷)的变化历史,进而根据材料的损伤断裂判据确定结构的承载能力或寿命。例如,在不考虑蠕变的弹塑性分析中,可以采用如下经典的弹塑性本构关系^[3.13]

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p$$

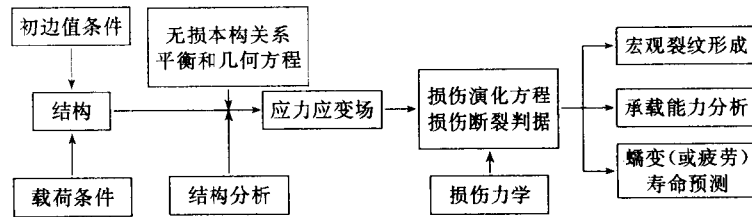


图 3.10 全解耦方法

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\lambda \begin{cases} > 0, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \dot{f} = 0 \\ = 0, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \dot{f} < 0; \text{ 或 } f < 0 \end{cases}$$

$$f(\sigma_{ij}, X_{ij}, R) = \sqrt{\frac{2}{3} (s_{ij} - X_{ij})(s_{ij} - X_{ij})} - R = 0$$

$$\dot{X}_{ij} = c_1 (a \dot{\epsilon}_{ij}^p - X_{ij} \dot{p})$$

$$\dot{R} = c_2 (b - R) \dot{p} \quad (3.4.1)$$

式中 E 和 ν 是初始无损状态的弹性模量和泊松比, f 是 Mises 型的屈服面, X_{ij} 是背应力张量, R 是屈服面半径, p 是累积塑性应变, a, b, c_1 和 c_2 均为材料常数。利用上述不含损伤的本构关系以及平衡方程等, 即得到应力、应变和位移场, 显然这些场(在出现局部断裂之前)不受损伤的影响。然后再利用损伤的演化方程以及破坏准则, 例如 Lemaitre 损伤理论中的式(3.1.37)和(3.1.40), 即可完成结构的损伤强度校核。

全解耦方法是最简单的, 和以往的无损结构的定解问题的求解相比, 工作量增加得很少。一般的不包含损伤的计算程序可以通过较小的改动, 在求出应力和应变场后加入损伤的演化方程部分, 即可用来求解含损伤结构的定解问题。

Kachanov 利用损伤和变形全解耦的方法求解了大量的蠕变损伤问题^[3.3,3.14]。但是全解耦方法的结果往往偏于保守,其预计值可以和实际的结果相差百分之几十甚至几倍以上。

3.4.2 全耦合方法

事实上,损伤将导致弹性模量等材料参数的一些变化,造成应力和应变场的重新分布,因此应该在应力应变场的计算中计入损伤的影响,采用含损伤的本构关系。用全耦合方法进行结构分析的基本过程如图 3.11 所示。例如,根据 Lemaitre 的应变等效假设,式(3.4.1)的本构关系变成如下含损伤的形式^[3.13]

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \\ \epsilon_{ij}^e &= \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \tilde{\sigma}_{kk} \delta_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}}{1-\omega} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{kk} \delta_{ij}}{1-\omega} \\ \epsilon_{ij}^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \\ \lambda &\begin{cases} > 0, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \dot{f} = 0 \\ = 0, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \dot{f} < 0; \text{ 或 } f < 0 \end{cases} \\ f(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{X}_{ij}, \tilde{R}) &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\tilde{s}_{ij} - \tilde{X}_{ij}) (\tilde{s}_{ij} - \tilde{X}_{ij}) - \tilde{R} = 0 \\ \dot{\tilde{X}}_{ij} &= c_1 (a \dot{\epsilon}_{ij}^p - X_{ij} \dot{p}) \\ \dot{\tilde{R}} &= c_2 (b - R) \dot{p} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

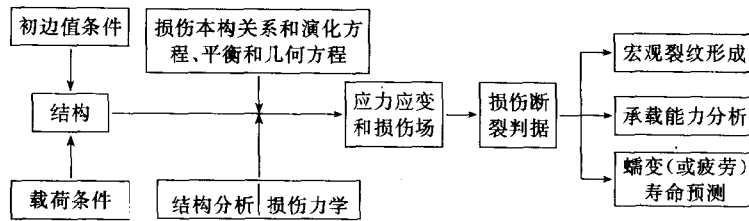


图 3.11 全耦合方法

式中 $\bar{s}_{ij} = s_{ij}/(1 - \omega)$ 为有效应力的偏斜部分, $\bar{X}_{ij} = X_{ij}/(1 - \omega)$ 称为有效的背应力张量, $\bar{R} = R/(1 - \omega)$ 。由于损伤变量的引入, 在应力和应变场的计算中, 还需要增加损伤的演化方程, 从而直接得到所有的场变量的分布。

损伤和变形全耦合的求解方法^[3.13,3.15]是一种严格和准确的方法, 但相应的工作量也大幅度增加。以往的无损有限元和边界元程序不能通过简单的修改实现含损伤初边解问题的求解。到目前为止, 只有极少数很简单的问题得到了全耦合分析的解析解, 例如受纯扭转的圆轴、内压作用下的厚壁圆筒和球壳的蠕变损伤问题。

采用 Kachanov 和 Rabotnov 的蠕变损伤理论, 余寿文和靳志和^[3.16]得到了承受内压 p 的厚壁圆筒和球壳的蠕变损伤的封闭解。在平面应变和体积不可压缩的条件下, 利用式 (2.3.4), (2.3.5) 以及平衡方程和变形协调条件, 得到本构方程和损伤演化方程如下

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\dot{\epsilon}_r = B(\sigma_\theta - \sigma_r)^n(1 - \omega)^n \quad (3.4.3)$$

$$\omega = C(\sigma_\theta - \sigma_r)^\nu(1 - \omega)^{-\nu} \quad (3.4.4)$$

导出的内半径为 a 、外半径为 b 的厚壁圆筒中应力、应变和损伤场的分布为

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\dot{\epsilon}_r = \frac{BD^n(t)}{r^2} \quad (3.4.5)$$

$$\sigma_r = -p + D(t) \frac{1 - (a/r)^{2N}}{2Na^{2N}} - \frac{[D_1D(t) - 2Np][1 - (a/r)^{2N(\nu+1)}]}{2N[1 - (a/b)^{2N(\nu+1)}]}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + (1 - \omega) \frac{D(t)}{r^{2N}} \quad (3.4.6)$$

$$\omega = \frac{2(\nu + 1)[D_1D(t) - 2Np]}{D_2D(t)r^{2N\nu}} \quad (3.4.7)$$

式中

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2N}}{a^{2N}} \\
 D_2 &= \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2N(\nu+1)}}{a^{2N(\nu+1)}} \\
 D(t) &= \left[\left(\frac{D_1}{2Np} \right)^{\nu+1} - \frac{CD_2 t}{2Np} \right]^{-\frac{1}{\nu+1}} \\
 N &= \frac{1}{n}
 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

由式(3.4.7)和(3.4.8)以及 $\omega(a, t_1) = 1$, 得到断裂孕育时间为

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{[1 - (a/b)^{2N}]^{\nu+1}}{C(2Np)^\nu [1 - (a/b)^{2N(\nu+1)}]} \\
 &\quad \times \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1 - (a/b)^{2N(\nu+1)}}{(\nu+1)[1 - (a/b)^{2N}]} \right]^{\nu+1} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

此结果和 Kachanov 的全解耦的计算方法进行了比较, 全解耦方法得到的断裂孕育时间明显地偏于保守, 尤其当壁厚比 a/b 较大时。

同样, 可以得到承受内压的厚壁球壳内的损伤场为

$$\begin{aligned}
 \omega &= C \int_0^t \frac{D^\nu(t)}{r^{3N\nu}} dt \\
 D(t) &= \left[\left(\frac{2D_3}{3Np} \right)^{\nu+1} - \frac{2CD_4 t}{3Np} \right]^{-\frac{1}{\nu+1}} \\
 D_3 &= \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{3N}}{a^{3N}} \\
 D_4 &= \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{3N(\nu+1)}}{a^{3N(\nu+1)}}
 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

3.4.3 半解耦方法

半解耦方法是介于全解耦方法和全耦合方法之间的一种结构分析方法^[3.18]。它的一种做法是在本构关系中引入损伤,而在平衡方程中不考虑损伤的影响。这样,工作量比全耦合方法小,而解的精度比全解耦方法高。

Lemaitre 提出了一种局部耦合的结构分析方法^[3.5,3.17],其基本思想如图 3.12 所示。在结构中,损伤往往集中在一个小的区域内,损伤材料的体积和整个结构构件(甚至代表性体积单元)相比很小。对这类问题,Lemaitre 建议在结构整体的分析中采用损伤和变形全解耦的方法,而只在结构最危险的小区域(如选取一个代表性体积单元)内采用损伤和变形相耦合的方法,即只在小范围内引入考虑损伤的本构关系和损伤演化方程。其结果将明显好于全解耦方法,但它仍是结构承载能力或寿命的下限。算例的分析表明^[3.5],这种局部解耦方法,对于脆性损伤、疲劳损伤等具有很好的适用性,尤其是对于含有宏观裂纹或其它缺陷的结构分析显示出很大的优越性。

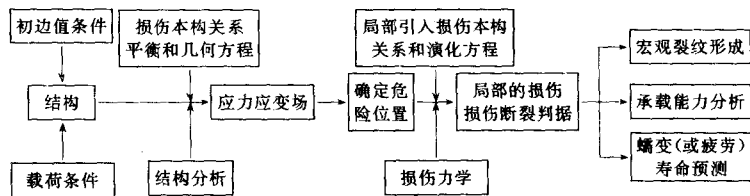


图 3.12 局部解耦方法^[3.4]

参考文献

3.1 McClintock F A. A criterion for ductile fracture by the

-
- growth of holes. *J. Appl. Mech.*, 1968, 35, 363~371
- 3.2 Rice J R and Tracey D M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 1969, 17, 201~217
- 3.3 Kachanov L M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1986
- 3.4 Lemaitre J and Chaboche J L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- 3.5 Lemaitre J. *A Course on Damage Mechanics*. Berlin, Springer-Verlag, 1992
- 3.6 Lemaitre J. How to use damage mechanics. *Nucl. Eng. Design*, 1984, 80, 233~245
- 3.7 Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. Eng. Mater. and Tech.*, 1985, 107, 83~89
- 3.8 Lemaitre J. Formulation and identification of damage, kinetic constitutive equations. in: Edited by Krajcinovic D and Lemaitre J. *Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications*. Springer-Verlag, 1987, 37~89
- 3.9 Lemaitre J. Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loading. in: *Proceedings of ICM-1, Kyoto, 1971*
- 3.10 Chaboche J L. Continuum damage mechanics: present state and future trends. *Nucl. Eng. Design*, 1987, 105, 19~33
- 3.11 Leckie F and Hayhurst D R. Constitutive equations for creep rupture. *Acta Metallurgica*, 1977, 340, 1059 ~

- 3.12 Rousselier G. Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage. in: Edited by Nemat-Nasser, S. Proceedings of the IUTAM Symposium on Three Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture. North-Holland Pub. Company, 1980; 331 ~ 355
- 3.13 Billardon R and Morel-Bailly L. Fully coupled strain and damage finite element analysis of ductile fracture. Nucl, Eng. Design, 1981, 105, 43~49
- 3.14 Kachanov L M. Fundamentals of Fracture Mechanics. Moscow, 1974
- 3.15 Benallal A, Billardon R and Lemaitre J. Failure analysis of structures by continuum damage mechanics. in: Proceedings of ICF5, 1981, 3669~3676
- 3.16 Yu S W and Jin Z H. Some new solutions to the coupling problems of creep damage. Chinese Science Bull. , 1989, 34(10), 874~875
- 3.17 Lemaitre J. Local approach of fracture. Eng. Fract. Mech. , 1986, 25(5/6), 523~537
- 3.18 Yu Shouwen. The near tip fields and temperature distribution around a crack in a body of hardening material containing small damage. Acta Mechanica sinica. 1989, 5 (4), 344~352

第4章 基于细观力学的损伤理论

4.1 细观损伤力学的基本概念

前面已经介绍了损伤的基本概念和几种重要的一维和三维连续损伤力学模型。在损伤力学中,除了连续损伤力学方法外,还有一种同样重要的方法,即细观损伤力学方法。

连续损伤力学,又称唯象损伤力学,它不问损伤的物理背景和材料内部的细观结构变化,只是从宏观的唯象角度出发,引入标量、矢量或张量形式的损伤变量,通过连续热力学等方法构造材料的损伤本构关系和演化方程,使理论预测与实验结果(如承载能力、寿命、刚度等)相符合。这种方法主要是在欧洲如法国、英国、前苏联、瑞典等地发展起来的。

细观损伤力学,是从材料的细观结构出发,对不同的细观损伤机制加以区分,通过对细观结构变化的物理与力学过程的研究来了解材料的破坏,并通过体积平均化的方法从细观分析结果导出材料的宏观性质。细观损伤力学主要是从美国发展起来的。起初连续损伤力学和细观损伤力学是相互独立发展,直到80年代中后期,这两个损伤力学分支才被力学家和材料学家在不同程度上加以认可。实际上,这两种理论在工程应用、理论分析等方面可以相互补充。连续损伤力学多与结构强度与寿命分析相联系,细观损伤力学则常与材料的力学行为和变形过程相联系。

细观损伤力学研究的尺度范围介于连续介质力学和微观力学之间。连续介质力学分析的是宏观的试件、结构和裂纹等的性质,

微观力学是用固体物理学的手段研究微空穴、位错、原子结合力等的行为,而细观损伤力学则是采用连续介质力学和材料科学的一些方法,对上述两种尺度之间的细观结构如微孔洞、微裂纹、晶界等进行力学描述。因此,细观损伤力学一方面忽略了损伤的过于复杂的微观物理过程,避免了统计力学浩繁的计算,另一方面又包含了不同材料的细观损伤的几何和物理特征,为损伤变量和损伤演化方程提供了较明晰的物理背景。

细观损伤力学方法与连续损伤力学方法的另一个重要差别在于,在细观力学方法中必须采用一种平均化方法,以把细观结构损伤机制研究的结果反映到材料的宏观力学行为的描述中去。比较典型的方法有不考虑微缺陷之间相互作用的非相互作用方法(亦称为 Taylor 方法),考虑微缺陷之间弱相互作用的自洽方法、微分方法、Mori-Tanaka 方法、广义自洽方法、Hashin-Shtrikman 界限方法,考虑微缺陷之间强相互作用的统计细观力学方法等^[4.1]。

图 4.1 表示了细观损伤力学的基本方法。首先在材料中选取一个代表性体积单元(representative volume element,简记为 RVE)或胞体(cell),它需要满足尺度的二重性:一方面,从宏观上讲其尺寸足够小,可以看作一个材料质点,因而其宏观应力应变场可视为均匀的;另一方面,从细观角度上讲,其尺寸足够大,包含足够多的细观结构信息,可以体现材料的统计平均性质。利用连续介质力学和连续热力学手段,对代表性体积单元进行分析,以得到细观结构在外载作用下的变形和演化发展规律。然后,再通过细观尺度上的平均化方法将细观研究的结果反映到宏观本构关系、损伤演化方程、断裂行为等宏观性质中去。

材料的细观损伤机制有多种,比较典型的有微孔洞、微裂纹、微滑移带、银纹、晶界滑移等,其中对前两种损伤的研究最重要而且已经比较深入,Nemat-Nasser 和 Hori^[4.1]、Tvergaard^[4.2]、Gilormini 和 Licht 等^[4.3]、Krajcinovic 等^[4.4~4.8]对此进行了归纳总结。

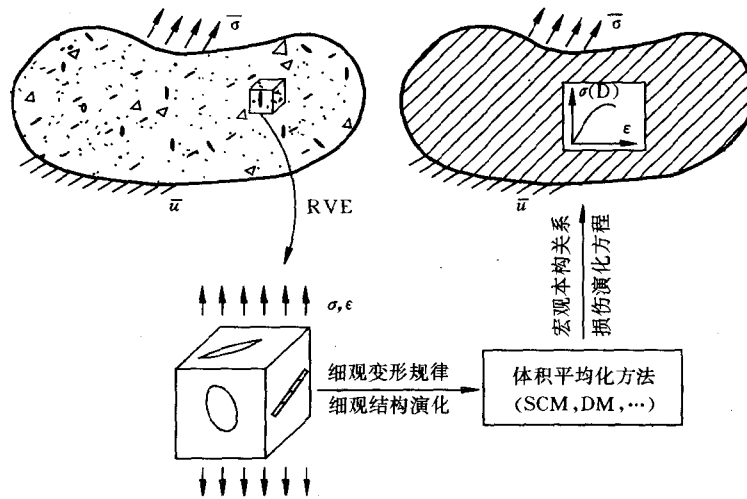


图 4.1 细观损伤力学方法

4.2 微裂纹损伤材料有效模量的计算方法

微裂纹的形核、扩展和连接是一类重要的细观损伤机制。微裂纹损伤对岩石、混凝土、结构陶瓷、铸铁等很多脆性材料和复合材料的力学性质有着多方面的显著影响。微裂纹的细观损伤理论是一个很复杂的问题，受到了固体力学、材料科学、地质科学等的共同关注。关于微裂纹损伤材料的研究方法，已取得的主要成果可详见 Krajcinovic^[4.4], Kachanov^[4.6], Bazant^[4.7], Yang 和 Lee^[4.5]以及作者^[4.8]的有关综述，本书后面还将介绍脆性材料的微裂纹扩展区模型等损伤理论。

如何计算微裂纹损伤材料的有效弹性模量是脆性材料细观损伤理论的一个重要内容。脆性损伤理论经常采用等效介质的方法，即认为微裂纹处于一种等效的弹性介质中，这种方法成立的前提

是认为每个微裂纹周围的外场与其它微裂纹的准确位置无关。

如果完全忽略微裂纹之间的相互作用,即认为每个微裂纹处于没有损伤的弹性基体中,微裂纹受到的载荷等于远场应力,这种方法称为 Taylor 模型的方法(或稀疏分布方法或非相互作用方法)。这种方法很简单,而且对于微裂纹分布比较稀疏的情况有足够的精度。Kachanov^[4,6]指出,由于微裂纹之间应力屏蔽作用和应力放大作用两种机制的相互抵消,稀疏分布方法的适用范围比预期范围更广泛,这也为一些数值实验所证实。

为了考虑微裂纹之间的弱相互作用对有效模量的影响,Budiansky 和 O'Connell^[4,9]将自洽方法应用于微裂纹体,其中损伤用一个标量参数——微裂纹密度表示。自洽方法受到了很多研究者的欢迎,因为它的形式比较简单,也有较好的精度。计算微裂纹体有效模量的方法还有广义自洽方法^[4,10]、Mori-Tanaka 方法^[4,11]、微分方法^[4,12]等。下面介绍几种典型的方法,其中没有涉及微裂纹损伤演化的问题,而且本节介绍的几种方法都可以类似地应用于有夹杂或微孔洞损伤的情况。

4.2.1 自洽方法

首先考虑无穷大各向同性介质中一个孤立的微裂纹,微裂纹的特征尺寸为 a , 法向单位矢量为 \mathbf{n} 。假设微裂纹受到均匀的远场应力作用。由于该微裂纹的存在使得系统释放出的能量(简称为裂纹能)为^[4,9]

$$\mathcal{E} = \frac{a^3}{E} [\sigma^2 f(\nu) + \tau^2 g(\nu, \beta)] \quad (4.2.1)$$

式中 E 和 ν 为各向同性基体的杨氏模量和泊松比, σ 和 τ 是微裂纹受到的正应力和剪应力, β 是 τ 的方向与微裂纹的特征方向间的夹角。 $f(\nu)$ 和 $g(\nu, \beta)$ 是取决于微裂纹的形状、 ν 以及 β 的函数。对于长半轴为 a 、短半轴为 b 的椭圆裂纹,有

$$\begin{aligned}
f(\nu) &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E(k)}\right) \\
g(\nu, \beta) &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2 (1-\nu^2) [R(k, \nu) \cos^2 \beta + Q(k, \nu) \sin^2 \beta] \\
R(k, \nu) &= k^2 [(k^2 - \nu)E(k) + \nu(1 - k^2)K(k)]^{-1} \\
Q(k, \nu) &= k^2 [(k^2 + \nu - \nu k^2)E(k) - \nu(1 - k^2)K(k)]^{-1} \\
E(k) &= \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi, \\
K(k) &= \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi \\
k &= (1 - b^2/a^2)^{1/2} \tag{4.2.2}
\end{aligned}$$

式中 $E(k)$ 和 $K(k)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分。 β 是椭圆长轴方向与 τ 的夹角。对于币状微裂纹即 ($a = b$)，式(4.2.2)简化为

$$f(\nu) = \frac{8}{3}(1 - \nu^2), g(\nu, \beta) = \frac{16(1 - \nu^2)}{3(2 - \nu)} \tag{4.2.3}$$

以上公式中假设裂纹面自由，即裂纹面之间没有接触和相互作用力。对于闭合的微裂纹，式(4.2.1)改写为

$$\mathcal{E} = \frac{a^3}{E} [f(\nu)(\sigma - \sigma^*)^2 + g(\nu, \beta)(\tau - \tau^*)^2] \tag{4.2.4}$$

式中 σ^* 和 τ^* 分别为裂纹面间的正应力和剪应力，表示为

$$\begin{aligned}
\sigma^* &= \frac{1}{2} [1 - \text{sgn}(\sigma)] \sigma \\
\tau^* &= \begin{cases} 0, & \text{当 } \sigma > 0 \\ -\mu\sigma, & \text{当 } \sigma < 0, \tau + \mu\sigma \geq 0 \\ \tau, & \text{当 } \sigma < 0, \tau + \mu\sigma < 0 \end{cases} \tag{4.2.5}
\end{aligned}$$

式中 μ 为摩擦系数。考虑微裂纹闭合的自洽模型可以参见 Horii 和 Nemat-Nasser 的文献^[4,13]，这里只介绍张开微裂纹的情形。

假设在单位体积的材料中有完全随机分布的 N 个椭圆形微

裂纹,微裂纹的存在使得材料的有效弹性模量变为 \bar{E} 和 \bar{G} (或 $\bar{\nu}$, \bar{K})。用自洽方法估计损伤材料有效模量的基本思想是:把每个微裂纹置于具有自洽等效模量的基体材料中,分析单个微裂纹的变形及其引起的模量变化,然后对所有微裂纹取总体平均,建立含有效模量的方程,求解得到材料的有效力学性质。

把微裂纹置于有效模量 \bar{E}, \bar{G} 的基体中,裂纹能变为

$$\mathcal{E} = \frac{a^3}{\bar{E}} [f(\bar{\nu})\sigma^2 + g(\bar{\nu}, \beta)\tau^2] \quad (4.2.6)$$

即只需将式(4.2.1)和(4.2.2)中的 E 和 ν 分别用 \bar{E} 和 $\bar{\nu}$ 代替。按照单位体积上的能量等效原则,等效弹性体在均匀应力 σ 作用下的应变能包括无裂纹基体的应变能和裂纹能两部分,即

$$\frac{1}{2}\sigma : \bar{L}^{-1} : \sigma = \frac{1}{2}\sigma : L : \sigma + \sum^N \mathcal{E}(a, \bar{L}, \sigma) \quad (4.2.7)$$

如果裂纹体承受三轴静水拉应力 p 的作用,上式简化为

$$\frac{p^2}{2\bar{K}} = \frac{p^2}{2K} + \sum^N \frac{4\pi p^2 ab^2}{3E(k)} \left(\frac{1 - \bar{\nu}^2}{\bar{E}} \right) \quad (4.2.8)$$

由于椭圆的面积为 πab , 周长为 $4aE(k)$, 因此上式又可以表示为

$$\frac{\bar{K}}{K} = 1 - \frac{16}{9} \left(\frac{1 - \bar{\nu}^2}{1 - 2\bar{\nu}} \right) f \quad (4.2.9)$$

式中微裂纹的密度参数 f 定义为

$$f = \frac{2N}{\pi} \left\langle \frac{A^2}{P} \right\rangle \quad (4.2.10)$$

如果裂纹体承受单轴拉伸应力 s 的作用,式(4.2.7)化简为

$$\frac{s^2}{2\bar{E}} = \frac{s^2}{2E} + \sum^N \frac{s^2 a^3}{\bar{E}} [f(\bar{\nu})\cos^4\alpha + g(\bar{\nu}, \beta)\sin^2\alpha\cos\alpha] \quad (4.2.11)$$

认为裂纹的尺寸、形状和取向的分布都是相互独立的,则上式变为

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{2N\langle a^3 \rangle}{15} \langle 3f(\bar{\nu}) + 2g(\bar{\nu}, \beta) \rangle \quad (4.2.12)$$

将式(4.2.2)中的 $f(\bar{\nu})$ 和 $g(\bar{\nu}, \beta)$ 的表达式代入上式, 并利用 $\langle \sin^2 \beta \rangle = \langle \cos^2 \beta \rangle = \frac{1}{2}$, 得到

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{16}{45}(1 - \bar{\nu}^2)[3 + T(b/a, \bar{\nu})]f \quad (4.2.13)$$

式中

$$T(b/a) = E(k)[R(k, \bar{\nu}) + Q(k, \bar{\nu})] \quad (4.2.14)$$

利用 $\bar{K}, \bar{E}, \bar{G}$ 和 $\bar{\nu}$ 之间的关联式, 得出泊松比 $\bar{\nu}$ 和剪切模量 \bar{G} 与 f 的关系:

$$f = \frac{45}{8} \frac{\nu - \bar{\nu}}{(1 - \bar{\nu}^2)[2(1 + 3\nu) - (1 - 2\nu)T]} \quad (4.2.15)$$

$$\frac{\bar{G}}{G} = 1 - \frac{32}{45}(1 - \bar{\nu}) \left[1 + \frac{3}{4}T(b/a, \bar{\nu}) \right] f \quad (4.2.16)$$

对于圆币状微裂纹 ($b/a = 1$), 式(4.2.13)、(4.2.15)和(4.2.16)简化为

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{16}{45} \frac{(1 - \bar{\nu}^2)(10 - 3\bar{\nu})}{(2 - \bar{\nu})} f \quad (4.2.17)$$

$$\frac{\bar{G}}{G} = 1 - \frac{32}{45} \frac{(1 - \bar{\nu})(5 - \bar{\nu})}{(2 - \bar{\nu})} f \quad (4.2.18)$$

$$f = \frac{45}{16} \frac{(\nu - \bar{\nu})(2 - \bar{\nu})}{(1 - \bar{\nu}^2)[10\nu - \bar{\nu}(1 + 3\nu)]} \quad (4.2.19)$$

图 4.2 给出 $\bar{K}/K, \bar{E}/E, \bar{G}/G$ 和 $\bar{\nu}$ 随 f 的变化曲线^[4.8]。

下面给出关于微裂纹损伤自洽理论的几点说明:

(1) 对于随机分布的微裂纹, Taylor 模型给出的结果是有效模量 \bar{E}, \bar{G} 的上限(它很容易从式(4.2.7)中将右端第二项中的 \bar{L} 换为 L 得到), 而自洽方法给出的是一种下限。也就是说自洽方法过高地估计了微裂纹的相互作用对材料刚度的影响。

(2) 在自洽理论的结果中, 当 $f \rightarrow 9/16$ 时, $\bar{K}/K \rightarrow 0, \bar{E}/E \rightarrow 0, \bar{G}/G \rightarrow 0$, 实际上这是不合理的。这是由于自洽方法是把每个微

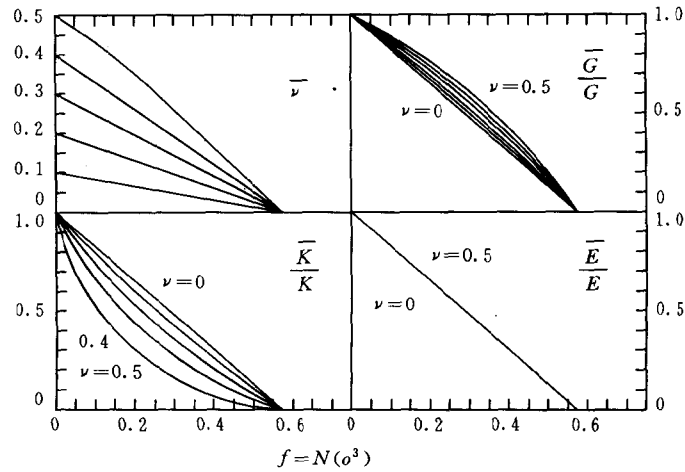


图 4.2 由自洽方法得到的有效模量^[4,8]

裂纹置于具有有效模量的弹性基体中,这是微裂纹相互作用的一种简单处理方法,夸大了微裂纹的相互作用。

(3) 在自洽方法中,要求事先知道等效介质的各向异性性质,否则无法分析每个微裂纹的行为。在上面的分析中事先已经假定微裂纹体仍是各向同性的。如果裂纹的分布不是完全随机的或者有损伤演化,应事先假定各向异性的一些规律。此外,自洽方法要求知道单个微裂纹的解,但在比较复杂的各向异性情况下这并不是容易得到的。

(4) 自洽方法只适用于微裂纹密度比较低的情况。微裂纹密度越大,自洽方法的误差也越大。

4.2.2 广义自洽方法

广义自洽方法最初是由 Christensen 和 Lo^[4,14]在研究复合材料时提出的,他们在考虑夹杂的相互作用时,首先把每个夹杂置于

有限大的基体中,然后连同基体一并置于具有有效模量的复合材料中,因此这种模型又称为夹杂-基体-复合材料模型。Aboudi 和 Benveniste^[4.15],黄永刚等^[4.10]将这种模型推广应用于微裂纹损伤材料。

如图 4.3 所示,首先将单个币状微裂纹置于椭球状的基体材料中,椭球的外面被具有未知的有效模量的微裂纹体包围。椭球的两个长轴位于微裂纹所在的平面内,其体积在总体积中所占的百分比等于相应的微裂纹密度,长短轴之比的选取是使微裂纹周围的基体厚度尽可能相同。

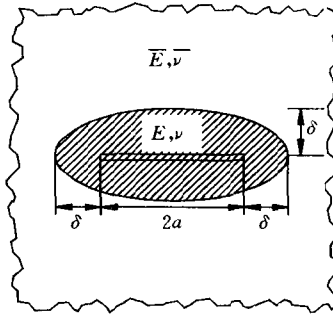


图 4.3 广义自洽模型

对于币状微裂纹,椭球的三个轴的半长分别为

$$l_1 = l_2 = a + \delta, \quad l_3 = \delta \quad (4.2.20)$$

式中 δ 依赖于微裂纹的密度参数 f , 表示为

$$f = \frac{a^3}{\pi(a + \delta)^2 \delta} \quad \text{或} \quad \frac{\delta}{a} \left(\frac{\delta}{a} + 1 \right)^2 = \frac{1}{\pi f} \quad (4.2.21)$$

然后在图 4.3 所示的系统中计算单个微裂纹释放的能量 \mathcal{E} , 并代入式(4.2.4)中得到包含有效模量 \bar{E}, \bar{G} 的方程。很显然,这里得到的 \mathcal{E} 介于式(4.2.1)和(4.2.6)之间,因此可以预见得到的有效模量将介于 Taylor 方法和自洽方法之间。

这里略去复杂的推导过程,只给出拉伸、剪切和体积模量的近似表达式:^[4.10]

$$\frac{\bar{E}}{E} = \left[1 + \frac{16(1 - \nu^2)(10 - 3\nu)}{45(2 - \nu)} f + D_E^{3D} f^{5/2} \right]^{-1} \quad (4.2.22)$$

$$\frac{\bar{G}}{G} = \left[1 + \frac{32}{45} \frac{(1-\nu)(5-\nu)}{2-\nu} f + D_G^{3D} f^{5/2} \right]^{-1} \quad (4.2.23)$$

$$\frac{\bar{K}}{K} = \left[1 + \frac{16}{9} \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} f + \frac{3D_E^{3D} - 2(1+\nu)D_G^{3D}}{1-2\nu} f^{5/2} \right]^{-1} \quad (4.2.24)$$

式中参数 D_E^{3D} 和 D_G^{3D} 仅依赖于基体材料的泊松比, 即 $D_E^{3D}(\nu)$ 和 $D_G^{3D}(\nu)$, 且

$$\begin{aligned} D_E^{3D}(0.2) &= 1.45, & D_E^{3D}(0.3) &= 1.43, & D_E^{3D}(0.4) &= 1.35, \\ D_G^{3D}(0.2) &= 1.03, & D_G^{3D}(0.3) &= 0.93, & D_G^{3D}(0.4) &= 0.80 \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

图 4.4 和 4.5 比较了广义自洽方法、Taylor 方法和自洽方法得到的有效模量。其中自洽方法的结果由式(4.2.17)和(4.2.18)表示, Taylor 方法的结果由式(4.2.22)和(4.2.23)中去掉方括号中第三项得到, 即

$$\frac{\bar{E}}{E} = \left[1 + \frac{16}{45} \frac{(1-\nu^2)(10-3\nu)}{2-\nu} \right]^{-1} \quad (4.2.26)$$

$$\frac{\bar{G}}{G} = \left[1 + \frac{32}{45} \frac{(1-\nu)(5-\nu)}{2-\nu} \right]^{-1} \quad (4.2.27)$$

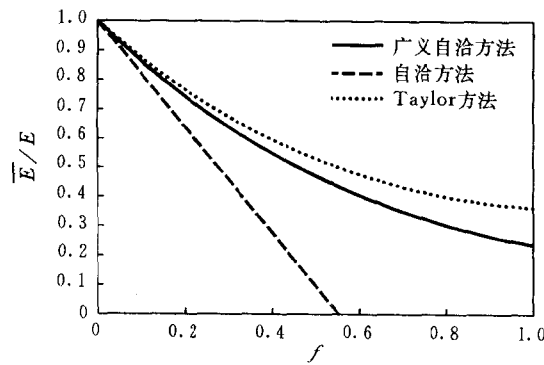


图 4.4 弹性模量与微裂纹密度的关系曲线^[4.10]

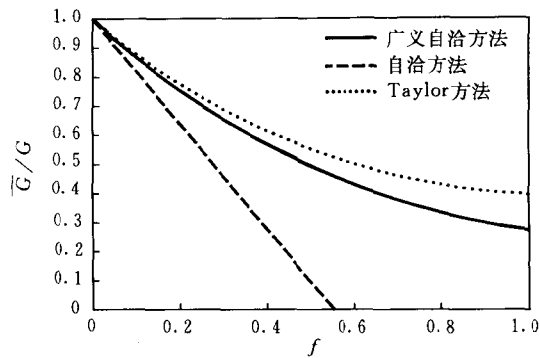


图 4.5 剪切模量与微裂纹密度的关系曲线^[4,10]

图 4.6 给出了三种方法得到的二维平面情况下体积模量 \bar{B}/B 的理论结果曲线以及有限元数值分析的结果,表明广义自洽方法与数值结果符合得最好,而且在很大的范围内 Taylor 模型的方法也是比较精确的,自洽方法的结果最差。

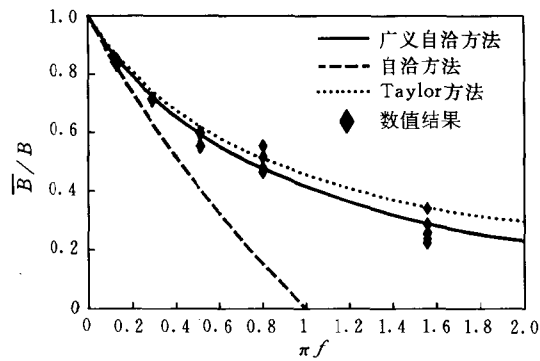


图 4.6 数值结果与理论结果的比较^[4,10]

4.2.3 Mori-Tanaka 方法

设三维微裂纹体受到均匀的位移或应力边界条件

$$u_i(S) = \epsilon_{ij}^0 x_j \quad \text{或} \quad \sigma_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (4.2.28)$$

式中 $\sigma_i(S)$ 是边界 S 上的应力矢量, ϵ_{ij}^0 和 σ_{ij}^0 是常应变和常应力, n_j 是边界的外法线单位矢量。

总体的平均应变 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 包括两部分, 即基体的平均应变 $\epsilon_{ij}^{(1)}$ 和所有微裂纹引起的应变,

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} (b_i N_j + b_j N_i) dS_\alpha \quad (4.2.29)$$

式中 $b_i = [u_i]$ 是微裂纹面的位移不连续矢量, N_i 是微裂纹面的法向单位矢量。平均应变 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 和平均应力 $\bar{\sigma}_{ij}$ 满足以下方程

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^0, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^0 \quad (4.2.30)$$

有效刚度张量 \bar{C}_{ijkl} 定义为

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad (4.2.31)$$

则方程(4.2.29)变为

$$\bar{C}_{ijkl} \epsilon_{kl}^0 = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^0 - C_{ijkl} \frac{1}{2V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} (b_k N_l + b_l N_k) dS_\alpha \quad (4.2.32)$$

式中 C_{ijkl} 为基体材料的刚度张量。

为简单起见, 只讨论二维平面情况, 设一薄板中含有随机分布的微裂纹, 微裂纹的半长为 a , 单位面积内的微裂纹数为 N 。假设该平面问题具有式(4.2.28)中的位移边界条件, 其中

$$\epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2} \gamma_0 \delta_{i1} \delta_{j2} \quad (4.2.33)$$

此时方程(4.2.32)化简为

$$\bar{G} \gamma_0 = G \gamma_0 - 2G I_{12} \quad (4.2.34)$$

式中 I_{12} 是所有微裂纹对剪切应变的贡献,

$$I_{12} = \sum_{\alpha=1}^N \int_{L_{\alpha}} \frac{1}{2} (b_1 N_2 + b_2 N_1) dL_{\alpha} \quad (4.2.35)$$

假设微裂纹是完全随机分布的,可以先求得单位微裂纹的贡献,然后对所有的微裂纹取向 θ 积分,即 I_{12} 可以表示为

$$I_{12} = \frac{N}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_L (b_1 N_2 + b_2 N_1) dL d\theta \quad (4.2.36)$$

如果不考虑微裂纹的相互作用,即采用 Taylor 模型的方法,则把每个微裂纹置于无限大的基体材料中,基体的平均应变为远场应变 γ^0 , 则容易导出

$$I_{12} = \frac{\pi\alpha}{2(1+\nu)} \gamma_0 \quad (4.2.37)$$

式中 α 是平面情况下微裂纹的密度参数,

$$\alpha = Na^2 \quad (4.2.38)$$

于是 Taylor 方法得出的有效剪切模量为

$$\bar{G}/G = 1 - \frac{\pi\alpha}{1+\nu} \quad (4.2.39)$$

而 Mori-Tanaka 方法的基本思想是把每个微裂纹置于无限大的基体中,但受到的远场应变不再是 ϵ^0 , 而是考虑了微裂纹损伤影响的有效应变 $\bar{\gamma}^{(1)}$,

$$\bar{\gamma}^{(1)} = \gamma_0 + \tilde{\gamma}^{(1)} \quad (4.2.40)$$

式中 $\tilde{\gamma}^{(1)}$ 是由于微裂纹的存在引起的应变波动项。则式(4.2.37)变为

$$I_{12} = \frac{\pi\alpha}{2(1+\nu)} (\gamma_0 + \tilde{\gamma}^{(1)}) \quad (4.2.41)$$

利用式(4.2.30),得到关系式

$$\gamma_0 = \bar{\gamma}^{(1)} + 2I_{12} \quad (4.2.42)$$

方程(4.2.40),(4.2.41)和(4.2.42)联立得到

$$\tilde{\gamma}^{(1)} = \frac{-\pi\alpha}{1+\nu+\pi\alpha} \gamma_0 \quad (4.2.43)$$

于是由 Mori-Tanaka 方法得到的有效剪切模量为

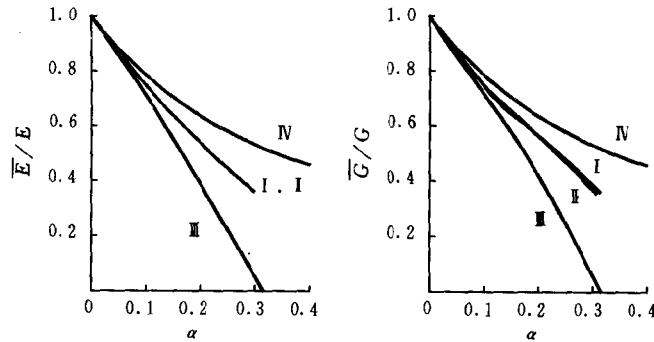
$$\bar{G}/G = \left[1 + \frac{\pi\alpha}{1+\nu} \right]^{-1} \quad (4.2.44)$$

类似得到有效弹性模量

$$\bar{E}/E = \frac{1}{1+\pi\alpha} \quad (4.2.45)$$

图 4.7 给出了 \bar{E}/E 和 \bar{G}/G 的变化曲线^[4.11], 并与自洽方法、广义自洽方法^[4.15]进行了比较, 其中 $\nu = 1/3$ 。在二维情况下自洽方法的结果表示为

$$\frac{\bar{G}}{G} = \left[1 + \frac{\pi\alpha}{(1+\nu)(1-\pi\alpha)} \right]^{-1}, \quad \frac{\bar{E}}{E} = 1 - \pi\alpha \quad (4.2.46)$$



(I,II) 两种格式的广义自洽方法,

(III) 自洽方法, (IV) Mori-Tanaka 方法

图 4.7 不同方法得到的杨氏模量与剪切模量^[4.11]

综上所述, Mori-Tanaka 方法的核心思想是将单个的微裂纹置于无损的基体中, 但是承受着有效的应力或应变场, 而这种有效场与外加的远场不需要一致。因此这种方法亦称为有效场方法, 实际是有效场方法的一种简化情况。在更一般的有效场方法中, 有效的

应力或应变场可以是不均匀的。Mori-Tanaka 方法比自洽方法优越的一点是其预测的有效模量是随着微裂纹密度逐渐趋近于零的。

4.2.4 微分方法

在一定意义上,微分方法是与自洽方法相联系的。自洽方法是将每个微裂纹都置于具有有效模量的等效介质中,微分方法也采用了类似的思想。其区别是,在微分方法中,微裂纹是依次加入到基质材料中去的,因此每个微裂纹周围的等效介质的有效模量只与前面加入的微裂纹有关,也就是说,在微裂纹逐渐增加的过程中有效模量是一个逐渐变化的过程,这种变化可以用微分方程的形式表示出来。

下面就随机分布的微裂纹损伤情况从自洽方法的结果中导出微分方法的结果,关于微分方法的更严格的数学表达及推导过程可以参见 Hashin 的文章^[4.13]。

假设三维微裂纹体中的所有微裂纹具有相同的长短轴比 a/b , 但是尺寸和方向是完全随机分布的。将 Budiansky 和 O'Connell 得到的式(4.2.9)和(4.2.16)重新表示为

$$\begin{aligned}\bar{K} &= K(1 - \kappa\alpha) \\ \bar{G} &= G(1 - \mu\alpha)\end{aligned}\quad (4.2.47)$$

式中微裂纹密度参数 α 为

$$\alpha = \frac{\pi \sum_{i=1}^N ab^2}{2E(k)} \quad (4.2.48)$$

且

$$\begin{aligned}\kappa &= \kappa(b/a, \nu) = \frac{16}{9} \frac{1 - \nu^2}{1 - 2\nu} \\ \mu &= \mu(b/a, \nu) = \frac{32}{45} (1 - \nu) \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1 + \beta\nu} + \frac{1}{1 + \rho\nu} \right) \right] \\ \beta &= [(1 - k^2)E(k) - E(k)]/[k^2E(k)] \\ \rho &= [E(k) - (1 - k^2)E(k)]/[k^2E(k)]\end{aligned}$$

$$\rho = \{(1 - k^2)[E(k) - K(k)]\} / [k^2 E(k)] \quad (4.2.49)$$

在微分方法中,我们考察在微裂纹增加的某一状态,此时的微裂纹密度为 α , 有效模量为 \bar{K} 和 \bar{G} , 在下一状态,微裂纹密度变为 $\alpha + d\alpha$, 有效模量变为 $\bar{K} + d\bar{K}$ 和 $\bar{G} + d\bar{G}$ 。在这一个很小的 α 变化过程中把 \bar{K} 和 \bar{G} 作为基体材料的模量,即把微裂纹密度为 α 的裂纹体看作是新增微裂纹的基体, $d\alpha$ 是新增微裂纹的密度,利用自洽方法的结果式(4.2.47),得

$$\begin{aligned} \bar{K} + d\bar{K} &= \bar{K}(1 - \bar{\kappa}d\alpha) \\ \bar{G} + d\bar{G} &= \bar{G}(1 - \bar{\mu}d\alpha) \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

式中

$$\bar{\kappa} = \kappa(b/a, \bar{\nu}), \quad \bar{\mu} = \mu(b/a, \bar{\nu}) \quad (4.2.51)$$

式(4.2.50)化简为

$$\frac{d\bar{K}}{d\alpha} = -\bar{K}\bar{\kappa}, \quad \frac{d\bar{G}}{d\alpha} = -\bar{G}\bar{\mu} \quad (4.2.52)$$

即为耦合有效模量的微分方程组,其初始条件为

$$\bar{K}/_{\alpha=0} = K, \quad \bar{G}/_{\alpha=0} = G \quad (4.2.53)$$

对于圆币状微裂纹, $a = b$, 微分方程化简为

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{E}}{d\alpha} &= -\frac{16}{45}\bar{E} \frac{(1 - \bar{\nu}^2)(10 - 3\bar{\nu})}{2 - \bar{\nu}} \\ \frac{d\bar{K}}{d\alpha} &= -\frac{16}{9}\bar{K} \frac{(1 - \bar{\nu}^2)}{(1 - 2\bar{\nu})} \\ \frac{d\bar{G}}{d\alpha} &= -\frac{32}{45}\bar{G} \frac{(1 - \bar{\nu})(5 - \bar{\nu})}{2 - \bar{\nu}} \\ \alpha &= \sum a^3 \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

这组微分方程的封闭解表示为

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{E} &= \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu}\right)^{10/9} \left(\frac{3 - \bar{\nu}}{3 - \nu}\right)^{1/9} \\ \frac{\bar{G}}{G} &= \frac{1 + \bar{\nu}}{1 + \nu} \frac{\bar{E}}{E} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{5}{8} \ln \frac{\nu}{\nu'} + \frac{15}{64} \ln \frac{1-\bar{\nu}}{1-\nu} + \frac{45}{128} \ln \frac{1+\bar{\nu}}{1+\nu} + \frac{5}{128} \ln \frac{3-\bar{\nu}}{3-\nu} \quad (4.2.55)$$

图 4.8 给出了 \bar{E}/E 和 \bar{G}/G 随 α 的变化曲线, 并与自洽方法进行了比较。微分方法的结果更为合理, 随着 α 的增大, \bar{E}/E 和 \bar{G}/G 是逐渐趋近于零的。微分方法中存在的一个问题是其结果具有路径相关性, 即其结果可能不唯一。

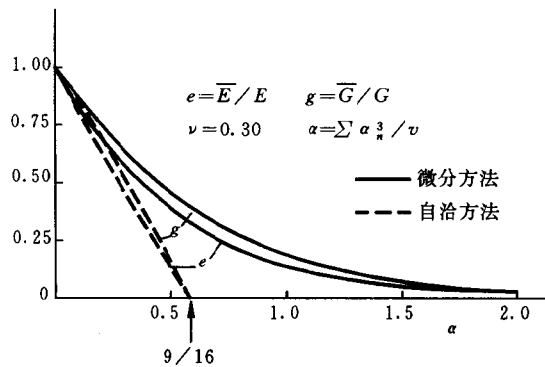


图 4.8 微分方法与自洽方法的比较^[4.12]

以上介绍了自洽方法、广义自洽方法、Mori-Tanaka 方法和微分方法的基本思想和特点, 关于这些方法以及 Hashin-Shtrikman 界限方法等的详尽介绍及其在含细观结构材料中的应用, 可以参见 Nemat-Nasser 和 Hori 的专著[4.1]。

4.3 Gurson 模型及其应用

4.3.1 韧性材料的微孔洞损伤

很多材料例如金属, 其断裂过程要经历明显的塑性变形, 这种断裂称为韧性断裂或塑性断裂^[4.16~4.18]。韧性金属材料的损伤破坏

过程大致分为以下三个阶段：

(1) 微孔洞的形核。微孔洞的形核主要是由于材料细观结构的不均匀性,大多数微孔洞形核于二相粒子附近,或产生于二相粒子的自身开裂,或产生于二相粒子与基体的界面脱粘。

(2) 微孔洞的长大。随着不断的加载,微孔洞周围材料的塑性变形越来越大,微孔洞也随之扩展和长大。

(3) 微孔洞的汇合。微孔洞附近的塑性变形达到一定程度后,微孔洞之间发生塑性失稳,导致微孔洞之间的局部剪切带,剪切带中的二级孔洞片状汇合形成宏观裂纹。

经典塑性理论中通常不考虑塑性体积变形,认为静水压力对材料的屈服无明显影响。这种简化假设对损伤很小的塑性变形初期阶段是有较高精度的,但是随着塑性变形的增加,微孔洞不断形核和长大,使得体积不可压缩的假设不再成立。因此,从微孔洞的研究出发,发展考虑细观损伤的塑性理论势在必行。

对微孔洞的早期研究,比较重要的有 McClintock^[4.19], Rice 和 Tracey^[4.20]等人的工作,他们通过无限大理想刚塑性基体中孤立孔洞的分析,估计微孔洞汇合的临界塑性应变,并得到了孔洞体积膨胀率随三轴度的增大而迅速增大的重要结论。之后的很多工作主要研究相邻孔洞之间的相互作用、微孔洞的形核机理以及在微孔洞汇合前的变形过程等^[4.2,4.3,4.21~4.23]。

McClintock^[4.19]首次给出了在轴对称加载条件下的刚塑性基体中含圆柱形孔洞的精确解,得到的孔洞体积膨胀率表示为

$$\frac{1}{\dot{E}_{eq}} \frac{\dot{V}}{V} = \sqrt{3} \sinh \left(\frac{\sqrt{3} \Sigma_m}{\sigma_s} \right) \quad (4.3.1)$$

式中 Σ_m 为宏观静水应力, σ_s 为基体材料的屈服应力, \dot{E}_{eq} 为宏观的等效应变。而 Rice 和 Tracey^[4.20]利用 Rayleigh-Ritz 方法研究了理想刚塑性基体中的球形孔洞的长大问题,应用最大塑性功原理,给出了孔洞平均半径 R 的增长率的著名公式

$$\frac{1}{\dot{\epsilon}} \frac{\dot{R}}{R} = 0.283 \exp\left(\frac{3\Sigma_m}{2\Sigma_{eq}}\right) \quad (4.3.2)$$

式中 Σ_m 为宏观的 Mises 等效应力, $\dot{\epsilon}$ 为无穷远处的简单拉伸应变率。在此基础上, Budiansky, Hutchinson, Slutsky, Huang 等人对孤立孔洞的问题进行了更深入的研究, 相关的一些重要结果可参见文献[4.3, 4.22]。

4.3.2 Gurson 模型

1975年, Gurson^[4.24, 4.25]在 McClintock^[4.19], Rice 和 Tracey^[4.20] 等的工作基础上发展了一套比较完整的本构方程, 用以描述微孔洞损伤对材料塑性变形行为的影响, 这是损伤力学和细观力学的一个重大进展。

为了描述韧性材料细观损伤的机制及其演化过程, 须建立适当的模型来描述材料的细观结构。Gurson 摒弃了无限大基体的假设, 提出了有限大基体含微孔洞的体胞模型。这种模型更加接近于真实的材料细观结构, 为损伤的描述 (如作为损伤变量的孔洞体积百分比) 以及宏观体积膨胀的塑性理论的建立奠定了基础。

Gurson 给出了 4 种微孔洞的体胞模型, 如图 4.9 所示。其中包括有限体积的圆柱体中的圆柱形孔洞, 有限体积的球体中的球形孔洞, 另外两种与上述两种类似, 但假设划斜线的区域为刚性楔。前两种的全塑性体胞单元, 主要用于孔洞体积百分比 (或称为孔隙率) 比较低和宏观应力三轴度比较高的情况, 因为当三轴度较高时, 静水应力的影响明显, 体胞单元的变形趋向于球对称的全场变形。而在孔洞体积百分比比较大的情况下, 孔洞之间的变形局部化明显, 所引起的塑性变形只发生在体胞单元的局部, 因此宜采用含有刚性楔的体胞单元。

设基体为均匀的不可压缩理想刚塑性材料, 采用 Von-Mises 屈服条件, 设基体中的细观应力和应变用 σ_{ij} 和 ϵ_{ij} 表示, 而宏观应

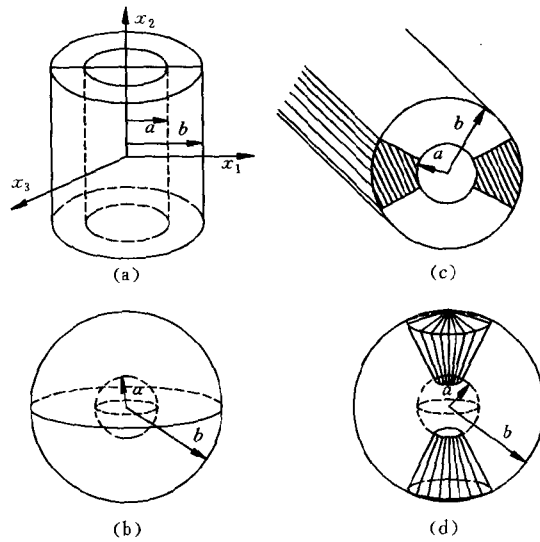


图 4.9 4种胞模型

力和应变用 Σ_{ij} 和 E_{ij} 表示。采用 Bishop 和 Hill^[4.26] 的关于宏观变形率的定义

$$E_{ij} = \frac{1}{2V} \int_S (v_i n_j + v_j n_i) dS \quad (4.3.3)$$

式中 V 为所选取的材料单元的总的体积, S 为其外表面面积, n_i 为外法线单位矢量, v_i 为细观的速度场。利用 Gauss 定理, 上式可以改写为

$$E_{ij} = \frac{1}{2V} \left[\int_{V_M} \epsilon_{ij} dV + \int_{V_V} \epsilon_{ij} dV \right] \quad (4.3.4)$$

式中 V_M 为基体的总体积, V_V 为微孔洞的总体积。

根据 (4.3.3) 式以及宏细观的功率互等公式

$$V \Sigma_{ij} E_{ij} = \int_{V_M} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (4.3.5)$$

可以推得,宏观应力和细观应力的关系为

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V_M} \sigma_{ij} dV = \frac{1}{S} \int_S \sigma_{ij} dS \quad (4.3.6)$$

引入宏观单元的单位体积的形变耗散功率 \dot{W}

$$\dot{W} = \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V_M} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (4.3.7)$$

可以证明确定宏观应力场的基本公式

$$\Sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \dot{E}_{ij}} = \frac{1}{V} \int_{V_M} \sigma_{kl} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{kl}}{\partial \dot{E}_{ij}} dV \quad (4.3.8)$$

Gurson 就图 4.9 中的 4 种体胞单元分别构造了机动允许的速度场,并代入(4.3.8)式,得到了近似的塑性屈服面。例如,对于第二种构元即有限球体中的球形孔洞单元,Gurson 得到的屈服面为

$$\Phi(\Sigma_{ij}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_s} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{3\Sigma_m}{2\sigma_s} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (4.3.9)$$

式中 f 为孔洞的体积百分比。式(4.3.9)的屈服面如图 4.10 所示。由上述方法得到的屈服面有如下的特点:

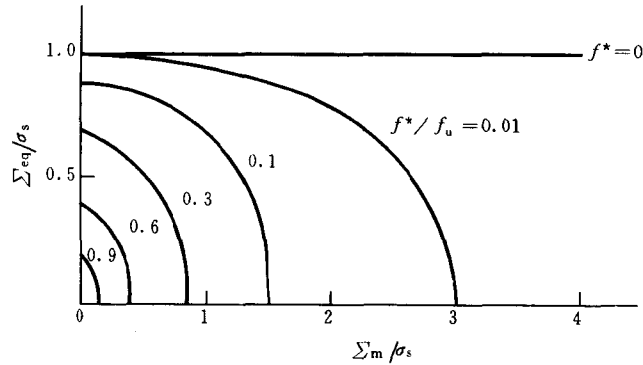


图 4.10 Gurson 模型的屈服面^[4.25]

(1) 所有的屈服面都是外凸的和光滑的。

(2) 根据 Taylor 的最小塑性耗散原理,由所构造的(而不是真实的)速度场以及(4.3.8)式得到的屈服面为真实屈服面的上限。

(3) 屈服面和宏观静水应力密切相关,这一点改变了在经典塑性理论中“静水应力不影响屈服”和“塑性体积不可压缩”的概念。

(4) 材料的屈服与损伤联系起来。随着孔洞体积百分比的增大,屈服面逐渐缩小,即材料有随损伤软化的特性。当 $f = 0$ 时,所得到的屈服面与经典塑性理论的 Mises 屈服条件完全相同。当 $f = 1$ 时,屈服面缩小为一个点。孔洞的形核和长大是屈服面缩小以及塑性体积膨胀的原因。

如果基体材料采用刚塑性各向同性应变强化模型,并假设材料的等效屈服应力 σ_e 和等效塑性应变 ϵ_p^e 可以用一条单一曲线表示,如图 4.11 所示,其硬化模量为

$$h = \frac{d\sigma_e}{d\epsilon_p^e} = \frac{EE_i}{E - E_i} \quad (4.3.10)$$

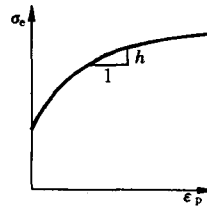


图 4.11 基体材料的硬化曲线

式中 E 为杨氏模量, E_i 为硬化模量。则由 Gurson 模型的方法得到的宏观屈服面与(4.3.9)式形式相同,只是将其中的屈服应力 σ_s 换为等效屈服应力 σ_e 。由式(4.3.10)及等效塑性功的表达式

$$\Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} = \sigma_e \dot{\epsilon}_p (1 - f) \quad (4.3.11)$$

得到基体材料等效屈服应力的变化率,为

$$\dot{\sigma}_e = \frac{h \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij}}{(1 - f) \sigma_e} \quad (4.3.12)$$

在 Gurson 模型中,损伤被视为各向同性的,损伤变量用一个标量即孔洞体积百分比来表示。这是由于对韧性金属材料来讲,损

伤引起的各向异性性质往往不是非常明显。孔洞体积百分比的演化包括两部分

$$\dot{f} = (\dot{f})_{\text{growth}} + (\dot{f})_{\text{nucleation}} \quad (4.3.13)$$

其中 $(\dot{f})_{\text{growth}}$ 是由于孔洞长大引起的孔洞体积百分比的变化率, $(\dot{f})_{\text{nucleation}}$ 是由于孔洞形核引起的孔洞体积百分比的变化率。由于假设基体材料是不可压缩的, $(\dot{f})_{\text{growth}}$ 依赖于宏观的塑性体积变形, 有

$$(\dot{f})_{\text{growth}} = (1 - f)\dot{\epsilon}_{kk}^p \quad (4.3.14)$$

由于新孔洞的产生而造成的孔洞体积百分比的增加为

$$(\dot{f})_{\text{nucleation}} = A\dot{\sigma}_e + B\dot{\Sigma}_m \quad (4.3.15)$$

式中第一项表示塑性应变控制的形核机制, 第二项表示应力控制的形核机制。

对于第一种形核机制, 实验表明, 孔洞的形核率和等效塑性应变成线性关系。设想孔洞的形核过程服从正态分布, Chu 和 Needleman^[4.27]给出了系数

$$A = \frac{f_n}{hS\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_e^p - \epsilon_N}{S}\right)^2\right], \quad B = 0 \quad (4.3.16)$$

式中 ϵ_N 为孔洞形核的平均应变, S 为相应的标准方差, f_n 为可以发生微孔洞形核的所有二相粒子的体积百分比。式(4.3.16)成立的条件是 $\epsilon_e^p = (\epsilon_e^p)_{\text{max}}$ 且 $\dot{\epsilon}_e^p > 0$ 。

对于第二种形核机制, 孔洞形核过程主要是由最大正应力驱动的基体和二相粒子的脱粘过程。Needleman 和 Rice^[4.28]指出, 这种机制主要由应力组合 $\sigma_e + \Sigma_m$ 来控制并取 $A = B$ 。根据 Chu 和 Needleman^[4.27]的结果,

$$A = B = \frac{f_n}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_e + \Sigma_m - \sigma_N}{S}\right)^2\right] \quad (4.3.17)$$

式中 σ_N 为孔洞形核的平均应力。如果应力控制和应变控制的两

种形核机制在材料中同时发生, 则 A 的值是式 (4.3.16) 和 (4.3.17) 之和。式 (4.3.17) 成立的条件是 $\sigma_e + \Sigma_m = (\sigma_e + \Sigma_m)_{\max}$ 且 $(\sigma_e + \Sigma_m) > 0$ 。

4.3.3 Gurson 模型下的本构关系

这里就弹塑性大变形情况, 给出 Gurson 模型下的本构关系^[4.29]。将宏观的变形率 $D_{ij} = \dot{E}_{ij}$ 分解为弹性部分 D_{ij}^e 和塑性部分 D_{ij}^p , 即

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \quad (4.3.18)$$

其中弹性部分满足

$$D_{ij}^e = \frac{1}{2G} \overset{\nabla}{\Sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \delta_{ij} \overset{\nabla}{\Sigma}_{kk} \quad (4.3.19)$$

这里, G 和 K 分别为弹性剪切模量和体积模量, $\overset{\nabla}{\Sigma}_{ij}$ 为宏观 Cauchy 应力 Σ_{ij} 的 Jaumann 客观共旋率

$$\overset{\nabla}{\Sigma}_{ij} = \dot{\Sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \Sigma_{kj} - \Sigma_{ik} \Omega_{jk} \quad (4.3.20)$$

式中 D_{ij} 和 Ω_{ij} 的定义为

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Bishop 和 Hill^[4.26] 证明, 如果基体材料的每一个组分都服从 Mises 屈服条件, 且满足正交法则, 则多孔材料的宏观塑性变形率也满足正交法则, 即

$$D_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{ij}} \quad (4.3.22)$$

式中 Λ 为待定的塑性流动因子。

把 (4.3.12) ~ (4.3.22) 代入一致性条件 $\dot{\Phi} = 0$, 即得到多孔材料的塑性流动法则。把弹性部分和塑性部分相加, 得到弹塑性

本构方程如下

$$D_{ij} = \frac{1}{2G} \overset{\nabla}{\Sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \delta_{ij} \overset{\nabla}{\Sigma}_{kk} \\ + \lambda \frac{1}{H} \left(\frac{3\overset{\nabla}{\Sigma}_{ij}}{2\sigma_e} + \alpha \delta_{ij} \right) \left(\frac{2\overset{\nabla}{\Sigma}_{kl}}{2\sigma_e} + \beta \delta_{kl} \right) \overset{\nabla}{\Sigma}_{kl} \quad (4.3.23)$$

式中

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{当 } \Phi = 0 \text{ 且 } \frac{1}{H} \left(\frac{3\overset{\nabla}{\Sigma}_{kl}}{2\sigma_e} + \beta \delta_{kl} \right) \overset{\nabla}{\Sigma}_{kl} \geq 0, \\ 0, & \text{当 } \Phi < 0, \text{ 或 } \Phi = 0 \text{ 且 } \frac{1}{H} \left(\frac{3\overset{\nabla}{\Sigma}_{kl}}{2\sigma_e} + \beta \delta_{kl} \right) \overset{\nabla}{\Sigma}_{kl} < 0 \end{cases} \quad (4.3.24)$$

$$H = \frac{h_m}{1-f} \left(\omega + \alpha \frac{\overset{\nabla}{\Sigma}_{kk}}{\sigma_e} \right)^2 - \sigma_e \left[\cosh \left(\frac{\overset{\nabla}{\Sigma}_{kk}}{2\sigma_e} \right) - f \right] \\ \times \left[\frac{Ah_m}{1-f} \left(\omega + \alpha \frac{\overset{\nabla}{\Sigma}_{kk}}{\sigma_e} \right) + 3(1-f)\alpha \right] \quad (4.3.25)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} f \sinh \left(\frac{\overset{\nabla}{\Sigma}_{kk}}{2\sigma_e} \right) \quad (4.3.26)$$

$$\beta = \alpha + \frac{B}{3} \left[\cosh \left(\frac{\overset{\nabla}{\Sigma}_{kk}}{2\sigma_e} \right) - f \right] \sigma_e \quad (4.3.27)$$

$$\omega = \frac{3\overset{\nabla}{\Sigma}_{ij}\overset{\nabla}{\Sigma}_{ij}}{2\sigma_e^2} = 1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{\overset{\nabla}{\Sigma}_{kk}}{2\sigma_e} \right) \quad (4.3.28)$$

(4.3.22)式的逆关系为

$$\overset{\nabla}{\Sigma}_{ij} = 2GD_{ij} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij} D_{kk} \\ - \frac{\lambda \left(G \frac{\overset{\nabla}{\Sigma}_{ij}}{\sigma_e} + K \alpha \delta_{ij} \right) \left(G \frac{\overset{\nabla}{\Sigma}_{kl}}{\sigma_e} + K \beta \delta_{kl} \right) D_{kl}}{\frac{1}{9}H + \frac{1}{3}\omega G + \alpha \beta K} \quad (4.3.29)$$

如果 $f = 0, A = B = 0$, (4.3.23)和(4.3.29)式简化为经典塑性力学中的 Prantel-Reuss 方程。

综上所述, Gurson 模型和它的连续损伤模型相比,有以下

特点:

(1) Gurson 模型的损伤变量即孔洞体积百分比有清晰的几何意义和明确的物理内涵。

(2) 以往唯象损伤模型,如 Lemaitre 和 Chaboche 的损伤理论认为材料的损伤与弹性模量 E 相关,而 Gurson 模型认为损伤主要与基体材料的塑性变形相关。

(3) 该模型提供了一套完整的韧性损伤的本构方程。

(4) 该模型发展了一种考虑细观参量的唯象的物理模型。Gurson 提出的细观胞模型突破了经典方法中无限大基体的限制,更好地反映了材料的细观结构。其学术思想是新颖的,而且所采取的数学处理方法并未超出连续介质力学的范围,因此受到力学家的广泛欢迎。

(5) 该模型可以同时考虑微孔洞的形核和长大过程。

4.3.4 Gurson 模型的发展和完善

从 Gurson 的胞单元得到的宏观屈服面是真实屈服面的上限,更为精细的数值分析表明,材料的屈服应力比 Gurson 模型的预测结果要低。但是,由于 Gurson 模型的突出优点,使得这一模型不仅受到普遍欢迎,而且得到了多方面的发展与完善^[4.2,4.3,4.22]。

Tvergaard^[4.31]采用幂函数的基体硬化关系

$$\sigma_e = \mu(\epsilon_e)^n \quad (4.3.30)$$

并为了修正 Gurson 模型,提出了一种具有更一般形式的、考虑孔洞之间相互作用效应的屈服条件

$$\Phi(\Sigma_{ij}, \sigma_e, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_e}\right)^2 + 2fq_1 \cosh\left(\frac{3q_2 \Sigma_m}{2\sigma_e}\right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (4.3.31)$$

式中 $q_i (i = 1, 2, 3)$ 为修正参数。显然,当 $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ 时,上式退化为式 (4.3.9)。对于不同的材料参数, q_i 的取值会稍有不

同。对于高强度钢, Tvergaard^[4.31]通过平面应变拉伸的数值分析得到了 q_i 的值, 首先计算材料中含有周期分布的孔洞的情况, 然后假设均匀的多孔介质服从屈服条件 (4.3.31), 将两种情况的结果进行对比, 得到

$$q_1 = 1.5, \quad q_2 = 1.0, \quad q_3 = q_1^2 = 2.25 \quad (4.3.32)$$

多孔韧性材料的最后破坏是由微孔洞的汇合引起的。按照 Gurson 模型, 只有当孔洞膨胀到足够大, 屈服面缩小为一点, 即 $f = 1/q_1$ 时, 材料才完全丧失承载能力。然而, 这是不现实的。大量的实验^[4.32]表明, 微孔洞在形核后会沿着拉伸的方向长大, 当微孔洞的长度达到孔洞间距的量级时, 将发生相邻微孔洞的汇合。这种局部的破坏是由于微孔洞间的滑移带和变形局部化引起的。Brown 和 Embury^[4.32]估计发生微孔洞汇合时的临界孔洞体积百分比为 0.15, 远低于 $1/q_1$ 。

Tvergaard^[4.33]给出了几种方法把微孔洞的汇合引入 Gurson 模型, 其中最常用的方法是把 (4.3.31) 中的孔洞体积百分比 f 用函数 f^* 代替, 即

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma_{ij}, \sigma_e, f) &= \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_e} \right)^2 + 2f^* q_1 \cosh\left(\frac{3q_2 \Sigma_m}{2\sigma_e} \right) - 1 - q_3 (f^*)^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Tvergaard 和 Needleman^[4.34]给出

$$f^*(f) = \begin{cases} f, & \text{当 } f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_u^* - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c), & \text{当 } f > f_c \end{cases} \quad (4.3.34)$$

式中 f_c 是开始发生孔洞汇合时的孔洞体积百分比, f_F 是材料断裂时的临界孔洞体积百分比, $f_u^* = f^*(f_F) = 1/q_1$ 。根据实验和数值结果, 可取 $f_c = 0.15, f_F = 0.25$ 。

设基体材料同时表现出各向同性和随动硬化, Mear 和

Hutchinson^[4, 35]建议 Gurson 模型的屈服面修正如下

$$\Phi(\Sigma_{ij}, \sigma_F, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq} - A_e}{\sigma_F} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m - A_m}{\sigma_F} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (4.3.35)$$

式中

$$\sigma_F = b\sigma_s + (1-b)\sigma_e \quad (4.3.36)$$

σ_s 为基体的初始屈服应力, σ_e 为当前的屈服应力, σ_F 为各向同性硬化 ($b=0$) 与随动硬化 ($b=1$) 间的一种插值, A_{ij} 为背应力。

假设基体为粘性幂硬化材料, 王自强和秦嘉亮^[4, 36]利用 Gurson 模型的思想方法发展了含圆柱形和球形孔洞的本构势和孔洞扩展方程。

对比于 Gurson 模型的上限解, 孙毅和王铎^[4, 37]通过构造球形孔洞周围的应力场, 给出了多孔材料屈服面的下限解, 其屈服函数表示为

$$\Phi = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_e} \right)^2 + \frac{f \left[\beta_1 \sinh \left(q \frac{\Sigma_m}{\sigma_e} \right) + \beta_2 \cosh \left(q \frac{\Sigma_m}{\sigma_e} \right) \right]}{\left[1 + \beta_4 f^2 \sinh^2 \left(q \frac{\Sigma_m}{\sigma_e} \right) \right]^{1/2}} - \beta_3 = 0 \quad (4.3.37)$$

式中参数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 和 q 通过数值分析得到。当 $f \leq 0.3$ 时,

$$\begin{aligned} q &= 1.5 \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 2 - \frac{1}{2} \ln f \\ \beta_3 &= 1 + f(1 + \ln f) \\ \beta_4 &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_3} \right)^2 \coth^2 \left(q \frac{\Sigma_m^0}{\sigma_e} \right) - \left[f^2 \sinh \left(q \frac{\Sigma_m^0}{\sigma_e} \right) \right]^{-1} \\ \Sigma_m^0 &= -0.65 \sigma_e \ln f \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

4.3.5 Gurson 模型的应用

在 Gurson 模型建立之后的 20 年时间里,这一模型得到了广泛应用^[4.2.4.3,4.5,4.38~4.43],仅从这一方面讲,Gurson 模型就是最成功的损伤模型之一。自 80 年代以来,Tvergaard 和 Needleman 等人^[4.2,4.27~4.34,4.38~4.43]将 Gurson 模型与有限元计算相结合,对多孔韧性材料的损伤和断裂行为进行了详细的多方面研究,取得了一些重要的成果,这些成果不仅发展了 Gurson 模型,而且揭示了韧性破坏的一些规律。这里仅介绍其中的部分工作。

1. 塑性流动的局部化分析

在韧性材料的变形过程中,常常观察到在经历了一定的均匀变形后,材料进入产生高度局部化的剪切带变形阶段。一旦发生了变形局部化,剪切带内的应变将变得很大,但是它对整体变形的贡献并不大,此后,微小的总体变形增大也容易导致试件的剪切断裂。

对于均匀的率无关材料,剪切局部化带的形成意味着控制方程丧失了其椭圆性。控制方程椭圆性丧失时的临界应变对所采用的本构关系敏感,具有光滑屈服面和塑性流动正交性的经典的弹塑性材料不易发生变形局部化,而带有角点的本构关系、考虑体积膨胀的塑性流动模型以及非正交的塑性流动模型都容易导致变形局部化,而且局部化的发生对材料的细观不均匀性也很敏感。

分析剪切局部化带的一种简单方法是假设材料的一个带状区域内有初始不均匀性(例如孔洞形核粒子的局部集中)。如图 4.12 所示,在平行于 x_3 轴方向的一个带内包含着初始不均匀,它与 x_1 轴的初始夹角为 φ_1 ,其法向单位矢量为 n_i 。在带外,应力应变的主方向与直角坐标系的主轴方向保持一致,最大主应力沿 x_1 轴

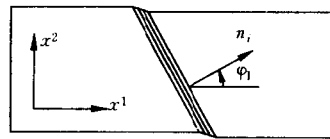


图 4.12 均匀变形材料中的剪切带^[4.2]

方向。在变形过程中,带与 x_1 轴的夹角 φ 随变形而变化的关系为

$$\tan\varphi = \exp(\epsilon_1^\circ - \epsilon_2^\circ)\tan\varphi_0 \quad (4.3.39)$$

式中 ϵ_i 为对数主应变, $()^\circ$ 表示带外的量。剪切带外的应力和应变由外载决定,而带内的应力和应变由界面上的平衡条件和协调条件确定^[4.2]。

对于 Gurson 模型描述的多孔材料, Yamamoto^[4.41] 分析了剪切带分叉变形,发现剪切带分叉对初始的孔洞体积百分比 f_1 敏感,当 $f_1 = 0$ 时,局部化发生时的临界应变为无穷大,但是随着 f_1 的增加,临界应变迅速下降。Tvergaard^[4.31] 对剪切带进行了更详尽的细观力学研究,解释了相邻孔洞之间的相互作用以及应力分布的高度不均匀性。考虑如图 4.13 所示的包含周期性排列的圆柱形孔洞的幂硬化材料,它承受平面应变拉伸,其分叉模式如图 4.14 所示。通过数值计算发现,由 Gurson 模型中式(4.3.9)给出的局部化临界应变太大,而式(4.3.31)和(4.3.32)给出的结果与

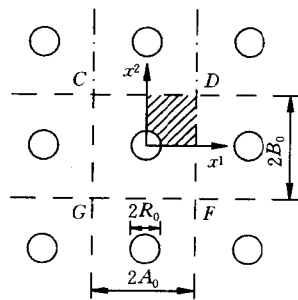


图 4.13 双周期分布的圆柱形孔筒^[4.2]

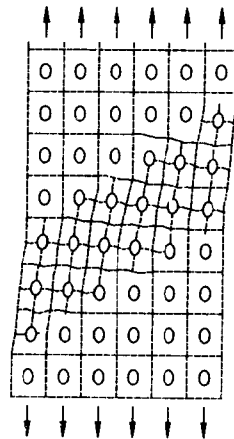


图 4.14 周期分布圆柱形孔筒的剪切带分叉模式^[4.2]

实验结果相符得较好。在数值分析中,如果采用各向同性强化的 J_2 流动理论,则控制方程不会丧失其椭圆性,而如果采用多孔介质的近似连续模型则可以较好地预测材料的剪切分叉变形。

如果材料中含有不均匀带(图 4.12),则带内的应变率逐渐高出带外的应变率,当带外发生弹性卸载时认为发生了变形局部化。局部化临界应变依赖于 φ_1 , 因此必须确定局部化临界应变与 φ_1 的关系以及最容易发生局部化的 φ_1 值。Yamamoto^[4.41]、Tvergaard^[4.42] 的研究表明初始缺陷越小,容易引起局部化的 φ_1 值也越小。但是在开始发生局部化时的倾角 φ 与局部化临界应变无关,在平面应变情况下它总是在 43° 左右。

局部化的发生往往被看作破坏的开始,Tvergaard 等人^[4.2]还对局部化发生之后的情况进行了数值分析,证明了材料破坏是由于剪切带内的孔洞汇合引起的,与此同时剪切带外只有弹性卸载。

2. 裂纹的形成和扩展

与剪切带的分析相比,张开裂纹的形成和扩展需要一些特殊的分析和计算技巧。在有限元计算的基础上,Tvergaard^[4.43]详细描述了试件在承受平面应变拉伸时其自由表面的韧性剪切断裂。在裂纹形成和扩展过程中,材料承载能力的丧失可以通过在式(4.3.13)中增加一附加项来描述,并在有限元分析中采用一种单元消去技术来刻画张开裂纹的扩展。从理论上讲,当某一单元满足了破坏条件时,屈服面缩为一个点,该单元不再做功,因此可以把它消去。但在实际的计算中,为了数值稳定性,在单元即将满足破坏条件时,单元即被消去,其结点上很小的应力将在以后的步骤中逐渐释放掉。

如图 4.15 所示是半无限大有限宽度的材料承受均匀单向拉伸的情况,在初始状态,材料内部没有微孔洞,只是在自由表面上有周期性分布的微小形状缺陷。随着载荷的增大,孔洞开始形核和扩展,图 4.15 中给出了平均拉伸应变分别为 0.268、0.307 和

0.332 情况下对应的孔洞体积百分比 f 的等值线图,孔洞的持续扩展导致剪切带形式的塑性流动局部化和裂纹的形成。

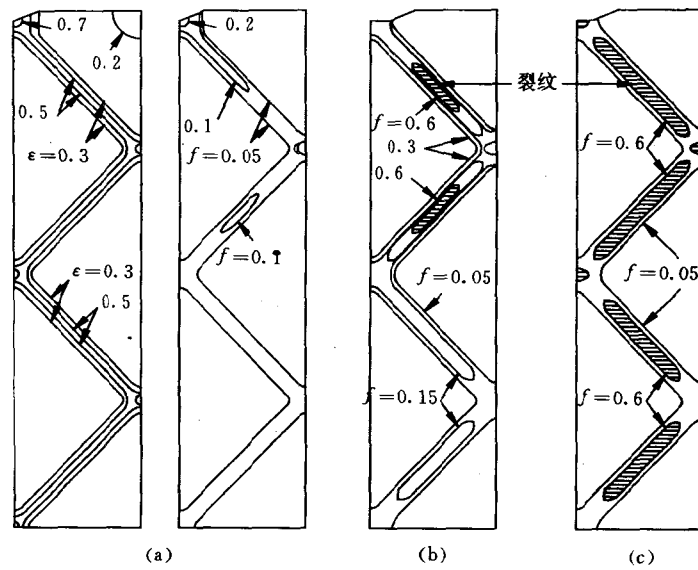


图 4.15 平面应变拉伸试件中剪切裂纹的形成^[4,2]

图 4.16 所示是圆棒拉伸试件在单拉过程中三个阶段(即孔洞中心即将发生孔洞汇合、币状张开裂纹形成和裂纹最后的“之”字形扩展阶段)的孔洞体积百分比 f 的等值线图,(a),(b)和(c)对应的载荷分别为 $P/P_{max} = 0.731, 0.521$ 和 0.032 , 其中 P_{max} 是试件能承受的最大载荷。在初始状态,圆柱试件沿长度方向直径均匀,没有微孔洞。随着载荷的增加,发生颈缩和孔洞形核,并且在颈缩区内孔洞迅速长大和汇合。图 4.17 是采用 Gurson 模型并考虑孔洞汇合情况下得到的拉伸应力应变曲线。

以上的研究证明了平面应变拉伸实验和圆棒拉伸实验结果的

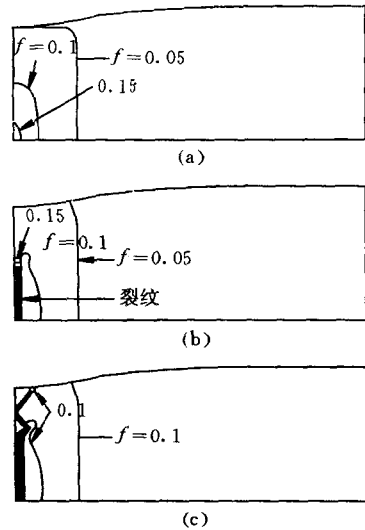


图 4.16 圆棒试件的颈缩与断裂^[4.2]

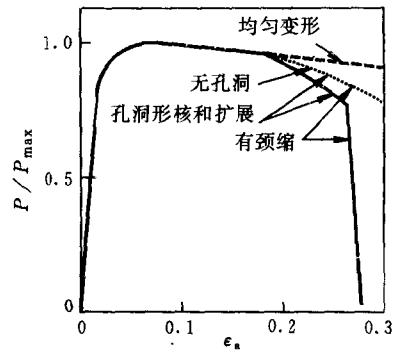


图 4.17 圆棒试件的拉伸应力
应变曲线

重大差别,前者没有明显的颈缩现象发生,最终的破坏是由变形局部化带引起的剪切断裂,在剪切带以外的孔洞体积百分比很小,而后者断裂主要是由颈缩中心的高三轴度引起的孔洞汇合导致的,其断口为 45°的杯状。

此外,Tvergaard 和 Needleman^[4.38],Aoki 等人^[4.29,4.2]用大变形的 Gurson 本构模型及有限元方法模拟了韧性材料中裂纹尖端的变形行为。裂纹尖端的韧性断裂过程与上述两种情况又有很大差别,由于裂纹尖端应力应变的高梯度,使得当外载远远低于断裂载荷时裂纹尖端附近的材料就已经达到了破坏条件。此时,材料的微观特征尺度起着重要作用。就此问题本书后面还将进一步介绍。

4.4 临界空穴扩张比理论

在近十几年时间里,郑长卿及其合作者们对韧性金属材料的空穴型宏细损伤进行了一系列的实验和理论研究工作,提出了一套临界空穴扩张比理论和一种处理多级空穴形核的组合功密度损伤破坏模型,提供了处理韧性材料空穴型损伤和破坏问题的一种思路。本节简单介绍临界空穴扩张比理论的部分成果,更系统的内容可参见专著[4.16,4.17]。

4.4.1 临界空穴扩张比理论背景—— 空穴的形核、扩张和聚合规律

郑长卿等人选用低合金钢 BS4360-50D 制成的圆柱形试件,在拉伸情况下通过扫描电镜对塑性变形、颈缩以至失稳断裂过程中的空穴形核、扩张、聚合过程进行了详细观察。通过实验和数值计算,得到了下列主要结论:

(1) 空穴形核是一个贯穿于大部分塑性变形范围的延续性过程。第一代空穴开始形核主要集中于颈缩起始阶段,材料的形核应变接近于最大载荷对应的应变值。从总的趋势来讲,相对空穴体积随有效塑性应变的增加而增加。从试件失稳至断裂的过程中,伴随着大量二级空穴的形核与扩张。

(2) 空穴一旦形核,即在不断增大的有效塑性应变和三轴度的作用下不断长大。空穴的纵横扩张比与空穴的初始尺寸关系不大,关键取决于应力状态的三轴度。空穴的扩张量与初始尺寸比近似呈正比,在变形过程中,纵向扩张和横向扩张对应力三轴度的依赖性不同。

(3) 当有效塑性应变 $\epsilon_p \approx 0.6$ 时,空穴首先在沿载荷轴线的方向上开始聚合,当 ϵ_p 接近失稳应变,即其值约为断裂应变的

90% 左右时,空穴开始沿与载荷垂直的方向聚合,通常首先发生在三轴应力较高的试样中心轴线附近。并且由于“内颈缩”与剪切脱开的同时作用,真实聚合方向与拉伸方向交角呈不同角度,故宏观断面往往呈锯齿状。

4.4.2 临界空穴扩张比判据

根据塑性力学中的一些常用假设(如单一曲线假设和韧性断裂的条件仅仅取决于加载过程中的应力状态),可以将韧性金属材料的宏观断裂准则表示为

$$\epsilon_p = \epsilon_f(R_\sigma) \quad (4.4.1)$$

式中 ϵ_p 表示有效塑性应变, $R_\sigma = \sigma_m/\sigma_{eq}$ 为应力三轴度, $\epsilon_f(R_\sigma)$ 表示在 R_σ 下材料的有效断裂应变, σ_m 和 σ_{eq} 分别为静水应力和 Mises 等效应力。式(4.4.1)的断裂判据在应用上有不方便之处,因为它要求材料在各种应力三轴度下的断裂应变值。为此,将上式改写为

$$\epsilon_p f(R_\sigma) = V_{GC} = \text{const.} \quad (4.4.2)$$

式中 $f(R_\sigma)$ 是关于应力三轴度的函数,由实验确定为

$$f(R_\sigma) = \exp\left(\frac{3}{2}R_\sigma\right) \quad (4.4.3)$$

式(4.4.2)中的常数 V_{GC} 为

$$V_{GC} = \epsilon_f f(R_\sigma) \quad (4.4.4)$$

它是一个新的材料韧性断裂特征参数,既宏观形式的临界空穴扩张比参数。

通过对 30CrMnSi 等多种钢材的扫描电镜观察,发现这些材料细观的临界空穴扩张比 R_c/R_0 为不敏感于应力三轴度的相应各材料的特征参数,其中 R 为球形空穴半径, R_c 为空穴扩张到在临界失稳状态时的折算半径, R_0 为空穴形核时的折算半径。可以证明,宏观形式的临界空穴扩张比 V_{GC} 在细观上对应于空穴扩张比的临界值 R_c/R_0 , 其关系为

$$V_{GC} = \frac{1}{C} \ln \left(\frac{R_c}{R_0} \right) \quad (4.4.5)$$

因此, V_{GC} 亦为不敏感于应力三轴度的材料常数。该式表明, V_{GC} 与细观尺度上的临界空穴扩张比 R_c/R_0 的对数成比例, 因而可称为宏观形式的临界空穴扩张比。临界空穴扩张比判据可解释为: 在统计平均意义上, 空穴扩张到临界值时(不论是第一代空穴的直接汇合, 还是通过第二代空穴汇合), 材料即发生破坏。

4.4.3 临界空穴扩张比判据的应用

1. 应用于材料和热物理工艺的评价

临界空穴扩张比参数 V_{GC} 的主要特点是: 它是与应力三轴度无关的表征材料抗拉特征的韧性指标; 其值越大, 表示材料的断裂韧性越好; 它既有明确的细观物理背景, 又易于用宏观手段测量。因此, V_{GC} 不仅可用于区分不同材料断裂韧性的优劣, 而且可用于鉴别不同热物理工艺对材料韧性的影响大小。

2. 用于预测无裂纹体与裂纹体的启裂

无论构件是否含有裂纹, 都可以按照临界空穴扩张比判据预测构件启裂时的载荷、启裂位置和方向。首先由受载结构或构件的应力应变场算出 $V_G = \epsilon_p \left(\frac{3}{2} R_0 \right)$ 的分布与变化, 当试件某处的 V_G 首先达到临界值 V_{GC} 时, 即可预知该处首先发生空穴的聚合, 同时即可知此时的载荷已达到启裂载荷。例如图 4.18 所示为一个三点弯曲裂纹试件裂尖前缘在临启裂前的有效塑性应变 ϵ_p 、应力三轴度 R_0 、垂直裂纹面方向的拉应力 σ_{yy} 及参数 V_G 的分布, 图中 X 表示到裂纹距离的归一化参数。

3. 作为损伤变量

用 V_G 可以定义一种损伤变量, 为

$$D = \frac{V_G}{V_{GC}} \quad (4.4.6)$$

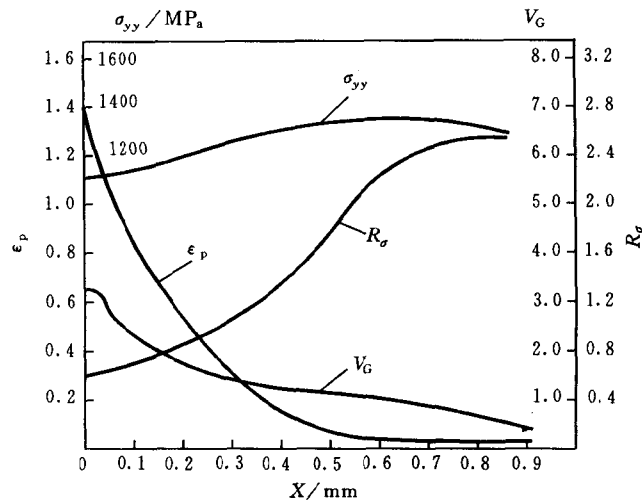


图 4.18 三点弯曲试件裂纹前缘 ϵ_p 、 R_σ 、 σ_{yy} 及 V_G 的分布^[4,17]

该损伤变量的物理意义明确,其演化方程可根据弹塑性力学的理论、 V_G 的定义和材料的本构关系得到。

4. 非比例载荷下的应用

实验结果表明,临界空穴扩张比在非比例载荷情况下仍可以应用,即非比例加载对临界空穴扩张比的影响不大。对于复杂加载的情况,空穴型损伤遵循线性累积定律,即临界空穴扩张比判据又表示为

$$\int_0^t \dot{V}_G(t) dt = V_{cc} \quad (4.4.7)$$

参 考 文 献

- 4.1 Nemat-Nasser S and Hori M. Micromechanics; Overall Properties of Heterogeneous Materials. Elsevier, The

-
- Netherlands, 1993
- 4.2 Tvergaard V. Material Failure by Void Growth to Coalescence. The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Report No. S45, The Technical University of Denmark, 1988
 - 4.3 Gilormini P. Licht C and Suquet P. Growth of voids in a ductile matrix; a review. Arch. Mech. , 1988, 40(1), 43~80
 - 4.4 Krajcinovic D. Damage mechanics. Mech. Mater. , 1989, 8, 117~197
 - 4.5 Yang W and Lee W. B. Mesoplasticity and its Applications. Springer-Verlag, Berlin, 1993
 - 4.6 Kachanov M. Effective elastic properties of crack solids, critical review of some basic concepts. Appl. Mech. Review, 1992, 45(7), 304~335
 - 4.7 Bazant Z P. Mechanics of distributed cracking. Appl. Mech. Review, 1986, 39(11), 675~705
 - 4.8 冯西桥. 脆性材料的细观损伤理论和损伤结构的安定分析. 清华大学博士学位论文, 1995
 - 4.9 Budiansky B and O'Connell R J. Elastic moduli of a cracked solids. Int. J. Solids Struct. , 1976, 12(1), 81~95
 - 4.10 Huang Y. Hu K and Chandra A. A generalized self-consistent mechanics method for microcracked solids. J. Mech. Phys. Solids, 1994, 42(8), 1273~1291
 - 4.11 Benvensite Y. On the Mori-Tanaka's method in cracked solids. Mech. Res. Comm. , 1986, 13(4), 193~201
 - 4.12 Hashin Z. The differential scheme and its application to

-
- cracked materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1988, 36, 719~734
4. 13 Horii H and Nemat-Nasser S. Overall moduli of solids with microcracks; load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, 1983, 31, 155~171
4. 14 Christensen R M and Lo K H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 1979, 27, 315~330
4. 15 Aboudi J and Benvensite Y. The effective moduli of cracked bodies in phase deformations. *Eng. Fract. Mech.*, 1987, 26, 171~184
4. 16 郑长卿等著. 韧性断裂细观力学的初步研究及其应用. 西北工业大学出版社, 1988
4. 17 郑长卿, 周利, 张克实. 金属韧性破坏的细观力学及其应用研究. 国防工业出版社, 1995
4. 18 王自强, 杨卫, 夏霖. 细观力学基础. 细观力学讲习班讲义, 1992
4. 19 McClintock F M. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *J. Appl. Mech.*, 1968, 35, 363~371
4. 20 Rice J R and Tracey D M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 1969, 17, 201~217
4. 21 Hancock J W. Constraint and stress state effects in ductile fracture. in: Edited by Argon A S. *Topics in Fracture and Fatigue*. Springer-Verlag, 1992, 99~144
4. 22 Needleman A, Tvergaard D and Hutchinson J W. Void Growth in plastic solids, in: Edited by Argon A S. *Topics in Fracture and Fatigue*. Springer-Verlag, 1992,

145~178

- 4.23 李国琛, 耶纳 M. 塑性大变形微结构力学. 科学出版社, 1993
- 4.24 Gurson A L. Plastic Flow and Fracture Behavior of Ductile Materials Incorporating Void Nucleation, Growth and Interaction. Ph.D. Thesis, Brown University, 1975
- 4.25 Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth, I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. J. Eng. Mater. Tech., 1977, 99, 2~15
- 4.26 Bishop J F W and Hill R. A theory of the plastic distortion of polycrystalline aggregate under combined stresses. Phil. Mag., 1951, 42, 414~427
- 4.27 Chu C C and Needleman A. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. J. Eng. Mater. Tech., 1980, 102, 249~256
- 4.28 Needleman A and Rice J R. Limits to ductility set by plastic flow localization, in: Edited by Koistinen, D. P., et al. Mechanics of Sheet Metal Forming. Plenum Publishing Corporation, 1978, 237~267
- 4.29 Aoki S, Kishimoto K, Yoshida T and Sakata M. A finite element study of the near crack tip deformation of a ductile material under mixed mode loading. J. Mech. Phys. Solids, 1987, 35(4), 431~455
- 4.30 Tvergaard V. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. Int. J. Solids Struct., 1995, 32(8/9), 1063~1077
- 4.31 Tvergaard V. Influence of voids on shear band instabili-

-
- ties under plane strain conditions. *Int. J. Fracture*, 1981, 17, 389~407
- 4.32 Brown L M and Embury J D. The initiation and growth of voids at second phase particles. in: *Proc. 3rd Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys*, London, 1973, 164~169
- 4.33 Tvergaard V. Material failure by void coalescence in localized shear bands. *Int. J. Solids Struct.*, 1982, 18, 659~672
- 4.34 Tvergaard V and Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 1984, 32, 157~189
- 4.35 Mear M E and Hutchinson J W. Influence of yield surface curvature on flow localization in dilatant plasticity. *Mech. Mater.*, 1985, 4, 395~407
- 4.36 王自强,秦嘉亮. 含孔洞非线性材料的本构势和孔洞扩展率. *固体力学学报*, 1989, 2, 127~141
- 4.37 Sun Y and Wang D. A lower bound approach to the yield loci of porous materials. *Acta Mech. Sinica*, 1989, 5(3), 237~243
- 4.38 Needleman A and Tvergaard V. An analysis of ductile rupture modes at a crack tip. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35(2), 151~183
- 4.39 Tvergaard V. On localization in ductile materials containing spherical voids. *Int. J. Fracture*, 1982, 18, 237~252
- 4.40 Saje M, Pan J and Needleman A. Void nucleation effects on shear localization in porous plastic solids. *Int. J.*

-
- Fracture, 1982, 19, 163~182
- 4.41 Yamamoto H. Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. *Int. J. Fracture*, 1978, 14, 347~365
- 4.42 Tvergaard V. Effect of yield surface curvature and void nucleation on plastic flow localization. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35, 43~60
- 4.43 Tvergaard V. Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface. *J. Mech. Phys. Solids*, 1982, 30, 399~425

第5章 考虑损伤的断裂力学

5.1 引言

在固体力学中,人们对结构破坏的研究经历了三个阶段。第一个阶段是弹塑性力学阶段,将材料看作是理想均匀、没有任何缺陷的连续介质,通过弹塑性分析按照经典的强度理论判断结构是否破坏。第二个阶段是断裂力学阶段,到20世纪中叶,Griffith, Irwin等人的一些工作标志着断裂力学开始形成,断裂力学研究结构中宏观裂纹的问题,但仍将裂纹周围看作是均匀连续介质。因此宏观断裂力学仅仅适用于宏观裂纹形成之后的阶段,对材料开始劣化到宏观裂纹形成之间的力学行为和物理过程并未进行理论分析和描述。断裂力学在航空航天工程、核工程等诸多工程部门的发展过程中发挥了重要作用。第三个阶段是现代破坏力学阶段。在Kachanov-Rabotnov工作的基础上,考虑材料细观缺陷的发生发展过程及其对材料行为影响的损伤力学开始形成。尤其是到了80年代中后期,以宏观、细观、微观相结合的现代破坏力学的研究为固体力学的发展注入了新的活力,标志着人们对材料破坏过程的认识更加深刻^[5.1.5.2]。

工程材料内部往往存在着大量弥散分布的细观缺陷,在外部因素(如外力、温度)等作用下损伤将逐渐演化。材料的破坏往往就是由于损伤的集中化发展,最终形成宏观的缺陷如裂纹。在宏观裂纹形成以后,细观的损伤仍在不断演化,并推动宏观缺陷的发展,而宏观裂纹在扩展过程中所扫过的附近区域,也往往是细观损伤

高度集中的区域。如图 5.1 所示,损伤力学的主要研究对象是材料中分布的细观缺陷的发展演化,而断裂力学则忽略在宏观裂纹形成以前的损伤阶段,也忽略了宏观裂纹周围的损伤,只考虑理想的宏观缺陷。显然,如果将损伤力学和断裂力学结合起来,可以更好地反映材料破坏的实际过程。本章意在将损伤力学和断裂力学联结起来,介绍考虑损伤的断裂力学,称为破坏力学(failure mechanics)。这个名词已逐渐为固体力学家所接受。

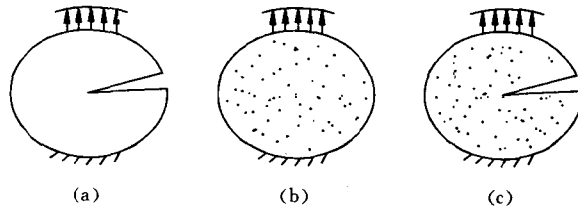
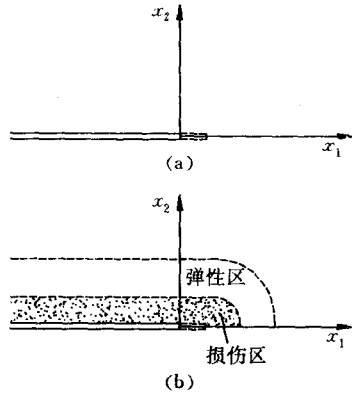


图 5.1 断裂力学、损伤力学和破坏力学

研究结构的破坏,重要的目标之一是建立材料破坏的判断准则。在早期的弹塑性力学阶段,有四个熟悉的用最大主应力或用应力分量的组合表示的强度理论。在线弹性断裂力学中,有应力强度因子准则如 $K_I = K_{Ic}$ 以及与之相等效的能量释放率准则 $G = G_c$, 其中 K_I 和 G 代表了外界的推动力,而 K_{Ic} 和 G_c 代表了材料抵抗断裂的能力。在弹塑性断裂力学中有 J 积分准则、裂纹张开位移准则等判断裂纹的扩展。而现代破坏力学的研究目的是寻求在考虑损伤的情况下控制裂纹扩展的参数,进而建立具有更一般意义的考虑材料损伤的破坏准则。

在引入损伤以后,对裂纹的分析将变得更为复杂,同时也期待它能解释经典断裂力学难以解释的一些问题。在经典的断裂力学中,裂纹的扩展主要表现为裂纹面的向前运动,如图 5.2(a)所示。而在引入损伤以后,裂纹两侧将出现一个连续损伤的区域,裂纹的

扩展是连续损伤的集中化发展引起的,在损伤区的外面才是弹性区,裂纹扩展的过程就是裂纹尖端附近材料逐渐损伤引起的损伤区(以及塑性区)移动的过程,如图 5.2(b)所示。另一个例子是弹塑性材料中动态裂纹的扩展问题(图 5.3),此时裂纹尖端温度升高,但由经典的断裂力学求得的温度升高比实验结果高出 30~40%,在引入损伤考虑损伤耗散后,得到的结果则接近于实验值^[5.3]。



(a) 不考虑损伤 (b) 考虑损伤

图 5.2 裂纹的扩展

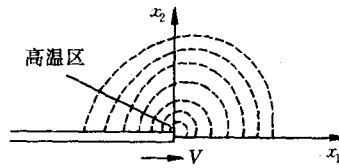


图 5.3 动态裂纹的扩展

将具有位移间断的断裂力学与非均匀的含分布缺陷的损伤力学结合起来,研究物体的破坏过程,旨在赋予实际中同时存在的奇异性缺陷与分布缺陷以更接近实际的力学描述。逐步将损伤力学与断裂力学两者联结起来,赋给破坏力学以更为合理而真切的内容。这一方面的研究刚刚开始不久。本章介绍的内容是这一方面迄今为止的一个总结和尝试。

5.2 考虑损伤的 Dugdale 模型

通过对软钢薄板裂纹前缘塑性区的实验观察, Dugdale^[5.4] 建立了一个简单的计算模型, 用于分析裂纹尖端弹塑性变形场的某些特点。设一大板中含有一个中心穿透直裂纹, 板的长度和宽度远远大于裂纹的长度, 板的厚度远小于裂纹的长度, 而且设塑性区的长度 d_0 比板厚大得多, 则塑性区可模拟为裂纹前端高度为 t 的屈服狭带。假设材料为理想弹塑性材料, 则屈服带内 $\sigma_{yy} = \sigma_s$, 其中 σ_s 是屈服应力。Dugdale 假设在塑性区范围内, 屈服的影响相当于增加了裂纹长度, 如图 5.4 所示。

Dugdale 还假设塑性区的长度可以利用屈服带顶端应力不存在奇异性的条件来求得。根据顶端处总的应力强度因子 $\Sigma K_I = 0$, 得到塑性区的长度

$$d_0 = a_0 \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma_\infty}{4 \sigma_s} \right) - 1 \right] \quad (5.2.1)$$

上述计算模型称为 Dugdale 模型。1977 年, Janson^[5.5] 将损伤引入 Dugdale 模型, 假设在裂纹尖端的窄塑性区内发生连续损伤, 而在塑性区外面损伤很小, 不影响材料的应力应变关系。Janson 所研究的基本问题如图 5.5 所示。

采用 Broberg 定义的损伤变量

$$\omega = \ln(A/A_{\text{eff}}) \quad (5.2.2)$$

式中 A 为横截面的总面积, A_{eff} 为有效承载面积, 则 Cauchy 应力 σ 和净应力 s 分别定义为

$$\sigma = P/A \quad (5.2.3)$$

$$s = P/A_{\text{eff}} \quad (5.2.4)$$

对于小损伤的情况, Broberg 的损伤定义与 Kachanov 定义的损伤 $\omega = (A - A_{\text{eff}})/A$ 相接近。由方程(5.2.2)~(5.2.4), 得

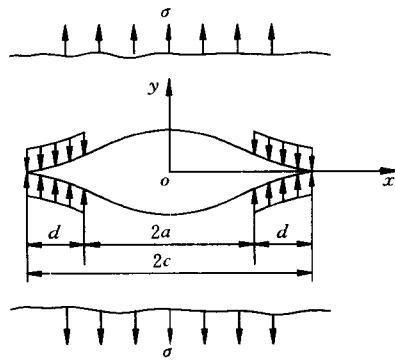


图 5.4 Dugdale 模型

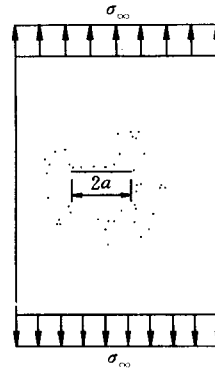


图 5.5 无限大平板中的 I 型裂纹

$$\sigma = s \exp(-\omega) \quad (5.2.5)$$

采用以下两种形式的本构方程:

$$(1) \quad s = \begin{cases} \epsilon/B_0 & \text{当 } \epsilon < \epsilon_y \\ s_y & \text{当 } \epsilon \geq \epsilon_y \end{cases} \quad (5.2.6)$$

式中 B_0 为材料常数, ϵ_y 为屈服应变, s_y 为净屈服应力。上式表明材料承受的净应力是有限的(图 5.6)。

$$(2) \quad s = \epsilon/B_0 \quad (5.2.7)$$

即材料能承受的净应力是无限的。

损伤的演化方程也假设以下两种形式:

(1) 假设损伤和应变之间成幂次关系,即

$$\omega = K\epsilon^{\nu_0} \quad (5.2.8)$$

如图 5.6 所示,式中 K 和 ν_0 为材料常数。此式适用于所有的

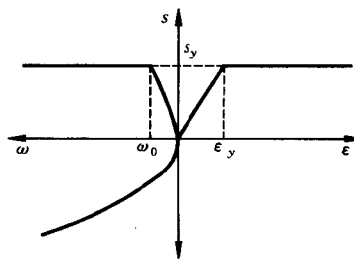


图 5.6 损伤材料的本构关系和损伤演化曲线^[5.5]

ϵ 。当 $s < s_y$ 时,由式(5.2.6)和(5.2.8)得到

$$\omega = C_0 s^{\nu_0} \quad (s < s_y) \quad (5.2.9)$$

式中常数 $C_0 = KB_0^{\nu_0}$, 该式的关系曲线如图 5.6 所示。

(2) 假设损伤和净应力之间成幂次关系,即

$$\omega = C_0 s^{\nu_0} \quad (5.2.10)$$

下面利用 Dugdale 模型的方法计算裂纹尖端塑性损伤区的尺寸。首先,采用(1)中的本构关系和损伤演化方程。将平面应力条件下的弹塑性裂纹问题等效化如图 5.7 所示的线弹性断裂力学问题,裂纹的长度为 $2c = 2a + 2d$, 远场应力为 σ_∞ , 在 $a \leq |x| \leq c$ 的范围内受到单轴拉伸应力作用。在塑性区内的净应力为 $s = s_y$, Cauchy 应力 σ 为

$$\sigma = s_y \exp(-\omega) \quad (5.2.11)$$

这里只考虑由于损伤引起的面积减小而不考虑由于变形引起的面积减小。

根据 Hult 和 McClintock^[5.6] 的理论分析,在理想弹塑性材料中 III 型裂纹尖端的剪切应变具有 $\gamma \propto \xi^{-1}$ 的奇异性, Rooke 和 Bradshaw^[5.7] 的实验结果表明 I 型裂纹尖端应变也具有 ξ^{-1} 的奇异性,其中 ξ 是塑性区内一点到裂纹尖端的距离(图 5.7)。这里虽然考虑了损伤,仍假设应变具有 ξ^{-1} 的奇异性,因此损伤的奇异性为 $\omega \propto \xi^{-\nu_0}$ 。塑性区内损伤的分布表示为

$$\omega = \omega_0 (\xi/d)^{-\nu_0} \quad (5.2.12)$$

式中 ω_0 为 $\xi = b$ 处的损伤值,由式(5.2.9)得到

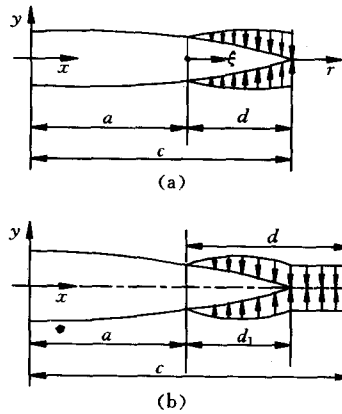


图 5.7 考虑损伤的 Dugdale 模型的裂纹前方应力分布^[5.6]

$$\omega_0 = C_0 s_y^{\nu_0} \quad (5.2.13)$$

于是塑性区内的应力分布为

$$\sigma = s_y \exp[-\omega_0 (\xi/d)^{-\nu_0}] \quad (5.2.14)$$

塑性区以外的应力由两部分引起,一是远场载荷 σ_∞ 引起的应力,二是裂纹面上载荷引起的应力,分别表示为

$$\sigma_1(r) = \sigma_\infty \sqrt{c/2r} \quad (5.2.15)$$

$$\sigma_2(r) = -s_y (2/\pi) \sqrt{c/2r} \int_a^c \exp[-\omega_0 (\xi/d)^{-\nu_0}] \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}} \quad (5.2.16)$$

塑性区以外的总应力为

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \sigma_1(r) + \sigma_2(r) \\ &= \sigma_\infty \sqrt{\frac{c}{2r}} \left\{ 1 - \frac{2s_y}{\pi\sigma_\infty} \int_a^c \exp\left[-\omega_0 \left(\frac{\xi}{d}\right)^{-\nu_0}\right] \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}} \right\} \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

于是,利用在 $r = 0$ 处应力有限的条件,即

$$\sigma(0) = s_y \exp(-\omega_0)$$

得到塑性区尺寸应满足的条件为

$$\int_a^c \exp\left[-\omega_0 \left(\frac{t-a}{c-a}\right)^{-\nu_0}\right] \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}} = \frac{\pi\sigma_\infty}{2s_y} \quad (5.2.18)$$

下面采用(2)中的本构关系和损伤演化方程,即假设材料不发生屈服。在不考虑损伤的线弹性情况下,裂纹尖端附近的应力和应变都有 $\xi^{-1/2}$ 的奇异性。假设损伤不影响应变的奇异性,即应变和净应力的奇异性仍为 $\xi^{-1/2}$, 而损伤的奇异性为 $\omega \propto \xi^{-\nu_0/2}$ 。

将塑性区的长度记作 ξ^* 。在屈服带内的应力分布为

$$\sigma = s^* \left(\frac{\xi}{\xi^*}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\omega^* \left(\frac{\xi}{\xi^*}\right)^{-\frac{\nu_0}{2}}\right] \quad (5.2.19)$$

式中 ω^* 和 s^* 分别为屈服带顶端的损伤和净应力,分别为

$$\omega^* = \frac{1}{\nu_0}, \quad s^* = (C_0 \nu_0)^{-\frac{1}{\nu_0}} \quad (5.2.20)$$

由屈服带顶端应力有限,可类似于(5.2.18)得到屈服带长度应满足的条件为

$$\int_a^c \left(\frac{\xi}{\xi^*}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\omega^* \left(\frac{\xi}{\xi^*}\right)^{-\frac{\nu_0}{2}}\right] \frac{dt}{\sqrt{c^2-t^2}} = \frac{\pi\sigma_{\infty}}{2s^*} \quad (5.2.21)$$

樊学军,余寿文^[5.3]修正了上述的 Janson-Hult 损伤模型。认为裂纹前方窄条塑性区内靠近裂尖的材料发生了损伤,而远离裂纹的材料虽然也处于塑性屈服状态,但是没有损伤,如图 5.7(b)所示。

设对数损伤 ω 在塑性区内的分布为

$$\omega = \begin{cases} F(\xi/d) & \text{当 } 0 \leq \xi \leq d_1 \\ 0 & \text{当 } d_1 \leq \xi \leq d \end{cases} \quad (5.2.22)$$

记

$$g = \frac{\xi}{d} = \frac{x-a}{c-a} \quad (5.2.23)$$

则根据 Dugdale 模型的概念,有

$$\sigma_{\infty} = \frac{2s_y}{\pi} \left\{ \int_0^{d_1/d} \exp[-F(g)] \frac{dg}{\left[(1-g)\left(1+\frac{2a}{d}+g\right)\right]^{1/2}} + \int_{d_1/d}^1 \frac{dg}{\left[(1-g)\left(1+\frac{2a}{d}+g\right)\right]^{1/2}} \right\} \quad (5.2.24)$$

在小范围屈服条件下, $a/d \gg 1$, 并设 $F(\xi/d)$ 的一种简化形式为

$$F(\xi/d) = C_1 d/\xi - C_2 \quad (5.2.25)$$

式中 C_1 和 C_2 为常数。从而得到塑性区的长度

$$d = \frac{\pi}{2} \left(\frac{K}{s_y} \right)^2 \frac{1}{C_0^2} \quad (5.2.26)$$

其中

$$C_0 = \int_0^{C_1/C_2} \frac{\exp\left(-\frac{C_1}{g} + C_2\right)}{(1-g)^{1/2}} dg + 2\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)^{1/2} \quad (5.2.27)$$

损伤区与塑性区的长度之比 d_1/d 即等于 C_1/C_2 。式(5.2.27)中取 $B = 0$ 时,即退化为 Janson-Hult 模型。

5.3 突然损伤模型下的动力稳态裂纹扩展

本书介绍由 Bui 和 Ehrlacher 等人^[5.8,5.9]所提出的一种最简单的损伤模型——突然损伤模型。利用该模型 Bui 等人研究了弹性和弹塑性材料中裂纹的动力稳态扩展问题,得到了小范围损伤条件下Ⅲ型裂纹损伤区的精确解,以及Ⅰ型裂纹的有限元数值解。

Bui 等人^[5.8,5.9]所采用的方法称为断裂的局部方法,它集中讨论损伤区的形状、尺寸及其力学场。确定损伤过程区的数学问题是很复杂的,因为它是一个耦合损伤的应力应变场问题,所以必须研究高应变的损伤过程区内的材料性质,这是一个不定边界的非线性问题,过程区的边界随着加载过程而变动,并要与其外包的宏观力学场相匹配。

5.3.1 突然损伤模型

在简单加载条件下,金属材料的准静态应力应变关系往往包括三个阶段,即弹性段(E)、塑性段(P)和破坏段(F),如图 5.8(a)中实线所示。在破坏阶段,随着变形的增大,应力很快下降,这可以由多种因素造成,如颈缩、剪切带失稳等。而塑性区的范围取决于

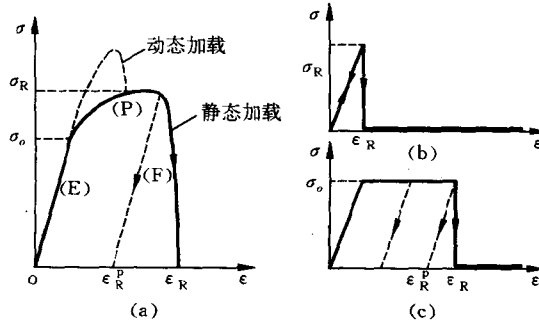
材料和加载。在高应变率 ($\epsilon > 10^4 \text{s}^{-1}$) 的情况下, 应力应变曲线变得较尖, 塑性阶段不明显, 如图 5.8(a) 中虚线所示。

Bui 等^[5.8] 首先将材料的应力应变关系简化为图 5.8(b) 所示的弹性突然损伤模型, 发生损伤断裂的条件可表示为

$$f(I_1, J_2) = 0 \quad (5.3.1)$$

式中 $I_1 = \sigma_{ii}, J_2 = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)$ 分别为应力张量的两个不变量。按照 Kachanov 对损伤的定义, 在突然损伤模型中, 损伤变量 D 只取两个值: 在线弹性阶段 $D = 0$, 在应力达到损伤断裂条件后, $D = 1$ 。当外加应变超过临界应变 ϵ_R 后, 应力突然消失。

另一种较为复杂的模型是弹塑性突然损伤模型, 如图 5.8(c) 所示。



(a) 静态和动态应力应变曲线
 (b) 弹性突然损伤模型
 (c) 弹塑性突然损伤模型

图 5.8

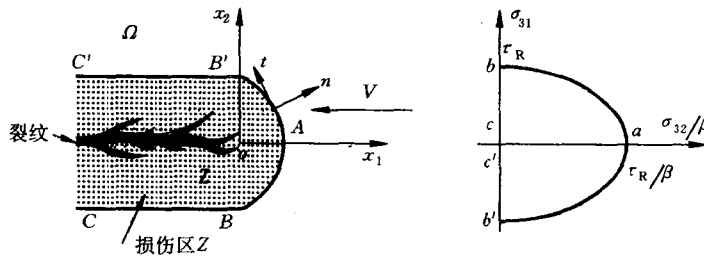
5.3.2 稳态裂纹扩展的条件分析

考虑如图 5.9 所示的损伤区 Z , 它以速度 V 平行于 ox_1 轴稳

态扩展。损伤区边界 ∂Z 由两条直线 BC 和 $B'C'$ 及一条曲线 $\widehat{BAB'}$ 组成, 在 BC 和 $B'C'$ 上材料处于弹性卸载, 而 $\widehat{BAB'}$ 是损伤区前缘。在尾区 Z 内应力张量是零张量, 因此应力张量在 ∂Z 两侧是不连续的。在运动的坐标系中, 无损区的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0 \\ f(I_1, J_2) < 0 \end{aligned} \right\} \text{在 } BC \text{ 和 } B'C' \text{ 上} \quad (5.3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nn} = \sigma_{nt} = \sigma_{nz} = 0 \\ f(I_1, J_2) = 0 \end{aligned} \right\} \text{在 } \widehat{BAB'} \text{ 上} \quad (5.3.3)$$



(a) 稳态运动的损伤区 (b) 复平面 $\tau = \sigma_{32}/\beta + i\sigma_{31}$

图 5.9

在二维问题中, 损伤断裂准则有比较简单的形式, 在 III 型加载情况下应力分量只有 σ_{31} 和 σ_{32} , 因此 $f \leq 0$ 的条件等价于

$$\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 \leq \tau_R^2 \quad (\sigma_{3n} = 0) \quad (5.3.4)$$

在 I 型和 II 型问题中则可以写为

$$\sigma_u^2 \leq \sigma_R^2 \quad (\sigma_{nn} = \sigma_{nt} = 0) \quad (5.3.5)$$

式中 n, t 分别表示 ∂Z 边界的法向与切向坐标, τ_R, σ_R 为材料的破坏剪应力与正应力。

在裂纹的稳态扩展过程中, 损伤区的边界是未知的, 因此这是一个未知边界问题, 并且边界 ∂Z 上的第二个条件类似于塑性力

学中的屈服条件,所以这又是一个非线性问题。在边界 ∂Z 上还应满足质量流动的守恒条件

$$\rho u = \rho_0 u_0 = m(s) \quad (s \in \partial Z) \quad (5.3.6)$$

式中 ρ 和 ρ_0 分别是无损区 Ω 和损伤区 Z 上的质量密度, u 和 u_0 是材料质点相对于 ∂Z 的法向运动速度,在直线边界 BC 和 $B'C'$ 上,质量流量 $m(s) = 0$, 而沿着 $\widehat{BAB'}$, $m(s) > 0$, 因此根据热力学第二定律,在边界 ∂Z 两侧的熵跃 $[s] \geq 0$, 这意味着材料从 Ω 到达 Z 的过程中,含有能量耗散发生。

5.3.3 小范围损伤区的动力扩展

从数学上,小范围损伤可以理解为在无穷远处的应力和应变场仍为 K 场,即损伤的范围足够小不影响远场的应力和应变分布。对于 III 型问题,在固定坐标系 $oxyz$ 中,位移 w 应满足的波动方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3.7)$$

式中 $c = (\mu/\rho)^{1/2}$ 为剪切波的速度, μ 为剪切模量,对于稳态扩展问题,引入动坐标系 $ox_1x_2x_3$ 以及复变量

$$z = x_1 + i\beta x_2 \quad (5.3.8)$$

$$\tau = \frac{1}{\beta} \sigma_{32} + i\sigma_{31} \quad (5.3.9)$$

式中 $\beta = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\sigma_{32} = \mu w_{,2}$, $\sigma_{31} = \mu w_{,1}$ 。方程(5.3.7)等价于

$$\frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (5.3.10)$$

因此只要找到满足方程(5.3.10)和所有边界条件的解析函数 $\tau(z)$ 或 $z(\tau)$, 则该损伤扩展问题即得到解决。

这里边界条件包括(5.3.4)中的损伤准则、 ∂Z 上的应力自由条件以及小范围损伤假设下的远场应力条件

$$\tau \approx \frac{K}{\beta \sqrt{2\pi z}}, \quad z \rightarrow \infty \quad (5.3.11)$$

式中 K 为类似于动态应力强度因子 K_I 的外载参数。

为了求解上述问题,进行两次映射变换。首先为了满足损伤准则(5.3.4),将损伤区 Z 映射到 τ 平面上的一个半椭圆的内部,其长、短轴半径分别为 τ_R/β 和 τ_R 。损伤区前缘 $\widehat{BAB'}$ 映射到椭圆弧 bab' , 而直线 BC 和 $B'C'$ 映射到 bc 和 bc' 。其中关键的一步是把应力自由边界条件 $\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0$ 表达为复变形式。在弧 bab' 上, $\tau = \frac{1}{\beta}\tau_R e^{i\theta} + i\tau_R \sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。如果记 BAB' 上的弧单元为 ds , 则利用自由边界的条件,有 $dz = (\sin\theta + i\beta\cos\theta)ds$, 于是在 bab' 上的应力自由条件表达为

$$\operatorname{Im} \left\{ (\tau^2 - \gamma^2) \frac{dz}{d\tau} \right\} = 0 \quad (\text{在 } bab' \text{ 上}) \quad (5.3.12)$$

式中 $\gamma = (1 - \beta^2)\tau^2/\beta^2$ 。在直线 BC 和 $B'C'$ 上,由于 $\sigma_{32} = 0$, $d\tau$ 是纯虚数,而 dz 和 $(\tau^2 - \gamma^2)$ 是实数,所以在 bc 和 bc' 上的应力自由条件可以表示为

$$\operatorname{Re} \left\{ (\tau^2 - \gamma^2) \frac{dz}{d\tau} \right\} = 0 \quad (\text{在 } bc \text{ 和 } bc' \text{ 上}) \quad (5.3.13)$$

然后引入辅助平面 ω , 通过映射变换 $\tau \rightarrow \omega(\tau)$ 把椭圆 (τ_R/β , τ_R) 的内部区域映射到单位圆 $|\omega| = 1$ 。这样,方程(5.3.11), (5.3.12)和(5.3.13)的解为

$$z'(\tau) = \frac{C}{(\tau^2 - \gamma^2)} \left[\frac{1}{\omega(\tau)} + \omega(\tau) \right] \left[\frac{1}{\omega^2(\tau)} - \omega^2(\gamma) \right] \\ \times [\omega^2(\tau) - \omega^2(\gamma)] \quad (5.3.14)$$

式中 C 为实常数

$$C = - \frac{K^2 \gamma^2 [\omega'(0)]^2}{\pi \omega^2(\gamma) \beta^2} \quad (5.3.15)$$

方程(5.3.14)即完全解决了上述非线性问题。而上面的映射函数为

$$\left. \begin{aligned}
 \omega(\tau) &= \frac{2\tau}{(\alpha+1)\tau_R} \exp[Q(\tau)], \quad (\alpha = 1/\beta) \\
 Q(\tau) &= \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{1}{k} \frac{\gamma^{2k} \tau_R^{-4k}}{[(\alpha+1)^{2k} + (\alpha-1)^{2k}]} \\
 &\quad \times P_{2k}(\tau) (\alpha+1)^{-2k} \\
 P_{2k}(\tau) &= [\tau + \sqrt{\tau^2 - \gamma^2}]^{2k} + [\tau - \sqrt{\tau^2 - \gamma^2}]^{2k}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.3.16)$$

式中 $P_{2k}(\tau)$ 是 $2k$ 次多项式。

描述损伤区的一个重要参数是其厚度 $2h$, 由式(5.3.14)得到

$$\begin{aligned}
 2h = K^2 \frac{[\omega'(0)]^2}{\beta^3} &\left\{ 1 - \omega^2(\gamma) + \frac{1}{\gamma^2 [\omega'(0)]^2} \right. \\
 &\left. - \frac{1}{\omega^2(\gamma)} - \frac{\omega'''(0)}{2[\omega'(0)]^3} \right\} \quad (5.3.17)
 \end{aligned}$$

图 5.10 给出了 h 与 V/C 的两条关系曲线, 分别对应于常数

K/τ_R (即应力准则) 和 $K^2/(\beta\tau_R^2)$ (即能量准则)。注意到当 $V=0$ 时, 厚度最大 $h=h_0=K^2/(2\tau_R^2)$, 当速度升高到 $V=C$ 时, h 减小到 $h=\frac{1}{2}h_0$ 。图 5.11 给出了几种速度取值下损伤区前缘的形状。

在准静态情况下, $\beta=1$, $\omega(\tau)=\tau/\tau_R$, 此时问题的解简化为

$$z'(\tau) = -\frac{K^2}{\pi\tau^3} - \frac{K^2}{\pi\tau_R^2} \frac{1}{\tau} \quad (5.3.18)$$

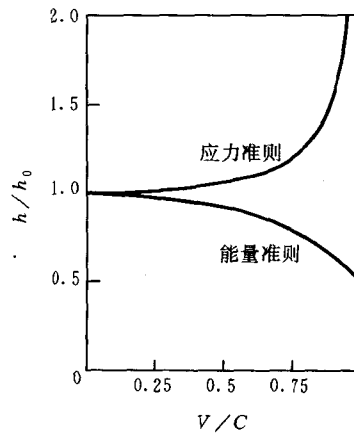


图 5.10 损伤区厚度 h 随速度 V 的变化曲线^[5,8]
应力准则 K/τ_R 能量准则 $K^2/(\beta\tau_R^2)$

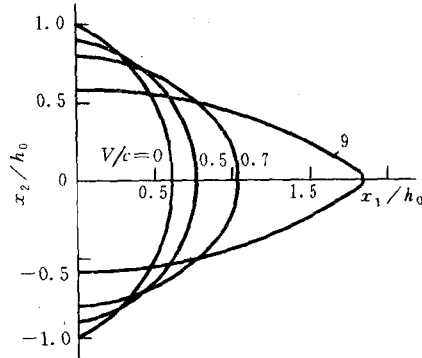


图 5.11 损伤区前缘的形状^[5.8]

或

$$z(\tau) = \frac{K^2}{2\pi\tau^2} - \frac{K^2}{\pi\tau_R^2} \log \frac{\tau}{\tau_R} + C_1 \quad (5.3.19)$$

式中 C_1 是积分实常数, 可由条件 $x_1(B) = 0$ 确定。这样损伤区的前缘 $\widehat{BAB'}$ 为一尖点摆线, 方程为

$$\left. \begin{aligned} x_1(\theta) &= \frac{K^2}{2\pi\tau_R^2} (\cos 2\theta + 1) \\ x_2(\theta) &= -\frac{K^2}{2\pi\tau_R^2} (\sin 2\theta + \theta) \end{aligned} \right\} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.3.20)$$

由方程(5.3.17)或(5.3.18)可知, 对于理想弹性即 $\tau_R \rightarrow \infty$ 的情况, 损伤区的厚度 $h = 0$ 。

对于 $R = \tau_R/\tau_0$ 的几个取值, 准静态加载情况下沿 ox_1 轴的应力 σ_{32} 分布如图 5.12 所示, 其中 τ_0 是材料的屈服应力, 图中虚线为不考虑损伤的线弹性断裂力学的结果。

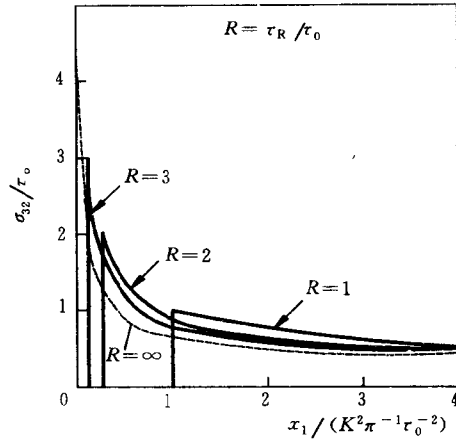


图 5.12 损伤区前缘应力 σ_{32} 分布^[5,8]

5.3.4 弹性材料中Ⅲ型裂纹的准静态损伤

考虑理想弹塑性材料中的一个条状损伤区,厚度为 $2h$, 损伤前缘是由式(5.3.20)表示的尖点摆线。现在假设损伤区是不扩展的,承受Ⅲ型准静态单调加载,材料表现为弹塑性突然损伤,屈服应力为 τ_0 , 断裂应变为 ϵ_R , 问题是如何求解弹性区、塑性区的范围以及极限载荷 K_R 。

沿着损伤区前缘 $\widehat{BAB'}$, 应力满足屈服条件,应变 ϵ 为常数,当 $K < K_R$ 时 $|\epsilon| < \epsilon_R$, 当 $K = K_R$ 时 $\epsilon = \epsilon_R$ 。Bui 等人^[5,8]给出了这个问题的解析解。在弹性区内的应力和位移分布为

$$z(\tau) = \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2} \left(\frac{\tau_0^2}{\tau^2} + 1 \right) - \frac{2h}{\pi} \log \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right) \quad (5.3.21)$$

$$w = \frac{1}{\mu} \text{Im} \left\{ \frac{K^2}{\pi} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} \right) - \frac{2h}{\pi} (\tau - \tau_0) \right\} \quad (5.3.22)$$

式中 τ 的取值范围为 $|\tau| \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。

弹、塑性区的交界线为卷曲摆线, 方程为

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2}(\cos 2\varphi + 1) \\ M_2 &= \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2}\sin 2\varphi + \frac{2h}{\pi}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.3.23)$$

式中 $\varphi = -\theta$ 。

在塑性区内, 特征线是一族直线, 其旋转中心在 ω 点, 坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_\omega &= -\frac{2h}{\pi}\cos^2\varphi \\ y_\omega &= \frac{2h}{\pi}\varphi - \frac{h}{\pi}\sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.3.24)$$

塑性区和损伤区的交界线为尖点摆线(图 5.13):

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{h}{\pi}(\cos 2\varphi + 1) \\ N_2 &= \frac{h}{\pi}(\sin 2\varphi + 2\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (5.3.25)$$

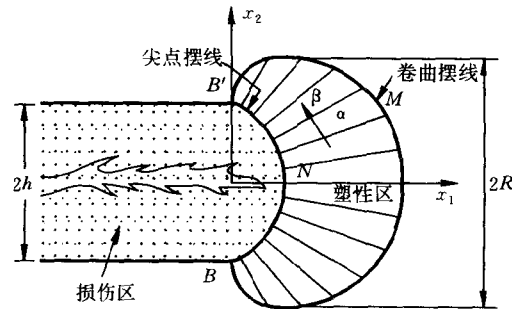


图 5.13 静止裂纹的弹性、塑性和损伤区^[5.8]

特征线上的应力为 $\sigma_{3\beta} = \tau_0, \sigma_{3\alpha} = 0$ 。沿 β 线 $\widehat{BAB'}$ 的应变 $\epsilon_{3\beta}$ 为

常数

$$\epsilon_{3\beta} = \frac{1}{8h\tau_0\mu}(K^2 + 2h\tau_0^2) \quad (5.3.26)$$

沿 α 线的位移场是常数

$$w = w(M) = \left(\frac{K^2}{\tau_0} + 2h\tau_0 \right) \frac{\sin\varphi}{\mu\pi} \quad (5.3.27)$$

方程(5.3.21)~(5.3.27)给出的解的适用条件是 $\epsilon_0 \leq \frac{\tau_0}{2\mu} \leq \epsilon_{3\beta} \leq \epsilon_R$, 即

$$K_0^2 \leq K^2 \leq 2h\tau_0(4\mu\epsilon_R - \tau_0) \quad (5.3.28)$$

式中 $K_0 = \tau_0 \sqrt{2h}$ 。因此极限载荷参数 K_R 与材料参数及损伤区的厚度有关, 表示为

$$K_R = \sqrt{2h\tau_0(4\mu\epsilon_R - \tau_0)} \quad (5.3.29)$$

或

$$K_R^2 = 2h\tau_0^2 \left(2 \frac{\epsilon_R}{\epsilon_0} - 1 \right) \quad (5.3.30)$$

有趣的是, 可以由此类推得到 I 型载荷下的极限承载能力为

$$K_R^2 = h\sigma_0^2 \left(2 \frac{\epsilon_R}{\epsilon_0} - 1 \right) \quad (5.3.31)$$

式中 $\epsilon_0 = \sigma_0/E$ 。

从物理上讲, 由于极限载荷 K_R 总是有限的, 因此当 $\epsilon_R \rightarrow \infty$ 时 $h \rightarrow 0$, 这种极限情况对应于理想塑性材料中的裂纹问题, 塑性区的形状退化为圆。对于一般的材料, $\epsilon_R \neq \infty, h \neq 0$, 塑性区的高度 R 为

$$R = \frac{K^2}{2\pi\tau_0^2} \sin \left\{ \arccos \left(- \frac{2h\tau_0^2}{K^2} \right) \right\} + \frac{h}{\pi} \arccos \left(- \frac{2\pi\tau_0^2}{K^2} \right) \quad (5.3.32)$$

塑性耗散率为

$$D_p = \frac{2K\dot{K}}{\mu\tau_0} \left(\frac{K^2}{2\pi\tau_0} - \frac{h\tau_0}{\pi} \right) \quad (5.3.33)$$

5.3.5 准静态阻力曲线的近似分析

上面给出了Ⅲ型静止损伤区问题的解,对于运动的损伤区,弹性、塑性和损伤区的形状如图 5.14 所示,此时的结果有所不同。但是根据式(5.3.33)以及量纲分析,塑性耗散率仍有如下的形式

$$D_p = AK^3\dot{K} - BK\dot{K}h \quad (5.3.34)$$

式中 A 和 B 为材料常数。

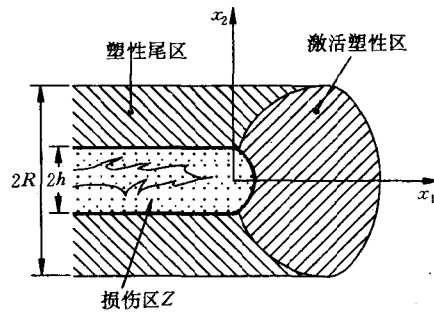


图 5.14 弹塑性损伤介质中的弹性、塑性和损伤区^[5-8]

根据能量守恒方程

$$\int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i dV + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV = \int_{\partial\Omega} T_i \dot{u}_i ds \quad (5.3.35)$$

可以导出损伤区扩展的能量释放率为

$$\mathcal{G} = D_p/V + \int_{BB'} \left[W(\epsilon^e) + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \right] n_1 ds \quad (5.3.36)$$

因此能量释放率 \mathcal{G} 包含两部分,即塑性耗散部分和材料的断裂能量率 G 。对于 I 型准静态问题,断裂能量率 G 正比于损伤区厚度

h , 为

$$G = \int_{BB'} \left[W(\epsilon^e) + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \right] n_1 ds = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_0^2 h \quad (5.3.37)$$

而能量释放率 \mathcal{G} 正比于 K^2 , 为

$$\mathcal{G} = K^2 \frac{1-\nu^2}{E} \quad (5.3.38)$$

将式(5.3.34), (5.3.37)和(5.3.38)代入(5.3.36), 得

$$\frac{(1-\nu^2)}{E} K^2 = (AK^3 - BK^2 h) \frac{dK}{da} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma_0^2 h \quad (5.3.39)$$

由于塑性耗散恒为正, $D_p > 0$, 因此有

$$K^2 \geq Bh/A \quad (5.3.40)$$

以下给出阻力曲线的两种近似形式。

(1) 撕裂模量模型

假设 $B/A = h\sigma_0^2$, 则式(5.3.39)变为

$$(K^2 - h\sigma_0^2) \left[\frac{2(1-\nu^2)}{EA} - \frac{dK^2}{da} \right] = 0 \quad (5.3.41)$$

由于第一个括号恒为正, 则得到

$$\frac{dK^2}{da} = \frac{2(1-\nu^2)}{EA} \quad (K^2 > h\sigma_0^2) \quad (5.3.42)$$

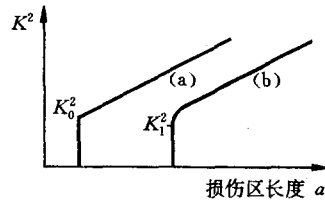
即当 $K_0^2 > Bh/A$ 以后, K^2 与 $\Delta a = a - a_0$ 成线性关系(图 5.15)。

(2) 一般模型

一种更合适的形式是假设损伤区的厚度在扩展过程中逐渐增大, 例如可以假设如下的形式

$$h = \alpha + \beta K^2 \quad (5.3.43)$$

此时方程(5.3.39)变为



(a) 撕裂模量模型 (b) 一般模型

图 5.15 阻力曲线

$$\frac{dK^2}{da} = 2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \left(\frac{1-\beta\sigma_0^2}{A-B\beta} \right) \left(\frac{K^2 - K_2^2}{K^2 - K_1^2} \right) \quad (5.3.44)$$

式中

$$K_1^2 = \frac{B\alpha}{A-B\beta}, \quad K_2^2 = \frac{\sigma_0^2\alpha}{1-\beta\sigma_0^2} \quad (5.3.45)$$

由式(5.3.45)可导出 $a - K^2$ 面内的 R 曲线:

$$a - a_0 = \frac{E(A-B\beta)}{2(1-\nu^2)(1-\beta\sigma_0^2)} \left[K^2 - K_1^2 + (K_2^2 - K_1^2)^2 \log \frac{K_2^2 - K^2}{K_2^2 - K_1^2} \right] \quad (5.3.46)$$

如图 5.14 所示, a 随着外载的增大单调增大。应该指出, $K_2 \leq K_1$ 即 $\sigma_0^2 \leq B/A$, 否则会存在一个载荷 K^2 使得 $Bh/A < K^2 < \sigma_0^2 h$, 此时塑性功为正值, $dK/da > 0, \dot{a} > 0$, 平衡方程(5.3.39)无法满足。

5.3.6 主要结论

本节介绍了 Bui 等人发展的弹性和弹塑性突然损伤模型以及由于完全损伤区扩展引起的断裂问题。对于 III 型动力稳态扩展问题, 通过保角变换得到封闭的解析解, 这对于理解更为一般的断裂问题(如 I 型问题)是很有帮助的。在该模型中, 一个重要的参数是损伤区的厚度 $2h$, 它取决于断裂应力、扩展速度和加载条件, 它是结构的特征, 而不是材料的特性。损伤区具有宏观尺寸的非零厚度, 随着速度的增大而变薄。该模型的另一个重要特点是应力和应变场不具有奇异性。

在弹塑性突然损伤模型中, 假设材料能承受的极限应变是 ϵ_R , 当 $\epsilon_R \rightarrow \infty$ 时 $h \rightarrow 0$, 而对于一般材料 $\epsilon_R \neq \infty, h > 0$, 因此断裂能量率 G 恒为正。

Bui 等^[5.9]还用有限元方法分析了损伤区的 I 型动力扩展问题,此时解的一些定性性质与 III 型裂纹相类似,这里不做详细介绍。

5.4 脆性材料裂纹尖端的损伤局部化

本节利用有剩余强度的弹脆性突然损伤模型,分析脆性材料裂纹尖端的另一种破坏形式——损伤局部化,即从宏观角度来看,完全损伤只集中发生在裂纹前端一个宽度很小的带内,称为损伤局部化带。这样,脆性材料的裂纹尖端场就由于损伤程度的不同而形成三个三层嵌套结构,从外到里依次是无损区、连续损伤区和损伤局部化带^[5.10, 5.11]。

5.4.1 裂纹尖端损伤的定性分析

如上节所述,Bui 和 Ehrlacher 等^[5.8, 5.9]利用弹脆性突然损伤模型分析了 III 型和 I 型稳态扩展裂纹尖端的损伤行为,得到了稳态扩展裂纹的损伤解,认为裂纹尖端附近及尾区内有一个宽度为 $2h$ 的完全损伤区,损伤前缘的形状近似为摆线。该损伤区完全丧失了承受应力的能力,并随着裂纹的扩展向前延伸,因此,这个解相当于在无限大体中存在一个如图 5.16 所示的构形,即一个具有宽度为 $2h$ 的半无限长的缺口,缺口前缘具有特定的形状,不妨表示为

$$R = R(\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.4.1)$$

且在远场应力 σ_∞ 的作用下,在缺口前缘 BAB' 上的每一点处的切向正应力 σ_{tt} 均相同,同时达到损伤断裂准则

$$\sigma_{tt} = \sigma_c \quad (5.4.2)$$

式中 σ_c 为拉伸断裂应力。只有这样,随着缺口向前的不断扩展,损伤前缘才有可能保持相同的形状,在缺口后面留下一个有限高度

为 $2h$ 的完全损伤区。

但是,这种构形只是一种理想的破坏形式,其扩展方式是不稳定的。因为缺口的实际形状最初一般不会具有如此理想的形状,也不可能一直保持下去,在缺口周围的切向正应力 σ_{θ} 必然存在或大或小的波动,因此各点不会同时达到损伤断裂准则。不妨假设在 $\theta = 0$ 处的损伤首先达到了破坏临界值而发生了局部断裂,如图 5.17 所示,则在新的断面 MNM' 上的法向正应力(也就是在原缺口前缘 BAB' 上的切向正应力)将迅速下降,引起应力的重新分布,在 BAB' 面上其它各处的应力将随之卸载而不是继续发生损伤。在 MNM' 的尖端产生新的应力集中区,于是缺口沿着 MNM' 的尖端方向向前扩展。因此,要形成一个稳态扩展的、具有宏观尺寸宽度的完全损伤区的可能性是很小的。根据微裂纹的细观损伤力学理论^[5.11],在宏观裂纹尖端周围存在一个微裂纹稳定扩展的过程区,即发生连续的损伤,但是损伤到一定程度,将在某一方向上发生损伤的局部化,裂纹将沿着损伤局部化的方向向前扩展,而不会在整个裂纹尖端周围都发生损伤的局部化和应变软化现象。实验中发现裂纹扩展的表面是凹凸不平的,这是由于实际材料的不均匀性、颗粒分布等的影响造成的裂纹扩展方向的暂时偏转,而不是损伤造成的具有宏观尺寸宽度的完全破坏的材料层。

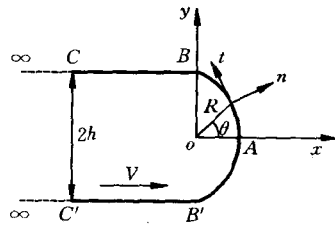


图 5.16 稳态扩展的缺口模型

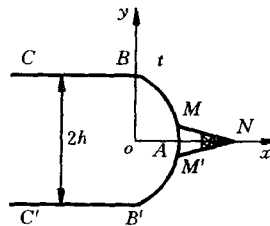


图 5.17 缺口的损伤局部化

因此, Bui 等人的结果^[5.8, 5.9]是在材料理想均匀和特定的理想构形情况下的一种可能的但不稳定的解, 并未反映裂纹扩展的真实情况, 按照其结果, 裂纹扩展所需的能量比较高, 实际的裂纹往往按本节分析的低能障的形式扩展。

5.4.2 无限大平板中的中心穿透裂纹的解

脆性材料的应力应变关系大致可分为四段, 即线弹性段、非线性损伤段、应力跌落段和应变软化段^[5.11]。将非线性损伤段引入裂纹尖端的屏蔽效应分析, 可以证明在损伤饱和区内的应力仍为 K 场分布^[5.13, 5.11]。本节主要考虑裂纹尖端更小范围内的损伤断裂行为, 此时材料的应力跌落和应变软化起着关键作用。因此, 为了简单起见, 将应力应变关系简化为如图 5.18 所示的三段, 从初始加载到应力跌落前的应力应变关系用一条直线代替, 它可以是考虑了损伤的影响的, 其单拉应力应变关系表示为

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_c = \sigma_c/E \\ f(\epsilon) & (\epsilon \geq \epsilon_c) \end{cases} \quad (5.4.3)$$

式中 E 为 OB 段的弹性模量, σ_c 和 ϵ_c 分别为材料能承受的最大拉伸应力及其对应的应变, $f(\epsilon)$ 是一个描述材料软化过程的单调降函数, 可以由实验确定, 也可以从细观力学导出。

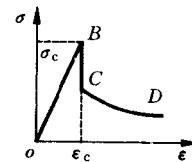


图 5.18 有剩余强度的弹脆性突然损伤模型

Dugdale-Barenblatt 模型^[5.4, 5.12] (以下简称 D-B 模型) 最初是在分析韧性材料的 I 型断裂问题时提出的, 认为裂纹顶端附近的塑性区是位于裂纹延长线上长度为 l 、宏观宽度为零的直线段, 这是由于塑性变形的局部化造成的。此后, D-B 模型被推广应用于复合型裂纹、界面裂纹、疲劳、蠕变、损伤、应变强化等多种情形的延性断裂问题。

设脆性损伤材料的无限大板中含有一长为 $2a$ 的直线穿透裂

纹,受到垂直于裂纹的均匀拉伸应力 σ_∞ 作用,建立如图 5.19 所示的坐标系 oxy 。根据上面的分析,在裂纹的尖端将发生损伤局部化,沿裂纹延长线一定长度上的材料发生了应力跌落,但仍有一定的剩余强度,因此脆性材料含中心裂纹板的断裂问题和韧性材料的断裂有相似之处。只是在脆性材料的断裂中没有明显的塑性变形,总体变形很小,裂纹前方不会出现明显的局部颈缩。这里借助于 D-B 模型的思想,来阐明脆性材料中裂纹尖端损伤的一些特点。

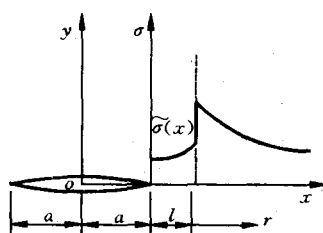


图 5.19 无限大平板的中心裂纹尖端损伤局部化

设在裂纹尖端发生应力跌落的零宽度的损伤局部化带的长度为 l (图 5.19),它与远场的应力强度因子有关,且 $l \ll a$ 。认为损伤的范围很小,不影响远场的应力分布。在远场拉伸应力 σ_∞ 作用下的应力强度因子为

$$K_\infty = \sigma_\infty \sqrt{\pi c} \quad (5.4.4)$$

式中 $c = l + a$ 。在损伤局部化带延长线上的 y 方向的正应力分布为

$$\sigma_1(r) = \frac{K_\infty}{\sqrt{2\pi r}} = \sigma_\infty \sqrt{\frac{c}{2r}} \quad (5.4.5)$$

式中 $r = x - c$ 为裂纹前端一点到损伤局部化带顶端的距离。设在损伤局部化带 $a \leq x \leq c$ 内的应力分布为

$$\sigma = \tilde{\sigma}(x) \quad (a \leq x \leq c) \quad (5.4.6)$$

对于含中心裂纹的无限大板,在裂纹面 $x = \pm \xi$ 处作用一对对称的垂直于裂纹面的集中力 $\tilde{\sigma}(\xi)d\xi$ 时,在裂纹尖端附近 y 方向的正应力分布为

$$d\sigma_2 = - \frac{2\tilde{\sigma}(\xi)d\xi}{\pi} \frac{x \sqrt{c^2 - \xi^2}}{(x^2 - \xi^2) \sqrt{x^2 - c^2}} \quad (5.4.7)$$

由于假设损伤局部化带的尺寸比裂纹小得多,即 $l \ll a$, 而且只考虑距离损伤带很近的点的应力,有 $r \ll c$, 于是将 $x = c + r$ 代入上式并略去小量得到

$$d\sigma_2 = - \frac{2 \sqrt{c} \tilde{\sigma}(\xi) d\xi}{\pi \sqrt{2r(c^2 - \xi^2)}} \quad (5.4.8)$$

对应的应力强度因子为

$$dK = - \frac{2 \sqrt{c} \tilde{\sigma}(\xi) d\xi}{\sqrt{\pi(c^2 - \xi^2)}} \quad (5.4.9)$$

在 $\xi = a$ 和 $\xi = c$ 之间对式(5.4.8)积分,得到损伤带内的分布拉应力在裂尖附近产生的应力为

$$\sigma_2 = \int_a^c - \frac{2 \sqrt{c} \tilde{\sigma}(\xi) d\xi}{\pi \sqrt{2r(c^2 - \xi^2)}} \quad (5.4.10)$$

于是,由式(5.4.5)和(5.4.10)得到在损伤局部化带前端附近总的应力分布为

$$\sigma(r) = \sigma_1(r) + \sigma_2(r) = \sigma_\infty \sqrt{\frac{c}{2r}} \left[1 - \int_a^c \frac{2\tilde{\sigma}(\xi) d\xi}{\pi \sigma_\infty \sqrt{c^2 - \xi^2}} \right] \quad (5.4.11)$$

在考虑损伤后,在裂尖 $r = x - c = 0$ 附近的应力应该是有限的,因此有

$$\int_a^c \frac{2\tilde{\sigma}(\xi) d\xi}{\pi \sigma_\infty \sqrt{c^2 - \xi^2}} = 1 \quad (5.4.12)$$

如果函数 $\tilde{\sigma}(x)$ 的形式已经确定,则损伤带尺寸就可由上式计算得到。但是在 D-B 模型中, $\tilde{\sigma}(x)$ 的具体形式一般无法直接确定,而必须结合更准确的分析得到。下面通过两种简化计算损伤带的近似尺寸。

(1) 在具有剩余强度的弹脆性突然损伤模型(图 5.18)中,假设材料发生应力跌落后的剩余强度保持常数,即单向拉伸时的应

力应变曲线如图 5.20 所示。此时,在损伤局部化带内,有

$$\tilde{\sigma}(x) = \sigma_0 = \text{const.} \quad (a \leq x \leq c) \quad (5.4.13)$$

代入式(5.4.12)并积分,得到损伤局部化带的长度为

$$l = c \left[1 - \cos \left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2\sigma_0} \right) \right] \quad (5.4.14)$$

(2) 假设损伤带内的应力分布为如下的线性分布

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{x-a}{c-a} \sigma_0 \quad (a \leq x \leq c) \quad (5.4.15)$$

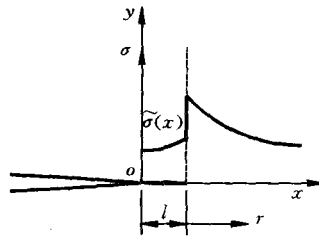


图 5.20 剩余强度为常数的
弹脆性突然损伤模型

代入式(5.4.12),知损伤局部化带的尺寸可由下式得到

$$\frac{a}{c} = \cos \left[\sqrt{\left(\frac{c}{a} \right)^2 - 1} - \left(\frac{c}{a} - 1 \right) \frac{\pi \sigma_\infty}{2\sigma_0} \right] \quad (5.4.16)$$

5.4.3 无限大平板中的半无限长裂纹的解

对于如图 5.21 所示的半无限长裂纹,将坐标系 oxy 建立在损伤局部化带的尖端,远场所加的应力强度因子为 K_∞ 。在 $x = \xi (\xi < 0)$ 处作用一对集中力 $\tilde{\sigma}(\xi)d\xi$ 时,产生的应力强度因子为

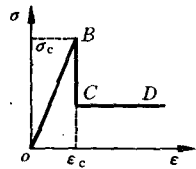


图 5.21 无限大
板中半无限长裂
纹的尖端损伤局
部化

$$dK_D = - \frac{2\tilde{\sigma}(\xi)}{\sqrt{2\pi(-\xi)}} d\xi \quad (5.4.17)$$

所以,损伤带内的分布力产生的应力强度因子为

$$dK_D = \int_{-l}^0 - \frac{2\tilde{\sigma}(\xi)}{\sqrt{2\pi(-\xi)}} d\xi \quad (5.4.18)$$

由于 $x = 0$ 附近的应力有限, 应有

$$K_{\infty} + K_D = 0 \quad (5.4.19)$$

即

$$\int_0^l \frac{2\tilde{\sigma}(-\xi)}{\sqrt{2\pi\xi}} d\xi = K_{\infty} \quad (5.4.20)$$

(1) 假设损伤局部化带内的应力为式(5.4.13)的常数分布时, 得到损伤局部化带的长度为

$$l = 2\pi \left(\frac{K_{\infty}}{4\sigma_0} \right)^2 \quad (5.4.21)$$

(2) 假设损伤带内的应力为如下的线性分布时

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{l+x}{l} \sigma_0 \quad (-l \leq x \leq 0) \quad (5.4.22)$$

得到损伤局部化带的长度为

$$l = 2\pi \left(\frac{3K_{\infty}}{8\sigma_0} \right)^2 \quad (5.4.23)$$

如果在某一特定的应力强度因子 K_{∞} 下, 无限大板中的半无限长裂纹发生了稳态扩展, 则有一个宽度为零、长度为 l 的发生了应力跌落的损伤局部化带沿着裂纹的方向稳态运动。

5.4.4 两种破坏模式能量耗散的简单比较

以单位厚度的无限大板中的半无限长 I 型裂纹为例。按照 Bui 和 Ehrlacher^[5.9] 给出的破坏模式, 裂纹准静态扩展的能量耗散率主要包括两部分——形成断裂面所需的表面能和材料损伤耗散的能量, 即

$$D_1 = 2d_s V + 2hd_m V \quad (5.4.24)$$

式中 d_s 为单位面积的表面能, d_m 为单位体积的材料从无损伤状态到完全损伤状态所需耗散的能量, V 为裂纹扩展的速度。 d_s 和 d_m 均为材料常数, 后者与单拉应力应变曲线下的面积相关。在 Bui 等

的模型中 h 为一有限值,而在本文的损伤局部化带的破坏模式下,从宏观角度看, h 接近于 0,此时的能量耗散率为

$$D_2 = 2d_s V \quad (5.4.25)$$

显然,损伤局部化带的裂纹扩展方式所需要的能量要比 Bui 等得到的具有宏观尺寸宽度的完全损伤区域的扩展方式要低得多,因此,这种方式是更可能发生的和合理的,也是在实验和生活中经常可以观察到的。

5.4.5 脆性材料裂纹尖端损伤场的结构

在上面的分析中,忽略了脆性材料的连续损伤。在考虑连续损伤的应力应变关系下,裂纹尖端可根据损伤的程度不同分为三个区域,即无损区①、连续损伤区②和损伤局部化带③,分别对应于应力应变关系的线弹性段、非线性强化段和应变软化段。对于未经过扩展的静止裂纹,裂纹尖端的损伤分区如图 5.22 所示,而对于扩展后的裂纹,存在一个连续损伤的尾区,如图 5.23 所示。

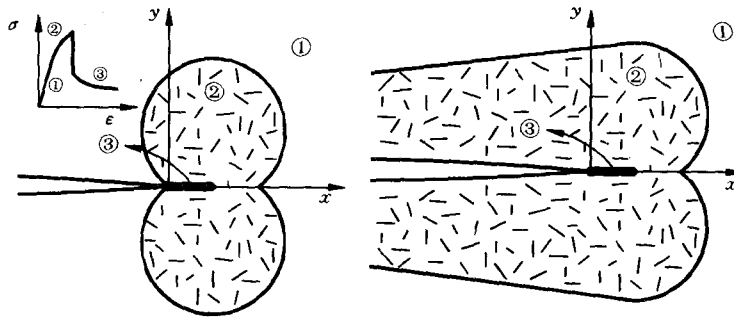


图 5.22 静止裂纹尖端的损伤分区结构

图 5.23 扩展裂纹尖端的损伤分区结构

在连续损伤区内的应力应变场和损伤场可以用屏蔽效应的分

析方法^[5.11, 5.13]得到。而损伤局部化带的尺寸仍可由与 D-B 模型类似的方法得到,只需将其中的 K_∞ 换为考虑屏蔽效应的 K_{tip} 。例如,式(5.4.20)可表示为如下的形式

$$\int_0^l \frac{2\tilde{\sigma}(-\xi)}{\sqrt{2\pi\xi}} d\xi = K_{tip} \quad (5.4.26)$$

对于扩展裂纹, K_{tip} 依赖于包括尾区在内的整个连续损伤区域。上式表明损伤局部化带的长度和屏蔽比 K_{tip}/K_∞ 直接相关。

5.5 小损伤的裂纹尖端场和温度分布

本节介绍一种分析小损伤条件下裂纹尖端场的解耦方法^[5.14]。Lemaitre 和 Chaboche^[5.15]的实验结果表明,对于大多数金属和合金,临界损伤因子 ω_c 一般都小于 0.25,因此假设从开始损伤 ($\omega = 0$) 到损伤断裂 ($\omega = \omega_c$) 的整个过程中都有 $\omega \ll 1$, 即把损伤变量 ω 看作是小参数,裂纹尖端场可以用渐近展开的方法研究。这就是本节小损伤假设的含义。

引入有效应力的概念,利用渐近展开的方法,可以证明在小损伤条件下应变场和有效应力场不受损伤的影响,作为零阶近似解,用解耦的方法求解在小损伤条件下的裂纹尖端场是合理的。由于大多数金属和合金的临界损伤因子都是很小的,这种解耦方法有比较广泛的应用范围。

5.5.1 塑性损伤平面问题的控制方程

Lemaitre 和 Chaboche^[5.15]详细研究了韧性材料中损伤的演化问题,近似认为,在比例加载条件下损伤的演化和塑性应变 ϵ_p 成线性关系

$$\omega = \omega_c \left\langle \frac{\xi \epsilon_p - \epsilon_D}{\epsilon_R - \epsilon_D} \right\rangle \quad (5.5.1)$$

$$\xi = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right)^2 \quad (5.5.2)$$

式中角括号的定义为当 $x > 0$ 时, $\langle x \rangle = x$; 当 $x \leq 0$ 时, $\langle x \rangle = 0$ 。
 ω_c 是临界损伤因子, ν 是泊松比, σ_H 是静水应力, σ_e 是 Mises 等效应力, ϵ_R 是单向拉伸情况下破坏时的临界塑性应变, ϵ_D 是损伤的塑性应变门槛值。

在极坐标系 (r, θ) 中, 损伤场的演化方程可由式(5.5.1)表示为

$$\omega(r, \theta) = \langle \omega_0 \epsilon_p(r, \theta) - \omega_1 \rangle \quad (5.5.3)$$

式中记

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \xi \omega_c / (\epsilon_R - \epsilon_D) \\ \omega_1 &= \epsilon_D \omega_c / (\epsilon_R - \epsilon_D) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

在文献[5.15, 5.16]中, Lemaitre 和 Chaboche 给出了室温条件下 7 种金属(或合金)材料的 ϵ_D, ϵ_R 和 ω_c 的取值(表 5.1)。可以看出, 除了 99.9% 的铜以外, ω_c 都小于 0.25。在塑性损伤的阶段, 弹性应变相对于塑性应变很小而可以忽略, 即近似认为 $\epsilon = \epsilon_p$ 。

表 5.1

材料	ϵ_D	ϵ_R	ω_c
99.9% 铜	0.35	1.04	0.85
AU4G1 合金	0.03	0.25	0.23
E24 钢	0.50	0.88	0.17
XC38 钢	0.02	0.56	0.22
30CD4 钢	0.02	0.37	0.24
2024 合金	0.03	0.25	0.23
INCO718 合金	0.02	0.29	0.24

忽略体积力, 则平面问题的平衡方程和位移协调方程分别表示为

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (5.5.5)$$

$$\epsilon_{ij,ij} - \epsilon_{ii,jj} = 0 \quad (5.5.6)$$

弹塑性材料中考虑损伤影响的应力应变关系为

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (5.5.7)$$

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{(1+\nu)}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5.5.8)$$

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij} / (1-\omega)^n \quad (5.5.9)$$

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}, s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5.5.10)$$

式中 ϵ_{ij}^e 和 ϵ_{ij}^p 是弹性应变和塑性应变, s_{ij} 是偏应力, B 和 n 是材料常数。根据应变等效假设,有效应力定义为

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} / (1-\omega) \quad (5.5.11)$$

为简单起见,假设式(5.5.7)和(5.5.8)中的弹性项不受损伤的影响。利用有效应力 σ_{ij}^* 的概念以及小损伤 $\omega \ll 1$ 的假设,可以将上述方程表示为如下的零阶近似公式

$$\sigma_{ij}^* \simeq \sigma_{ij} \quad (5.5.12)$$

$$\sigma_{ij,j}^* = 0 \quad (5.5.13)$$

$$\epsilon_{ij,ij} - \epsilon_{ii,jj} = 0 \quad (5.5.14)$$

$$\epsilon_{ij} \simeq \epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} B \sigma_e^{*(n-1)} s_{ij}^* \quad (5.5.15)$$

对于无损伤的幂硬化材料,控制方程表示如下:

$$\sigma_{ij,j}^0 = 0 \quad (5.5.16)$$

$$\epsilon_{ij,ij}^0 - \epsilon_{ii,jj}^0 = 0 \quad (5.5.17)$$

$$\epsilon_{ij}^0 \simeq \epsilon_{ij}^{0p} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{0(n-1)} s_{ij}^0 \quad (5.5.18)$$

式中上指标“0”表示无损材料的场。对比上述两组有损和无损的控制方程,容易得到如下的对应关系

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 \quad (5.5.19)$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0 \quad (5.5.20)$$

表明在小损伤假设下,考虑损伤的应变场和有效应力场与不考虑损伤的应变场和应力场是相同的。

将式(5.5.20)代入(5.5.1),得到损伤场

$$\omega(r, \theta) = \langle \omega_0 \epsilon_p^0(r, \theta) - \omega_1 \rangle \quad (5.5.21)$$

进而得到应力场如下

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega) \sigma_{ij}^* \simeq (1 - \omega) \sigma_{ij}^0 \quad (5.5.22)$$

于是,应力、应变和损伤场的全耦合计算过程简化为以下三个解耦的迭代步骤:

- (1) 利用关系(5.5.19)和(5.5.20),由无损材料的应变场和应力场得到损伤材料的应变场和有效应力场;
- (2) 由损伤演化方程(5.5.1)计算损伤场;
- (3) 包含损伤的应力场由式(5.5.22)表示。

5.5.2 小损伤条件下Ⅲ型静止裂纹的尖端场

余寿文等已经给出了在无损的幂硬化材料中裂纹^[5.17]和刚性平面夹杂^[5.18]的近尖端场。利用上面介绍的解耦方法,得到在小损伤条件下Ⅲ型静止裂纹的尖端应变场为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_r &= \gamma \sin(\theta - \chi), \gamma_\theta = \gamma \cos(\theta - \chi) \\ \gamma(r, \theta) &= (B/r)^{n/(n+1)} \tilde{\gamma}(\theta) \\ \tilde{\gamma}(\theta) &= \{ [(1 + n^{-2}) + (1 - n^{-2}) \cos 2\chi] / 2 \}^{\frac{n}{2(n+1)}} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.23)$$

应力场

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= \tau \sin(\theta - \chi), \tau_\theta = \tau \cos(\theta - \chi) \\ \tau(r, \theta) &= [1 - \omega(r, \theta)]^n \tau_0 (\gamma/\gamma_0)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.24)$$

损伤场

$$\omega(r, \theta) = \left\langle \omega_0 \gamma_0 \left(\frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\gamma}(\theta) - \omega_1 \right\rangle \quad (5.5.25)$$

式中 J 为无损裂纹尖端的 J 积分,

$$\begin{aligned} \cos 2\chi &= \cos\theta[1 - \beta^2 \sin^2\theta]^{1/2} - \beta \sin^2\theta \\ \beta &= \frac{n-1}{n+1}, \quad B = \gamma_0^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n} \right) \\ I_n &= \frac{(n+1)\pi}{2n} \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

由式(5.5.25)可知,在小损伤条件下幂硬化材料裂纹尖端的塑性损伤场 $\omega(r, \theta)$ 具有 $r^{-n/(n+1)}$ 的奇异性,但是当 $\omega \geq \omega_c$, 材料发生损伤断裂,裂纹扩展 Δa 。对于理想塑性材料 ($n \rightarrow \infty$), 损伤的奇异性为 r^{-1} 。

损伤区前缘由 $\omega = \omega_c$ 的条件确定。利用式(5.5.25)并考虑到式(5.5.3)和(5.5.4), 得到在 III 型加载情况下损伤区前缘的条件 (取 $\varepsilon_D = 0$) 为

$$\gamma(r, \theta) = \frac{3\varepsilon_R}{2(1+2\nu)} \quad (5.5.27)$$

损伤区前缘的无量纲形状 $\hat{r}(\theta)$ 表示为

$$\hat{r}(\theta) = r(\theta) \left/ \left\{ \left(\frac{2(1+\nu)\gamma_0}{3\varepsilon_R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{2nJ}{(n+1)\tau_0\gamma_0} \right] \right\} \right. = E(n, \theta) \quad (5.5.28)$$

$$E(n, \theta) = \left[\frac{1}{2}(1+n^{-2}) + \frac{1}{2}(1-n^{-2})\cos 2\chi \right]^{1/2} \quad (5.5.29)$$

$\hat{r}(\theta)$ 的形状是一个圆, 取决于硬化指数 n 。式(5.5.23)~(5.5.29)即为 III 型裂纹问题的解。对于刚性平面夹杂问题, 损伤场的解可以利用镜面反射的特点得到^[5.18]。

5.5.3 小损伤条件下 I 型静止裂纹的尖端场

对于无损介质, 裂纹尖端有着名的 HRR 奇异场^[5.17]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^0(r, \theta) &= \left(\frac{J}{BI_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}^0(\theta, n) \\ \varepsilon_{ij}^0(r, \theta) &= \left(\frac{J}{BI_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}^0(\theta, n) \end{aligned} \right\} \quad (5.5.30)$$

式中 $\tilde{\sigma}_{ij}^0(\theta, n)$ 和 $\tilde{\varepsilon}_{ij}^0(\theta, n)$ 为角分布函数。利用对应关系式 (5.5.20), 有

$$\sigma_H^* = \sigma_H^0 = \frac{3}{2}(\sigma_{rr}^0 + \sigma_{\theta\theta}^0) \quad (5.5.31)$$

$$\sigma_e^* = \sigma_e^0 = \left[\frac{3}{4}(\sigma_{rr}^0 + \sigma_{\theta\theta}^0)^2 + 3\sigma_{r\theta}^{02} \right]^{1/2} \quad (5.5.32)$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^0 = \alpha\sigma_e^{0n} \quad (5.5.33)$$

于是, 损伤场为

$$\omega(r, \theta) = \omega_c \left\langle \frac{\xi\varepsilon_p - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \right\rangle \quad (5.5.34)$$

$$\xi = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu)(\sigma_H^0/\sigma_e^0)^2 \quad (5.5.35)$$

5.5.4 III型裂纹尖端区域的温度分布

利用前面得到的损伤介质 III 型裂纹尖端场的解析解, 可以在解耦的热弹塑性框架下得到塑性耗散引起的裂纹尖端温度场的解析表达。余寿文和 Gross^[5.18] 曾经导出了无损介质裂纹尖端的温度分布。这两个结果的差别表明, 裂纹尖端损伤对温度的影响是明显的。

和塑性耗散相比, 弹性耗散很小而可以忽略。由于塑性耗散引起的单位体积的热生成为

$$\dot{Q} \simeq \dot{Q}_p = \tau\dot{\gamma} \quad (5.5.36)$$

利用前面得到的 III 型裂纹尖端场, 得到

$$\dot{Q} = (1 - \omega)\tau_0(\gamma/\gamma_0)^{1/n}\dot{\gamma} = \eta_\omega(r, \theta)\dot{Q}_p^0(r, \theta, t) \quad (5.5.37)$$

$$\dot{Q}_p^0 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{J}{I_n r} \right) \tilde{\gamma}^{(n+1)/n}(\theta) \quad (5.5.38)$$

$$\eta_\omega(r, \theta) = 1 - \omega = \left\{ 1 - \left\langle \omega_0 \left[\gamma_0 \left(\frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n r} \right)^{\frac{n+1}{n}} \tilde{\gamma}(\theta) \right] - \omega_1 \right\rangle \right\} \quad (5.5.39)$$

式中 \dot{Q}_p^0 是无损介质中塑性耗散引起的热生成, $\eta_\omega(r, \theta)$ 是考虑损伤效应的修正函数。对于无损情况, $\eta_\omega(r, \theta) = 1$ 。对于理想塑性介质 ($n \rightarrow \infty$), 式(5.5.37)简化为

$$\dot{Q}_p = \frac{2J}{\pi} \left\{ 1 - \left(\frac{2J\omega_0 \cos\theta}{\pi\tau_0 r} - \omega_1 \right) \right\} \frac{\cos\theta}{r} \quad (5.5.40)$$

引入以下的无量纲变量^[5.15]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^* &= kt_0/L_0, k = \kappa/(c\rho) \\ a_0 &= \dot{Q}_0/(L_0^2 T_0 c\rho), r^* = r/L_0, T^* = T/T_0 \\ t^* &= t/t_0, P_\omega(r^*, \varphi, t^*) = \eta_\omega(r^*, \omega) \dot{Q}_p^0(r^*, \varphi, t)/L_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5.41)$$

式中 κ 为热传导系数, t 为时间, ρ 为质量密度, c 为比热。则对于图 5.24 所示的裂纹问题, 热传导方程可以写成如下的无量纲形式

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \varepsilon^{*2} \nabla^{*2} T^* = P_\omega(r^*, \chi, t) \frac{t_0}{c\rho T_0} \quad (5.5.42)$$

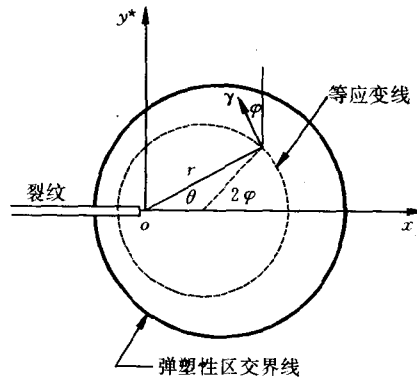


图 5.24 I 型裂纹尖端的等应变线

利用无限大平板中, 点热源的基本解和叠加原理, 可以计算裂纹尖端的温度场

$$T^*(r^*, \theta, t^*) = \int_0^{t^*} \left\{ \int_0^{R_p(\psi)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} P_\omega(\sigma, \psi, t^*) a_0 \exp \left\{ -\frac{1}{4\epsilon^{*2}(t^* - \tau)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[r^{*2} + \sigma^2 - 2r^* \sigma \cos(\theta - \psi) \right] \right\} \sigma d\sigma d\psi \right\} \frac{d\tau}{4\pi\epsilon^{*2}(t^* - \tau)} \quad (5.5.43)$$

裂纹前方延长线上的温度分布为

$$T^*(r^*, 0, t^*) = \int_0^{t^*} \left\{ \int_0^{R_p(\psi)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} P_\omega(\sigma, \psi, t^*) a_0 \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{r^{*2} + \sigma^2 - 2r^* \sigma \cos\psi}{4\epsilon^{*2}(t^* - \tau)} \right] \sigma d\sigma d\psi \right\} \frac{d\tau}{4\pi\epsilon^{*2}(t^* - \tau)} \quad (5.5.44)$$

裂纹前方延长线上的温度分布计算结果如图 5.25 所示, 图中实线为考虑损伤的式(5.5.43)的结果, 虚线是无损的结果。\$T_{\max}^0\$ 和 \$T_{\max}^*\$ 分别是无损和有损情况下的最高温度, \$T_{\max}^*\$ 明显低于 \$T_{\max}^0\$。这可能是实验观察的结果比无损情况下的理论观测低的原因之一。例如, 在 PMMA 材料中, 当裂纹扩展速度为 \$200\text{ms}^{-1}\$ 时,

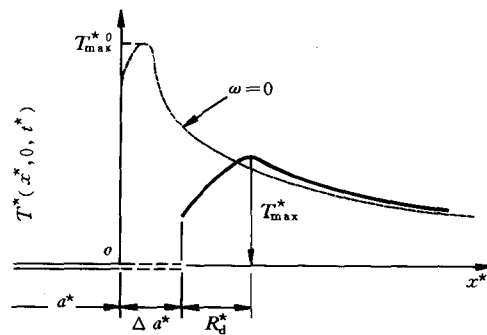


图 5.25 ■型裂纹尖端的温升

无损情况下的理论分析指出裂纹尖端温升 ΔT 为 900K~1200K, 但实验测量的 ΔT 仅为 335K~455K。

将式(5.5.39)和(5.5.41)代入(5.5.44),得到

$$T_{\max}^* = T^*(a_1^*, 0, t^*) = \int_0^{t^*} \int_0^{R_p(\psi)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (1 - \omega) \frac{Q_p^0(r^*, \psi, t^*)}{L_0} a_0 \times \exp\left[-\frac{a_1^{*2} + \sigma^2 - 2a_1^* \sigma \cos \psi}{4\epsilon^{*2}(t^* - \tau)}\right] \sigma d\sigma d\psi \frac{d\tau}{4\pi\epsilon^{*2}(t^* - \tau)} \quad (5.5.45)$$

式中 $a_1^* = (\Delta a + R_d)/L_0 = \Delta a^* + R_d^*$, R_d 是损伤区的尺寸。

如果令 $\omega = 0$, 则得到无损情况下的 T_{\max}^{*0} 为

$$T_{\max}^{*0} = T^*(r_1^*, 0, t^*) \quad (5.5.46)$$

容易证明 $T_{\max}^*/T_{\max}^{*0} < 1$, 这可以解释无损的理论预测结果与实验结果的差别。另外也可以从能量的角度解释这一现象, 总的能量耗散可以分解为

$$\dot{D} = \dot{D}_d + \dot{D}_p \quad (5.5.47)$$

式中 \dot{D}_d 和 \dot{D}_p 分别为损伤部分和塑性部分的能量耗散。如果忽略损伤耗散, 则 $\dot{D} = \dot{D}_p$, 我们假设所有的塑性耗散都转化为热。但事实上, $\dot{D}_d > \dot{D}_p$, 所以无损情况下的理论分析高估了裂纹尖端的温升。考虑损伤耗散时裂纹尖端温度升高这一问题的定量计算结果, 可参见余和樊^[5.3]的文章。该文利用修正的 Janson-Hult 损伤模型, 求得了损伤耗散 D_d 。对于不同的参数, 求得的 T_{\max}^* 大约是无损情况下 T_{\max}^{*0} 值的 30%~50%。说明计入裂纹尖端区域的损伤耗散是必要的。

5.6 蠕变裂纹的扩展和损伤

5.6.1 蠕变裂纹扩展的基本概念

一些材料在外加载荷作用下除了瞬时弹性和塑性变形外, 还

会发生一种随时间而变化的变形,称为蠕变。对于大多数金属材料,当环境温度高于 30% 的熔点温度时就会产生明显的蠕变变形。事实上,在核电站、燃气轮机、发动机以及一些动力和航天装置中,有许多构件的工作温度都已超过了材料的蠕变门槛值温度。不少构件的失效就是由于蠕变情况下裂纹扩展造成的,因此研究蠕变裂纹的扩展和损伤问题具有重要的实际意义。

与金属材料相比,高分子聚合物的蠕变门槛值温度则低得多。在室温下,就可以观察到聚合物的蠕变变形。从微观力学角度看,多晶体钢和高分子聚合物的蠕变破坏过程有很大差别,但是两者的宏观裂纹扩展特性却是相近的。

蠕变变形通常分为三个阶段,如图 5.26 所示。单拉情况下材料总的应变为

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (5.6.1)$$

$$\epsilon_0 = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (5.6.2)$$

式中 ϵ_0 为与时间无关的应变, ϵ_e 和 ϵ_p 分别为弹性和塑性应变, ϵ_1, ϵ_2 和 ϵ_3 分别为第一、第二和第三阶段的蠕变应变。在第一阶段,蠕变应变率呈下降趋势,在第二阶段,蠕变应变率保持恒定,而在第三阶段,应变率呈增大的趋势,直到材料的最终断裂。

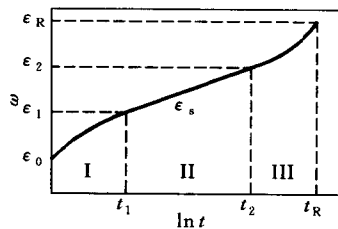


图 5.26 蠕变变形的三个阶段

蠕变裂纹扩展过程中有两种竞争的机制,其一是由于蠕变变形造成了裂纹尖端钝化,从而松弛了裂纹尖端的应力场,延缓了裂纹扩展;其二是由于蠕变变形造成了裂纹尖端的微裂纹和微孔洞的损伤演化,随着这些微缺陷的汇合又能促进裂纹的扩展。蠕变裂纹扩展的速率取决于这两种竞争机制的综合效果。

研究蠕变裂纹扩展问题的目的就是要寻求控制裂纹扩展的主

导参数,建立在各种不同条件下裂纹扩展速率 \dot{a} 和相关参数如应力强度因子 K 、裂纹尖端张开位移率 $\dot{\delta}$ 、净截面应力 σ_{net} 、与路径无关的积分 C^* , C_k^* , J 等的关系。预测蠕变构件的寿命。通常有两类研究方法,即断裂力学的方法和损伤力学的方法^[5.19~5.21]。

在损伤力学方法中,认为当损伤因子 ω 达到临界损伤因子 ω_c 时材料发生断裂,不再承受应力,因此损伤力学的方法自动包含了裂纹扩展。一个裂纹只要其尖端的损伤 $\omega = \omega_c$, 则开始扩展。另一个重要的概念是小范围损伤,如果裂纹尖端的损伤过程区足够小,则蠕变裂纹问题可以看作是一个边界层问题,损伤方程的远端边界条件为非线性粘性的 HRR 场。只有在小范围损伤的条件下,断裂力学中的一些载荷参数如 C^* , K_I , σ_{net} , G , σ_{ref} , J 等才有效。如果损伤区的范围比较大而影响了奇异场的分布, K_I , C^* 等参数与裂纹的扩展没有简单的对应关系,因此在超出小范围损伤的条件后,利用断裂力学的方法解决蠕变裂纹扩展问题比较困难。

问题是小范围损伤的假设究竟有多大的适用范围,即 C^* 作为裂纹扩展主导参数的条件是什么,当超出这一范围后问题应如何解决。Hayhurst 等人^[5.23]提出用含损伤的有限元方法求解蠕变裂纹扩展问题,然而这种方法计算工作量很大,对每一个构型都需要重新计算。另一方面,连续损伤力学的方程不能包含腐蚀效应的影响,往往会过高地估计构件的寿命。而在断裂力学的方法中,裂纹的扩展速度往往是从实验中直接测量的,已经包含了腐蚀等因素的影响,因此在处理蠕变裂纹问题时还是有很多优点的,而且理论分析的结果表明,小范围损伤的适用范围是比较广的。

5.6.2 蠕变裂纹扩展的主导参数

在蠕变裂纹的尖端附近区域,由于微孔洞的形核和胀大而形成一个小范围损伤过程区。如果损伤过程区与应力应变场的奇异项控制区相比很小,则这个区域对远场分布的影响就很弱。在这种小范围

损伤的条件下,裂纹尖端扩展就可以通过一个时间相关的载荷参数来控制。应力强度因子 K_I 、裂纹尖端张开位移 δ 以及与路径无关的能量积分 J, C^* 等都被推荐为蠕变裂纹扩展的主导参数。对于蠕变材料中的静止裂纹, Riedel 等^[5.20~5.22, 5.24]对裂纹扩展的应力应变场及其主导参数进行了研究。

1. 首先考虑弹性——第二阶段蠕变材料中的裂纹尖端场。在单拉情况下,总应变率表示为

$$\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E + B\sigma^n \quad (5.6.3)$$

式中 E 为弹性模量,对于幂律蠕变材料,蠕变指数 n 和系数 B 都是材料参数。在三轴情况下,式(5.6.3)推广为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij} \quad (5.6.4)$$

式中 s_{ij} 为应力偏量张量, $\sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$ 为等效应力。在平面情况下,平衡方程和协调条件为

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad (5.6.5)$$

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta,\alpha\beta} - \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha,\beta\beta} = 0 \quad (5.6.6)$$

初始条件是在 $t=0$ 的初始时刻对含裂纹试件突然施加载荷,边界条件是在裂纹面上及无穷远处 $\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = 0$ 。根据方程(5.6.4)中的材料变形律,在 $t=0$ 时刻试件的响应是弹性的,裂纹尖端场即为线弹性断裂力学中的 K 场。

对于方程(5.6.4)的材料律,裂纹尖端渐近场具有奇异性。由于蠕变指数 n 总是大于 1,在裂纹尖端蠕变应变率将高于弹性应变率,进而可以证明裂纹尖端渐近场与著名的 HRR 场有相似的形式

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left[\frac{C(t)}{BI_n r} \right]^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (5.6.7)$$

$$\epsilon_{ij}(r, \theta) = \left[\frac{C(t)}{BI_n r} \right]^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) \quad (5.6.8)$$

式中 $C(t)$ 为与时间相关的载荷参数, 取决于施加的载荷及裂纹体的几何形状, 定义为

$$C(t) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{n}{n+1} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dx_2 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \quad (5.6.9)$$

式中 Γ_0 是包含裂纹尖端的环形路径。对于第二阶段的稳态蠕变材料, 裂纹尖端应力场处于稳定状态。在这种极限 ($t \rightarrow \infty$) 情况下, $C(t) \rightarrow C^*$, C^* 是一个与路径无关的积分

$$C^* = \int_{\Gamma} W(\dot{\epsilon}_{ij}) dx_2 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \quad (5.6.10)$$

式中 Γ 是包含裂纹尖端的任一封闭路径, $W(\dot{\epsilon}_{ij})$ 为应变率密度,

$$W(\dot{\epsilon}_{ij}) = \int_0^{\dot{\epsilon}_{ij}} \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} \quad (5.6.11)$$

C^* 的另一种常用的计算公式为

$$C^* = - \left(\frac{\partial \dot{U}}{\partial a} \right)_{\dot{\Delta}} \quad (5.6.12)$$

式中 \dot{U} 为单位厚度上的载荷 P 所做的功率

$$\dot{U} = \int_0^{\dot{\Delta}} P d\dot{\Delta} \quad (5.6.13)$$

稳态蠕变的裂纹尖端场为

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{C^*}{BI_r r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (5.6.14)$$

$$\epsilon_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{C^*}{BI_r r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) \quad (5.6.15)$$

上述结果表明, 在恒定载荷下 $t \rightarrow \infty$ 的极限情况, 裂纹尖端场是 HRR 型的, 而在另一种极限情况 $t \rightarrow 0$ 时, 裂纹尖端场是 K 场。随着在裂纹尖端区域中蠕变应变的增长, 蠕变应变松弛了裂纹尖端的应力集中程度。如果把蠕变区看作是时间相关的塑性区, 则只要蠕变区与裂纹长度及构件尺寸相比是一个小量, 则可以看作是小范围屈服的情况。对于加载后的短时间内的范围屈服情况, Riedel^[5.24], Riedel 和

Rice^[5.21]分别研究了Ⅱ型和Ⅰ型裂纹的尖端场。

在加载后的短期内,应力场 $\sigma_{ij}(r, \theta, t)$ 与 K, E, B, ν 和 n 相关,应力强度因子 K 可作为载荷参数。对于Ⅰ型平面应变裂纹,由量纲分析知应力场必然有渐近形式

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = \alpha_n \left[\frac{(1-\nu^2)K^2}{(n+1)EBI_n r t} \right]^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (5.6.16)$$

式中 α_n 是待定的幅值因子,与蠕变指数 n 有关。应变场为

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta, t) = \frac{3}{2} B t (n+1) \alpha_n \left[\frac{(1-\nu)^2 K^2}{(n+1)EBI_n r t} \right]^{\frac{n}{n+1}} [\tilde{\sigma}(\theta)]^{n-1} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \quad (5.6.17)$$

为了确定 α_n , Riedel和Rice^[5.21]近似认为 J 积分是路径无关的,由此得到

$$\alpha_n = \left[\frac{n+1}{n} \frac{\pi(1-\nu^2)}{I_n} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (5.6.18)$$

数值结果表明 $\alpha_n \approx 1$ 。比较式(5.6.7)和(5.6.16)并利用 $\alpha_n = 1$,发现对小范围屈服有

$$C(t) = \frac{J_\infty}{(n+1)t} = \frac{(1-\nu^2)K^2}{E(n+1)t} \quad (5.6.19)$$

即为载荷参数 $C(t)$ 与远场 J 积分 $J_\infty = \frac{K^2(1-\nu^2)}{E}$ 和应力强度因子 K 的关系。上述渐近分析表明, K 和 C^* 分别是小范围蠕变区和大范围蠕变区极限情况下的主导参数。

蠕变区的范围可以定义为裂纹尖端HRR场的等效应力与弹性区 K 场的等效应力相等的点的连线,表示为

$$r_{cr} = \frac{1}{2x} \left(\frac{K}{E} \right)^2 \left[\frac{(n+1)I_n E^n B t}{2\pi(1-\nu^2)\alpha_n} \right]^{\frac{2}{n-1}} F_1(\theta) \quad (5.6.20)$$

式中

$$F_1(\theta) = \left\{ \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[(1-2\nu)^2 + 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]}{[\tilde{\sigma}_e(\theta)]^2} \right\}^{\frac{n+1}{n-1}} \quad (5.6.21)$$

此外,由等效应变以及 $R = 1$ 也都可以定义蠕变区的形状^[5.19,5.24]。

对于平面应力的情况,只需将平面应变结果中的泊松比 ν 用 0 代替即可。

从小范围蠕变到大范围蠕变的特征时间,可通过令短时间内的 HRR 场强度和长时间内的 HRR 场强度相等来估算,由式 (5.6.14) 和 (5.6.16), 得转换时间 t_T 为

$$t_T = \frac{J_\infty}{(n+1)C^*} = \frac{(1-\nu^2)K^2}{E(n+1)C^*} \quad (5.6.22)$$

2. 现在考虑一个经历第一阶段或第三阶段蠕变裂纹体的裂纹尖端场。

假设材料的蠕变律遵循 Bailey-Norton 公式

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} \epsilon_e^{-p} s_{ij} \quad (5.6.23)$$

式中 B, n 和 p 为材料参数, $\sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$ 和 $\epsilon_e = \left(\frac{2}{3} \epsilon_{ij}' \epsilon_{ij}' \right)^{1/2}$ 分别为等效应力和等效蠕变应变。当 $p > 0, p = 0$ 和 $p < 0$ 时, 上式分别表示第一阶段, 第二阶段和第三阶段的蠕变律。

对于比例加载情况, 应力场也是按比例变化的, 即

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = P(t) \tilde{\sigma}_{ij}(r, \theta) \quad (5.6.24)$$

式中 $P(t)$ 为与时间相关的载荷参数, $\tilde{\sigma}_{ij}$ 是坐标 r 和 θ 的函数而与时间无关。对于比例加载情况, 对式 (5.6.23) 积分, 得到

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \left\{ \frac{B(1+p)}{[P(t)]^n} \int_0^t [P(\tau)]^n d\tau \right\}^{\frac{1}{p+1}} \frac{s_{ij}}{\sigma_e} \quad (p > -1) \quad (5.6.25)$$

式 (5.6.25) 给出的应力应变关系对整个试件是唯一的, 与坐标 (r, θ) 无关, 因此 J 积分与路径无关。既然 J 积分乘以任意的时间函数仍与路径无关, 于是引入如下的路径无关积分

$$C_h^* = J(t) \left\{ [P(t)]^n \int_0^t [P(\tau)]^n d\tau \right\}^{\frac{1}{p+1}} \quad (5.6.26)$$

C_h^* 积分依赖于当前载荷即 $C_h^* \propto P^{1+n/(1+p)}$ 。对于 $p = 0$ 的特殊情况, $C_h^* = C_h$, 但是一般情况下 C_h^* 和 C^* 是不同的。 C_h^* 要求比例加载的条件, 这只有静止裂纹才可能满足, 而 C^* 不要求比例加载的条件。

C_h^* 可以通过式(5.6.26)和以下公式计算

$$J = - \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right)_{P,t} \quad (5.6.27)$$

式中

$$U = \int_0^a P d\Delta \quad (5.6.28)$$

为单位厚度上外载 P 所做的功。

在大范围第一阶段蠕变和比例加载条件下, 裂纹尖端的渐近场仍为 HRR 型的, 表示为

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = \left\{ \frac{C_h^*(t)}{[B(1+p)]^{\frac{1}{p+1}} I_m r} \right\}^{\frac{1}{p+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, m), r \rightarrow 0 \quad (5.6.29)$$

式中 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, m)$ 是归一化的角分布函数。式(5.6.29)表明, C_h^* 是一个对大范围第一阶段蠕变的恰当主导参数。

如果同时考虑弹性变形和第一阶段蠕变变形, 应变率表示为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} \epsilon_{cr}^{-p} s_{ij} \quad (5.6.30)$$

式中 ϵ_{cr} 为等效蠕变应变。

在 $t = 0$ 时突然对裂纹施加恒定的载荷, 在短时间内的短范围屈服条件下, 远处边界条件是一个渐近的弹性奇异应力场。在裂纹尖端附近, 如果 $m = n/(p+1) > 1$, 则蠕变应变率将优于弹性应变率。当 $r \rightarrow 0$ 时, 平面应变情况下的应力分量为

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = \alpha(n, p) \left\{ \frac{(1 - \nu^2)K^2/E}{[B(n + p + 1)t]^{1/(p+1)} I_m r} \right\}^{\frac{1}{m+1}} \sigma_{ij}(\theta, m) \quad r \rightarrow 0 \quad (5.6.31)$$

式中 $\alpha(n, p)$ 仍可通过 J 积分与路径无关而近似确定, $\alpha(n, p) \approx 1$ 。因此, 在短时间内, 小范围屈服的裂纹尖端场仍由应力强度因子 K 控制, K 是主导参数。经过较长的时间后, 蠕变区扩展到整个试件, C_h^* 成为此时的主导参数。在恒载下从小范围屈服到大范围蠕变转换的特征时间为

$$t_1 = \frac{1}{m+1} \left(\frac{J_\infty}{C_h^*} \right)^{p+1} \quad (5.6.32)$$

3. 现在讨论考虑第一阶段-第二阶段蠕变裂纹的尖端场。随着裂纹体大范围的第一阶段蠕变的发展, 在裂纹尖端会产生一个小的第二阶段蠕变区并逐渐扩展。忽略弹性变形, 只考虑第一和第二阶段蠕变的本构关系为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B_1 \sigma_{e1}^{n_1-1} \epsilon_{e1}^{-p} s_{ij} + \frac{3}{2} B \sigma_{e2}^{n_2-1} s_{ij} \quad (5.6.33)$$

根据 Riedel^[5.24] 的分析, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 裂纹尖端场的渐近形式为

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = \alpha(n_1, p, n_2) \left[\frac{n_2 + p + 1}{(p+1)(n_2+1)} \times \frac{C_h^*}{B_2 I_{n_2} t^{p/(1+p)} r} \right]^{\frac{1}{n_2+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n_2) \quad (5.6.34)$$

如果假设 J 是路径无关的, 仍有 $\alpha(n_1, p, n_2) \approx 1$ 。

由式(5.6.14)和(5.6.34)得到从整个试件的第一阶段蠕变到第二阶段蠕变的转换时间为

$$t_2 = \left[\frac{(n_2 + p + 1)C_h^*}{(p+1)(n_2+1)C^*} \right]^{(p+1)/p} \quad (5.6.35)$$

当第二阶段蠕变区与裂纹长度和试件尺寸相比是一个小量时, 第

一阶段的蠕变场强度 $C_{\dot{\epsilon}_s}$ 是恰当的主导参数。而当 $t > t_2$ 时,会产生大范围的第二阶段蠕变, C^* 成为相应的主导参数。

综上所述,可以得到蠕变裂纹尖端场主导参数的适用范围。如果裂纹体除裂纹尖端的一个很小的塑性区外均为弹性区,则应力强度因子 K 控制着蠕变区的扩展及 HRR 场的强度,这主要发生在蠕变裂纹受载后较短的时间内。如果时间超过了转换时间 t_1 ,即材料已有了一个显著的第一阶段蠕变区,则 $C_{\dot{\epsilon}_s}$ 积分成为主导参数,控制了第二阶段蠕变区及裂纹尖端渐近场的强度。第二阶段蠕变区继续扩展到转换时间 t_2 后,构件中第二阶段的蠕变已完全取代了第一阶段的蠕变,其后 C^* 积分成为恰当的载荷参数。如果材料的第一阶段蠕变区不显著,则 $C_{\dot{\epsilon}_s}$ 的控制时间就很短了,认为从 K 主导直接过渡到 C^* 过程,转换时间为 t_T 。

4. 为了预测蠕变裂纹体的寿命,需要建立裂纹扩展速率 \dot{a} 与裂纹尖端场主导参数的关系,几种简单的表达形式为:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= AK^u, & \dot{a} &= B\sigma_n^p \\ \dot{a} &= C\delta^v, & \dot{a} &= DC^{*s} \end{aligned} \quad (5.6.36)$$

式中 σ_n 可以是净截面应力 σ_{net} 或参考应力 σ_{ref} , δ 是加载线的裂纹张开位移。上述关系式的具体形式可由实验或理论分析得到。下面举例说明 \dot{a} 与 C^* 的关联式。

从一种细观机制来看,蠕变裂纹的扩展是由于裂纹尖端微孔洞的形核、长大和汇合引起的(图 5.27)。作为一种扩展准则,假设当裂纹前方 x_c 距离处的孔洞汇合条件得到满足时,裂纹开始扩展,其中 x_c 是孔洞间距。忽略裂纹尖端附近的微孔洞对应力和应变场的影响,此时可以用 Monkman-Grant 积来确定发生断裂时的临界应变。Monkman-Grant 积是指在稳态蠕变阶段的蠕变率 $\dot{\epsilon}_s$ 和蠕变寿命 t_f 的乘积, Mankman 和 Grant^[5, 26] 认为它是个常数,即

$$\dot{\epsilon}_s t_f = C_{MG} = \text{常数} \quad (5.6.37)$$

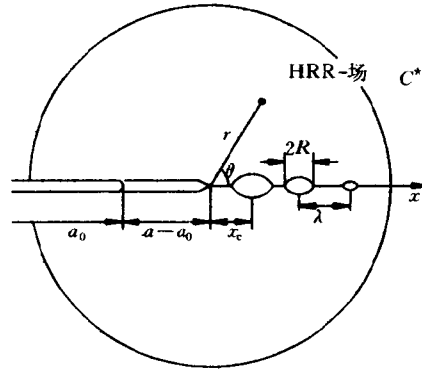


图 5.27 由微孔洞引起的蠕变裂纹扩展^[5.20]

在方程(5.6.37)、(5.6.14)以及微孔洞不影响应力场的假设基础上,Riedel^[5.20]给出了发生孔洞汇合的临界应变

$$\epsilon_t = \dot{\epsilon}_s t_t = 0.69 \omega_t^{3/2} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{1/2} h(\psi) \left(\frac{\lambda}{d}\right) \frac{\tilde{\sigma}_e}{\tilde{\sigma}_1} \quad (5.6.38)$$

式中 $h(\psi)$ 是与孔洞体积百分比 $f_v(\psi)$ 和晶界孔洞张开角 ψ 有关的一个函数, ω_t 是用孔洞面积百分比定义的损伤变量 ω 的临界值, λ 是孔洞间距, d 是一个细观特征尺寸, $\tilde{\sigma}_e$ 和 $\tilde{\sigma}_1$ 是 HRR 场中角分布函数 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ 的等效应力和第一不变量。一般取 $\omega_t = \pi/4$, $h(\psi) = 0.61$, 当 $n > 3$ 时, 上式可近似为

$$\epsilon_t = 0.4 \frac{\lambda \tilde{\sigma}_e}{d \tilde{\sigma}_1} \quad (5.6.39)$$

如果取 $n = 5, \lambda/d = 0.1$, 在平面应变情况下 $\tilde{\sigma}_e/\tilde{\sigma}_1 = 0.21$, 则临界应变 $\epsilon_t = 0.78\%$ 。于是裂纹尖端的局部准则定义为: 宏观裂纹必须以这样的速率扩展, 使得裂纹尖端前方 x_c 处的材料刚好达到临界应变 ϵ_t 。由此可以确定裂纹尖端的运动方程。

利用稳态蠕变阶段的应变率 $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2}{3} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}$, 式(5.6.14)中

的 HRR 应力场以及裂纹扩展准则,可以建立如下的关于 \dot{a} 的积分方程

$$\varepsilon_f \left(\frac{x_c}{a + x_c - a_0} \right)^{n/n+1} + B\tilde{\sigma}_e^n(0) \times \int_{a_0}^a \left[\frac{C^*}{BI_n(a + x_c - a_0)} \right]^{\frac{n}{n+1}} \frac{da'}{a(a')} = \varepsilon_f \quad (5.6.40)$$

式中 $\tilde{\sigma}_e(0)$ 为裂纹前方 ($\theta = 0$) HRR 场中等效应力的归一化角分布函数。从开始加载到裂纹开始扩展的时间为

$$t_i = \varepsilon_f (BI_n x_c / C^*)^{\frac{n}{n+1}} / [B\tilde{\sigma}_e^n(0)] \quad (5.6.41)$$

当时间超过 t_i 后,积分方程(5.6.40)开始成立。引入无量纲化的裂纹扩展增量 $A = (a - a_0)/x_c$ 以及无量纲的扩展速率 \dot{A} :

$$\dot{A} = \dot{a}\varepsilon_f / \left[\tilde{\sigma}_e^n(0) (Bx_c)^{\frac{1}{n+1}} (C^* / I_n)^{\frac{n}{n+1}} \right] \quad (5.6.42)$$

于是方程(5.6.40)变成

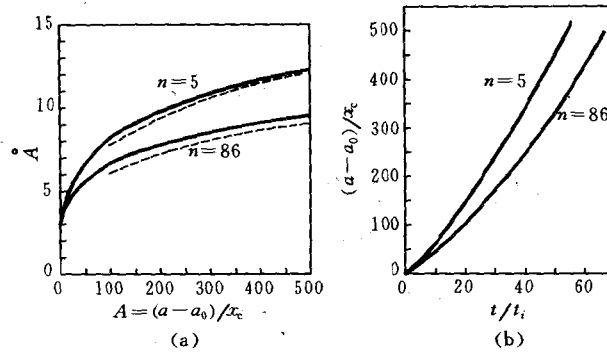
$$\int_0^A (1 + A - A')^{-\frac{n}{n+1}} \frac{dA'}{A(A')} = 1 - (1 + A)^{-\frac{n}{n+1}} \quad (5.6.43)$$

该方程的数值解如图 5.28 所示,图中虚线是当 A 较大时的两项渐近展开解。用物理坐标 \dot{a} 和 $a - a_0$ 表示的两项渐近解表示为

$$\dot{a} = \frac{\pi \tilde{\sigma}_e^n(0) (Bx_c)^{\frac{1}{n+1}} [C^*]^{\frac{n}{n+1}} \left[\left(\frac{a - a_0}{x_c} \right)^{\frac{1}{n+1}} - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2 - \alpha)\Gamma(2\alpha - 1)} \right]}{\varepsilon_f \sin(\pi\alpha)} \quad (5.6.44)$$

式中 $\alpha = n/(n + 1)$ 。式(5.6.44)即给出了裂纹扩展速率 \dot{a} 与主导参数 C^* 的关联式。

5. 下面介绍非线性蠕变材料扩展裂纹尖端场——Hui-Riedel 场及其修正。Hui 和 Riedel^[5, 27] 导出了幂律蠕变材料中 III 型、平面应力和平面应变 I 型扩展裂纹的近尖端渐近场。这里以 III 型裂纹为例加以说明(图 5.28)。



(a) 裂纹扩展速率与裂纹扩展尺寸的关系

(b) 裂纹扩展尺寸与时间的关系

图 5.23

对于Ⅲ型反平面问题,式(5.6.4)中的本构关系简化为

$$\dot{\gamma}_a = \frac{\dot{\tau}_a}{G} + \bar{B} \tau_a^{n-1} \tau_a \quad (5.6.45)$$

式中 $\bar{B} = \sqrt{3}^{n+1} B$, $\tau_a = \sigma_{3a}$, $\gamma_i = 2\varepsilon_{3a}$ 。引入应力函数 ψ , 使得

$$\tau_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.6.46)$$

或

$$\tau_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \tau_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5.6.47)$$

则平衡方程 $\nabla_a \tau_a = 0$ 自动满足。位移协调方程为

$$\frac{\partial \dot{\gamma}_x}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\gamma}_y}{\partial x} = 0 \quad (5.6.48)$$

如果裂纹扩展速度为 \dot{a} , 坐标原点随裂尖一起运动, 则质点的时间导数定义为

$$\dot{\psi} = -\dot{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.6.49)$$

由上述方程消去应力和应变,得到 III 型问题的用应力函数表示的基本方程

$$-\dot{a}\nabla^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \nabla^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \overline{BG}[|\nabla\psi|^{n-1}\nabla\psi] = 0 \quad (5.6.50)$$

裂纹面上的应力自由边界条件为

$$\frac{\partial\psi(r, \theta = \pm\pi)}{\partial r} = 0 \quad (5.6.51)$$

由于式(5.6.50)中第二项较其它两项的导数阶次低,奇异性比较弱,因此在求渐近解时可以忽略第二项,也就是说对于稳态和非稳态扩展的裂纹尖端渐近场是相同的。

当 $n < 3$ 时,式(5.6.50)中的线性项即第一项主导着 $r \rightarrow 0$ 时的渐近行为。应力函数有如下的形式

$$\psi = Ar^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \quad (5.6.52)$$

式中 A 为远场载荷和裂纹扩展历史的函数。

当 $n \geq 3$ 时,式(5.6.50)中的第一项和第三项共同控制着 $r \rightarrow 0$ 时的渐近性质。应力函数表示为

$$\psi(r, \theta) = \left(\frac{\dot{a}}{\overline{BG}}\right)^{\frac{1}{n-1}} r^s f(\theta, n) \quad (5.6.53)$$

式中 $s = (n-2)/(n-1)$, 无量纲角分布函数 $f(\theta, n)$ 由以下常微分方程及边界条件确定:

$$\begin{aligned} f''' \sin\theta + (2-s)f'' \cos\theta + s^2 f' \sin\theta + s^2(2-s)f \cos\theta \\ + (s^2 f^2 + f'^2)^{\frac{n-3}{2}} [f''(s^2 f^2 + n f'^2) \\ + s f f'^2 (1 + 2ns - s - n) + s^3 f^3 (1 + sn - n)] = 0 \end{aligned} \quad (5.6.54)$$

$$f(\pi, n) = 0 \quad f'(0, n) = 0$$

$$f''(0, n) = s f(0, n) \left[\frac{ns - [s f(0, n)]^{n-1}}{n + (n-1)[s f(0, n)]^{n-1}} \right] \quad (5.6.55)$$

通过数值方法(如打靶法)可以求解上述方程,由此得到的应力和应变场为

$$\left. \begin{aligned} \tau_a(r, \theta) &= \alpha_n \left(\frac{\dot{a}}{BGr} \right)^{\frac{1}{n-1}} \bar{\tau}_a(\theta) \\ \gamma_a(r, \theta) &= \frac{\alpha_n}{G} \left(\frac{\dot{a}}{BGr} \right)^{\frac{1}{n-1}} \bar{\gamma}_a(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (5.6.56)$$

式中 α_n 的近似数值结果为

$$\alpha_n = [0.29(n-3)]^{\frac{1}{n-1}} \quad (5.6.57)$$

Hui-Riedel 解具有以下几个重要特点:第一,裂纹尖端的应力和应变场完全独立于外载,只要裂纹扩展速率 \dot{a} 一定,则裂纹尖端场即完全确定;第二,当 $n \rightarrow \infty$ 时, Hui-Riedel 场不能退化为率无关材料的解;第三,裂纹尖端场不仅适用于稳态扩展情况,而且适用于非稳态扩展情况,因此与裂纹扩展历史无关;第四,裂纹尖端应力和应变场有相同的奇异性 $r^{-\frac{1}{n-1}}$ 。

显然,前面两个特点是有疑问的。为此,杨卫和 Freund^[5.28] 进一步研究了率敏感弹塑性材料中的 III 型裂纹扩展问题。Hui 和 Riedel^[5.27], 杨卫和 Freund^[5.28] 所采用的本构关系有所差别,以单剪为例,两种本构关系中的率相关部分分别为

$$\dot{\gamma}^p = B \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \quad (5.6.58)$$

$$\dot{\gamma}^p = \begin{cases} 0 & \text{当 } \tau \leq \tau_0 \text{ 或弹性卸载时} \\ B \left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right)^n & \text{当 } \tau > \tau_0 \text{ 且加载时} \end{cases} \quad (5.6.59)$$

两种本构关系的不同,导致了裂纹尖端场的差别。首先在经历塑性区的范围内,两个模型的应力、应变场的形式是基本相同的。主要差别表现在杨卫和 Freund 的模型中引入了弹性卸载的尾区。弹性卸载区提供了连接近尖端场和远场的途径,使得裂纹尖端场的幅度不仅取决于扩展速率 \dot{a} 而且取决于远场载荷。当 $n \rightarrow \infty$ 时,

杨卫和 Freund 给出的场也逼近于弹性理想塑性材料的解。

作为总结,图 5.29^[5.20]给出了两组不同的材料参数组合下的主导参数图。在双对数坐标中,分别以时间 t 和净应力 σ_{net} 为纵横坐标,各个区域内均标注出相应的主导参数。

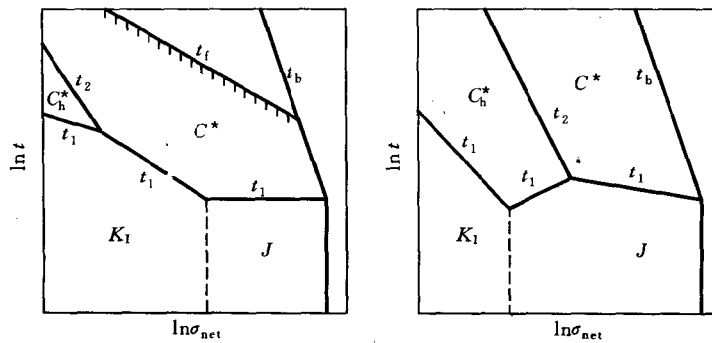


图 5.29 蠕变裂纹尖端场的主导参数^[5.20]

5.6.3 蠕变裂纹扩展的损伤力学方法

从损伤力学的角度研究蠕变裂纹的扩展有两种方法,其一是连续损伤力学的方法^[5.20,5.22],即在连续介质力学的基本框架上,在本构关系中引入损伤变量和损伤演化方程,通过求解连续损伤力学的方程得到裂纹尖端场和扩展规律;其二是细观损伤力学的方法,即利用细观力学的方法,研究裂纹尖端附近微孔洞的形核、长大和汇合,从而建立裂纹扩展速率 \dot{a} 与载荷主导参数(如 C^*) 的关系^[5.20,5.29]。以下主要介绍连续损伤力学的方法。

采用 Kachanov-Rabotnov 提出的损伤变量 ω 以及 Hayhurst-Leckie^[5.29] 建议的本构关系。在初始无损状态 $\omega = 0$, 在断裂时 $\omega = 1$ 。损伤的演化方程为

$$\dot{\omega} = \frac{D[\kappa\sigma_t + (1 - \kappa)\sigma_e]^x}{(1 + \varphi)(1 - \omega)^{\varphi}} \quad (5.6.60)$$

损伤本构关系为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij} / (1-\omega)^n \quad (5.6.61)$$

为简单起见,假设式中弹性项不受损伤影响。 $D, \kappa, \chi, \varphi, E$ (弹性模量), ν (泊松比), B (蠕变系数)和 n (应力指数)均为材料参数,表 5.2 给出了铝合金和铜的各个材料参数实验值。

表 5.2 铝合金在 210℃和铜在 250℃时的材料参数

	E/MPa	$B/\text{MPa}^{-n}\text{s}^{-1}$	n	$D/\text{MPa}^{-\chi}\text{s}^{-1}$	χ	φ	κ
铝合金	6×10^4	3.2×10^{-21}	6.9	5×10^{-18}	6.48	9.5	0
铜	6.6×10^4	3.6×10^{-10}	2.97	1.7×10^{-7}	1.21	3.83	0.7

在下面的分析中,忽略式(5.6.61)中的弹性应变率部分,这种近似成立的前提是弹性应变远远小于蠕变应变。如果裂纹体的寿命 t_f 远大于式(5.6.22)中的转变时间 t_T , 即裂纹体在其寿命的大部分时间里都处于大范围蠕变阶段,则弹性应变是可以忽略的。

在忽略弹性变形后,材料的瞬时响应是非线性粘性的。在加载后的短时间内,损伤只集中在裂纹尖端很小的范围内,损伤区的尺寸远远小于蠕变区的尺寸,即看作是小范围损伤情况。在远离损伤区以外,损伤变量 ω 很小,不影响应力场的分布。如果在初始时刻 ($t = 0$), 取式(5.6.14)中的 HRR 型的应力场为初始条件以及损伤区的远场边界条件,则量纲分析表明,损伤力学方程必然有如下的自相似形式

$$\sigma_{ij} = (Dt)^{-1/\chi} \Sigma_{ij}(R, \theta) \quad (5.6.62)$$

$$\omega = \omega(R, \theta) \quad (5.6.63)$$

式中 $\Sigma(R, \theta)$ 和 $\omega(R, \theta)$ 为待定的无量纲函数

$$R = (Br/C^*) (Dt)^{-(n+1)/\chi} \quad (5.6.64)$$

由式(5.6.62)和(5.6.63)中场的自相似性,所有等应力线和等损伤线都将随着时间以 $r \propto t^{(n+1)/\chi}$ 的规律扩大。将即时的裂纹尖端定义为全损伤即 $\omega = 1$ 的位置,即相当于裂纹扩展 Δa

$$\Delta a = \alpha(n, \chi, \varphi, \kappa) (C^*/B) (Dt)^{(n+1)/\chi} \quad (5.6.65)$$

将此式对时间微分,得到裂纹扩展的速率为

$$\dot{a} = \frac{n+1}{\chi} (\alpha C^*/B)^{\chi/(n+1)} D \Delta a^{(n+1-\chi)/(n+1)} \quad (5.6.66)$$

确定损伤分布 $\omega(R, \theta)$ 的一种近似方法是假设应力场不受损伤影响,仍为式(5.6.14)中的 HRR 场。实际上,损伤的累积将松弛裂纹尖端的应力集中。由恒定不变的 HRR 场计算得到的损伤场具有与准确的小范围损伤解相似的性质。由这种方法,得到式(5.6.64)中的待定因子 α

$$\alpha(n, \chi, \varphi, \kappa) = [\kappa \tilde{\sigma}_1 + (1 - \kappa) \tilde{\sigma}_e]^{n+1} / I_n \quad (5.6.67)$$

对于平面应变情况,如果取 $n = \varphi = \chi = 5, \kappa = 1, \theta = 24^\circ$, 则 $\alpha = 29.8$, 而有限元方法得到的结果 $\alpha = 37$ 。可见,忽略损伤对应力场的影响并没有引起很大的误差。这种近似方法给出的是 α 以及裂纹扩展速率的一种下限。

如果采用运动裂纹的 HRR 场,同时也不考虑损伤对应力场的影响,则可以得到 α 值的一种上限,表示为

$$\alpha(n, \chi, \varphi, \kappa) = \left(\frac{\pi s}{\sin \pi s} \right)^{1/s} [\kappa \tilde{\sigma}_1 + (1 - \kappa) \tilde{\sigma}_e]^{n+1} / I_n \quad (5.6.68)$$

式中 $s = \chi/n + 1$ 。对于 $n = \varphi = \chi = 5, \kappa = 1, \theta = 24^\circ$ 的情况,式(5.6.68)给出 $\alpha = 217$ 。事实上,由式(5.6.68)和(5.6.66)得到的裂纹扩展率与前面根据孔洞汇合和 Monkman-Grant 积得到的式(5.6.44)是一致的。

这里将损伤过程区定义为考虑损伤后的等效应变率至少是无损材料的等效应变率的两倍的区域。在此区域内,应力场被损伤松

弛。过程区的一种粗糙估计是将无损的 HRR 场代入式(5.6.60)和(5.6.61),得到应变率和损伤场。损伤过程区尺寸表示为

$$r_p/\Delta a = \left[1 - 2^{-\frac{\varphi+1}{n}}\right]^{-\frac{n+1}{\chi}} - 1 \quad (5.6.69)$$

当 $n = \chi = \varphi = 5$ 时, $r_p = 0.99\Delta a$, 与有限元结果大致相当。将铝合金和铜的参数依次代入上式, 分别得到 $r_p = 0.69\Delta a$ 和 $r_p = 2.6\Delta a$ 。

蠕变裂纹尖端过程区内的应力分布如图 5.30 所示, 这是有限元计算的结果。可以看出 HRR 应力场受到损伤明显影响的区域与式(5.6.67)得到的过程区尺寸大致相当。上述的分析是在小范围损伤的条件下进行的, 实际上是一种全解耦的方法。

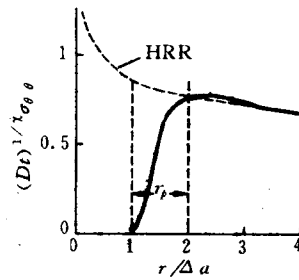


图 5.30 扩展裂纹尖端过程区内的应力分布^[5.22]

随着过程区尺寸的增大, 小范围损伤的近似越来越不准确, HRR 场作为远场边界条件也变得不够恰当。在有限尺寸的试件中, HRR 场的有效范围近似为

$$r_p < r < 2.5a/M \quad (5.6.70)$$

式中参数 M 可由有限元分析得到。对于包括 CT 试件在内的弯曲构型 $M = 25$, 对于平面应变拉伸的中心裂纹板, M 随 n 的增大而增大, 当 $n = 10$ 时 $M = 200$ 。由式(5.6.69)和(5.6.70)可知, 当裂纹扩展尺寸满足条件

$$\Delta a/a = 2.5 \left[\left(1 - 2^{-\frac{\varphi+1}{n}}\right)^{-\frac{n+1}{\chi}} - 1 \right]^{-1} / M \quad (5.6.71)$$

时, HRR 场完全被过程区代替。当 $n = \varphi = \chi = 5, M = 25$ 时, 式(5.6.71)给出 $\Delta a/a = 10\%$, 对于铝合金和铜试件 ($M = 25$), 分别有 $\Delta a/a = 4\%$ 和 14% 。

下面讨论两种极限情况,其一是当 $t < t_T$ 时的小范围蠕变阶段,此时除了裂纹尖端很小的范围内发生蠕变外,材料以弹性变形为主。此时裂纹尖端渐近场的远场边界条件为

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (5.6.72)$$

如图5.31所示为小范围蠕变条件下的过程区、蠕变区和弹性区,其尺寸分别记为 r_p, r_{cr} 和 r_e , 有

$$r_e \gg r_p, r_e \gg r_{cr}, r_e \ll a。$$

裂纹尖端渐近场的讨论取决于蠕变区和损伤过程区哪一个更大。除了一些非常脆的材料,蠕变区一般比较大。

此外,方程(5.6.60)和(5.6.61)也不能描述弹性损伤的特点,因此假设过程区位于蠕变区内部,过程区的远场边界条件为

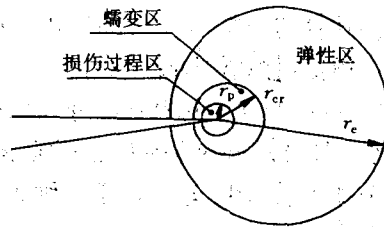


图 5.31 小范围蠕变条件下的裂纹尖端过程区、蠕变区和弹性区

$$\sigma_{ij} = \left[\frac{K_I^2 (1 - \nu^2)}{(n+1)I_n E B I_n r t} \right]^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (5.6.73)$$

在过程区内弹性项可以忽略,渐近场有自相似的性质,形式同式(5.6.62)和(5.6.63),其中

$$R = \frac{r B E t}{K_I^2} (Dt)^{-\frac{n+1}{\chi}} \quad (5.6.74)$$

裂纹扩展增量和裂纹扩展率分别表示为

$$\Delta a = a(n, \chi, \varphi, \kappa) \frac{K_I^2 (1 - \nu^2)}{(n+1) E B t} \left[\frac{n+1}{n+1-\chi} Dt \right]^{\frac{n+1}{\chi}} \quad (5.6.75)$$

$$\dot{a} = \frac{n+1}{\chi} \left[\frac{a K_I^2 (1 - \nu^2)}{(n+1) E B t} \right]^{\frac{\chi}{n+1}} D \Delta a^{\frac{n+1-\chi}{n+1}} \quad (5.6.76)$$

另一种极限情况是裂纹尖端的扩展非常快,超过了蠕变区发

展的速度。假设裂纹扩展的速率为 $\dot{a} = \text{const}$, 此时小范围蠕变的外场应力分布为

$$\sigma_{ij} = (K_1^2 EB/\dot{a})^{-\frac{1}{n-3}} \tilde{\sigma}_{ij}(R, \theta) \quad (5.6.77)$$

式中

$$R = r(K_1^{n-1} EB/\dot{a})^{-\frac{2}{n-3}} \quad (5.6.78)$$

将式(5.6.77)代入(5.6.60)并利用 $\omega = 1$ 的条件, 得到裂纹尖端扩展速率

$$\dot{a} = \bar{\alpha}(n, \varphi, \chi, \kappa) (EB/D)^{\frac{n-3}{n-1-n}} EBK_1^2 \quad (5.6.79)$$

式中 $\bar{\alpha}$ 是一个待定因子。上式表明, 在考虑损伤的情况下 \dot{a} 正比于 K_1^2 。而在同样的稳态裂纹扩展情况下, 由无损的分析以及应变准则得到的扩展速率 \dot{a} 正比于 K_1^n , 实验结果似乎更支持这一结论。

5.6.4 蠕变裂纹尖端小损伤的半解耦方法

余寿文和 Gross^[5, 30]将 5.5 中介绍的方法进一步应用于蠕变裂纹尖端场的分析。采用的本构关系和损伤演化方程同式(5.6.60)和(5.6.61), 并按照式(5.5.11)定义有效应力。仍然假设损伤变量 ω 为小参数即 $\omega \ll 1$ 。

利用有效应力 σ_{ij}^* 和小损伤的假设, 平面问题的基本方程可类似于式(5.5.12)~(5.5.15)表示为

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{1-\omega} \approx \sigma_{ij} \quad (5.6.80)$$

$$\sigma_{ij,j}^* = 0 \quad (5.6.81)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij,ij}^c - \dot{\epsilon}_{ii,jj}^c = 0 \quad (5.6.82)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} B \sigma_e^{*(n-1)} s_{ij}^* \quad (5.6.83)$$

$$\dot{\omega} = \frac{D[\kappa \sigma_1^* + (1-\kappa) \sigma_e^*]^n}{(1+\varphi)(1-\omega)^{n-1}} \quad (5.6.84)$$

对于无损的蠕变损伤材料,基本方程表示为

$$\sigma_{ij,j}^0 = 0 \quad (5.6.85)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij,ij}^0 - \dot{\epsilon}_{ii,jj}^0 = 0 \quad (5.6.86)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{0c} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{0(n-1)} \dot{\epsilon}_{ij}^0$$

式中上指标“0”表示无损材料的场。对比上述两组方程,容易得到如下的对应关系

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^c = \dot{\epsilon}_{ij}^{0c} \quad (5.6.87)$$

即在小损伤假设下,有损的有效应力场、应变场与无损的应力场、应变场是相同的。以下近似采用

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega) \sigma_{ij}^* \approx (1 - \omega) \sigma_{ij}^0 \quad (5.6.88)$$

积分式(5.6.84),并利用当 $t = 0$ 时 $\omega = 0$, 得

$$\int_0^\omega (1 - \omega)^{\nu-1} d\omega = \int_0^t D(1 + \varphi)^{-1} [\chi \sigma_1^0 + (1 - \kappa) \sigma_e^0]^2 dt \quad (5.6.89)$$

对于幂次蠕变的无损材料,平面问题的 HRR 场由式(5.6.14)表示。将式(5.6.14)中的应力场代入上式,得到损伤场为

$$\omega(r, \theta, t) = 1 + \left\{ D(I_n Br)^{-\frac{n}{n+1}} \sigma_\omega(n, \theta, \chi) \bar{C}(t) / (1 + \varphi) \right\}^{\frac{1}{1+\frac{1}{\nu}\chi}} \quad (5.6.90)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\omega(n, \theta, \chi) &= \chi \sigma_1^0(\theta, n) + (1 - \kappa) \left[\frac{3}{4} (\bar{\sigma}_r^0 - \bar{\sigma}_\theta^0)^2 - 3\bar{\tau}_{r\theta}^0 \right]^{1/2} \\ \bar{C}(t) &= \int_0^t [C^*(t)]^{\frac{n}{n+1}} dt \end{aligned} \quad (5.6.91)$$

由式(5.6.88),应力场表示为

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = [1 - \omega(r, \theta, t)] \left(\frac{C^*}{I_n Br} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sigma_{ij}^0(\theta) \quad (5.6.92)$$

式中角分布函数 $\bar{\sigma}_{ij}^0(\theta)$ 即为式(5.6.14)中的 $\sigma_{ij}(\theta)$ 。

此外,姜苇、黄克智、余寿文^[5.31,5.32]利用 Kachanov 型的蠕变损伤方程,研究了静止和定常扩展的 I 型和 III 型裂纹尖端场。在此基础上,郭田福^[5.33]研究了三种理论模型——裂纹模型、缺口模型和局部模型下的损伤断裂问题。这三种模型对应着三类定解问题,其中缺口模型是含待定缺口角度的自由边界问题。由于 Kachanov 型损伤方程的参数复杂性,对每一类定解问题都存在着多种形式的渐近解,解的具体形式取决于损伤参数。通过占优分解,郭田福等证明了裂纹模型和缺口模型皆有五种形式的占优解,而局部模型有三种,并对各种形式的渐近解作了分析和计算。裂纹模型和缺口模型各代表着一类材料的扩展形式,而局部模型能包容所有材料的损伤破坏特征。并根据两种形式的渐近解,导出了 Kachanov 型蠕变损伤情况下的裂纹扩展速率 $\dot{a} = \dot{a}(K)$ 的表达式。

5.7 考虑塑性损伤的断裂问题

在韧性材料中,微孔洞的形核、长大和汇合引起的破坏是一种重要的断裂机制。在韧性材料的断裂面上常常发现许多小的凹坑,这是微孔洞损伤断裂的一个证据。一个含裂纹的构件加载时,裂纹尖端产生变形和钝化,形成一个塑性损伤区,随着外加载荷的增大,塑性变形区的夹杂或二相粒子发生断裂或与基体材料脱粘,于是微孔洞形核。微孔洞会随着载荷逐渐长大,直到相邻的微孔洞之间或微孔洞与裂纹尖端之间由于变形局部化(如内部颈缩和剪切带)而断裂。微孔洞损伤过程受很多因素如变形历史、静水拉应力、夹杂的各向异性等的影响。本节介绍考虑韧性损伤的断裂问题的分析方法、特点及一些重要结果。

5.7.1 韧性损伤材料断裂的局部方法

如上节所述,损伤力学和断裂力学处理裂纹问题的基本方法

有明显不同。断裂力学方法主要是寻求裂纹扩展与断裂的过程、规律与总体的载荷参数(如 K, J, C^*) 的关系。在相当广泛的范围内,尤其是对于二维的弹性裂纹问题,比例加载条件下的小范围屈服裂纹问题和等幅应力作用下的循环加载断裂问题,断裂力学方法是非常有效的,具有良好的精度,并且得到了工程上的广泛应用。然而在另外一些情况下,如对于非比例加载条件下的裂纹扩展问题、与时间相关的裂纹扩展问题、裂纹尖端微孔洞损伤比较明显的问题,断裂力学方法会遇到一些难以克服的困难。

而损伤力学的方法则是在可用范围内比较详尽地分析裂纹尖端附近的应力场和应变场及扩展过程,利用恰当的局部损伤断裂准则,处理裂纹尖端的断裂行为。因此这种方法常常被称为断裂问题的局部方法^[5.34~5.36]。由于损伤力学中的本构关系描述了材料逐渐劣化的过程,不需要再人为地引入材料断裂条件,裂纹扩展的路径就是构件中已经完全损伤的所有质点的集合,从而非常自然地刻划了裂纹的逐渐发展过程。

变形和损伤全耦合的局部方法是很有吸引力的一种方法,因为它能够更恰当更完整地预测裂纹尖端的变形、损伤和断裂行为。但是在实施这种方法时,往往遇到一些具体的问题。首先,由于损伤的引入,控制裂纹尖端场的微分方程更加复杂,对其进行求解有更多的困难,对于蠕变损伤的情况尤其明显。由于解析解一般难以得到,断裂的局部方法经常借助于有限元来实现。有限元计算中经常用到单元消去技术,一旦某个单元满足了损伤断裂准则,则人为消去该单元,使其不再承受应力。另一个技术是在耦合损伤的有限元程序中,采用自适应的时间步长。第二,用连续损伤力学方法描述裂纹扩展时需要全耦合的本构关系和损伤演化方程,例如在蠕变裂纹扩展问题中,损伤不仅影响粘塑性应变率,而且影响弹性应变,也就是说有限元中的刚度矩阵是随时间不断变化的。第三,损

伤导致材料的软化行为,即对于宏观单调加载情况,裂纹尖端可以出现非单调的材料变形,这可以引起解的不唯一(分叉)、数值结果不稳定、变形局部化以及网格敏感性等一系列问题。

为了避免损伤的局部效应,可以采用的几种方法有:(1) 根据细观缺陷的统计结果,用一个特征尺寸来限定有限单元的最小尺寸;(2) 在非局部的连续介质理论的框架上,引入应力和应变的高阶梯度;(3) 采用局部限制手段;(4) 用非局部的方法定义损伤演化律。例如,任意一点 x 处的损伤演化律可以表达为^[5.34]

$$\dot{\bar{\omega}}(x) = \frac{1}{\Omega_d^*} \int_{\Omega_d} \varphi(x, \xi) \dot{\omega}(\xi) d\xi \quad (5.7.1)$$

式中 Ω_d 是 x 点附近的一个小体元, ξ 是体元内任意一点, $\dot{\omega}$ 是局部意义上的损伤演化律, $\dot{\bar{\omega}}$ 是非局部意义上的损伤演化律。 $\varphi(x, \xi)$ 是人为取定的一个函数,如

$$\varphi(x, \xi) = \exp\left[-\frac{d^2(x, \xi)}{d^*{}^2}\right] \quad (5.7.2)$$

式中 d^* 是一个特征长度, $d(x, \xi)$ 是 x 和 ξ 之间的距离。 Ω_d^* 定义为

$$\Omega_d^* = \int_{\Omega_d} \varphi(x, \xi) d\xi \quad (5.7.3)$$

5.7.2 弹性-粘塑性材料断裂的局部方法^[5.35]

各向同性的蠕变损伤演化通过宏观变量 ω 在 0 和 1 间的变化来定量描述,损伤演化方程表示为^[5.35]

$$\dot{\omega} = \left\langle \frac{\chi(\sigma)}{A} \right\rangle^r (1 - \omega)^{-k} \quad (5.7.4)$$

式中 $\chi(\sigma)$ 是依赖于应力不变量的函数,如

$$\chi(\sigma) = \sigma_1^a \sigma_e^{(1-a)} \quad (5.7.5)$$

或

$$\chi(\sigma) = \alpha\sigma_1 + 3\beta\sigma_m + (1 - \alpha - \beta)\sigma_e \quad (5.7.6)$$

式中 σ_1 是最大主应力, σ_m 是静水应力, σ_e 是 Mises 等效应力, α, β 是材料常数。式 (5.7.5) 和 (5.7.6) 都考虑了拉伸和压缩时损伤演化的不同, 对于式 (5.7.5), 在单压时 $\dot{\omega} = 0$; 对于式 (5.7.6), 则有

$$\dot{\omega}_{\text{comp}} = (1 - \alpha - 2\beta)\dot{\omega}_{\text{tens}} \quad (5.7.7)$$

材料的应变可以分解为弹性应变和粘塑性应变, 即

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{vp} \quad (5.7.8)$$

利用有效应力的定义 $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/(1 - \omega)$ 和应变等效假设, 各向同性的弹性本构关系为

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{E(1 - \omega)} \left[(1 + \nu)s_{ij} + \frac{1 - 2\nu}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \right] \quad (5.7.9)$$

对于没有应变强化和有应变强化的情况, 分别利用幂次蠕变律(即 Norton 方程)和 Lemaitre 方程, 得到粘塑性流动律表示为

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2}\dot{p} \frac{s_{ij}}{\sigma_e} \quad (5.7.10)$$

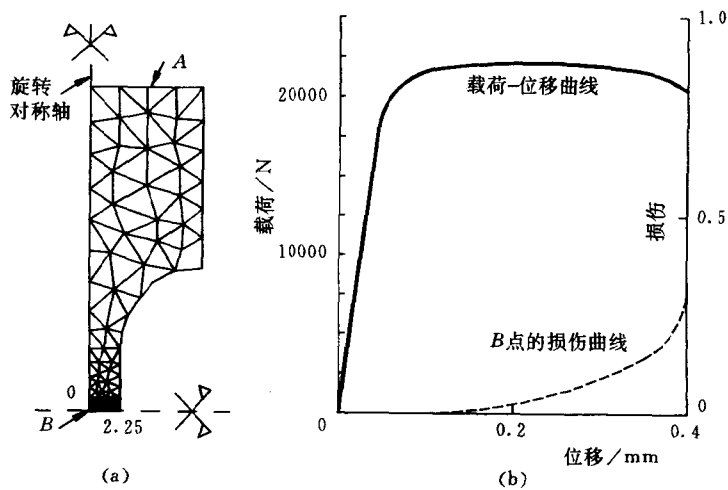
$$\dot{p} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \omega} \left[\frac{\sigma_e}{K(1 - \omega)} \right]^n & \text{(没有应变强化)} \\ \frac{1}{1 - \omega} \left[\frac{\sigma_e}{Kp^{1/m}(1 - \omega)} \right]^n & \text{(各向同性强化)} \end{cases} \quad (5.7.11)$$

对于铬镍铁合金 INCONEL718, 实验测定了本构关系中的各个材料常数, 在 Norton 方程中, $K = 1786, n = 18$; 在 Lemaitre 方程中, $K = 2432, n = 20, m = 16.75$, 其它参数为 $r = 14, k = 21.6, A = 2177, \alpha = 0.15, \beta = 0$ 。

第一个算例是圆柱形试件, 试件的形状及网格划分如图 5.32 (a) 所示, 采用均匀应变率的单向拉伸加载。由于粘塑性变形, 应力

在试件中部越来越集中,图 5.32(b)给出了有限元预测的载荷-位移曲线及损伤演化曲线。计算的结果表明,如果采用局部意义上的损伤定义($d^* = 0$),则出现明显的网格敏感性,即构件的寿命与网格划分的大小直接相关,而且在计算过程中的最后几秒内,应力分布发生混沌变化。而如果采用非局部意义上的损伤定义(这里取 $d^* = 100\mu\text{m}$),则上述局部化效应可以避免,得到比较稳定的计算结果。此外,图 5.33 对照了损伤和变形全耦合的方法和解耦的方法得到的损伤演化曲线,解耦方法预测的构件寿命往往是偏于保守的。

第二个算例是弹性-粘塑性裂纹的扩展问题,图 5.34 是网格



(a) 网格图 (b) 位移载荷曲线和损伤曲线^[5.35]

图 5.32 单拉试件

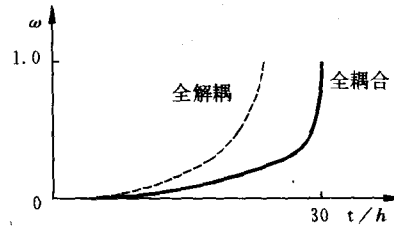


图 5.33 两种方法得到的损伤演化曲线^[5.35]

的划分,图 5.35 给出了用全耦合方法得到的裂纹尖端前方延长线上最大主应力和最大主应变的分布随时间的变化。在加载的初始时刻,裂纹尖端附近有很强的应力集中,由于蠕变损伤的逐渐演化,裂尖附近应力分布逐渐平滑,这种应力和应变场的变化以及裂纹的逐渐扩展过程是经典的断裂力学方法难以描述的。

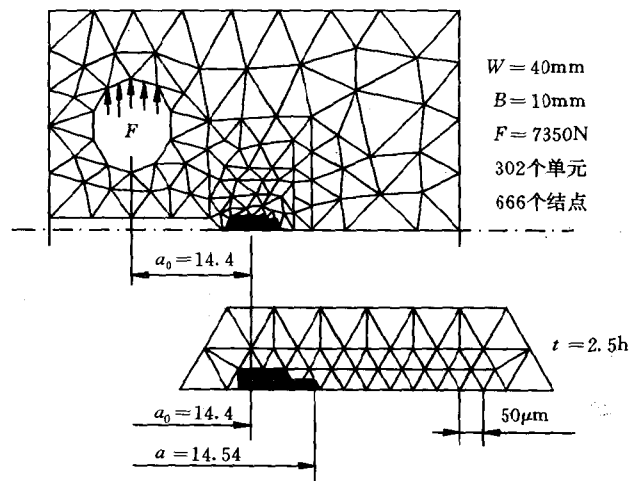


图 5.34 CT 试件中的蠕变裂纹扩展^[5.35]

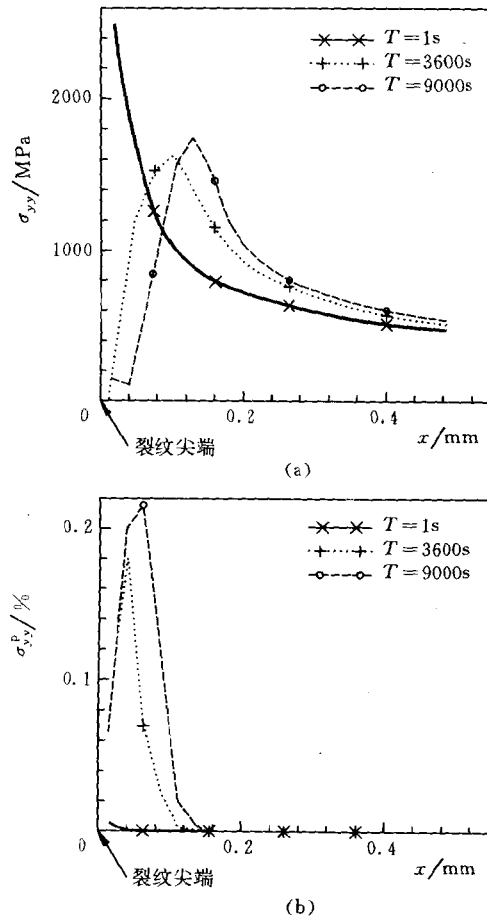


图 5.35 不同时刻裂纹尖端的应力场和应变场^[5.35]

5.7.3 Gurson 材料混合型裂纹尖端变形和损伤

在第 4 章式(4.3.22)~(4.3.28)中给出了 Gurson 模型下的

弹塑性损伤本构关系,将符合这种本构关系的材料称为 Gurson 材料。如果 $f = 0, F_1 = F_2 = 0$, 则式(4.3.22)~(4.3.28)中的本构关系退化为 Prandtl-Reuss 方程,这种材料称为 Mises 材料。

Aoki 等人^[5.37]利用 Gurson 模型下的损伤本构关系和大变形有限元方法,研究了 I 型和 II 型混合加载条件下的裂纹尖端变形和损伤行为。考虑平面应变问题,设裂纹尖端的初始曲率半径为 b_0 , 在远场施加复合型的位移载荷

$$u_a(r, \theta) = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_I \tilde{u}_a^I(r, \theta) + K_{II} \tilde{u}_a^{II}(r, \theta)], \quad r \rightarrow \infty \quad (5.7.12)$$

式中 K_I 和 K_{II} 分别为 I 型和 II 型应力强度因子, \tilde{u}_a^I 和 \tilde{u}_a^{II} 是 I 型和 II 型的位移角分布函数。Aoki 等主要计算了四种混合度的情况:(1) $K_{II}/K_I = 0$ (纯 I 型), (2) $K_{II}/K_I = 0.577$, (3) $K_{II}/K_I = 1.732$, (4) $K_{II}/K_I = \infty$ (纯 II 型)。分别对应混合度 $\psi = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ 和 0° , 其中 ψ 是单向拉伸载荷的方向与裂纹面之间的夹角,或定义为 $\psi = \text{arctg}(K_{II}/K_I)$ 。

基体材料的应力应变关系为

$$\frac{\tau}{\tau_s} = \begin{cases} \gamma/\gamma_s & \text{当 } \sigma_e \leq \sigma_s \\ (\gamma/\gamma_s)^n & \text{当 } \sigma_e > \sigma_s \end{cases} \quad (5.7.13)$$

式中 $\tau = \sigma_e/\sqrt{3}$ 是等效剪应力, γ 是等效剪应变, $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3}$ 和 γ_s 分别是屈服剪应力和屈服剪应变。在 Aoki 等人^[5.37]的计算中,取应变强化指数 $n = 0.1$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 屈服应力和弹性模量之比 $\sigma_0/E = 1/300$, 初始孔洞体积比 $f_0 = 0$, 与孔洞形核有关的常数 $F_0 = 0.01, F_2 = 0$ 。

图 5.36 给出了在四种混合度下 Gurson 材料的裂纹尖端的变形。当 $\psi = 90^\circ$ 即纯 I 型加载时,裂纹尖端自相似地扩展和钝化,然而随着 II 型加载的增加,裂纹尖端上下两侧将出现相反的变

形趋势, 一侧钝化, 另一侧锐化, 裂纹的断裂更容易发生裂纹尖端锐化的区域。而且可以看出, 对于 $\varphi = 60^\circ$ 和 30° 的情况, 当 $d/b_0 > 4$ 时, 裂纹尖端变形也是自相似的, 其中 d 是原来的裂纹尖端两点 A 和 B 在变形后对应质点 A' 和 B' 间的距离。因此, 在 $\varphi = 0^\circ, 30^\circ$ 和 60° 的情况下, 裂纹尖端的应力和应变场具有一种稳态的性质。

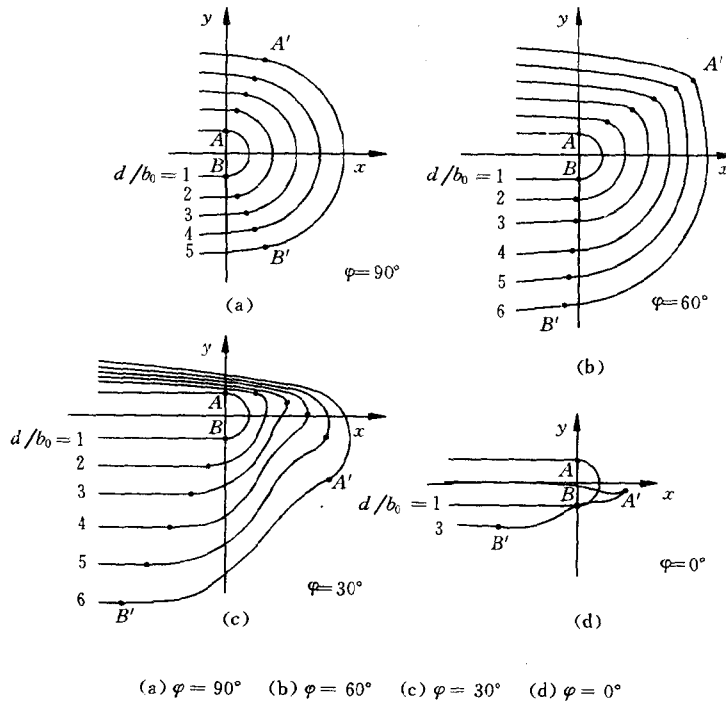


图 5.36 不同混合度下的裂纹尖端变形^[5.37]

图 5.37 是 Mises 材料和 Gurson 材料裂纹尖端变形长度 d 与载荷参数 J_{app} 的关系, J_{app} 的定义为

$$J_{app} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_1^2 + K_2^2) \quad (5.7.14)$$

图 5.37 表明微孔洞损伤对 d 的影响不明显。

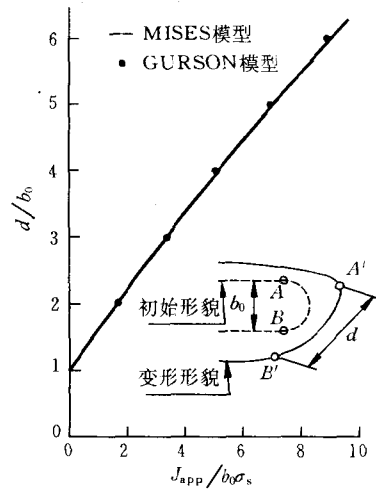


图 5.37 裂纹尖端变形长度随外载的变化曲线 ($\varphi = 60^\circ$) [5.37]

图 5.38 是 Gurson 材料在不同的混合度情况下塑性区的形状,图中 $d/b_0 = 3$ 。计算结果还表明,在塑性区外面,应力分布仍为 K 场,即

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_1 \tilde{\sigma}_{ij}^I(\theta) + K_2 \tilde{\sigma}_{ij}^{II}(\theta)] \quad (5.7.15)$$

对于 $\varphi = 60^\circ, d/b_0 = 4$ 的情况,图 5.39 给出了裂纹尖端在 $\theta = -12.5^\circ, -42.5^\circ$ 和 72.5° 的方向上 σ_θ/σ_s 随 r 的变化曲线。当 $r/d \geq 300$ 时,应力场近似为 K 场,当 $50 \leq r/d < 300$ 的范围内,应力场与 K 场有显著差别。在 $20 \leq r < 50$ 的范围内,应力场近似为 HRR 场,表示为

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_s \left(\frac{J}{R_0 \sigma_s \epsilon_s} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (5.7.16)$$

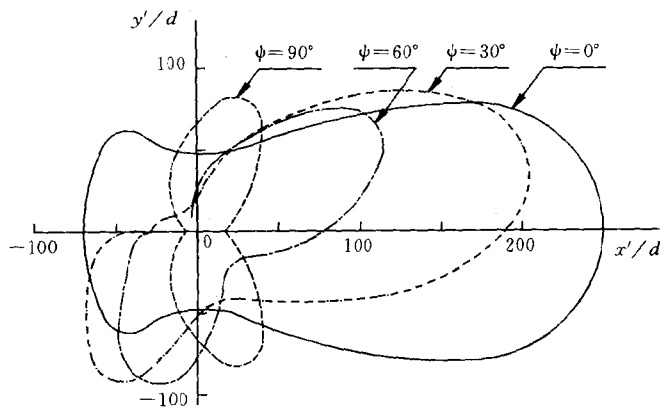


图 5.38 不同混合度下材料裂尖塑性区形状 ($d/b_0 = 3$) [5.37]

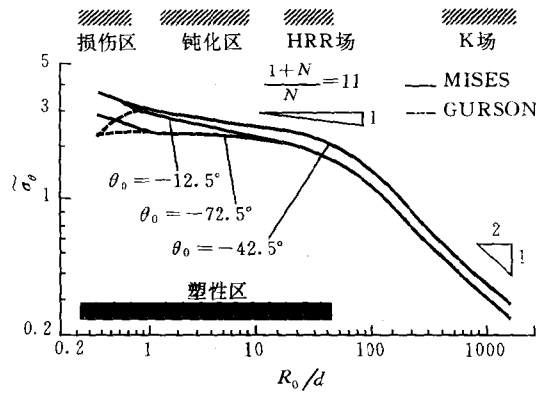


图 5.39 σ_0/σ_x 沿径向方向的分布 ($\varphi = 60^\circ, d/b_0 = 4$) [5.37]

当 $1 \leq r/d < 20$ 时, Gurson 材料与 Mises 材料的应力场仍是非常接近的, 只是当 $r/d < 1$ 时, 考虑损伤与不考虑损伤的应力场才出现明显差别。将 $1 \leq r/d \leq 20$ 范围内的应力场称为钝化裂纹尖端

场,当 $r/d < 1$ 的区域称为损伤过程区,因此损伤过程区与裂纹尖端变形长度有相当的尺寸。对于其它的混合度和载荷幅值,也同样存在四个区域,即 K 场区、HRR 场区、钝化裂纹尖端场区和损伤过程区。

此外,Aoki 等人的分析还表明,随着 II 型载荷的增大,将导致损伤过程区尺寸 r/d 的增大,同时裂纹尖端孔洞百分比减小,这是由于 II 型载荷增大了裂纹尖端的曲率半径但降低了裂纹尖端应力三轴度。

5.7.4 多孔韧性材料裂纹尖端的断裂模式

裂纹尖端的韧性断裂过程与比较均匀的应变情况(如平面应变或轴对称的拉伸试件)的断裂过程有显著的差别。裂纹尖端应力和应变场的高梯度导致应变局部化和剪切带的发生,裂纹尖端开始断裂时,外载荷仍远远低于试件的最大承载能力,此时材料细观结构的参数,如二相粒子的距离 D 对断裂过程起着重要作用^[5.38]。

在小范围屈服的条件下,Needleman 和 Tvergaard^[5.38]研究了等间距分布的多个大夹杂对 I 型平面应变裂纹尖端场的影响。假设大夹杂具有相对较弱的强度,在加载前没有孔洞存在,将弱夹杂用分布的小岛表示,在小岛内部,孔洞形核由应力控制(见节 4.3),孔洞形核幅值 f_N 是空间的函数,例如可以用如下的函数表示

$$f_N(x_1, x_2) = \bar{f}_N \exp\{-[(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2]/r_0^2\} \quad (5.7.17)$$

式中 (x_{10}, x_{20}) 和 r_0 分别是夹杂的中心坐标和半径, \bar{f}_N 为常数。在小岛中心, $f_N = \bar{f}_N$ 。设相邻弱夹杂间的距离为 D_0 ,它是材料的一个细观特征长度。

Needleman 和 Tvergaard 的计算结果表明,在考虑孔洞形核、扩展和汇合的情况下,裂纹尖端张开位移与外加载荷的关系基本

上保持线性,如图 5.40 是在四种夹杂分布情况下的结果, $b_0/2$ 是在未加载前裂纹前缘的曲率半径。裂纹尖端张开位移曲线上的明显波动是由于微孔洞的汇合引起的。

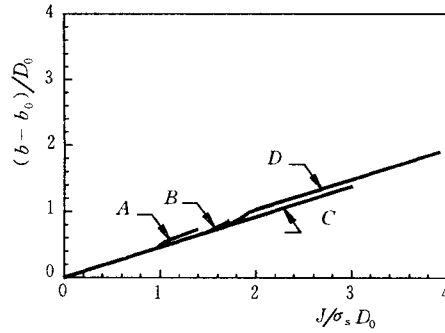


图 5.40 裂纹尖端张开位移与外加载荷的关系^[5.36]

在小范围屈服的条件下,随着外加载荷从零开始逐渐增大的过程,裂纹尖端逐渐钝化,并且存在自相似的应力和应变场。如果裂纹前方 R 处存在一个大夹杂,当外载 $J/\sigma_0 R \approx 0.5$ 时,即开始有孔洞形核,而此时的应变值仍然很小,因此孔洞形核开始于外载很小的时候,只要裂纹尖端距离最近的弱夹杂处的应力达到了形核条件,此处即产生微孔洞。随着局部应变的增大,微孔洞长大,主裂纹和弱夹杂之间开始发生应变局部化和变形剪切带,剪切带内二级孔洞的形核,长大和汇合导致主裂纹的扩展。接着,主裂纹开始与下一个夹杂发生相互作用。所以,裂纹扩展的路径对夹杂和二相粒子的分布、孔洞形核特别敏感,裂纹的断裂面上往往是弯折不平的。

Needleman 和 Tvergaard 还用数值方法计算了撕裂模量。利用 J 阻力曲线 $J(\Delta a)$, 撕裂模量定义为

$$T = \frac{E}{\sigma_s^2} \frac{dJ}{da} \quad (5.7.18)$$

利用数值计算得到的 $J(\Delta a)$ 的斜率 dJ/da , 可以估算裂纹开始扩

展的临界 J 积分值 J_{Ic} ，这样就通过数值方法把材料的细观结构特征(如夹杂分布、孔洞形核准则)与断裂力学参数(如 J_{Ic} , T , 裂纹尖端张开位移)联系起来。图 5.41 给出了三种夹杂分布情况下裂纹开始发生断裂时的裂纹尖端张开位移 b_f ，并与实验结果进行了比较，数值结果与实验结果比较接近。数值分析的另一个有意义的结论是在扩展裂纹面的附近，孔洞体积百分比仍是非常低的。

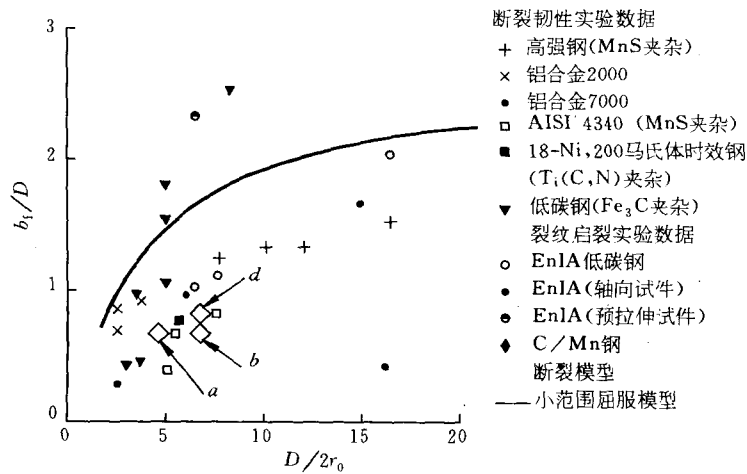


图 5.41 起始断裂时的裂纹尖端张开位移 b_f 与夹杂间距和夹杂半径 r_0 的关系^[5.38]

参 考 文 献

- 5.1 黄克智, 余寿文, 杨卫. 固体的本构关系与断裂. 现代力学讨论会文集, 中国台北, 17~34
- 5.2 Yu S W and Feng X Q. Several problems of damage and fracture mechanics. Acta Mech. Solida Sinica, 1995, 8, • 192 •

270~276

- 5.3 Yu S W and Fan X J. Temperature fields at crack tip in a damaging medium. *ZAMM*, 1992, 72(4), T166~169
- 5.4 Dugdale D S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, 8, 100~104
- 5.5 Janson T. Dugdale crack in a material with continuous damage formation. *Eng. Fract. Mech.*, 1977, 9, 891~899
- 5.6 Hult J A H and McClintock F A. Elastic-plastic stress and strain distributions around sharp notches under repeated shear. in: *Proc. of 9th Int. Congress of Applied Mechanics*, 1957, 8, 51~58
- 5.7 Rooke D P and Bradshaw F J. A study of crack tip deformation and a derivation of fracture energy. in: *Proc. of 2nd Int. Conf. of Fracture*, Brighton, 1969, 1, 46~57
- 5.8 Bui H D and Ehrlacher A. Propagation of damage in elastic and plastic solids. in: *Proc. of 5th Int. Conf. of Fracture* (Edited by Francois, D. et al.), Pergamon, Oxford, 1981, 2, 533~551
- 5.9 Bui H D, Ehrlacher A and Renard C. The steady state propagation of a damaged zone of an elastic brittle solid. in: *Proc. of 6th Int. Conf. of Fracture* (Edited by Valuri, S. R. et al.), Pergamon, Oxford, 1984, 3, 1061~1067
- 5.10 Feng X Q and Yu S W. Analysis of damage localization at the crack tip in a brittle damaged material. *Eng. Fract. Mech.*, 1996, 53(2), 169~177
- 5.11 冯西桥. 脆性材料的细观损伤理论和损伤结构的安定分

-
- 析. 清华大学博士学位论文, 1995
5. 12 Barenblatt G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle materials. *Adv. Appl. Mech.*, 1962, 7, 55~129
 5. 13 Ortiz M. A continuum theory of crack shielding in ceramics. *J. Appl. Mech.*, 1987, 54, 54~58
 5. 14 Yu Shouwen. The near tip fields and temperature distribution around a crack in a body of hardening material containing small damage. *Acta Mech. Sinica*, 1989, 5 (4), 343~352
 5. 15 Lemaitre J and Chaboche J L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1990
 5. 16 Lemaitre J. Formulation and identification of damage kinematic constitutive equations. in: *Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications* (Edited by Krajcinovic, D. and Lemaitre, J.). Springer-Verlag, 1987, 37~89
 5. 17 黄克智, 余寿文. 弹塑性断裂力学. 清华大学出版社, 1985
 5. 18 Yu S W and Gross D. The singular field at a rigid flat inclusion in hardening materials under longitudinal shear. *Eng. Fract. Mech.*, 1988, 31(4), 611~615
 5. 19 Kanninen M V F and Popelar C H. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, New York, 1985
 5. 20 Riedel H. *Fracture at High Temperature*. Springer-Verlag, Berlin, 1986
 5. 21 Riedel H and Rice J R. Tensile cracks in creeping solids. in: *Fracture Mechanics: Twelfth Conference*, ASTM

-
- STP700 (Edited by Paris, P. C.). American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1981, 112~130
5. 22 Riedel H. A continuum damage approach to creep crack growth. in: *Fundamentals of Deformation and Fracture* (Edited by Bilby, B. A. et al.). Cambridge University Press, Cambridge, 1985, 293~309
5. 23 Hayhurst D R, Brown P R and Morrison C J. The role of continuum damage in creep crack growth. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* , 1984, A311, 131~158
5. 24 Riedel H. Creep deformation at crack tips in elastic-visco-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 1981, 29(1), 35~49
5. 25 Fu L S. Creep crack growth in technical alloys at elevated temperature—a review. *Eng. Fract. Mech.* , 1980, 13, 307~330
5. 26 Monkman F C and Grant N J. in: *Proc. American Society for Testing and Materials*, 1956, 56, 593~620
5. 27 Hui C Y and Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions. *Int. J. Fracture*, 1981, 17(4), 409~425
5. 28 Yang W and Freund L B. An analysis of antiplane shear crack growth in a rate sensitive elasto-plastic material. *Int. J. Fracture*, 1986, 30, 157~174
5. 29 Hayhurst D A and Leckie F A. Behavior of Materials at high temperature. In: *Mechanical Behavior of Materials* (Edited by Carlsson J. and Ohlsson N. G.). Pergamon Press, 1983, 8~24
5. 30 Yu Shouwen and Gross D. Science Report FB6, Technis-

-
- che Hochschule Darmstadt, BRD, 1986
5. 31 姜苇. 蠕变损伤裂纹尖端场与细观损伤的声学探测. 清华大学博士学位论文, 1989
 5. 32 黄克智, 姜苇, 余寿文. 蠕变损伤材料Ⅲ型定常扩展裂纹尖端场. 塑性力学和地球动力学文集, 北京大学出版社, 1990, 1~8
 5. 33 郭田福. 裂纹尖端损伤过程区研究. 清华大学博士学位论文, 1995
 5. 34 Chaboche J L. Phenomenological aspects of continuum damage mechanics. in: *Theoretical and Applied Mechanics* (Edited by Germain, P. et al). Elsevier Science Publishers, IUTAM, 1989, 41~54
 5. 35 Saanouni K, Chaboche J L and Bathias C. On the creep crack growth prediction by a local approach. *Eng. Fract. Mech.*, 1986, 25(5/6), 617~691
 5. 36 Lemaitre J. Local approach of fracture. *Eng. Fract. Mech.*, 1986, 25(5/6), 523~537
 5. 37 Aoki S, Kishimoto K, Yoshida T and Sakata M. A finite element study of the near crack tip deformation of a ductile material under mixed mode loading. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35(4), 431~455
 5. 38 Needleman A and Tvergaard V. An analysis of ductile rupture modes at a crack tip. *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35(2), 151~183

第6章 其它损伤理论

金相学和材料科学的研究表明,多数材料的损伤破坏是由于晶界处的微裂纹和微孔洞的形核、长大引起的,这种损伤导致材料的力学性质如强度、刚度、硬度、稳定性以及寿命的改变,并最终引起材料的破断。在一定的应力状态下,晶界上微裂纹和微孔洞的发展是有一定的方向性的。因此,一个损伤理论如果要更准确地反映材料在复杂加载历史下的损伤和变形过程,就应该正确反映这些微观结构变化的特点,体现损伤材料的各向异性性质。

前面几章已经介绍了几种重要的损伤理论,包括 Kachanov-Rabotnov 的蠕变损伤理论, Lemaitre-Chaboche 塑性损伤理论, Rousselier 损伤理论, Gurson 的孔洞损伤理论及其修正模型、Bui 和 Mroz 的脆性损伤模型等,这些理论假设损伤为各向同性的,用一个宏观的标变内变量如损伤因子(或连续度)、质量密度、孔洞体积百分比等来描述损伤,因此没有体现损伤的各向异性性质。但是,正是这些经典的各向同性损伤理论促进了损伤力学的迅猛发展,也成为后来的各种损伤模型的基础。

本章介绍几种各向异性的损伤理论,包括 Murakami-Ohno 蠕变损伤理论, Chaboche 损伤理论, Krajcinovic 损伤理论, Sidroff 损伤模型, Kunin-Wang 的随机夹杂理论, Chow 等的损伤理论以及冯西桥和余寿文的微裂纹扩展区损伤理论。

6.1 Murakami-Ohno 蠕变损伤理论

在 Kachanov-Rabotnov 蠕变损伤理论中的有效应力概念基础上, Murakami(村上澄男)和 Ohno(大野信忠)发展了一种三维的各向异性损伤理论^[6.1~6.3]。他们认为材料的损伤是由微裂纹和微孔洞的发展造成的,这些微缺陷的演化导致有效承载面积的减小、材料承载能力的下降以及材料力学性能的劣化,而且这些变化都是依赖于当前的应力和损伤状态的,即是各向异性的。

6.1.1 损伤的描述

为了描述微裂纹和微孔洞引起的损伤状态,首先选取材料的一个代表性体积单元 V ,如图 6.1 所示,一方面,其尺寸和细观结构尺寸(如平均的晶粒半径、微裂纹半径)相比足够大,从而可以反映材料的统计平均性质。另一方面,其尺寸在宏观角度看来又足够小,使得在 V 内部的应力和损伤可看作均匀的。材料的损伤状态可以用一个二阶对称张量来表示

$$\Omega = \frac{3}{S_g(V)} \sum_{k=1}^N \int_V [n^{(k)} n^{(k)}] dS_g^{(k)} \quad (6.1.1)$$

式中 $dS_g^{(k)}$ 和 $n^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, N$) 表示第 k 个微裂纹的面积及其单位法向矢量, $S_g(V)$ 是单元 V 内所有晶界的总面积。显然, $\frac{1}{3} \text{tr} \Omega$ 即是缺陷所占的晶界面积百分比。当所有晶界都被微缺陷占有时, Ω 变为二阶单位张量 I 。

现在,从损伤材料中选取一个面积单元 PQR ,如图 6.2(b)所示,并称之为即时损伤构形 B_t 。假设在 B_t 中的应力、应变是均匀的,线段 PQ, PR 以及面元 PQR 的面积分别用三维欧氏空间中的矢量 dx, dy 和 vdA 表示。而该单元在初始无损伤时的构形记作

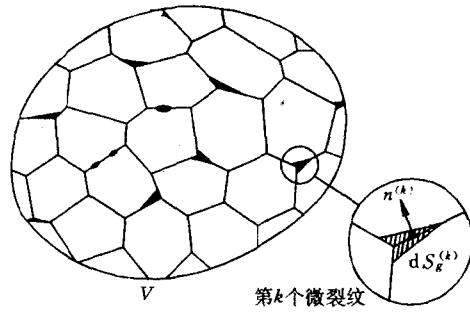
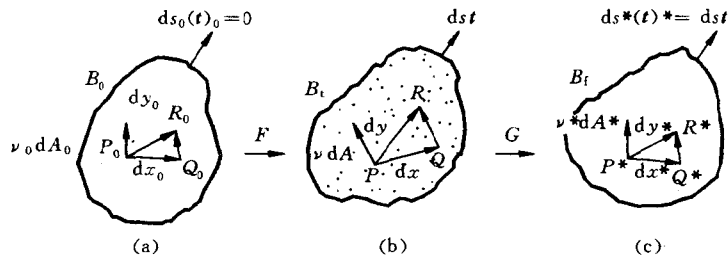


图 6.1 材料损伤的代表性体积单元



(a)初始无损构形 (b)即时损伤构形 (c)虚设无损构形

图 6.2 材料的三种构形

B_0 , 相应的线段和面积用 dx_0, dy_0 和 $\nu_0 dA_0$ 表示。从 B_0 到 B_t 的变形梯度记为 F 。

由于微缺陷的空间分布, PQR 的静承载面积将减小, 因此假设存在一个虚设的无损构形 B_t^* , 线段 P^*Q^*, P^*R^* 和面元 $P^*Q^*R^*$ 的面积分别用 dx^*, dy^* 和 $\nu^* dA^*$ 表示。面元 $P^*Q^*R^*$ 和 B_t 中的 PQR 具有相同的净承载面积, 但是由于损伤的各向异性性质, 矢量 νdA 和 $\nu^* dA^*$ 的方向一般不重合。如果从构形 B_t 到 B_t^* 的变形梯度为 G , 则有

$$dx^* = G \cdot dx, \quad dy^* = G \cdot dy \quad (6.1.2)$$

根据 Nanson 定理, 在 B_i 和 B_i^* 中的面元矢量 νdA 和 $\nu^* dA^*$ 有如下关系

$$\begin{aligned}\nu^* dA^* &= \frac{1}{2} d\mathbf{x}^* \times d\mathbf{y}^* \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{G} \cdot d\mathbf{x}) \times (\mathbf{G} \cdot d\mathbf{y}) \\ &= K(\mathbf{G}^{-1})^T \cdot (\nu dA)\end{aligned}\quad (6.1.3)$$

式中 $K = \det \mathbf{G}$, $(\)^T$ 表示二阶张量的转置。

上述分析表明, 构形 B_i 的损伤状态可以用式(6.1.3)的线性变换 $K(\mathbf{G}^{-1})^T$ 描述。引入一个二阶张量 $(\mathbf{I} - \Omega)$ 来表示 $K(\mathbf{G}^{-1})^T$, 即

$$K(\mathbf{G}^{-1})^T = (\mathbf{I} - \Omega) \quad (6.1.4)$$

或

$$\mathbf{G} = K[(\mathbf{I} - \Omega)^T]^{-1} = K(\mathbf{I} - \Omega)^{-T} \quad (6.1.5)$$

于是式(6.1.3)可以写成

$$\nu^* dA^* = (\mathbf{I} - \Omega) \cdot \nu dA \quad (6.1.6)$$

式中 Ω 是一个表示构形 B_i 的损伤状态的二阶张量, 称为损伤张量。注意, 这里的损伤张量 Ω 是在有效承载面积等价的基础上从构形 B_i 和 B_i^* 定义的, 与式(6.1.1)中的细观描述还不同。

现在讨论损伤张量 Ω 的性质。由于 $\nu^* dA^*$ 是与 B_i 中 νdA 的等效的面积矢量, 因此 $\nu^* dA^*$ 与 νdA 的点积应为正值, 即

$$(\nu^* dA^*) \cdot (\nu dA) > 0 \quad (6.1.7)$$

将式(6.1.6)代入上式, 得

$$[(\mathbf{I} - \Omega) \cdot (\nu dA)] \cdot (\nu dA) > 0 \quad (6.1.8)$$

因此 $(\mathbf{I} - \Omega)$ 应是正定的二阶张量。进而将 $(\mathbf{I} - \Omega)$ 分解为对称部分 $(\mathbf{I} - \Omega)^S$ 和反对称部分 $(\mathbf{I} - \Omega)^A$, 有

$$(\mathbf{I} - \Omega) = (\mathbf{I} - \Omega)^S + (\mathbf{I} - \Omega)^A \quad (6.1.9)$$

如果只考虑反对称部分 $(I - \Omega)^A$, 则有

$$\begin{aligned} (\nu^* dA^*) \cdot (\nu dA) &= [(I - \Omega)^A \cdot (\nu dA)] \cdot (\nu dA) \\ &= -(\nu dA) \cdot (I - \Omega)^A \cdot (\nu dA) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

此式表明张量 $(I - \Omega)^A$ 将面积矢量 νdA 变换到与之垂直的 $\nu^* dA^*$, 而对有效承载面积的减小没有反映。因此, 在后文中, 可以将损伤张量对称化, 而不会影响有效承载面积的等价性。这样, 张量 Ω 必然有三个正交的主方向 n_i 和三个对应的主值 Ω_i , 并表示为

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i n_i n_i \quad (6.1.11)$$

在构形 B_i 和 B_i^* 中, 各取张量 Ω 的一组主坐标系 $ox_1x_2x_3$ 和 $o^*x_1x_2x_3$, 坐标轴分别通过点 P, Q, R 和 P^*, Q^*, R^* , 如图 6.3 所示。从而得到两个四面体 $OPQR$ 和 $O^*P^*Q^*R^*$, 分别由面元 $PQR, P^*Q^*R^*$ 以及与 x_1, x_2, x_3 轴相垂直的侧面组成。将式 (6.1.11) 代入式 (6.1.6), 得

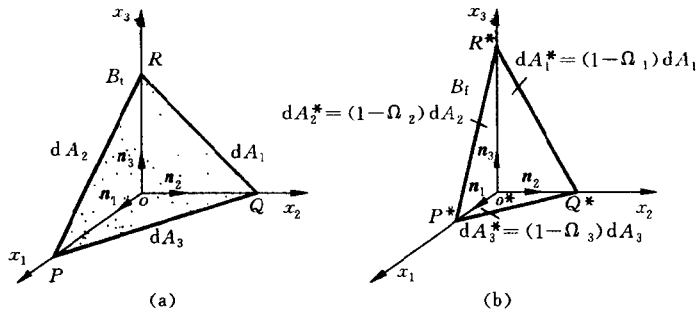
$$\begin{aligned} \nu^* dA^* &= \sum_{i=1}^3 (1 - \Omega_i) dA_i n_i \\ &= n_1 dA_1^* + n_2 dA_2^* + n_3 dA_3^* \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

式中

$$dA_i^* = (1 - \Omega_i) dA_i \quad (6.1.13)$$

$dA_i = \nu_i dA$ 和 $dA_i^* = \nu_i^* dA^*$ 分别表示 B_i 与 B_i^* 中四面体的三个侧面面积 (图 6.3)。由式 (6.1.11) 知, 损伤张量 Ω 的三个主值 Ω_i 可以解释为构形 B_i 和 B_i^* 中 Ω 的三个主平面上的有效承载面积的减少, 如图 6.4 所示。

综上所述, 微裂纹和微孔洞引起的材料损伤可以用净承载面积的减少来表征, 无论微缺陷的分布如何, 损伤状态可以用二阶对称张量 Ω 表示。式 (6.1.11) 表明, Ω 所描述的损伤状态不能比正交各向异性的对称性更复杂。



(a)即时损伤构形 (b)虚拟无损构形^[6.1]

图 6.3 损伤张量 Ω 的几何解释

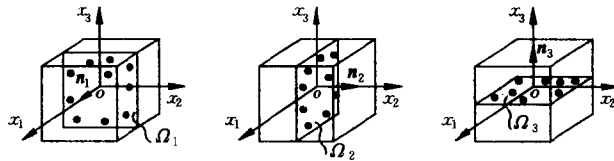


图 6.4 损伤张量主平面上的面积减缩^[6.1]

6.1.2 损伤效应张量和净应力张量

为了建立净应力张量(或称为有效应力张量) σ^* 与 Cauchy 应力张量 σ 的关系,仍然分析四面体 $OPQR$ 和 $O^*P^*Q^*R^*$,如图 6.5 所示,在构形 B_t 中的 PQR 面上的面力矢量为 $T dA$,在构形 B_i 中的 $P^*Q^*R^*$ 上的面力矢量为 $T^* dA^*$ 。由于 $T dA = T^* dA^*$ 以及式(6.1.6),得到

$$\begin{aligned} T dA &= T^* dA^* = \sigma^* \cdot (\nu^* dA^*) \\ &= \sigma^* \cdot (I - \Omega) \cdot (\nu dA) = \sigma \cdot (\nu dA) \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

因此净应力张量 σ^* 定义为

$$\sigma^* = \sigma \cdot \phi, \phi = (I - \Omega)^{-1} \quad (6.1.15)$$

其中 ϕ 称为损伤效应张量。上式的物理意义是, 损伤使得有效承载面积减小而有效应力增大为 σ^* , 换言之, 在损伤构形 B_t 中 PQR 上作用的应力 σ 与虚设无损构形 B_t 中 $P^*Q^*R^*$ 上作用有效应力 σ^* 的力学效果是完全等价的。

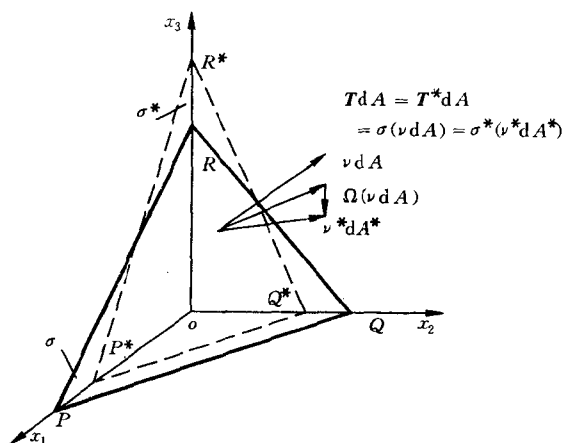


图 6.5 任意截面上净承载面积的减小^[6.1]

由式(6.1.15), 净应力张量 σ^* 一般是不对称的。而由不对称的张量 σ^* 来构造损伤材料的本构方程和演化方程是不适当的, 因此要将其对称化。常用的对称化方法是取张量 σ^* 的对称部分, 即将式(6.1.15)改写成

$$\sigma^* = \frac{1}{2} [(I - \Omega)^{-1} \cdot \sigma + \sigma \cdot (I - \Omega)^{-1}] = \frac{1}{2} (\sigma \cdot \phi + \phi \cdot \sigma) \quad (6.1.16)$$

这是 Kachanov-Rabotnov 经典损伤理论中的净应力概念在三维情况下的推广。

6.1.3 本构和演化方程

材料的蠕变变形速率和损伤演化率都与即时的损伤状态、应力状态、温度有关,而且与非弹性变形的历史有关。因此,假设有限蠕变变形的本构方程和损伤演化方程的形式为

$$D = G(\sigma, \Omega, \kappa, \theta) \quad (6.1.17)$$

$$\overset{\nabla}{\Omega} = H(\sigma, \Omega, \kappa, \theta) \quad (6.1.18)$$

式中 κ 是与材料硬化有关的常数, θ 为温度, $(\overset{\nabla}{\quad})$ 表示 Jaumann 导数。

由于 $\overset{\nabla}{\Omega}$ 表示蠕变损伤过程中微缺陷面积密度的变化率,而且孔洞的发展取决于局部的应力状态、损伤的应力放大作用以及应力集中程度, $\overset{\nabla}{\Omega}$ 可以表示为净应力张量 σ^* 的函数,即

$$\overset{\nabla}{\Omega} = \overline{H}(\sigma^*, \phi, \kappa, \theta) \quad (6.1.19)$$

在实验的基础上, Murakami 和 Ohno 建议了损伤演化方程的如下形式

$$\overset{\nabla}{\Omega} = \gamma I + \sum_i M^{(i)} : [\nu^{(i)} \nu^{(i)}] + \sum_j N^{(j)} : [\nu_b^{(j)} \nu_b^{(j)}] \quad (6.1.20)$$

式中 γ 是关于 σ^* , ϕ , κ 和 θ 的一个标量函数, $M^{(i)}$ 和 $N^{(j)}$ 为四阶张量函数, $\nu^{(i)}$ 和 $\nu_b^{(j)}$ 分别为净应力张量 σ^* 及其偏斜张量 $\sigma_b^* = \sigma^* - \frac{1}{3}(\text{tr}\sigma^*)I$ 的正主值对应的主方向。

与损伤演化不同的是,损伤材料的变形不仅与净承载面积的减小有关,而且与微缺陷的三维配置(如方向,分布)有关。Murakami 和 Ohno 认为式(6.1.19)中的净应力张量 σ^* 不能用于本构方程,他们用一个四阶张量 Γ 定义了用于本构方程的有效应力张量

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma : \Gamma + \Gamma : \sigma) \quad (6.1.21)$$

其中四阶损伤效应张量 Γ 的一般形式为

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijkl} = & \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \nu \delta_{ij} \delta_{kl} \\ & + \pi \phi_{ij} \delta_{kl} + \rho (\delta_{ik} \phi_{jl} + \delta_{il} \phi_{jk} + \delta_{jk} \phi_{il} + \delta_{jl} \phi_{ik}) \\ & + A \phi_{ij} \phi_{kl} + B \delta_{ij} \Psi_{kl} + C \Psi_{ij} \delta_{kl} + D (\delta_{ik} \Psi_{jl} + \delta_{il} \Psi_{jk} \\ & + \delta_{jk} \Psi_{il} + \delta_{jl} \Psi_{ik}) + G \phi_{ij} \Psi_{kl} + H \Psi_{jl} \phi_{ki} \\ & + K \Psi_{ij} \phi_{kl} \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

$$\Psi_{ij} = \phi_{ip} \phi_{pj} \quad (6.1.23)$$

式中 λ, μ, ν, π 和 ρ 为常数, A, B, C, D, G, H 和 K 是 ϕ_j 的标量不变量的多项式^[6.2]。

假设应力和损伤对蠕变变形的影响可以用 $\bar{\sigma}$ 和 ϕ 来描述, 于是蠕变的本构方程可以表示为

$$D = \bar{G}(\bar{\sigma}, \phi, \kappa, \theta) \quad (6.1.24)$$

函数 \bar{G} 的最一般形式可以表示为 $\bar{\sigma}$ 和 ϕ 的张量多项式

$$\begin{aligned} \bar{G} = & \beta_0 I + \beta_1 \phi + \beta_2 \phi^2 + \beta_3 \bar{\sigma} + \beta_4 (\phi \cdot \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \cdot \phi) \\ & + \beta_5 (\phi^2 \cdot \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \cdot \phi^2) + \beta_6 \bar{\sigma}^2 + \beta_7 (\phi \cdot \bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^2 \cdot \phi) \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

式中 $\beta_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 为 κ, θ 以及下列关于 $\bar{\sigma}$ 和 ϕ 的标量不变量的函数

$$\left. \begin{aligned} & \text{tr} \phi, \text{tr} \phi^2, \text{tr} \phi^3, \text{tr} \bar{\sigma}, \text{tr} \bar{\sigma}^2, \text{tr} \bar{\sigma}^3 \\ & \text{tr}(\phi \cdot \bar{\sigma}), \text{tr}(\phi^2 \cdot \bar{\sigma}), \text{tr}(\phi \cdot \bar{\sigma}^2), \text{tr}(\phi^2 \cdot \bar{\sigma}^2) \end{aligned} \right\} \quad (6.1.26)$$

在特殊情况下, 如果变形率张量 D 只依赖于 $\bar{\sigma}$, 则式(6.1.25)简化为

$$D = \beta_0 I + \beta_3 \bar{\sigma} + \beta_6 \bar{\sigma}^2 \quad (6.1.27)$$

由于体积应变在变形过程中一般不明显(临近断裂时刻除外), 因此可以假设体积是不可压缩的, 此时, 上式变成

$$D = \bar{\beta}_1 \bar{\sigma}_D + \bar{\beta}_2 [\bar{\sigma}_D^2 - \frac{1}{3} (\text{tr} \bar{\sigma}_D^2) I] \quad (6.1.28)$$

式中 $\bar{\beta}_1$ 和 $\bar{\beta}_2$ 是与 β_i 相类似的标量函数, $\bar{\sigma}_D = \bar{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr} \bar{\sigma}) I$ 。

6.1.4 粘塑性各向异性损伤模型

在蠕变损伤情况下, 损伤演化方程可以表示为如下的形式

$$\dot{\Omega} = \left\langle \frac{\chi(\sigma^*)}{A} \right\rangle^r [\gamma I + (1 - \gamma) \nu^{(1)} \nu^{(1)}] \quad (6.1.29)$$

式中 $\nu^{(1)}$ 是最大主应力方向的单位矢量, A, r 和 γ 为材料常数, $\chi(\sigma^*)$ 是描述等时面的净应力张量的不变量。采用 Hayhurst 的定义, 有

$$\chi(\sigma^*) = \alpha J_0(\sigma^*) + \beta J_1(\sigma^*) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\sigma^*) \quad (6.1.30)$$

式中 α 和 β 是与温度有关的材料常数。在恒定的多轴应力作用下, 断裂时间为

$$t_c = \frac{1}{k+1} \left\langle \frac{\chi(\sigma)}{A} \right\rangle^{-r} \quad (6.1.31)$$

式(6.1.29)和(6.1.31)中三角括号的定义为

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x \leq 0 \end{cases} \quad (6.1.32)$$

利用 Lemaitre 提出的有效应力的概念, 损伤材料的粘塑性本构方程可以从无损的形式得到, 只需将 Cauchy 应力换为有效应力 $\bar{\sigma}$ 。对于各向同性强化的情况, 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \left[\frac{J_2(\bar{\sigma})}{K} \right]^n p^{-n/m} \\ \dot{\epsilon}^p &= \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\bar{\sigma}^1}{J_2(\bar{\sigma})} \end{aligned} \right\} \quad (6.1.33)$$

对于单向拉伸的特例情况, 损伤演化方程和本构方程简化

为^[6.5]

$$\dot{\Omega} = \left[\frac{\sigma}{A(1-\Omega)} \right]^r \quad (6.1.34)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \left[\frac{\sigma}{A(1-c\Omega)} \right]^n p^{-n/m} \quad (6.1.35)$$

如果应力始终保持不变,积分式(6.1.34),得

$$\Omega = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{\frac{1}{r+1}} \quad (6.1.36)$$

式中 t_c 为蠕变断裂时间

$$t_c = \frac{1}{r+1} \left(\frac{\sigma}{A} \right)^{-r} \quad (6.1.37)$$

如果只考虑第二蠕变律,即 $m \rightarrow \infty$, 且设 $n = r - 2$, 由式(6.1.35)和(6.1.36)得到

$$\epsilon^p = \epsilon_k^c \left\{ 1 - \frac{1 - t/t_c}{[1 - c + c(1 - t/t_c)^{1/(r-1)}]^{n-1}} \right\} \quad (6.1.38)$$

式中断裂应变 ϵ_k^c 为

$$\epsilon_k^c = \left(\frac{\sigma}{K} \right)^n \frac{t_c}{1-c} \quad (6.1.39)$$

6.1.5 蠕变裂纹扩展的局部方法

断裂力学在描述裂纹扩展和断裂时往往采用整体的方法,即通过全场的应力应变分析找出起主导作用的控制参量,并用它来描述裂纹的状态。这种方法在描述材料的断裂行为,尤其是二维弹性以及等幅循环加载情况下的材料行为时有很大优点。但是在处理一些更复杂的断裂现象时存在一些局限性,在分析非比例加载下的裂纹扩展、具有分布损伤的材料断裂等问题有较大困难。

克服这些困难的一种途径是采用断裂的局部方法。这种方法是在连续损伤力学的框架下发展起来的。随着裂纹尖端损伤的发展,材料单元的局部刚度不断下降,因此,如果把达到损伤临界值

(或刚度临界值)的材料单元看作裂纹,就能合理地分析裂纹的萌生、扩展直至断裂的全过程。局部方法存在的一个问题是裂纹的起裂和扩展对有限元网格的尺寸和布置相关,因此有限元网格的合理划分和网格敏感性的分析是局部方法的重要问题。

为了考察损伤各向异性对裂纹扩展的影响, Murakami 等人^[6,4]将 Murakami-Ohno 损伤模型和有限元方法相结合,利用局部化方法研究了在比例加载和非比例加载情况下含中心穿透裂纹的铜板在 250℃ 温度下的二维蠕变断裂问题。

在金相学实验观察的基础上,近似认为蠕变损伤即微孔洞的形核、长大和汇合主要发生在与最大主应力相垂直的晶界上。采用式(6.1.11)中的二阶损伤张量 Ω 和式(6.1.16)中的净应力张量 σ^* , 并假设各向异性损伤的演化方程表示为

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = & B[\xi\sigma_1^* + \zeta\sigma_e^* + \frac{1}{3}(1 - \xi - \zeta)\text{tr}\sigma^*] \\ & \times \{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot (\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_1)]\}^l \\ & \times [(1 - \eta)\mathbf{I} + \eta\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_1] \end{aligned} \quad (6.1.40)$$

式中 σ_1^* 和 σ_e^* 是净应力张量 σ^* 的最大主值和 Mises 等效应力, \mathbf{Y}_1 是 σ_1^* 的主方向, $B, k, l, \xi, \zeta, \eta$ 都是材料常数。当 $\eta = 0$ 时,式(6.1.40)相当于 Kachanov-Rabotnov 的各向同性损伤理论,当 $\eta \neq 0$ 时,则体现了损伤的各向异性。采用 McVetty 型的蠕变律和应变强化假设,损伤材料的本构关系表示为

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^c &= \frac{3}{2}[A_1\sigma_e^{n_1-1}\alpha\exp(-\bar{\alpha}t)s + A_2(\sigma_e^*)^{n_2-1}s^*] \\ \epsilon_e^c(t) &= A_1\sigma_e^{n_1-1}(t)[1 - \exp(-\bar{\alpha}t)] + A_2[\sigma_e^*(t)]^{n_2}t \\ \epsilon_c^c(t) &= \int_0^t \left[\frac{2}{3}\text{tr}(\dot{\epsilon}^c)^2 \right]^{1/2} dt \end{aligned} \quad (6.1.41)$$

式中 s 和 s^* 分别为 σ 和 σ^* 的偏斜张量, A_1, A_2, n_1, n_2 和 α 是材料常数, \bar{t} 是一个虚设的时间变量,可以由式(6.1.41)的前两个方程

消去。对 250℃的铜,各个材料常数的取值为: $B_1 = 4.46 \times 10^{-13}$ MPa^{-k}/h, $l = 5.0$, $k = 5.55$, $\xi = 1.0$, $\zeta = 0.0$, $A_1 = 2.4 \times 10^{-7}$ MPa^{-n₁}, $A_2 = 3.0 \times 10^{-6}$ MPa^{-n₂}/h, $n_1 = 2.6$, $n_2 = 7.1$, $\alpha = 0.05$ /h, $E = 66\ 240$ MPa。

Murakami 等^[6.4]用有限元方法分析了含中心裂纹的方板的蠕变断裂问题。他们采用了单元消去技术,当单元内部的损伤张量 D 的最大主值达到临界值 D_c 时,单元发生断裂,将其刚度减缩为零。为了考虑损伤的各向异性对蠕变裂纹问题的影响,分别计算了在比例加载和非比例加载条件下各向同性损伤($\eta=0$)、完全各向异性损伤($\eta=1$)和组合损伤($\eta=0.5$)情况下的蠕变裂纹扩展问题,包括裂纹从启裂、扩展到最后断裂过程中的应力重新分布、寿命和扩展路径。因此,利用断裂的局部方法可以较好地模拟结构的劣化过程以及裂纹尖端附近应力和损伤场的动态演化过程。计算结果表明,在比例加载情况下,损伤的各向异性性质对断裂过程(包括构件的蠕变寿命和裂纹扩展路径)不产生明显影响,而在非比例加载情况下则不然。图 6.6 给出了 $\eta=1$ 和 $\eta=0$ 时非比例加载的两种计算结果,图中 t_i , t_s 和 t_r 分别为启裂时间,载荷改变时间(裂纹长度从 $2a_0$ 变为 $3a_0$ 的时间)和最终断裂时间。在载荷变化前裂纹的扩展方向是相同的,都是沿裂纹方向向前扩展,但在载荷变化后,各向异性损伤理论预测裂纹沿着与初始裂纹相垂直的方向断裂,最终断裂时间为 $t_r = 1159$ h。而各向同性损伤理论预测裂纹大约沿着 45° 的方向断裂,最终断裂时间为 $t_r = 615$ h。因此,结论是损伤的各向异性性质将延长非比例加载构件的寿命,而且对裂纹的扩展路径有明显影响。

此外, Murakami 等^[6.4]还得到了以下几个有意义的结论:(1)不同的网格划分方法对构件的寿命不会产生明显影响,但对裂纹扩展方向产生显著影响;(2)采用相同的网格划分方法,但采用不同的网格尺寸,对裂纹的扩展路径没有明显影响。图 6.7 给出了单

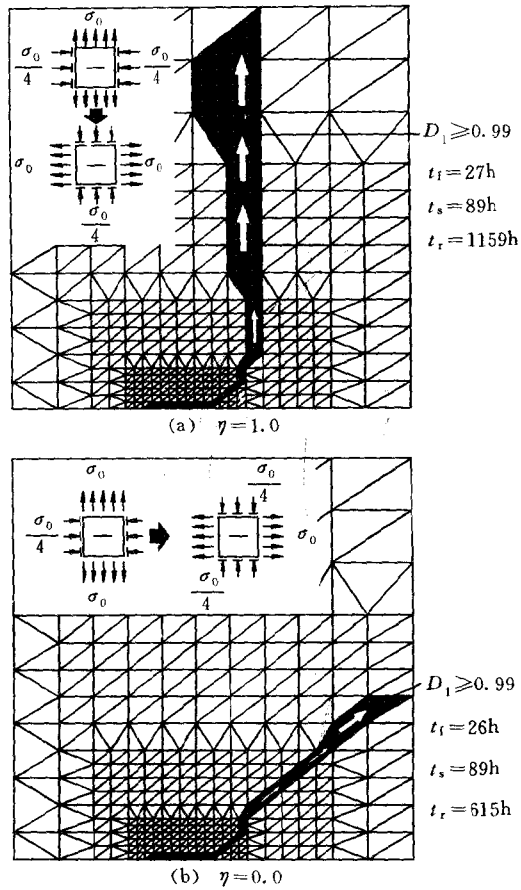


图 6.6 非比例加载条件下的蠕变裂纹扩展^[6.4]

元数对启裂时间 t_f 和最终断裂时间 t_r 的影响曲线,可以看出,网格越细,扩展速度越快,寿命越短,但是总的来说,网格尺寸对蠕变裂纹扩展速率的影响并不很大。在疲劳裂纹扩展情况下,裂纹扩展对

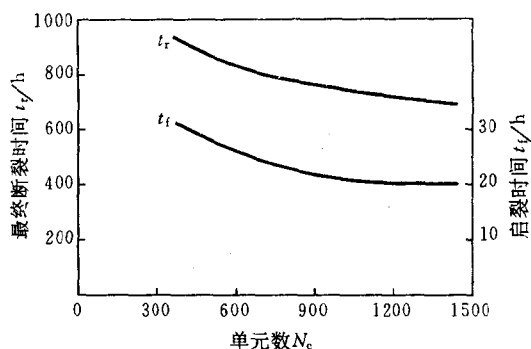


图 6.7 启裂时间和最终断裂时间与单元数的关系^[6.4]

网络的敏感性更大。(3)当临界损伤因子 D_c 取 0.99 和 0.5 时,构件寿命几乎是相同的,因此,在一定范围内(D_c 不接近于 0),临界损伤因子的取值对结果没有显著影响。

6.1.6 小结

通过对 Murakami-Ohno 蠕变损伤理论的上述介绍,可以看到该理论有如下的优点:

(1) 该理论给出了各向异性蠕变损伤演化方程和本构方程的一般形式,而且可以适用于任意的加载路径,包括非比例加载。

(2) 材料的损伤状态用一个二阶张量来描述,只有 6 个独立分量。这是对 Kachanov-Rabotnov 损伤概念的推广,具有较明晰的物理意义。

(3) 该理论得到了一些实验结果的支持。Murakami 和 Imaizumi^[6.7]用黄铜薄板上等间距规则排列的圆孔来模拟损伤,通过拉伸实验,测量弹塑性应变及断裂应力等,对损伤效应张量 ϕ 、有效应力张量 σ^* 、损伤演化方程和本构方程进行了验证,实验结果与理论吻合得较好。

另外, Murakami-Ohno 损伤理论也存在一些明显的缺点, 主要表现在:

(1) 它没有显示出损伤材料的弹性律, 即没有体现弹性常数随损伤的变化, 而只是给出了蠕变应变的损伤本构关系。

(2) 在粘塑性律中, 有效应力的定义采用了很多个系数, 这些系数难以确定。

(3) 该理论不是在严格的连续热力学理论的基础上导出的。

6.2 Chaboche 各向异性损伤理论^[6.5, 6.8~6.13]

为了避免 Murakami-Ohno 损伤理论的缺点, Chaboche 提出了又一种各向异性损伤理论, 他用有效应力的概念以及损伤材料的等效行为引入张量损伤变量, 坚持用弹性的改变来表达损伤状态。这是第 3 章介绍的 Lemaitre-Chaboche 各向同性损伤理论在各向异性损伤情况下的推广。

6.2.1 有效应力和损伤张量

设无损材料的弹性应力应变关系为

$$\sigma = \Lambda : \epsilon \quad (6.2.1)$$

而损伤材料的弹性应力应变关系为

$$\sigma = \tilde{\Lambda} : \epsilon \quad (6.2.2)$$

式中 Λ 和 $\tilde{\Lambda}$ 分别为无损材料和损伤材料的四阶弹性张量。有效应力 $\tilde{\sigma}$ 定义为无损材料中发生与损伤材料相同的应变所需的应力, 即

$$\tilde{\sigma} = \Lambda : \epsilon = \Lambda : \tilde{\Lambda}^{-1} : \sigma \quad (6.2.3)$$

式中四阶张量 $M = \Lambda : \tilde{\Lambda}$ 是 Kachanov 和 Rabotnov 经典损伤理论的推广, 可以由无损和损伤材料的弹性张量得到。将式(6.2.3)改

写成

$$\tilde{\sigma} = (I - D)^{-1} : \sigma \quad (6.2.4)$$

式中 D 为不对称的四阶损伤张量, 表示为

$$D = I - \tilde{\lambda} : \tilde{\lambda}^{-1} \quad (6.2.5)$$

损伤张量 D 可以描述损伤材料的弹性行为, 有

$$\sigma = \tilde{\lambda} : \epsilon = (I - D) : \Lambda : \epsilon \quad (6.2.6)$$

损伤张量 D 也可以用均匀化的数学方法得到, 至少对于椭圆形孔洞或周期分布的微裂纹损伤的材料体元如此。损伤材料的弹性刚度张量可表示为

$$\tilde{\lambda}_{ijkl} = \frac{1}{V} \left[\int_{V^*} \Lambda_{ijrs} dV - \int_{V^*} \Lambda_{ijkl} b_{klrs} dV \right] \quad (6.2.7)$$

式中 V 为材料单元的体积, V^* 为基体的体积, b_{ijkl} 为应力集中系数的四阶张量。设基体材料是均匀的, 上式变成

$$\tilde{\lambda}_{ijkl} = \left(\frac{V^*}{V} \delta_{ir} \delta_{js} - \frac{1}{V} \int_{V^*} b_{ijrs} dV \right) \Lambda_{rskl} \quad (6.2.8)$$

该式亦可写成

$$\tilde{\lambda}_{ijkl} = \left[\delta_{ir} \delta_{js} - \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) \delta_{ir} \delta_{js} - \frac{1}{V} \int_{V^*} b_{ijrs} dV \right] \Lambda_{rskl} \quad (6.2.9)$$

引入四阶损伤张量 D , 其分量为

$$D_{ijkl} = \left(1 - \frac{V^*}{V} \right) \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{V} \int_{V^*} b_{ijkl} dV \quad (6.2.10)$$

于是有

$$(I - D) = M(D) = \Lambda : \tilde{\lambda}^{-1} \quad (6.2.11)$$

损伤张量 D 是不对称的, 例如 $D_{1122} \neq D_{2211}$, 因此式(6.2.4)所定义的有效应力张量 $\tilde{\sigma}$ 也不对称。

为了建立 D 的演化方程, 引入一个标量损伤因子 D 。在比例

加载情况下,认为损伤张量的主方向和应力张量的主方向相同,损伤演化方程的简化形式为

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}^* \dot{\mathbf{D}} \quad (6.2.12)$$

式中 \mathbf{Q}^* 是与材料相关的张量,也可与温度有关。上式中,材料损伤随载荷演化的非线性性质包含在 $\dot{\mathbf{D}}$ 中,即由单位体积中缺陷的密度来体现,而在加载过程中损伤的方向性不改变, $\dot{\mathbf{D}}$ 也与这种方向性无关。

在一般的情况下,损伤的演化率与有效应力张量的主方向有关,表示为

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\mathbf{D}} \quad (6.2.13)$$

式中 $\mathbf{Q}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ 由 \mathbf{Q}^* 从参考坐标系向主应力坐标系旋转得到。

6.2.2 热力学框架

为方便起见,只讨论等温的情况,即 $\Delta T = 0$,此时,各向异性的损伤演化只与材料和主应力的方向相关。

损伤材料的比自由能依赖于损伤张量 \mathbf{D} 。把自由能分解成弹性部分和塑性部分,即

$$\Psi = \Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{D}) + \Psi_p(T, V_k) \quad (6.2.14)$$

式中 V_k 为内变量,例如硬化参数。弹性自由能 Ψ_e 与损伤张量 \mathbf{D} 存在如下的线性关系

$$\rho \Psi_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.2.15)$$

于是弹性律为

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.2.16)$$

有效应力为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (6.2.17)$$

与损伤张量 \mathbf{D} 功共轭的变量为

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi_c}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (6.2.18)$$

如果引入四阶损伤张量 D 的迹作为损伤的一种标量度量 D

$$D = \text{ctr} D = c D \vdots I \quad (6.2.19)$$

式中 c 为待定参数。同样引入 Y 的迹 Y , 即

$$Y = \text{tr} Y = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \rho \left(\frac{\partial \Psi_c}{\partial D} \right) \vdots I = \rho c \frac{\partial \Psi_c}{\partial D} \quad (6.2.20)$$

也可以将上述变量表示成有效应力 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的函数

$$-Y = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6.2.21)$$

$$-Y = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\Lambda}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6.2.22)$$

引入耗散势函数 $\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_K, Y; \boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_K, D)$, 广义正交法则表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{V}_K = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial A_K}, \quad \dot{D} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} \quad (6.2.23)$$

式中 A_K 是 V_K 的功共轭热力学力。为简单起见, 假设由变形过程和损伤过程引起的耗散是不耦合的, 即

$$\varphi^* = \varphi_p^*(\boldsymbol{\sigma}, A_K; V_K, T) + \varphi_D^*(Y; \boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D) \quad (6.2.24)$$

而且假设损伤耗散势与 Y 成线性关系

$$\varphi_D^* = -F(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D) Q \vdots Y \quad (6.2.25)$$

式中 Q 为定义损伤扩展律各向异性的四阶张量。这种各向异性相对于有效应力张量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的主方向坐标系是不变的, 而演化过程的非线性性质表现在函数 F 中。由正交法则得到

$$\dot{D} = Q F(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D) \quad (6.2.26)$$

由 $D = \text{ctr} D, Y = \text{tr} Y$, 得到标量 D 的演化律为

$$\dot{D} = \text{ctr} \dot{D} = \text{ctr} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} \right) = -c \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} = F(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D) \quad (6.2.27)$$

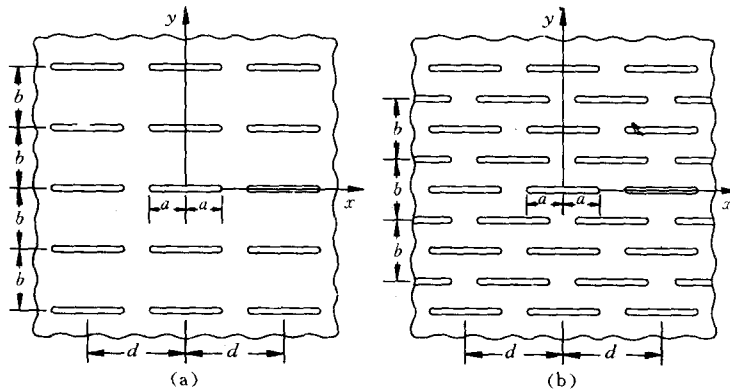
其中 $c = (\text{tr} \mathbf{Q})^{-1}$ 。这些方程也可以通过弹性律表示为有效应力的函数,有

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{D}} \quad (6.2.28)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = G(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, T, D) \quad (6.2.29)$$

为了使损伤演化方程中的材料参数尽可能少,可以利用在特殊缺陷配置下的线弹性解来定义张量 \mathbf{Q} 。例如,对于图 6.8 所示的平行分布的微裂纹,通过均匀化得到损伤张量形式为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} D_1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} D_1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & D_5 & \\ & & & & & D_5 \end{bmatrix} \quad (6.2.30)$$



(a) 矩形分布 (b) 交错分布

图 6.8 平行分布的微裂纹

方向 1 是与裂纹相垂直的方向。此时有效应力表示为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{33} \\ \tilde{\sigma}_{23} \\ \tilde{\sigma}_{31} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 & 0 & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{D_1}{1-D_1} & 1 & 0 & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{D_1}{1-D_1} & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \frac{1}{1-D_5} & \\ & & & & & \frac{1}{1-D_5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.2.31)$$

因此,这种特殊情况可以用两个损伤变量 D_1 和 D_2 表示。如果假设所有的微缺陷发展都垂直于最大主应力方向,则可以选取 $Q=\Gamma$, 其中

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \xi & \\ & & & & & \xi \end{bmatrix} \quad (6.2.32)$$

式中 ξ 为材料参数, ν 为泊松比。事实上,每种材料多少都表现出这种各向异性的性质。将这种完全各向异性与各向同性组合起来,则得到描述一般各向异性情况下的一种简单表示

$$Q = (1-\gamma)\Gamma + \gamma I \quad (6.2.33)$$

其中包含两个参数即 ξ 和 γ 。当 $\gamma=1$ 时,材料的损伤演化是各向同性的,当 $\gamma=0$ 时,损伤演化是完全各向异性的。

损伤过程的耗散功可以写为

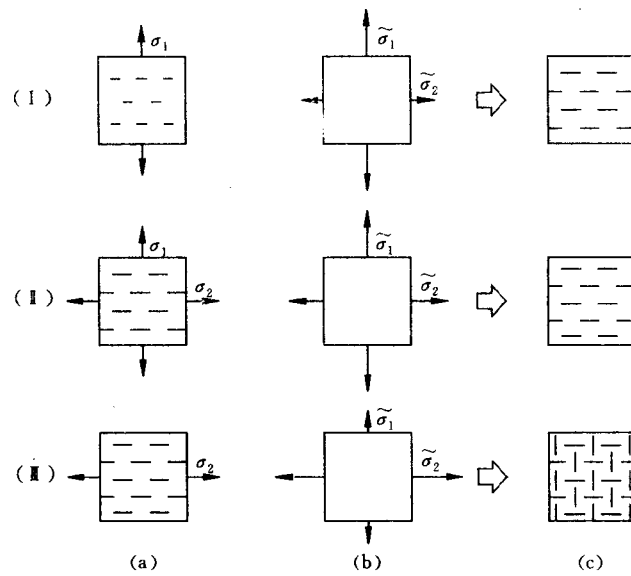
$$\Phi_D = -Y \dot{\epsilon} \quad \dot{D} = -Y \dot{\epsilon} \quad Q\dot{D} = -[(1-\gamma)Y \dot{\epsilon} + \gamma Y] \dot{D} \quad (6.2.34)$$

将式(6.2.21)和(6.2.22)代入上式,可以看出方括号中的两项均为负值,因此有

$$\dot{D} \geq 0 \quad (6.2.35)$$

为了展示在非比例加载情况下的各向异性的损伤演化,考察图 6.9 中的例子,并令 $\gamma=0$ 。首先沿方向 1 拉伸,缺陷在垂直于 σ_1 的平面内发展,有

$$D_1 = QD_1 \quad (6.2.36)$$



(a)外加载荷 (b)有效应力 (c)损伤演化

图 6.9 复杂加载情况下的各向异性损伤演化

如果沿方向 1 和 2 同时增大载荷, $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 > 0$, 则最大有效主应力仍

为 $\tilde{\sigma}_1$, 即 $\tilde{\sigma}_1 > \tilde{\sigma}_2$, 缺陷仍在相同的平面内发展。接下来沿方向 2 增大载荷, $\dot{\tilde{\sigma}}_1 = 0, \dot{\tilde{\sigma}}_2 > 0$, 当 $\tilde{\sigma}_2$ 变成最大有效主应力即 $\tilde{\sigma}_2 > \tilde{\sigma}_1$ 时, 缺陷将在与方向 2 垂直的平面内发展, 此时有

$$D_2 = D_1 + Q_2 D_2 = Q D_1 + V : Q : V^T D_2 \quad (6.2.37)$$

式中

$$V = RR \quad (6.2.38)$$

R 表示方向 1 和 2 的旋转张量。当达到 $D_1 = D_2$ 时, 损伤的各向异性变弱, 方向 1 和 2 表现出相同的性质, 而在其它方向上性质稍有差异。由此也看出, 损伤状态的各向异性和损伤演化的各向异性是不同的。

6.2.3 粘塑性各向异性损伤模型

将 Chaboche 的各向异性损伤理论应用于粘塑性情况。在各向同性硬化情况下, 粘塑性势函数为

$$\varphi^* = \frac{K}{n+1} \left[\frac{J_2(\tilde{\sigma})}{K} \right]^{n+1} \dot{p}^{-n/m} \quad (6.2.39)$$

粘塑性流动律为

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \left[\frac{J_2(\sigma)}{K} \right]^n \dot{p}^{-n/m} \frac{(I - D)^{-1} : \tilde{\sigma}'}{J_2(\tilde{\sigma})} \quad (6.2.40)$$

在单拉情况下, 该式简化为

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{1-D} \left[\frac{\sigma}{K(1-D)} \right]^n \dot{p}^{-n/m} \quad (6.2.41)$$

与式(6.1.34)比较发现, 损伤项的指数不同。这是由于在 Murakami-Ohno 理论中有效应力在流动律中代替 Cauchy 应力, 而在 Chaboche 理论中有效应力在流动势函数中代替 Cauchy 应力。

根据前面的讨论, 损伤演化方程可以表示为

$$\dot{D} = Q\dot{D} = [(1-\gamma)\Gamma + \gamma I]D \quad (6.2.42)$$

标量 D 的演化方程选取如下的形式

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi^*(\tilde{\sigma}, D)}{A} \right\rangle \left(\frac{\chi(\sigma)}{A} \right)^{r-k(\chi(\sigma))} \quad (6.2.43)$$

式中 $\chi(\sigma)$ 是等效应力, $\chi^*(\tilde{\sigma}, D)$ 是等效有效应力, 定义为

$$\chi(\sigma) = \alpha J_0(\sigma) + \beta J_1(\sigma) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\sigma) \quad (6.2.44)$$

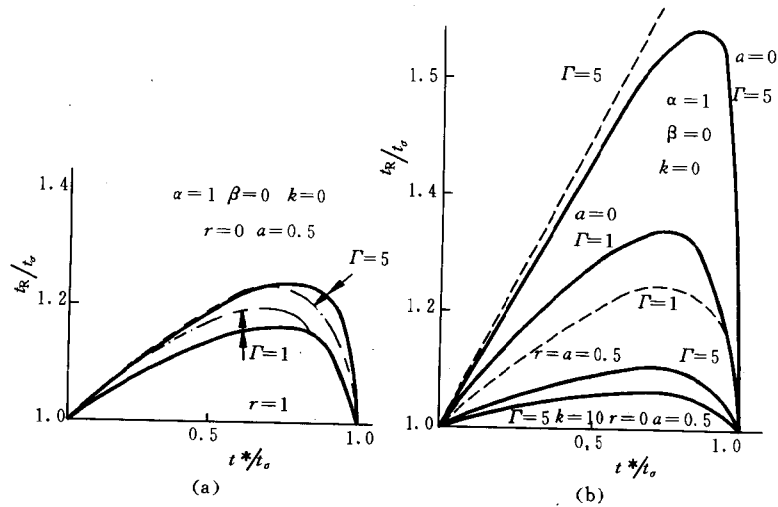
$$\chi^*(\tilde{\sigma}, D) = \alpha J_0(\tilde{\sigma}) + \frac{\beta}{1 + 2A} J_1(\tilde{\sigma}) + \frac{1 - \alpha - \beta}{1 - A} J_2(\tilde{\sigma}) \quad (6.2.45)$$

$$A = \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{(1 - \gamma)D}{1 - \gamma D} \quad (6.2.46)$$

其中 α, β 为材料常数。

在单拉情况下, 三个有效主应力表示为

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{1 - D}$$



(a) — Chaboche 理论, Munakami-Ohno 理论

(b) — Chaboche 理论, Kachanov 理论

图 6.10 先拉后扭的蠕变断裂时间^[6,9]

$$\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_3 = \frac{\nu(1-\gamma)D}{(1-\nu)(1-\gamma D)} \frac{\sigma_1}{1-D} \quad (6.2.47)$$

在各向同性损伤时, $\gamma=1$, 得到 $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_3 = 0$, 即得到与 Kachanov 的有效应力完全相同的形式。

上面的公式可用于非比例加载的情况, 可以描述损伤的各向异性演化过程及其对材料行为的影响。图 6.10 给出了试件先经过拉伸, 再进行扭转情况下的断裂时间 t_R , 图中 t_0 为单拉情况下的蠕变断裂时间, t^* 为预先拉伸的时间。图 6.10 还给出了用 Murakami-Ohno 理论和 Kachanov 理论得到的相应结果, 以供比较。

6.2.4 Murakami-Ohno 理论与 Chaboche 理论的比较

在很多情况下, 损伤的各向异性是明显的。在蠕变情况下, 有些材料, 例如铜的微缺陷基本上在与最大主应力垂直的平面内发展, 因此表现出很强的各向异性。而另一些材料, 如铝合金, 缺陷分布则趋向于各向同性^[6.14, 6.15]。Murakami-Ohno 和 Chaboche 建立的两种损伤理论都描述了在多轴加载情况下材料蠕变损伤的各向异性性质, 其中的两个重要步骤是:

(1) 定义在恒定的多轴应力加载情况下蠕变断裂的应力不变量, 它描述了应力空间中具有相同断裂时间的面。

(2) 定义各向异性的损伤演化律, 这种各向异性相对于主方向保持不变, 即与时间无关, 只依赖于材料本身。损伤演化的非线性可以从单轴拉伸情况下的损伤演化方程来体现。

这两种损伤理论的主要区别表现在以下几方面:

(1) 损伤变量的定义不同。Murakami-Ohno 理论采用的是二阶损伤张量; Chaboche 理论则采用了四阶损伤张量, 但后者包含更少的材料常数。

(2) 损伤演化律中的有效应力不同。Murakami-Ohno 理论采用式 (6.1.16) 中的净应力张量 σ^* ; 而 Chaboche 理论采用式

(6.2.4)中的有效应力张量 $\tilde{\sigma}$ 。

(3) 应力应变关系的建立方法不同。Murakami-Ohno 在建立本构方程时定义了新的有效应力张量 $\tilde{\sigma}$, 用以代替无损材料本构方程中的 Cauchy 应力; 而 Chaboche 首先假设了粘塑性势函数, 并利用正交法则建立了应力应变关系。

表 6.1 总结了这两种理论的相同点和区别。尤其注意的是在 Murakami-Ohno 理论中损伤演化的等价性以及 Chaboche 理论中本构方程的等价性。

表 6.1

		Murakami-Ohno 理论	Chaboche 理论
定	损伤定义	用净承载面积定义: $\Omega = 1 - A^*/A$	用等效本构行为定义: $D = 1 - \tilde{E}/E$
	有效应力	净应力: $\sigma^* = \frac{\sigma}{1-\Omega}$	有效应力: $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D}$
义	损伤演化律的等价性	等价: $\dot{\Omega}(\sigma, \Omega) = \dot{\Omega}(\sigma^*, 0)$	不等价 $\dot{D}(\sigma, D) \neq \dot{D}(\tilde{\sigma}, 0)$
	本构方程的等价性	不等价: $\dot{\epsilon}^p(\sigma, \Omega) \neq \dot{\epsilon}^p(\sigma^*, 0)$	等价: $\dot{\epsilon}^p(\sigma, D) = \dot{\epsilon}^p(\tilde{\sigma}, 0)$
简化方程	损伤律	$\dot{\Omega} = \left[\frac{\sigma}{A(1-\Omega)} \right]^r$	$\dot{D} = \frac{(\sigma/A)^r}{(1-D)^k}$
	蠕变损伤演化式(等应力)	$\Omega = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{\frac{1}{r+1}}$	$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{\frac{1}{n+1}}$
	本构方程(第二、三阶段蠕变)	$\dot{\epsilon}^p = B \left(\frac{\sigma}{1-c\Omega} \right)^n$	$\dot{\epsilon}^p = \frac{B}{1-D} \left(\frac{\sigma}{1-D} \right)^n$
一般形式	损伤张量	二阶张量 Ω	四阶非对称张量 D
	有效应力张量	$\sigma^* = \frac{1}{2}(\sigma \cdot \phi + \phi \cdot \sigma)$ $\phi = (I - \Omega)^{-1}$ $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}[\Gamma : \sigma + (\Gamma : \sigma)^T]$ $\Gamma = \Gamma(\Omega)$	$\tilde{\sigma} = (I - D)^{-1} : \sigma$

6.3 Krajinovic 的矢量损伤理论

Krajinovic 等的矢量损伤理论^[6.16~6.19]仍是在 Kachanov 损伤理论的基础上发展起来的。所考虑的损伤表现为偏平状的微裂纹,并用矢量来描述。这一理论是建立在不可逆热力学框架之上的,可以同时引入多种相互独立的损伤,可以应用于脆性损伤^[6.16,6.17]、延性损伤和蠕变损伤等^[6.18,6.19]。

6.3.1 热力学框架

在小变形梯度的情况下,含内变量的热力学理论中著名的 Clausius-Duhem 不等式表示为

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot \text{grad}T \geq 0 \quad (6.3.1)$$

式中 σ_{ij} 和 ϵ_{ij} 为应力和应变张量, ρ, ψ, s, T 和 \mathbf{q} 分别为质量密度、Helmholtz 自由能、熵、温度和热流矢量。

将应变分解成弹性部分和塑性部分

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (6.3.2)$$

由正交法则得到应力张量

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.3.3)$$

和广义热力学力

$$A_i = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i}, \quad R_i = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega_i} \quad (6.3.4)$$

式中 α_i 为与塑性变形相关的内变量(例如硬化参数), ω_i 为损伤变量。

引入热力学通量

$$\mathbf{J} = \{\boldsymbol{\epsilon}_j^p, \dot{\alpha}_j, \dot{\omega}_j, \mathbf{q}_j\} \quad (6.3.5)$$

和共轭力矢量

$$\mathbf{X} = \rho \left\{ \sigma_{ij}, -A_j, -R_j, -\frac{1}{T} \text{grad} T \right\} \quad (6.3.6)$$

则 Clausius-Duhem 不等式(6.3.1)又表示为

$$\rho \dot{D} \equiv \mathbf{X} \cdot \mathbf{J} \geq 0 \quad (6.3.7)$$

一般情况下,本构方程可以表示为如下的形式

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\epsilon}^e, T, \text{grad} T, X_l) \quad (6.3.8)$$

但在平衡状态附近,本构方程可以线性化并表示为

$$J_m = L_{mk} X_k \quad (6.3.9)$$

或

$$X_k = l_{mk} J_m \quad (6.3.10)$$

其中 l_{mk} 和 L_{mk} 为互逆的两个矩阵。由式(6.3.7)和(6.3.9),得到

$$\rho \dot{D} = L_{mk} X_m X_k = l_{mk} J_m J_k \geq 0 \quad (6.3.11)$$

引入如下的耗散势函数 F

$$F = \frac{1}{2} \rho \dot{D} = \frac{1}{2} L_{mk} X_m X_k \quad (6.3.12)$$

Rice^[6.23]证明了耗散势函数 $F(\boldsymbol{\epsilon}^e, \mathbf{X}, T)$ 存在的一个充分条件是热力学通量的每一个分量的变化率只依赖于它的共轭力,即

$$J_m = f(X_m, T, H) \quad (6.3.13)$$

式中 H 表示细观结构配置的当前状态。由式(6.3.12)及正交法则,得到

$$J_m = \frac{\partial F}{\partial X_m} \quad (6.3.14)$$

在某些情况下,采用对偶的势函数 $F^*(\boldsymbol{\epsilon}^e, \mathbf{J}, T)$ 更为方便,且有

$$X_m = \frac{\partial F^*}{\partial J_m} \quad (6.3.15)$$

式中 F^* 由 F 的 Frenchel 变换得到。

由上述方法推导本构关系和损伤演化方程是比较方便的。只

要确定了耗散势函数 F 的具体形式,就可以建立每一个损伤变量的演化方程,而无需分别去寻找每个损伤变量的演化规律。而且用这种方法得到的损伤理论在形式上与塑性理论相类似。

6.3.2 脆性材料的损伤理论

对于脆性材料如陶瓷、灰口铁、某些岩石和混凝土,其损伤主要为微裂纹的形核和发展。伴随着损伤发生的塑性变形往往很小,因此将这些材料视为理想脆性的。

在准静态加载、小变形和等温条件下,Helmholtz 自由能是弹性应变张量 ϵ 和损伤矢量 $\bar{\omega}$ 的标量函数,与坐标系的选取无关,表示为^[6.16]

$$\begin{aligned} \rho\psi = & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\epsilon_{kk}\epsilon_{ll} - \mu(\epsilon_{kk}\epsilon_{ll} - \epsilon_{kl}\epsilon_{lk}) + \bar{C}_1\bar{\omega}_k^{(\alpha)}\epsilon_{kl}\bar{\omega}_l^{(\beta)}\epsilon_{mm} \\ & + \bar{C}_2\bar{\omega}_k^{(\alpha)}\epsilon_{kl}\epsilon_{lm}\bar{\omega}_m^{(\beta)} \\ & (\alpha, \beta = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

式中 $\bar{C}_i = \bar{C}_i(X_l, D_k, T)$ 为材料参数, $\bar{\omega}^{(\alpha)}$ 和 $\bar{\omega}^{(\beta)}$ 表示编号为 α 和 β 的不同损伤矢量,它们之间可以是相互独立的。

由式(6.3.3)和(6.3.16)得

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (6.3.17)$$

如果只考虑单一损伤场,有

$$\begin{aligned} K_{ijkl} = & \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \bar{C}_1(\delta_{ij}\bar{\omega}_k\bar{\omega}_l + \delta_{kl}\bar{\omega}_i\bar{\omega}_j) \\ & + \bar{C}_2(\delta_{jk}\bar{\omega}_i\bar{\omega}_l + \delta_{il}\bar{\omega}_j\bar{\omega}_k) \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

应力应变关系的增量形式为

$$d\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} d\epsilon_{kl} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \omega_k} d\bar{\omega}_k \quad (6.3.19)$$

或

$$d\sigma_{ij} = K_{ijkl}d\epsilon_{kl} + \bar{K}_{ijm}d\bar{\omega}_m \quad (6.3.20)$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{K}_{ijm} = & \bar{C}_1 \epsilon_{kl} [\delta_{ij} (\delta_{km} \bar{\omega}_l + \delta_{lm} \bar{\omega}_k) + \delta_{kl} (\delta_{im} \bar{\omega}_j + \delta_{jm} \bar{\omega}_i)] \\ & + \bar{C}_2 \epsilon_{kl} [\delta_{jk} (\delta_{im} \bar{\omega}_l + \delta_{lm} \bar{\omega}_i) + \delta_{il} (\delta_{jm} \bar{\omega}_k + \delta_{km} \bar{\omega}_j)]\end{aligned}\quad (6.3.21)$$

根据式(6.3.17),应力是 $\bar{\omega}$ 的二次函数,而在Kachanov模型中应力和损伤变量间为线性关系。实际上这两个模型是可以统一起来的,只要令

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_i \mathbf{n} = \omega_i^{\frac{1}{2}} \mathbf{n} \quad (6.3.22)$$

其中

$$\omega = \omega_i \mathbf{n} \quad (6.3.23)$$

式中 ω_i 表示与 \mathbf{n} 垂直的横截面内的缺陷密度。将损伤变量 $\bar{\omega}$ 用 $\omega_i \mathbf{n}$ 代替,式(6.3.18)和(6.3.23)写成

$$\begin{aligned}K_{ijkl} = & \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + C_1 (\delta_{ij} \omega_k \omega_l + \delta_{kl} \omega_i \omega_j) \\ & + C_2 (\delta_{jk} \omega_i \omega_l + \delta_{il} \omega_j \omega_k)\end{aligned}\quad (6.3.24)$$

$$\begin{aligned}\bar{K}_{ijm} = & C_1 \epsilon_{kl} [\delta_{ij} (\delta_{km} \omega_l + \delta_{lm} \omega_k) + \delta_{kl} (\delta_{im} \omega_j + \delta_{jm} \omega_i)] \\ & + C_2 \epsilon_{kl} [\delta_{jm} (\delta_{im} \omega_l + \delta_{lm} \omega_i) + \delta_{il} (\delta_{jm} \omega_k + \delta_{km} \omega_j)] \\ & + 2 [C_1 (\delta_{ij} \omega_k \omega_l + \delta_{kl} \omega_i \omega_j) + C_2 (\delta_{jk} \omega_i \omega_l + \delta_{il} \omega_j \omega_k)] \frac{\omega_m}{\omega_p \omega_p} \epsilon_{kl}\end{aligned}\quad (6.3.25)$$

式中

$$C_i = \frac{\bar{C}_i}{\sqrt{\omega_p \omega_p}} \quad (6.3.26)$$

于是增量形式的应力应变关系变成

$$d\sigma_{ij} = K_{ijkl} d\epsilon_{kl} + \bar{K}_{ijm} d\omega_m \quad (6.3.27)$$

下面考虑微孔洞的扩展。一般来说,微孔洞的几何变化包括两种基本模式即膨胀和滑移,事实上只要对式(6.3.22)两边求导即

得到 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_i n + \bar{\omega}_i \dot{n}$ 。如图 6.11(a) 所示为一偏平状微孔洞, 变形后成为图 6.11(b) 中虚线所示的形状, 并等效为它的最大投影, 由图 6.11(b) 中实线所示。

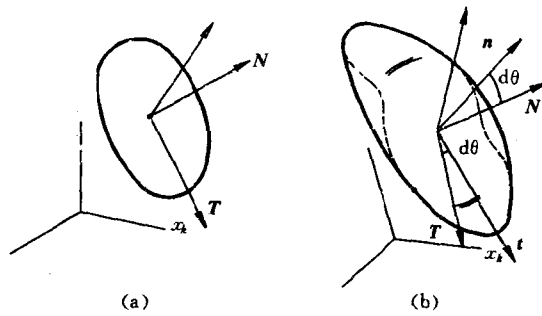


图 6.11 微孔洞的几何变化

这种微孔洞的扩展相当于一种映射, 即从状态 (ψ, σ, q, s) 下的微孔洞 dA_K 变换到状态 $(\psi + d\psi, \sigma + d\sigma, q + dq, s + ds)$ 下的 da_k , 由 X^K 表示物质坐标, x^k 表示空间坐标, 映射关系为

$$da_k = J \frac{\partial X^K}{\partial x^k} dA_K \quad (6.3.28)$$

式中 J 表示坐标变换的 Jacobian 矩阵的值。微孔洞面积的平方为

$$(da)^2 = J^2 \bar{C}^{KL} dA_K dA_L \quad (6.3.29)$$

式中 \bar{C}^{KL} 为 Green 变形张量的逆。由此得到

$$(da)^2 - (dA)^2 = (J^2 \bar{C}^{KL} - G^{KL}) dA_K dA_L = 2d\Omega^{KL} dA_K dA_L \quad (6.3.30)$$

式中 G^{KL} 为逆变度量张量, $d\Omega^{KL} = J^2 \bar{C}^{KL} - G^{KL}$ 为微孔洞几何变化的度量。由非线性弹性理论, 孔洞的膨胀为

$$\frac{da}{dA} = \left[J^2 C^{KL} \frac{dA_K}{dA} \frac{dA_L}{dA} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[(2d\Omega^{KL} + G^{KL}) N_K N_L \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.3.31)$$

其中 $N_K = dA_K/dA$ 为初始微孔洞表面 dA 的法向 N 的方向余弦。在孔洞主坐标系 (N, T) 下 (T 为滑移方向), 孔洞面积的膨胀为

$$\frac{da}{dA_N} = \left(1 + 2 \frac{d\Omega^{(NN)}}{G^{(NN)}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.3.32)$$

这里 (NN) 表示不求和。在正交坐标系下, 对于小增量步, 有

$$d\Omega_{NN} = \left(\frac{da - dA}{dA} \right)_N \quad (6.3.33)$$

这样二阶张量 $d\Omega_{NT}$ 的主对角线上的项表示在垂直于法向的平面内微孔洞面积的相对增长。而非对角张量 $d\Omega_{NT}$ 表示由于旋转引起的法向 N 和 n 的夹角, 即

$$2d\Omega_{NT} = \sin(N, n) \approx d\theta \quad (6.3.34)$$

考虑到 Kachanov 的损伤变量的定义

$$\omega_N = \frac{dA_N}{A_N} \quad (6.3.35)$$

即有

$$d\omega_N = \left(\frac{da - dA}{A} \right)_N \quad (6.3.36)$$

式中 A_N 为垂直于 N 的横截面的面积。由式(6.3.33)和(6.3.36), 得到

$$d\omega_N = \omega_N d\Omega_{NN} \quad (6.3.37)$$

由于损伤变量定义为矢量, 其分量为 $\omega_i = \omega_N n_i$, 而 ω_N 是一个标量, 则损伤扩展的运动学方程为

$$d\omega_i = d\omega_N n_i + \omega_N dn_i \quad (6.3.38)$$

利用置换张量 e_{ijk} , 式(6.3.34)可重写为

$$dn_i = \frac{1}{2} e_{ijk} d\Omega_k \quad (6.3.39)$$

将式(6.3.37)和(6.3.39)代入(6.3.38),得

$$d\omega_i = \omega_N \left(d\Omega_{NN} n_i + \frac{1}{2} e_{ijk} d\Omega_{kj} \right) \quad (6.3.40)$$

进而需要建立描述损伤演化的张量 $d\Omega_{NN}$ 和应变增量 $d\epsilon_{ij}$ 之间的关系,这里采用损伤面的概念。所谓损伤面,是指应变空间中的一个曲面,该面上各点对应的损伤值相等。损伤面用一个由状态变量和内变量构成的函数 $f = f(\epsilon, \omega, T)$ 来描述,可以由实验确定,在缺少实验数据的情况下也可以假设损伤面的一般形状。

如果 ϵ_{NN} 和 ϵ_{NT} 分别为垂直和正切于扁平状微孔洞的应变,可以推测

$$d\Omega_{NN} = d\Omega_{NT} = 0, \text{ 当 } \epsilon_{NN} \leq 0, \epsilon_{NT} = 0 \quad (6.3.41a)$$

$$d\Omega_{NN} > 0, d\Omega_{NT} = 0, \text{ 当 } \epsilon_{NN} = \epsilon_{NN}^*, \epsilon_{NT} = 0 \quad (6.3.41b)$$

$$d\Omega_{NN} > 0, |d\Omega_{NT}| > 0, \text{ 当 } \epsilon_{NN} = 0, \epsilon_{NT} = \epsilon_{NT}^* \quad (6.3.41c)$$

$$f(\epsilon_{NN}^*, \epsilon_{NT}^*, \omega, T) = f(\epsilon_{NN}^*, -\epsilon_{NT}^*, \omega, T) \quad (6.3.42)$$

式中星号表示损伤面上的值,如图 6.12 所示。

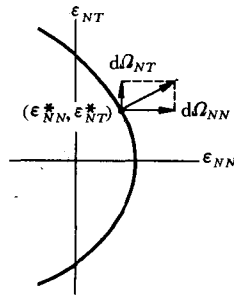


图 6.12 应变空间中的损伤面

如果假设损伤速率垂直于损伤面,则

$$d\Omega_{NN} = \kappa G(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, T) \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NN}} d\varepsilon_{NN} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NT}} d\varepsilon_{NT} \right) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NN}} \quad (6.3.43a)$$

$$d\Omega_{NT} = \kappa G(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, T) \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NN}} d\varepsilon_{NN} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NT}} d\varepsilon_{NT} \right) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NT}} \quad (6.3.43b)$$

式中 $G(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, T)$ 是由状态变量和内变量构成的非负标量函数, κ 为一标量因子, 定义为

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} > 0 \\ 0, & \text{在其它情况} \end{cases} \quad (6.3.44)$$

标量函数 $G(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, T)$ 由一致性条件得到。由 $df=0$, 得

$$d\omega_N = -\kappa \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_N} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NN}} d\varepsilon_{NN} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NT}} d\varepsilon_{NT} \right) \quad (6.3.45)$$

由式(6.3.37)和(6.3.43), 得到

$$G(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\omega}, T) = - \left[\omega_N \frac{\partial f}{\partial \omega_N} \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{NN}} \right) \right]^{-1} \quad (6.3.46)$$

上面的讨论是在微孔洞的局部坐标系 (N, T) 中进行的, 有必要将应变 ε_{NT} 变换到任意一个总体坐标系, 设总体坐标系的三个轴用 1, 2, 3 表示。在平面应变条件下, 转换关系为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{NN} &= \cos^2\theta \varepsilon_{11} + \sin^2\theta \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{NT} &= -\sin\theta \cos\theta (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \end{aligned} \quad (6.3.47)$$

式中 θ 为 N 轴与 1 轴的夹角。对上式微分, 得到

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{NN} &= \cos^2\theta d\varepsilon_{11} + \sin^2\theta d\varepsilon_{22} - 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \sin 2\theta d\Omega_{NT} \\ d\varepsilon_{NT} &= \sin\theta \cos\theta (d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{22}) - 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \cos 2\theta d\Omega_{NT} \end{aligned} \quad (6.3.48)$$

至此已经导出了脆性损伤材料的本构关系和损伤演化规律。

6.3.3 混凝土单拉单压损伤分析

首先分析单轴拉伸的情况。假设微裂面的扩展主要发生在与拉伸轴垂直的平面内。

由式(6.3.17)和(6.3.18),得到单拉应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = EK \begin{bmatrix} 1 + (C_1 + C_2)\omega & \bar{\nu} + \frac{1}{2}C_1\omega & \bar{\nu} + \frac{1}{2}C_1\omega \\ \bar{\nu} + \frac{1}{2}C_1\omega & 1 & \bar{\nu} \\ \bar{\nu} + \frac{1}{2}C_1\omega & \bar{\nu} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (6.3.49)$$

式中

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad K = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (6.3.50)$$

$\omega = \omega_1$ 为垂直于拉伸方向的损伤。

由式(6.3.20),应力应变关系的增量形式为

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = EK \begin{bmatrix} 1 + (C_1 + C_2)\omega & \bar{\nu} + \frac{1}{2}C_1\omega & \frac{1}{2}C_1\omega \\ \bar{\nu} + \frac{1}{2}C_1\omega & 1 & \bar{\nu} \\ \bar{\nu} + \frac{1}{2}C_1\omega & \bar{\nu} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \end{Bmatrix} + EK \begin{bmatrix} (C_1 + C_2)\epsilon_{11} + \frac{1}{2}(\epsilon_{22} + \epsilon_{33})C_1 \\ \frac{1}{2}C_1\epsilon_{11} \\ \frac{1}{2}C_1\epsilon_{11} \end{bmatrix} d\omega \quad (6.3.51)$$

联想到 Mohr-Coulomb 准则,选取损伤面为双曲面的形式(图 6.13),即

$$f = \epsilon_{NN} + B_3(\omega_N^*)^{\frac{1}{2}} \sqrt{B_2^{-2}\epsilon_{Nr}^2 + \omega_N^*} - B_1\omega_N^* = 0 \quad (6.3.52)$$

式中 B_1, B_2 和 B_3 是与温度相关的材料参数, ω_N^* 为已经记录的最大损伤。由一致性条件得到,

$$\begin{aligned} & (B_1\omega_N^* - \epsilon_{NN})d\epsilon_{NN} + \left(\frac{B_3}{B_2}\right)^2 \\ & \times \omega_N^*\epsilon_{NT}d\epsilon_{NT} + \left[B_1\epsilon_{NN} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{B_3}{B_2}\epsilon_{NT}\right)^2 - (B_1^2 \right. \\ & \left. - B_3^2)\omega_N^*\right]d\omega_N = 0 \end{aligned} \quad (6.3.53)$$

式中 $\epsilon_{NT}, \epsilon_{NN}$ 和 ω_N^* 满足加载条件

$$f(\epsilon, \omega, T) = 0 \quad \text{且} \quad \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} > 0 \quad (6.3.54)$$

在单拉条件下损伤面简化为

$$f = \epsilon_{11} + (B_3 - B_1)\omega = 0 \quad (6.3.55)$$

一致性条件为

$$d\epsilon_{11} = (B_1 - B_3)d\omega \quad (6.3.56)$$

于是损伤演化方程为

$$d\omega = \begin{cases} \frac{d\epsilon_{11}}{B_1 - B_3}, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \epsilon_{11}d\epsilon_{11} > 0 \\ 0, & \text{当 } f < 0, \text{ 或 } f = 0 \text{ 且 } \epsilon_{11}d\epsilon_{11} < 0 \end{cases} \quad (6.3.57)$$

损伤开始扩展的条件为

$$\epsilon_{11} \geq \epsilon_{11}^0 = (B_1 - B_3)\omega^0 \quad (6.3.58)$$

式中 ω^0 为材料初始损伤,反映了材料在形成和加工过程中产生的损伤。 ϵ_{11}^0 是损伤开始发展的临界应变值,可由单拉应力应变关系的比例极限得到。

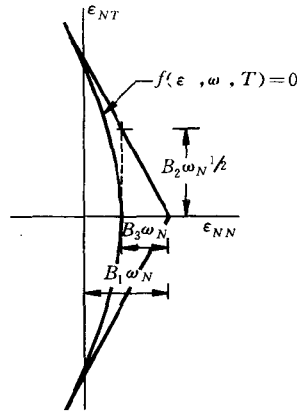


图 6.13 在 $(\epsilon_{NN}, \epsilon_{NT})$ 平面内的损伤面

由式(6.3.51),得到

$$d\epsilon_{22} = d\epsilon_{33} = \begin{cases} -(1-\nu) \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{C_1}{B_1 - B_3} \epsilon_{11} \right) d\epsilon_{11} & \text{当 } \epsilon_{11} > \epsilon_{11}^0 \\ -(1-\nu) \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1}{2} C_1 \omega^0 \right) d\epsilon_{11} & \text{当 } \epsilon_{11} < \epsilon_{11}^0 \end{cases} \quad (6.3.59)$$

对此式积分,得

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \begin{cases} -(1-\nu) \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1}{2} \frac{C_1}{B_1 - B_3} \epsilon_{11} \right) \epsilon_{11} & \text{当 } \epsilon_{11} > \epsilon_{11}^0 \\ -(1-\nu) \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1}{2} C_1 \omega^0 \right) \epsilon_{11} & \text{当 } \epsilon_{11} < \epsilon_{11}^0 \end{cases} \quad (6.3.60)$$

将式(6.3.59)和(6.3.60)代回(6.3.51),并利用初始条件 $\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^0$ 时 $\sigma_{11} = \sigma_{11}^0$,得到脆性损伤材料单轴拉伸的封闭解

$$\frac{1}{EK} \sigma_{11} = \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \epsilon_{11} + \frac{1}{B_1 - B_3} [C_2 + (1-2\nu)C_1] \epsilon_{11}^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{C_1^2}{(B_1 - B_3)^2} \epsilon_{11}^3, \quad \text{当 } \epsilon_{11} > \epsilon_{11}^0 \quad (6.3.61)$$

在卸载时,损伤保持不变, $d\omega = 0$,有

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = - \left(\nu + \frac{1-\nu}{2} C_1 \omega^* \right) \epsilon_{11} \quad (6.3.62)$$

和

$$\sigma_{11} = EK \left[1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} + C_1(1-2\nu)\omega^* + C_2\omega^* - \frac{1-\nu}{2} C_1^2 (\omega^*)^2 \right] \epsilon_{11} \quad (6.3.63)$$

式中 ω^* 为累积损伤的最大值。

与损伤变量 ω_1 相共轭的热力学力为

$$Y_1 = - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega_1} = - EK (C_1 \epsilon_v \epsilon_{11} + C_2 \epsilon_{11}^2) \quad (6.3.64)$$

式中 ϵ_v 为体积应变。

Fonseka 和 Krajcinovic 就以下三种不同配比的混凝土试件:

(1) $f'_c = 73.8 \text{ MPa}$, $E = 27.6 \text{ GPa}$, $B_1 = B_3 = 4.149 \times 10^{-3}$;

(2) $f'_c = 50.3 \text{ MPa}$, $E = 21.4 \text{ GPa}$, $B_1 = B_3 = 3.676 \times 10^{-3}$;

(3) $f'_c = 40.0 \text{ MPa}$, $E = 17.2 \text{ GPa}$, $B_1 = B_3 = 3.597 \times 10^{-3}$

分别计算了应力应变曲线(图 6.14),泊松比变化曲线(图 6.15)、体积应变变化曲线(图 6.16)和损伤演化曲线(图 6.17),其中三种混凝土试件均取 $\nu = 0.2$, $\epsilon_{11}^0 = 0.4 \times 10^{-4}$, $C_1 = -1.2$ 和 $C_2 = -2.6$ 。

对于单轴压缩情况,其推导过程与单拉情况相类似^[6.16]。选取与单拉相同的材料数据,得到的单压应力应变关系如图 6.18 所示,并与 Wang^[6.24]的实验结果进行了对比。

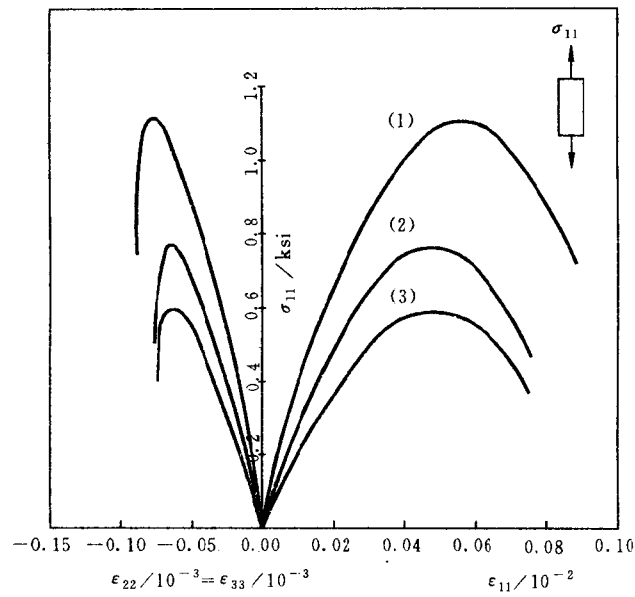


图 6.14 三种混凝土试件的单拉应力应变曲线^[6.17]

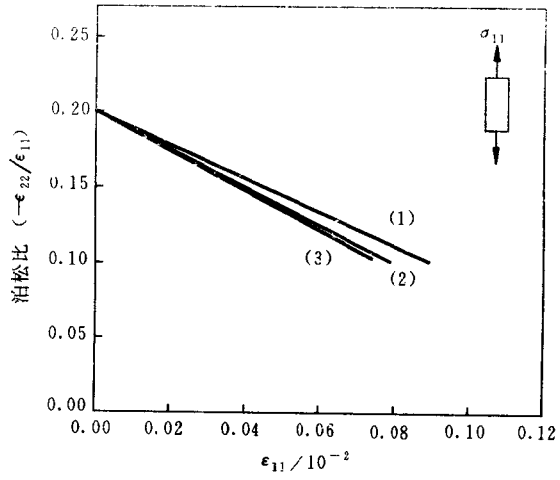


图 6.15 混凝土试件单拉的泊松比变化曲线^[6.17]

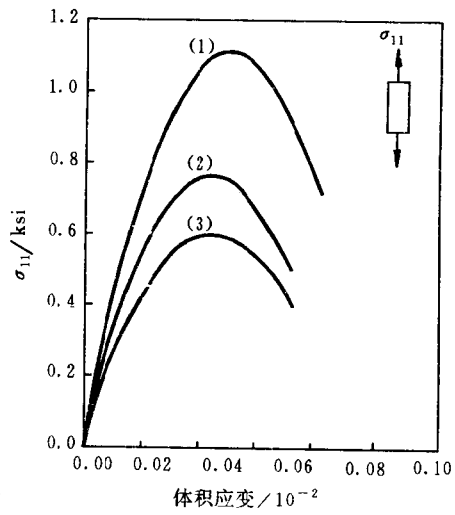


图 6.16 体积应变变化曲线^[6.17]

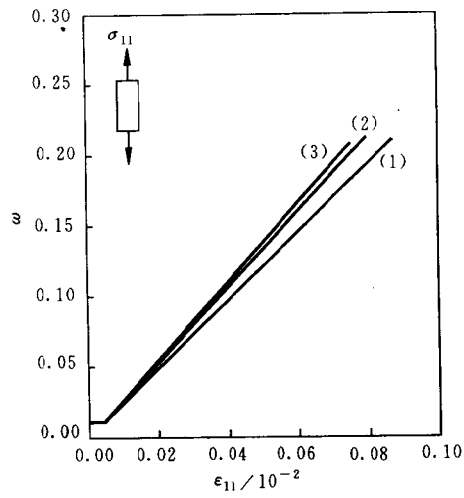


图 6.17 损伤演化曲线^[6.17]

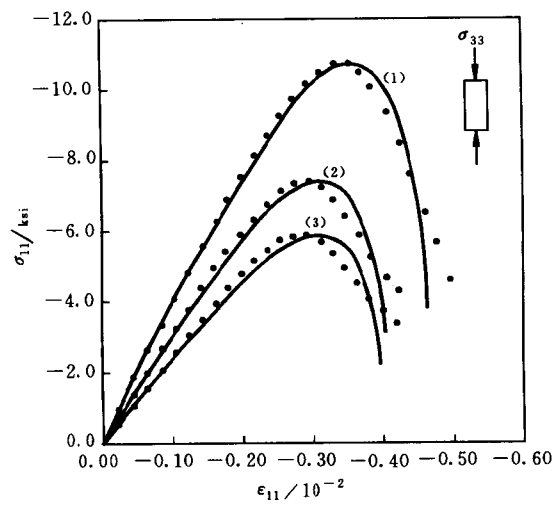


图 6.18 混凝土试件单压的应力应变曲线^[6.17]

6.4 Sidoroff 各向异性损伤理论^[6.20]

为了分析脆性弹性材料的各向异性损伤, Sidoroff 等人提出了能量等效假设^[6.20~6.22]。即认为, 受损材料的弹性余能和无损材料的弹性余能在形式上相同, 只需将其中的 Cauchy 应力 σ 换为等效应力 $\tilde{\sigma}$ 。

在无损伤情况下材料的各向同性的余能表示为

$$\rho\psi_e(\sigma, 0) = \frac{1+\nu}{2E}\text{tr}(\sigma \cdot \sigma) - \frac{\nu}{2E}(\text{tr}\sigma)^2 \quad (6.4.1)$$

对于受损材料, 假设其损伤状态用二阶损伤张量 D 表示, 有效应力与 Cauchy 应力的关系为

$$\tilde{\sigma} = \sigma \cdot (I - D)^{-1} \quad (6.4.2)$$

假定应力张量 σ 的主轴与应变张量 ϵ 、损伤张量 D 的主轴重合。根据能量等效假设, 得到损伤材料的余能

$$\begin{aligned} \rho\psi_e(\sigma, D) &= \frac{1+\nu}{E}\text{tr}[\sigma^2 \cdot (I - D)^{-2}] \\ &\quad - \frac{\nu}{2E}\{\text{tr}[\sigma \cdot (I - D)^{-1}]\}^2 \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

根据热力学框架下的正交法则

$$\epsilon = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \sigma} \quad (6.4.4)$$

$$Y = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial D} \quad (6.4.5)$$

得到损伤材料的应力应变关系

$$\epsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma \cdot (I - D)^{-2} - \frac{\nu}{E}(I - D)^{-1}\text{tr}[\sigma \cdot (I - D)^{-1}] \quad (6.4.6)$$

和损伤能量释放率的表达式

$$Y = \frac{1+\nu}{E} \sigma^2 \cdot (I-D)^{-3} - \frac{\nu}{E} \sigma \cdot (I-D)^{-2} \\ \times \text{tr}[\sigma \cdot (I-D)^{-1}] \quad (6.4.6)'$$

能量等效假设也可以表述为,受损材料的弹性应变能与无损材料的弹性应变能有相同的形式,只需将应变 ϵ 用有效应变 $\bar{\epsilon}$ 来代替。有效应变的定义为

$$\bar{\epsilon} = \epsilon \cdot (I-D) \quad (6.4.7)$$

无损材料的弹性应变能为

$$\rho \phi_e(\epsilon, 0) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr}\epsilon)^2 + \text{tr}(\epsilon \cdot \epsilon) \right] \quad (6.4.8)$$

于是受损材料的弹性应变能表示为

$$\rho \phi_e(\epsilon, D) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} [\text{tr}(\epsilon \cdot (I-D))]^2 + \text{tr}[\epsilon^2 \cdot (I-D)^2] \right\} \quad (6.4.9)$$

利用正交法则

$$\sigma = \rho \frac{\partial \phi_e}{\partial \epsilon} \quad (6.4.10)$$

$$Y = -\rho \frac{\partial \phi_e}{\partial D} \quad (6.4.11)$$

得到

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (I-D) \text{tr}[\epsilon \cdot (I-D)] + \epsilon \cdot (I-D)^2 \right] \quad (6.4.12)$$

$$Y = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon \text{tr}[\epsilon \cdot (I-D)] + \epsilon^2 \cdot (I-D) \right\} \quad (6.4.13)$$

由式(6.4.6)和(6.4.12)可以看出,只要将无损材料的弹性应力应变关系中的应力 σ 和应变 ϵ 分别用有效应力 $\bar{\sigma}$ 和有效应变 $\bar{\epsilon}$ 代替,即可得到受损材料的弹性本构关系。这种对应关系显然不同于应变等效假设的结果。

以单轴拉伸为例,由式(6.4.6)得

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{\sigma}{E(1-D_1)^2} = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \\ \epsilon_2 &= -\frac{\nu\sigma}{E(1-D_1)(1-D_2)} = -\frac{\tilde{\nu}\sigma}{\tilde{E}} \\ \epsilon_3 &= -\frac{\nu\sigma}{E(1-D_1)(1-D_3)} = -\frac{\tilde{\nu}\sigma}{\tilde{E}}\end{aligned}\quad (6.4.14)$$

$$Y_1 = \frac{\sigma^2}{E(1-D_1)^2} = E(1-D_1)\epsilon^2, \quad Y_2 = Y_3 = 0 \quad (6.4.15)$$

式中 $D_i (i=1,2,3)$ 是 D 的主值,且

$$\tilde{E} = E(1-D_1)^2, \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu(1-D_1)}{1-D_2} = \frac{\nu(1-D_1)}{1-D_3} \quad (6.4.16)$$

由此可以确定损伤变量 D_i 为

$$\begin{aligned}D_1 &= 1 - \left(\frac{\tilde{E}}{E}\right)^{1/2} \\ D_2 = D_3 &= 1 - \frac{\nu}{\tilde{\nu}} \left(\frac{\tilde{E}}{E}\right)^{1/2}\end{aligned}\quad (6.4.17)$$

图 6.19 给出了损伤材料参数的变化曲线,图 6.20 是损伤变量 D_1 和 D_2 的关系曲线。

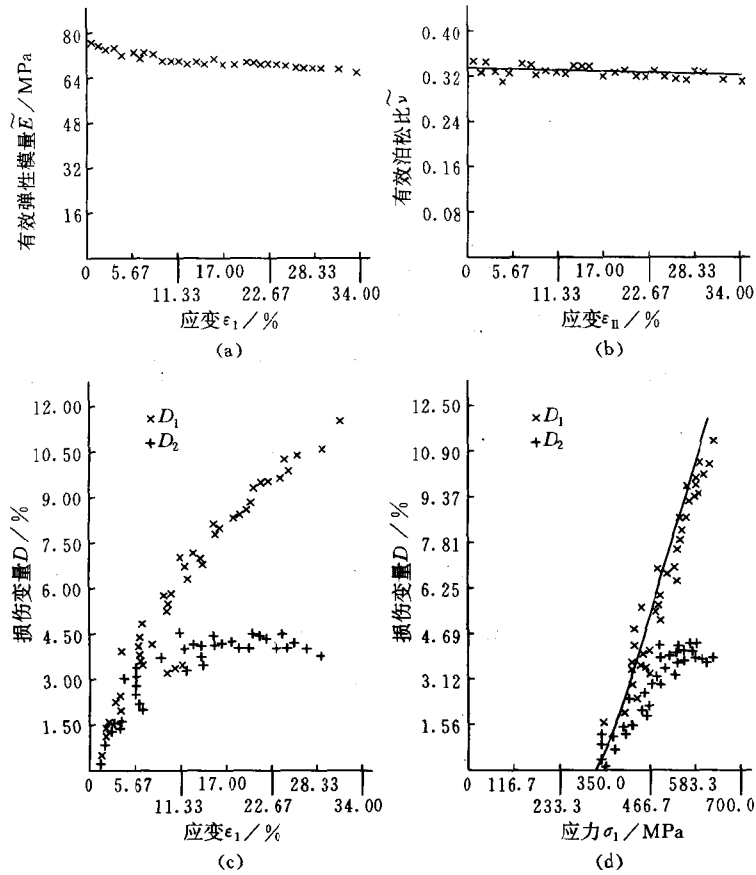
设存在耗散势函数 $P(Y)$,由正交法则得到损伤演化方程

$$\dot{D} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{如 } P(Y) < 0 \\ \lambda \frac{\partial P}{\partial Y}, & \text{如 } P(Y) = 0 \end{cases} \quad (6.4.18)$$

式中 λ 为损伤演化因子。上式表明损伤过程只发生在 $P(Y)=0$ 的状态。由于 Y 是 ϵ 和 D 的函数即 $Y=Y(\epsilon, D)$,因此

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \frac{\partial P}{\partial Y} : \left[\frac{\partial Y}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial Y}{\partial D} : \dot{D} \right] \\ &= \frac{\partial P}{\partial Y} : \left[\frac{\partial Y}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial Y}{\partial D} : \left(\lambda \frac{\partial P}{\partial Y} \right) \right] = 0\end{aligned}\quad (6.4.19)$$

从而得到确定 λ 的表达式



(a)有效弹性模量和应变的关系 (b)泊松比和应变的关系
(c)损伤变量 D_1 和 D_2 与应变的关系 (d) D_1 和 D_2 与应力的关系

图 6.19 损伤材料参数的变化曲线^[6,17]

$$\lambda = - \left(\frac{\partial P}{\partial Y} : \frac{\partial Y}{\partial D} : \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^{-1} \left\langle \frac{\partial P}{\partial Y} : \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} \right\rangle \quad (6.4.20)$$

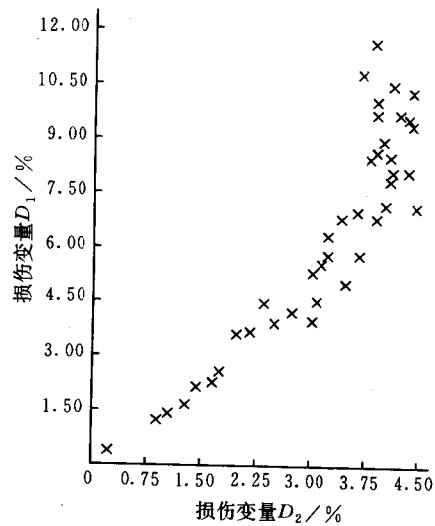


图 6.20 损伤变量 D_1 和 D_2 的关系曲线

在 Y 空间最简单的等势面是球面, 即

$$P(\mathbf{Y}) = Y_I - Y_0 = 0, \quad Y_I = [\text{tr}(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y})]^{1/2} \quad (6.4.21)$$

式中 Y_0 是材料常数。则有

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{\lambda}{Y_I} \mathbf{Y} \quad (6.4.22)$$

在单拉情况下, 有

$$Y_1 = \frac{\sigma^2}{E(1-D)^3} = E(1-D)\epsilon^2 = Y_0 \quad (6.4.23)$$

$$Y_2 = Y_3 = 0$$

$$D_1 = D, \quad D_2 = D_3 = 0 \quad (6.4.24)$$

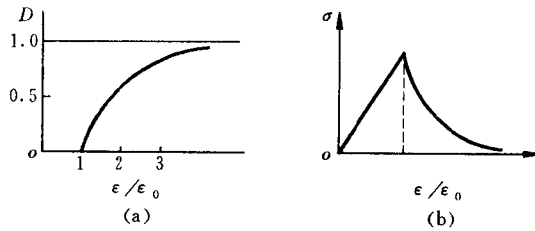
损伤应变关系为

$$D = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq \varepsilon_0 = \sqrt{Y_0/E} \\ 1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2, & \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (6.4.25)$$

损伤材料的单拉应力应变关系为

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_0 = \sqrt{Y_0/E} \\ E\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^3, & \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (6.4.26)$$

如图 6.21 所示。可见该模型包含三个材料常数即 E, ν 和 Y_0 , 其中 Y_0 可由单向拉伸应力应变曲线的 ε_0 来确定。



(a) 损伤演化曲线 (b) 应力应变关系

图 6.21

6.5 含损伤弹性介质的随机场理论

与其它章节的损伤理论不同,随机夹杂场理论是 Kunin 等人^[6.26]在非局部弹性理论的基础上发展起来的。这种理论在数学表示上更严格,适用范围更广泛,适用于任何含有细观结构的点缺陷、线缺陷(如位错)、体缺陷(如相变粒子、微裂纹、微孔洞、纤维)等的弹性介质,当然对于一般的三维细观结构来讲,这种理论提供的方法是很复杂的。随机夹杂理论的基本思想是利用随机点场的

概念,将各种细观夹杂的形状、尺寸、方位等作为随机变量,通过体积平均化的方法得到材料的总体有效性质。本节简单介绍随机夹杂场理论及其应用,关于该理论的更详细内容可参见 Kunin 的专著^[6.26]。

6.5.1 问题的描述

假设在无穷大的弹性介质中包含着随机分布的夹杂。在用细观力学方法计算材料的有效模量时,往往选取典型的细观结构作为代表性体元进行分析,而且要考虑微结构之间相互作用的影响程度。如果夹杂的分布稀疏,则可以忽略它们之间的相互作用;如果夹杂不够稀疏,则应引入相互作用的影响。解决夹杂相互作用的最常用方法是等效介质方法,即把每个夹杂看作是处于等效均匀的弹性基体中,例如第 4 章介绍的自洽方法、微分方法等。

Kunin 等人发展了另外一种方法,将每个夹杂看作是均匀基质中的孤立粒子,周围粒子的存在通过作用在每个粒子上的有效场来体现,这种方法称为有效场方法。作为一种近似,可以假设有效场对于所有粒子都是相同的和均匀的,此时,有效场方法与自洽方法的一种修正形式是一致的。本节只介绍有效场方法中比较一般的格式。

考虑一个无穷大的弹性介质,它的弹性模量张量表示为

$$C(x) = C_0 + C_1(x) = C_0 + \sum_i C_{1i} V_i(x) \quad (6.5.1)$$

式中 C_0 是均匀基体的弹性模量, $C_1(x)$ 是由于材料不均匀引起的模量变化, $V_i(x)$ 是第 i 个夹杂所占区域的特征函数, C_{1i} 在第 i 个夹杂内部是常数但是对于不同夹杂是不同的。类似地,非均匀介质的柔度张量表示为

$$B(x) = B_0 + B_1(x) = B_0 + \sum_i B_{1i} V_i(x) \quad (6.5.2)$$

如果第 i 个夹杂内部的应力 $\sigma_i(x)$ 和应变 $\varepsilon_i(x)$ 均已知, 则介质中每一点的应力和应变即可表示为

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma_0 - \int S_0(x-x')B_1\sigma^+(x')dx' \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon_0 - \int K_0(x-x')C_1\varepsilon^+(x')dx' \quad (6.5.3)\end{aligned}$$

式中 σ_0 和 ε_0 是外加应力和应变, 且式中记

$$\begin{aligned}B_1\sigma^+(x) &= \sum_i B_{1i}\sigma_i^+(x)V_i(x) \\ C_1\varepsilon^+(x) &= \sum_i C_{1i}\varepsilon_i^+(x)V_i(x) \quad (6.5.4)\end{aligned}$$

K_0 和 S_0 是四阶的积分算子核函数。假设由夹杂占据的区域 V_i 构成了一个均匀的随机场, 所有的张量 C_{1i} 是独立的随机变量但有相同的密度函数。

对于均匀介质中含有孔洞的情况, $C_{1i} = -C_0$, $B_{1i}\sigma_i^+ = \varepsilon^+$, 式(6.5.3)变为

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma_0 - \int S_0(x-x')\varepsilon^+(x')dx' \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon_0 - \int K_0(x-x')C_0\varepsilon^+(x')dx' \quad (6.5.5)\end{aligned}$$

注意到式(6.5.3)和(6.5.5)可以解释为均匀介质中包含密度为 $m_k(x)$ 的位错时的应力场和应变场, 在夹杂情况下, 有

$$m_k(x) = -B_{1k}\sigma_k(x) \quad (6.5.6)$$

在孔洞情况下, 有

$$m_k(x) = -\varepsilon_k(x) \quad (6.5.7)$$

对于微裂纹的情况, 设裂纹面为 Ω_k , 式(6.5.5)变为

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma_0 - \int S_0(x-x')M(x')\delta(\Omega)dx' \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon_0 - \int K_0(x-x')C_0M(x')\delta(\Omega)dx' \quad (6.5.8)\end{aligned}$$

式中

$$M(x)\delta(\Omega) = \sum_k n_k(x)b_k(x)\delta(\Omega_k) \quad (6.5.9)$$

$$M(x) = \frac{1}{2}[n_k(x)b_k(x) + b_k(x)n_k(x)] \quad (6.5.10)$$

$n_k(x)$ 为裂纹面 Ω_k 的法向单位矢量, $b_k(x)$ 是位移不连续矢量。

6.5.2 有效场

弹性基体中的孤立缺陷构成了空间均匀的随机场,对于第 i 个缺陷,它受到的外场 $\bar{\sigma}_i(x)$ 表示为

$$\bar{\sigma}_i(x) = \sigma_0 + \sum_{k \neq i} \int S_0(x-x')m_k(x')dx', x \in V_i \quad (6.5.11)$$

在应力 $\bar{\sigma}_i(x)$ 的作用下,第 i 个缺陷可以看作是孤立的。如果上述问题的解已经得到,那么非均匀介质中的应力和应变即可表示为

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma_0 + \sum_k \int S_0(x-x')m_k(x', \bar{\sigma}_k)dx' \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon_0 + \sum_k \int K_0(x-x')C_0m_k(x', \bar{\sigma}_k)dx' \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

式中 $m_k(x, \bar{\sigma})$ 即前面的 $m_k(x)$,认为是已知的。如果材料中的缺陷构成了随机场,那么 $\bar{\sigma}_k(x)$ 是随机函数。关于 $\bar{\sigma}_k(x)$ 的结构,引入以下两个简化假设:(1)在每个夹杂内部 $\bar{\sigma}_k(x)$ 是相同的,但在不同的夹杂内部 $\bar{\sigma}_k$ 不相同;(2) $\bar{\sigma}_k$ 不依赖于缺陷 V_k 的几何特征和弹性常数。这样的 $\bar{\sigma}_k(x)$ 场称为有效场。注意到在经典的自洽方法中, $\bar{\sigma}_k$ 对于所有夹杂都是相同的,而在 Kunin 的随机场夹杂理论中 $\bar{\sigma}_k(x)$ 是随机场,它能够更准确地描述缺陷之间的相互作用。

如果所有缺陷都是椭圆状裂纹,则式(6.5.12)中的密度 $m_k(x, \bar{\sigma}_k)$ 为

$$m_k(x, \bar{\sigma}_k) = P_k(x) \bar{\sigma}_k \delta(\Omega_k) \quad (6.5.13)$$

式中

$$P_k(x) = P_k^1 h_k(x)$$

$$P_k^1 = -n_k T_0^{-1} n_k, \quad h_k(x^1, x^2) = \frac{a_k^2}{b_k} \sqrt{1 - \left(\frac{x^1}{a_k}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{b_k}\right)^2}$$
(6.5.14)

式中 a_k 和 b_k 是椭圆 Ω_k 的长半轴和短半轴。对于各向同性的介质, T_0^{-1} 为

$$T_{0\alpha\beta}^{-1} = \frac{2a_k^2(1-\nu_0)}{b_k\nu_0} d_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{不对 } \alpha \text{ 求和}) \quad (6.5.15)$$

其中 ν_0 是基体材料的泊松比, d_α 是标量系数。

于是对于裂纹, 式(6.5.12)重新写为

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sum_k \int S_0(x-x') P_k(x') \bar{\sigma}_k \delta(\Omega_k) dx'$$

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 - \sum_k \int K_0(x-x') C_0 P_k(x') \bar{\sigma}_k \delta(\Omega_k) dx' \quad (6.5.16)$$

设 $P(x)$ 是任意一个连续的张量场, 在区域 V_k 内它与 P_k 相等, 此时在非均匀介质 V 内的场 $\bar{\sigma}(x)$ 定义为

$$\bar{\sigma}(x) = \sigma_0 + \int S_0(x-x') P(x') \bar{\sigma}(x') V(x; x') dx', \quad x \in V$$
(6.5.17)

它在所有区域 V_i 内都与 $\bar{\sigma}_i$ 相同, 因此也与区域 V 内的有效场相同。具体到裂纹情况, 上式又表示为

$$\bar{\sigma}(x) = \sigma_0 + \int S'_0(x-x') P(x') \bar{\sigma}(x') \delta(\Omega_x) dx', \quad x \in \Omega$$
(6.5.18)

式(6.5.17)和(6.5.18)表示了构造有效场 $\bar{\sigma}$ 的思路。

6.5.3 有效场统计矩的构造方法

在构造有效场之前,首先引入随机场的几种平均化方法。假设在三维空间中随机地均匀分布着很多椭球状区域,其特征函数是 $V(\mathbf{x})$,应力场 $\sigma(\mathbf{x})$ 、应变场 $\varepsilon(\mathbf{x})$ 以及有效场 $\bar{\sigma}(\mathbf{x})$ 都是随机函数 $V(\mathbf{x})$ 的泛函。设 $f(\mathbf{x}, V)$ 是所考虑的函数,它的平均值表示为

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int f(\mathbf{x}, V) d\mu(V) \quad (6.5.19)$$

式中 $\mu(V)$ 是泛函空间中的一种度量。在 $V(\mathbf{x})$ 包含固定点 \mathbf{x}_1 的条件下, $f(\mathbf{x})$ 的条件平均记作 $f(\mathbf{x}|\mathbf{x}_1)$, 定义为

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{x}_1) = \langle V(\mathbf{x}) \rangle^{-1} \int f(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}_1) d\mu(V) \quad (6.5.20)$$

对于某一固定点 \mathbf{x}_0 , 引入区域 $V_{\mathbf{x}_0}$ 如下

$$V_{\mathbf{x}_0} = \begin{cases} V = UV_i & \text{对于 } \mathbf{x}_0 \notin V \\ UV_i & \text{对于 } \mathbf{x}_0 \in V_i \end{cases} \quad (6.5.21)$$

设 $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x}_1 \in V_{\mathbf{x}}$, 则 $f(\mathbf{x})$ 在此条件下的平均值记作 $\langle f(\mathbf{x}) | \mathbf{x}; \mathbf{x}_1 \rangle$, 表示为

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}) | \mathbf{x}; \mathbf{x}_1 \rangle &= \langle V(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) \rangle^{-1} \\ &\quad \times \int f(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) d\mu(V) \end{aligned} \quad (6.5.22)$$

下面考虑有效场 $\bar{\sigma}(\mathbf{x})$ 的统计矩问题。将有效场 $\bar{\sigma}(\mathbf{x})$ 的 n 阶矩记作 $\bar{\sigma}^n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, 它是在 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 属于 V (或 Ω) 的条件下张量积 $\sigma_1(\mathbf{x}_1) \cdot \dots \cdot \sigma_n(\mathbf{x}_n)$ 的平均。作为最简单的两种统计矩,有效场的期望值和二点矩分别为

$$\bar{\sigma} = \langle \bar{\sigma}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle, \quad \bar{\sigma}^2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \langle \bar{\sigma}(\mathbf{x}_1) \bar{\sigma}(\mathbf{x}_2) | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \quad (6.5.23)$$

为了得到 $\bar{\sigma}^1$ 的表达式,对式(6.5.17)两边取平均并利用前文

的第二个简化假设,得到

$$\langle \bar{\sigma}(x) | x \rangle = \sigma_0 + \int S_0(x - x') \langle P(x')V(x; x') | x \rangle \langle \bar{\sigma}(x') | x'; x \rangle dx' \quad (6.5.24)$$

式中 $\langle \bar{\sigma}(x') | x'; x \rangle$ 是 $x' \in V, x \in V_x$ 下的条件平均,表示为

$$\langle \bar{\sigma}(x) | x; x_1 \rangle = \sigma_0 + \int S_0(x - x') \langle P(x')V(x; x') | x; x' \rangle \langle \bar{\sigma}(x') | x; x_1, x' \rangle dx' \quad (6.5.25)$$

要求解式(6.5.24)和(6.5.25),还必须引入其它条件以使方程闭合。在自洽方法中,假设 $\bar{\sigma}(x)$ 对于所有夹杂都相同,因此 $\bar{\sigma}^1$, $\langle \bar{\sigma}(x') | x'; x \rangle$ 以及 $\bar{\sigma}$ 都相等并可由式(6.5.24)求出。在 Kunin 的随机夹杂场理论中,一种比较简单的近似是假设

$$\langle \bar{\sigma}(x') | x'; x \rangle = \langle \bar{\sigma}(x') | x' \rangle = \bar{\sigma}^1 \quad (6.5.26)$$

代入式(6.5.24),得

$$\bar{\sigma}^1 = \sigma_0 + \int S_0(x - x') \langle P(x')V(x; x') | x \rangle dx' \bar{\sigma}^1 \quad (6.5.27)$$

有效场的二阶矩可以由如下方程得到,

$$\bar{\sigma}^2(x_1 - x_2) = \sigma_0 \langle \bar{\sigma}(x_2) | x_1, x_2 \rangle + \int S_0(x_1 - x') \langle P(x')V(x_1; x') \bar{\sigma}(x') \bar{\sigma}(x_2) | x_1, x_2 \rangle dx' \quad (6.5.28)$$

类似地,对于应力场 $\sigma(x)$ 和应变场 $\varepsilon(x)$,有

$$\begin{aligned} \langle \sigma(x) \rangle &= \sigma_0 + \int S_0(x - x') \langle P(x')V(x') \rangle \langle \bar{\sigma}(x') | x' \rangle dx' \\ \langle \varepsilon(x) \rangle &= \varepsilon_0 - \int K_0(x - x') C_0 \langle P(x')V(x') \rangle \langle \bar{\sigma}(x') | x' \rangle dx' \end{aligned} \quad (6.5.29)$$

对于均匀的随机夹杂场, $\langle P(x)V(x) \rangle$ 和 $\langle \bar{\sigma}(x) | x \rangle = \bar{\sigma}^1$ 均为常数,

因此上式变为

$$\begin{aligned}\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle &= \sigma_0 \\ \langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle &= \varepsilon_0 - \langle \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x}) \rangle \bar{\sigma}^{-1}\end{aligned}\quad (6.5.30)$$

于是在 $\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{B}_* \langle \sigma \rangle$ 定义下的有效弹性张量 \mathbf{B}_* 为

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B}_0 - \langle \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x}) \rangle \Lambda \quad (6.5.31)$$

式中四阶张量 Λ 是外加应力 σ_0 与有效场一阶矩 $\bar{\sigma}^{-1}$ 之间的转换张量, 即 $\bar{\sigma}^{-1} = \Lambda \sigma_0$, 由下式给出

$$\Lambda = \left[\mathbf{I} - \int \mathbf{S}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{P}(\mathbf{x}')\mathbf{V}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') | \mathbf{x} \rangle d\mathbf{x}' \right]^{-1} \quad (6.5.32)$$

6.5.4 椭圆状裂纹的解

关于随机夹杂场理论在椭球状夹杂以及复合材料方面的应用参见文献[6.26], 这里只考虑均匀弹性介质中椭圆状裂纹的随机场。设在外加应力 σ_0 的作用下所有裂纹都是张开的, 此时式(6.5.30)和(6.5.31)中的 $\bar{\sigma}^{-1}$ 和 \mathbf{B}_* 表示为

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{-1} &= \Lambda \sigma_0, \\ \mathbf{B}_* &= \mathbf{B}_0 - \langle \mathbf{P}(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x}) \rangle \Lambda\end{aligned}\quad (6.5.33)$$

式中

$$\Lambda = \left[\mathbf{I} - \int \mathbf{S}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{P}(\mathbf{x}')\Omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}') | \mathbf{x} \rangle d\mathbf{x}' \right]^{-1} \quad (6.5.34)$$

对于椭圆状裂纹, 有

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x}) \rangle = \frac{2\pi}{3} \left\langle \frac{a^3}{V_0} \mathbf{P}(a, b) \right\rangle \quad (6.5.35)$$

式中 V_0 是每个裂纹的平均体积, 定义为 $V_0 = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{N}$, $\mathbf{P}(a, b)$ 与(6.5.14)中的 \mathbf{P}_i 形式相同, 由裂纹的统计尺寸 a 和 b 以及取向决定。

下面考虑一种特例情况。设在体积 V 内含有 N 个裂纹, 其尺

寸和取向是随机分布变量,分布函数已知,裂纹的位置是完全均匀的。当 V 和 N 都趋向于无穷大,且 $(V/N) = V_0 < \infty$, 于是得到一个均匀的裂纹场,称之为泊松场。在这种情况下,式(6.5.33)中的 B_* 变为

$$B_* = B_0 - \frac{2\pi}{3} \left\langle \frac{a^3}{V_0} P(a, b) \right\rangle \quad (6.5.36)$$

对于圆币状裂纹即 $a=b$, 进一步得到

$$B_* = B_0 - \frac{8}{3} \frac{(1-\nu_0)}{\mu_0(2-\nu_0)} \frac{\langle a^3 \rangle}{V_0} \langle 2E^5(\mathbf{n}) - \nu_0 E^6(\mathbf{n}) \rangle \quad (6.5.37)$$

式中

$$E_{\alpha\beta\lambda\mu}^5 = \frac{1}{4} (n_\alpha n_\lambda \delta_{\beta\mu} + n_\beta n_\mu \delta_{\alpha\lambda} + n_\beta n_\lambda \delta_{\alpha\mu} + n_\alpha n_\mu \delta_{\beta\lambda})$$

$$E_{\alpha\beta\lambda\mu}^6 = n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu \quad (6.5.38)$$

如果裂纹的取向分布完全均匀,则

$$B_* = B_0 - \frac{8}{45} \frac{(1-\nu_0)}{\mu_0(2-\nu_0)} \frac{\langle a^3 \rangle}{V_0} [\nu_0 E^2 - 2(5-\nu_0) E^1] \quad (6.5.39)$$

特别地,有效剪切模量 μ_* 和泊松比 ν_* 为

$$\mu_* = \mu_0 \left[1 + \frac{32}{45} \frac{\langle a^3 \rangle}{V_0} \frac{(1-\nu_0)(5-\nu_0)}{(2-\nu_0)} \right]^{-1}$$

$$\frac{\nu_*}{1+\nu_*} = \frac{\nu_0}{1+\nu_0} \frac{\mu_*}{\mu_0} \left[1 + \frac{16}{45} \frac{\langle a^3 \rangle}{V_0} \frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)} \right] \quad (6.5.40)$$

6.5.5 总结

Kunin 等人发展的随机场理论提供了一种数学上比较严格和比较复杂的非均匀介质有效模量分析方法。利用这种有效场方法,不能得到非均匀介质的弹性问题精确解,这是因为有效场的每一

阶统计矩都要用更高阶矩来表示,要求解这种问题,必须引入另外的、往往没有严格理论依据的近似假设。

在有效场方法中,引入局部外场 $\bar{\sigma}$ 并假设 $\bar{\sigma}$ 在每一个夹杂内部是常量,这一点与自洽方法一致。它与自洽方法的主要差别在于对不同的夹杂 $\bar{\sigma}$ 是不同的,它是随机变量。有效场方法的另一个特点是采用了比较严格但麻烦的平均化方法。有效场方法的一阶近似结果与自洽方法是一致的,同时从理论上讲这种方法能够得到有效场的任意高阶统计矩。

有效场理论适用的条件是非均匀弹性介质中的所有夹杂都是有限尺寸的且每个夹杂的状态依赖于它周围的局部外场。因此这种方法只有当夹杂的分布比较稀疏时才是精确的。夹杂的分布越集中,前面的两个近似假设偏差越大。但是,这两个假设对最重要的一阶矩和二阶矩影响很小,在一般的实际材料中,由这种方法得到的结果已经足够精确,与实验结果相符得很好。

作为计算非均匀介质宏观有效性质的一种工具,有效场方法有着很长的历史,它可以计算各种细观结构的非均匀材料的有效参数,例如弹性模量、电导率、介电常数、电磁性质等。关于这些内容的详细结果可以参考 Kunin 的专著^[6.26]及相关文献。

6.6 脆性材料的微裂纹扩展区损伤模型

在诸如岩石、混凝土、某些陶瓷等脆性材料中,往往存在着大量弥散的微裂纹,微裂纹的形成、扩展和汇合对材料的力学性质产生显著影响,可以导致材料的逐渐劣化直至最后的断裂。近年来,脆性材料的宏、细观损伤研究受到了普遍重视,关于这方面的研究成果和现状,文献[6.27~6.30]就不同的侧面进行了总结和评述。尽管研究者们已经提出了各种不同的损伤描述方法,进而建立了

多种微裂纹损伤的本构模型。但是直到最近,仍没有一套比较完整的损伤模型,可以较好地解决在拉伸、压缩以及复杂加载情况下脆性材料从线弹性变形,经过非线性强化阶段和应变软化阶段直到宏观裂纹形成这一复杂过程中的损伤演化和本构行为。而且总的来讲,现有的损伤模型至少还存在以下两方面的不足。其一,这些模型描述损伤的方法是定义一个标量、矢量或张量作为损伤状态变量,但实际上一点的损伤状态可以是很复杂的,究竟用多少个参数能够较好地描述是一个未解决的问题。而且在复杂的损伤过程中,各个损伤参数的演化规律也是难以确定的,当采用张量形式的损伤变量时这一点变得尤为突出。其二,这些模型都难以处理复杂加载路径的问题。

为此,冯西桥和余寿文^[6.30~6.33]提出用微裂纹扩展区(domain of microcrack growth,简记为DMG)的概念来描述脆性材料的损伤状态。所谓微裂纹扩展区,是指经过加载后,发生扩展的所有微裂纹在取向空间中所占的范围,由一个区域或多个区域的并集组成。换言之,经过一定的加载路径后,法向矢量位于微裂纹扩展区的所有微裂纹都已经发生了扩展。利用这个概念,可以更准确地描述微裂纹的损伤状态,并且能够解决任意复杂加载路径下的损伤演化和本构响应问题,从而建立了一套比较完整的脆性材料的细观损伤模型。本节以三轴拉伸为例说明微裂纹扩展区模型的基本思想,关于三轴压缩等情况的分析以及微裂纹扩展区的测量等问题可参考文献^[6.30~6.36]。

6.6.1 单个张开口状微裂纹引起的柔度张量

选取一个代表性体积单元,其尺寸满足以下两方面的要求,一方面该体元从细观角度上看足够大,包含足够的材料细观结构和微裂纹,从而可以代表材料的统计平均性质;另一方面该体元从宏

观角度上看又足够小,可以看作材料的一个质点,因此体元的宏观应力和应变可视为均匀的。假设只有小应变和小转动发生,这对于脆性材料一般是恰当的,同时设基质为线弹性各向同性材料。体元的平均应变张量 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 包含两部分

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij}^e + \bar{\epsilon}_{ij}^i \quad (6.6.1)$$

式中 $\bar{\epsilon}_{ij}^e$ 为基质变形引起的弹性应变张量, $\bar{\epsilon}_{ij}^i$ 是所有微裂纹引起的应变张量。其中 $\bar{\epsilon}_{ij}^e$ 由基质的平均应变得到

$$\bar{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{V} \int_{V_m} \epsilon_{ij}^* dV = \frac{1}{V} \int_{V_m} S_{ijkl}^0 \sigma_{kl}^* dV = S_{ijkl}^0 \bar{\sigma}_{kl} \quad (6.6.2)$$

式中 V 为代表性体积单元的体积, V_m 为基质材料所占的体积,且近似认为 $V_m = V$, S_{ijkl}^0 为基质的柔度张量, ϵ_{ij}^* 和 σ_{ij}^* 为细观的应变张量和应力张量, $\bar{\sigma}_{ij}$ 为体元的平均应力张量。这里忽略微裂纹的相互作用而采用 Taylor 模型,因此假定 $\bar{\sigma}_{ij}$ 等于外加应力张量 σ_{ij} , 即

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V_m} \sigma_{ij}^* dV = \sigma_{ij} \quad (6.6.3)$$

于是式(6.6.2)变成

$$\bar{\epsilon}_{ij}^e = S_{ijkl}^0 \sigma_{kl} \quad (6.6.4)$$

设基质材料的弹性模量为 E , 泊松比为 ν , 则基质的柔度张量表示为

$$S_{ijkl}^0 = \frac{1}{E} \left[\frac{1+\nu}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \nu\delta_{ij}\delta_{kl} \right] \quad (6.6.5)$$

由所有微裂纹引起的应变 $\bar{\epsilon}_{ij}^i$ 由下式得到

$$\bar{\epsilon}_{ij}^i = \sum_{k=1}^{N_c} \bar{\epsilon}_{ij}^{i(\alpha)} \quad (6.6.6)$$

其中 N_c 为代表性体积单元中的微裂纹总数, $\bar{\epsilon}_{ij}^{i(\alpha)}$ 为第 α 个微裂纹引起的应变

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{i(\alpha)} = \frac{1}{V} \int_{S_\alpha} \frac{1}{2} (b_i n_j + b_j n_i)^{(\alpha)} dS \quad (6.6.7)$$

式中 $b_i = [u_i]$ 为微裂纹面上的位移不连续矢量, n_i 为微裂纹的法向单位矢量分量, S_α 是第 α 个微裂纹的表面积。

现在考察在远处承受均匀载荷的各向同性体中的一个半径为 a 的币状微裂纹。建立整体坐标系 $(Ox_1x_2x_3)$ 和对应的局部坐标系 $(Ox'_1x'_2x'_3)$, 如图 6.22 所示, 其中 x'_2 轴平行于微裂纹法向矢量 n , x'_3 轴与 x_1, x_3 轴在同一平面内。于是微裂纹的取向可以用一对参数 (θ, φ) 表示, θ 和 φ 的取值范围分别为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 和 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 。两个坐标系的基矢量转换关系为

$$e'_i = g'_{ij}e_j, \quad e_i = g_{ij}e'_j \quad (6.6.8)$$

式中坐标转换矩阵 g'_{ij} 及其逆矩阵 $g_{ij} = (g'_{ij})^{-1} = (g'_{ij})^T$ 为

$$g'_{ij} = (g_{ij})^T = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta & -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta & \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (6.6.9)$$

其中 $()^T$ 表示矩阵的转置。

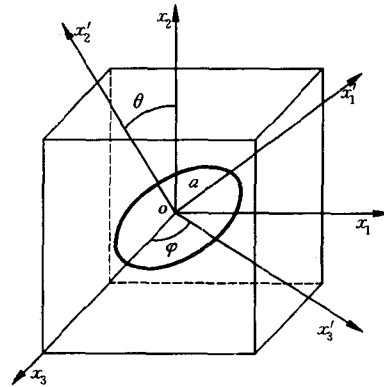


图 6.22 整体坐标系和局部坐标系

对于张开的币状微裂纹,位移不连续矢量为

$$b_i = (a^2 - r^2)^{1/2} B'_{ij} \sigma'_{2j} g'_{ii} \quad (6.6.10)$$

式中 r 为裂纹面上一点到裂纹中心的距离, B'_{ij} 为微裂纹的张开位移张量,它依赖于材料的柔度张量。由于不考虑微裂纹的相互作用, B'_{ij} 仅依赖于基质的各向同性柔度张量,其非零的元素有

$$B'_{11} = B'_{33} = \frac{16(1-\nu^2)}{(2-\nu)\pi E}, \quad B'_{22} = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} \quad (6.6.11)$$

局部坐标系中的应力 σ'_{ij} 与整体坐标系中的应力 σ_{ij} 的转换关系为

$$\sigma'_{ij} = g'_{ik} g'_{jl} \sigma_{kl} \quad (6.6.12)$$

如果垂直于微裂纹表面的应力分量 σ'_{22} 为压应力,则暂且假设微裂纹面之间由于摩擦力的作用而不发生相对滑移,关于闭合裂纹及其对柔度张量的影响见有关文献。于是微裂纹的位移不连续矢量为

$$b_i = (a^2 - r^2)^{1/2} B'_{ij} g'_{ji} g'_{2k} g'_{kl} \langle \sigma'_{22} \rangle \quad (6.6.13)$$

式中角括号定义如下

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \geq 0 \\ 0 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

将式(6.6.13)代入式(6.6.7),得

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(\alpha)} = \bar{S}_{ijkl}^{(\alpha)}(a, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sigma_{kl} \quad (6.6.14)$$

式中 $\bar{S}_{ijkl}^{(\alpha)}$ 为第 α 个半径为 a ,取向为 (θ, φ) 的微裂纹引起的非弹性柔度张量,以下简记为 \bar{S}_{ijkl} ,其表达式为

$$\bar{S}_{ijkl}(a, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) = \frac{\pi a^3}{3V} B'_{mn} g'_{2k} g'_{nl} (g'_{mi} n_j + g'_{mj} n_i) \langle \sigma_{st} g'_{2s} g'_{2t} \rangle \quad (6.6.15)$$

6.6.2 三轴拉伸情况下的微裂纹扩展区

在实际的脆性材料中,存在大量的晶间裂纹和穿晶裂纹,由于

材料细观结构的复杂性、微裂纹相互作用的影响以及损伤材料的各向异性性质,要严格得到微裂纹扩展准则的一般表达式是不可能的。为了方便起见,假设所有微裂纹都处于各向同性的弹性基质中,忽略微裂纹的相互作用对微裂纹扩展准则的影响,并且假设当沿微裂纹边缘的平均能量释放率达到某一临界值时,微裂纹将发生自相似扩展,即微裂纹在原来的平面内扩展,且保持圆形。此时,可以选取如下的微裂纹扩展准则

$$\left(\frac{K'_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K'_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1 \quad (6.6.16)$$

式中 K'_I 和 K'_{II} 、 K_{Ic} 和 K_{IIc} 分别为 I 型和 II 型应力强度因子及其临界值, K'_I 和 K'_{II} 的定义为

$$K'_I = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\sigma'_{22}, \quad K'_{II} = \left(\frac{4}{2-\nu}\right)\sqrt{\frac{a}{\pi}}[(\sigma'_{21})^2 + (\sigma'_{23})^2]^{1/2} \quad (6.6.17)$$

设在初始未加载状态,所有微裂纹都具有相同的统计平均半径 a_0 。一旦某一取向为 (θ, φ) 的微裂纹满足了扩展准则(6.6.17),它将迅速发生扩展,直到被具有更高强度的能障(如晶界等)所束缚而停止扩展。设所有发生扩展的微裂纹的统计平均半径为 a_u ,它与材料的细观结构(如晶粒大小)有关。在外加应力 σ_{ij} 作用下,微裂纹的扩展仅与局部坐标系中的以下三个应力分量有关

$$\sigma'_{21} = g'_{2i}g'_{1j}\sigma_{ij} \quad \sigma'_{22} = g'_{2\alpha}g'_{2\beta}\sigma_{\alpha\beta} \quad \sigma'_{23} = g'_{2\alpha}g'_{3\beta}\sigma_{\alpha\beta} \quad (6.6.18)$$

将式(6.6.18)和(6.6.17)代入(6.6.16),得到如下的方程

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{K_{Ic}}{K_{IIc}}\right)^2 g'_{2k}g'_{2s} + \left(\frac{2}{2-\nu}\right)^2 (g'_{1k}g'_{1s} + g'_{3k}g'_{3s})\right] g'_{2i}g'_{2t}\sigma_{it} \\ & = \frac{\pi}{4a_0} K_{Ic}^2 \end{aligned} \quad (6.6.19)$$

这就是在单调比例加载情况下三维应力状态 σ_{ij} 所对应的微裂纹

扩展区的边界应满足的条件。在取向空间 (θ, φ) 中,这一边界所包围的区域是所有发生扩展的微裂纹的取向范围,定义为微裂纹扩展区,它由取向空间中的一个区域或多个区域之并集构成。换言之,如果一个微裂纹的取向 (θ, φ) 位于微裂纹扩展区内,则该微裂纹已经扩展,具有统计平均半径 a_u 。

对于一般的三轴应力状态,所对应的微裂纹扩展区的求解方法可见有关文献^[6, 30]。这里为叙述简单起见,假设三个主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 的方向与 x_1, x_2 和 x_3 的方向相同,此时,方程(6.6.19)变成

$$A_1 \cos^4 \varphi + A_2 \cos^2 \varphi + A_3 = 0 \quad (6.6.20)$$

式中

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin^4 \theta (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \left[\left(\frac{K_{Ic}}{K_{Ic}} \right)^2 - \left(\frac{2}{2-\nu} \right)^2 \right] \\ A_2 &= \sin^2 \theta (\sigma_1 - \sigma_3) \left[2(\cos^2 \theta \sigma_2 + \sin^2 \theta \sigma_3) \left(\frac{K_{Ic}}{K_{Ic}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(\frac{2}{2-\nu} \right)^2 (\sigma_1 - \cos^2 \theta \sigma_2 + \cos 2\theta \sigma_3) \right] \right] \\ A_3 &= (\cos^2 \theta \sigma_2 + \sin^2 \theta \sigma_3)^2 \left(\frac{K_{Ic}}{K_{Ic}} \right)^2 \\ &\quad + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sigma_2 + \sigma_3)^2 \left(\frac{2}{2-\nu} \right)^2 - \frac{\pi}{4a_0} K_{Ic}^2 \end{aligned} \quad (6.6.21)$$

由方程(6.6.20),容易求得在三维应力 σ_{ij} 的作用下主应力坐标系中的微裂纹扩展区 $\Omega(\theta, \varphi, \sigma_{ij})$,并表示为

$$\Omega(\theta, \varphi, \sigma_{ij}) = \left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \varphi_3(\theta, \sigma_{ij}) \leq \varphi \leq \varphi_4(\theta, \sigma_{ij}) \right\} \quad (6.6.22)$$

式中 $\varphi_3(\theta, \sigma_{ij})$ 和 $\varphi_4(\theta, \sigma_{ij})$ 表示 θ 和 σ_{ij} 的两个函数。随着应力的不断增大,越来越多的微裂纹发生扩展,半径从 a_0 变为 a_u 并为能障所束缚而停止扩展。当应力增大到一定程度时,被束缚的微裂纹可以再次发生扩展(见后文)。

6.6.3 复杂加载下微裂纹扩展区的演化

复杂加载路径下脆性材料的损伤演化问题是损伤力学中一直难以解决的问题。举一简单例子,首先将试件单向拉伸进入非线性强化阶段,然后将拉伸方向(或试件)偏转一个角度,但应力的幅值仍保持不变。在这一偏转过程中,会有新的微裂纹发生扩展,同时还有一些微裂纹发生卸载。对这样的一个简单问题,要较好地描述微裂纹损伤的演化过程,对以往的很多脆性损伤模型来讲都是很困难的。无论是标量、矢量还是张量形式的损伤描述方法,都很难处理这样的复杂加载路径问题。如果采用微裂纹扩展区的概念来描述损伤,则能用集合的运算方法比较方便地描述复杂加载过程中损伤的演化。

在 Taylor 模型的假设下,忽略微裂纹之间的相互作用,微裂纹的扩展准则不受加载历史的影响。因此,可以将复杂加载路径中的各个应力状态依次代入前面的公式(6.6.20),得到各个应力状态下的微裂纹扩展区,并取其并集,即为复杂加载路径下的微裂纹扩展区。

为了说明微裂纹扩展区的演化,设在 t 时刻的微裂纹扩展区可以表示为

$$\Omega(t) = \left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \varphi^-(\theta, t) \leq \varphi \leq \varphi^+(\theta, t) \right\} \quad (6.6.23)$$

从时刻 t 到 $t + \Delta t$, 应力从 $\sigma_{ij}(t)$ 变成 $\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + \Delta\sigma_{ij}$, 按照上面的方法求得应力 $\sigma_{ij}(t + \Delta t)$ 对应的微裂纹扩展区并表示为

$$\Omega(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) = \left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \varphi_3(\theta, \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \leq \varphi \leq \varphi_4(\theta, \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \right\} \quad (6.6.24)$$

于是在 $t + \Delta t$ 时刻的微裂纹扩展区为

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t) \cup \Omega(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \quad (6.6.25)$$

6.6.4 脆性损伤材料的本构关系

材料中微裂纹的取向和尺寸可以看作是随机变量,并用概率密度分布函数 $p(a, \theta, \varphi)$ 表示。对不同的材料和微裂纹分布,概率密度函数 $p(a, \theta, \varphi)$ 可以有不同的形式,但均需满足如下的归一化条件

$$\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} p(a, \theta, \varphi) \sin\theta d\varphi d\theta da = 1 \quad (6.6.26)$$

式中 a_{\min} 和 a_{\max} 为材料中微裂纹的最小半径和最大半径。在本章中,微裂纹的尺寸只取两个值,即 $a_{\min} = a_0, a_{\max} = a_u$ 。

在特定情况下,如果微裂纹在取向空间中均匀分布,则概率密度函数 $p(a, \theta, \varphi)$ 表示为

$$p(a, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad (6.6.27)$$

无论加载路径如何,只要材料损伤的微裂纹扩展区已经确定,则材料的损伤本构关系可由下式得到

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (6.6.28)$$

式中总体有效柔度张量 S_{ijkl} 包括两部分

$$S_{ijkl} = S_{ijkl}^0 + S_{ijkl}^i \quad (6.6.29)$$

其中所有微裂纹引起的非弹性柔度张量为

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^i = & S_{ijkl}^0 + \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} N_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^i(a_0, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\varphi d\theta \\ & + \iint_{a^{(i)}} N_c p(a, \theta, \varphi) [\bar{S}_{ijkl}^i(a_u, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \\ & - \bar{S}_{ijkl}^i(a_0, \theta, \varphi, \sigma_{ij})] \sin\theta d\varphi d\theta \end{aligned} \quad (6.6.30)$$

式中代表性体积单元中的微裂纹总数 $N_c = n_c V$, n_c 为单位体积中的微裂纹数目。以下不妨设代表性体积单元的体积 $V = 1$, 则式

(6.6.30)和(6.6.15)改写为

$$S_{ijkl}^i = S_{ijkl}^0 + \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} n_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^i(a_0, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\varphi d\theta \\ + \iint_{\Omega^{(i)}} n_c p(a, \theta, \varphi) [\bar{S}_{ijkl}^i(a_u, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \\ - \bar{S}_{ijkl}^i(a_0, \theta, \varphi, \sigma_{ij})] \sin\theta d\varphi d\theta \quad (6.6.31)$$

$$\bar{S}_{ijkl}^i(a, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) = \frac{1}{3} \pi a^3 B'_{mn} g'_{2k} g'_{nl} (g'_{mi} n_j + g'_{mj} n_i) \langle \sigma_{kl} g'_{2i} g'_{2l} \rangle \quad (6.6.32)$$

6.6.5 准脆性材料本构关系的四个阶段及细观损伤机制

一些脆性材料如岩石、混凝土等的应力应变关系往往包括线弹性、非线性强化、应变软化等阶段,即在外加载荷达到承载极限之前材料会发生一定程度的应变强化,这一点与某些高强度金属材料的本构行为类似,但当外加载荷达到承载极限之后,材料将发生不同程度的应力突然跌落和应变软化现象,材料的承载能力随变形的增加而减小,这样的脆性材料常被称为准脆性材料。如图6.23所示为准脆性材料在应变加载条件下得到的一条典型的拉伸应力应变曲线^[5,38]。将该曲线分成四个阶段,即线弹性阶段(OA)、非线性强化阶段(AB)、应力跌落阶段(BC)和应变软化阶段(CD)。从细观损伤力学的角度来看,准脆性材料变形的上述几个阶段分别对应于微裂纹的弹性变形、稳定扩展、失稳扩展和汇合等细观机制。以下以单向拉伸为例分别讨论这四个阶段的细观损伤机制。

(1) 线弹性阶段(OA) 当拉伸应力 σ 小于临界拉伸应力 σ_c 时,材料内部没有损伤演化,所有微裂纹都只发生弹性变形,不发生扩展。

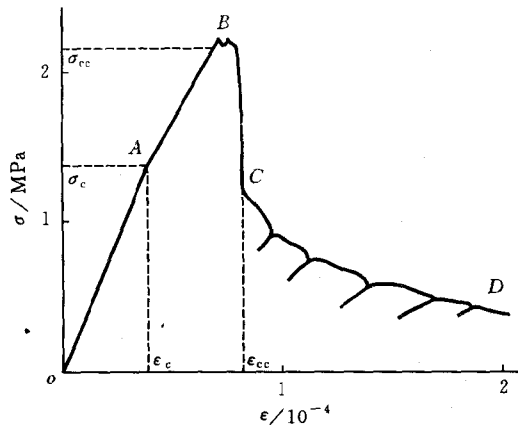


图 6.23 准脆性材料单拉的应力应变曲线^[6.38]

(2) 非线性强化阶段(AB) 当拉伸应力 σ 超过 σ_c 但低于材料的最大承载应力 σ_{cc} 时,材料内发生连续分布损伤,随着应力的增大,越来越多的微裂纹发生稳定扩展,半径由 a_0 增大为 a_n 并为具有比界面更高强度的能障所束缚而停止扩展。微裂纹扩展区不断增大,微裂纹对材料有效柔度张量的贡献也随之增大,于是应力应变关系表现出非线性和各向异性性质。

(3) 应力跌落阶段(BC) 当应力达到最大承载应力 σ_{cc} 后,某些取向的微裂纹将穿越晶界的束缚发生二次扩展。类似于式(6.6.16),微裂纹二次扩展的准则表示为

$$\left(\frac{K'_I}{K_{Icc}}\right)^2 + \left(\frac{K'_II}{K_{IIcc}}\right)^2 = 1 \quad (6.6.33)$$

式中 K_{Icc} 和 K_{IIcc} 分别为基质材料的 I 型和 II 型临界应力强度因子。

一旦准则(6.6.33)在某取向上得到了满足,该取向的微裂纹将穿越晶界在基质材料中继续扩展,并发生从连续损伤到损伤

局部化的过渡,材料的承载能力开始下降。为方便起见,记

$$\bar{G} = \left(\frac{K'_I}{K_{Icc}} \right)^2 + \left(\frac{K'_II}{K_{Icc}} \right)^2 \quad (6.6.34)$$

并把 \bar{G} 称为无量纲的能量释放率。由式(6.6.17)可知 \bar{G} 正比于应力 σ 的平方和微裂纹半径 a ,即 $\bar{G} \propto \sigma^2 a$ 。在不增加应变的情况下,随着微裂纹的二次扩展,一方面微裂纹尺寸增大, \bar{G} 也随之增大,导致这些微裂纹的继续扩展;另一方面,应力水平的下降导致 \bar{G} 下降。对于没有发生二次扩展的微裂纹, $a=a_0$ 或 $a=a_u$ 保持不变,但应力的下降使得这些微裂纹发生弹性卸载变形。因此,在应力跌落的过程中,只有个别取向上的微裂纹发生二次扩展,而其它大多数的微裂纹只经历着弹性卸载变形,这意味着损伤局部化的发生。同时,由于应力跌落时应变保持不变,原来由所有微裂纹共同承担的非弹性应变,逐渐集中到由发生二次扩展的少数微裂纹承担,这意味着应变局部化的发生。因此,应力跌落是由连续损伤和均匀应变向损伤局部化和应变局部化过渡的宏观表现,而其本质原因是微裂纹的二次失稳扩展。

在保持应变不变的条件下,随着应力水平的下降,当微裂纹体达到某一最低的能量状态时,微裂纹停止扩展,细观结构达到暂时的稳定状态,对应于应力应变曲线中的C点。在该状态应满足两方面的条件,其一是微裂纹二次扩展的等式(6.6.33)成立,其二是基体与所有微裂纹(包括未扩展的、发生一次扩展和二次扩展的)对应变的贡献之和等于外加宏观应变,由这两方面的条件可以确定C点的位置即应力跌落的幅度。

(4) 应变软化阶段(CD) 继续增大宏观应变时,已发生二次扩展的部分微裂纹继续扩展,而其它的微裂纹继续发生弹性卸载,即损伤和应变局部化进一步加剧,随之应力水平下降。因此,应变软化阶段是微裂纹损伤局部化的继续,也是宏观裂纹萌生的开始。

6.6.6 三轴拉伸情况下的软化分析

微裂纹二次扩展的准则为式(6.6.33),其中 I 型和 II 型应力强度因子 K_I' 和 K_{II}' 同式(6.6.17),而临界应力强度因子 $K_{I,cc}$ 和 $K_{II,cc}$ 表征着基质材料抵抗微裂纹扩展的能力,认为是微裂纹半径的变化 Δa 的函数。为方便起见,本文假设 $K_{I,cc}$ 和 $K_{II,cc}$ 均为材料常数。关于 $K_{I,cc}$ 和 $K_{II,cc}$ 对 Δa 的依赖关系对材料软化行为的影响可参见文[6.30,6.34]。

设材料承受的三轴拉伸应力状态为 $\sigma_{11} = \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2, \sigma_{33} = \sigma_3$, 其它 $\sigma_{ij} = 0$, 且设 σ_2 为最大拉伸主应力。

首先确定发生二次扩展的微裂纹的取向。将此应力状态代入式(6.6.34),得到

$$\begin{aligned} \bar{G} = & \frac{4a_u}{\pi K_{I,cc}^2} (\sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)^2 \\ & + \frac{4a_u \sin^2 \theta}{\pi K_{II,cc}^2} \left(\frac{2}{2-\nu} \right)^2 [\cos^2 \theta (\sigma_2 - \sigma_1 \cos^2 \varphi - \sigma_3 \sin^2 \varphi)^2 \\ & + \sin^4 \varphi \cos^2 \theta (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \end{aligned} \quad (6.6.35)$$

将上式对 θ 求导,可以证明只要满足 $K_{I,cc} \leq \frac{2-\nu}{\sqrt{2}} K_{II,cc}$, 当 $\theta=0$ 时

对于任意的 φ 值都有 $\frac{\partial \bar{G}}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial \theta^2} \leq 0$, 因此 \bar{G} 在 $\theta=0$ 的方向上取最大值

$$\bar{G}_{\max} = \frac{4a_u \sigma_2^2}{\pi K_{I,cc}^2} \quad (6.6.36)$$

因此在三轴拉伸情况下,垂直于最大主应力 σ_2 的微裂纹将首先发生二次扩展,材料的最终断裂面也垂直于最大拉伸主应力的方向。由 $\bar{G}_{\max} = 1$ 得到发生应力突然跌落的条件为最大拉伸主应力达到

$$\sigma_2 = \sigma_{cc} = \frac{K_{1cc}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_u}} \quad (6.6.37)$$

表明由连续分布损伤向损伤局部化的过渡点只与最大主应力有关。

下面给出各个阶段的本构关系。在比例加载条件下,当最大拉伸主应力 $\sigma_2 < \sigma_c$ 时,材料的本构关系是线弹性和各向同性的,有

$$\epsilon_{ij} = (S_{ijkl}^0 + S_{ijkl}^1) \sigma_{kl} \quad (6.6.38)$$

式中微裂纹对柔度张量的贡献为

$$S_{ijkl}^1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} n_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^1(a_0, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (6.6.39)$$

当 $\sigma_c \leq \sigma_2 < \sigma_{cc}$ 时,应力应变关系是各向异性的,表示为

$$\epsilon_{ij} = (S_{ijkl}^0 + S_{ijkl}^1 + S_{ijkl}^2) \sigma_{kl} \quad (6.6.40)$$

式中

$$S_{ijkl}^1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} n_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^1(a_0, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\theta d\varphi - \int_{\Omega} n_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^1(a_0, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (6.6.41)$$

$$S_{ijkl}^2 = \int_{\Omega} n_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^2(a_u, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (6.6.42)$$

当最大拉伸主应力 σ_2 达到 σ_{cc} 后,立即发生应力跌落。重直于拉伸方向的微裂纹将发生二次失稳扩展,而其它大部分微裂纹将发生弹性卸载变形,即材料发生损伤局部化。由于微裂纹的取向和尺寸分布可以用概率密度函数 $p(a, \theta, \varphi)$ 表示,单位体积内满足 $\theta = 0$ 的微裂纹统计平均数目为零,因此这里认为在一个微小的取向范围 $0 \leq \theta \leq \theta_{cc}$ 内的所有微裂纹发生二次扩展。设单位体积内的所有微裂纹数为 n_c ,则发生二次扩展的微裂纹数目密度为

$$n_{cc} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{cc}} n_c p(a, \theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (6.6.43)$$

由 $\sigma_2 = \sigma_{cc}$ 以及比例加载条件, 可以从式(6.6.40)求得应力跌落前的应变张量 ϵ_{ccij} 。在应力跌落过程中的应力和应变变化路径与加载模型相关。例如, 对于应力控制加载的情况, 微裂纹将一直扩展下去, 直到材料的宏观破坏, 因此拉伸过程中观察不到应变软化阶段。这里假设控制最大主应变 ϵ_{22} , 使之缓慢增大, 同时应力张量的各个分量之间保持固定的比例变化。这样经过一定幅值的应力跌落后, 材料将达到暂时的稳定状态, 应力停止跌落, 材料进入拉伸软化阶段。在软化阶段的每一时刻, 应满足两方面的关系式, 其一是微裂纹的二次扩展准则即式(6.6.33), 由此得到二次扩展的微裂纹半径 a_s 与应力张量 σ_{ij} 的关系, 为

$$a_s = \frac{\pi K_{I,cc}^2}{4\sigma_2^2} \quad (6.6.44)$$

其二是基质和所有微裂纹的应变的总和与外加应变相等, 由此得到软化阶段的本构关系

$$\epsilon_{ij} = (S_{ijkl}^0 + S_{ijkl}^1 + S_{ijkl}^2 + S_{ijkl}^3) \sigma_{kl} \quad (6.6.45)$$

可见, 在材料的应变软化阶段, 有效柔度张量由以下四部分组成:

(1) 基质材料的弹性变形对柔度张量的贡献 S_{ijkl}^0 , 由式(6.6.5)表示。

(2) 没有发生扩展的微裂纹对柔度张量的贡献 S_{ijkl}^1 由式(6.6.41)表示。

(3) 发生一次扩展的微裂纹对柔度张量的贡献为

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^2 = & \iint_{\Omega} n_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^1(a_u, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\theta d\varphi \\ & - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{cc}} n_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^2(a_u, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (6.6.46)$$

(4) 发生二次扩展的微裂纹对柔度张量的贡献为

$$S_{ijkl}^3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{cc}} n_c p(a, \theta, \varphi) \bar{S}_{ijkl}^i(a_s, \theta, \varphi, \sigma_{ij}) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (6.6.47)$$

由式(6.6.36)以及 $\epsilon_{22} = \epsilon_{cc22}$, 可以得到应力突然跌落阶段和应变软化阶段的交点以及应力跌落的幅值。于是就得到了三维比例拉伸情况下脆性材料的完整的应力应变关系。

6.6.7 单向拉伸的算例

这里应用微裂纹扩展区模型模拟混凝土试件受单向拉伸时的本构响应, 在复杂加载等情况下的算例可参见文献[6.30]。将单拉应力状态 ($\sigma_{22} = \sigma > 0, \sigma_1 = \sigma_3 = 0$) 代入方程(6.6.20), 求得开始发生微裂纹扩展的临界应力为

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\pi}{4a_0}} K_{1c} \quad (6.6.48)$$

即当 $\sigma < \sigma_c$ 时材料处于线弹性无损阶段, 当 $\sigma \geq \sigma_c$ 时, 开始有微裂纹发生扩展, 材料进入非线性损伤阶段, 对应的微裂纹扩展区 $\Omega_1(\sigma)$ 为

$$\Omega_1(\sigma) = \{0 \leq \theta \leq \theta_{\max}(\sigma), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (6.6.49)$$

如图 6.24 所示, 其中函数 $\theta_{\max}(\sigma)$ 由下式得到

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{\max}(\sigma) = \frac{B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1}, \quad (\sigma \geq \sigma_c) \quad (6.6.50)$$

式中 B_1, B_2 和 B_3 为应力 σ 和材料参数的函数

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\pi}{4a_0} K_{1c}^2, & B_2 &= \frac{\pi}{2a_0} K_{1c}^2 - \left(\frac{2\sigma}{2-\nu}\right)^2 \\ B_3 &= K_{1c}^2 \left[\left(\frac{\sigma}{K_{1c}}\right)^2 - \frac{\pi}{4a_0} \right] \end{aligned} \quad (6.6.51)$$

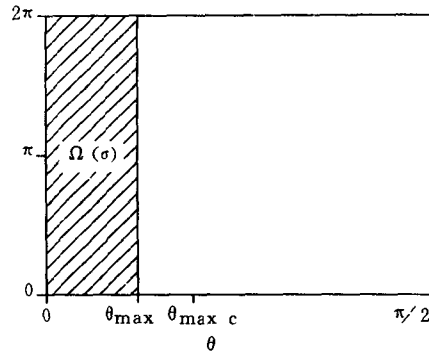


图 6.24 单向拉伸时的微裂纹扩展区

式(6.6.49)表明在单拉应力 σ 作用下,所有满足 $\theta \leq \theta_{\max}(\sigma)$ 的微裂纹都发生了扩展,具有统计平均半径 a_u 。随着应力 σ 的增大,微裂纹扩展区 $\Omega(\sigma)$ 及其对柔度张量的影响也随之增大。当应力达到 σ_{cc} 时,微裂纹开始发生二次扩展, σ_{cc} 的表达式为

$$\sigma_{cc} = \sqrt{\frac{\pi}{4a_u}} K_{Icc} \quad (6.6.52)$$

当 $\sigma \geq \sigma_{cc}$ 时,垂直于拉伸方向的微裂纹将首先穿越晶界,在基质材料中失稳扩展,引起材料内部损伤和变形的局部化。在宏观上这一局部化的过程表现为应力跌落和应变软化,此时,微裂纹扩展区保持为下式不变

$$\Omega(\sigma_{cc}) = \{0 \leq \theta \leq \theta_{\max c}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (6.6.53)$$

式中

$$\theta_{\max c} = \theta_{\max}(\sigma_{cc}) \quad (6.6.54)$$

这里假设所有微裂纹在取向空间中均匀分布,即概率密度分布函数 $p(\alpha, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}$ 。利用前面的公式,得到在单向拉伸情况下

微裂纹损伤的脆性材料的应力应变关系为

$$\epsilon = \begin{cases} F_0 \sigma & (\text{线弹性阶段 } 0 \leq \sigma < \sigma_c) \\ [F_0 + F_2(\theta_{\max})] \sigma & (\text{非线性强化阶段 } \sigma_c \leq \sigma < \sigma_{cc}) \\ \epsilon_{cc} & (\text{应力突然跌落阶段 } \sigma_{sc} < \sigma \leq \sigma_{cc}) \\ \left\{ F_0 + F_2(\theta_{\max}) + (1 - \cos\theta) \frac{15\rho(2-\nu)}{E} \left[\left(\frac{\pi K_{Ic}^2}{4a_0\sigma^2} \right)^3 - \gamma \right] \right\} \sigma & (\text{应变软化阶段 } 0 < \sigma \leq \sigma_{sc}) \end{cases} \quad (6.6.55)$$

式中

$$F_0 = \frac{1}{E} + \frac{\rho}{E}(10 - 3\nu)$$

$$F_2(\theta_{\max}) = \frac{\rho\gamma}{E}(10 - 3\nu - 10\cos^3\theta_{\max} + 3\nu\cos^5\theta_{\max})$$

$$\rho = \frac{16(1-\nu^2)n_c a_0^3}{45(2-\nu)}, \quad \gamma = \left(\frac{a_u}{a_0} \right)^3 - 1 \quad (6.6.56)$$

由式(6.6.55)得到的一条完整的单拉应力应变曲线如图 6.25, 其中采用的材料参数为 $K_{Ic} = 0.08 \text{ MN/m}^{3/2}$, $K_{Ic} = 0.16 \text{ MN/m}^{3/2}$,

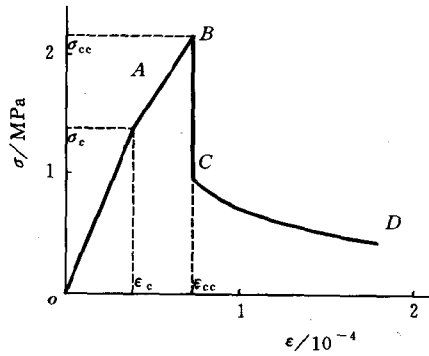


图 6.25 准脆性材料的理论单拉应力应变曲线

$a_0 = 0.26\text{cm}$, $a_n = 0.47\text{cm}$, $E = 31700\text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $n_c = 1.8 \times 10^6/\text{m}^3$ 和 $\theta_{cc} = 0.08\text{rad}$ 。可见,由微裂纹扩展区模型得到的应力应变曲线与 Terrien^[6.38]的实验曲线(图 6.23)是很相似的。

6.6.8 小结

本节介绍了脆性材料微裂纹损伤的一套细观力学模型,它以微裂纹扩展区的概念描述损伤,能够预测脆性材料在三轴拉伸、三轴压缩以及复杂加载路径下从开始加载到发生宏观破坏以前的各个阶段的细观损伤和本构关系,称之为微裂纹扩展区损伤模型。其主要特点如下:

(1) 区别于以往损伤理论中用标量、矢量和张量形式的内变量描述损伤的方法,该模型用微裂纹扩展区的概念描述脆性材料的微裂纹损伤状态,它以集合的形式出现,因此可以借助于并集、交集的运算方法处理损伤的演化问题,从而可以比较方便地解决任意复杂加载路径下各向异性的损伤演化和本构关系问题。

(2) 材料中大量弥散的微裂纹可以用概率密度函数来表示,每一个币状微裂纹承受复合型的应力场作用,建议用微裂纹前缘平均的无量纲能量释放率作为微裂纹扩展准则。并据此建立了三维应力状态对应的微裂纹扩展区的计算公式,这是处理复杂加载路径问题的基础。

(3) 在拉伸情况下,微裂纹的自相似扩展是主要的损伤机制。而在压缩情况下,损伤机制则复杂得多,包括微裂纹的闭合、摩擦滑移、自相似的 I 型扩展和弯折扩展,本节只讨论了拉伸的情况。文献[6.39]研究了在压缩情况下微裂纹的各种损伤机制及其对材料有效柔度张量的影响,并重点分析了微裂纹的弯折扩展,它是脆性材料轴向劈裂的主要原因。

(4) 脆性材料的本构关系包括线弹性、非线性强化、应力跌落和应变软化四个阶段,该模型分析了各个阶段的细观损伤机制和

本构关系。指出应力跌落和应变软化是分布损伤向损伤局部化的过渡引起的,而微裂纹的失稳扩展是损伤局部化和应变局部化的根本原因。将损伤局部化引入材料的损伤本构关系是和以往损伤模型的又一个重要差别。

(5) 实验发现,即使对于脆性很好的材料,如果发生了微裂纹损伤,在卸载后也会存在不同程度的各向异性残余变形。文献[6.39]在微裂纹扩展区模型基础上,进一步研究了准脆性材料中损伤诱发的残余变形的细观力学机理。认为脆性和准脆性材料中残余变形的产生主要有两方面的原因,其一是微裂纹的扩展释放了材料内部的部分残余应力,其二是微裂纹尖端的细观塑性变形。通过细观力学分析,将这些细观机制的影响引入了本构关系中去。

(6) 在材料发生应力跌落和应变软化的过程中,实际材料的行为有较大的分散性,这与材料细观结构的不均匀性直接相关。本节通过比较简单的数学分析揭示了材料破坏过程中细观损伤机制的变化以及影响材料本构行为的主要因素,所得到的本构关系代表材料在一定简化情况下的统计平均性质,没有体现实际材料在软化过程中的分散性和尺寸效应。

本节采用了等效弹性介质的方法,并忽略了微裂纹的相互作用以及各种微裂纹损伤机制之间的相互作用,实际上,在微裂纹扩展区的基础上利用自洽方法引入微裂纹的相互作用并不存在理论上的困难,只是使计算变得比较复杂。

6.7 各向同性弹性的双标量损伤模型

作为损伤力学中互为补充的两个重要方面,连续损伤力学和细观损伤力学的恰当结合将是描述材料从微缺陷演变到宏观性能劣化直至最终破坏全过程的有效方法。因此,作者认为发展基于细观损伤力学的连续损伤模型(称之为准唯象损伤模型)将是今后损

伤力学发展的主要方向之一。但是,就目前的发展状况而言,连续损伤力学和细观损伤力学的发展还是相对比较独立的,它们之间的有机结合尚未真正实现,其主要原因是从细观损伤力学的分析到唯象模型的过渡仍缺乏有效的方法和系统的研究工作。建立唯象损伤模型的关键问题之一是损伤状态的描述,这个基本问题还没有能完善解决。在以往大多数的连续损伤理论中,各向同性损伤用一个标量损伤变量描述,各向异性损伤用矢量、二阶张量或四阶张量形式的损伤变量描述;而在细观损伤力学中,损伤状态往往用微缺陷的几何特征参数(如微裂纹密度、孔隙率)来描述,这两种描述之间的关联尚不清楚。Zheng^[6.40], Zheng 和 Betten^[6.41]用张量表示理论给出了二维弹性损伤的一般描述,首次在损伤模型中引入损伤材料常数,提出了一种新的宏细观相结合的研究途径。沈为^[6.47],高蕴昕,郑泉水和余寿文^[6.42]对最简单的各向同性弹性损伤情况进行了研究,建立了一种用两个损伤变量描述的各向同性弹性损伤模型,本节对此模型进行介绍。应该指出的是,这个模型的工作虽然是很初步的,但是它提供了一种新的思路,更严格和系统的工作有待进一步完成。

6.7.1 以往各向同性损伤理论的局限性

以往的连续损伤理论中各向同性损伤是用单个标量损伤变量 D 来描述的。在应变等效假设下,引入有效应力张量 $\hat{\sigma}$ 代替原无损伤本构方程中的 Cauchy 应力张量 σ , 即

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{1-D}\sigma \quad (6.7.1)$$

得到弹性损伤本构方程

$$\varepsilon = \frac{1}{2G}\hat{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\hat{\sigma})\mathbf{1} = \frac{1}{2(1-D)G}\sigma - \frac{\nu}{(1-D)E}(\text{tr}\sigma)\mathbf{1} \quad (6.7.2)$$

其中, E, G 和 ν 分别为材料初始无损时的弹性模量、剪切模量和泊松比, $\mathbf{1}$ 为二阶单位张量。

假设初始无损状态的材料是各向同性弹性的, 损伤也是各向同性的, 此时任一损伤状态的材料宏观力学性能仍然是各向同性弹性的, 并可由损伤后的弹性模量 \hat{E} 、剪切模量 \hat{G} 和泊松比 $\hat{\nu}$ 完全描述。故可写出材料的损伤本构关系

$$\varepsilon = \frac{1}{2\hat{G}}\sigma - \frac{\hat{\nu}}{\hat{E}}(\text{tr}\sigma)\mathbf{1} = \frac{1}{2\hat{G}}\sigma - \left(\frac{1}{2\hat{G}} - \frac{1}{\hat{E}}\right)(\text{tr}\sigma)\mathbf{1} \quad (6.7.3)$$

此时 \hat{E}, \hat{G} 和 $\hat{\nu}$ 不再是材料常数, 而是随着损伤状态的变化而演化。比较式(6.7.3)和(6.7.2)可得

$$\hat{E} = (1 - D)E, \hat{G} = (1 - D)G, \hat{\nu} = \nu \quad (6.7.4)$$

该式表明, 在单个标量损伤变量的各向同性弹性损伤理论中, 当材料发生损伤后, 泊松比 $\hat{\nu}$ 始终保持不变, 且和初始无损状态一样; 而弹性模量和剪切模量 \hat{E}, \hat{G} 是按相同规律演化的。以往各向同性弹性损伤理论无形中受到上述隐含着的假设的限制, 因此所能描述的只是各向同性弹性损伤的一种简化特例。例如, 损伤演化过程中泊松比发生变化的材料(如岩土)以及弹性模量和剪切模量演化规律不相同的材料(几乎所有的材料都如此), 均不能包容在上述以应变等效假设(也包括应力等效假设和余能等效假设)为基础的损伤模型中。同时, 许多细观损伤力学的结果也与式(6.7.4)不符。

6.7.2 各向同性弹性损伤的双标量损伤模型

在讨论各向同性弹性损伤时, 材料在任一损伤状态均是各向同性弹性的, 材料性能需要用两个独立的材料参量来描述, 不妨取为损伤状态的弹性模量 \hat{E} 和剪切模量 \hat{G} 。从唯象的观点看, 材料内部损伤对宏观力学性能的影响, 已完全由宏观参量 \hat{E} 和 \hat{G} 所描述。因此, 定义损伤变量如下

$$D_E = \frac{E}{\hat{E}} - 1, D_G = \frac{G}{\hat{G}} - 1 \quad (6.7.5)$$

该式所定义的损伤变量具有明确的物理意义,表征了损伤造成的材料柔度的增加,且其损伤演化方程的实验确定也是可行的,更重要的是它们能完全描述各向同性损伤。另一方面,虽然 D_E 和 D_G 是由两个独立的变量定义的,但是它们本身是否是独立的,还依赖于损伤演化的本质即其细观演化特征。

于是,各向同性弹性损伤材料的本构方程可以表示为式(6.7.3)的形式,其中损伤后的泊松比为

$$\hat{\nu} = \frac{\hat{E}}{2\hat{G}} - 1 = \frac{1 + D_G}{1 + D_E}(1 + \nu) - 1 \quad (6.7.6)$$

将式(6.7.5)和(6.7.6)代入(6.7.3),无须任何等效性假设,即可得损伤材料的本构关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + D_G}{2G} \boldsymbol{\sigma} - \left(\frac{1 + D_G}{2G} - \frac{1 + D_E}{E} \right) (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (6.7.7)$$

其中,损伤变量 D_E 和 D_G 随着损伤的发展而演化,在不同的损伤状态取不同的值。一般需引入两个损伤演化方程才能保证定解问题的封闭性。显然,以往的单标量损伤模型只是这里的双标量损伤模型的一个特例。

在连续损伤理论中,经常用柔度张量的改变来描述损伤。初始无损各向同性弹性柔度张量可表示为

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2G} \mathbf{I} - \frac{\nu}{E} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \frac{1}{2G} \mathbf{I} - \left(\frac{1}{2G} - \frac{1}{E} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (6.7.8)$$

其中, \mathbf{I} 为四阶单位张量,其分量为 $I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ 。材料在任一损伤状态的柔度张量称为损伤柔度张量,用 $\hat{\mathbf{C}}$ 表示,各向同性弹性损伤后的柔度张量为

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{2\hat{G}} \mathbf{I} - \frac{\hat{\nu}}{\hat{E}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \frac{1 + D_G}{2G} \mathbf{I} - \left(\frac{1 + D_G}{2G} - \frac{1 + D_E}{E} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (6.7.9)$$

材料各向同性损伤的这种描述方法,既适用于三维问题又适用于二维问题。对于二维平面应力问题, E, G 和 ν 取与三维材料相同的弹性常数。对于二维平面应变问题,若记三维弹性常数为 E_0, G_0 和 ν_0 ,则平面应变的弹性常数 E, G 和 ν 为

$$E = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2}, \quad G = G_0, \quad \nu = \frac{\nu_0}{1 - \nu_0} \quad (6.7.10)$$

6.7.3 宏观和细观损伤模型的连接

宏观损伤状态及其演化由材料的细观结构、缺陷分布和取向等特征确定。利用现有的细观损伤力学结果,可以建立宏细观损伤变量之间的关系,这也正是准唯象损伤模型的主要特点之一。对于二维随机分布微圆孔洞损伤,利用文献[6.43]中在非相互作用的分析基础上,由 Mori-Tanaka 方法得到的考虑微孔洞相互作用的细观力学结果,可得到宏观损伤变量 D_E 和 D_G 与描述细观损伤状态的孔隙率 ρ 的关系为

$$D_E = \frac{3\rho}{1 - \rho}, \quad D_G = \frac{4\rho}{(1 + \nu)(1 - \rho)} \quad (6.7.11)$$

对于二维随机分布的微裂纹损伤,不考虑微裂纹之间的相互作用,由文献[6.28]的结果,得到

$$D_E = \rho, \quad D_G = \frac{1}{1 + \nu}\rho \quad (6.7.12)$$

上面两例表明,通过建立正确的宏观损伤模型,使宏细观的结合成为现实不仅是重要的,而且是可能的。

在二维微孔洞损伤时,由(6.7.11)式可以导出

$$\frac{D_E}{D_G} = \frac{3}{4}(1 + \nu) \quad (6.7.13)$$

在二维微裂纹损伤时,由(6.7.12)式可以导出

$$\frac{D_E}{D_G} = 1 + \nu \quad (6.7.14)$$

式(6.7.13)和(6.7.14)给出了上述两种有确定细观结构的特殊情况下的 D_E 和 D_G 的关系。这两个关系式在损伤演化过程中始终保持不变,即 D_E 和 D_G 不是独立演化的。然而, D_E 和 D_G 的不独立是有条件的,即只有当材料细观缺陷的损伤特征不变化(如微裂纹仍演化为微裂纹,微孔洞仍演化为微孔洞),损伤演化只是孔隙率或微裂纹密度的变化,细观损伤只由一个变量描述时, D_E 和 D_G 才是不独立的。如果细观损伤参数是两个(或多个)独立变量,则得不到 D_E 和 D_G 的关系。因此, D_E 和 D_G 的独立性是由细观损伤演化的本质所确定的。

对于 D_E 和 D_G 不独立的情况,可引进函数

$$\alpha = \frac{D_E}{(1+\nu)D_G} = \alpha(\rho) \quad (6.7.15)$$

引进无量纲损伤参数 $\alpha(\rho)$ 的原因是,对于二维问题,郑泉水和黄克智^[6.44]严格证明了 $\alpha(\rho)$ 是与初始弹性模量 E 和泊松比 ν 无关的函数,它更加突出地表征了材料细观缺陷的几何特征(但是,对于三维问题, α 仅独立于 E ,而与 ν 相关)。这时,将双损伤变量模型简化为单变量的形式,本构方程(6.7.7)式简化为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+D_G}{2G} \boldsymbol{\sigma} - \left[\frac{1+D_G}{2G} - \frac{1+\alpha(1+\nu)D_G}{E} \right] (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (6.7.16)$$

由此可以看出,即使只由一个损伤变量 D_G (或 D_E) 可以描述的损伤状态,本构方程也不是由等效应变假设导出的形式(6.7.2)。模型(6.7.16)将表征细观损伤几何特征的量引入到宏观损伤本构方程中,形成一个宏细观相结合的损伤本构模型。

对 $\alpha(\rho)$ 关于 ρ 作 Taylor 级数展开

$$\frac{D_E}{(1+\nu)D_G} = \alpha(\rho) = \alpha_0 + \alpha_1 \rho + \alpha_2 \rho^2 + \dots \quad (6.7.17)$$

由此引进细观损伤材料常数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ 它们描述了材料缺陷的

细观特征。对于二维随机分布的微裂纹型损伤,由 Ju 和 Chen^[6.45] 的细观力学分析结果,得到

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 \approx 0.013 \quad (6.7.18)$$

式中 $\alpha_0=1$ 与式(6.7.14)一致。对于二维微圆孔洞损伤,由式(6.7.13)知

$$\alpha_0 = 3/4 \quad (6.7.19)$$

对于二维随机分布的各种正 n 边形状的孔,由文献[6.46]的结果导出的细观损伤材料常数为

$$\alpha_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \text{ 当 } n = 3 \text{ 或 } n \geq 5 \text{ 时} \quad (6.7.20)$$

$$\alpha_0 = \frac{3h_1 - h_2 + h_3}{2(h_1 + h_2 + h_3)}, \text{ 当 } n = 4 \text{ 时} \quad (6.7.21)$$

其中 h_1, h_2 和 h_3 为孔的形状因子,对应不同形状的孔其取值不同^[6.46]。

可见,文献[6.42]提出的方法提供了一种将细观损伤力学和连续损伤模型相结合的途径。同时应该指出,以上的分析只是针对于理想化的各向同性损伤情况,对于比较复杂的材料细观损伤,究竟应由几个独立变量描述以及如何描述,是值得深入研究的问题。

参 考 文 献

- 6.1 Murakami S and Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage. in: Proc. 3rd IUTAM Symposium on creep in structures (Edited by Ponter, A R S and Hayhurst D R). Springer-Verlag, 1980, 422~443
- 6.2 Murakami S. Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory. J. Eng. Mater. Tech., 1983, 105, 99~105

-
- 6.3 Murakami S. Mechanical modeling of material damage. *J. Appl. Mech.*, 1988, 55, 280~286
 - 6.4 Murakami S, Kawai M and Rong H. Finite element analysis of creep crack growth by a local approach. *Int. J. Mech. Sci.*, 1988, 30, 491~502
 - 6.5 Chaboche J L. Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics, *Nucl. Eng. Design*, 1984, 79, 309~319
 - 6.6 余天庆, 钱济成. 损伤理论及其应用. 国防工业出版社, 1993
 - 6.7 Murakami S and Imaizumi T. Mechanical description of creep damage state and its experimental verification. *J. de Mecan Theo. et Appl.*, 1982, 1(5), 733~761
 - 6.8 Chaboche J L. The concept of effective stress applied to elasticity and viscoplasticity in the presence of anisotropic damage. in: *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids* (Edited by Boehler J-P). Martinus Nijhoff, The Hague, 1982, 737~760
 - 6.9 Chaboche J L. Continuous damage mechanics — a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nucl. Eng. Design*, 1981, 64, 233~247
 - 6.10 Chaboche J L. Continuum damage mechanics: present state and future trends. *Nucl. Eng. Design*, 1987, 105, 19~33
 - 6.11 Chaboche J L. Phenomenological aspects of continuum damage mechanics. in: *Theoretical and Applied Mechanics* (Edited by Germain R, et al.). Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, 1989, 41~56
 - 6.12 Chaboche J L. Continuum damage mechanics: Part

-
- I general concepts, and Part II-damage growth, crack initiation, and crack growth. *J. Appl. Mech.*, 1988, 55, 59~72
- 6.13 Lemaitre J and Chaboche J L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- 6.14 Hayhurst D R. On the role of the creep continuum damage in structural mechanics. in: *Engineering Approaches to High Temperature Design* (Edited by Wilshire O). Pineridge Press, Swansea, 1983
- 6.15 Leckie F A and Hayhurst D R. Creep rupture of structures. *Proc. Royal Soc. London*, 1974, 340, 323~347
- 6.16 Krajcinovic D and Fonseka G U. The continuous damage theory of brittle materials. Part 1: general theory. *J. Appl. Mech.*, 1981, 48, 809~815
- 6.17 Fonseka G U and Krajcinovic D. The continuous damage theory of brittle materials. Part 2: uniaxial and plane response models. *J. Appl. Mech.*, 1981, 48, 816~824
- 6.18 Krajcinovic D. Constitutive equations for damaging Materials. *J. Appl. Mech.*, 1983, 50, 355~360
- 6.19 李灏. 损伤力学基础. 山东科学技术出版社, 1992
- 6.20 Sidoroff F. Description of anisotropic damage application to elasticity. in: *Proc. of IUTAM Colloquium. Physical Nonlinearities in Structural Analysis*, 1981, 237~244
- 6.21 Supartono F and Sidoroff F. Anisotropic damage modeling for brittle elastic materials. *Symposium of France-Poland*, 1984
- 6.22 Cordebois J P and Sidoroff F. Damage induced Elastic Anisotropy, in: *Colloque Euromech 115, Mechanical Be-*

- havior of Anisotropic Solids. Villard de Lans, 1982, 761
~774
- 6.23 Rice J R. Continuum mechanics and thermodynamics of
plasticity in relation to microscale deformation mecha-
nisms. in: Constitutive Equations in Plasticity (Edited
by Arogon A S). The MIT Press, Cambridge, 1975
- 6.24 Wang P T. Complete Stress-Strain Curve of Concrete
and Its Effect on Ductility of Reinforced Concrete Mem-
bers. Ph. D. Thesis, University of Illinois at Chicago
Circle, 1977
- 6.25 谢和平. 岩石混凝土损伤力学. 中国矿业大学出版社,
1991
- 6.26 Kunin I A. Elastic Media with Microstructure, II;
Three-Dimensional Models. Springer-Verlag, Berlin,
1983
- 6.27 Krajcinovic D. Damage Mechanics. Mech. Mater.,
1989, 8, 117~197
- 6.28 Kachanov M. Effective elastic properties of cracked
solids; critical review of some basic concepts. Appl.
Mech. Rev., 1992, 45, 304~335
- 6.29 Bazant Z P. Mechanics of distributed cracking. Appl.
Mech. Rev., 1986, 39, 675~705
- 6.30 冯西桥. 脆性材料的细观损伤理论和损伤结构的安定分
析. 清华大学博士学位论文, 1995
- 6.31 Feng X Q and Yu S W. A new damage model for micro-
rack-weakened brittle solids. Acta Mech. Sinica, 1993,
9(3), 251~260
- 6.32 Feng X Q and Yu S W. Damage model of domain of mi-

-
- microcrack growth for microcrack-weakened brittle solids. in: Proc. 2nd Int. Conf. on Nonlinear Mechanics (Edited by Chien W Z). Peking University, Beijing, 1993, 299~302
- 6.33 Yu S W and Feng X Q. A micromechanics-based model for microcrack-weakened brittle solids. *Mech. Mater.*, 1995, 20, 59~76
- 6.34 Feng X Q and Yu S W. Micromechanical modeling of tensile response of elastic-brittle materials. *Int. J. Solids Structures*, 1995, 32(22), 3359~3374
- 6.35 Feng X Q and Yu S W. Micromechanical modeling of strain-softening in microcrack-weakened quasi-brittle materials, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1995, 8(2), 121~132
- 6.36 冯西桥, 余寿文. 脆性材料的各向异性损伤及其测量方法. *清华大学学报*, 1995, 35 (2), 1~6
- 6.37 Mura T. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff Publishers, The Netherlands, 1987
- 6.38 Terrien M. Emission acoustique et comportement post-critique dun beton sollicite en traction. *Bull. de Liaison des ponts et chaussees*, 1980, 105, 65~72
- 6.39 Yu S W and Feng X Q. Micromechanical damage model for brittle materials with residual strains. *Proceedings of the Ninth International Conference on Fracture*. Sydney, 1997
- 6.40 Zheng Q S. A unified invariant description of micromechanically-based effective elastic properties for two-dimensional damaged solids, (to be submitted)

-
6. 41 Zheng Q S and Betten J. On damage effective stress and equivalence hypothesis. *Int. J. Damage Mech.*, 1996, 6(3), 319~340
6. 42 高蕴昕, 郑泉水, 余寿文. 各向同性弹性损伤的双变量描述. *力学学报*, 1996, 28(5), 542~549
6. 43 Kachanov M. On the effective moduli of solids with cavities and cracks. *Int. J. Fracture*, 1993, 59, R17~R21
6. 44 Zheng Q S and Hwang K C. Independence of damage compliance in two dimensions from matrix Poisson's ratio, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1996, (in press)
6. 45 Ju J W and Chen T M. Effective moduli of two-dimensional brittle solids with interacting microcracks, Part I: Basic formulations. *J. Appl. Mech.*, 1994, 61, 349~357
6. 46 Kachanov M, Tsukrov I and Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes. *Appl. Mech. Rev.*, 1994, 47, S151~S174
6. 47 沈为. 各向同性损伤应满足的条件. *力学与实践*, 1991, 13, 20~23

第7章 损伤力学的应用

和固体力学的其它分支一样,损伤力学是在工程实践的推动下发展起来并逐渐完善的;反过来,损伤力学又在工程实践中得到广泛应用,推动现代科学技术的进一步发展。一个工程结构的设计成功与否,往往取决于它所采用材料的力学性能如强度、刚度,并综合考虑结构的经济性和可靠性,从而对材料做出最合理的选择。损伤力学的发展,使我们对材料的宏观行为有了更深入的了解。损伤力学在各种各样的工程领域例如核工业、航空航天工业、化学工业、机械工业、材料和生物科学直至微电子与微机械等领域,都有着广泛的应用前景。本章仅就几个侧面说明损伤力学的应用方法。实际上,损伤力学的应用要比本章的介绍广泛得多。

7.1 蠕变和疲劳问题的寿命预测

7.1.1 蠕变寿命观测和蠕变裂纹扩展

连续损伤理论,是伴随着蠕变损伤的研究而发展的。最早的连续损伤理论——Kachanov-Rabotnov 损伤理论就是在研究金属材料的蠕变问题时提出的。损伤力学的一个重要应用便是预计蠕变结构的寿命以及蠕变裂纹扩展的速率,以确定存在蠕变的工程材料与结构物的安全性。如第3章所述,分析结构的蠕变问题有三种方法:一种是全耦合的方法,即同时考虑蠕变应变与蠕变损伤之间的相互影响,用有限元模拟的方法同时计算应变场和损伤场,然后根据蠕变断裂准则(如 $\omega = \omega_c$)预测结构寿命或蠕变裂纹扩展速

率;第二种方法是全解耦方法,即首先采用无损伤的应力应变关系计算应力应变场,然后代入损伤演化方程,预测结构的寿命,例如Kachanov^[7.1]利用这种方法分析了多种典型构件的蠕变问题;第三种方法是半解耦方法,它的计算工作量和精度介于前两种方法之间。

Riedel^[7.2]在小范围损伤的条件下,得到了蠕变裂纹尖端的自相似解,关于Riedel等人对蠕变裂纹问题的研究,在节5.6中已经作了介绍,其中得到的蠕变裂纹扩展速率可表示为式(5.6.76),对此式积分即可得到含裂纹构件的寿命,其中忽略了小范围损伤假设的局限性(无论这将导致多大范围的误差)。Hayhurst等人^[7.3]曾经用有限元方法计算了蠕变裂纹的问题,他们没有采用小范围损伤的假设。在其算例中构件的寿命 t_i 大于特征时间 t_1 ,但还不致于大到初始弹性阶段的影响可以完全忽略的程度。因此需要将小范围损伤的扩展速率即式(5.6.76)和大范围损伤的结果即式(5.6.66)进行内插修正。这种修正可以通过将式(5.6.66)中的 C^* 用如下公式代替来实现

$$C^* \rightarrow C^* (1 + t_1/t) \quad (7.1.1)$$

这种修正的结果包含了长时间的关系式(5.6.66)和短时间关系式(5.6.76),与有限元结果很接近。

下一个步骤是将经过修正的裂纹扩展速率进行积分。为此,需要知道 C^* 与裂纹扩展长度之间的函数关系。在某些材料和载荷情况下,裂纹不是沿直线扩展,而是偏斜一个角度 θ ,这就带来两个困难,一是在实际的构件中是否发生分叉或者偏折扩展,二是对于分叉扩展的裂纹 C^* 的变化关系难以确定。鉴于此,采取以下步骤^[7.2]:如果材料的破坏(例如对于纯铜)是由最大拉伸应力而不是由等效应力控制的(即 $\kappa > 0.5$),或者实验表明裂纹的扩展是平直的,则假设裂纹沿直线扩展;如果材料的破坏(例如对于铝)是由等效应力控制的(即 $\kappa < 0.5$),则裂纹将沿着 $\theta = \pm 60^\circ$ 的方向扩展,

此时将沿 $\theta = \pm 60^\circ$ 扩展的裂纹扩展速率在对称面上的投影作为平面裂纹的扩展速率,当然,这是一种相当粗糙的近似模型。

对于平面扩展的裂纹,积分 C^* 表示为

$$C^* = aB\sigma_{\text{net}}^{n+1}g_1(a/W, n) \quad (7.1.2)$$

式中 σ_{net} 是净截面应力, g_1 是构件尺寸的无量纲函数。

采用分离变量的形式对式(5.6.66)进行积分,得到裂纹扩展尺寸和时间的隐含关系式

$$F(a/W) = D\sigma_0^2 t G(t/t_1) (\alpha \cos \theta)^{\frac{\chi}{n+1}} \left(\frac{n+1}{\chi} \right) \quad (7.1.3)$$

式中

$$F(a/W) = \int_{a_0}^a \frac{(\sigma_0/\sigma_{\text{net}})^2 da}{(ag_1)^{\chi/(n+1)} (a-a_0)^{(n+1-\chi)/(n+1)}} \quad (7.1.4)$$

$$G(t/t_1) = (t_1/t) \int_0^{t/t_1} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right)^{\chi/(n+1)} d\tau \quad (7.1.5)$$

式中假设载荷保持常数, σ_0 是初始时刻 $t=0$ 的净承载应力, a_0 是初始时刻的裂纹长度, $\cos \theta$ 表示局部裂纹扩展方向 θ 在对称面上的投影。

图 7.1 给出了无量纲函数 $G(t/t_1)$ 的关系曲线,它表示了短时间弹性行为的效应。如果弹性效应完全忽略,则 $G=1$ 。式(7.1.3)右端 $D\sigma_0^2 t$ 表示在拉伸应力 σ_0 作用下无缺口试件的破坏时间,即如果含裂纹试件的破坏时间大于 $1/(D\sigma_0^2)$,则这种材料具有缺口增强的性质;反之,材料具有缺口弱化的性质。

图 7.2 给出了平面应变情况下铜和铝的双侧开口拉伸试件(DECT)和中心裂纹拉伸试件(CCT)的裂纹尺寸随时间的变化曲线,关于铜和铝的材料参数见第 5 章表 5.3,因子 α 是按照式(5.6.68)的上限计算的,虚线表示忽略了弹性效应即令 $G=1$,实线则包含了弹性效应的影响。由图 7.2 可见,对于铜,弹性修正是很小的,对于中心裂纹试件,两种结果相差仅 2%,而对于铝,弹性

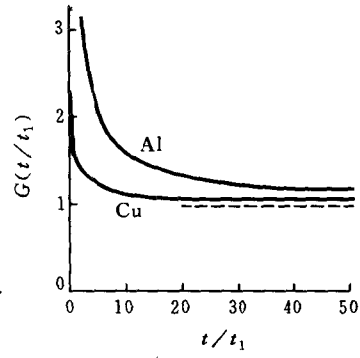


图 7.1 裂纹扩展的弹性修正系数 $G(t/t_1)$ [7.2]

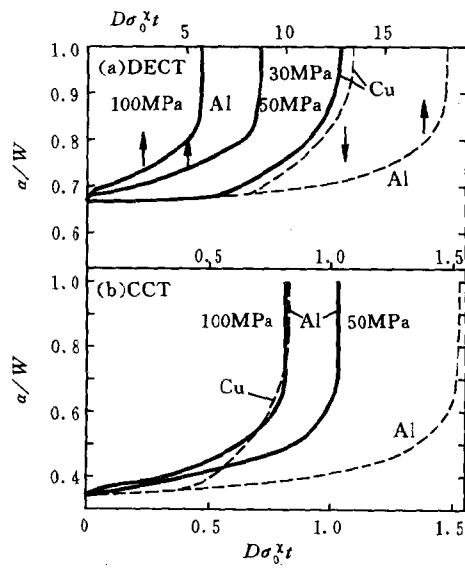


图 7.2 DECT 和 CCT 试件的裂纹尺寸随时间的变化曲线 [7.2]

效应的影响很明显,导致裂纹更快速地扩展,使得构件寿命明显下降。因此,尽管构件的寿命 t_f 比特征时间 t_1 大很多,但是弹性效应仍是明显的。表 7.1 给出了 Riedel 的小范围损伤理论解与 Hayhurst 等的有限元结果^[7.3]及实验结果的比较,表中寿命 t_f 的下限和上限分别对应于 α 的上限和下限。可以看出,对于铜,理论解与数值解、实验结果很接近,而对于铝,只有寿命的下限比较准确。

表 7.1 含蠕变裂纹构件的寿命 $D\sigma_0^2 t_f$ 及 t_f/t_1 ^[7.2]

$D\sigma_0^2 t_f$	Al		Cu	
	CCP	DECP	CCP	DECP
实验结果	1.0	5	0.99	1.18
有限元结果	1.07	5	0.98	1.17
σ_0/MPa	50	50	30	30
(7.1.3)的结果	1.03~6.7	8.4~73	0.83~0.97	1.04~1.22
t_f/t_1	12~75	4.6~41	41~48	20~24

7.1.2 疲劳损伤的寿命分析

在一般的损伤理论中,都采用“时间”作为一个参考变量,损伤的累积表示为时间的函数,构件的寿命也用时间表示。具体到循环加载情况下的疲劳问题,则将载荷的循环次数代替时间,损伤随着载荷循环而累积,并用载荷循环次数定义疲劳寿命。疲劳损伤的演化依赖于循环的最大载荷 σ_M 、平均载荷 $\bar{\sigma}$ 、当时的损伤 ω 、温度 T 等,即损伤随载荷循环 N 的演化方程为

$$\frac{\delta\omega}{\delta N} = F(\sigma_M, \bar{\sigma}, \omega, T, \dots) \quad (7.1.6)$$

式中 F 是一个待定的函数。

疲劳损伤的宏观定义常用的有两种,其一是用残余寿命定义,

其二是用有效应力定义。我们首先考虑一个两级加载的实验,先在 $\Delta\sigma_1$ 的载荷上循环 N_1 次,然后在第二种载荷 $\Delta\sigma_2$ 上循环 N_2 次直到材料破坏,并且设 $N_1 + N_2 = N_R$,实验结果表明,损伤的累积是非线性的,用残余寿命 N_2/N_{F_2} 不宜于作为损伤的直接度量。解决这一问题的一个简单方法是认为损伤演化方程中的载荷及损伤变量是不可分的,例如^[7.4]

$$\frac{\delta\omega}{\delta N} = \omega^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{C(\bar{\sigma})} \right]^\beta \quad (7.1.7)$$

对此式积分,并利用初始加载时 $\omega=0$ 和 $N=N_F$ 时 $\omega=1$,得到疲劳寿命 N_F 的表达式

$$N_F = \frac{1}{1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{C(\bar{\sigma})} \right]^{-\beta} \quad (7.1.8)$$

ω 的演化是 N/N_F 的函数,在上述的二级加载实验,第二阶段的残余寿命应为

$$\frac{N_2}{N_{F_2}} = 1 - \left(\frac{N_1}{N_{F_1}} \right)^\eta \quad (7.1.9)$$

式中

$$\eta = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} = \frac{1 - \alpha(\sigma_{M_2}, \bar{\sigma}_2)}{1 - \alpha(\sigma_{M_1}, \bar{\sigma}_1)} \quad (7.1.10)$$

这种用残余寿命定义的损伤能够定性描述大多数循环加载下损伤的相对变化,但是并不能唯一确定某一时刻损伤的准确值。例如,如图 7.3 所示,对于(a)中所示的损伤演化曲线作一个简单的变换后,损伤的绝对值变化了,但是 N_1/N_{F_1} 和 N_2/N_{F_2} 都没有变化。

为了避免这种不确定性,可以采用第二种定义,即用有效应力的概念间接地定义损伤。为了将上述两种定义的损伤演化方程形式统一起来,将式(7.1.7)中的 ω 用 $(1-\omega)$ 代替,并表示为

$$\frac{\delta\omega}{\delta N} = [1 - (1 - \omega)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1 - \omega)} \right]^\beta \quad (7.1.11)$$

疲劳寿命表示为

$$N_F = \frac{1}{(\beta + 1)[1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})]} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right)^{-\beta} \quad (7.1.12)$$

式中 $M(\bar{\sigma}) = C(\bar{\sigma})(\beta + 1)^{1/\beta}$ 。损伤与载荷循环的关系为

$$\omega = 1 - \left[1 - \left(\frac{N}{N_F} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\beta+1} \quad (7.1.13)$$

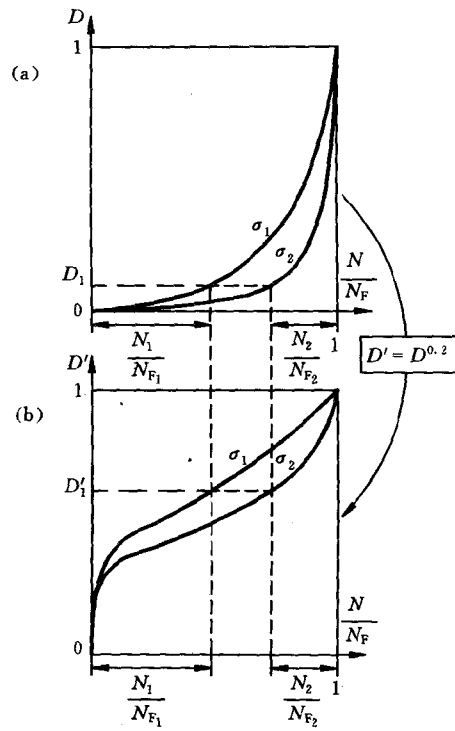


图 7.3 用残余寿命定义的疲劳损伤

函数 α 和 M 可选取为如下的形式

$$\begin{aligned}
 a(\sigma_M, \bar{\sigma}) &= 1 - a \left\langle \frac{\sigma_M - \sigma_1(\bar{\sigma})}{\sigma_u - \sigma_M} \right\rangle \\
 \sigma_1(\bar{\sigma}) &= \sigma_{10} + (1 - b\sigma_{10})\bar{\sigma} \\
 M(\bar{\sigma}) &= M_0(1 - b\bar{\sigma}) \quad (7.1.14)
 \end{aligned}$$

式中 σ_{10} 是零平均应力下的疲劳极限应力, σ_u 是材料的最大承载应力。此时, 在二级加载情况下, 第二阶段的残余寿命表示为

$$\frac{N_2}{N_{F_2}} = 1 - \left(\frac{N_1}{N_{F_1}} \right)^\eta \quad (7.1.15)$$

式中

$$\eta = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} = \frac{[\sigma_{M_2} - \sigma_1(\bar{\sigma}_2)](\sigma_u - \sigma_{M_1})}{[\sigma_{M_1} - \sigma_1(\bar{\sigma}_1)](\sigma_u - \sigma_{M_2})} \quad (7.1.16)$$

图 7.4 比较了 IN100 合金在高温下的实验与式(7.1.15)的理论曲线, 二者相符较好。以上的分析仅仅是针对于恒温下单轴加载的情况, 对于三轴加载等更复杂情况下的疲劳损伤分析, 可参见文献 [7.4]。

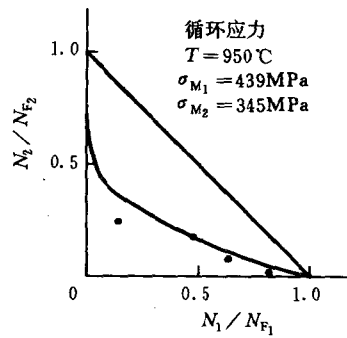


图 7.4 二级加载下的疲劳寿命^[7.4]

下面具体介绍 Lemaitre^[7.4]在热力学框架上给出的疲劳损伤模型, 分低周疲劳和高周疲劳两种情况。

在低周疲劳损伤情况下,材料发生交变的塑性变形,外加应力高于材料的屈服应力,疲劳寿命 N_F 一般低于 10^4 。低周疲劳损伤可以通过弹性模量的变化来定义和测量,也可以由损伤与循环塑性的耦合关系导出。按照 Ramberg-Osgood 硬化律并由应变等效假设,得到

$$\Delta\epsilon_p = \left[\frac{\Delta\sigma}{K_c(1-\omega)} \right]^{M_c} \quad (7.1.17)$$

式中 $\Delta\epsilon_p$ 是加载幅度 $\Delta\sigma$ 下每一循环的塑性变形, M_c 和 K_c 是材料参数。如果损伤 $\omega=0$,则产生塑性应变幅 $\Delta\epsilon_p$ 的应力幅为 $\Delta\sigma^*$,即

$$\Delta\sigma^* = K_c \Delta\epsilon_p^{1/M_c} \quad (7.1.18)$$

则由以上两式得到

$$\omega = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma^*} \quad (7.1.19)$$

按照节 3.2 中的热力学框架,损伤演化方程的一种一般形式为

$$\dot{\omega} = \frac{Y}{S_0} \frac{\dot{p}}{(1-\omega)^\alpha} \quad (7.1.20)$$

式中 Y 是广义热力学力, α_0 和 S_0 是材料常数, \dot{p} 是等效塑性应变率。将(7.1.17)推广到三维比例加载情况,有

$$\Delta\sigma_{eq} = (1-\omega)K_c^1 \Delta p^{1/M_c} \quad (7.1.21)$$

式中 $K_c^1 = K_c 2^{-(1+1/M_c)}$ 。广义热力学力 Y 的表达式为

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2 R_v}{2E(1-\omega)^2} = \frac{R_v}{2E} K_c^1 (p - p_i)^{2/M_c} \quad (7.1.22)$$

式中 p_i 是第 i 个载荷循环开始时的 p 值,

$$R_v = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad (7.1.23)$$

于是损伤演化方程(7.1.20)又表示为

$$\dot{\omega} = \frac{R_v}{2ES_0} K_c^1 (p - p_i)^{2/M_c} \frac{\dot{p}}{(1-\omega)^{\alpha_0}} \quad (7.1.24)$$

或

$$\dot{\omega} = \frac{R_v(p - p_i)^\gamma}{\Gamma} \frac{\dot{p}}{(1 - \omega)^{\alpha_1}} \quad (7.1.25)$$

式中 $\Gamma = 2ES_0/K_c^{1/2}$, $\gamma = 2/M_c$, $\alpha_1(\Delta p) = \alpha_0$ 。将上式积分, 得到每个载荷循环内损伤的累积为

$$\frac{\delta\omega}{\delta N} = \frac{R_v}{\Gamma(\gamma + 1)} \frac{\Delta p^{\gamma+1}}{(1 - \omega)^{\alpha_1}} \quad (7.1.26)$$

在周期加载情况下, 上式可以导出

$$\omega = 1 - \left(1 - \frac{N}{N_F}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+1}} \quad (7.1.27)$$

式中疲劳寿命

$$N_F = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\alpha_1 + 1} R_v^{-1} \Delta p^{-(\gamma+1)} \quad (7.1.28)$$

对于一维对称循环加载, 上式简化为

$$N_F = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\alpha_1 + 1} (2\Delta\varepsilon_p)^{-(\gamma+1)} \quad (7.1.29)$$

在高周疲劳损伤情况下, 应力水平一般低于屈服应力, $N_F > 10^5$, 其特点是在宏观上没有明显的塑性变形, 只在细观缺陷周围的高应力集中区发生细观塑性变形, 而且高周疲劳损伤往往先集中发生在材料的表面, 然后向深层扩展。

假设材料承受等应变幅 $\Delta\varepsilon$ 的循环载荷作用, 损伤可以用每个循环中应力幅的变化来定义

$$\frac{\Delta\sigma}{1 - \omega} = E\Delta\varepsilon \quad (7.1.30)$$

由于宏观塑性变形不存在 ($p=0$), 损伤的演化用细观塑性的等效应变 π 表示

$$\dot{\omega} = \frac{Y}{S_0} \frac{\pi}{(1 - \omega)^{\alpha_0}} \quad (7.1.31)$$

在单轴加载情况下, 轴向的细观塑性应变 e_p 的表达式为

$$\dot{\epsilon}_p = \left[\frac{|\sigma - \bar{\sigma}|}{K(1-\omega)} \right]^\beta \frac{|\dot{\sigma}|}{(1-\omega)} \operatorname{sgn}(\sigma - \bar{\sigma}) \quad (7.1.32)$$

在三轴情况下,上式推广为

$$\dot{\pi} = \left[\frac{|\sigma_{eq} - \bar{\sigma}_{eq}|}{K(1-\omega)} \right]^\beta \frac{\dot{\sigma}_{eq}}{(1-\omega)} \quad (7.1.33)$$

于是损伤的演化率为

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{\sigma_{eq}^2 R_v}{2ES_0(1-\omega)^2} \left[\frac{|\sigma_{eq} - \bar{\sigma}_{eq}|}{K(1-\omega)} \right]^\beta \frac{|\dot{\sigma}_{eq}|}{(1-\omega)^{\alpha_0+1}} \\ &= \frac{\sigma_{eq}^2 R_v}{B} \frac{|\sigma_{eq} - \bar{\sigma}_{eq}|^\beta |\dot{\sigma}_{eq}|}{(1-\omega)^{\alpha_2}} \end{aligned} \quad (7.1.34)$$

式中 $B=2ES_0K$, $\alpha_2=\alpha_2(\Delta\sigma_{eq})=\alpha_0+\beta+3$ 。

单周循环内的损伤变化为

$$\frac{\delta\omega}{\delta N} = \frac{R_v \sigma_{eqM}^{(\beta+3)}}{B(\beta+3)(1-\omega)^{\alpha_2}} \quad (7.1.35)$$

式中 $\sigma_{eqM}=2\bar{\sigma}_{eq}$ 是一个载荷循环内 σ_{eq} 的最大值。 ω 与载荷循环次数的关系为

$$\omega = 1 - \left(1 - \frac{N}{N_F} \right)^{\frac{1}{\alpha_2+1}} \quad (7.1.36)$$

式中

$$N_F = \frac{B(\beta+3)}{\alpha_2+1} R_v^{-1} \sigma_{eqM}^{-(\beta+3)}$$

7.1.3 蠕变-疲劳相互作用问题

在高温情况下,疲劳损伤和蠕变损伤之间会发生相互作用,这种相互作用的细观机制是很复杂的,这里只简单地从唯象学的角度描述蠕变和疲劳同时存在时的损伤分析。

蠕变损伤 ω_c 描述的是晶间缺陷,其演化方程的一般形式为

$$\frac{d\omega_c}{dt} = f_c(\sigma, T, \omega_c, \dots) \quad (7.1.37)$$

$$N_R = \left[\int_0^{\Delta t} \frac{dt}{t_c(\sigma, T)} + \frac{1}{N_F(\Delta \epsilon, T)} \right]^{-1} \quad (7.1.46)$$

但是这种损伤线性累积的处理方法对于多数材料都不够准确。

对于大多数的材料,应该采取非线性的累积损伤律,这可以由 Kachanov-Rabotnov 的蠕变损伤律和前面介绍的非线性疲劳损伤律导出,如

$$\begin{aligned} d\omega &= \left[\frac{\chi(\sigma)}{A} \right]^r (1-\omega)^{-k} dt + [1 - (1-\omega)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \\ &\quad \times \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1-\omega)} \right]^\beta dN \end{aligned} \quad (7.1.47)$$

对时间积分,得到每一载荷循环内的损伤累积

$$\begin{aligned} \frac{\delta\omega}{\delta N} &= (1-\omega)^{-k} \int_0^{\Delta t} \left[\frac{\chi(\sigma)}{A} \right]^r dt + [1 - (1-\omega)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \\ &\quad \times \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1-\omega)} \right]^\beta \end{aligned} \quad (7.1.48)$$

式中 Δt 为载荷循环的周期, $\chi(\sigma) = \langle c\sigma + (1-c)|\sigma| \rangle$ 刻画了拉压蠕变损伤速率的差异。

将疲劳损伤和蠕变损伤单独存在时的寿命均用载荷循环次数表示,并分别记为 N_F 和 N_c ,有

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_F} &= (\beta+1)[1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})] \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})} \right]^\beta \\ \frac{1}{N_c} &= \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{t_c(\chi(\sigma), T)} = (k+1) \int_0^{\Delta t} \left[\frac{\chi(\sigma)}{A} \right]^r dt \end{aligned} \quad (7.1.49)$$

则式(7.1.48)变为

$$\frac{\delta\omega}{\delta N} = \frac{(1-\omega)^{-k}}{(k+1)N_c} + \frac{[1 - (1-\omega)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})}}{(\beta+1)N_F[1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})](1-\omega)^\beta} \quad (7.1.50)$$

于是疲劳和蠕变损伤同时存在时的寿命 N_R 表示为

$$\frac{N_R}{N_F} = \int_0^1 \left(\frac{N_F}{N_c} \frac{(1-\omega)^{-k}}{k+1} + \frac{[1 - (1-\omega)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_M, \sigma)}}{(\beta+1)[1 - \alpha(\sigma_M, \sigma)](1-\omega)^\beta} \right)^{-1} d\omega \quad (7.1.51)$$

对于 IN100 材料在 1000℃ 高温和疲劳载荷作用下的情况, 图 7.5 给出了理论曲线和实验结果, 两者相符得较好。

此外, 在 Lemaitre 的损伤框架中, 如果假设蠕变和疲劳损伤是可以相加的, 即

$$d\omega = d\omega_c + d\omega_f \quad (7.1.52)$$

则将 Lemaitre 给出的蠕变损伤理论及疲劳损伤理论结合, 即可以得到两种损伤共同存在的损伤演化方程, 如对于低周疲劳的情况, 有

$$\dot{\omega} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{A} \right)^r \frac{R_v}{(1-\omega)^{\alpha_3}} + \frac{R_v(p-p_i)^{\gamma}}{\Gamma} \frac{\dot{p}_i}{(1-\omega)^{\alpha_1}} \quad (7.1.53)$$

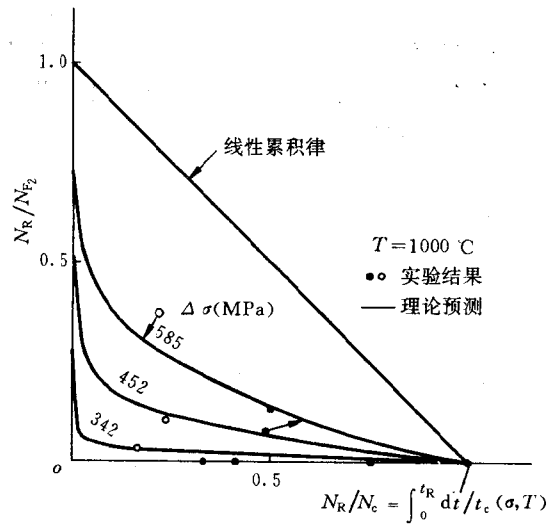


图 7.5 IN100 在 1000℃ 下的疲劳寿命预测^[7.4]

7.1.4 疲劳裂纹扩展的损伤力学方法

疲劳裂纹扩展有着相当复杂的细观机理,如位错的发射、微裂纹的形核、扩展和连接,裂纹尖端往往伴随着小范围的塑性变形,疲劳裂纹扩展的过程实际上是裂纹尖端在高梯度应力和应变作用下不断损伤的过程,是裂纹尖端塑性区和损伤区演化和运动的过程。因此,如果用损伤力学的方法看待和处理疲劳裂纹的问题,则可以对疲劳裂纹启裂和扩展得到更贴近于物理本质的认识,发展和完善现有的疲劳断裂理论,将现有的疲劳断裂理论与损伤力学理论结合起来,传统的疲劳断裂的实验数据和结果可以用于损伤理论中去;反之亦然。

文献[7.5]中对疲劳裂纹扩展的损伤力学研究是以核反应堆中压力容器和管道的破前漏(Leak-before-break)分析为重要工程背景的,因此主要是针对于表面裂纹的疲劳扩展,重点考虑表面裂纹疲劳扩展的形状演化、初始贯穿尺寸及其对破前漏结果的影响。利用标量损伤因子 D 和一种简化的疲劳损伤演化方程,冯西桥等导出了如下的疲劳裂纹扩展方程^[7.5]

$$\frac{dL}{dN} = C_d (\Delta K)^\gamma \quad (7.1.54)$$

式中

$$C_d = \frac{r_c}{2D_c} \left\{ \frac{1}{C_2 \sqrt{2\pi r_c}} \right\}^\gamma \quad (7.1.55)$$

式中 D_c 是损伤临界值, r_c 是裂纹尖端的细观损伤特征尺度, C_2 和 γ 是疲劳损伤演化常数, L 是表面裂纹在某一方向上的尺寸,是空间坐标的函数。式(7.1.54)与 Paris 公式有相同的形式,因此尽管 Paris 公式是经验公式,但是式(7.1.54)却表明了其物理背景。根据损伤判据,可以将裂纹的启裂和扩展分为三个阶段来处理,即启裂前的损伤演化阶段、单向扩展阶段和双向扩展阶段。其中第三个

阶段,对于管道中的轴向半椭圆表面裂纹,其长半轴 a 、短半轴 b 的演化方程分别为

$$\frac{da}{dN} = C_d(\Delta K_a)^\gamma, \quad \frac{db}{dN} = C_d(\Delta K_b)^\gamma \quad (7.1.56)$$

式中 ΔK_a 和 ΔK_b 分别是裂纹长短半轴处的应力强度因子变化幅值, N 为载荷循环次数。而对于环向椭圆表面裂纹,其长短半轴的演化方程表示为

$$\frac{da}{dN} = C_d(\Delta K_a)^\gamma, \quad \frac{db}{dN} = \frac{da}{dN} \tan\theta + C_d(\Delta K_b)^\gamma \quad (7.1.57)$$

式中 θ 是裂纹半角。文献[7.2]给出了多种情况下表面裂纹疲劳扩展的损伤分析结果,并应用到实际的反应堆压力容器和管道的分析和设计中去。

赵军和张行^[7.6]从连续损伤力学的角度对 I 型平面应力下疲劳裂纹尖端的力学行为进行了比较详细的研究。采用的线弹性损伤材料本构方程为

$$\sigma_{ij} = S_{ijM}(1 - D)\varepsilon_M = S_{ijM}\varphi\varepsilon_M \quad (7.1.58)$$

式中 S_{ijM} 是无损刚度张量, $\varphi = 1 - D$ 是连续度, φ 的演化方程为

$$\frac{d\varphi}{dN} = \begin{cases} -\bar{c}\left(\frac{\sigma_e}{\varphi}\right)^m \frac{1}{\varphi^{n-m}}, & \text{当 } \sigma_e \geq \sigma_{th}\varphi^\gamma \\ 0, & \text{当 } \sigma_e < \sigma_{th}\varphi^\gamma \end{cases} \quad (7.1.59)$$

式中 \bar{c}, m, n, γ 和 σ_{th} 是材料常数, σ_e 是 Mises 等效应力。在文献[7.6]中 $\gamma = 1$ 。如图 7.6 所示,用一个完全损伤的薄带来代替传统意义的裂纹,图中点的密度表示损伤的程度。作为损伤区的尖端区域,损伤过程区定义为当前状态损伤正在继续发展的区域。对于小范围损伤假设下的平面应力 I 型裂纹,选取如下的 Airy 应力函数

$$A = ar^{\lambda+2}\bar{A}(\theta) \quad (7.1.60)$$

应力分量与 Airy 应力函数的关系为

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \quad (7.1.61)$$

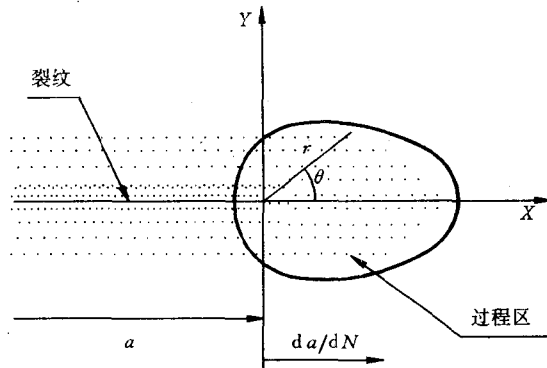


图 7.6 裂纹的损伤表示

由此得到

$$\sigma_{rr} = \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{rr}(\theta), \sigma_{\theta\theta} = \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta), \sigma_{r\theta} = \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) \quad (7.1.62)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= (\lambda + 2)\bar{A} + \bar{A}''', \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)\bar{A}, \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -(\lambda + 1)\bar{A}' \end{aligned} \quad (7.1.63)$$

式中 $(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\theta}$ 。此时裂纹尖端的平衡方程自然满足。裂纹尖端附近的损伤场可以由连续度 φ 表示为如下形式

$$\varphi(r, \theta) = \beta r^\nu \bar{\varphi}(\theta) \quad (7.1.64)$$

利用损伤材料的本构关系得到裂纹尖端的应变场,并代入平面应力情况下的协调方程,得到

$$\bar{A}'''' - 2\bar{E}\bar{A}''' + (b_1 + \bar{G})\bar{A}'' - b_2\bar{E}\bar{A}' + (b_3 + e_1\bar{G})\bar{A} = 0 \quad (7.1.65)$$

式中

$$\bar{E} = \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}}, \quad \bar{G} = 2\bar{E}^2 - \left(\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}}\right)$$

$$b_1 = e_1 + c_2 - c_3\nu + c_1e_3, \quad b_2 = 2e_1 + c_1e_3, \quad b_3 = c_2e_1 + c_3e_2$$

$$c_1 = -2(\lambda - \mu + 1), \quad c_2 = \mu - \lambda, \quad c_3 = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu + 1) \quad (7.1.66)$$

为了确定过程区, 还需要另外一组条件, 可由裂纹尖端损伤演化的条件得到。一方面, 将式(7.1.61)~(7.1.63)代入式(7.1.59), 得到损伤区内的损伤演化率

$$\frac{d\varphi}{dN} = -\bar{c}\alpha^m\beta^{-n}r^{m\lambda-n\mu}\bar{\sigma}_e^m\bar{\varphi}^{-n} \quad (7.1.67)$$

式中 $\bar{\sigma}_e = (\bar{\sigma}_r^2 - \bar{\sigma}_r\bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_\theta^2 + 3\bar{\sigma}_{r\theta}^2)^{1/2}$ 。另一方面, $\frac{d\varphi}{dN}$ 还可以表示为

$$\frac{d\varphi}{dN} = \frac{d\varphi}{da} \frac{da}{dN} = \frac{da}{dN} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \frac{d\beta}{da} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{dr}{da} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \frac{d\theta}{da} \right) \quad (7.1.68)$$

由式(7.1.64)及几何关系, 得

$$\frac{d\varphi}{dN} = \beta \frac{da}{dN} r^{\mu-1} (\bar{\varphi} \sin\theta - \mu\bar{\varphi} \cos\theta) \quad (7.1.69)$$

比较式(7.1.67)和(7.1.69), 得到

$$\frac{da}{dN} = \bar{c}\alpha^m\beta^{-(n+1)} \quad (7.1.70)$$

$$m\lambda - \mu n = \mu - 1, \text{ 或 } \lambda = \frac{\mu(n+1) - 1}{m} \quad (7.1.71)$$

$$\bar{\varphi} \sin\theta - \mu\bar{\varphi} \cos\theta = -\bar{\sigma}_e^m \bar{\varphi}^{-n} \quad (7.1.72)$$

方程(7.1.65)和(7.1.72)即是确定 μ 的一组本征方程。其边界条件包括应力和损伤场的对称条件, 归一化条件和“裂纹”面上的应力和损伤条件, 分别表示为

$$\bar{A}'(0) = \bar{A}'' = 0, \quad \bar{\varphi}'(0) = 0 \quad (7.1.73)$$

$$\bar{A}(0) = 1 \quad (7.1.74)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta_d) = \sigma_{r\theta}(r, \theta_d) = 0, \quad \varphi(r, \theta_d) = 0 \quad (7.1.75)$$

由式(7.1.62)、(7.1.73)和(7.1.74), 可以得到

$$\bar{\varphi}(0) = \left[\frac{\bar{\sigma}_e^m(0)}{\mu} \right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\bar{\varphi}'(0) = f[\mu, \bar{A}''(0)] \quad (7.1.76)$$

式中函数 f 的表达式见文[7.6]。式(7.1.75)中的参数 θ_i 由以下条件得到

$$\bar{A}(\theta^*[\mu, \bar{A}''(0)]) = 0, \quad \bar{A}'(\theta^*[\mu, \bar{A}''(0)]) = 0 \quad (7.1.77)$$

利用以上方法进行的数值算例表明,对于不同的参数 m 和 n 的取值,裂纹尖端的渐近应力场没有奇异性或有很弱的奇异性,而应变场的奇异性远远低于 K 场的 $-\frac{1}{2}$ 奇异性。

由式(7.1.70)可知,只要确定了参数 α 和 β ,即可以定量地计算裂纹的疲劳扩展率。设在裂尖过程区与远场 K 控制区之间有一个过渡区(图 7.7),其应力分布为

$$\sigma_{ij}^*(r, \theta) = \bar{K}_1 r^{-\frac{1}{p}} \bar{\sigma}_{ij}^*(\theta) \quad (7.1.78)$$

式中 \bar{K}_1 是过渡区的应力强度因子,参数 $p > 2$ 。利用过渡区与损伤区之间应力连续、损伤连续等条件以及损伤区内的应力场,可以导出

$$\begin{aligned} \omega &= \left[\frac{\bar{K}_1 \bar{\sigma}_e(0) \bar{\sigma}_{rr}^*(0)}{\sigma_{th} \bar{\sigma}_{rr}(0)} \right]^p \\ \alpha &= \left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}(0)}{\bar{K}_1 \bar{\sigma}_{rr}^*(0)} \right]^{p\lambda} \left[\frac{\sigma_{th}}{\bar{\sigma}_e(0)} \right]^{p\lambda+1} \\ \beta &= \frac{1}{\bar{\varphi}(0)} \left[\frac{\sigma_{th} \bar{\sigma}_{rr}(0)}{\bar{K}_1 \bar{\sigma}_{rr}^*(0) \bar{\sigma}_e(0)} \right]^{p\mu} \end{aligned} \quad (7.1.79)$$

代入式(7.1.70),得到与 Paris 公式相似的裂纹疲劳扩展方程

$$\frac{da}{dN} = c \bar{K}_1^p \quad (7.1.80)$$

式中

$$c = \bar{c} [\bar{\varphi}(0)]^{n+1} \left[\frac{\sigma_{th}}{\bar{\sigma}_e(0)} \right]^{m-p} \left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}^*(0)}{\bar{\sigma}_{rr}(0)} \right]^p \quad (7.1.81)$$

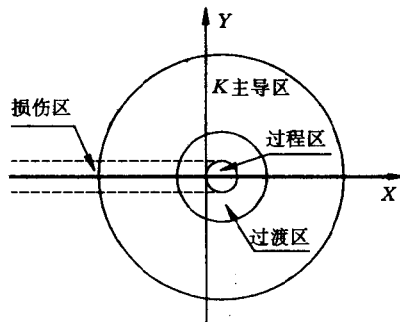


图 7.7 裂纹尖端场的分区结构^[7.7]

7.2 多孔弹塑性材料的韧脆转变

对于不同种类的材料,其断裂的细观机制会不相同。即使是同一种材料,在不同的外部条件(例如温度)下,断裂模式也会有所差别。例如,对于大多数钢材,在温度足够低的情况下,断裂的控制机制是脆性解理;在比较高的温度下,断裂机制是裂纹尖端微孔洞的形核、长大和汇合;而在适中的温度下,两种机制同时起作用。利用损伤力学的方法,可以将裂纹尖端场的研究与材料的细观断裂机制联系起来。本节以 Jagota 等人^[7.7]的工作为例,介绍损伤力学在预测材料的断裂强度、断裂机理、韧脆转变方面的应用。

Jagota, Hui 和 Dawson^[7.7]利用 Gurson 模型,将屈服面的形式取为

$$\Phi = 3\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}/(2\sigma_m^2) + 2f\cosh(\sigma_{kk}/2\sigma_m) - (1 + f^2) \quad (7.2.1)$$

式中 σ_{ij} 为 Cauchy 应力, σ'_{ij} 为其偏量部分, σ_m 是基体的即时屈服强度。本构关系表示为

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (7.2.2)$$

式中 Cauchy 应力的 Jaumann 率定义为

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \Omega_{kj} \quad (7.2.3)$$

且

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (7.2.4)$$

在弹性阶段和卸载阶段, 弹性张量为

$$C_{ijkl} = 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} = C_{jikl} \quad (7.2.5)$$

在弹塑性加载阶段, 有

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^e - \frac{[\mu\sigma'_{ij}/\sigma_m + (\lambda + 2\mu/3)\beta\delta_{ij}][\mu\sigma'_{kl}/\sigma_m + (\lambda + 2\mu/3)\beta\delta_{kl}]}{H/9 + \omega\mu/3 + \beta^2(\lambda + 2\mu/3)} \quad (7.2.6)$$

式中

$$\begin{aligned} H &= \{(\omega + \sigma_{kk}\beta/\sigma_m)^2 h_m / (1 - f) \\ &\quad - 3\sigma_m(1 - f)\beta[\cosh(\sigma_{kk}/2\sigma_m) - f]\} \\ \beta &= \frac{1}{2}f \sinh(\sigma_{kk}/2\sigma_m) \\ \omega &= (1 + f^2) - 2f \cosh(\sigma_{kk}/2\sigma_m) \\ h_m &= d\sigma_m / d\epsilon_m^p \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

假设材料为幂硬化材料, 有

$$h_m = \frac{3\mu n}{[(\sigma_m/\sigma_m^0)^{(1-n)/n} - n]} \quad (7.2.8)$$

式中 n 为应变强化指数, σ_m 为后继屈服应力, σ_m^0 为初始屈服应力。

假设裂纹尖端的塑性区尺寸相对构件小得多, 即满足小范围屈服条件, 弹性区的应力强度因子 K_I 唯一控制着局部变形场, 此时近尖端弹塑性场的求解问题可以描述为一个边界层问题, 其中裂纹面看作是半无限长的自由表面, 远端位移场满足如下的渐近

条件

$$u_i = (K_I/2\mu) \sqrt{r/2\pi} \tilde{u}_i(\nu, \theta) \quad (7.2.9)$$

式中 \tilde{u}_i 是无量纲化的位移角分布函数。为方便起见,将应力和距离表示为如下的无量纲形式

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_m^0 \quad (7.2.10)$$

$$R = r(\sigma_m^0/K_I)^2 \quad (7.2.11)$$

在裂纹尖端前方,到裂尖的距离用 X 表示,无量纲化后表示为 \bar{X} 。

Jagota 等人利用上述本构模型用有限元方法计算了裂纹尖端的应力场及孔隙率场,图 7.8 给出了在裂纹前方延长线上无量纲等效应力 $\bar{\sigma}_e = \sigma_e/\sigma_m^0$ 的变化曲线,图中虚线 a 表示裂纹尖端位于原点情况下的 HRR 场,虚线 b 表示裂纹尖端移到满足了孔洞汇合条件的位置后的 HRR 场。由该图可以看出,考虑损伤的数值结果

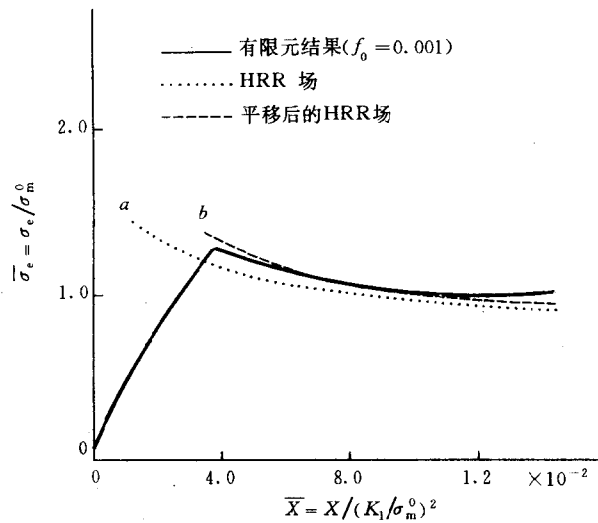


图 7.8 裂纹前方延长线上的等效应力分布^[7.7]

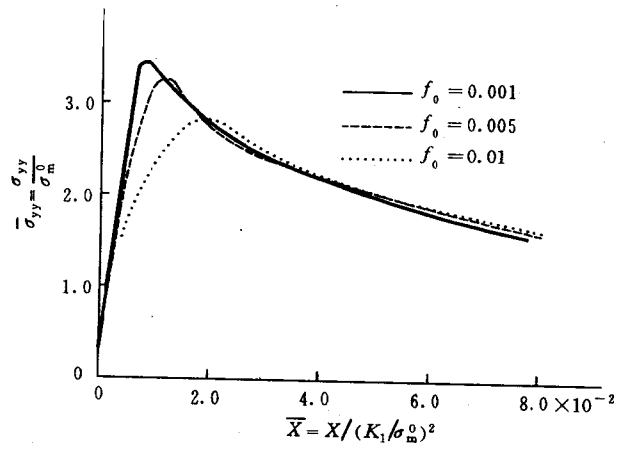


图 7.9 $n=0.1$ 和三种不同的初始孔隙率下裂纹尖端前方的 $\bar{\sigma}_{yy}$ 分布^[7.7]

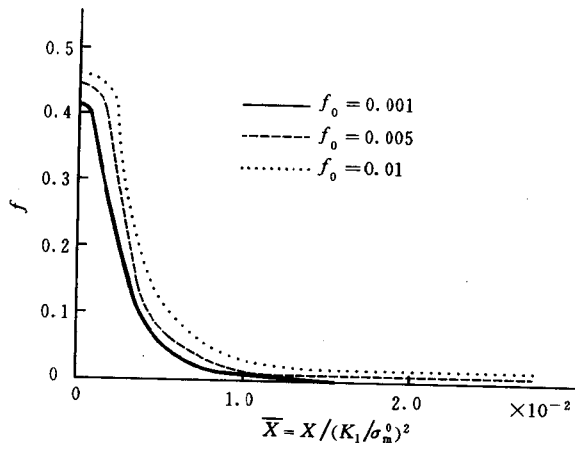


图 7.10 $n=0$ 和三种不同的初始孔隙率下裂纹尖端前方的 f 分布^[7.7]

与 HRR 场的明显差别主要发生在裂纹尖端附近的一个小区域 Ω 内,在这个区域里孔隙率发生明显变化。此外,二者的差别在弹塑性交界线的外面也比较明显,因此 HRR 场的适用范围介于 Ω 与弹性区之间。图 7.9 和 7.10 所示为应力分量 $\bar{\sigma}_{yy}$ 和孔隙率 f 随 X 的变化曲线,图中的三条曲线分别对应于不同的初始孔隙率 0.001, 0.005 和 0.010。图 7.9 表明 $\bar{\sigma}_{yy}$ 在某一位置 $X=X^*(f_0)$ 处取得最大值 $\bar{\sigma}_{yy}^*(f_0)$, 裂纹尖端 $\bar{\sigma}_{yy}$ 的下降是由于 f 的增大以及裂纹尖端的钝化所致, $X^*(f_0)$ 的值与裂纹前方 Ω 的尺寸大致相当。在裂纹尖端, f 达到很高的值,在实际材料中,孔洞的汇合已经导致材料的破坏及裂纹尖端的钝化和扩展。在 Gurson 模型中,允许 f 达到 1.0,但是实际材料在 f 远未达到 1.0 时即已断裂。

利用上述数值结果可以确定材料的断裂强度 K_{Ic} 。 K_{Ic} 的确定基于两种断裂准则,其一是解理断裂准则,其二是孔洞汇合准则。解理准则可以表示为

$$\bar{\sigma}_{yy}|_{X=X_c} = \bar{\sigma}_f \quad (7.2.12)$$

即当裂纹尖端前方 $X=X_c$ 处最大主应力 $\bar{\sigma}_{yy}$ 达到临界断裂应力 $\bar{\sigma}_f = \bar{\sigma}_f/\sigma_m^0$ 时发生解理断裂。孔洞汇合的条件表示为

$$f|_{X=X_v} = f_{cr} \quad (7.2.13)$$

即认为在 $X=X_v$ 处孔隙率 f 达到临界值 f_{cr} 时孔洞汇合。这里 σ_f , f_{cr} , X_c 和 X_v 均是材料性质,且假设与温度无关。

只要条件(7.2.12)和(7.2.13)之一得到满足,裂纹即开始扩展,对应的 K 即为 K_{Ic} 。方程(7.2.12)和(7.2.13)一般对应于不同的 K_{Ic} 值,其中比较小的一个为材料的 K_{Ic} 值。

首先考虑解理断裂。如图 7.11 所示, $\bar{\sigma}_{yy}$ 在裂纹尖端前方某一位置存在一个极大值,记作 $\bar{\sigma}_{yy}^*$ 。如果 $\bar{\sigma}_{yy}^* < \bar{\sigma}_f$, 则方程(7.2.12)无解,表明在裂尖钝化之前不会发生解理断裂。如果 $\bar{\sigma}_{yy}^* \geq \bar{\sigma}_f$, 则方程(7.2.12)存在两个解 X_{1c} 和 X_{2c} , 不妨设 $X_{1c} \leq X_{2c}$, 由定义

(7.2.11), 得到两个对应的 K 值, 其中只有比较小的一个有实际意义, 为

$$K_{1c} = \sigma_m^0 [x_c / X_{2c}]^{1/2} \quad (7.2.14)$$

在下文中, 将 X_{2c} 写作 X_c 。

再考虑孔洞长大和汇合。由图 7.10 可知, 式(7.2.13)存在唯一的解 X_v , 对应的 K_{1c} 值为

$$K_{1c} = \sigma_m^0 [x_v / X_v]^{1/2} \quad (7.2.15)$$

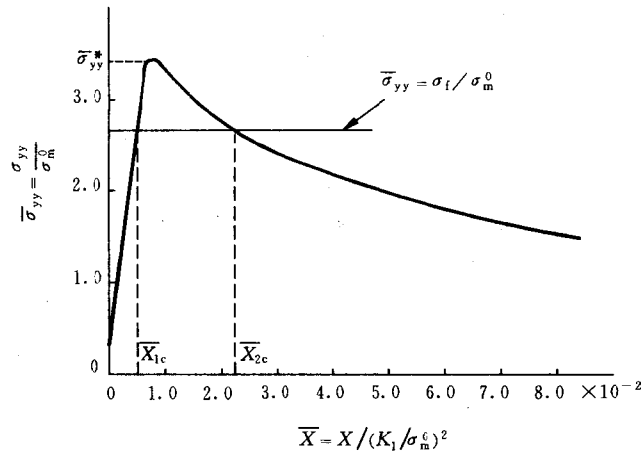


图 7.11 $n=0, f=0.001$ 时裂纹尖端前方 $\bar{\sigma}_{yy}$ 随 X 的分布^[7.7]

于是, 由裂纹尖端前方的 $\bar{\sigma}_{yy}$ 以及 f 的变化曲线即可以确定材料的断裂强度指标 K_{1c} , 它与温度相关。由于图 7.9 和 7.10 是与温度无关的曲线, 并且已经假设 f_{cr}, σ_t, X_c 和 X_v 都与温度无关, 因此 K_{1c} 对温度的依赖关系只取决于 σ_m^0 对温度的相关性。图 7.12 所示为一种高镍低碳钢的 σ_m^0 随温度的变化曲线。

这样, 对于任意一组 σ_t, f_{cr}, X_c 和 X_v , 都可以确定解理断裂和孔洞断裂主导的 K_{1c} 值。例如, 在解理情况下, 温度升高, σ_m^0 下降, 并导致 K_{1c} 的升高。在 HRR 场有效的范围内, 有

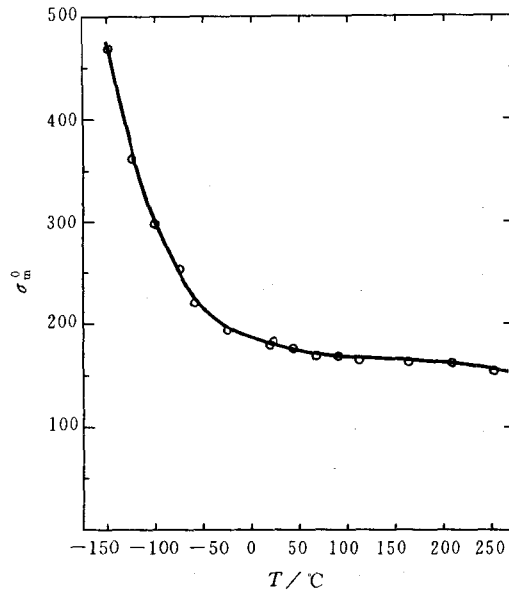


图 7.12 初始屈服应力随温度的变化^[7.7]

$$K_{Ic} = \left[\frac{\alpha_n I_n x_c \sigma_t^{\frac{n}{n-1}} (\sigma_m^0)^{\frac{n}{n-1}}}{1 - \nu^2} \right]^{1/2} \quad (7.2.16)$$

式中 α_n 和 I_n 是 HRR 场中的常数。式(7.2.16)和图 7.12 解释了在解理断裂的情况下温度越高, K_{Ic} 也越高。

对于前面提及的高镍低碳钢, Jagota 等人计算了在 $-150^\circ\text{C} \sim 150^\circ\text{C}$ 范围内的断裂强度, 取 $\sigma_t = 860 \text{ MNm}^{-2}$, $n = 0.1$, $f_{cr} = 0.0489$, 特征尺寸 x_c 和 x_v 均取为两个晶粒的直径的长度。图 7.13 中给出了初始孔隙率 $f_0 = 0.001$ 情况下的 K_{Ic} 曲线, 图中的离散点是实验结果, 实线为解理断裂即脆断时的曲线, 虚线为孔洞汇合情况即韧断的曲线。该曲线与实验结果相符较好, 清楚地揭示了金属材料从低温到高温的韧脆转变过程。

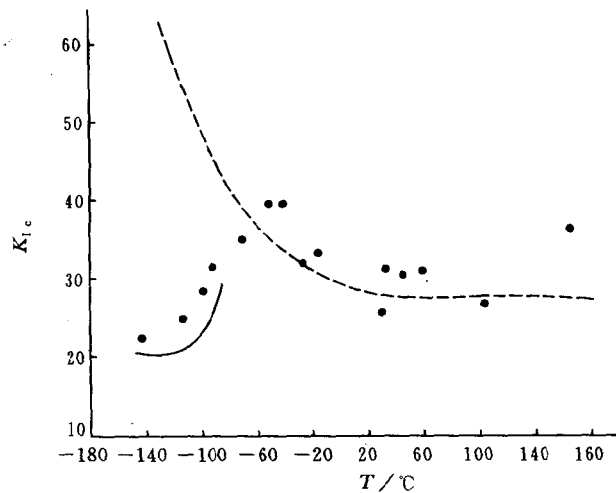


图 7.13 断裂强度 K_{Ic} 随温度的变化^[7.7]

本节以一类简化的情况为例介绍了用损伤力学的模型求解 K_{Ic} 的方法,对于更一般的情况,例如 f_{cr} , σ_t , X_c 和 X_v 随温度变化的情况,考虑两种细观断裂机理(解理和孔洞汇合)相互作用的情况,也可以进行类似的分析。

7.3 混凝土结构破坏的损伤力学分析方法

材料的力学行为一般直接依赖于其内部的细观结构及其在外部因素作用下的演化。作为一类重要的工程应用材料,混凝土的细观结构具有很不均匀的特点,其断裂行为主要是由于其内部微裂纹的形核、扩展和汇合决定的。图 7.14 表示了混凝土的断裂过程以及所经历的四个阶段,即初始无损伤阶段、微裂纹形核及稳定扩展的连续损伤阶段、微裂纹部分汇合的损伤开裂阶段和完全断裂

阶段。因此,对混凝土断裂行为的全面了解需要将损伤力学和断裂力学的方法结合起来进行研究。

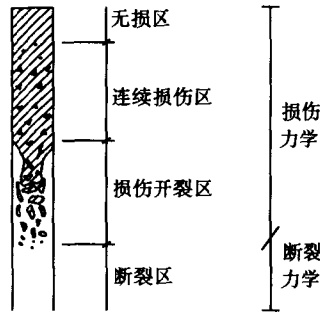


图 7.14 混凝土断裂的四个阶段

这里首先以 Mazars 和 Lemaitre^[7,8]的工作为例,介绍连续损伤模型在混凝土断裂行为分析中的应用。为了便于应用,Mazars 和 Lemaitre 假设损伤是各向同性的,用损伤因子 ω 表示, $\omega=0$ 表示初始无损状态, $0<\omega<\omega_c$ 表示损伤状态, $\omega=\omega_c$ 意味着材料即将断裂。采用 Kachanov 的有效应力 σ^* 的定义

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (7.3.1)$$

并把损伤演化方程表示为如下的形式

$$\dot{\omega} = F(\epsilon, \dot{\epsilon}) \quad (7.3.2)$$

损伤材料的比自由能为

$$\psi = \frac{1}{2\rho} \Lambda_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} (1 - \omega) \quad (7.3.3)$$

式中 ρ 为材料的质量密度, Λ_{ijkl} 为四阶弹性张量。于是有如下的状态方程

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} = \Lambda_{ijkl} \epsilon_{kl} (1 - \omega)$$

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \Lambda_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (7.3.4)$$

式中 Y 为 ω 的广义共轭力。

如果只考虑拉伸情况下的损伤,定义如下的等效应变

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle^2 + \langle \epsilon_2 \rangle^2 + \langle \epsilon_3 \rangle^2} \quad (7.3.5)$$

式中

$$\langle \epsilon_i \rangle = \begin{cases} \epsilon_i, & \text{当 } \epsilon_i \geq 0 \\ 0, & \text{当 } \epsilon_i < 0 \end{cases} \quad (7.3.6)$$

损伤面定义为

$$f(\bar{\epsilon}, \omega) = \bar{\epsilon} - K(\omega) = 0 \quad (7.3.7)$$

即损伤演化的条件为

$$\begin{cases} \dot{\omega} \geq 0, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \dot{f} = 0 \\ \dot{\omega} = 0, & \text{当 } f < 0 \text{ 或 } f = 0 \text{ 但 } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (7.3.8)$$

Mazars 和 Lemaitre 建议混凝土的损伤演化方程为

$$\dot{\omega} = \left[\frac{\epsilon_0(1-A)}{\bar{\epsilon}^2} + \frac{AB}{\exp[B(\bar{\epsilon} - \epsilon_0)]} \right] \langle \dot{\bar{\epsilon}} \rangle \quad (7.3.9)$$

式中 A, B 和 ϵ_0 为材料常数。

Mazars 和 Lemaitre 将上述模型应用于一侧开口的 CT 型试件(图 7.15),图 7.16 给出了缺口前方应变演化的有限元数值模拟结果,并与用电测应变片的测量结果进行了比较,图 7.17 中给出了缺口尖端损伤区的演化以及裂纹的扩展路径。图 7.18 所示为一个 CT 试件总体的变形载荷曲线。这些结果表明,借助于损伤力学的方法,混凝土的断裂及变形行为得以更准确地模拟。

脆塑性结构的承载能力及稳定性分析也是一个重要的、有意思的问题。正如图 6.14 中的混凝土拉伸曲线所示,当外加载荷达到材料的最大承载能力后,材料将发生急剧的损伤和应力的跌落。图 7.19 是这类材料的一种简化本构模型,它忽略了应力达到最大承载能力之前的损伤。应力跌落可以导致宏观裂纹的形成和扩展直至结构的断裂。此外还存在另外一种情形,如图 7.20 所示,在结

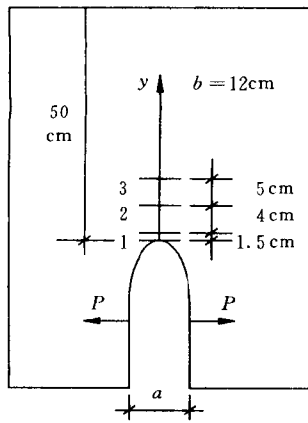


图 7.15 CT 试件

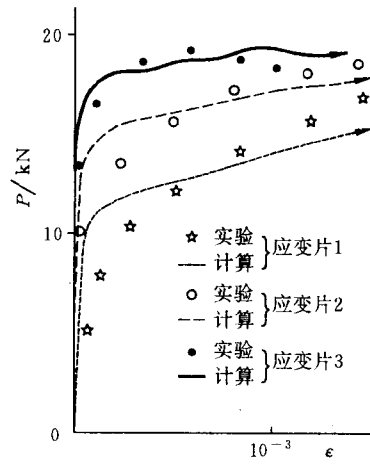


图 7.16 缺口前方的应变演化曲线^[7,8]

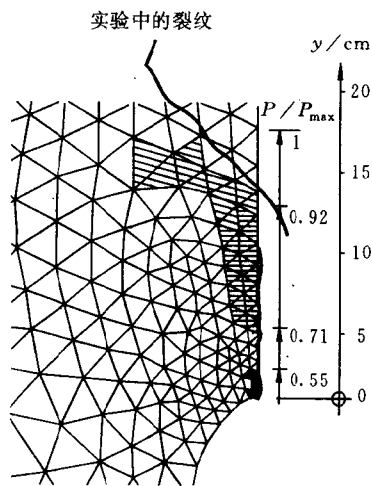


图 7.17 损伤区及裂纹的扩展路径^[7,8]

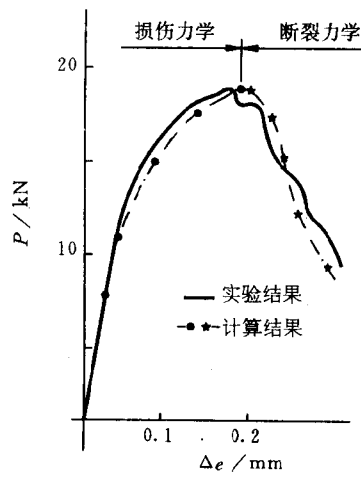


图 7.18 CT 试件的变形
载荷曲线^[7,8]

构 D 中形成一个连续损伤和应力跌落区域 D_2 , 它与弹性区 D_1 的交界线 S_c 称为损伤面。随着载荷的变化, S_c 会发生运动, D_2 逐渐扩展, 最终导致结构的失效。

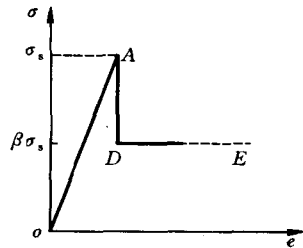


图 7.19 简化的混凝土拉伸曲线

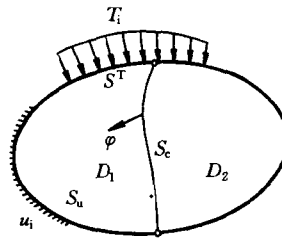


图 7.20 脆塑性结构中损伤区的扩展

Dems 和 Mróz^[7.9] 从能量的角度研究了脆塑性结构的极限承载能力和损伤区扩展的稳定性问题。判断脆塑性结构稳定性的条件可以描述为: 如果损伤区 D_2 在一个微小的扰动下使得外载荷所做的功超过结构贮存能量的增加与损伤的耗散能量之和, 则结构处于失稳状态; 反之, 如果对于任意的微小扰动, 外力功都小于贮存能量的增加与损伤耗散能之和, 则结构处于稳定状态。

刘文政对同一问题给出了另一种分析方法^[7.10], 以下将他的工作稍加修改, 给出较文献^[7.10]更为准确的表述。假设脆塑性材料的初始屈服条件是 $F(\sigma_{ij})=0$, 发生应力跌落后的后继屈服条件是 $f(\sigma_{ij})=0$, 其中 β 是应变软化参数(图 7.21)。对于如图 7.20 所示的结构, 在 S_u 上给定位移边界条件 $u_i(\mathbf{x})=\bar{u}_i(\mathbf{x})$, 在 S_T 上给定力

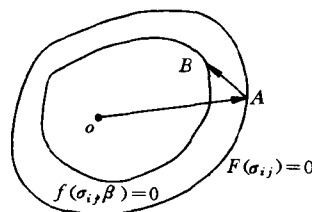


图 7.21 混凝土的初始屈服面和后继屈服面

边界条件 $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j = T_i(\mathbf{x}, t)$ 。将损伤面 S_c 上弹性区一侧且与 S_c 无限接近的位置处的应力记为 σ_{ij}^+ , 损伤区一侧与 S_c 无限接近的位置处的应力记为 σ_{ij}^- , 注意到

$$F(\sigma_{ij}^+) = 0, \quad f(\sigma_{ij}^-) = 0 \quad (7.3.10)$$

现在假设损伤区 D_2 向弹性区发生一个微小的虚设的扩展, 即 S_c 向弹性区方向发生微小的运动, 在此虚设的过程中引起位移场、应力场和应变场的微小变化, 分别用 $\delta u_i, \delta \sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}$ 表示, 它们必须满足如下的方程

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ij,j} &= 0 && \text{在 } D \text{ 内} \\ [\delta \sigma_{ij}^+ - \delta \sigma_{ij}^-]n_i &= 0 && \text{在 } S_c \text{ 上} \\ \delta u_i &= 0 && \text{在 } S_u \text{ 上} \\ \delta \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) && \text{在 } D \text{ 内} \\ \delta \sigma_{ij} &= \Lambda_{ijkl}^e \delta \epsilon_{kl} && \text{在 } D_1 \text{ 内} \\ \delta \sigma_{ij} &= \Lambda_{ijkl}^{ep} \delta \epsilon_{kl} && \text{在 } D_2 \text{ 内} \\ \delta \sigma_{ij}n_j &= 0 && \text{在 } S_t \text{ 上} \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

式中 Λ_{ijkl}^e 和 Λ_{ijkl}^{ep} 分别为线弹性阶段和应力跌落后的弹性张量。方程 (7.3.11) 表明, 在此虚设的过程中, 假设弹性区仍按线弹性规律变形, 并不考虑屈服条件。上述方程有唯一的一组解 $\delta u_i, \delta \sigma_{ij}$ 和 $\delta \epsilon_{ij}$, 损伤区也按弹性规律变形, 但弹性模量与弹性区不同。将应力 $\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}$ 代入损伤准则, 如果在 S_c 上靠近弹性区一侧处有 $F(\sigma_{ij}^+ + \delta \sigma_{ij}^+) < 0$, 则结构是稳定的, 如果存在某一位置使得 $F(\sigma_{ij}^+ + \delta \sigma_{ij}^+) \geq 0$, 则结构是不稳定的。

下面以纯弯梁(图 7.22a)为例加以说明。采用图 7.22(b)所示的应力应变关系, β_t 和 β_c 是拉伸和压缩时的软化参数。设梁的高度为 h , 弹性区、拉伸损伤区和压缩损伤区的高度分别为 $\eta h, \eta_t h$ 和 $\eta_c h$, 由关系 $\eta_t + \eta_c = 1 - \eta$ 和 $\eta_t \beta_t = \eta_c \beta_c$ 得到

$$\eta_t = \frac{(1-\eta)\beta_c}{\beta_t + \beta_c}, \quad \eta_c = \frac{(1-\eta)\beta_t}{\beta_t + \beta_c} \quad (7.3.12)$$

当 $M \leq \frac{1}{6}\sigma_s h^2$ 时, $\eta = 1, \eta_c = \eta_t = 0$, 当 $M > \frac{1}{6}\sigma_s h^2$ 时, M 和 h 的关系为

$$M = \frac{1}{6}\sigma_s h^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta_t \beta_c}{\beta_t + \beta_c} (1 - \eta^2) \sigma_s h^2 \quad (7.3.13)$$

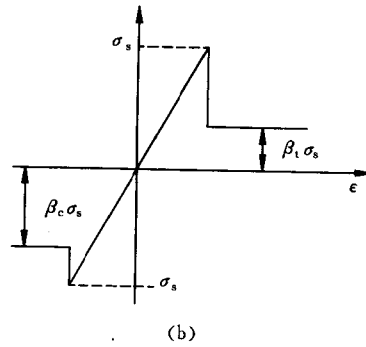
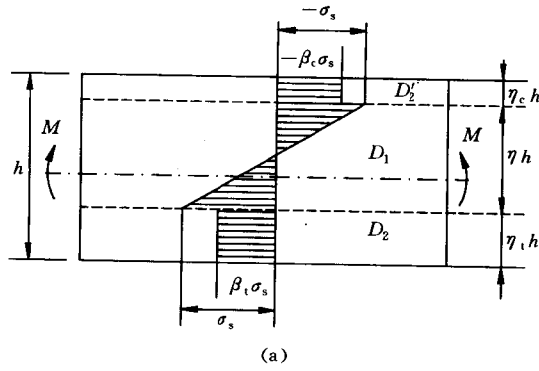


图 7.22 混凝土梁的损伤及其拉压应力应变曲线

设损伤区有一微小的扩展,即 $\delta h < 0$, 则: (1) 若 $\frac{\delta M}{\delta \eta} < 0$, 则结构处于稳定的平衡状态, 梁能够承受弯矩 M ; (2) 若 $\frac{\delta M}{\delta \eta} > 0$, 梁不能承受 M , 损伤区发生失稳扩展, 导致梁的断裂; (3) 若 $\frac{\delta M}{\delta \eta} = 0$, 梁处于临界状态, 对应的弯矩为梁能承受的最大弯矩。由此得到纯弯梁在外加弯矩达到弹性极限载荷 $M_l = \frac{1}{6} \sigma_s h^2$ 后发生失稳的条件是

$$\frac{\beta_i \beta_c}{\beta_i + \beta_c} < \frac{1}{3}$$

作为一种特例, 若 $\beta_i = \beta_c = \beta$, 梁结构损伤区能稳定扩展的条件是 $\beta > \frac{2}{3}$, 此时梁的最大承载能力为

$$M_{\max} = \frac{1}{4} \sigma_s h^2 \beta \quad (7.3.14)$$

当 $\beta < \frac{2}{3}$ 时, 梁的最大承载能力即为弹性极限弯矩, 即

$$M_{\max} = \frac{1}{6} \sigma_s h^2 \quad (7.3.15)$$

此外, Dems 和 Mróz, 刘文政等还求解了厚壁圆筒、工字梁等简单的算例^[7.9,7.10]。上述的损伤本构模型在其它一些问题中也得到了应用, 例如, Zubelewicz 和 Mróz 利用类似的模型进行了作为动力失稳现象的冲击地压(如岩爆、煤爆)问题的数值分析^[7.11]。

7.4 材料强韧化的力学分析

近十几年来, 材料的强韧化研究受到了材料科学家和力学家的广泛重视, 断裂力学和损伤力学被成功地应用于含细观结构的材料(例如结构陶瓷、高分子材料、混凝土等)的增韧机制的研究。增韧研究的理论结果与实验结果基本上相符, 标志着断裂力学和

损伤力学作为材料选择与设计的工具,正朝着合理地调整材料的细观结构以控制材料性能的方向发展,这应该说是固体力学与材料科学相互交叉渗透的重要成果。

Evans 和 Cannon^[7.12], Hutchinson^[7.13], 孙庆平等^[7.14]曾经总结了在陶瓷增韧方面的力学研究方法和主要成果。陶瓷材料增韧的几种典型机制包括相变增韧、微裂纹增韧、偏转增韧、纤维(或晶须)增韧、金属(或橡胶)颗粒桥联增韧。这里只简单介绍相变和微裂纹两种增韧机制以及损伤力学在增韧定量计算中的应用。

7.4.1 相变增韧

相变增韧是目前研究得比较成熟的一种增韧机理。它的研究开始于 70 年代,人们发现在 ZrO_2 四方相多晶体以及以四方相 ZrO_2 为第二相粒子的陶瓷基复合材料(如 ZTA)中,裂纹尖端的高应力将导致 ZrO_2 四方相转变为单斜相,并产生剪切变形和大约 4% 的体积膨胀,从而降低裂纹尖端的应力强度,使得裂尖附近的应力强度因子 K_{tip} 小于远场外加的应力强度因子 K_{∞} ,从而提高了材料的断裂韧性。

进行相变增韧研究,首先要确定相变材料的本构关系。一种典型的平均应力 σ_m 和体积应变 ϵ_{pp} 的关系曲线如图 7.23 所示。

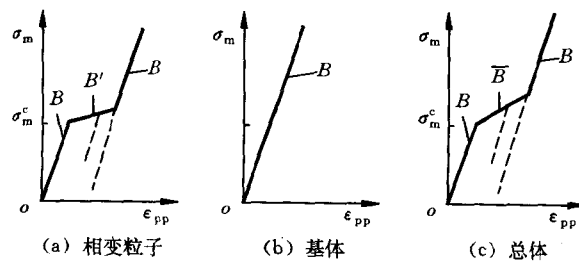


图 7.23 相变复合材料的应力应变曲线

这里简单介绍 Budiansky, Hutchinson^[7, 15]等人建立的本构关系模型。考虑一种两相组分组成的复合材料, 基体为理想的线弹性材料, 二相粒子为不可逆的非线性相变材料, 忽略相变过程中的剪切变形。在弹性阶段, 假设两种组分材料有相同的剪切模量 G 和体积模量 B , 即

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad \sigma_m = B\epsilon_{pp} \quad (7.4.1)$$

式中 s_{ij} 和 e_{ij} 分别为偏斜应力和偏斜应变, σ_m 是平均应力, ϵ_{pp} 是体积应变。

相变粒子的平均应力 σ_m 和体积膨胀的关系曲线如图 7.23 (a) 所示, 在相变阶段, 斜率为 B' , 即有

$$\dot{\sigma}_m = B'\dot{\epsilon}_{pp} \quad (7.4.2)$$

$$\theta_p = \epsilon_{pp} - \sigma_m/B \quad (7.4.3)$$

式中 θ_p 为非弹性的相变体积膨胀, 并假设剪切模量仍为 G 。

设相变粒子的体积百分比为 f , 利用混合律, 当 $\epsilon_{pp} \geq \sigma_m^c/B$ 时, 材料的响应为

$$\dot{\sigma}_m = \bar{B}\dot{\epsilon}_{pp} \quad (7.4.4)$$

式中 \bar{B} 满足

$$\frac{1}{3\bar{B} + 4G} = \frac{f}{3B' + 4G} + \frac{1-f}{3B + 4G} \quad (7.4.5)$$

在曲线的中段, 复合材料的总的相变体积膨胀为

$$\theta = \epsilon_{pp} - \sigma_m/B = (1 - \bar{B}/B)(\epsilon_{pp} - \sigma_m^c/B) \quad (7.4.6)$$

最大的相变体积膨胀为

$$\theta^T = f\theta_p \quad (7.4.7)$$

如果 $\bar{B} > -4G/3$, 称为亚临界相变复合材料; 如果 $\bar{B} = -4G/3$, 称为临界相变复合材料; 如果 $\bar{B} < -4G/3$, 称为超临界相变复合材料。

在相变阶段, 复合材料的体积变形关系的增量形式为

$$\dot{\sigma}_m = B\dot{\epsilon}_{pp}, \quad \dot{\theta} = (1 - \bar{B}/B)\dot{\epsilon}_{pp} \quad (7.4.8)$$

相变复合材料的三维本构关系为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G}s_{ij} + \frac{1}{3B}\sigma_m\delta_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} \quad (7.4.9)$$

或

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + B(\epsilon_{pp} - \theta)\delta_{ij} \quad (7.4.10)$$

在平面应变情况下,上述本构关系简化为

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}(\sigma_{\alpha\beta} - \nu\sigma_{\mu\mu}\delta_{\alpha\beta}) + \frac{1}{3}(1 + \nu)\theta\delta_{\alpha\beta} \quad (7.4.11)$$

或

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 2G(\epsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\epsilon_{\mu\mu}\delta_{\alpha\beta}) + B(\epsilon_{\mu\mu} - \theta)\delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{33} &= -\frac{2}{3}G\epsilon_{\mu\mu} + B(\epsilon_{\mu\mu} - \theta) \\ \sigma_m &= \frac{1}{3}(1 + \nu)\sigma_{\mu\mu} - \frac{E}{9}\theta \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

在上述的本构关系下,可以证明对于一个静止裂纹,如果在远处受到 I 型 K 场应力的作用,则在裂纹尖端的完全相变区内,应力场仍为 K 场,只是相变区内的应力强度因子 K_{tip} 与远场的 K_∞ 不相同,而 K_{tip} 控制着裂纹尖端的断裂过程。

计算相变增韧(以及后文的微裂纹增韧)效应的一种简单方法是假设 J 积分的路径无关性。在远场弹性区内,有

$$J_\infty = (1 - \nu^2)K_\infty^2/E \quad (7.4.13)$$

而在裂纹尖端附近的完全相变区内,有

$$J_{tip} = (1 - \nu^2)K_{tip}^2/E \quad (7.4.14)$$

根据 J 的路径无关性 $J_\infty = J_{tip}$, 得到 $K_{tip} = K_\infty$, 即对于静止裂纹,裂纹尖端的相变区对远场应力没有屏蔽效应。

如果裂纹发生了准静态扩展,在裂尖的后方会留下完全相变和部分相变的尾区,如图 7.24 所示。采用平均应力的相变准则

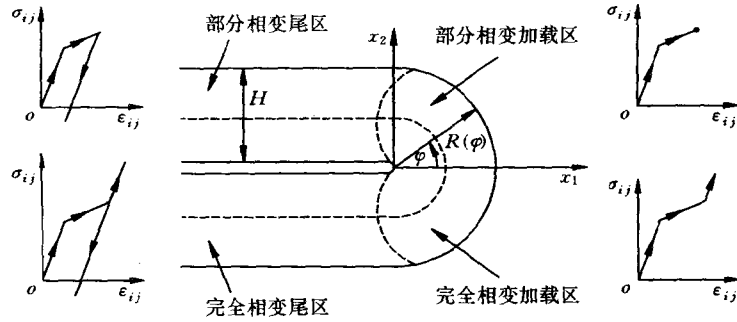


图 7.24 定常扩展裂纹的相变增韧

$\sigma_m = \sigma_m^c$, 相变区的边界为

$$R(\phi) = \begin{cases} \frac{8}{3\sqrt{3}} H \cos^2 \frac{\phi}{2}, & 0 \leq \phi \leq \pi/3 \\ H/\sin\phi & \pi/3 \leq \phi \leq \pi \end{cases} \quad (7.4.15)$$

式中 H 为尾区的半高,

$$H = \frac{\sqrt{3}(1+\nu)^2}{12\pi} \left(\frac{K}{\sigma_c} \right)^2 \quad (7.4.16)$$

由此可以导出定常扩展裂纹的屏蔽比为

$$K_{tip}/K_\infty = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \alpha \quad (7.4.17)$$

式中 α 为一无量纲的参数,

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)E\theta^T}{9\pi(1-\nu)\sigma_m^c} \quad (7.4.18)$$

7.4.2 微裂纹增韧

在脆性材料中,宏观裂纹尖端大量微裂纹的形核和扩展形成损伤过程区,它可以明显地松弛裂纹尖端的应力场,增加能量耗

散,推迟裂纹的不稳定扩展,这种作用称为微裂纹的屏蔽作用。微裂纹的形核主要有两个原因,一是残余应力,由于晶粒之间的热失配或二相粒子与基体之间的残余应力引起脆性二相粒子或界面的开裂;二是材料的不均匀性,例如弥散分布的夹杂,会引起夹杂与界面之间的脱粘开裂、夹杂或基体的开裂。微裂纹在外力作用下会发生扩展,当遇到其它晶粒或界面的阻碍时会停止扩展,这种稳定扩展的特点是微裂纹增韧的一个重要条件。

微裂纹对宏观裂纹尖端场的屏蔽作用有两个原因,其一是由于微裂纹的形核释放了部分残余应力,从而诱发不可恢复的应变,称为转变应变。一般情况下,转变应变表现为均匀的体膨胀,因此这种增韧机制与相变增韧相类似,对于静止裂纹,屏蔽效应不明显,对于定常扩展裂纹,增韧幅值 $\Delta K = K_{\infty} - K_{ip}$ 与损伤区厚度的平方根成正比。其二是由于微裂纹的形核和扩展引起弹性模量降低,这种机制的屏蔽效应与损伤区尺寸没有明显关系,主要取决于损伤区的形状,随着宏观裂纹扩展,屏蔽效果变化不明显。实验和理论分析的结果表明,以上两种原因的屏蔽比大致相当,并且可以近似地简单叠加,在有些材料中,总的增韧比可以达到 4.0 以上,因此微裂纹的屏蔽效应也是很显著的。

对微裂纹增韧的理论研究主要有两种方法,即等效弹性介质方法(或连续损伤力学方法)和细观力学方法。前者将宏观裂纹尖端附近的损伤区视为具有连续分布损伤的等效弹性介质,其前提是微裂纹损伤区的尺寸远远大于微裂纹本身的尺寸以及微裂纹之间的距离。屏蔽效果常采用屏蔽比 K_{ip}/K_{∞} 来定量表示。在微裂纹屏蔽效应的研究中,一般都假设损伤区内的等效介质具有简单的、唯象表示的本构关系,如各向同性损伤或简单的各向异性损伤本构关系。一种简单而且被广泛采用的本构关系包括三个阶段,即无损弹性段、部分损伤段和损伤饱和段,其单拉曲线如图 7.25 所示,图中 σ_0 和 σ_s 分别为开始损伤和损伤饱和的临界应力, E_0 , E_1 和 E_s

为无损段、部分损伤段和饱和段的弹性模量, ϵ^T 为转变应变。

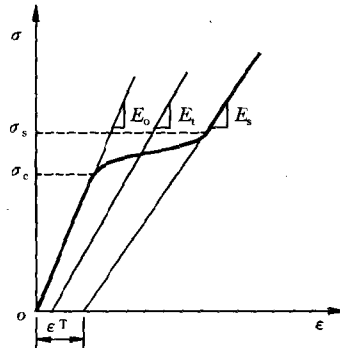


图 7.25 微裂纹损伤材料的单拉曲线

Evans 在 [7.16] 中介绍了球形颗粒在静水应力 σ_R 作用下由于自身开裂引起的体积增加

$$\Delta\theta_R = \frac{16}{3} a^3 \frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma_R \quad (7.4.19)$$

式中 a 为微裂纹的半径。如果微裂纹的取向在材料中均匀分布, 单位体积中的微裂纹个数为 N , 则微裂纹密度参数为 $f = N\langle a^3 \rangle$, 以 \bar{E} 和 $\bar{\nu}$ 分别表示微裂纹的弹性模量和泊松比, 则微裂纹体的各向同性的本构关系为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{ij} - \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{3} \theta^T \delta_{ij} \quad (7.4.20)$$

式中

$$\theta^T = \frac{16}{3} (1-\nu^2) f \frac{\sigma_R}{E} \quad (7.4.21)$$

弹性模量 \bar{E} 和泊松比 $\bar{\nu}$ 可以从以下关系导出

$$\frac{G}{\bar{G}} = 1 + \frac{32(1-\nu)(5-\nu)f}{45(2-\nu)}$$

$$\frac{B}{\bar{B}} = 1 + \frac{16(1-\nu^2)f}{9(1-2\nu)} \quad (7.4.22)$$

如果只考虑体积膨胀 θ^T 对屏蔽作用的贡献,即假设 $\bar{E} = E, \bar{\nu} = \nu$, 微裂纹的屏蔽比可以由下式计算^[7.17]

$$\frac{K_{\text{tip}}}{K_{\infty}} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{E\theta^T}{(1-\nu)K} \int_0^{\pi} [R(\theta)]^{1/2} \cos \frac{3}{2} \theta d\theta \quad (7.4.23)$$

式中 (r, θ) 为建立在宏观裂纹原点的极坐标, $R(\theta)$ 为损伤区边界。如果令 $\theta^T = 0$, 即只计及有效模量引起的屏蔽作用, Hutchinson 给出^[7.17]

$$\frac{K_{\text{tip}}}{K_{\infty}} = 1 + (k_1 - \frac{5}{8})\delta_1 + (k_2 + \frac{3}{4})\delta_2 \quad (7.4.24)$$

式中

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{G}{\bar{G}} - 1 \right), & \delta_2 &= \frac{1}{1-\nu} \left(\bar{\nu} \frac{G}{\bar{G}} - \nu \right) \\ k_1 &= \frac{1}{32\pi} \int_0^{\pi} (11\cos\theta + 8\cos 2\theta - 3\cos 3\theta) \ln R(\theta) d\theta \\ k_2 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos\theta + \cos 2\theta) \ln R(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (7.4.25)$$

综合考虑体积膨胀和有效模量下降两种机制, 则屏蔽比表示为

$$\begin{aligned} \frac{K_{\text{tip}}}{K_{\infty}} &= 1 + \left(k_1 - \frac{5}{8} \right) \delta_1 + \left(k_2 + \frac{3}{4} \right) \delta_2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \\ &\times \frac{E\theta^T}{(1-\nu)K} \int_0^{\pi} [R(\theta)]^{1/2} \cos \frac{3}{2} \theta d\theta \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

设微裂纹的形核准则为临界平均应力准则, 即

$$\text{微裂纹密度} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} < \sigma_m^c \\ N & \text{当 } \sigma_m \geq \sigma_m^c \end{cases} \quad (7.4.27)$$

对于静止裂纹, 将 K 场应力代入以上准则, 得到微裂纹损伤区的边界

$$R(\theta) = \frac{2}{9\pi}(1+\nu)^2 \left(\frac{K}{\sigma_m^c}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (7.4.28)$$

且 $k_1=3/16, k_2=-1/4$, 微裂纹的屏蔽比与 θ^T 无关, 为

$$\frac{K_{tip}}{K_\infty} = 1 - \frac{7}{16}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 \quad (7.4.29)$$

当 $\nu=1/3$ 时, $\delta_1=1.99f, \delta_2=-0.095f$, 式(7.4.29)变为

$$\frac{K_{tip}}{K_\infty} = 1 - 0.919f \quad (7.4.30)$$

对于稳态扩展的裂纹, 由式(7.4.29)给出损伤区的半高 H 为

$$H = \frac{\sqrt{3}(1+\nu)^2}{12\pi} \left(\frac{K}{\sigma_m^c}\right)^2 \quad (7.4.31)$$

且 $k_1=0.0166, k_2=-0.0433$, 屏蔽比为

$$\frac{K_{tip}}{K_\infty} = 1 - 0.608\delta_1 + 0.707\delta_2 - \frac{E\theta^T}{2(1-\nu)K} \left(\frac{H}{\sqrt{3}\pi}\right)^{1/2} \quad (7.4.32)$$

当 $\nu=1/3$ 时, δ_1 和 δ_2 与静止裂纹的情况相同, 式(7.4.32)变为

$$\frac{K_{tip}}{K_\infty} = 1 - 1.278f - 0.3215E\theta^T \sqrt{HK} \quad (7.4.33)$$

以上的简单分析表明, 扩展裂纹尖端的微裂纹屏蔽效应比静止裂纹更明显。实验观察发现裂纹尖端附近的 f 约为 0.3, 因此弹性模量的降低可以使 K_{tip} 降低 40% 左右。另一方面, 由于残余应力的释放对屏蔽效应的贡献与相变问题基本相同, 这种机制对扩展裂纹的屏蔽效应比静止裂纹明显得多。Hutchinson, Ortiz 的研究还表明, 损伤的各向异性性质也有助于微裂纹的屏蔽效应。

在研究微裂纹对宏观裂纹影响的另一类方法——细观力学方法中, 需要考虑宏观裂纹与其尖端附近的一个或多个微裂纹的相互作用, 每个微裂纹的位置、取向和尺寸都是确定的, 通过分析找出微裂纹对宏观裂纹尖端场的影响与细观力学参数之间的联系。在一般情况下要得到解析解是很困难的, 于是人们发展了一些近

似的分析方法,如 Kachnov 和 Montagut 等采用的膜力法^[7.19,7.20]、Gong 等的复变函数法^[7.21]、Chudnovsky 等的双层势方法^[7.22]。关于这一方面的重要成果在文献[7.19]中得到了详细总结与评述。

这里简单介绍文献[7.20]中采用的近似分析方法。所考虑的构形中包括一个半无限长的裂纹和 N 个微裂纹,各个微裂纹的几何尺寸、位置和取向均已知。应力场可以表示为如下的和的形式

$$\sigma(x) = K_1 \sigma_1(x) + K_2 \sigma_2(x) + \sum_{i=1}^N \sigma_i(x) \quad (7.4.34)$$

式中 $\sigma_1 = f_1(\theta) / \sqrt{2\pi r}$ 和 $\sigma_2 = f_2(\theta) / \sqrt{2\pi r}$ 表示 I 型和 II 型的渐近裂纹尖端场, σ_i 为第 i 个微裂纹面上施加作用力 $t_i = t_i(\xi)$ 时 ($-l_i < \xi < l_i$) 引起的应力场, l_i 为第 i 个微裂纹的半长。

作用力 $t_i(\xi)$ 是由主裂纹、其它微裂纹以及远场载荷决定的

$$t_i(\xi) = n_i \cdot \left\{ K_1 \sigma_1 + K_2 \sigma_2 + \sum_k \left(\langle p_k \rangle \sigma_k^0 + \langle \tau_k \rangle \sigma_k^0 \right) \right\} \quad (7.4.35)$$

式中前两项是主裂纹在第 i 个微裂纹处引起的作用力,后面的求和项是其它微裂纹在第 i 个微裂纹面上引起的作用力, $\langle p_k \rangle$ 和 $\langle \tau_k \rangle$ 是第 k 个微裂纹面上的法向力和剪切力。将上式在 $-l_i < \xi < l_i$ 上取平均

$$\langle t_i \rangle = \phi_i K_1 + \psi_i K_2 + \sum_k \Lambda_{ik} \cdot \langle t_k \rangle \quad (7.4.36)$$

式中 Λ_{ik} 表示第 k 个微裂纹对第 i 个微裂纹影响的平均作用力的转换因子, $\phi_i = n_i \cdot \langle \sigma_1 \rangle_i$, $\psi_i = n_i \cdot \langle \sigma_2 \rangle_i$ 表示主裂纹上 I 型和 II 型载荷对第 i 个微裂纹的影响。

式(7.4.36)中包括 N 个未知矢量 $\langle t_k \rangle$ 及两个未知标量 K_1 和 K_2 , 另外需要补充的两个方程是

$$K_1 = K_1^0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \xi^{-1/2} \sum_k \sigma_{(k)yy}(\xi) d\xi$$

$$K_1 = K_1^0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \xi^{-1/2} \sum_k \sigma_{(k)xy}(\xi) d\xi \quad (7.3.37)$$

式中 K_1^0 和 K_1^0 表示没有微裂纹时的应力强度因子, $\sigma_{(k)}$ 表示第 k 个微裂纹产生的沿主裂纹线的应力。求解方程 (7.4.36) 和 (7.4.37) 即能得到主裂纹尖端的应力强度因子 K_1, K_1 以及微裂纹面上的平均力, 从而得到在给定的构形下微裂纹对主裂纹的影响。

将等效弹性介质方法和离散的细观力学方法相比较, 其差别除了分析方法不同以外, 还表现在结论的不一致。细观力学的结果表明, 微裂纹对宏观裂纹尖端场的影响并不总是屏蔽效应, 还可能是应力放大效应(或称为反屏蔽效应), 这与微裂纹的位置、取向等有关。两种方法得到的结果不仅仅是量的差别, 还可能是质的不同。目前, 对这一问题尚未取得完全一致的看法, 但是微裂纹作为一种重要的材料强韧化机制是不容置疑的, 只是其中的一些问题还没有研究清楚。

参 考 文 献

- 7.1 Kachanov L. M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1986
- 7.2 Riedel H. A continuum damage approach to creep crack growth, in: Edited by B A Bilby et al. Fundamentals of Deformation and Fracture. Cambridge University Press, Cambridge, 1984, 293~309
- 7.3 Hayhurst D R, Brown P R and Morrison C T. The role of continuum damage in creep crack growth. Phil. Trans. Soc. London, 1984, A311, 131~158

-
- 7.4 Lemaitre J and Chaboche J L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988
 - 7.5 冯西桥,何树延. 表面裂纹疲劳扩展的一种损伤力学方法. *清华大学学报*, 1997
 - 7.6 Zhao J and Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics. *Eng. Fract. Mech.*, 1995, 50(1), 131~141
 - 7.7 Jagota A, Hui C Y and Dawson P R. The determination of fracture toughness for a porous elastic-plastic solids. *Int. J. Fracture*, 1987, 33, 111~124
 - 7.8 Mazars J and Lemaitre J. Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. in: Edited by S L Shah. *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*. Martinus-Nijhoff Publishers, 1985, 507~520
 - 7.9 Dems K and Mróz Z. Stability conditions for brittle-plastic structures with propagating damage surfaces. *J. Struct. Mech.*, 1985, 13(1), 95~122
 - 7.10 刘文政. 脆塑性结构极限载荷的计算及工程应用. 清华大学博士学位论文, 1985
 - 7.11 Zubewicz A and Mróz Z. Numerical simulation of rock burst processes treated as problems of dynamic instability. *Rock Mech. Rock Eng.*, 1983, 16(4), 253~274
 - 7.12 Evans A G and Cannon R M. Toughening of brittle solids by martensitic transformations. *Acta Metall.*, 1986, 34(5), 761~800
 - 7.13 Hutchinson J W. Mechanisms of toughening in ceramics. in: Edited by P Germain, et al. *Theoretical and Applied*

-
- Mechanics. Elsevier, North-Holland, 1989,139~144
7. 14 孙庆平,黄克智,余寿文. 结构陶瓷增韧研究述评. 力学进展,1990,20(3),289~302
7. 15 Budiansky B, Hutchinson J W and Lambropoulos. Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics, *Int. J. Solids Struct.*, 1983,19(4),337~355
7. 16 Evans A G. *Fracture in Ceramic Materials*. Noyes Publications, 1984
7. 17 Hutchinson J W. Crack tip shielding by micro-cracking in brittle solids. *Acta Metall.*, 1987,35(7),1605~1619
7. 18 Ortiz M. A continuum theory of crack shielding in ceramics *J. Appl. Mech.*, 1987,V54(1), 54~58
7. 19 Kachanov M. Elastic solids with many cracks and related problems. in: Edited by J W Hutchinson and T W Wu. *Advances in Applied Mechanics*. Academic Press, New York. 1988 30,259~428
7. 20 Kachanov M and Montagut E. Interaction of a crack with certain microcrack arrays. *Eng. Fract. Mech.*, 1986, 25,625~636
7. 21 Gong S X and Horii H. General solutions to the problems of microcracks near the tip of a main crack. *J. Mech. Phys. Solids*, 1989,37,27~46
7. 22 Chudnovsky A, Dolgopolsky A and Kachanov M. Elastic interaction of a crack with a microcrack array, Part I and II. *Int. J. Solids Struct.*, 1987,23,1~21