

# 目 录

<b>第一章 拉伸、压缩和剪切</b> .....	<b>1</b>
1.1 引言 .....	1
1.2 应力和应变 .....	2
1.3 拉伸试验 .....	3
1.4 线性弹性和虎克定律 .....	7
1.5 轴向承载杆的变位 .....	10
1.6 静不定结构 .....	13
1.7 热效应和预应变效应 .....	21
1.8 非线性性态 .....	24
1.9 剪应力和剪应变 .....	28
1.10 应变能 .....	30
习题 .....	37
<b>第二章 应力和应变分析</b> .....	<b>47</b>
2.1 斜面上的应力 .....	47
2.2 双轴应力 .....	51
2.3 纯剪 .....	55
2.4 双轴应力的莫尔圆 .....	57
2.5 平面应力 .....	60
2.6 平面应力的莫尔圆 .....	64
2.7 三轴应力 .....	67
2.8 平面应变 .....	70
习题 .....	75
<b>第三章 扭转</b> .....	<b>80</b>
3.1 圆杆的扭转 .....	80
3.2 空心圆杆的扭转 .....	85
3.3 扭转应变能 .....	87
3.4 薄壁管 .....	89
3.5 圆杆的非弹性扭转 .....	93
习题 .....	97

<b>第四章</b>	<b>剪力和弯矩</b>	101
4.1	梁的类型	101
4.2	梁中的应力合力	103
4.3	载荷、剪力和弯矩之间的关系	106
4.4	剪力图和弯矩图	108
	习题	114
<b>第五章</b>	<b>梁中的应力</b>	120
5.1	梁中的正应力	120
5.2	梁的设计	126
5.3	梁中的剪应力	130
5.4	圆形横截面梁中的剪应力	137
5.5	组合梁	139
5.6	梁中的主应力	141
5.7	非棱柱形梁中的应力(近似理论)	145
5.8	复合梁	152
5.9	弯曲与扭转的组合	158
5.10	弯曲与轴向载荷的组合	161
	习题	165
<b>第六章</b>	<b>梁的挠度</b>	177
6.1	挠曲线的微分方程	177
6.2	简支梁	180
6.3	悬臂梁	185
6.4	力矩-面积法	186
6.5	叠加法	191
6.6	非棱柱形梁	195
6.7	有限差分法	198
6.8	弯曲应变能	202
6.9	与挠度成比例的载荷	205
6.10	热效应	209
6.11	剪切变形的效应	210
6.12	梁的大挠度	217
	习题	221
<b>第七章</b>	<b>静不定梁</b>	229
7.1	静不定梁	229

7.2	挠曲线的微分方程 .....	231
7.3	叠加法 .....	234
7.4	力矩-面积法 .....	241
7.5	有限差分法 .....	243
7.6	连续梁 .....	245
7.7	热效应 .....	252
7.8	梁端的水平位移 .....	253
	习题 .....	255
<b>第八章</b>	<b>非对称弯曲 .....</b>	<b>263</b>
8.1	承受斜向载荷的对称梁 .....	263
8.2	非对称梁的纯弯曲 .....	265
8.3	非对称梁由于横向载荷产生的弯曲 .....	270
8.4	薄壁开口截面梁的剪应力 .....	273
8.5	薄壁开口截面的剪心 .....	279
8.6	梁关于非主轴弯曲时的剪应力 .....	284
	习题 .....	291
<b>第九章</b>	<b>非弹性弯曲 .....</b>	<b>296</b>
9.1	引言 .....	296
9.2	非弹性弯曲方程 .....	296
9.3	塑性弯曲 .....	298
9.4	塑性铰 .....	304
9.5	梁的塑性分析 .....	306
9.6	挠度 .....	314
9.7	非弹性弯曲 .....	317
9.8	残余应力 .....	323
	习题 .....	325
<b>第十章</b>	<b>柱 .....</b>	<b>331</b>
10.1	承受偏心轴向载荷的柱 .....	331
10.2	柱的临界载荷 .....	335
10.3	柱中的应力 .....	341
10.4	柱的正割公式 .....	344
10.5	柱的缺陷 .....	346
10.6	柱的设计公式 .....	349
	习题 .....	352

<b>第十一章 结构分析和能量法</b>	<b>357</b>
11.1 引言	357
11.2 虚功原理	358
11.3 用以计算位移的单位载荷法	363
11.4 梁的剪切挠度	377
11.5 互等定理	382
11.6 柔度法	389
11.7 刚度法	401
11.8 应变能和余能	415
11.9 应变能法	423
11.10 势能法	432
11.11 瑞利-里兹法	435
11.12 余能原理	446
11.13 力法	453
11.14 卡斯提利阿诺第二定理	456
11.15 应变能与柔度法	458
11.16 结构分析的其他方法	460
习题	461
<b>参考文献和历史注释</b>	<b>475</b>
<b>附录 A 平面面积的性质</b>	<b>492</b>
A.1 面积的形心	492
A.2 组合面积的形心	494
A.3 面积的惯性矩	495
A.4 极惯性矩	497
A.5 平行轴定理	498
A.6 惯性积	500
A.7 轴的旋转	501
A.8 主轴	503
习题	505
<b>附录 B 平面面积的性质</b>	<b>509</b>
<b>附录 C 型钢表</b>	<b>512</b>
<b>附录 D 梁的挠度和斜率</b>	<b>522</b>
<b>习题答案</b>	<b>527</b>

# 第一章 拉伸、压缩和剪切

## 1.1 引言

材料力学是应用力学的一个分支，它论述固体在承受各类载荷时的性态。这个研究领域具有人们熟悉的各种名称，其中包括“材料强度”和“可变形体力学”。本书中所研究的固体包括轴向受载的杆、轴、梁和柱，以及由这些元件装配而成的结构。通常我们分析的目的是确定由载荷而产生的应力、应变和变形。如果对于直到破坏载荷前的所有载荷值下的这些量都能求得，那么我们就得到该物体力学性态的全貌。

理论分析和实验结果在材料力学的研究中具有同等重要的作用。在许多情况下，我们将采用逻辑推导以便得到预示力学性态的公式和方程，但同时我们也必须认识到，除非已知材料的某些性质，否则这些公式就不能实际应用。这些性质只有在实验室里作了适当的实验之后才能用于实际。另外，工程中的许多重要问题不能凭借理论手段予以有效地处理，而实验测量就成为一种实际需要。材料力学的历史发展正是理论与实验两者饶有趣味的融合，即对某些情形，用实验指出获知有用结果的方法，而对另一些情形，则理论发挥这样的作用。著名人物如 L. 达·芬奇 (da Vinci, 1452—1519) 和 G. 伽利略 (Galilei, 1564—1642) 都曾用实验确定了金属丝、杆和梁的强度，尽管他们没有提出任何充分的理论(按当代的标准)来解释其试验结果。反之，著名数学家 L. 欧拉 (Euler, 1707—1783) 远在有实验证明他的结果的重要意义之前，于 1744 年提出了柱的数学理论并计算了柱的临界载荷。然而，欧拉的理论成果有许多年没有被应用，尽管它们在今天已成为柱的理论基础。\*

\* 从达·芬奇和伽利略时代开始的材料力学史，见参考文献 1-1, 1-2 和 1-3。

随着我们学习本学科的进程，理论推导与实验所确定的材料性质相结合的重要性将日趋明显。在本章中，我们将从讨论某些基本概念着手，例如应力和应变，然后我们将研究承受拉伸、压缩和剪切的简单结构元件的性态。

## 1.2 应力和应变

应力和应变的概念可通过研究一根棱柱形杆的拉伸(见图 1-1a)这一基本方法予以说明。棱柱形杆就是沿其整个长度具有不变的横截面和直轴线的杆件。在此阐述中，假设杆的两端受到使杆产生均匀伸长或拉伸的轴向力  $P$ 。作一个与杆轴线相垂直的人为切面(截面  $mm$ )，我们就可以分离出杆的一部分作为自由体(图 1-1b)。在其右端作用着拉力  $P$ ，而在另一端存在着代表杆件被移去部分对保留部分作用的诸力。这些力沿横截面连续分布，就象液体静压力在淹没面上连续分布一样。该力的集度，亦即单位面积上的力，称为应力，并且通常用希腊字母  $\sigma$  来表示。假设应力在整个横截面上均匀分布(见图 1-1b)，我们就不难看出，其合力等于集度  $\sigma$  乘以杆的横截面面积  $A$ 。此外，根据图 1-1b 所示物体的平衡，我们还能看出，这一合力必定与力  $P$  大小相等而方向相反。因此，我们得到

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1-1)$$

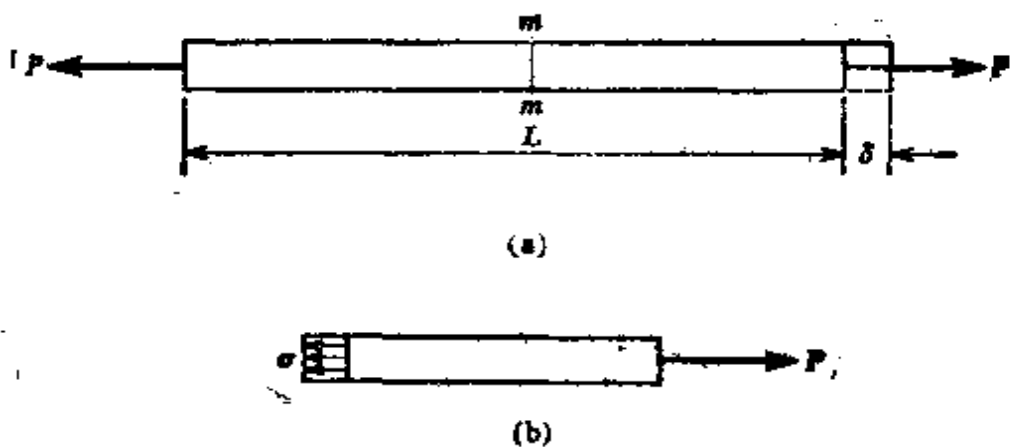


图 1-1. 棱柱形杆受拉。

此为棱柱形杆中均匀应力的方程。这一方程表明应力具有力除以面积的单位——例如牛顿/平方毫米( $\text{N}/\text{mm}^2$ )\* 或磅力/平方英寸( $\text{psi}$ )。如图所示,当杆被力  $P$  拉伸时,所产生的应力为拉应力;如果将力反向而使杆件受到压缩,则称它们为压应力。

方程(1-1)成立的一个必要条件是应力  $\sigma$  在杆的横截面上必须是均匀的。如果轴向力  $P$  通过横截面的形心而作用,那么这一条件就得以实现,这点可借静力学来证明(见习题 1.2-1)。当载荷  $P$  不作用于形心时,杆将产生弯曲,需要作更复杂的分析(见第 5.10 节)。但是,除非特别指明,在本书中始终假设所有轴向力均作用于横截面的形心处。同样,除非另有说明,一般均假设物体自身的重量略而不计,如在讨论图 1-1 中的杆件时所作的那样。

承受轴向力的杆件的总伸长量将用希腊字母  $\delta$  来表示(见图 1-1a),而单位长度的伸长量,亦即应变,用下式来确定:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1-2)$$

这里  $L$  为杆的总长度。注意应变  $\epsilon$  为一无量纲的量。只要应变沿整个杆长是均匀的,就可以按公式(1-2)精确求得。如果杆件受拉,此应变为拉应变,它代表材料伸长或拉伸;如果杆件受压,其应变为压应变,这意味着杆件相邻的横截面彼此移近。

### 1.3 拉伸试验

特定材料的应力与应变的关系是用拉伸试验来确定的。材料的试件通常采用圆形杆件,它被置于拉伸机上以承受拉力。杆上所受的力和杆的伸长量都随着载荷的递增而予以量测。杆中的应力是用杆的截面面积除其所受的力求得,而应变则由发生伸长的长度除其伸长量求得。以此方式即得材料完整的应力-应变图。

结构钢应力-应变图的典型形状示于图 1-2a 中,图中轴向应变标在水平轴上,而相应的应力由曲线  $OABCDE$  的纵坐标给出。从  $O$  到  $A$ ,应力与应变之间成正比,其图形为线性的。过  $A$  点后

\*  $1\text{N}/\text{mm}^2 = 1\text{MN}/\text{m}^2 = 1\text{MPa}$  (兆帕)。——译者注

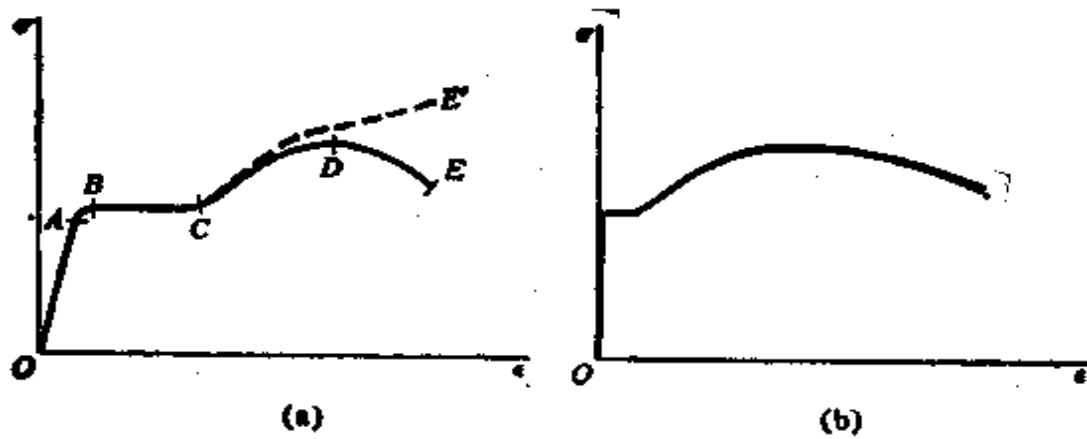


图 1-2. 结构钢的典型应力-应变曲线:

(a) 示意图(未按比例); (b) 按比例.

应力与应变之间不再存在线性关系,因而  $A$  点处的应力称为**比例极限**. 对于低碳(结构)钢,此极限通常在  $200 \text{ N/mm}^2$  至  $250 \text{ N/mm}^2$  之间,但对于高强度钢,它可能比此值大得多. 随着载荷的增加,应变比应力增加得迅速,直到  $B$  点,开始出现相当大的伸长,而拉力并无明显增加. 这种现象称为材料的**屈服**, $B$  点的应力称为**屈服点**或**屈服应力**. 在  $BO$  区段我们说材料已成为**塑性**,而杆件实际上可以**塑性**地伸长,其伸长量为在比例极限时所产生的伸长量的 10 或 15 倍. 材料在  $O$  点处开始**应变硬化**,并对载荷的增加提供出附加的抗力. 这样,应力将随着杆件的进一步伸长而增大,并在  $D$  点达到最大值,或者说达到**极限应力**. 超过此点后,载荷随着杆件进一步伸长而减小,试件的断裂最终在图上的  $E$  点处发生.

杆件伸长的同时,发生横向收缩,其结果使杆件的横截面面积减小. 这一现象大约直到  $O$  点为止对应力-应变图并无影响,但是超过该点,面积的减小对应力的计算值将有显著的影响,杆件发生了明显的**颈缩**(见图 1-3),如果用颈缩处狭窄部分的实际横截面面积计算  $\sigma$ ,就会得出**真应力-应变曲线**,它遵循虚线  $OE'$ . 然而,在到达极限应力之后( $DE$  线),杆件所能承受的总载荷确实减小了,这一减小是由于面积的收缩而不是由于材料自身强度的削



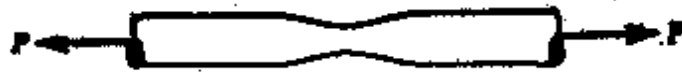


图 1-3. 杆件受拉时的颈缩.

弱。直到破坏为止,材料在实际上都经得住应力的增加。然而,在大多数实用场合,根据试件原横截面面积所得的常规应力-应变曲线  $OABCDE$  对设计应用来说提供了满意的数据。

图 1-2a 中的图线用来表明钢的应力-应变曲线的一般特征,但其比例不是真实的,因为正如已经指出的那样,从  $B$  到  $C$  发生的应变可能大到从  $O$  至  $A$  所发生应变的 15 倍。另外,从  $C$  到  $E$  的应变甚至比从  $B$  到  $C$  的应变更大。用适当的比例所绘制的图形示于图 1-2b 中。在该图中从  $O$  到  $A$  的应变与从  $A$  到  $E$  的应变相比小得无从看出,而图中的线性部分呈现为一条竖直线。

在明显的屈服点之后,随之有很大的塑性应变,这种现象在某种程度上是钢所独有的,而钢是现代使用的最普通的结构金属。铝合金在从线性到非线性区之间展现出一种更为渐进的过渡,如图 1-4 中的应力-应变图所示。钢和许多铝合金在破坏之前都将经历很大的应变,所以被划归为延性材料。与之相反,脆性材料在较低的应变值时就破坏(见图 1-5)。这种例子包括陶土、铸铁、混凝土、某些金属合金和玻璃。

对各种受压材料,亦可获得类似于拉伸时的图线,而且诸如比

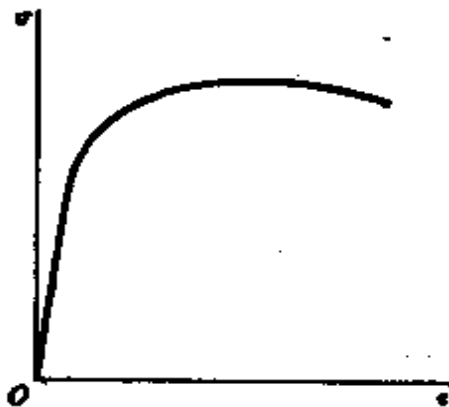


图 1-4. 结构铝合金的典型应力-应变曲线.

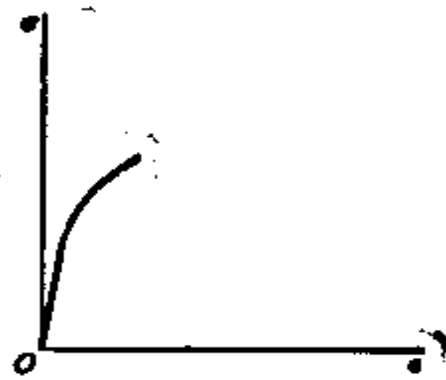


图 1-5. 脆性材料的典型应力-应变曲线.

例极限、屈服点和极限应力等特征应力也可予以确定。对钢来说，已发现其比例极限和屈服应力在受拉和受压时大致相等。当然，对于许多脆性材料，受压时的特征应力要比受拉时大得多\*。

**弹性** 示于图 1-2, 1-4 和 1-5 中的应力-应变图说明了各种材料受拉时的性态。当材料的试件卸载时，亦即载荷逐渐减小到零时，加载期间所产生的伸长会部分地或全部地消失。卸载过程中趋向于恢复其原来形状的这种材料性质称为弹性。如果杆件完全恢复其原状，称它是完全弹性的；如果仅部分回复其原状，它就是部分弹性的。在后一种情况中，当载荷移去后残留在杆中的伸长称为永久变形。

当进行材料的拉伸试验时，载荷可以加到某个(小的)选定值而后把它移去。如果没有永久变形，亦即杆中的应变回到零，则材料直到该选定载荷值所代表的应力之前都是弹性的。这种加载和卸载的过程可对逐次增高的载荷值反复地进行。最后，应力总会达到某个数值，使卸载过程中并非全部应变都得以恢复。用这一方法可以确定弹性范围内的上限应力，这一应力称为弹性极限。对于钢以及许多其它金属，其弹性极限和比例极限几乎重合。然而，对于橡胶之类的材料，弹性性质可以延续到远远超过其比例极限。

**容许应力** 在设计结构时，需要保证结构在工作条件下，充分发挥它在建造时预期的作用。从结构承载能力这一观点出发，结构中的最大应力通常应保持在低于其比例极限，因为只有这样，当施加载荷而后移去时才不会有永久变形。估计到结构有偶然的超载以及制造中有可能不准确和结构分析中可能的未知变量，通常用选择低于比例极限的容许应力(或资用应力)以提供安全系数。例如，在结构钢设计中，对屈服点为  $250 \text{ N/mm}^2$  的钢通常采用拉伸容许应力为  $165 \text{ N/mm}^2$ 。因此，抵抗屈服的安全系数为 1.52。也有其他一些情况，其中资用应力是用对极限应力取适当的

\* 应力-应变图为雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli, 1654—1705)和 J. V. 蓬斯莱(Poncelet, 1788—1867)所创始，见参考文献 1-4。

安全系数来确定。这种作法通常用于混凝土和木材之类的脆性材料。一般来说,当根据容许应力进行设计时,可采用下列两式之一得到其资用应力  $\sigma_w$ :

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{n_1} \quad \text{或} \quad \sigma_w = \frac{\sigma_u}{n_2} \quad (1-3)$$

其中  $\sigma_y$  和  $\sigma_u$  分别表示屈服点和极限应力,而  $n_1$  和  $n_2$  为安全系数。适当的安全系数的确定是一件复杂的事情,因为它取决于所用材料的类型和结构的工作条件。当载荷是动态时(或突然作用或大小变化),象出现在机器零件、飞机、桥梁等的载荷,由于疲劳破坏的可能性,就需要一个比同一结构承受静载荷时更大的安全系数。

代替使用容许应力的另一种方法是采用一个抵抗结构完全毁坏的安全系数来设计结构。引起结构毁坏的载荷(或诸载荷)必须首先予以确定,然后容许载荷(或资用载荷)由极限载荷除以适当选择的载荷系数来确定。这种设计方法称为极限载荷设计,可以看出,在此情况下,结构中实际应力的的大小在确定其资用载荷时没有起直接的作用。在设计金属结构时,资用应力法和极限载荷法都是常用的。对于某些简单结构,其极限载荷的确定将在后面第 1.8 节和 9.5 节中加以讨论。

#### 1.4 线性弹性和虎克定律

大多数结构材料在其应力-应变曲线上具有一个初始区段,在此区段内材料呈现出既是弹性的又是线性的性态。在钢的应力-应变图上从  $O$  到  $A$  这一区段(参看图 1-2a)就是一例。其他各例如图 1-4 和 1-5 中的各曲线在比例极限以下的区段。当材料表现为弹性并且在应力和应变之间展现线性关系时,该材料就称为线性弹性的。这是许多固体材料包括大多数金属、塑料、木材、混凝土和陶土等的极为重要的性质。

杆件受拉时,应力和应变之间的线性关系可用简单的方程来表达:

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-4)$$

其中  $E$  为比例常数, 称为材料的弹性模量。可以看出, 弹性模量为应力-应变图线性弹性区段上的斜率, 而且对于各种材料是不同的。一些有代表性的  $E$  值列于表 1-1 中(注意  $E$  与应力的单位相同)。对于大多数材料, 其压缩弹性模量与拉伸时的相同。在计算时, 拉应力和拉应变通常认为是正的, 而压应力和压应变则为负的。弹性模量有时称为杨氏模量, 起因于英国科学家 T·杨 (Young, 1773—1829) 曾经研究过杆件的弹性性质(参考文献 1-5 和 1-6)。方程(1-4)通常被称为虎克定律, 起因于另一位英国科学家 R·虎克 (Hooke, 1635—1703) 的工作, 他首先通过实验建立了载荷和伸长量之间的线性关系(参考文献 1-7 和 1-8)。

当杆件承受简单拉伸时(见图 1-1a), 由前面公式(1-1)和(1-2)给出其轴向应力为  $\sigma = P/A$ , 轴向应变为  $\epsilon = \delta/L$ 。这些结果

表 1-1 材料典型的力学性质\*

材 料	密度 (tonnes/m <sup>3</sup> )	弹性模量 $E$ (kN/mm <sup>2</sup> )	剪切弹性模量 $G$ (kN/mm <sup>2</sup> )	屈服应力 $\sigma_y$ (N/mm <sup>2</sup> )	极限应力 $\sigma_u$ (N/mm <sup>2</sup> )
铝	2.68	70	28	140	210
铝合金	2.75—8	70	28	100—350	140—400
黄铜	8.30	97	39	100—400	275—520
青铜	8.30	97	39	70—380	200—400
混凝土 (压力)	2.35	15—30			15—70
铜	8.86	103	41	70—300	200—400
铸铁	7.75	103	41	40—275	110—400
镁	1.77	40	16	80—120	140—210
软钢	7.83	200—207	75—82	200—400	350—700
高强度钢	7.83	200—207	75—82	350—1100	700—2000
钨	18.80	345	138		4100
结构用木料 (压力)	0.3—0.8	7—15			28—70

\* 这些性能中有些依其成分、热处理、冷作硬化等而有很大变化。除另有说明外, 表中所列的均属拉伸性质。

与虎克定律( $\sigma = E\epsilon$ )联合, 将给出杆件伸长量的下列方程,

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad (1-5)$$

该方程表明, 线性弹性杆件的伸长量与载荷以及长度成正比, 而与弹性模量及横截面面积成反比. 乘积  $EA$  称为杆的轴向刚度.

图 1-1a 中杆的柔度定义为由载荷的单位值所引起的变位, 因此我们从方程(1-5)看出, 柔度为  $L/EA$ . 用类似的方式, 杆的刚度定义为产生单位变位所需要的力, 因此, 刚度等于  $EA/L$ , 即柔度的倒数. 后面在第十一章中将要说明, 柔度和刚度在各种类型的结构分析中都具有重要的作用.

**泊松比** 当一根杆件受到拉伸时, 轴向伸长伴随有横向收缩, 亦即当杆的长度增大时其宽度变小. 在弹性范围内, 横向应变与纵向应变之比为一常数, 称为泊松比  $\nu$ . 于是

$$\nu = \frac{\text{横向应变}}{\text{轴向应变}} \quad (1-6)$$

此常数是以著名法国数学家 S. D. 泊松(Poisson, 1781—1840)而命名的, 他曾试图用材料的分子理论计算这个比值(参考文献 1-9). 对于各个方向具有相同弹性性质的材料, 即所谓各向同性材料, 泊松发现其  $\nu = 0.25$ . 金属的实际试验表明,  $\nu$  通常在 0.25 到 0.35 的范围内.

如果材料的泊松比和弹性模量为已知, 杆受拉时的体积变化就可以计算出来. 体积变化在图 1-6 中画出, 该图表示从受拉杆中切出的一个微小的材料单元. 该微元的原来形状由假定边长为单位长度的立方体  $abcdefgh$  给出. 轴向力的方向通过图中所标的应力  $\sigma$  指出. 单位立方体在载荷方向的伸长量为  $\epsilon$  (等于  $\sigma/E$ ), 沿立方体两个侧边的缩短量为  $\nu\epsilon$ . 因此, 立方体的横截面面积按比值  $(1-\nu\epsilon)^2:1$  减小, 而体积按比值  $(1+\epsilon)(1-\nu\epsilon)^2:1$  增大. 把后一比值的左端的乘积展开, 然后略去包括  $\epsilon$  的平方和立方的很小的那些项, 则此比值简化为  $(1+\epsilon-2\nu\epsilon):1$ . 该立方体的体积变化等于最后体积减去最初体积, 或  $\epsilon(1-2\nu)$ . 这个量称为单位体积

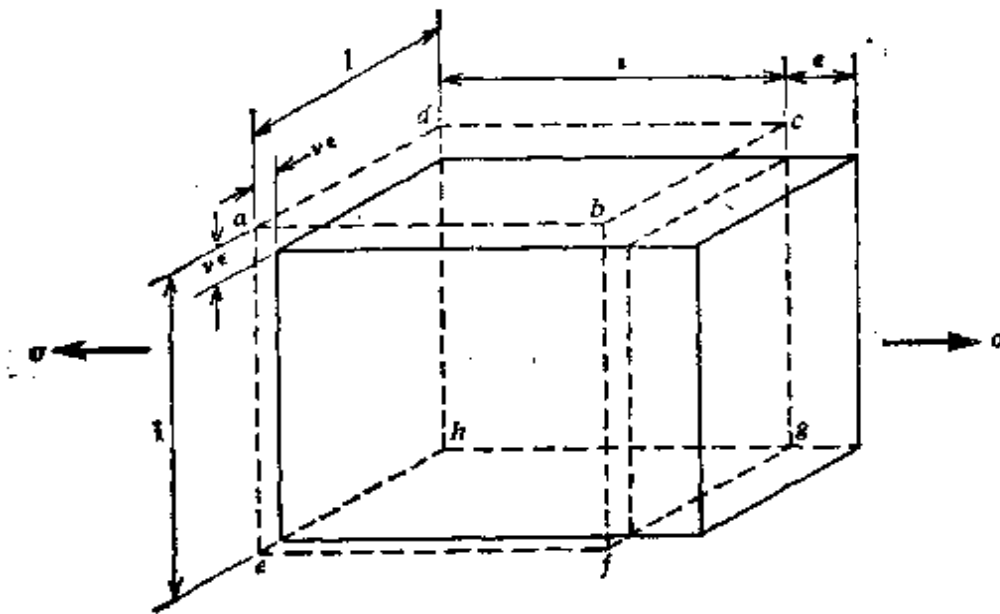


图 1-6. 单位立方体受拉时的体积变化。

的变化, 我们可将它表示成下式:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\nu) \quad (1-7)$$

在此方程中,  $\Delta V/V$  代表体积的变化  $\Delta V$  与原体积  $V$  之比。倘若轴向应变  $\epsilon$  和泊松比  $\nu$  为已知, 此方程可用于计算受拉杆的体积变化。

说任何一种材料受拉时都会减小其体积看来是不合理的, 所以我们根据公式(1-7)推断  $\nu$  必小于 0.5。橡胶和石蜡是两种受拉时体积几乎无变化的材料, 因此对于这些材料, 其  $\nu$  接近于极限值 0.5。另一方面, 软木是一种  $\nu$  值几乎等于零的材料, 而混凝土的  $\nu$  值大约为 0.1。

以上关于拉伸时出现横向收缩的讨论也可用于压缩时的情况, 只是纵向的压缩伴随有横向的膨胀。在实际应用上, 不论材料受拉还是受压,  $\nu$  的值都是相同的。

### 1.5 轴向承载杆的变位

各种涉及轴向受载杆的情况, 其变位可用方程(1-5)求出。譬如, 不仅在端部受载, 而且在其中间受到一个或多个轴向载荷的杆

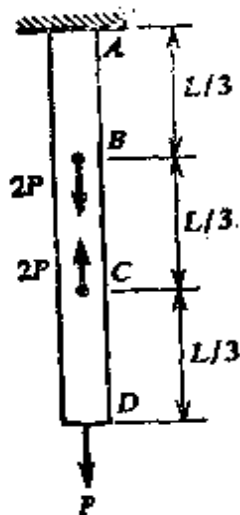


图 1-7. 具有中间轴向载荷的杆.

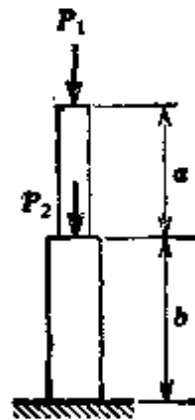


图 1-8. 横截面有变化的杆.

件,如图 1-7 所示的杆,其变位能够很容易地确定. 确定图 1-7 所示杆件变位的步骤是: 首先求出该杆每一部分即  $AB$ 、 $BC$  和  $CD$  上的轴向力\*, 而后分别计算每一部分的伸长量(或缩短量). 最后将这些长度变化代数相加, 从而给出整个杆件总的长度变化. 同样的方法可用于如图 1-8 所示由具有不同横截面积的几部分所组成的杆件. 由此我们看出, 通常对于由具有不同轴向力\*或不同横截面积的几部分所组成的杆件, 其总伸长量  $\delta$  可由下式得出

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \quad (1-8)$$

其中下标  $i$  是识别杆件各部分的标号, 而  $n$  为各部分的总数.

当轴向力\*或横截面面积沿杆轴线连续地变化时, 方程(1-8)就不再适用了. 代之以考虑杆的一个微段求其伸长, 先求出微段的伸长表达式, 而后再沿整个杆长积分. 这一概念在图 1-9 中加以说明, 图中假设锥形杆承受连续分布的轴向载荷, 杆内产生了变化的轴向力. 我们可在距杆左端为  $x$  处切出长为  $d\omega$  的微段. 作用在该微段上的轴向力  $P_\omega$  和微段的横截面积  $A_\omega$  均须表达为  $\omega$  的函数. 于是微段伸长量的方程变为

$$d\delta = \frac{P_\omega d\omega}{EA_\omega}$$

\* 此处的轴向力, 亦即公式(1-8)和(1-9)中的  $P_i$  和  $P_\omega$ , 指的是杆中的应力合力. 它区别于外部施加的轴向载荷. ——译者注

杆的总伸长量为

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x} \quad (1-9)$$

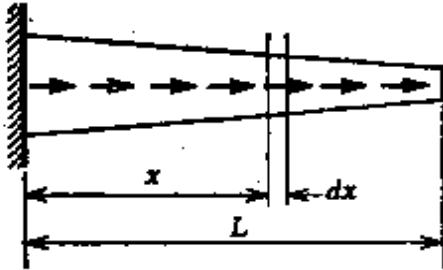


图1-9. 具有变截面和变轴力的杆.

当方程(1-9)中积分号内的表达式不易按闭型积分时,可采用数值法计算积分.此外,对于锥形杆,只要杆的两个侧边夹角很小,方程(1-9)就会给出准确的结果.作为一个特例,我们可以注意到,如果两侧边的

夹角为  $20^\circ$ , 算出的正应力  $\sigma = P/A$  的最大误差仅为 3%. 对较小的夹角误差就更小.如果杆的锥度很大时,就需用更精确的分析方法(见参考文献 1-10).

**桁架的变位** 如果桁架每根杆件的长度变化为已知,那么简单桁架节点的变位可用几何图形来确定.自然,该桁架每根杆件的长度变化可按已经叙述的方法求出.为了说明求桁架变位的几何方法,让我们来确定图 1-10a 所示桁架中节点 B 的位移.桁架中两根杆件的力  $F_{ab}$  和  $F_{bc}$  为

$$F_{ab} = P \operatorname{ctg} \theta^* \quad F_{bc} = P \operatorname{csc} \theta$$

式中  $F_{ab}$  为拉力,而  $F_{bc}$  为压力.杆长的变化为

$$\delta_{ab} = \frac{PL_{ab} \operatorname{ctg} \theta}{EA_{ab}} \quad \delta_{bc} = \frac{PL_{bc} \operatorname{csc} \theta}{EA_{bc}}$$

为了确定 B 点的位移,我们首先假定 AB 杆伸长了—个量值  $\delta_{ab}$  (见图 1-10b),因此其端点位于  $B_1$  处.然后以 A 为圆心,以距离  $AB_1$  为半径作—圆弧.由于 B 点的位移非常小,该圆弧可用通过  $B_1$  而垂直于 AB 杆轴的直线来代替.类似地,假设 BC 杆缩短了一个量值  $\delta_{bc}$ ,使其端点到达  $B_2$  处.然后作以 C 为圆心、以距离  $CB_2$  为半径作另一圆弧.此圆弧用通过点  $B_2$  且垂直于 BC 的直线来代替.此二垂线交于  $B'$  处,它即为节点 B 的最终位置.因此,自 B 至  $B'$  的矢量就表示桁架节点 B 的位移  $\delta_b$ .

为了有助于进行计算,图 1-10b 的位移图以较大的比例尺绘在图 1-10c 中.我们从该图可以看出,  $\delta_b$  的水平分量为  $\delta_{ab}$ , 而其垂直分量由两部分

\* 原书中的正切、余切符号分别为  $\tan$  和  $\cot$ , 现根据我国国家标准《数学符号》分别改为  $\operatorname{tg}$  和  $\operatorname{ctg}$ . ——译者注



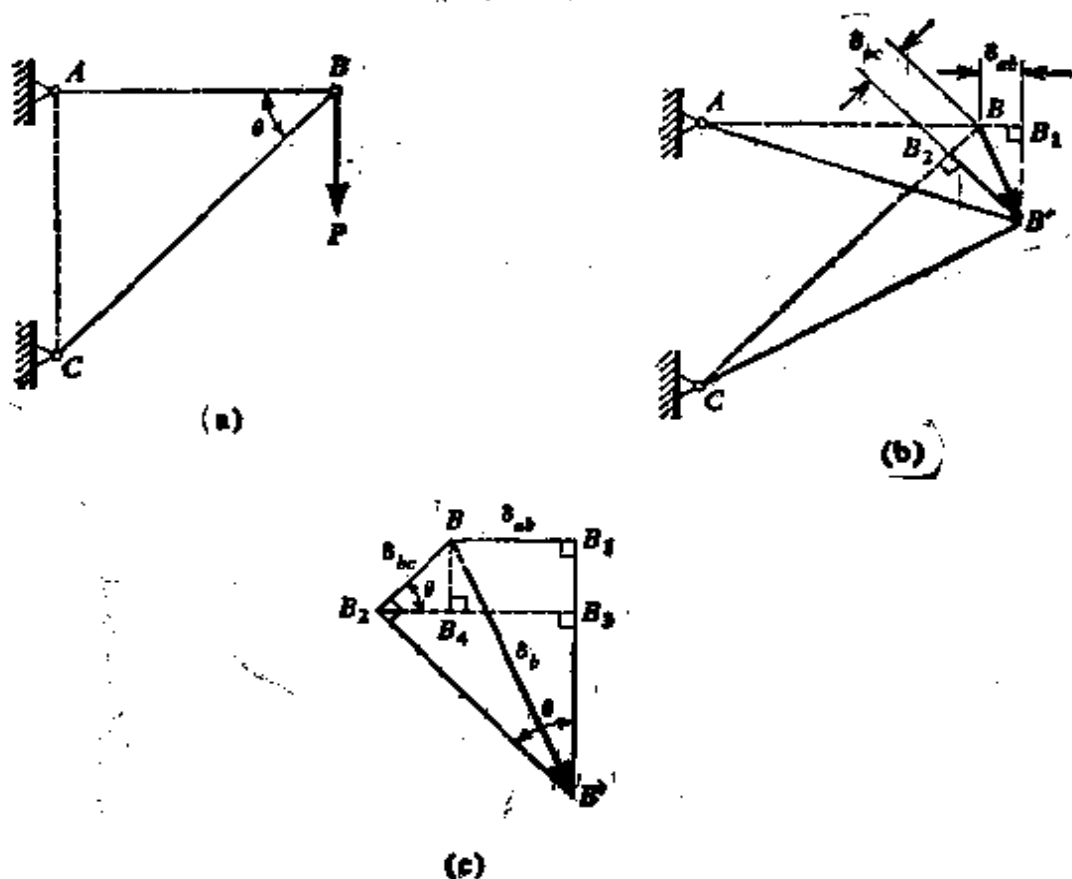


图1-10. 用维利奥特图求桁架的变位.

( $B_1B_3$  和  $B_3B'$ ) 所组成. 距离  $B_1B_3$  和距离  $BB_4$  相同, 等于  $\delta_{bc} \sin \theta$ . 距离  $B_3B'$  可从三角形  $B_2B_3B'$  求出, 该三角形具有等于  $\delta_{bc} \cos \theta + \delta_{ab}$  的一条边  $B_2B_3$ . 以此方式进行下去, 我们就可找出  $\delta_b$  的垂直分量为

$$B_1B' = \delta_{bc} \sin \theta + (\delta_{bc} \cos \theta + \delta_{ab}) \operatorname{ctg} \theta = \delta_{bc} \operatorname{csc} \theta + \delta_{ab} \operatorname{ctg} \theta$$

由于已经求出节点  $B$  的位移的水平分量和垂直分量, 现在我们就可求出其合成位移  $\delta_b$ .

示于图 1-10c 的这种位移图是寻求桁架变位的一个重要辅助手段. 这样的图被称为维利奥特图, 因为它们首先由法国工程师 J. V. 维利奥特 (Williot) 于 1877 年提出(参考文献 1-11). 分析法对于求得桁架的变位也是有效的, 其中一种非常强有力的称为单位载荷法的方法, 将在后面第 11.3 节中加以叙述.

## 1.6 静不定结构

在前面整个讨论中均假设结构杆件内的轴向力能用静力学来确定. 这样的结构称为静定结构. 然而, 有另外的情况, 其中静力

平衡方程不足以确定全部杆力和支反力。对于这样的静不定结构，只有当结构的位移考虑在内时，杆力和支反力才能求出。

图 11-1a 表示静不定结构的一个简单例子。杆  $AB$  的两端连到刚性支承上，并在中间点  $C$  处沿轴向受到力  $P$  的作用。在杆的端部将产生支反力  $R_a$  和  $R_b$ ，但这些反力不能只用静力学求出\*。该杆的唯一静力平衡方程为

$$R_a + R_b = P \quad (a)$$

式中含有两个未知反力，因此对它们的计算来说是不够的，必须根据杆的变位得出第二个方程。

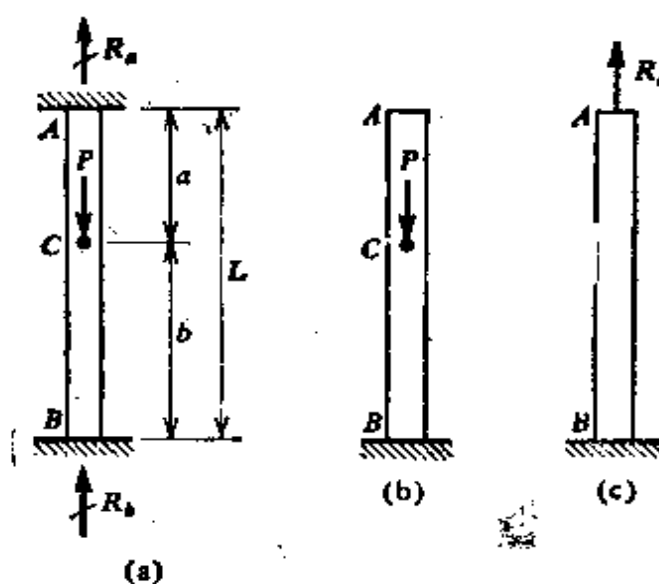


图 1-11. 静不定杆(用力法分析)。

为了得到求解静不定问题所需要的补充方程，有两种通用的方法可以使用。这两个方法都将用图 1-11a 中的杆件来说明。在用第一种方法时，我们从选取反力之一作为未知量开始。在此例中，让我们选取  $R_a$ 。如果这个量可以求出，那么另一反力  $R_b$  就可根据静力学求得(见方程 a)。未知量  $R_a$  称为静余力，这是因为如果将它移去，如图 1-11b 所示的那样，则余下的结构是静定的而且是稳定的结构。因此，从建造一个能够承载的结构这一观点来看，在  $A$  端的反力是不需要的，也就是说，它是多余的。放松多

\* 为了将反力与结构上的载荷相区别，通常横穿箭头画一截线或斜线来表示反力，如图 1-11a 所示。

余力之后而余下的结构称为放松结构,或基本结构.

现在让我们考虑载荷  $P$  对放松结构中  $A$  点位移的影响(图 1-11b), 此位移等于

$$\delta_P = \frac{Pb}{EA}$$

且是向下指的. 其次, 考虑多余力  $R_a$  对于  $A$  点位移的影响(图 1-11c). 注意, 现在  $R_a$  已被想像成作用在放松结构上的载荷. 由于  $R_a$ ,  $A$  点产生向上的位移为

$$\delta_R = \frac{R_a L}{EA}$$

由于  $P$  和  $R_a$  同时作用时  $A$  点的最终位移  $\delta$  由联合  $\delta_P$  与  $\delta_R$  而得. 这样, 若取向下载移为正, 我们得到

$$\delta = \delta_P - \delta_R$$

由于  $A$  点的实际位移为零, 上述方程变为

$$\delta_R = \delta_P \quad (b)$$

或

$$\frac{R_a L}{EA} = \frac{Pb}{EA} \quad (c)$$

由此

$$R_a = \frac{Pb}{L} \quad (d)$$

从该方程求得  $R_a$  后, 我们就能根据静力学方程(方程 a)求出  $R_b$ :

$$R_b = \frac{Pa}{L}$$

这样, 杆的两个反力就都求出来了.

上述用以分析静不定杆的方法可概括如下. 选未知反力之一为多余力, 而后切断该杆并移去支座使之从结构中松开. 然后, 将实际载荷  $P$  和多余力本身加在此静定且稳定的放松结构上. 计算由这两个量引起的位移, 而后纳入位移协调方程(方程 b)中. 此协调方程表示有关变位的条件, 即在本例中变位  $\delta$  等于零. 将以力所表示的位移表达式代入协调方程(方程 c)之后, 我们可以解出

未知力(方程 d)。最后,其余的未知力根据静力学求出。

这种以力作为未知量的分析方法,通常称为力法,它也称为柔度法,因为在协调方程(方程 c)中,未知量( $R_a$ )的系数( $L/EA$ )是柔度。此法比这里所举的例子要通用得多,且可用于具有多个多余力的结构,这将在以后的章节中指出。然而在本节中,仅研究具有一个多余力的非常简单的静不定系统。

现在让我们转到第二种通用的分析方法,并用它求解同一个例题(见图 1-12a)。在使用第二种方法时,我们取杆件两部分交接处的  $O$  点的位移  $\delta_c$  作为未知量。该杆顶部和底部的力  $R_a$  和  $R_b$  可用  $\delta_c$  表示如下:

$$R_a = \frac{EA}{a} \delta_c \quad R_b = \frac{EA}{b} \delta_c \quad (e)$$

在写这两个方程时,我们已假设  $\delta_c$  向下为正,因而在杆的上部产生拉伸,在下部产生压缩。

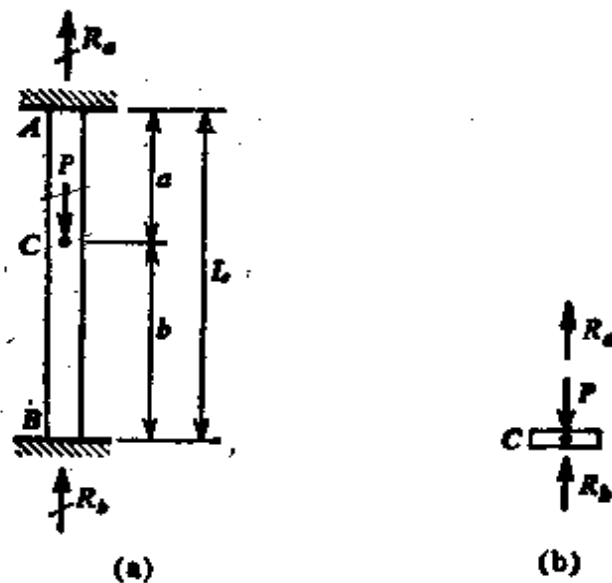


图 1-12. 静不定杆(位移法)。

下一步是将杆中  $O$  点分离出来作为自由体(图 1-12b)并研究它的平衡。作用于自由体上有向下的载荷  $P$ 、上部的拉力  $R_a$  和下部的压力  $R_b$ 。于是根据静力学我们得出

$$R_a + R_b = P \quad (f)$$

或

$$\frac{EA}{a} \delta_a + \frac{EA}{b} \delta_c = P \quad (g)$$

此式得出

$$\delta_c = \frac{Pab}{EAL} \quad (h)$$

知道  $\delta_c$  后, 现在我们可以从方程 (e) 求出  $R_a$  和  $R_b$ :

$$R_a = \frac{Pb}{L} \quad R_b = \frac{Pa}{L}$$

自然, 这些结果与前面求出的完全相同。

归纳起来, 第二种分析方法从选取适当的位移作为未知量着手。该位移必须按这样的方式来选择, 即结构各个部分的力都可用它来表达。然后将这些力纳入平衡方程 (方程 f)。代入用位移所表示的力的表达式 (方程 g) 之后, 我们即可解出未知的位移 (方程 h)。最后, 根据位移便可求得诸力。

这一分析方法称为位移法或刚度法。前一命名是由于以位移作为未知量的缘故, 后一命名起缘于平衡方程 (方程 g) 中的系数 ( $EA/a$  和  $EA/b$ ) 均为刚度。此法也是一个很通用的方法, 它可用来分析多种类型的结构。

对于大型结构, 在力法和位移法之间的抉择取决于许多因素。例如结构的几何形状和节点数目。然而在本节中我们仅考虑这两种方法几乎都同样适宜的问题, 因此, 在这两种方法之间的抉择带有若干任意性。以后在第七章和第十一章我们还将进行静不定结构的分析。\*

**例题 1** 作为第一个例子, 让我们用力法分析图 1-13a 中的平面桁架。假设该桁架是对称的, 我们看出外侧两杆的拉力是相等的。则根据诸力在竖直方向的平衡, 我们得出

---

\* 从历史的观点来看, 欧拉于 1744 年成为第一位分析静不定系统的学者, 他考虑了一个支承在弹性基础上有四条腿的刚性桌子的问题 (参考文献 1-12)。下一步工作是由纳维尔 (Navier) 进行的, 他于 1825 年指出静不定反力可借计入结构的弹性来求得 (参考文献 1-14), 纳维尔求解了一个与图 1-14 所示桁架相类似的桁架。

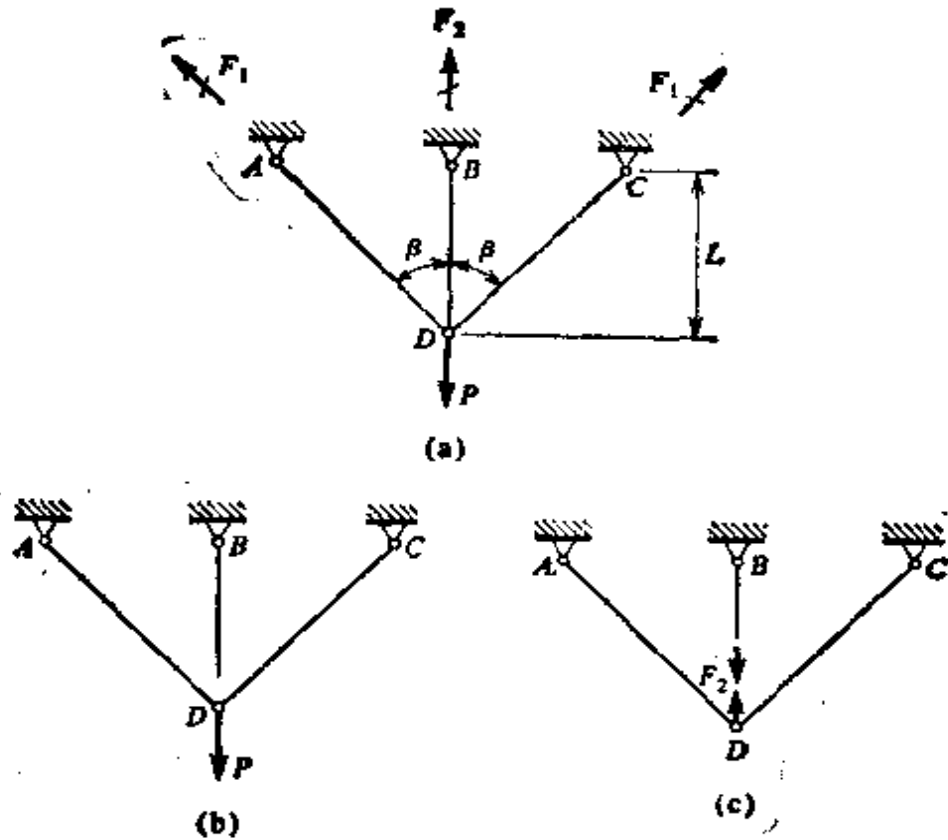


图 1-13. 例题 1. 静不定桁架(力法).

$$2F_1 \cos \beta + F_2 = P \quad (i)$$

此方程包含两个未知力( $F_1$  和  $F_2$ ), 因此需要一个补充方程.

在此例中, 选取  $F_2$  为多余力, 为了移去此力, 在杆  $BD$  的下端切开(图 1-13b)(愿意的话, 该杆可在其它任何点处切开). 当载荷  $P$  作用在放松结构上时(图 1-13b), 节点  $D$  的向下位移(按上节所述的方法求出)为

$$\delta_P = \frac{PL}{2EA \cos^3 \beta} \quad (j)$$

式中  $L$  为竖立杆的长度, 并假设所有杆件具有相同的刚度  $EA$ . 当多余力  $F_2$  作用在放松结构上时(图 1-13c), 切开的杆  $BD$  将因向下的力  $F_2$  而处于拉伸, 同时一个相同且相反的力  $F_2$  则向上作用在节点  $D$  上. 后一作用力使节点  $D$  向上移动一个量值(与方程  $j$  比较):

$$\delta_F = \frac{F_2 L}{2EA \cos^3 \beta} \quad (k)$$

由于  $P$  和  $F_2$  同时作用, 节点  $D$  的向下总位移为  $\delta_P - \delta_F$ . 我们还必须注意到杆  $BD$  伸长了—个量值  $F_2 L / EA$ . 节点  $D$  的位移协调条件表明, 节点  $D$  的向下位移等于杆  $BD$  的伸长量. 因此, 我们得到

$$\delta_P - \delta_F = \frac{F_2 L}{EA}$$

将方程(j)和(k)代入此方程并对  $F_2$  求解, 我们求出

$$F_2 = \frac{P}{1+2\cos^2\beta}$$

最后, 根据平衡方程(方程 i) 我们求出

$$F_1 = \frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^2\beta}$$

从这些结果我们看出, 中间杆的轴力大于外侧杆的轴力。

**例题 2** 现在用位移法分析例题 1 中的桁架, 以便在两种解法之间提供对比。在此分析中节点  $D$  的位移  $\delta$  (见图 1-14a) 将被作为未知量。图中的虚线表示桁架变形后的位形, 而节点  $D$  的威利沃特图示于图 1-14b 中。线段  $DD_1$  和  $DD_2$  分别表示杆  $CD$  和  $AD$  的伸长量, 而  $DD'$  表示节点  $D$  的竖直位移  $\delta$ 。从该图我们看出, 两根斜杆的伸长量均为

$$DD_1 = DD_2 = \delta \cos \beta$$

因此, 斜杆中的力均为

$$F_1 = \frac{EA \cos \beta}{L} (\delta \cos \beta) = \frac{EA \delta \cos^2 \beta}{L} \quad (l)$$

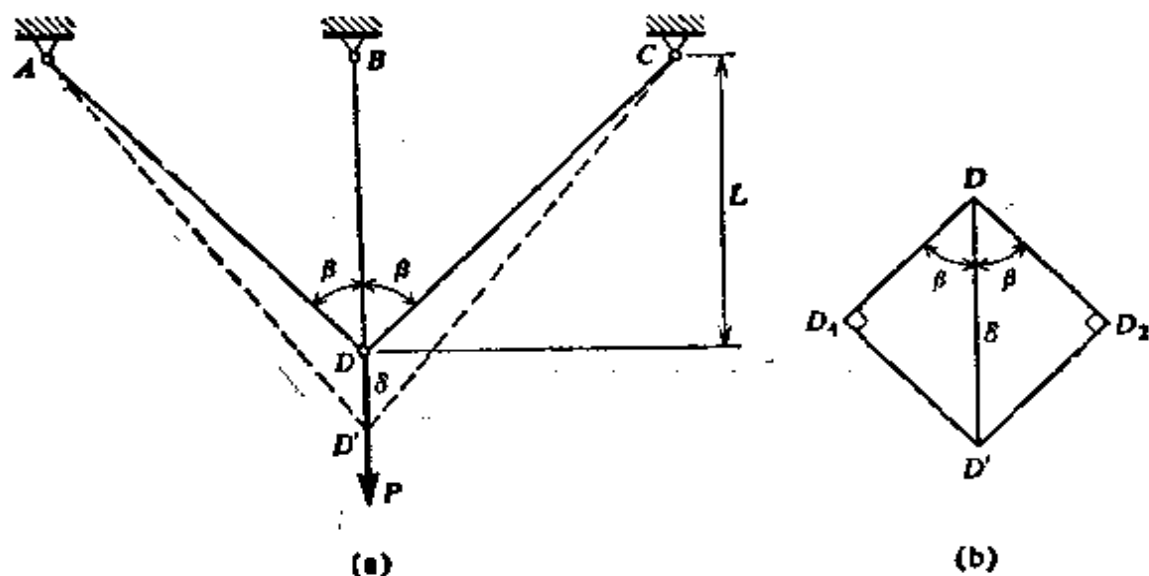


图 1-14. 例题 2. 静不定桁架(位移法)。

另外, 竖直杆中的力为

$$F_2 = \frac{EA\delta}{L} \quad (m)$$

方程(l)和(m)用一个单独的未知量即位移  $\delta$  表示出杆力。下一步是使用静力平衡方程(方程 i)。将方程(l)和(m)代入方程(i), 我们得出

$$\frac{2EA\delta \cos^2 \beta}{L} + \frac{EA\delta}{L} = P$$

由此

$$\delta = \frac{PL}{EA} \frac{1}{1+2\cos^2\beta} \quad (n)$$

既然位移  $\delta$  为已知, 可借方程(n)代入方程(l)与(m)而求出杆力, 由此得出的  $F_1$  和  $F_2$  的结果与例 1 中所得的相同。

**例题 3** 一钢圆柱和一铜管(在图 1-15a 中标以  $S$  和  $C$ ) 在试验机夹头之间受到压缩。试确定钢和铜中由于力  $P$  所产生的应力以及竖直方向的压缩应变。

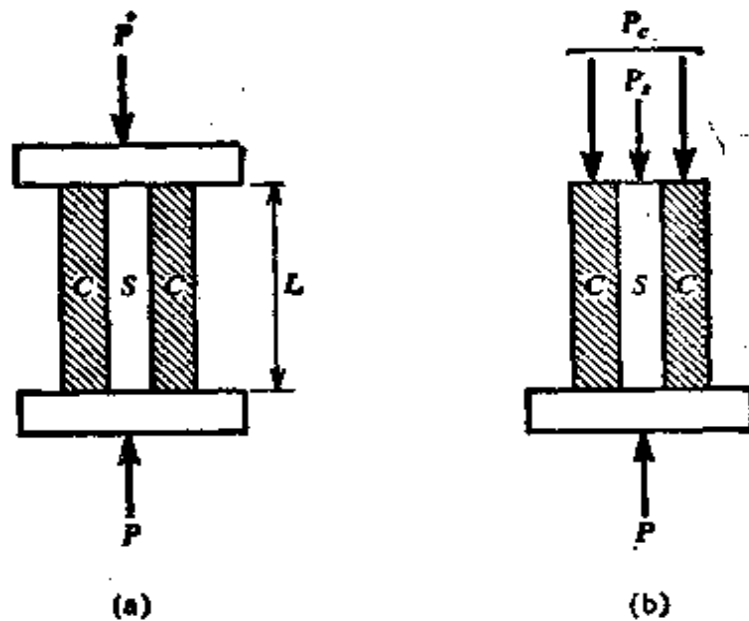


图 1-15. 例题 3. 静不定系统。

当使用力法时, 我们移去顶板, 得到图 1-15b 所示的结构。分别代表钢和铜中总轴力的未知力  $P_s$  和  $P_c$  用如下的静力学方程联系起来:

$$P_s + P_c = P \quad (o)$$

钢圆柱的缩短量为  $P_s L / E_s A_s$ , 其中  $E_s A_s$  为钢圆柱的轴向刚度, 而铜管的缩短量为  $P_c L / E_c A_c$ , 其中  $E_c A_c$  为铜管的轴向刚度。协调条件基于这一事实, 即钢圆柱与铜管两者缩短了同一量值, 因此:

$$\frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c} \quad (p)$$

联解(o)和(p)两个方程, 我们就能计算出钢和铜中的力:

$$P_s = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P \quad P_c = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P \quad (q)$$

这些方程表明, 钢和铜中的力与它们的轴向刚度成正比。

钢中的压应力  $\sigma_s$  现在可由  $P_s$  除以  $A_s$  而得到, 而应力  $\sigma_c$  可用类似方法求出。两种材料的压缩应变相同, 它们可用虎克定律求出, 其结果为



$$\epsilon = \frac{P}{E_s A_s + E_o A_o} \quad (r)$$

此方程表明应变等于总的载荷除以钢零件和铜零件的轴向刚度之和。

**例题 4** 用位移法求解上面例题。

在此例中的未知位移为两端板的相对位移  $\delta$ ，它与钢零件和铜零件的缩短量是相同的。当用位移  $\delta$  表达时，力  $P_s$  和  $P_o$  为

$$P_s = \frac{E_s A_s \delta}{L} \quad P_o = \frac{E_o A_o \delta}{L} \quad (s)$$

将这些表达式代入平衡方程，得

$$\frac{E_s A_s \delta}{L} + \frac{E_o A_o \delta}{L} = P$$

由此我们求得位移  $\delta$ ：

$$\delta = \frac{PL}{E_s A_s + E_o A_o}$$

现在，将这一  $\delta$  的表达式代入方程 (s)，给出力  $P_s$  和  $P_o$ 。这些结果与例 3 所得结果一致（见方程 q）。另外用  $L$  去除  $\delta$  给出与方程 (r) 一致的应变  $\epsilon$ 。

比较例题 3 和例题 4 表明，尽管力法和位移法在观点上基本不同，但在某些情况下二者的计算工作量之间的差别相对很小。另一方面，读者应意识到，在较复杂的问题中，这两种方法之间可能有显著的差别。如果图 1-15 所示的系统，由于附加其他材料的杆件而制成更为复杂的系统（见图 1-16 中的例子），那么用位移法按上面所述相同的方式进行求解依然是相当简单的，而用力法求解则大为复杂，并需求解另外增加的联立方程。还有其他情形则相反，用力法求解较为容易。

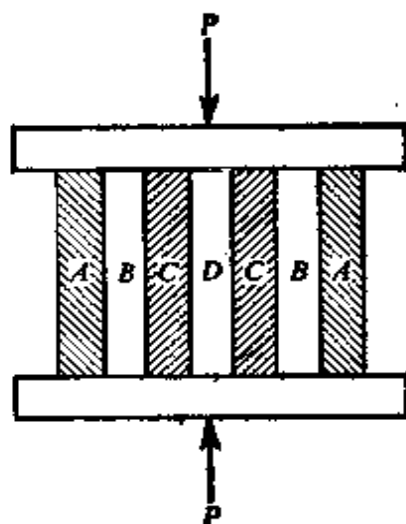


图 1-16. 静不定系统。

## 1.7 热效应和预应变效应

在静定结构中，整个结构上的均匀温度变化不产生任何应力，因为它可以自由地膨胀和收缩。另一方面，在一个以静不定方式支承的结构中，温度变化将在杆件中产生应力，称为热应力。将一根一端自由的杆件（如图 1-7 的例子）和另一根固定端杆件（图 1-17a）比较即可明了这一结论。在前一种情况下，作用在整个杆

中的均匀温度变化将使该杆伸长一个量值:

$$\delta = \alpha L \Delta T \quad (1-10)$$

其中  $\alpha$  = 热膨胀系数(见表 1-2),  $L$  = 长度,  $\Delta T$  = 温度的增量. 因为此伸长量是自由发生的, 所以在杆中没有应力产生.

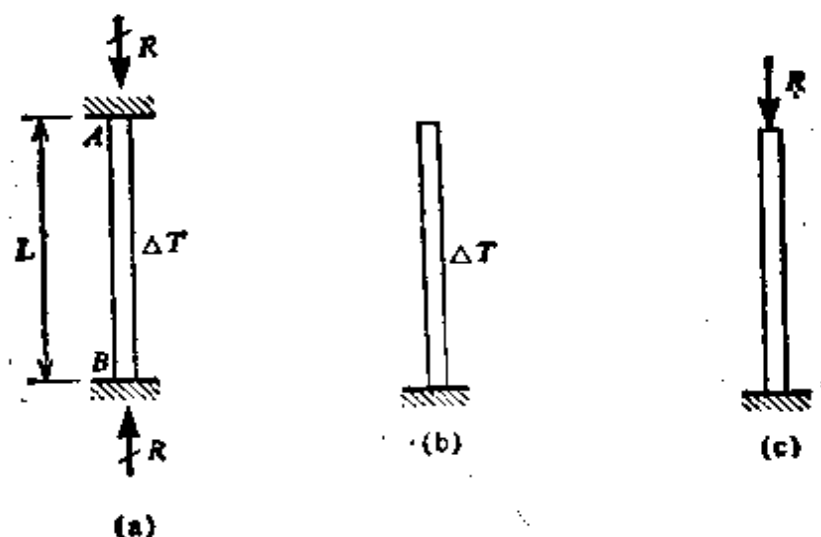


图 1-17. 温度增高的杆件.

表 1-2 热膨胀系数的典型值

材 料	热 膨 胀 系 数 $\alpha(10^{-6}/^{\circ}\text{C})$
钢	11.7
铝	21.4—23.9
镁	26.1
铜	16.7
混凝土	7.2—12.6

在图 1-17a 中所示的静不定杆件情况下, 杆件就不可能伸长, 因此, 当温度增高时, 在杆件中产生压缩力  $R$ . 该力可用上节所述的分析法来计算. 对于固定端杆件我们看出: 如果  $A$  端被放松(图 1-17b), 那么它单独由于温度变化所产生的向上位移为  $\alpha L \Delta T$ , 而单独由于  $R$  所产生的向下位移(图 1-17c)为  $RL/EA$ . 令这两个位移相等, 得出

$$R = EA\alpha\Delta T \quad (1-11)$$

由此方程求出  $R$  后, 杆中的压应力和压应变便可计算如下,

$$\sigma = \frac{R}{A} = E\alpha\Delta T \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\Delta T \quad (1-12)$$

从此例我们看出,即便是没有外载荷作用,热效应也能在静不定系统中产生应力。

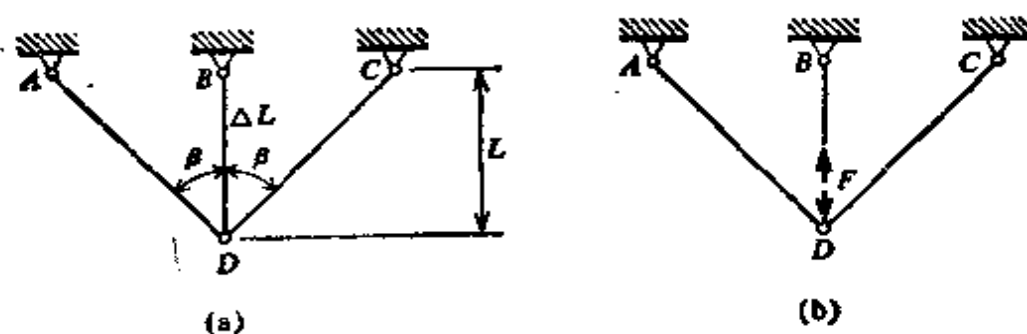


图 1-18. 竖直杆具有预应变  $\Delta L$  的桁架。

类似的情形存在于当结构中的一根杆长不准确时,或当一根杆件由于初始力而产生预应力,随后又移去初始力时。在这两种情况中,即便是没有外载荷作用在结构上,该结构中将会产生预应力状态的预应变。例如,假设 1-18a 中的桁架以  $L + \Delta L$  而非  $L$  作为竖直杆无应力时的长度。那么只有压缩竖直杆并拉长倾斜杆之后诸杆才能装配就位。令  $F$  代表竖直杆中的压力(图 1-18b)。于是由上节方程(j)可以看出,由于  $F$  产生的节点  $D$  的向下位移为

$$\delta_F = \frac{FL}{2EA \cos^3 \beta}$$

节点  $D$  的协调条件表明:节点  $D$  的向下位移  $\delta_F$  等于竖直杆的初始长度增加量  $\Delta L$  减去由于力  $F$  使竖直杆产生的缩短量。因此,协调方程为

$$\frac{FL}{2EA \cos^3 \beta} = \Delta L - \frac{FL}{EA}$$

由此

$$F = \frac{EA\Delta L}{L} \frac{2 \cos^3 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (a)$$

知道压力  $F$  之后,我们就可很容易地根据静力学计算倾斜杆中的力。前面这两个例子说明了这样一个事实,当有温度变化或有预应变时,分析静不定结构的方法与载荷作用时分析结构的方法是

相同的。

作为最后的一个例子，让我们再次研究图 1-18a 所示的桁架，并设竖直杆受热使温度升高  $\Delta T$ 。只要我们使  $\Delta L$  等于当该杆为自由伸展时所发生的温度膨胀，则温升对杆力产生的效应就与竖直杆具有初始伸长  $\Delta L$  时的效应相同。因此，为了得出竖直杆中由于温度变化所产生的力  $F$ ，我们只需在方程(a)中用  $\alpha L \Delta T$  代替  $\Delta L$  即可。

## 1.8 非线性性态

在以前的讨论中总是假设结构的材料服从虎克定律。现在让我们讨论当应力超过比例极限时结构拉伸和压缩的性态。我们将假设材料的应力-应变图为已知。

如果结构是静定的，其轴力可用静力学求出而不需要考虑材料的性质。知道诸力之后，我们便可计算结构每点处的应力。最后，我们使用应力-应变图就可得出每点的应变，从而也可以得到每一杆件长度的变化及所产生的位移。这种分析静定系统的步骤是十分简单明了的，并将在本章末尾习题 1.8-1 至 1.8-5 中说明。

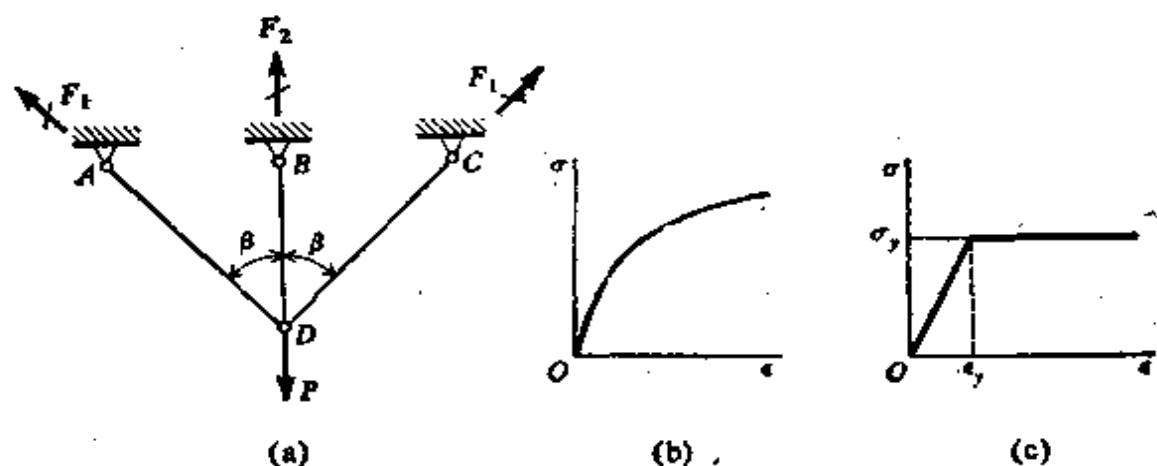


图 1-10. 具有非线性应力-应变图的静不定桁架。

在静不定系统中，分析变得复杂多了，因为不首先求出位移，力就不可能求出，而位移本身又取决于力和应力-应变的关系。在这样的一个系统中可以采用试凑法或逐次渐近法。为了说明此种分析的方法，让我们再次考虑图 1-19a 所示的对称三杆桁架，只是

现在我们将认为桁架的材料有图 1-19b 所示的应力-应变图. 我们从假设节点  $D$  处竖直位移  $\delta$  的试算值开始分析. 然后, 根据节点  $D$  的维利奥图, 可以得到所有三根杆的相应伸长量. 这种计算方法保证了节点处的协调条件是满足的. 其次节点处力的平衡必须予以校核. 杆中应变可由伸长量求出, 然后应力可由应力-应变图求出. 知道了各杆的应力, 我们就可以求出杆中的力, 并校核节点  $D$  处的平衡. 如果最初假设的  $\delta$  正确无误, 我们就会发现节点  $D$  处诸力的平衡将被满足. 否则, 我们会发现诸力并不处于平衡, 因此, 必须选择新的  $\delta$  试算值, 并重复这一计算过程. 最后, 我们将得到能使节点  $D$  处的协调和平衡都得以满足的  $\delta$  值. 各杆中相应的力将是正确的.

另一种步骤是从假设竖直杆中力  $F_2$  的试算值开始. 然后, 使用节点  $D$  处诸力的平衡, 我们便可计算出斜杆中的力. 接着, 每根杆中的应力就能确定, 然后确定应变(根据应力-应变图)以及伸长量. 最后, 我们根据节点  $D$  处的维利奥图可以确定所有三根杆的伸长量是否彼此协调. 如果它们是协调的, 那么  $F_2$  的试算值就是正确的, 此分析就完成了. 否则, 必须选择新的  $F_2$  试算值, 并重复这一过程, 直到平衡和协调均得到满足为止.

根据以上所述的方法来分析图 1-19a 所示的静不定桁架, 对于任一个所假设的载荷  $P$  值, 我们可以得出桁架的变位和各杆的力. 因此就可能得到载荷从零增到其最大值时桁架性态的全貌.

**塑性分析** 有少数材料, 尤其是结构钢, 在线性弹性区段之后有一个显著的屈服区段, 这种材料的应力-应变图可以用两根直线相当精确地加以理想化, 如图 1-19c 所示. 假设该材料直到屈服点之前服从虎克定律, 此后它在常应力条件下屈服. 屈服点处的应力和应变分别用  $\sigma_y$  和  $\epsilon_y$  来表示. 屈服而应力并不增加的材料称为完全塑性的. 当然, 因为应变硬化的缘故, 钢的应力-应变图最终上升到屈服应力之上, 如同早已在第 1.3 节中解释的那样, 但是, 此现象发生之前, 变形已经很大, 而结构失去了它的作用. 因此, 根据图 1-19c 所示的图形为基础来分析处于塑性范围内的钢

结构,已成为通用的作法。对于钢来说,此同一图形既可用于受拉也可用于受压。具有图 1-19c 所示的应力-应变图(亦即在线性弹性区段之后有完全塑性区段的材料)称为弹-塑性材料。采用这些假定所作的分析称为结构的塑性分析或极限分析。

塑性分析的方法可用例题加以说明,再次研究图 1-19a 中的三杆桁架,并假设诸杆均由弹-塑性材料所制成(图 1-19c)。当载荷逐渐增加时,杆中的力也将增大,只要应力低于屈服应力  $\sigma_y$ ,此力就可用弹性分析确定(见第 1.6 节的例题 1)。如果诸杆的横截面面积相等,最终,比外侧杆的力要大的中间杆将达到屈服应力  $\sigma_y$ 。这种情况出现在  $F_2$  等于  $\sigma_y A$  时, $A$  为每根杆的横截面面积。当载荷  $P$  进一步增加时,斜杆中的力也要增加,但力  $F_2$  保持常数,因为中间杆已成为塑性的了。最后,外侧杆也将变成塑性的,于是结构就不能再承受附加的载荷。所有杆子实际上将在常值(最大)的载荷下继续伸长。这一载荷称为极限载荷  $P_u$ 。

上段所述的现象用图 1-19a 所示桁架的载荷-变位图描绘在图 1-20 中。载荷  $P$  取为图的纵坐标,而节点  $D$  的变位  $\delta$  为横坐标。从原点  $O$  至点  $A$ ,所有三根杆均为弹性,而杆力(根据第 1.6 节例题 1)为

$$F_1 = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad F_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta}$$

中间杆的屈服从点  $A$  开始,其相应的载荷称为屈服载荷  $P_y$ ,令上式中  $F_2$  等于  $\sigma_y A$ ,得出:

$$P_y = \sigma_y A (1 + 2 \cos^3 \beta)$$

从  $A$  到  $B$ ,中间杆的力,保持不变,等于  $\sigma_y A$ ,而斜杆中的力可根据节点  $D$  的平衡求得(见 1.6 节的方程  $\phi$ ):

$$F_1 = \frac{P - \sigma_y A}{2 \cos \beta}$$

在  $B$  点处,斜杆也屈服了,因此,  $F_1 = \sigma_y A$ ,根据节点  $D$  的平衡,我们得到极限载荷  $P_u$  下述结果:

$$P_u = \sigma_y A (1 + 2 \cos \beta)$$

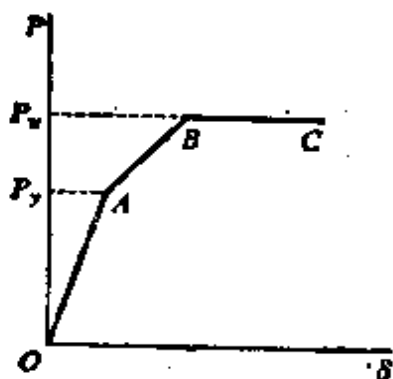


图 1-20. 图 1-19a 中桁架的载荷-变位图。

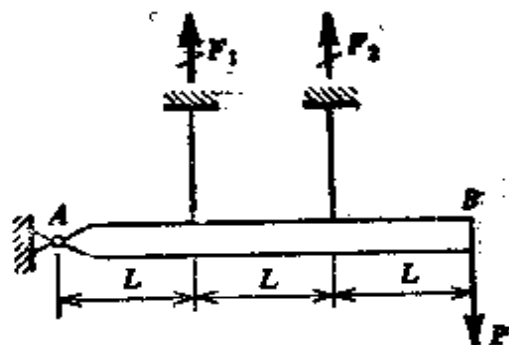


图 1-21. 例题。

从  $B$  到  $C$ , 结构在常载荷  $P_u$  作用下继续变形。正如前面所提及的, 最终将出现应变硬化, 而后结构又能承受附加载荷, 但对实际应用来说, 出现很大的变位就意味着结构已经破坏。由于这个原因, 极限载荷  $P_u$  的计算对于设计者来说是颇有兴趣的。

**例题** 试确定图 1-21 所示结构的屈服载荷  $P_y$  和极限载荷  $P_u$ 。设水平杆为刚性杆, 而两根竖直张线是由弹-塑性材料制成的。并计算当采用载荷系数为 1.85 时, 结构的容许载荷  $P_w$  (假设这两根张线具有相同的横截面积  $A$ )。

张线中的力  $F_1$  和  $F_2$  与载荷  $P$  的关系式, 可通过对杆的  $A$  端取矩而得:

$$3P = F_1 + 2F_2 \quad (a)$$

该方程对于载荷  $P$  从零至极限载荷  $P_u$  的任何一个值都是成立的。从图上也可清楚的看出, 右边那根张线的伸长量总是为左边那根张线伸长量的两倍。因此, 在弹性条件下, 我们有  $F_2 = 2F_1$ , 而且我们也可看出, 当  $P$  逐渐增大时, 力  $F_2$  将首先到达屈服值  $\sigma_y A$ 。此时, 力  $F_1$  将等于  $\sigma_y A / 2$ , 而其相应的载荷  $P$  等于屈服载荷  $P_y$ , 根据方程(a)求得:

$$P_y = \frac{5\sigma_y A}{6}$$

当到达极限载荷  $P_u$  时,  $F_1$  和  $F_2$  均将等于  $\sigma_y A$ 。因此, 从方程(a)我们求出

$$P_u = \sigma_y A$$

正如在前面 1.3 节中所阐明的, 容许载荷  $P_w$  可用载荷系数去除极限载荷而求得, 因此:

$$P_w = \frac{P_u}{\text{载荷系数}} = \frac{\sigma_y A}{1.85}$$

从此例看出, 确定静不定结构的极限载荷  $P_u$  要比作弹性分析容易得多。

## 1.9 剪应力和剪应变

让我们研究图 1-22a 所示的连接件以作为出现剪应力的实际例子。该连接件是由杆  $A$  和  $U$  形铁钩  $C$  以及螺栓  $B$  所组成，螺栓穿过杆和钩上的钉孔。在载荷  $P$  的作用下，杆和钩将以挤压形式贴紧螺栓，而被称为挤压应力的接触应力也在螺栓上出现，如图 1-22b 所示。该图还表明沿着截面  $mn$  和  $pq$  有使螺栓剪切的趋势。如果我们画出螺栓的  $mnpq$  部分的自由体图(图 1-22c)，显然剪力  $V$  必然会沿切面作用(本例中每个剪力  $V$  等于  $P/2$ )。该剪力产生沿螺栓横截面分布的剪应力  $\tau$ 。这些剪应力的确切分布是不易确定的，不过我们可用总剪力除以它所作用的面积  $A$  得到一个平均值：

$$\tau_{\text{平均}} = \frac{V}{A} \quad (1-13)$$

在图 1-22 的例子中，方程(1-13)中所用的面积  $A$  为螺栓的横截面面积。

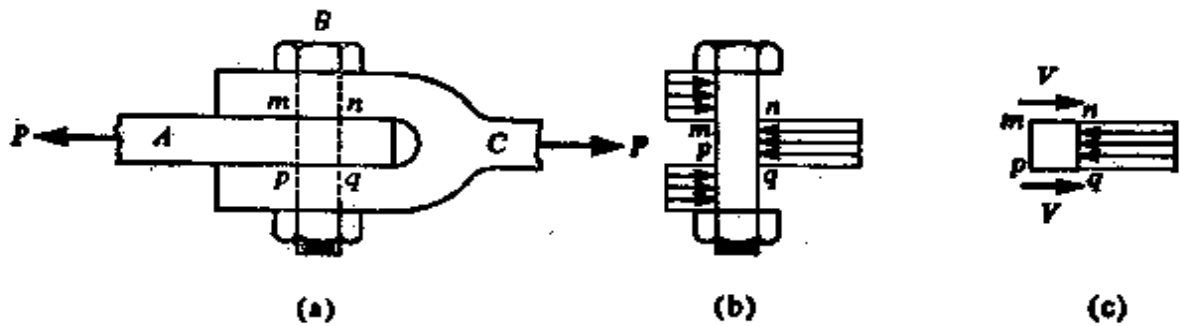


图 1-22. 直接剪切的实例。

在设计螺栓、销钉、铆钉、键以及其它承受直接剪切的零件时，一般作法是使用方程(1-13)并根据平均容许剪应力  $\tau_w$  来调配零件。容许剪应力通常介于  $0.5\sigma_w$  和  $0.6\sigma_w$  之间， $\sigma_w$  为同一种材料的容许拉应力。在后面的章节中将会看到，当杆件受拉和受弯时，剪应力会以间接的方式出现。

在本章前面诸节，我们研究了拉应力和压应力，它们均垂直于其作用面而作用，所以通常被称为正应力。反之，剪应力总是切于



该表面而作用,因此有时称它为切应力。在这两种情况下,应力均代表力的集度,亦即单位面积上的力,因此我们看出正应力和剪应力之间的主要区别是方向上的区别。

为了使剪应力产生的变形形象化,让我们研究一个微小的立方体材料微元(图 1-23a),假设它承受沿顶面分布的剪应力  $\tau$ 。如果微元体上没有作用正应力,那么为使微元在水平方向处于平衡,在其底面上还必须作用相等而方向相反的剪应力。此外,微元的顶面和底面上的剪应力产生一个力矩,该力矩必须由作用在微元两个竖直边上的剪应力产生的力矩来平衡。如果要使该微元处于静力平衡,那么这些竖直方向的剪应力也必须等于  $\tau$ 。因此,我们看到,一般地:(a)作用于材料微元上的剪应力总是以大小相等而方向相反的形式成对出现;(b)剪应力总是存在于互垂的平面上。互垂面上的剪应力总是大小相等,而其方向指向或背离互垂面的交线。一个仅承受剪切的微元,称为纯剪,如图 1-23a 所示。纯剪将在第 2.3 节中作较详细的讨论。

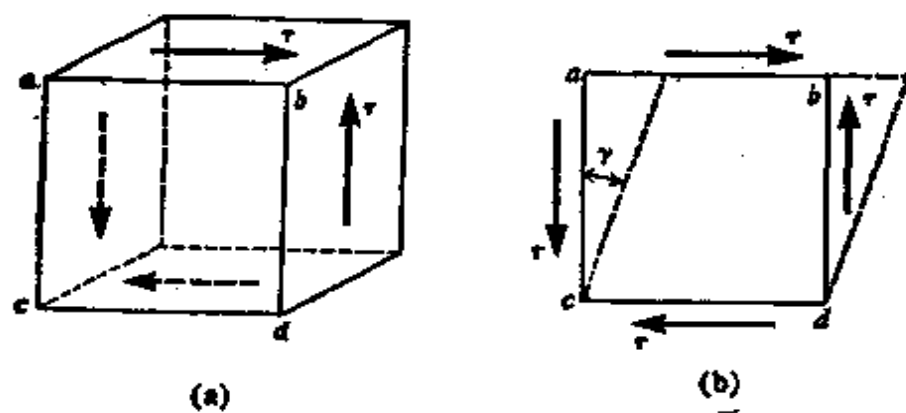


图 1-23. 剪应力和剪应变。

纯剪时材料微元的变形绘于图 1-23b 中,该图表示立方体微元的正面  $abcd$ 。因为微元上没有作用正应力,所以  $ab$ ,  $cd$ ,  $ac$  和  $bd$  边的长度不会改变。相反,剪应力将使正方形  $abcd$  歪曲成菱形,如图中虚线所示。变形前点  $c$  处的角度为  $\pi/2$ ,现在减小为  $\pi/2 - \gamma$ ,这里  $\gamma$  为图中所示的微小角度。与此同时,点  $a$  处的角度增大到  $\pi/2 + \gamma$ 。角  $\gamma$  是由于剪切作用而使微元歪曲的一个尺度,被称

为剪应变。由图可见，剪应变  $\gamma$  等于该微元顶边相对于底边作水平滑动的量除以微元的高度。

对材料进行纯剪试验，并且测量作为剪应力函数的剪应变，我们便可以实验方法得到材料的剪应力-应变图。这个图与相同材料的拉伸试验图在形状上非常相似，根据它我们就能确定剪切时的比例极限、屈服点和极限应力。试验表明，对于包括结构钢在内的延性金属，剪切时的屈服应力  $\tau_y$  为  $\sigma_y$  的 0.5 至 0.6 倍。

如果材料具有线弹性区段，那么剪应力-应变图将为一一直线，而且剪应力与剪应变成正比。于是，我们得出下列剪切虎克定律方程：

$$\tau = G\gamma \quad (1-14)$$

式中  $G$  称为材料的剪切弹性模量。几种材料  $G$  的典型值已列于表 1-1 中。产生纯剪的最简单的方法是通过空心圆管的扭转，这将在后面扭转一章加以解释（见第三章），正是根据这样的扭转试验，通常可以得到  $G$  之值。另外应当注意，受拉时和受剪时的弹性模量（ $E$  和  $G$ ）不是彼此无关的，正如在后面第 2.3 节即将证明的那样，它们之间存在着确定的关系。

## 1.10 应变能

当一根简单拉杆被力  $P$  静态地（即很慢地）加载时，杆件将伸长（图 1-24a），而且，如果材料服从虎克定律，其载荷-变位图就为一一直线，如图 1-24b 所示。在杆件受载的过程中，力  $P$  在杆上做功，而此功转变为储存在杆内的势能或应变能。随后再将力  $P$  慢慢地移去，杆将恢复到其原来的长度。在此卸载过程中，储存在杆中的应变能可以功的形式得以恢复。因此，杆像一根弹簧，当载荷作用或移去时可以储存或释放能量。

加载时储存在杆中的应变能可根据载荷-变位图得出。假设  $P_1$  代表载荷的某一中间值， $\delta_1$  为其相应的伸长量。那么载荷的增量  $dP_1$  将产生伸长增量  $d\delta_1$ 。在此伸长增加过程中，载荷  $P_1$  所作

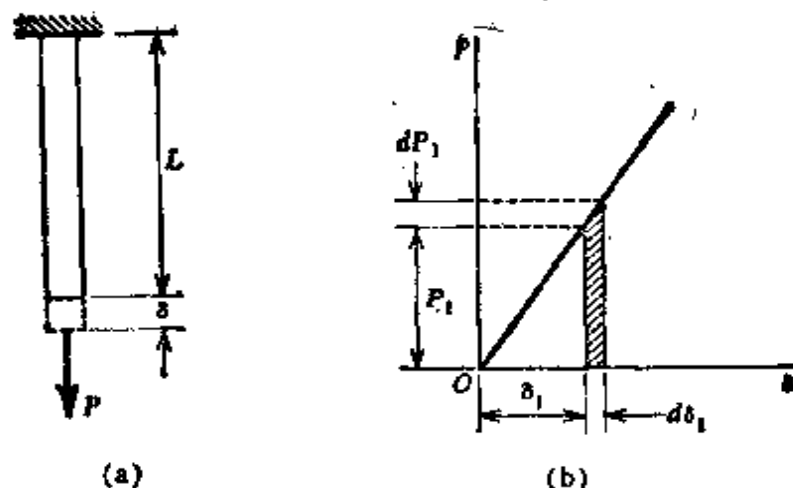


图 1-24. 杆受拉时的载荷-变位图.

的功是  $P_1 d\delta_1$ , 在图中以阴影面积来表示. 加载过程中所做的总功为这些微元面积之总和, 并等于载荷-变位图下边的面积. 因此, 由载荷  $P$  所作的总功等于储存在杆中的应变能  $U$ , 此功为

$$U = \frac{P\delta}{2} \quad (1-15)$$

这一方程仅当材料服从虎克定律时才成立, 在此情况下我们知道,  $P$  通过方程  $\delta = PL/EA$  与  $\delta$  相联系. 将此关系式代入方程 (1-15), 我们即可用如下任一形式来表示杆中的应变能:

$$U = \frac{P^2 L}{2EA} \quad \text{或} \quad U = \frac{EA\delta^2}{2L} \quad (1-16a, b)$$

这些方程中的第一个方程将应变能表示为载荷  $P$  的函数, 第二个将应变能表示为变位  $\delta$  的函数.

考虑单位体积的应变能  $u$  常常是有用的. 对于一根均匀拉伸的杆, 我们可用杆的体积去除总应变能  $U$  而得到  $u$ , 于是  $u = U/AL$ , 因而

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} \quad \text{或} \quad u = \frac{E\epsilon^2}{2} \quad (1-17a, b)$$

式中  $\sigma = P/A$  为拉应力, 而  $\epsilon = \delta/L$  为应变.

未超过比例极限时, 杆中所能储存的单位体积的应变能的最大值, 称为回弹模量. 将比例极限取代方程 (1-17a) 中的  $\sigma$ , 即可求得此模量. 例如, 比例极限为  $200 \text{ N/mm}^2$  和  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$

的结构钢所具有的回弹模量  $u$  等于  $0.1 \text{ N/mm}^2$ 。

以上关于杆拉伸时应变能的讨论也适用于压缩时的杆件。因为应变能等于杆受载时力  $P$  所做的功，所以应变能总是正值。

**例题 1** 试比较图 1-25 所示三根杆中所储存的应变能的大小。注意每根杆具有相同的长度并且还承受相同的载荷  $P$ 。第一根杆具有均匀的直径  $d$ ，但其它的杆在其部分长度上具有较大的直径。

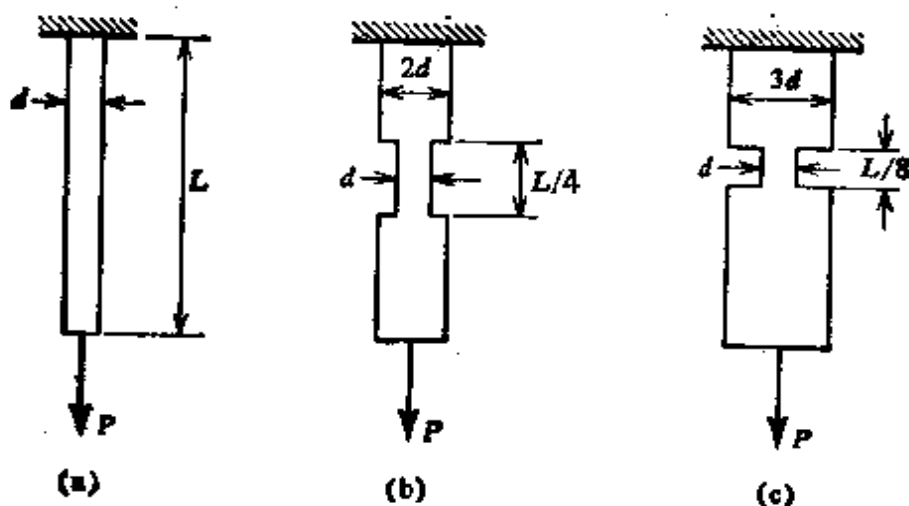


图 1-25. 例题 1.

第一根杆的应变能(根据方程 1-16a)为

$$U_1 = \frac{P^2 L}{2EA}$$

式中  $A = \pi d^2/4$ 。对于第二根杆，假如每个横截面上的应力分布是均匀的，我们求出其应变能为

$$U_2 = \frac{P^2(L/4)}{2EA} + \frac{P^2(3L/4)}{2E(4A)} = \frac{7P^2L}{16(2EA)} = \frac{7U_1}{16}$$

对于第三根杆，我们求出

$$U_3 = \frac{P^2(L/8)}{2EA} + \frac{P^2(7L/8)}{2E(9A)} = \frac{2U_1}{9}$$

这些结果的对比说明，应变能是随着杆的体积的增大而减小。因此，在具有狭槽的杆中，只要用很小量的功就能产生较高的拉应力。当载荷属于动态性质而吸收能量的能力又是很重要时，如下所述，狭槽的存在是非常有害的。自然，对于静荷，在设计中重要的是最大应力而不是吸收能量的能力。

**作用在杆上的冲击载荷** 当处理动态性质的载荷时，应变

能的概念颇为有用。此类载荷具有一定的能量，该能量必定转化为杆中的应变能，或者因杆的塑性变形而耗散。考虑图 1-26 所示的简单装置，作为冲击载荷的一个例子。一个最初处于静止状态的重物  $W$ ，从高为  $h$  处落到长为  $L$  的杆件下端  $B$  处的翼缘上。需要计算由于冲击所产生的杆的最大伸长量和最大应力。

忽略冲击过程中的能量损失，并假设下落重物所做的功都转变为杆的应变能，这样我们便能得到一个近似的解答。这个假设是保守的，因为实际上有一部分能量会耗散掉，而杆的实际伸长量将小于下面所计算的值。

撞击翼缘之后，重物  $W$  继续向下运动，使杆伸长。由于杆所提供的抗力，重物减速并很快达到静止，此时杆已经伸长了  $\delta$  值。在此瞬间，杆的伸长和相应的拉应力均为最大值。杆立刻又开始缩短，而杆和重物  $W$  的纵向振动也将接着发生。然而，

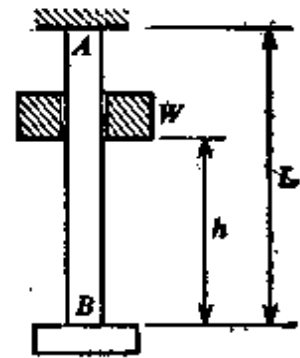


图 1-26. 杆上的冲击载荷。

我们可令下落重物所做的功  $W(h + \delta)$  等于杆的应变能，从而计算出杆的最大伸长量  $\delta$ ：

$$W(h + \delta) = \frac{EA\delta^2}{2L} \quad (a)$$

引进符号  $\delta_{st} = WL/EA$  为由载荷  $W$  使杆产生的静伸长量，解方程 (a)，我们求出

$$\delta = \delta_{st} + (\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st})^{1/2} \quad (1-18a)$$

$$= \delta_{st} + (\delta_{st}^2 + v^2\delta_{st}/g)^{1/2} \quad (1-18b)$$

式中  $v = \sqrt{2gh}$  为重物  $W$  在撞击翼缘这一瞬间的速度。这些方程表明，如果  $W$  和  $L$  都增加，或者冲击速度增大，那么伸长量就增加。它们还表明，如果杆的轴向刚度  $EA$  增大，伸长量则减小。

如果高度  $h$  与  $\delta_{st}$  相比是很大的话，就会得到简化，因为那时方程 (1-18) 简化为

$$\delta \approx (2h\delta_{st})^{1/2} = (v^2\delta_{st}/g)^{1/2} \quad (1-19)$$

假设在出现最大伸长量的一瞬间杆中拉应力的分布是均匀的，我

们便得到下列最大拉应力的近似表达式:

$$\sigma = \frac{E\delta}{L} = \frac{E}{L} (v^2 \delta_{st}/g)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Wv^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2E}{AL}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由此结果我们看出, 下落重物的动能或模量  $E$  增加, 将引起应力增大, 而棱柱杆体积  $AL$  增加, 将使应力减小. 这种情况与杆的静拉伸大不相同, 在静拉伸中应力与长度  $L$  以及弹性模量  $E$  无关.

**突加载荷** 现在让我们研究冲击时  $h=0$  的特定情况, 亦即重物  $W$  被突然地置于杆件  $B$  端处的翼缘上(图 1-26), 没有初速度. 虽然在此情况下杆开始伸长时没有动能, 但是该问题与杆承受静载荷时的问题却大不相同. 对于静拉伸我们假设载荷是逐渐作用的, 因而在所作用的载荷与杆的抗力之间总是处于平衡. 在这样的条件下, 载荷的动能问题完全不会介入到题目中来. 在载荷突加时, 杆的伸长量和杆中的应力在开始时为零, 然后, 突加载荷在其自重作用下开始下落. 在此运动过程中, 杆的抗力逐渐增加直到它恰好等于  $W$ , 那时重物的垂直位移为  $\delta_{st}$ . 但在此刻, 载

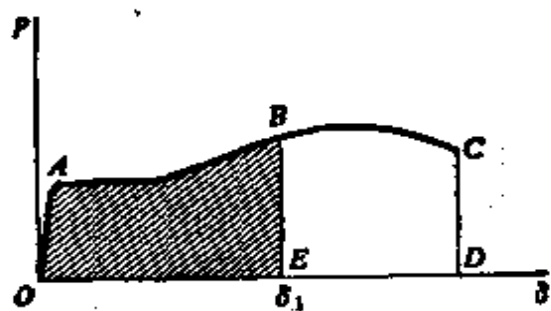


图 1-27. 杆受拉时的载荷-变位图.

荷从位移  $\delta_{st}$  中获得了一定的动能, 因此它继续向下运动, 直到它的速度因杆中的抗力而降到零为止. 在此条件下的最大伸长量可由方程 (1-18a) 令  $h=0$  而得出, 因此

$$\delta = 2\delta_{st} \quad (1-20)$$

这就是说, 突加载荷由于动态产生的变位等于静荷作用时所得变位的两倍\*

上面关于冲击的讨论是基于这样的假设, 即应力保持在比例极限之内. 超出此极限, 问题就变得更为复杂, 因为杆件的伸长量不再与拉力成正比. 假设拉伸图与杆的应变速率无关, 冲击中超过弹性极限的伸长量可根据图 1-27 所示的静载荷-变位图来确定. 对任意假设的最大伸长  $\delta_1$ , 相应的面积  $OABE$  将给出产生此伸长量所需的功. 此功必须等于重物  $W$  所产生的功  $W(h+\delta)$ .

\* 此结果是由蓬斯莱得到的(参考文献 1-15).

当  $W(h+\delta)$  等于或大于拉伸试验图的总面积  $OABCD$  时, 下落的物体将使杆断裂。在某些材料中, 包括延性的钢, 当杆的应变速率很大时, 屈服点升高, 因此产生断裂所需要的功要比静力试验的略高。

根据这一讨论可知: 杆件形状的任何改变会使载荷-变位图的总面积  $OABCD$  减小, 也使杆件对冲击的抗力减少。譬如, 在图 1-25b 和 c 所示的开槽试件中, 金属的塑性流动将集中在沟槽处, 并且总的伸长量和产生断裂所需之功将比同一图中所示的圆柱形杆小得多。这种开槽的试件在受冲击时非常脆弱。尽管材料本身可能是延性的, 但是轻微的冲击就可能产生断裂。带有铆钉孔或横截面有任何急剧变化的元件对冲击的抵抗都是同样地脆弱。由此讨论我们还看出, 为什么延性材料对冲击载荷的抗力比脆性材料大得多。对于脆性材料来说, 载荷-变位曲线下方的面积要比延性材料的小得多, 即使这两种材料的极限强度可能大致相同。

**例题 2** 有一重物  $W$  系在一根以等速度  $v$  向下移动的竖直钢索的下端。试问当钢索上端突然停住时, 钢索中所产生的最大应力是多少? 略去钢索自重。

首先我们注意, 对于图 1-26 所示系统导出的公式(1-18)不能用于本例题。理由是前例中的杆件在冲击前的一刹那未受应力, 而在本例题中, 缆索在冲击前承受了拉力  $W$ 。让我们假设在冲击过程中没有能量损失, 因而冲击前该系统的总能量(动能加势能)等于冲击后缆索的最大伸长量为  $\delta$  时的总能量。

冲击前, 此运动着的重物的动能为  $Wv^2/2g$ , 而它相对于其最低位置的势能为  $W(\delta-\delta_{st})$ , 这里  $\delta_{st}$  为缆索由于重物而产生的静态伸长量。注意  $\delta_{st} = WL/EA$ , 这里  $L$  为缆索的长度,  $EA$  为其轴向刚度。冲击前缆索中的应变能为  $EA\delta_{st}^2/2L$ 。冲击后, 在缆索具有最大伸长量的瞬时, 缆索的应变能为  $EA\delta^2/2L$ , 令冲击前后的能量相等, 我们得到

$$\frac{Wv^2}{2g} + W(\delta - \delta_{st}) + \frac{EA\delta_{st}^2}{2L} = \frac{EA\delta^2}{2L}$$

引进关系式  $W = EA\delta_{st}/L$  后, 我们从上式得到

$$\frac{Wv^2}{2g} = \frac{EA}{2L}(\delta - \delta_{st})^2$$

最后, 得到总伸长为

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\frac{Wv^2L}{gEA}}$$

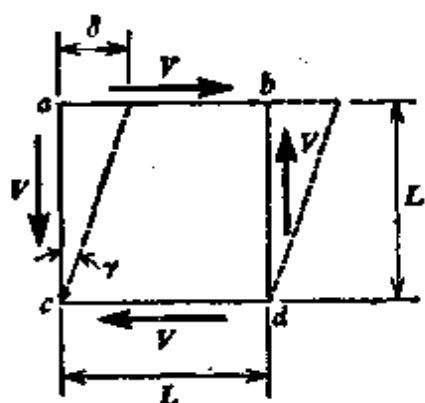
而缆索中的最大应力为

$$\sigma = \frac{E\delta}{L} = \frac{W}{A} \left[ 1 + \sqrt{\frac{v^2 EA}{gWL}} \right] \quad (b)$$

此式中的最后一项与缆索的性质和初速度  $v$  有关, 可能要比 1 大许多倍, 因此, 缆索中的动应力可能比静应力  $W/A$  大得多。

与落体  $W$  的质量相比, 上述对弹性冲击的讨论, 略去了竖直杆或缆索的质量, 并且还假设杆的整个长度内拉应力总是均匀的。更完善的解应计入杆的质量和纵向应力波的影响(见参考文献 1-16 和 1-17)。

**纯剪中的应变能** 在一个四边作用着剪力  $V$  的立方体中(图 1-28) 所储存的应变能, 可以使用简单拉伸时所用的方法予以计算。在材料变形的过程中, 当剪力从零逐渐增大到它的终值  $V$  时, 顶面  $ab$  相对于底面  $cd$  沿水平方向移动了距离  $\delta$ 。假设材料服从虎克定律, 剪应变  $\gamma = \delta/L$  与剪应力  $\tau = V/A$  成正比, 这里



$A$  为方块顶面的面积。其载荷-变位图 ( $V-\delta$  关系) 与图 1-24b 中所示受拉杆的图形相类似。由剪力  $V$  所作的并以弹性应变能的形式储存起来的功为

$$U = \frac{V\delta}{2} \quad (1-21)$$

图 1-28. 纯剪时的应变能。回忆  $\gamma = \delta/L$ ,  $\tau = V/A$ , 并使用剪切虎克定律 ( $\tau = G\gamma$ ), 我们看到  $\delta = VL/GA$ 。将这些结果与方程 (1-21) 联合, 我们得到下列应变能的两个方程:

$$U = \frac{V^2 L}{2GA} \quad \text{或} \quad U = \frac{GA\delta^2}{2L} \quad (1-22a, b)$$

我们用方块的体积  $AL$  去除这两个方程, 就得到单位体积剪切应变能的两种表达式:

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \quad \text{或} \quad u = \frac{G\gamma^2}{2} \quad (1-23a, b)$$

在后面第三章中将用这些表达式来求受扭杆的应变能。



## 习 题

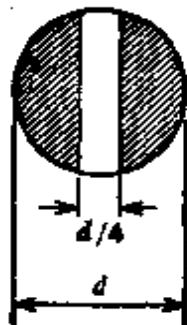
**1.2-1** 用静力学证明: 棱柱形杆在受拉时(图 1-1a), 若横截面上的应力为均匀分布, 则其合力的作用线将通过截面的形心。(提示: 假设该杆的横截面为任意形状, 在横截面所在的平面上选择一对坐标轴, 然后得出合力作用点的坐标表达式。)

**1.2-2** 一截面为矩形(25 mm × 50 mm)、长为  $L=3.5$  m 的棱柱形杆, 承受 90 kN 的轴向拉力, 观测得到该杆伸长了 1 mm, 试计算该杆的拉应力和拉应变。

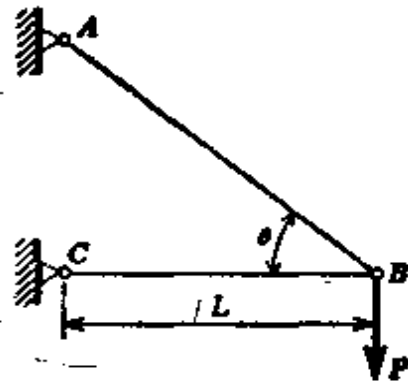
**1.3-1** 一根长线在其自重作用下竖直悬挂着。试问使它不会拉断的最大长度是多少? 假设它由 (a) 极限应力为  $2 \text{ kN/mm}^2$  的钢; (b) 极限应力为  $350 \text{ N/mm}^2$  的铝所制成(注意: 钢的单位体积重量为  $77 \text{ kN/mm}^3$ , 铝的为  $27 \text{ kN/mm}^3$ )。

**1.3-2** 一段短钢管( $\sigma_y=270 \text{ N/mm}^2$ ), 承受着 1 MN 的压缩载荷, 其抗屈服的安全系数为 1.8, 若钢管的厚度是它的外径的  $1/8$ , 试求所需的最小外径  $d$ 。

**1.3-3** 一圆形截面实心杆(直径  $d=40$  mm), 从侧向钻有一穿过杆中心的小孔, 孔的直径是  $d/4$ 。假设在该孔处杆的净截面上(见图)的容许拉应力为  $\sigma_w=70 \text{ N/mm}^2$ 。试求杆在受拉时所能承受的容许载荷  $P$ 。



习题 1.3-3

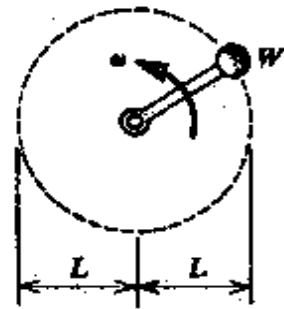


习题 1.3-4 和 1.5-14

**1.3-4**  $AB$  和  $BC$  两杆(见图)承受一竖直载荷  $P$ 。这两杆系由同一种材料制成, 且水平杆  $BC$  的长度  $L$  保持不变。然而, 角  $\theta$  随点  $A$  沿竖直方向的移动而变化,  $AB$  杆的长度随  $A$  点新位置而改变。假设容许应力在拉伸和压缩时是一样的, 并假设这两根杆充分受力达到容许应力值。试求该结构具有最小重量时的  $\theta$  角。

**1.3-5** 一重物  $W$  连在一细长臂上(长为  $L$ ), 此臂在光滑的水平面上

绕竖直枢轴旋转(见图)。臂和重物以匀角速度  $\omega$  转动, 略去臂的重量, 试导出该臂所需要的横截面积的公式, 假设容许应力为  $\sigma_w$ 。



1.3-6 试解上题, 假如考虑臂的重量(假设  $\gamma$  是臂的材料的单位体积重量)。

1.4-1 一直径为 50 mm 的钢制螺栓 ( $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>), 必须承受 260 kN 的拉伸载荷。如果螺栓受力部分的初始长度为 550 mm, 试问它的最后长度为多少?

1.4-2 一圆钢杆 ( $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>), 长 6m, 需要承受 7 kN 的拉伸载荷。如果杆的容许应力为 120 N/mm<sup>2</sup>, 且其端点的容许变位为 2.5 mm, 试问该杆所需的最小直径为多少?

习题 1.3-5, 1.3-6 和 1.5-7

1.4-3 一用钢管制成的拉伸元件 ( $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>,  $\nu=0.30$ ), 其外径为 90 mm, 横截面积为 1400 mm<sup>2</sup>。试问轴向力  $P$  为何值才能使直径减少 0.0129 mm?

1.4-4 一直径为 60 mm 的实心圆杆, 受到 200 kN 的轴向力压缩。(a) 假设  $E=86$  kN/mm<sup>2</sup>,  $\nu=0.30$ , 试求该杆的直径的增量  $\Delta d$ ; (b) 试求该杆的体积增量, 假设杆长为 380 mm。

1.5-1 一等截面杆受载如图 1-7 所示, 杆的横截面积为  $A$ , 弹性模量为  $E$ 。试求杆下端的变位  $\delta$  的公式, 且问该杆是伸长了还是缩短了?

1.5-2 图 1-8 所示的短柱承受载荷  $P_1=580$  kN,  $P_2=660$  kN。其上面部分的长度  $a=0.6$  m, 截面为方形, 每边长为 70 mm; 下面部分的长度  $b=0.7$  m, 截面也为方形, 每边长 120 mm。假设  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>, 试求: (a) 短柱顶面的变位; (b) 上面部分的轴向应变和下面部分的轴向应变之比值。

1.5-3 一具有圆形截面的钢杆长 3 m, 其一半长度上直径为  $d_1=20$  mm, 另一半长度上直径为  $d_2=12$  mm。(a) 试问此杆在  $P=20$  kN 的拉伸载荷作用下杆的伸长量为多少? (b) 若把同样体积的材料轧制成长为 3 m, 直径  $d$  为常数的杆件, 试问在同样载荷  $P$  作用下杆的伸长量为多少? (假设  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>)。

1.5-4 试导出长为  $L$ , 横截面积为  $A$  的棱柱形杆在其自重作用下竖直悬挂时总伸长量的公式(假设  $W$  为杆的总重量)。

1.5-5 一均匀钢杆置于水平面上时长为 5 m, 试确定当其一端竖直悬挂时, 它的伸长值。(假设  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>, 单位体积的重量  $\gamma=80$  kN/m<sup>3</sup>。)

1.5-6 试确定竖直悬挂的棱柱形杆在其自重作用下体积的增量  $\Delta V$ 。(假设杆的总重量为  $W$ , 杆长为  $L$ , 泊松比为  $\nu$ , 弹性模量为  $E$ 。)

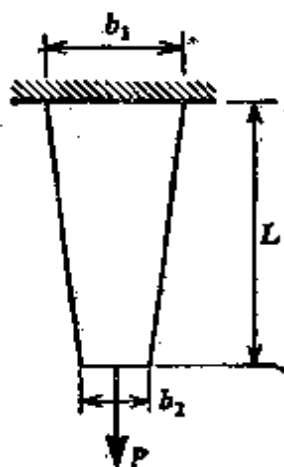
**1.5-7** 一长  $L$  的杆, 在水平面内绕竖直轴以角速度  $\omega$  转动(见习题 1.3-5 中的图), 杆的横截面积为  $A$ , 重量为  $W_1$ . 一重物  $W$  连在杆端, 试求由于离心力的作用, 杆所产生的总伸长量  $\delta$ .

**1.5-8** 一截面为矩形且厚度  $t$  为常数的锥形杆, 其上作用有力  $P$ , 如图所示. 杆的宽度在固定端处为  $b_1$ , 按线性变化至自由端处为  $b_2$ . 试导出由于  $P$  力作用, 杆所产生的伸长量  $\delta$  的公式.

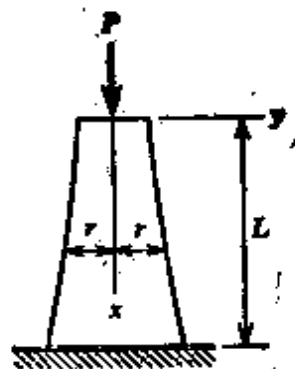
**1.5-9** 试导出上一习题中杆的体积增量  $\Delta V$  的公式.

**1.5-10** 一长为  $L=3\text{ m}$  的圆截面锥形钢杆 ( $E=200\text{ kN/mm}^2$ ), 承受拉伸载荷  $P=45\text{ kN}$ , 杆的较大端直径为  $d_1=50\text{ mm}$ , 较小端直径为  $d_2=25\text{ mm}$ . 试问由于  $P$  力的作用, 杆的伸长量为多少?

**1.5-11** 试导出圆截面柱状物的体积为最小时其半径  $r$  的方程(见图). 柱状物承受着加在其顶上的压力  $P$  和自身的重量, 它自身材料的单位体积重量为  $\gamma$ , 容许压缩应力为  $\sigma_w$ . 另外, 还要确定柱状物上、下端的横截面积和它的体积. (提示: 考虑一个长为  $dx$  的微段. 因为应力在所有横截面上必须相同, 且等于  $\sigma_w$ , 该微段上、下两个截面的面积之差  $dA$  必须补偿其压力差, 此压力差等于微段自身的重量. 于是,  $\sigma_w dA = \gamma A dx$ , 即  $dA/A = \gamma dx/\sigma_w$ , 将此方程的两边进行积分, 即可导出其解.)



习题 1.5-8 和 1.5-9

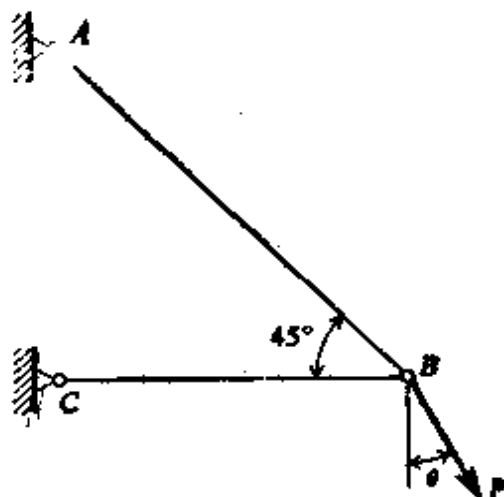


习题 1.5-11

**1.5-12** 试确定图 1-10a 所示桁架中节点  $B$  位移的水平分量和垂直分量. 假设元件  $AB$  是直径为  $3\text{ mm}$ , 长为  $0.9\text{ m}$  的钢丝 ( $E_s=200\text{ kN/mm}^2$ ); 元件  $BC$  是长为  $1.5\text{ m}$ , 截面边长为  $25\text{ mm}$  的正方形木制支柱 ( $E_w=10\text{ kN/mm}^2$ ), 力  $P=2\text{ kN}$ .

**1.5-13** 图中所示桁架  $ABC$ , 在节点  $B$  处承一力  $P$ , 其作用线与铅垂线成  $\theta$  角. 元件  $AB$  和  $BC$  的横截面积分别为  $A_1$  和  $A_2$ . 试求使节点  $B$  的变位与力  $P$  的方向相同时的  $\theta$  角.

**1.5-14** 习题 1.3-4 中图示的桁架  $ABC$ , 是由长  $L$ , 横截面积为  $2500 \text{ mm}^2$  的水平钢杆  $BC$  和截面面积为  $312.5 \text{ mm}^2$  的钢连杆  $AB$  所构成. 其角度  $\theta$  可通过改变钢连杆的长度和支点  $A$  的竖直位置(长度  $L$  不变)调到所需要的值. 试确定在载荷  $P$  的作用下, 使节点  $B$  的竖直变位为最小时的  $\theta$  角.



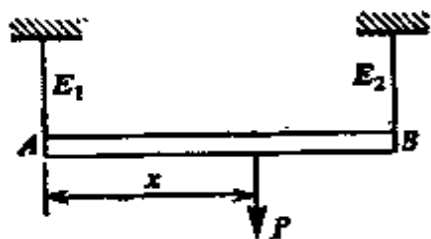
习题 1.5-13

**1.6-1** 试求图 1-11a 所示的静不定杆的反力  $R_a$  和  $R_b$ , 取  $R_a$  作为多余力.

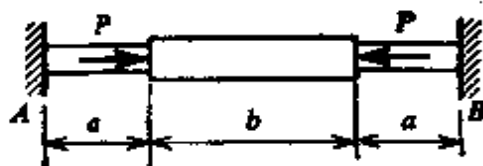
**1.6-2** 一钢筋混凝土方柱, 受到轴向力  $P$  的压缩, 假如钢筋的横截面积是混凝土截面积的  $1/10$ , 而钢的弹性模量是混凝土的  $10$  倍, 试问混凝土能承受多大的载荷?

**1.6-3** 一长为  $L$  的  $AB$  杆, 在它的两端用两根竖直的悬线将其水平地悬挂着(见图). 这两根悬线具有相同的长度和相同的横截面积, 但  $A$  端的悬线是用弹性模量为  $E_1$  的材料制成的,  $B$  端悬线的弹性模量为  $E_2$ . 略去  $AB$  杆的自重, 试导出欲使该杆保持水平, 在杆上应施加的竖直载荷  $P$  作用点的距离  $x$  ( $x$  自  $A$  端计量).

**1.6-4** 一杆  $AB$ , 其横截面积在每端缩小如图所示. 杆两端为刚性固定连接, 其上作用有一对大小相等、方向相反的轴向力  $P$ . 试确定杆中点处的应力, 假设  $A_1 =$  靠近两端部分的横截面积,  $A_2 =$  杆中间部分的横截面积. (使用下列数据:  $P = 21 \text{ kN}$ ,  $A_1 = 500 \text{ mm}^2$ ,  $A_2 = 750 \text{ mm}^2$ ,  $b = 3a = 375 \text{ mm}$ ).



习题 1.6-3



习题 1.6-4

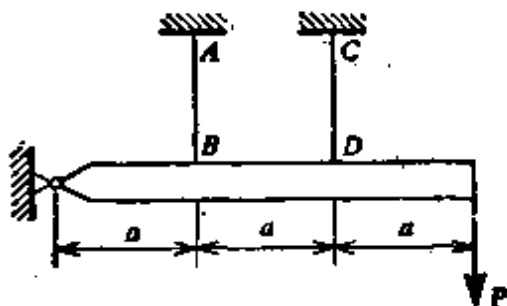
**1.6-5** 一方柱由  $25 \text{ mm}$  厚的金属箱所构成, 其外部尺寸为  $250 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$ , 内部尺寸为  $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ , 其中间以混凝土填充. 该箱的弹性模量为  $E_1 = 84 \text{ kN/mm}^2$ , 混凝土芯的弹性模量为  $E_2 = 14 \text{ kN/mm}^2$ . 试求作用在柱上的最大载荷. 假设金属和混凝土的容许应力分别为  $40 \text{ N/mm}^2$  和  $6 \text{ N/mm}^2$ .

**1.6-6** 一方形截面杆是由两根不同材料的杆所构成，其弹性模量分别为  $E_1$  和  $E_2$  (见图)，两杆具有相同的截面尺寸。假设其端板为刚性的，试导出两根杆都均匀受拉时，载荷  $P$  的偏心距  $e$  的公式 (注意：假设  $E_1 > E_2$ )。

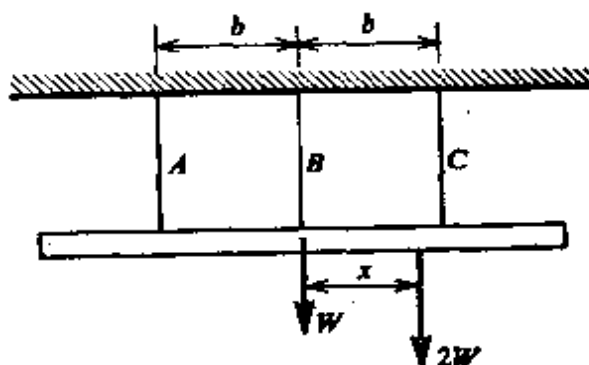


习题 1.6-6

**1.6-7** 试求两根相同悬线  $AB$  和  $BC$  中的应力 (见图)。假设每根线的横截面积为  $A$ ，且水平杆是刚性的。(假设  $P=200\text{ kN}$ ， $A=1800\text{ mm}^2$ 。)



习题 1.6-7

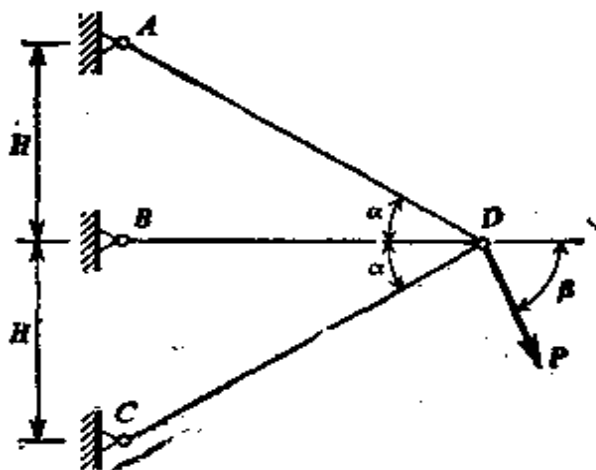


习题 1.6-8

**1.6-8** 三根相同的悬线  $A$ 、 $B$  和  $C$  悬挂住一刚性块体 (其重量 =  $W$ )，在距块体中间为  $x$  处，作用一载荷  $2W$ ，如图所示。试用图解表明三根线中的力  $F_a$ 、 $F_b$  和  $F_c$  是如何作为  $x$  的函数而变化的 (假设  $x$  总为正值，且可从零变化到大于  $b$  的值)。

**1.6-9** 三根具有相同轴向刚度  $EA$  的杆  $AD$ 、 $BD$  和  $CD$  构成图中所示的桁架。试确定由于载荷  $P$  的作用，三杆中的力和节点  $D$  的变位的水平分量和垂直分量。假设  $\beta=90^\circ$ 。

**1.6-10** 试解上题。假设  $\beta=\alpha=45^\circ$ 。



习题 1.6-9 和 1.6-10

**1.7-1** 一铝管处于温度  $21^\circ\text{C}$  下，长为  $36\text{ m}$ 。一钢与其相邻近的钢管在同样的温度下比铝管长  $6\text{ mm}$ 。试问在什么温度下，这两根管在长度上的差为  $12\text{ mm}$ ? (假设铝的  $\alpha=22 \times 10^{-6}$ )

$10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ , 钢的  $\alpha=12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ .)

**1.7-2** 铁路上的钢轨在温度为  $10^{\circ}\text{C}$  时焊接在一起. 试问若  $\alpha=11.7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ,  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ , 由于太阳辐射, 当温度升高到  $49^{\circ}\text{C}$  时, 在钢轨上将产生多大的应力?

**1.7-3** 图 1-17a 所示的两端固定杆, 如果不是温度的变化  $\Delta T$ , 而是以初始长度  $L + \Delta L$  代替  $L$ , 试问杆中的反力  $R$  为多少? (假设两支座间的距离是  $L$ .)

**1.7-4** 试问习题 1.6-4 中杆应降低多少温度  $\Delta T$ , 才能使杆中间处的应力为零? (假设  $\alpha=26.1 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ,  $E=40 \text{ kN/mm}^2$ .)

**1.7-5** 参考图 1-15a 所示的系统, 试导出使全部载荷  $P$  都由铜管承受时, 所需增加的温度  $\Delta T$  的公式 (令  $\alpha_s, \alpha_c, E_s, E_c$  和  $A_s, A_c$  分别表示钢和铜的热膨胀系数、弹性模量和横截面面积).

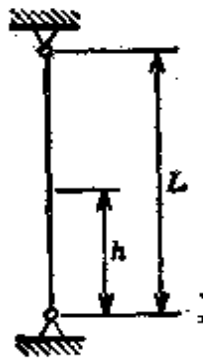
**1.7-6** 试求习题 1.6-7 图中所示  $AB$  和  $BC$  两钢丝中的应力. 假设  $P=200 \text{ kN}$ ,  $A=1800 \text{ mm}^2$ ,  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\alpha=11.7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ; 且两钢丝上的温度皆增加了  $33^{\circ}\text{C}$ .

**1.7-7** 三根平行且相邻的钢杆 ( $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ) 联结在一起共同承受拉伸载荷  $P=1 \text{ MN}$ , 每根杆的横截面积为  $3900 \text{ mm}^2$ , 长度为  $6 \text{ m}$ . 若中间的杆意外地比其它两杆短了  $0.76 \text{ mm}$ , 试问当载荷作用上去时, 中间杆的最终应力  $\sigma$  为多少? (假设载荷作用时, 诸杆的杆端被拉伸对齐.)

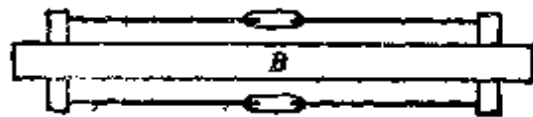
**1.7-8** 一竖直缆索 (见图) 预加到  $4.5 \text{ kN}$  的初拉力, 接着在距离基面  $h$  处缆索上悬挂一个  $6.75 \text{ kN}$  的重物. 试研究当  $h$  从  $0$  变化到  $L$  时缆索中的力. 假设缆索不能承受压力.

**1.7-9** 试求图 1-13a 所示的桁架中的杆力  $F_1$  和  $F_2$ . 假设桁架的温度均匀地增加了  $\Delta T$  (假设所有杆的轴向刚度皆为  $EA$  且  $P=0$ ).

**1.7-10** 图中所示的杆  $B$  长  $L$ , 弹性模量为  $E$ , 横截面积为  $A$ . 有两根装有紧线器的缆索, 连到穿过杆端的大销钉上, 每根缆索长  $L$ , 弹性模量为



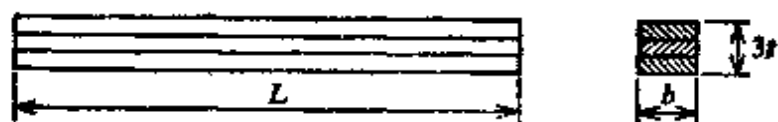
习题 1.7-8



习题 1.7-10

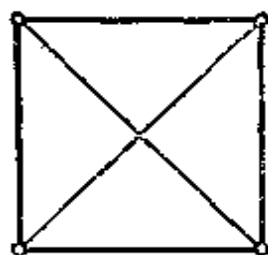
$E_c$ , 横截面积为  $A_c$ , 双作用紧线器的螺距是  $p$ . 试导出当杆  $B$  的预应力达到均匀应力  $\sigma_0$  时, 每一紧线器所需要的转数  $n$  的公式.

**1.7-11** 一双金属杆是由一根铜芯和两块钢条胶接而成(见图), 它被均匀加热  $T$  度. 假设杆宽为  $b$ , 长为  $L$ , 每一层的厚度为  $t$ . 试确定钢和铜中的应力, 同时画出三层中每一层的自由体图(注意: 钢和铜的热膨胀系数分别为  $\alpha_s$  和  $\alpha_c$ , 且  $\alpha_s > \alpha_c$ ; 它们的弹性模量为  $E_s$  和  $E_c$ ).

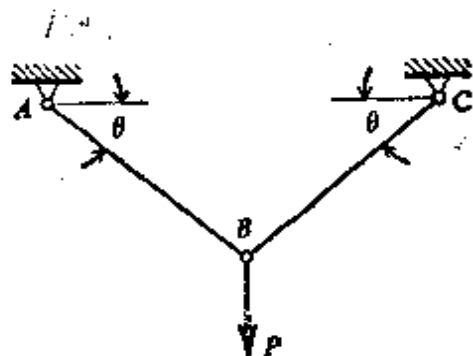
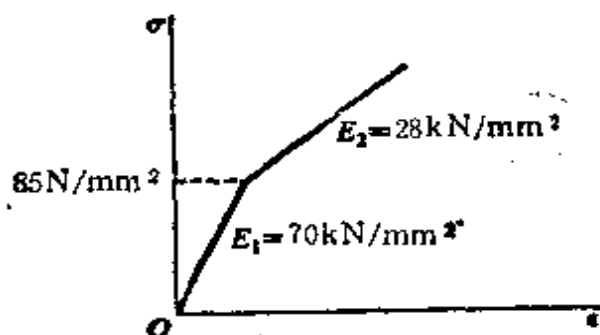


习题 1.7-11

**1.7-12** 图中所示的方形刚架的外框由铝制成 ( $E_a = 70 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\alpha_a = 21.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ), 其对角线上为钢丝 ( $E_s = 200 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ), 铝杆和钢线的横截面积之比为 20:1, 若刚架的温度升高了  $45^\circ\text{C}$ . 试求钢线中的应力.



习题 1.7-12



习题 1.8-1

**1.8-1** 两根相同的杆  $AB$  和  $BC$ (见图)支承着一竖直载荷  $P$ . 杆的材料的应力-应变曲线可近似地用两根直线来表示, 如图中上面部分所示. 每根杆的横截面积为  $A = 1300 \text{ mm}^2$ , 杆长  $L = 3.9 \text{ m}$ ,  $\theta$  角为  $30^\circ$ . 试求对应下列每种载荷值节点  $B$  的竖直变位  $\delta_b$ :  $P = 35 \text{ kN}$ ,  $70 \text{ kN}$ ,  $105 \text{ kN}$ ,  $140 \text{ kN}$  及  $175 \text{ kN}$ . 根据这些结果绘出表明  $P$  和  $\delta_b$  的关系图.

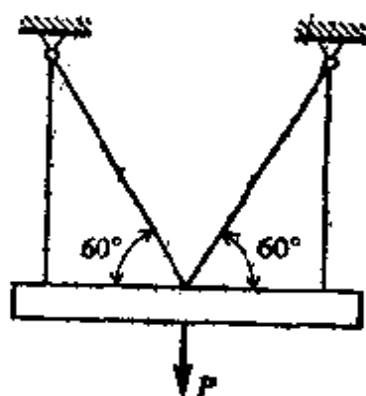
**1.8-2** 假设上题图中所示的桁架  $ABC$  由方程  $\sigma^n = B\epsilon$  给出的应力-应变关系材料所构成, 方程中  $B$  和  $n$  皆为常数. 试导出用参数  $P$ 、 $A$ 、 $L$ 、 $\theta$ 、 $B$  和  $n$  表示的节点  $B$  的变位  $\delta_B$  的方程.

**1.8-3** 简单桁架  $ABC$  (见图 1-10a) 承受载荷  $P=124 \text{ kN}$ , 假设杆的材料应力-应变图已在习题 1.8-1 给出 (对于拉伸和压缩都有同样的图形).  $AB$  杆和  $BC$  杆的横截面积分别为  $1000 \text{ mm}^2$  和  $2250 \text{ mm}^2$ ; 其长度分别为  $0.9 \text{ m}$  和  $1.5 \text{ m}$ . 试确定桁架节点  $B$  的变位的水平分量和竖直分量.

**1.8-4** 试求上端悬挂的竖直杆, 因自重而产生的伸长量  $\delta$ . 假设材料的应力-应变关系为  $\sigma^n = B\epsilon$ , 式中,  $B$  和  $n$  皆为常数 (将  $\delta$  表为杆长  $L$ 、材料的单位体积重量  $\gamma$  以及  $B$  和  $n$  的函数).

**1.8-5** 一上端悬挂的竖直长杆, 在下端作用有载荷  $P$ , 杆的材料具有习题 1.8-1 给出的应力-应变曲线. 试求杆在自重和力  $P$  的共同作用下而产生的伸长量. 假设  $\gamma=60 \text{ kN/m}^3$ ,  $A=960 \text{ mm}^2$ ,  $L=370 \text{ m}$ ,  $P=64 \text{ kN}$ .

**1.8-6** 载荷  $P$  由一刚性块体承受, 该块体由四根对称排列的钢丝悬挂着, 如图所示. 每根钢丝的横截面积为  $A$ , 是由弹-塑性材料制成. 试求其极限载荷  $P_u$ .

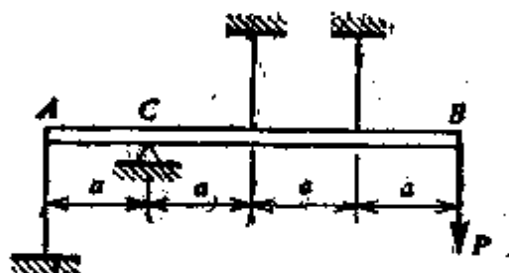


习题 1.8-6

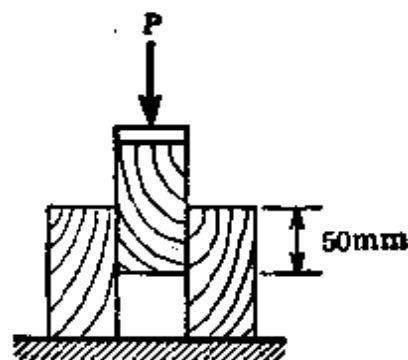
**1.8-7** 试求图 1-19a 所示的桁架的极限载荷  $P_u$ . 假如材料是弹-塑性的, 竖直线横截面积是斜线截面积的两倍. 假设  $\sigma_y=250 \text{ N/mm}^2$ ,  $\beta=60^\circ$  且竖直线横截面积为  $1200 \text{ mm}^2$ .

**1.8-8** 参见图 1-10a 所示的桁架  $ABC$ , 假设设计时它能承受极限载荷  $P_u=90 \text{ kN}$ . 试求元件  $AB$  和  $BC$  所需的最小横截面积. 假若材料是弹-塑性的, 其屈服应力为  $\sigma_y=230 \text{ N/mm}^2$  (假设  $\theta=30^\circ$ ).

**1.8-9** 刚性杆  $AB$  支于支点  $C$  处, 在端部  $B$  作用有载荷  $P$  (见图), 三根由弹-塑性材料制成的同样的钢丝拉住钢杆. 试求屈服载荷  $P_y$  和极限



习题 1.8-9



习题 1.8-1



载荷  $P_0$ 。假设所有钢丝都有相同的横截面积  $A$ 。

**1.9-1** 三块木头胶合在一起,其排列如图所示,每个木块具有相同的横截面(见图),在垂直图面方向上长度为  $200\text{ mm}$ 。如果载荷  $P$  等于  $90\text{ kN}$ ,试问在胶合连接处的平均剪应力是多少?

**1.9-2** 试求图 1-22a 所示连接中螺栓所需的直径。假如  $P=36\text{ kN}$ ,螺栓的容许剪应力  $\tau_w=90\text{ N/mm}^2$ 。

**1.9-3** 一直径为  $20\text{ mm}$  的冲头,在  $6\text{ mm}$  厚的钢板上,以  $120\text{ kN}$  的力冲孔。试求板中平均正向剪应力和冲头上的平均压应力。

**1.9-4** 两根轴(直径为  $24\text{ mm}$ )位于同一条线上,在其头尾衔接处用套筒连接起来,套筒套在连接端。套筒用一个直径  $6\text{ mm}$  的销钉和每根杆相连接,销钉沿着与轴线的垂直方向穿过套筒和轴。如果由轴传递的扭矩为  $34\text{ N}\cdot\text{m}$ ,试问销钉中的剪应力是多大?

**1.9-5** 一根实心圆形铝杆套在和它有相同长度的铜管内。铜管的外径为  $50\text{ mm}$ ,内径为  $46\text{ mm}$ 。而铝杆的直径为  $44\text{ mm}$ 。在组件的每一端,都有一个直径为  $6\text{ mm}$  的金属销钉,沿垂直于杆轴的方向穿过铝杆和铜管。假若温度升高了  $22^\circ\text{C}$ ,试求销钉上的平均剪应力。(对于铝,  $E=70\text{ kN/mm}^2$ ,  $\alpha=21.6\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ;对于铜,  $E=100\text{ kN/mm}^2$ ,  $\alpha=16.7\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 。)

**1.10-1** 一棱柱形钢杆长  $250\text{ mm}$ ,承受  $P=26\text{ kN}$  的压力。假设  $E=200\text{ kN/mm}^2$ ,若杆的横截面积  $A_1=2600\text{ mm}^2$  和  $A_2=1300\text{ mm}^2$ ,试计算杆中所储存的应变能。

**1.10-2** 试确定图 1-7 所示的杆内的应变能。假设横截面积为  $A$ ,弹性模量为  $E$ 。

**1.10-3** 试确定在自重作用下竖直悬挂的棱柱杆中的应变能。假设  $L$  = 杆的长度,  $A$  = 横截面积,  $E$  = 弹性模量,  $\gamma$  = 杆单位体积的重量。

**1.10-4** 在上题中,若除了杆的自重外,在其下端还作用有轴向载荷  $P$ ,试确定杆中的应变能。

**1.10-5** 试求习题 1.5-7 中旋转杆中所储存的应变能。假设  $W=0$ 。

**1.10-6** 使锥形杆中储存的应变能  $U$  等于载荷  $P$  所做的功  $P\delta/2$ ,来求解习题 1.5-8。

**1.10-7** 一重物  $W$  连接于长  $L$ ,横截面积为  $A$  的柔性线的一端,线的另一端连接到固定支座上。然后重物自支座高度处往下落,并在线的整个长度上自由地降落。假设线使落体停止时发生弹性伸长,并且线的长度与其伸长量相比要长得多,试导出线中最大应力  $\sigma$  的公式。

**1.10-8** 一重物  $W=4.5\text{ kN}$ ,自高度  $h=1\text{ m}$  处下落到长为  $6\text{ m}$  直径为  $300\text{ mm}$  的竖直木柱上,假设柱的下端是固定的,试确定柱中的最大压缩

应力  $\sigma$ , 假设  $E=10 \text{ kN/mm}^2$ . (略去柱的自重和冲击时能量损失, 并假设  $\delta_{st}$  和  $h$  相比是很小的.)

**1.10-9** 对于图 1-26 所示的系统, 试确定为使杆中产生最大应力  $\sigma = 200 \text{ N/mm}^2$  重物下落所经过的高度  $h$ . 假设  $W=100 \text{ N}$ ,  $L=2 \text{ m}$ ,  $A=320 \text{ mm}^2$  和  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ .

**1.10-10** 参考第 1.10 节中的例 2. 假设有一弹簧常数为  $k$  (单位长度上的力) 的弹簧, 置于缆索和重物  $W$  之间. 试推导缆索在这新条件下的最大应力公式, 并和方程 (b) 进行比较. 试问有了弹簧后应力是增加了还是减少了?

## 第二章 应力和应变分析

### 2.1 斜面上的应力

如前面第 1.2 节中所述,当一根棱柱形杆承受简单拉伸时(图 2-1a),在垂直于杆轴的横截面  $mn$  上的应力是均匀分布的,并等于  $P/A$ 。现在,让我们研究通过杆件与横截面  $mn$  成  $\theta$  角所切的斜面  $pq$  上的应力。因为所有纵向纤维具有相同的轴向应变,所以代表杆的右边部分对左边部分的作用的力必定在斜截面  $pq$  上均匀分布。杆的左边部分在这些力和外载荷  $P$  的作用下处于平衡(图 2-1b)。因此,分布于斜截面上各力的合力  $S$  等于  $P$ 。力  $S$  可以

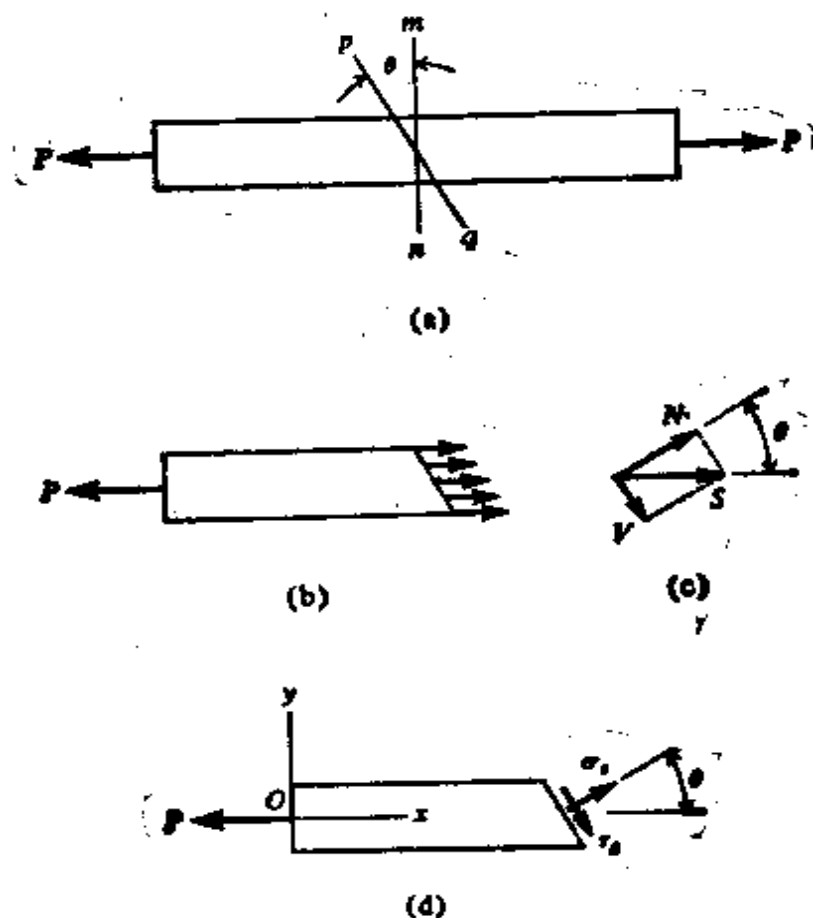


图 2-1. 受拉杆斜面上的应力。

分解为两个分力,  $N$  和  $V$ , 它们分别垂直于和切于该斜面(图 2-1c), 这些分力为

$$N = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta$$

因为斜截面的面积  $A'$  为  $A/\cos \theta$ , 所以相应于  $N$  和  $V$  的应力分别为

$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta \quad (2-1a)$$

$$\tau_{\theta} = \frac{V}{A'} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta \quad (2-1b)$$

其中  $\sigma_x = \frac{P}{A}$  为垂直于杆轴的横截面上沿  $x$  方向的应力。应力  $\sigma_{\theta}$  和  $\tau_{\theta}$  分别为斜截面  $pq$  上的正应力和剪应力(见图 2-1d), 它们在整个截面上均匀分布。注意, 斜面的方位是由  $x$  轴到该平面的法线所度量的  $\theta$  角来确定的。

方程 (2-1a) 表明了当斜截面以各种不同角度切割时正应力  $\sigma_{\theta}$  是怎样变化的。如同所料, 当  $\theta=0$ , 平面  $pq$  与横截面  $mn$  相吻合, 而且我们有  $\sigma_{\theta} = \sigma_x$ 。而后随着  $\theta$  增大, 应力  $\sigma_{\theta}$  减小, 直到  $\theta = \pi/2$  时它变为零, 这表明杆的纵向纤维之间没有正应力。因此, 我们看出正应力的最大值发生在  $\theta=0$  时, 并为

$$\sigma_{\max} = \sigma_x \quad (2-2)$$

从方程 (2-1b) 我们看出, 当  $\theta=0$  及  $\theta=\pi/2$  时, 剪应力  $\tau_{\theta}$  为零, 并且当  $\theta=\pi/4$  时, 它达到最大值。这个最大值为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (2-3)$$

虽然最大剪应力为最大正应力之半, 但如果材料的抗剪能力比抗拉能力弱得多, 它有时就是轴向受载杆的控制应力。例如, 在具有磨光表面的低碳钢扁平杆件拉伸试验时, 在杆的平面上出现与杆轴近似成  $45^\circ$  的可见滑移带(图 2-2a)。这些滑移带表明了材料正沿着剪应力最大的平面上发生剪切破坏。这些滑移带是 G·皮奥贝特(Piobert)于 1842 年和 W·吕德斯(Lüders)于 1860 年首先观察到的(见参考文献 2-1 至 2-4), 现在它们被称为吕德



图 2-2. (a) 承受轴向拉伸的钢杆中的滑移带 (或吕德斯带);  
(b) 受压木块的破坏。

斯带或皮奥贝特带。当杆中应力到达屈服应力时 (图 1-2a 中的 B 点) 它们开始出现。另一个剪切破坏的例子见图 2-2b, 该图表示一个受到轴向压缩的短木块沿  $45^\circ$  平面剪切破坏的情况。

对于受拉杆所导出的方程 (2-1), 当给于  $\sigma_n$  一负值时, 也可用于轴向压缩。于是对于在  $0$  和  $\frac{\pi}{2}$  之间的所有  $\theta$  值, 我们均得到负的  $\sigma_n$  和  $\tau_n$  值。  $\sigma_n$  的负号意味着正应力为压应力。而  $\tau_n$  的负号意味着它作用的方向与图 2-1d 中所表示的相反。图 2-3 指出了正应力和剪应力两者的符号约定。不论表面的方位如何, 正的正应力  $\sigma_n$  是背离材料表面作用的; 负的正应力是朝向表面作用的。当剪应力  $\tau_n$  关于材料表面顺时针方向作用时它们为正, 而逆时针方向作用时为负。

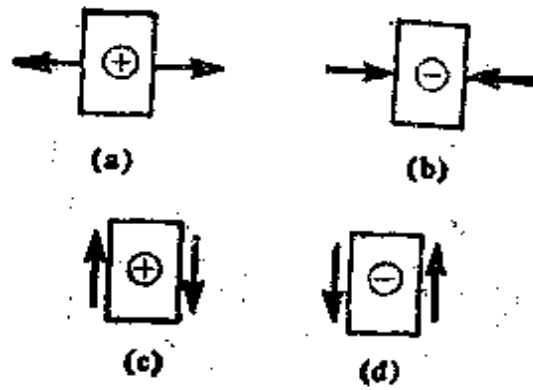


图 2-3. 正应力  $\sigma_x$  和剪应力  $\tau_{xy}$  的符号约定。

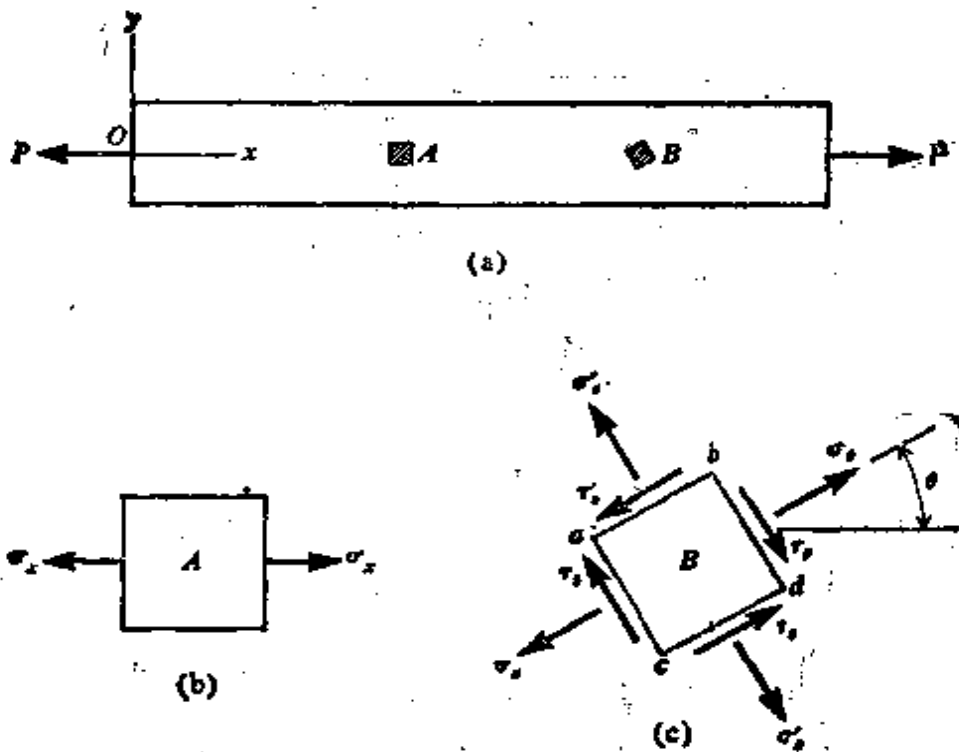


图 2-4. 作用在从受拉杆中切出的微元  $A$  和  $B$  上的应力。

表示杆中某点应力的简便方法是取出一个微小的材料单元作为自由体，然后画出该微元各边上的应力。例如，从拉杆中切出两个微元  $A$  和  $B$  示于图 2-4 中。  $A$  处微元所取方位使  $\theta=0$ ，因此，作用于其上仅有的应力为  $\sigma_x = P/A$ 。第二个微元旋转了  $\theta$  角，因此在微元的  $bd$  边上为由方程 (2-1) 计算出的  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$ 。该微元的  $ab$  边的法线方向与  $x$  轴成  $\theta + \pi/2$  角，因此，我们将  $\theta + \pi/2$  代替方程 (2-1) 中的  $\theta$  就可以求出该平面上的应力，从而得出

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_x \sin^2 \theta \quad (2-4a)$$

$$\tau'_\theta = \sigma_x \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma_x \sin\theta \cos\theta \quad (2-4b)$$

因为此例中  $\sigma_x$  为正, 我们看出正应力  $\sigma'_\theta$  也为正, 如图 2-4c 所示. 在微元的  $ab$  边上的剪应力  $\tau'_\theta$  为负号, 这意味着剪应力关于微元的表面沿反时针作用, 亦如图中所示.

比较方程(2-1)和(2-4)可以观察到, 在彼此成直角的一对平面上的应力之间有两个有趣的关系式. 从这些方程我们看到

$$\sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x \quad (2-5)$$

$$\tau'_\theta = -\tau_\theta \quad (2-6)$$

其中的第一式表明, 对于拉杆, 在两个互垂平面上的正应力之和保持常数并等于  $\sigma_x$ . 第二式表明互垂平面上的剪应力数值相等但符号相反. 这后一个结论已在前面第 1.9 节中注意到了.

以相同的方式继续下去, 我们可以得到图 2-4c 中微元其余两个边  $ac$  和  $cd$  上的应力. 对于  $ac$  边, 与法线所成角度为  $\theta + \pi$ , 而对  $cd$  边, 此角度为  $\theta + 3\pi/2$ . 因此我们求出  $ac$  边上的正应力和剪应力与  $bd$  边上的相同, 而  $cd$  边上的应力与  $ab$  边上的相同.

当对一个边界如  $cd$  上的应力进行数值计算时, 有时用负方向 (即自  $x$  轴沿顺时针方向) 度量的角度  $\theta$  而不用  $270^\circ$  至  $360^\circ$  间的正角度来定义平面的位置反而方便. 例如, 若图 2-4c 中的  $\theta$  角等于  $30^\circ$ , 当使用方程(2-1)时, 确定  $cd$  面的角度可以取  $30^\circ + 270^\circ = 300^\circ$ , 或取  $-60^\circ$ .

## 2.2 双轴应力

现在让我们研究一种更一般的应力状态, 其中在微元上的正应力沿  $x$  和  $y$  两个方向同时作用 (图 2-5a). 这种应力状态称为双轴应力, 以区别于在上节研究过的一维或单轴应力状态. 双轴应力出现在压力容器、梁、轴以及许多其他的结构元件的分析中, 其中有些将在后面讨论中遇到. 现在, 我们有兴趣弄清斜面  $pq$  上的正应力和剪应力 (图 2-5a), 那个斜面的法线与  $x$  轴成  $\theta$  角. 作用在斜面上的应力为正应力  $\sigma_\theta$  和剪应力  $\tau_\theta$ , 如图 2-5b 所示. 这

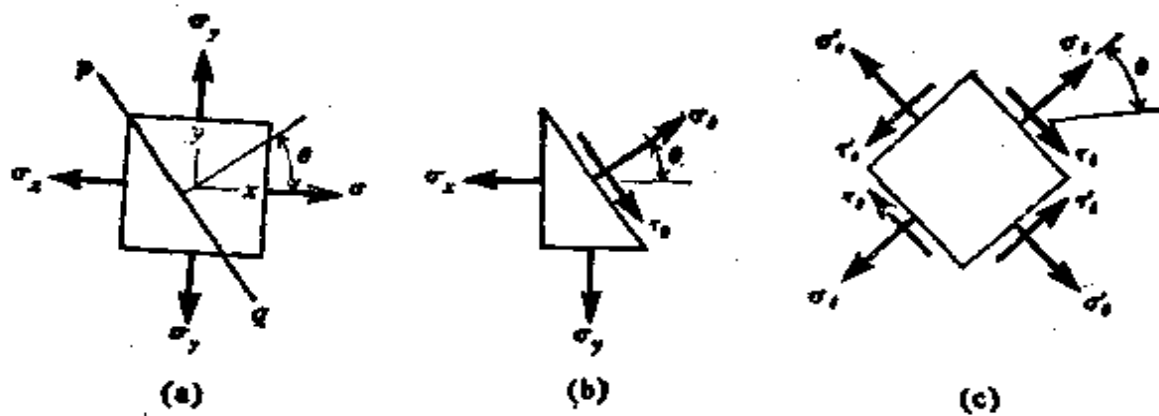


图 2-5. 双轴应力的微元.

些应力和应力  $\sigma_x$  及  $\sigma_y$  一起, 可认为是作用在从原矩形微元所切出的三角形微元上.

为了确定作用在斜面上的应力  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$ , 我们将研究三角形微元的平衡. 如果我们用  $A$  表示该微元的  $x$  面(即  $\sigma_x$  的作用面)的面积, 那么  $y$  面的面积为  $A \tan \theta$ , 而斜面的面积为  $A \sec \theta$ . 因此, 在  $x$  面上总的力是  $\sigma_x A$ , 而在  $y$  面上的是  $\sigma_y A \tan \theta$ . 这些力中的每个力均可分解为两个互垂的分力, 一个作用在斜面法向, 而另一个作用在与斜面平行的方向. 于是我们就可沿这两个方向对诸力求和, 得到三角形微元的两个平衡方程. 第一个方程, 对  $\sigma_\theta$  方向的诸力求和而得, 为

$$\sigma_\theta A \sec \theta = \sigma_x A \cos \theta + \sigma_y A \tan \theta \sin \theta$$

由此

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta \quad (2-7a)$$

用同样的方式, 我们可沿剪应力  $\tau_\theta$  方向对诸力求和:

$$\tau_\theta A \sec \theta = \sigma_x A \sin \theta - \sigma_y A \tan \theta \cos \theta$$

或

$$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta \quad (2-7b)$$

方程 (2-7) 分别给出以作用在  $x$  和  $y$  方向的正应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  表示的任一斜面上的正应力和剪应力的代数值. 使用下列三角关系

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$



我们可将方程写成另一形式:

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta \quad (2-8a)$$

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta \quad (2-8b)$$

注意, 在方程(2-7)和(2-8)中所使用的  $\sigma_{\theta}$  和  $\tau_{\theta}$  的符号约定与上节所使用的相同(见图 2-3).

假如我们将  $\theta + \pi/2$  代替方程(2-8)中的  $\theta$ , 我们便可得到与  $\sigma_{\theta}$  和  $\tau_{\theta}$  所作用的斜面成直角的平面上的应力  $\sigma'_{\theta}$  和  $\tau'_{\theta}$  的表达式(见图 2-5c). 这些方程如下:

$$\sigma'_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta \quad (2-9a)$$

$$\tau'_{\theta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta \quad (2-9b)$$

将这些方程中的第一个方程与(2-8a)联合, 我们看出

$$\sigma_{\theta} + \sigma'_{\theta} = \sigma_x + \sigma_y \quad (2-10)$$

此式再次表明, 在任意两个互垂平面上的正应力之和为一常数. 此外, 比较方程(2-8b)和(2-9b)再次表明, 互垂面上的剪应力大小相等但符号相反(见方程 2-6).

当图 2-5c 所示的微元从  $\theta=0$  旋转到  $\theta=\pi/2$  时, 正应力  $\sigma_{\theta}$  从  $\sigma_x$  变为  $\sigma_y$  (见方程 2-8a). 因此, 这些应力中的一个为  $\sigma_{\theta}$  的最大值, 而另一个为  $\sigma_{\theta}$  的最小值. 该最大正应力和最小正应力称为主应力, 而它们所作用的两个互垂的平面称为主平面. 我们从图 2-5a 看到, 在主平面上没有剪应力.

当  $\theta=0$  时, 剪应力  $\tau_{\theta}$  为零, 而当  $\theta=\pi/4$  时,  $\tau_{\theta}$  增大到最大值(见方程 2-8b). 最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (2-11)$$

亦即, 最大剪应力等于两个主应力差之半. 如果  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  相等, 那么任何斜面上将无剪应力.

上面关于最大剪应力的讨论仅指平行  $x$  轴斜面上的剪应力, 如图 2-5a

中的  $pq$  平面。我们决不能忽视这样一个事实，即图 2-5a 中的微元实际上是三维的，因而在  $z$  轴方向的应力  $\sigma_z$  等于零。平行于  $x$  轴或  $y$  轴的斜平面也能切开微元，而且可能在一个或更多这样的平面上存在着大于方程 (2-11) 所给出的剪应力。在三维情况下最大剪应力的确定在后面三轴应力一节中 (第 2.7 节) 加以叙述。

上面对于双轴应力的所有方程，不论  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  是拉力或压力都是有效的。为了使用这些方程，只需将所有应力根据已叙述过的符号约定按代数值处理即可。另外，读者应注意，当令  $\sigma_y$  等于零时，双轴应力的方程便简化为单轴应力的方程。

**双轴应力下的应变** 在双轴应力下，微元在  $x$  轴方向的应变 (图 2-5a) 不仅取决于  $x$  方向的应力  $\sigma_x$ ，而且也取决于  $y$  方向的应力 (由于第 1.4 节所述的泊松效应)。假设材料服从虎克定律，我们看到由于  $\sigma_x$  在  $x$  方向所产生的应变为  $\sigma_x/E$ ，而由于  $\sigma_y$  在  $x$  方向产生的应变为  $-\nu\sigma_y/E$ 。因此，如果应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  两者同时作用，那么在  $x$  方向的应变将为

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (2-12a)$$

同样，我们得到  $y$  方向的应变：

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (2-12b)$$

此外，在  $z$  方向的应变为

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (2-12c)$$

根据方程 (2-12a 和 b)，应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  可作为  $\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$  的函数求得如下：

$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)E}{1 - \nu^2} \quad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)E}{1 - \nu^2} \quad (2-13a, b)$$

在应变  $\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$  为已知的情况下 (例如，根据应变片测量值) 可使用这两个方程求出应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$ 。

注意到微元体在  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的尺寸分别按比率  $(1 + \epsilon_x):1$ ， $(1 + \epsilon_y):1$ ， $(1 + \epsilon_z):1$  增大，便可求出在双轴应力下弹性材料单位

体积的改变。因此，杆的体积增大按比值

$$(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) : 1$$

或略去高阶微量，

$$(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) : 1$$

由此表达式看出，单位体积的变化为

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (2-14)$$

将方程 (2-12) 代入此方程，我们得到在双轴应力下单位体积改变的下列表达式：

$$\frac{\Delta V}{V} = (\sigma_x + \sigma_y)(1 - 2\nu) / E \quad (2-15)$$

如果  $\sigma_y = 0$ ，此方程便简化为单轴应力下单位体积改变的方程 (1-7)。

### 2.3 纯剪

现在让我们研究双轴应力的特殊情况，其中  $\sigma_x$  为拉压力，而  $\sigma_y$  为大小相同的压应力，于是

$$\sigma_x = -\sigma_y = \sigma_0 \quad (2-16)$$

如图 2-6a 所示。微元中的最大剪应力发生在  $\theta = 45^\circ$  的斜面上，如在上节中说明的那样，其值等于下式 (见方程 2-11)：

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_0 \quad (2-17)$$

此剪应力如图 2-6b 所示。将  $\theta = 45^\circ$  代入方程 (2-8a) 和 (2-9a)，可求得作用于该微元各边上的正应力，由此给出  $\sigma_x = \sigma'_x = 0$ 。因此，我们发现，图 2-6b 中的微元只受剪应力，所以，它处于纯剪状态 (见第 1.9 节)。我们还看到，纯剪切等价于由一个方向上的拉应力和在另一个垂直方向相等的压应力所产生的应力状态。当然，如果我们考虑一个并非转  $45^\circ$  角的微元，那么在微元的各面上既有正应力也有剪应力，而这些应力照样可由方程 (2-8) 和 (2-9) 求出。

纯剪时微元的变形示于图 2-6c 中，因为在  $45^\circ$  方向上没有

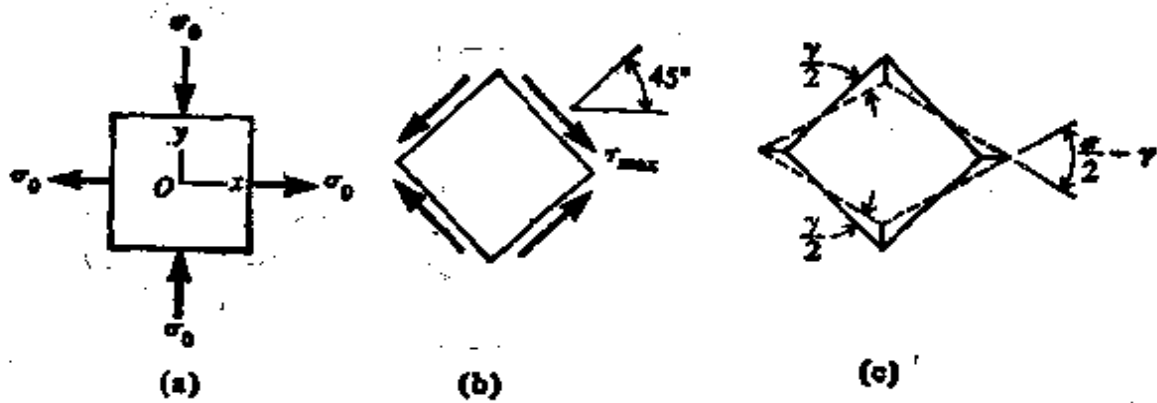


图 2-6. 纯剪下的微元.

正应力, 所以微元各边的长度不变, 但是微元的水平对角线伸长而竖直对角线缩短. 等于  $\tau_{\max}/G$  的剪应变  $\gamma$ , 在图中表现为水平对角线端处直角的减小量或竖直对角线端处直角的增大量. 微元的任一边的原始位置和最后位置之间的夹角等于  $\gamma/2$ .

在图 2-6c 中微元对角线长度的变化, 可由上节方程 (2-12) 所计算的应变  $\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$  来确定. 同时, 我们从图中看到, 这些长度变化在几何上与剪应变  $\gamma$  有关. 因此可以断言, 剪切模量  $G$  与弹性模量  $E$  和泊松比  $\nu$  有关.

为了建立这个重要关系, 我们开始先观察到水平对角线的增加量  $\Delta d$  为

$$\Delta d = \epsilon_x d \quad (a)$$

这里  $d$  为对角线的原长. 假设该微元为正方形, 我们从图 2-6c 的几何条件看出, 水平对角线长度的增加量也等于

$$\Delta d = \frac{\gamma d}{2} \quad (b)$$

亦即,  $\Delta d$  等于微元体的顶部 (或底部) 直角的增加量  $\gamma$  乘以竖直对角线长度之半. 于是, 对纯剪微元来说, 由方程 (a) 和 (b), 我们得到

$$\epsilon_x = \frac{\gamma}{2} \quad (c)$$

由方程 (2-12a) 和 (2-16), 我们得到  $\epsilon_x$  的下列表达式:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_0}{E} (1 + \nu)$$

将  $\epsilon_x$  的这个结果代入方程 (c), 并将  $\tau_{\max}/G$  (等于  $\sigma_0/G$ ) 代替  $\gamma$ ,

我们得到

$$\frac{\sigma_0}{E}(1+\nu) = \frac{\sigma_0}{2G}$$

或

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2-18)$$

此关系式表明  $E$ ,  $G$  和  $\nu$  不是独立的材料性质。例如, 对于钢, 我们若假设  $\nu=0.30$  及  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ , 则方程 (2-18) 给出  $G=77 \text{ kN/mm}^2$ \*

## 2.4 双轴应力的莫尔圆

当材料受到双轴应力时 (见图 2-5), 对作用在斜平面上的应力  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  的方程可方便地表示为图解形式。为了说明作图方法, 我们先引进符号

$$\sigma_{\text{aver}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2-19)$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (2-20)$$

其中  $\sigma_{\text{aver}}$  为作用在微元各边上正应力的平均值, 而  $\tau_{\text{max}}$  为最大剪应力。用此符号, 我们可将  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  的方程 (2-8) 重写如下。

$$\sigma_\theta - \sigma_{\text{aver}} = \tau_{\text{max}} \cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{\text{max}} \sin 2\theta$$

这两个方程是用  $2\theta$  角为参数的圆的参数形式方程。将每个方程的两边平方, 然后相加将消去参数, 从而:

$$(\sigma_\theta - \sigma_{\text{aver}})^2 + \tau_\theta^2 = \tau_{\text{max}}^2 \quad (2-21)$$

此为以  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  为独立变量而半径

等于  $\tau_{\text{max}}$  的圆的方程。以  $\sigma_\theta$  为横坐标, 以  $\tau_\theta$  为纵坐标, 将此圆画在图 2-7 中。从方程 (2-21) 可以看出, 圆心  $O$  的坐标为  $\sigma_\theta = \sigma_{\text{aver}}$

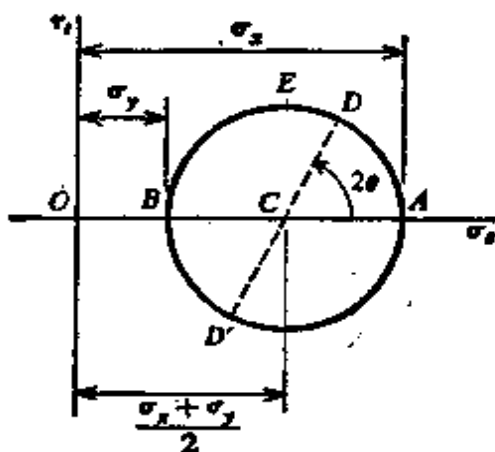


图 2-7. 双轴应力的莫尔圆。

\* 方程 (2-18) 是由泊松导出的, 它使用的  $\nu$  值为  $\frac{1}{4}$  (参考文献 2-5)。

及  $\tau_\theta = 0$ 。此图解法首先是由德国工程师奥托·莫尔 (Otto Mohr) 于 1882 年提出的 (参考文献 2-6), 所以称为莫尔圆。

我们首先注意到莫尔圆上点  $A$  的坐标为

$$\sigma_\theta = \sigma_{\text{aver}} + \tau_{\text{max}} = \sigma_x \text{ 及 } \tau_\theta = 0$$

代表了微元  $x$  面 ( $\theta = 0$ ) 上的应力。类似地, 圆上  $B$  点具有坐标  $\sigma_\theta = \sigma_y$  及  $\tau_\theta = 0$ , 代表了微元  $y$  面 ( $\theta = 90^\circ$ ) 上的应力。

现在让我们考虑在圆上任选的点  $D$ , 此点由从  $A$  点 (此处  $\theta = 0$ ) 起度量的  $2\theta$  角来确定。点  $D$  的坐标  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  可从圆的几何图形求得如下:

$$\sigma_\theta = OC + CD \cos 2\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = CD \sin 2\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta$$

将这些表达式与方程 (2-8) 比较, 显然点  $D$  的坐标代表图 2-5 中由  $\theta$  角所确定的斜面上的应力  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$ 。但应注意, 当确定  $D$  点的位置时, 在莫尔圆上使用倍角  $2\theta$ 。随着  $\theta$  角从 0 变到  $\pi/2$ , 点  $D$  沿圆周从点  $A$  移动到点  $B$ , 从而圆的上半部描述了  $\theta = 0$  和  $\theta = \pi/2$  之间该微元所有方位 (图 2-5c) 上的应力  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$ 。例如, 若  $\theta = \pi/4$ , 则  $2\theta = \pi/2$ , 点  $D$  将位于圆的顶部 (即  $E$  点), 此处我们有

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

因此, 点  $E$  代表最大正剪应力的平面, 由于圆的半径等于  $\tau_{\text{max}}$ , 故此结果是预料到的。

如果我们取大于  $\pi/2$  的  $\theta$  角, 在莫尔圆上的相应点将位于圆的下半部。例如,  $D'$  点是  $D$  点所在直径的另一端点, 所以用角  $2\theta + \pi$  来确定, 这意味着  $D'$  点所代表的应力就是作用在与  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  的作用面成直角的平面上的应力。检验图 2-7 表明,  $D'$  点的坐标等于  $\sigma'_\theta$  和  $\tau'_\theta$  (见图 2-5c 及方程 2-9)。因此, 令  $2\theta$  在莫尔圆上从  $0^\circ$  变到  $360^\circ$ , 我们就得到图 2-5c 中的微元从  $\theta = 0^\circ$  到  $\theta = 180^\circ$  所有边上的应力。其余各面上的应力 ( $\theta$  从  $180^\circ$  到  $360^\circ$ ) 自然等于其相对面上的应力。

画莫尔圆的通常步骤是在  $\sigma_x$  轴上定出  $A$  点和  $B$  点的位置 (使用适当的比例尺), 然后通过这两点画圆。而后用  $\theta$  角确定的任何斜面上的应力则通过度量一个  $2\theta$  角并定出  $D$  点的位置来求得。该点的坐标将给出所要求的  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$ , 此坐标可在图上直接按比例量取或通过做三角运算求出。若应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  之一或全部是压应力, 仍按相同的步骤进行, 只是圆的一部分或全部可能在原点的左边。此外, 必须牢记,  $2\theta$  角要从代表  $x$  平面上应力的  $A$  点按反时针方向度量, 即便  $A$  点可能在水平直径的左端也是如此, 此情况发生在  $\sigma_x$  的代数值小于  $\sigma_y$  时 (见下面的例题)。

假如需要, 用相反的作法来画莫尔圆也是可能的, 亦即, 在一个承受双轴应力的旋转了的微元上, 如果应力  $\sigma_\theta, \tau_\theta, \sigma'_\theta$  和  $\tau'_\theta$  (图 2-5c) 为已知时, 就可利用莫尔圆求得应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$ 。其步骤是根据已知应力值定出  $D$  点与  $D'$  点, 然后以  $DD'$  线为直径画圆, 点  $A$  和  $B$  可作为此圆与  $\sigma_x$  轴的截距而定出, 这样, 不仅决定了应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$ , 而且也定出了这一转动后微元的  $\theta$  角。

**例题** 试作双轴应力情况下的莫尔图 (图 2-8a), 其中  $\sigma_x = -84 \text{ N/mm}^2, \sigma_y = 28 \text{ N/mm}^2$ , 并确定在  $\theta = 20^\circ$  时微元各边上的应力  $\sigma_\theta, \tau_\theta, \sigma'_\theta$  和  $\tau'_\theta$ 。

我们先定出  $A$  点和  $B$  点, 它们分别代表  $\theta = 0$  和  $\theta = 90^\circ$  平面上的应力, 如图 2-8b 所示。圆心位于  $\sigma_{\text{avg}} = -28 \text{ N/mm}^2$  处, 而半径为  $56 \text{ N/mm}^2$ 。

从  $A$  点沿反时针方向量取角  $2\theta = 40^\circ$  以定出  $D$  点,  $D$  点的坐标由计算得 (或用比例尺量出):

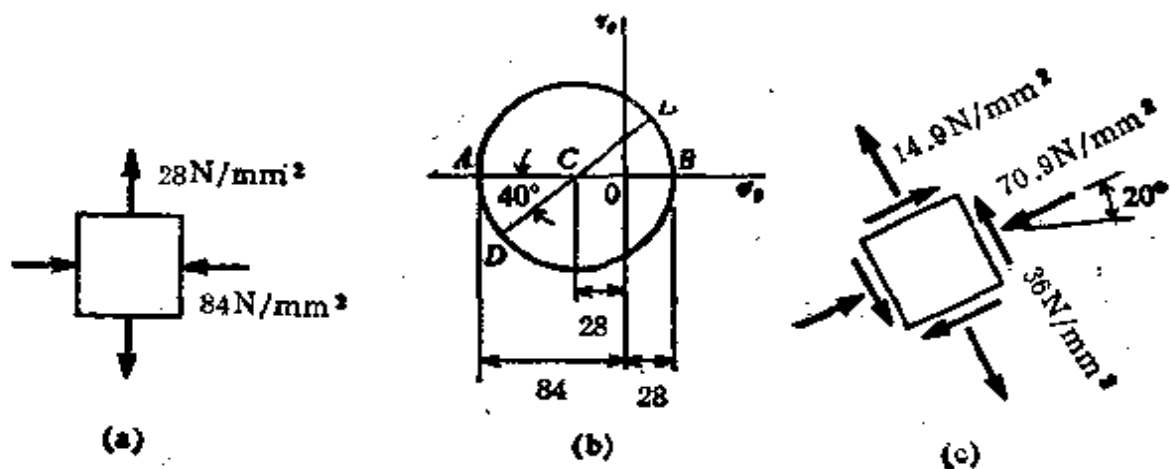


图 2-8. 数字例题。

$$\sigma_x = -70.9 \text{ N/mm}^2 \quad \tau_{xy} = -36 \text{ N/mm}^2$$

这些应力示于图 2-8c 已旋转微元的简图上。D' 点给出  $2\theta = 220^\circ$  或  $\theta = 110^\circ$  平面上的应力。这些应力为

$$\sigma'_{x'} = 14.9 \text{ N/mm}^2 \quad \tau'_{x'y'} = 36 \text{ N/mm}^2$$

也示于图 2-8c 中。因此，我们能够用莫尔圆确定一个旋转微元体上的所有应力。

## 2.5 平面应力

单轴应力和双轴应力两者都属于更为一般的称为平面应力状态的特殊情况。平面应力下的一个微元，在  $x$  和  $y$  面上可能既有正应力也有剪应力，如图 2-9a 所示，但在微元的  $z$  面上没有应力。微元  $x$  面上的剪应力将用  $\tau_{xy}$  表示，其中第一个下标表示应力的作用面，而第二个下标表示剪应力的方向。当使用这些符号识别剪应力时，习惯上假设剪应力沿着  $y$  轴的正方向作用时为正。因此，图中所示的  $\tau_{xy}$  方向为正。类似地，微元体顶面上的剪应力用  $\tau_{yx}$  表示，指明该应力作用在微元的  $y$  面上，并沿着  $x$  的正方向为正。此处剪应力  $\tau_{xy}$  和  $\tau_{yx}$  之所以遵循这一符号约定，是因为它在弹性理论中已被广泛地采用了。

可是，在以前的讨论中，我们对剪应力  $\tau_\theta$  使用的符号约定是基于剪应力对微元作用的方向是顺时针或是逆时针。我们将继续把  $\tau_\theta$  的这个约定应用于平面应力的研究中，因此，我们看出在

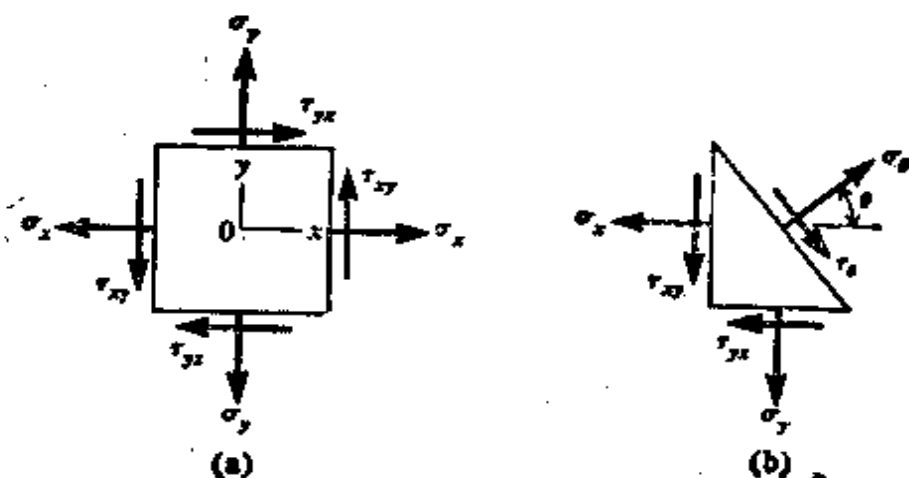


图 2-9. 平面应力下的微元。



$\theta=0^\circ$  的平面上(微元的  $x$  面), 我们有  $\tau_x = -\tau_{xy}$ , 而在  $\theta=90^\circ$  的平面上, 我们有  $\tau_y = \tau_{xy}$ . 并且, 根据两个互垂面上的剪应力相等, 显然

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2-22)$$

现在让我们研究一个斜截面, 其法线与  $x$  轴成  $\theta$  角(图 2-9b). 作用在此截面上的正应力  $\sigma_\theta$  和剪应力  $\tau_\theta$  可以根据三角形微元的平衡条件求出. 在写平衡方程时, 切记微元各面的面积并非都是相同的, 为得出合力, 每个应力必须乘以它的作用面面积. 在前面推导双轴应力的方程(2-7)时就曾遵循过这一相同的步骤. 沿  $\sigma_\theta$  方向力的平衡(图 2-9b)给出

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2-23a)$$

而沿  $\tau_\theta$  方向力的平衡得出

$$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad (2-23b)$$

再次引进适当的三角关系, 我们可将方程(2-23)表示为下列另一种形式:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2-24a)$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2-24b)$$

这些方程给出以应力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  表示的任一斜面上的正应力和剪应力. 注意, 当  $\theta=0$ , 方程给出  $\sigma_\theta = \sigma_x$  和  $\tau_\theta = -\tau_{xy}$ ; 当  $\theta=\pi/2$ , 方程给出  $\sigma_\theta = \sigma_y$  和  $\tau_\theta = \tau_{xy}$ . 还可看出, 当  $\tau_{xy}=0$ , 方程(2-23)和(2-24)分别简化为双轴应力方程(2-7)和(2-8).

当使用上述  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  的方程时, 必须仔细观察应力的符号约定: (a) 当受拉时, 所有正应力为正; (b) 当剪应力  $\tau_{xy}$  沿  $y$  轴方向时为正(图 2-9a); 以及 (c) 当剪应力  $\tau_\theta$  在材料上按顺时针方向作用时为正(图 2-9b). 选用这种  $\tau_\theta$  符号约定的理由是, 当它为正值时, 就在莫尔圆中按反时针方向量取  $2\theta$  角, 这同度量  $\theta$  所取的正的指向是一致的.

用  $\theta+\pi/2$  取代方程(2-24)中的  $\theta$ , 可求出与  $x$  轴成  $\theta+\pi/2$  的平面上的应力  $\sigma'_\theta$  和  $\tau'_\theta$ . 如果这样做了, 就将发现

$$\sigma_{\theta} + \sigma'_{\theta} = \sigma_x + \sigma_y \quad \text{及} \quad \tau_{\theta} = -\tau'_{\theta}$$

如同考虑双轴应力时所证明过的一样，因此，我们再度看到两个互垂平面上的正应力之和保持常数，而互垂平面上的剪应力大小相等而方向相反。

**主应力** 当图 2-9b 所示的  $\theta$  角从  $0^\circ$  变到  $360^\circ$  时，应力  $\sigma_{\theta}$  和  $\tau_{\theta}$  也同时改变。 $\sigma_{\theta}$  的最大值和最小值为主应力，发生主应力的主平面可通过取导数  $d\sigma_{\theta}/d\theta$ ，令它等于零，然后求解  $\theta$  来确定。因此，由方程(2-24a)我们求出

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

或

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2-25)$$

式中  $\theta_p$  被用来代替  $\theta$  以表示定义主平面的角度。存在着两个相差  $180^\circ$  的  $2\theta_p$  值，可由方程(2-25)得出。第一个值是在  $0^\circ$  与  $180^\circ$  之间，而另一个值是在  $180^\circ$  与  $360^\circ$  之间。由此，可得两个  $\theta_p$  值，一个值是在  $0^\circ$  与  $90^\circ$  之间，而另一个值是在  $90^\circ$  与  $180^\circ$  之间。对于其中的一个  $\theta_p$ ，正应力  $\sigma_{\theta}$  为最大值，而对另一个它为最小值。这两个主应力发生在互垂的平面上。

从方程(2-25)求出两个  $\theta_p$  值之后，我们可将这些值代入方程(2-24a)，求得任一特定情况下的两个主应力。用代数方法进行这种运算，也可得到主应力的一般公式。为此，我们从方程(2-25)观察到

$$\cos 2\theta_p = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{s} \quad \sin 2\theta_p = \pm \frac{2\tau_{xy}}{s}$$

此处  $s = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$ 。将这些表达式代入方程(2-24a)，得出

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2-26)$$

式中  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别表示代数值最大和最小的主应力。正如所料，我们从方程(2-26)能注意到， $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$ 。

根据方程(2-24b)能够得出有关主平面的一个重要结果。假

如我们令此方程中的  $\tau_\theta = 0$ , 并求解  $2\theta$ , 我们将再度得到方程 (2-25)。此结果表明, 在主平面上没有剪应力\*。

**最大剪应力** 现在让我们来确定最大剪应力及其作用面。取导数  $d\tau_\theta/d\theta$  (见方程 2-24b) 并令它等于零, 我们求出

$$\operatorname{ctg} 2\theta_s = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2-27)$$

式中  $\theta_s$  表示到最大剪应力面的角度。将上式与方程 (2-25) 作一比较, 我们看到  $\operatorname{ctg} 2\theta_s = -\operatorname{tg} 2\theta_p$ , 于是, 我们断定  $2\theta_s$  和  $2\theta_p$  必定相差  $90^\circ$ 。因此, 正如已对双轴应力所注意到的那样 (见 2.2 节), 最大剪应力平面发生在与主平面成  $45^\circ$  处。将由方程 (2-27) 所确定的  $2\theta_s$  值代入方程 (2-24b), 我们得出最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2-28a)$$

上式也等于

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2-28b)$$

在最大剪应力的平面上, 正应力为

$$\sigma_\theta = \sigma'_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2-29)$$

**例题** 如图 2-10a 所示, 在平面应力下的一个微元受到应力  $\sigma_x = 110 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 42 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau_{xy} = 28 \text{ N/mm}^2$ 。试确定 (a) 主应力与主平面, (b) 在旋转过  $45^\circ$  角的微元上的应力, 及 (c) 最大剪应力。将每一结果表示在已旋转微元的简图上。

(a) 为了定出主平面位置, 我们使用方程 (2-25), 它得出  $\operatorname{tg} 2\theta_p = 0.824$ , 所以,  $2\theta_p = 39^\circ 24'$  和  $219^\circ 24'$ ;  $\theta_p = 19^\circ 42'$  和  $109^\circ 42'$ 。将  $2\theta = 39^\circ 24'$  代入方程 (2-24a) 给出  $\sigma_\theta = 120 \text{ N/mm}^2$ , 再将  $2\theta = 219^\circ 24'$  代入方程 (2-24a) 给出  $\sigma_\theta = 34 \text{ N/mm}^2$ , 因此, 最大主应力为  $\sigma_1 = 120 \text{ N/mm}^2$ , 而最小主应力为  $\sigma_2 = 34 \text{ N/mm}^2$ 。这些应力示于图 2-10b 中。作为校核, 还可以由方程 (2-26) 确定主应力。

(b) 在旋转过  $45^\circ$  角的微元上的应力可由方程 (2-24) 求出。将  $\theta = 45^\circ$

\* 主应力是由 A. L. 柯西 (Cauchy) 引入的 (参考文献 2-9), 而从一个轴系转换到另一个轴系的方程首先是由 W. J. M. 兰金 (Rankine) 和圣维南导出的 (参考文献 2-10)。

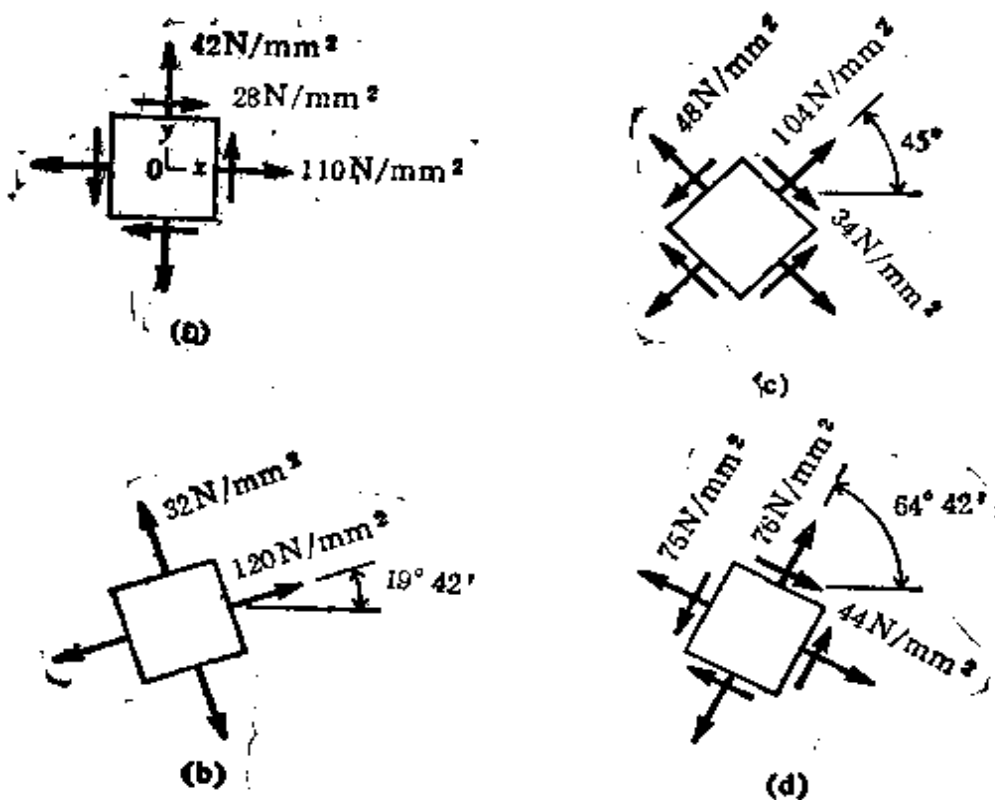


图 2-10. 数字例题.

代入这些方程求出  $\sigma_\theta = 104 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau_\theta = 34 \text{ N/mm}^2$ , 这些应力示于图 2-10c 中. 在  $\theta = 135^\circ$  的面上的正应力和剪应力(由方程 2-24)为  $\sigma'_\theta = 48 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau'_\theta = -34 \text{ N/mm}^2$ .

(c) 由方程(2-27)求得最大剪应力面的角度如下:  $\text{ctg } 2\theta_s = -0.824$ ,  $2\theta_s = 129^\circ 24'$  和  $309^\circ 24'$ ;  $\theta_s = 64^\circ 42'$  和  $154^\circ 42'$ . 使用方程(2-24)并将  $2\theta = 129^\circ 24'$  代入, 我们求出  $\sigma_\theta = 76 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau_\theta = 44 \text{ N/mm}^2$ . 此外, 对于  $2\theta = 309^\circ 24'$ , 我们求出  $\sigma'_\theta = 75 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau'_\theta = -44 \text{ N/mm}^2$ . 所有这些应力均示于图 2-10d 的微元上. 作为校核, 也可用方程(2-28)和(2-29)计算这些应力.

### 2.6 平面应力的莫尔圆

在平面应力的一般情况下  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  的方程(见方程 2-24)亦可用莫尔圆来表示. 按照与双轴应力相同的方式进行(见第 2.4 节), 我们可将方程(2-24)合并成单一的方程:

$$(\sigma_\theta - \sigma_{\text{aver}})^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2-30)$$

其中  $\sigma_{\text{aver}} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ . 此式亦为圆心在  $\sigma_\theta = \sigma_{\text{aver}}$  及  $\tau_\theta = 0$  处的

圆的方程。该圆的半径等于方程(2-30)右边的平方根,这是一个比在2.4节中对于双轴应力情况下所遇到的更为复杂的半径表达式。然而要注意,若 $\tau_{xy}=0$ ,作为一个特例,方程(2-30)简化为方程(2-21)。

莫尔圆的绘制在图2-11中说明。我们先在坐标 $\sigma_\theta = \sigma_{aver}$ 和 $\tau_\theta = 0$ 的点处定出圆心 $O$ 的位置。其次,我们定出圆上的点 $A$ ,它代表微元的 $x$ 面( $\theta=0$ )上的应力情况。对于这个点,我们有 $\sigma_\theta = \sigma_x$ 和 $\tau_\theta = -\tau_{xy}$ (回忆示于图2-9中的 $\tau_\theta$ 和 $\tau_{xy}$ 的符号约定)。y平面上的应力(见图2-9a)为 $\sigma_\theta = \sigma_y$

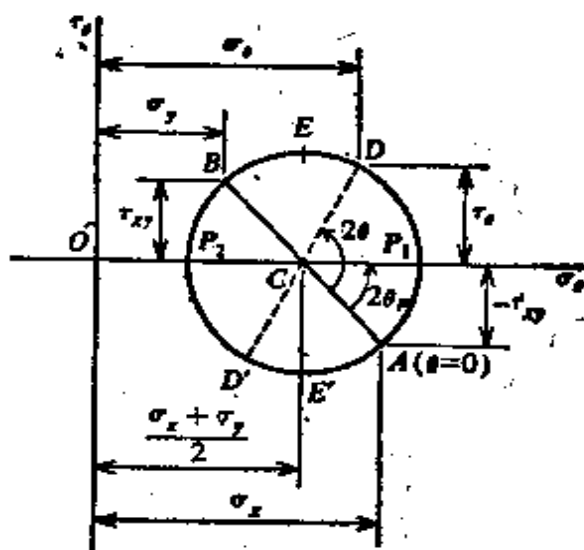


图2-11. 平面应力的莫尔圆。

和 $\tau_\theta = \tau_{xy}$ ,在莫尔圆上用点 $B$ 来代表。注意,代表互成 $90^\circ$ 平面上应力的 $A$ 点和 $B$ 点,位于一根直径的两端,亦即,它们在莫尔圆上相隔 $180^\circ$ 。

以 $O$ 为圆心,并通过 $A$ 和 $B$ 两点画出莫尔圆之后,现在我们就确定与 $x$ 轴成 $\theta$ 角的任一斜面上的应力。只要从 $A$ 点沿反时针方向标出 $2\theta$ 角,从而在圆上定出 $D$ 点的位置,其坐标 $\sigma_\theta$ 和 $\tau_\theta$ 就等于其相应平面上的应力。 $D$ 点坐标得自方程(2-24),其证明留作练习(见习题2.6-8)。

$D$ 点所在直径上的另一端点 $D'$ ,其坐标值代表了与 $D$ 点所代表的平面成 $90^\circ$ 的平面上的应力。在圆顶上的 $E$ 点代表最大正剪应力面上的应力,而在圆底的 $E'$ 点给出最大负剪应力面。正如2.5节所述,在这些平面上,正应力等于平均应力。

莫尔圆的重要用途之一是确定主应力。这些最大和最小的正应力用圆上的 $P_1$ 和 $P_2$ 点来代表(图2-11)。可以看出用 $P_1$ 所代表的代数值较大的主应力 $\sigma_1$ 等于平均应力( $O$ 点)加上圆的半径,而代数值较小的主应力 $\sigma_2$ ( $P_2$ 点)等于平均应力减去圆的半径。这

些观察结果与前面所导出的主应力方程(2-26)是一致的。确定第一主平面位置的  $2\theta_p$  角(见图)的正切等于  $\tau_{xy}$  除以  $O$  和  $A$  点之间的水平距离, 此距离等于  $\sigma_x - (\sigma_x + \sigma_y)/2$ , 或者  $(\sigma_x - \sigma_y)/2$ 。因此, 我们看出

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

它与方程(2-25)一致。第二个主平面(点  $P_2$ )用同一方程确定, 因为在 2.5 节指出过, 方程(2-25)给出两个相差  $180^\circ$  的  $2\theta_p$  值。

由此讨论我们看出, 莫尔圆可用作求任一斜面上的应力以及求主应力和最大剪应力的图解方法。

**例题** 如图 2-12 所示, 一个处于平面应力的微元承受应力  $\sigma_x = 110 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 42 \text{ N/mm}^2$ , 及  $\tau_{xy} = 28 \text{ N/mm}^2$ 。试用莫尔圆确定 (a) 主应力和主平面, (b) 旋转过  $45^\circ$  角的微元上的应力, 及 (c) 最大剪应力。(注意: 这同一问题先前曾在 2.5 节中求解过)。

圆心  $O$  位于  $\sigma_x$  轴上的一点, 在该点处  $\sigma_x = \sigma_{\text{aver}} = 76 \text{ N/mm}^2$ 。其次确定坐标为  $\sigma_x = 110 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau_{xy} = -28 \text{ N/mm}^2$  的  $A$  点的位置, 以后用半径等于  $44 \text{ N/mm}^2$  画出该圆本身。  $B$  点是  $A$  点所处直径上的相反端, 其坐标为  $\sigma_x = 42 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{xy} = 28 \text{ N/mm}^2$ 。

(a) 由圆的几何关系得出代数值较大的主应力  $\sigma_1$  等于  $76 + 44 = 120$

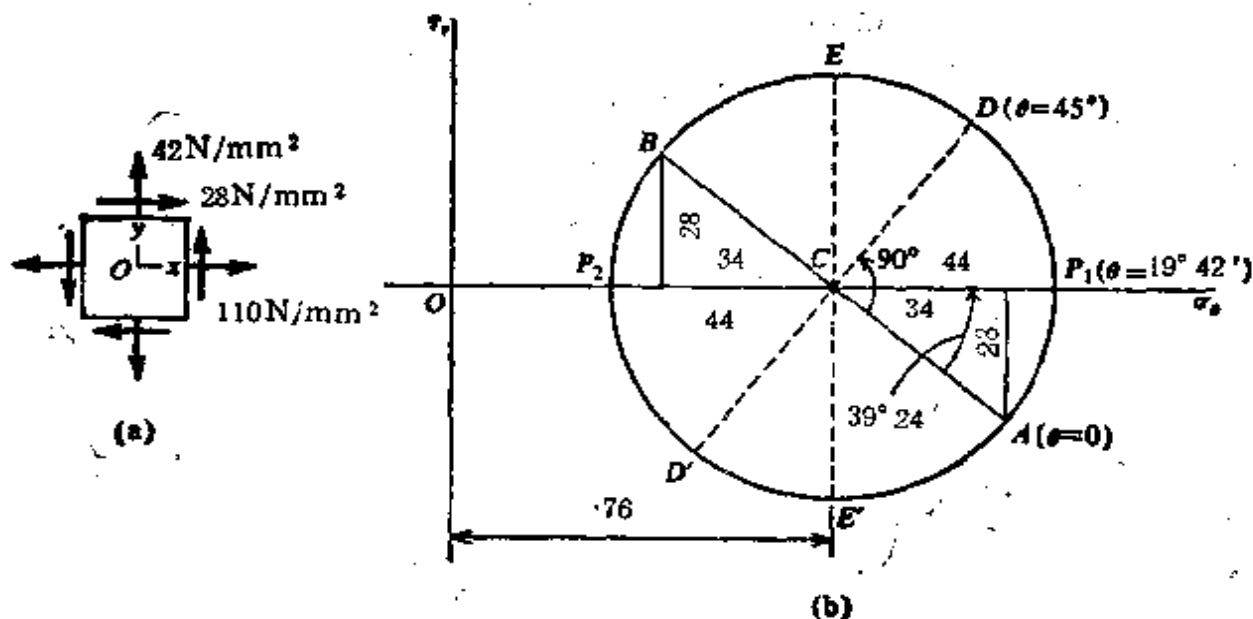


图 2-12. 数字例题。

$\text{N/mm}^2$ , 相应的主平面具有等于  $39^\circ 24'$  的  $2\theta_x$  角。于是, 从  $x$  轴到主平面的夹角为  $19^\circ 42'$ 。另一个主应力  $\sigma_2(P_2 \text{ 点})$  等于  $76 - 44 = 32 \text{ N/mm}^2$ , 并作用在  $\theta = 19^\circ 42' + 90^\circ = 109^\circ 42'$  的平面上。这样, 所有主应力和主平面均已由莫尔圆求出, 并且它们可以表示在一个微元上, 如前边图 2-10b 所示。

(b) 在旋转了  $45^\circ$  角平面上的应力可用  $2\theta = 90^\circ$  或  $\theta = 45^\circ$  的  $D$  点表示在莫尔圆上。  $CD$  线和  $\sigma_x$  轴之间的夹角为  $90^\circ$  减去  $39^\circ 24'$ , 或即  $50^\circ 36'$ 。该角的余弦为 0.635, 由此我们看到  $D$  点所代表的正应力为  $\sigma_\theta = 76 + 44(0.635) = 104 \text{ N/mm}^2$ 。又剪应力为  $\tau_\theta = 44 \sin 50^\circ 36' = 34 \text{ N/mm}^2$ ,  $D'$  点所代表的应力可用类似方法来确定, 然后可将这些结果绘于旋转了  $45^\circ$  角的微元的简图上(见图 2-10c)。

(c) 最大剪应力与其作用面用莫尔圆上的  $E$  和  $E'$  点来代表。读者可以容易地证明用这两点所给的应力  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  与图 2-10d 中所示的是一致的。

## 2.7 三轴应力

在三个互垂方向受到应力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  的一个材料微元体, 称为处于三轴应力状态。若平行于  $z$  轴的一个斜面将微元体切开(图 2-13b), 斜面上的应力只有  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$ , 与前面分析双轴应力时的应力相同。因为这些应力是按静力学使用  $xy$  面内的平衡方程式求出的, 所以它们与应力  $\sigma_z$  无关。因此, 当确定应力  $\sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$  时, 我们可使用双轴应力的方程和莫尔圆。这相同的一般性结论也适用于平行  $x$  轴和  $y$  轴所切的微元体斜面。

从上面的讨论中, 我们看出应力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  是微元体的主应

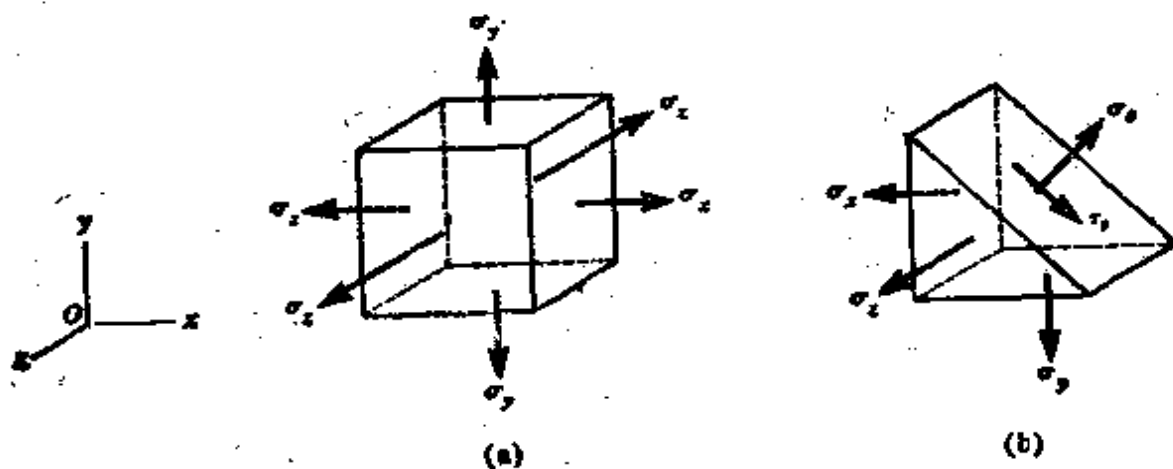


图 2-13. 三轴应力下的微元体。

力。另外，最大剪应力处在沿平行于坐标轴之一并将微元体切割成  $45^\circ$  的平面上，它由  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  的相对大小来定。例如，若我们只研究平行与  $z$  轴的平面(图 2-13b)，最大剪应力就为

$$(\tau_{\max})_z = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (2-31a)$$

此式系根据方程 (2-11) 求得。与此相似，在与  $x$  轴和  $y$  轴相平行的平面上的最大剪应力分别为

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{\max})_x &= \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \\ (\tau_{\max})_y &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \end{aligned} \right\}$$

(2-31b, c)

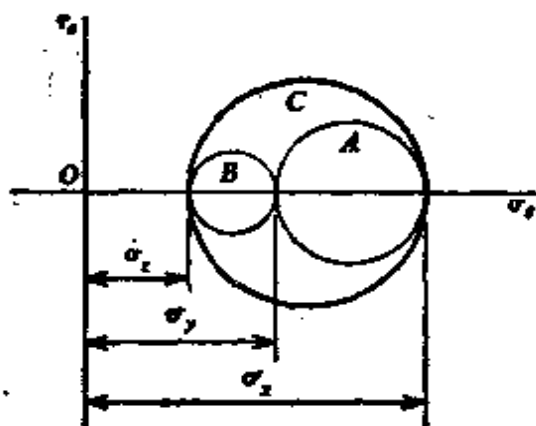


图 2-14. 三轴应力的莫尔圆。

根据  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  的相对值，上

述三个方程之一将给出微元体在数值上最大的剪应力。

借助莫尔图，可以方便地想像出同样的结果。假设  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  均为拉力，且  $\sigma_x > \sigma_y$ ，对于平行于  $z$  轴的平面，此圆将是图 2-14 中标明为 A 者。类似地，对于平行于  $x$  和  $y$  轴的平面，我们分别得到 B 圆和 C 圆。这三个圆的半径代表由方程 (2-31) 所给出的最大剪应力，而绝对最大剪应力等于最大圆的半径。

图 2-13a 的微元体沿斜向切割的平面上的剪应力和正应力，可用更复杂的三维分析求得(见文献 2-11)。斜面上的正应力在数值上总是介于代数值最大和最小的主应力之间，而剪应力总是小于按方程(2-31)所求得的数值上最大的剪应力。

**三轴应力的应变** 如果材料服从虎克定律，那么三轴应力在  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴方向的应变可以用双轴应力下所用过的相同步骤求得。因此，我们很容易地得到下列方程：

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \quad (2-32a)$$



$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \quad (2-32b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (2-32c)$$

微元体单位体积的变化(见方程 2-14)为

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

三个主应变  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  和  $\epsilon_z$  之和有时被称为膨胀度。将应变方程 (2-32) 代入上式, 我们得到

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2-33)$$

它用于三轴应力的一般情况

在微元体承受静水压力或在所有三个方向受到均匀压力的特定情况下, 我们有

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \quad (a)$$

此处  $p$  为压应力, 于是根据方程 (2-33) 我们求出

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-3(1-2\nu)p}{E} = -\frac{p}{K} \quad (b)$$

式中

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2-34)$$

由方程 (b) 我们看出, 单位体积的收缩与压力  $p$  成正比, 而与  $K$  值成反比,  $K$  称为体积弹性模量。

**应变能** 为了确定储存于承受三轴应力微元体中的应变能 (图 2-13a), 让我们开始先研究一个单位大小的立方体微元。于是在微元体的  $x$  面上的应力  $\sigma_x$  在数值上就等于该面上总的力。此力移动了一段等于  $\epsilon_x$  的距离, 因此它所作的功等于  $\sigma_x \epsilon_x / 2$ 。同样, 应力  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  作的功分别等于  $\sigma_y \epsilon_y / 2$  和  $\sigma_z \epsilon_z / 2$ 。总的功等于在微元体中所储存的单位体积应变能, 它为

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z)$$

将方程 (2-32) 所给的应变值代入, 我们得

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x + \sigma_x \sigma_z) \quad (2-35)$$

当应用此方程时，应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  必须代入它们正确的代数符号，即拉应力必须取为正值，而压应力取为负值。

## 2.8 平面应变

在材料和结构的性态实验研究中，用应变片度量应变十分普遍。因此求得各个方向正应变和剪应变之间的理论关系是有意义的，这类似于 2.5 节对平面应力所得的关系式。首先我们回想到在  $xy$  平面内可能存在三个应变分量：沿  $x$  方向的正应变  $\epsilon_x$  (图 2-15a)，沿  $y$  方向的正应变  $\epsilon_y$  (图 2-15b)，及剪应变  $\gamma_{xy}$  (图 2-15c)。当微元相对  $xy$  轴的方位如图 2-15c 所示时，微元体的剪应变  $\gamma_{xy}$  将定义为该微元体左下角直角的减小量。这个正的剪应变的定义与正的剪应力  $\tau_{xy}$  的定义相符(见图 2-9a)。

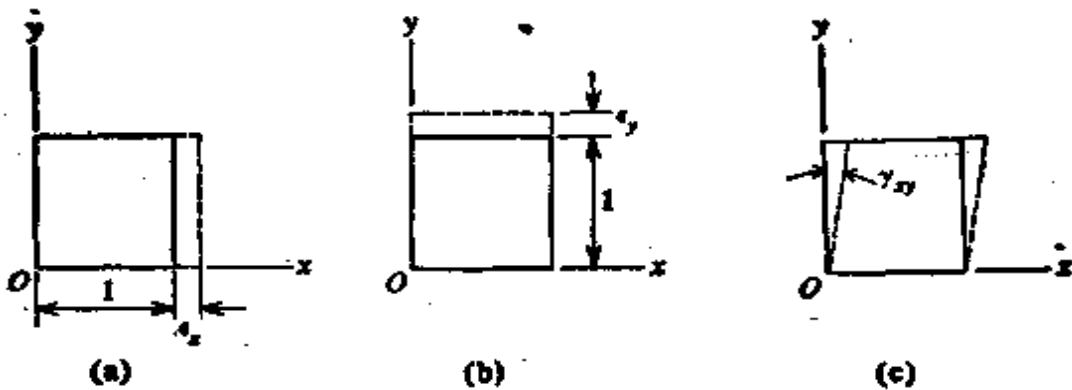


图 2-15. 应变  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$  和  $\gamma_{xy}$ 。

只受到应变  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$  和  $\gamma_{xy}$  的材料微元称为处于平面应变状态。这样的微元没有正应变  $\epsilon_z$ ，也没有分别在  $xz$  和  $yz$  平面上的剪应变  $\gamma_{xz}$  和  $\gamma_{yz}$ 。我们看到，平面应变的一般情况用下列条件来定义

$$\epsilon_x \neq 0 \quad \epsilon_y \neq 0 \quad \gamma_{xy} \neq 0 \quad (a)$$

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (b)$$

上述平面应变的定义与平面应力相类似(2.7 节)，在一般情况下，平面应力可以表达如下：

$$\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y \neq 0 \quad \tau_{xy} \neq 0 \quad (c)$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (d)$$

根据前面两组方程之间的相似性，不应推断为平面应力和平面应

变发生在同样条件下。例如，我们知道，平面应力下的微元，通常将受到  $x$  方向的应变，这就立刻表明，平面应力状态不一定产生平面应变状态。再者，平面应变下的微元通常将有  $\sigma_x$  作用在微元上，以便保持  $\epsilon_x = 0$  的状态，于是，再次可知平面应力和平面应变一般并不同时发生。

在 2.5 节所导出的应力转换方程，原来是对平面应力得来的，然而后来在 2.7 节，我们看到，只要微元绕坐标轴之一旋转，它也能用于三轴应力下的微元体。关于应变，我们所取的步骤将遵循同样的模式。应变转换方程将按平面应变的情况导出，但是，只要绕坐标轴之一旋转到新方向，这些方程对于三轴应变也是有效的。因此，应变转换方程（下面所推导的）也可用于平面应力情况下发生的应变，正如平面应力的方程（2.5 节）可用于平面应变情况下发生的应力一样。

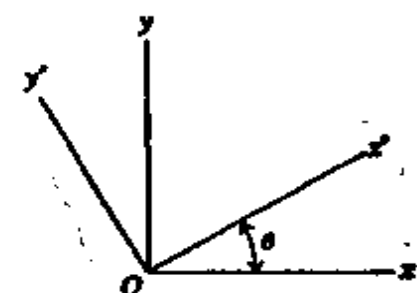


图 2-16. 转动后的轴  $x'$  和  $y'$ .

为了导出平面应变的转换方程，让我们开始先研究图 2-16 所示的坐标轴。假设与  $xy$  轴有关的正应变  $\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$  及剪应变  $\gamma_{xy}$  均已知。分析的目的是确定与  $x'y'$  轴有关的正应变和剪应变， $x'y'$  轴对  $xy$  轴转过一个  $\theta$  角。 $x'$  轴方向的正应变用  $\epsilon_{x'}$  表示，而与  $x'y'$  轴有关的剪应变将用  $\gamma_{x'y'}$  表示。当  $\theta = 0$ ，我们将有  $\epsilon_{x'} = \epsilon_x$  及  $\gamma_{x'y'} = \gamma_{xy}$ 。

一个边长为  $dx$  和  $dy$  及对角线在  $x'$  轴方向的矩形微元表示在图 2-17 中。由于应变  $\epsilon_x$ ， $\epsilon_y$  和  $\gamma_{xy}$ ，该微元将沿  $x$  方向伸长一个量  $\epsilon_x dx$  (图 2-17a)，沿  $y$  方向伸长一个量  $\epsilon_y dy$  (图 2-17b)，而直角  $xOy$  将减小一个量  $\gamma_{xy}$  (图 2-17c)。这三个变形中的每一个变形都将引起对角线长度的改变。如图所示，对角线长度的相应增量为  $\epsilon_x dx \cos \theta$ ， $\epsilon_y dy \sin \theta$  及  $\gamma_{xy} dy \cos \theta$ 。因此，对角线长度总的增加量是这三个量的总和；而在  $x'$  方向相应的应变  $\epsilon_{x'}$  是用对角线的长度  $ds$  去除此总和而得。注意到  $dy/ds = \sin \theta$  和  $dx/ds = \cos \theta$ ，我们得出

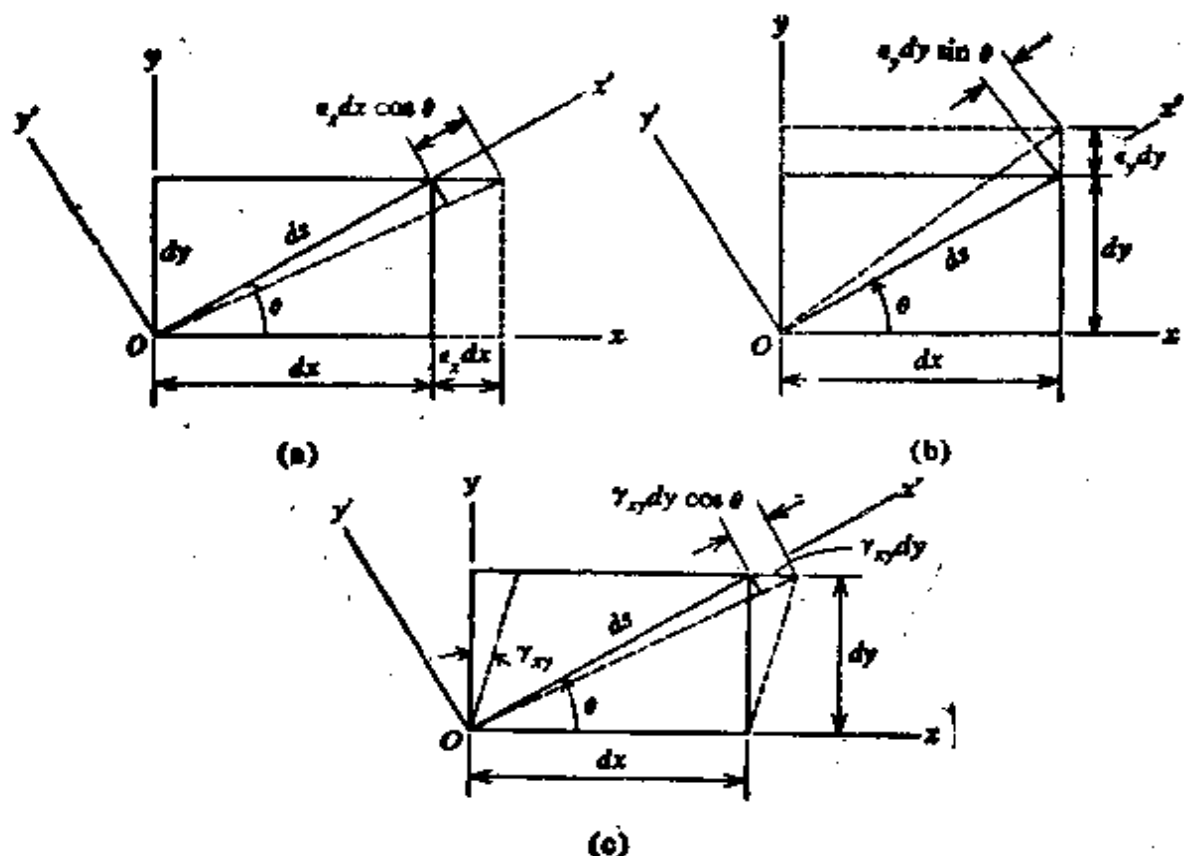


图 2-17. 由于应变 (a)  $\epsilon_x$ , (b)  $\epsilon_y$  和 (c)  $\gamma_{xy}$  所产生的微元的变形.

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2-36a)$$

或

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2} (\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\theta \quad (2-36b)$$

当  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  和  $\gamma_{xy}$  已知时, 方程 (2-36) 中的每一式都可用来求出沿  $\omega'$  轴方向的正应变  $\epsilon_\theta$ . 如果欲求  $y'$  轴方向的正应变, 只需将  $\theta + \pi/2$  代替方程 (2-36) 中的  $\theta$  即可.

剪应变  $\gamma_\theta$  的一般表达式, 亦可从研究图 2-17 中所画的变形求得. 从应变  $\epsilon_x$  的作用开始, 由图 2-17a 我们看到,  $\omega'$  轴沿顺时针方向旋转了一个等于  $\epsilon_x dx \sin \theta / ds$  的微小角度. 类似地, 在图 2-17b 中  $\omega'$  轴沿逆时针方向旋转了一个  $\epsilon_y dy \cos \theta / ds$  的角度, 而在图 2-17c 中它沿顺时针方向旋转了一个  $\gamma_{xy} dy \sin \theta / ds$  的量. 因此,  $\omega'$  轴沿顺时针的净旋转为

$$\alpha = \epsilon_x \sin \theta \cos \theta - \epsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \sin^2 \theta \quad (c)$$

$y'$  轴顺时针方向的净旋转角, 可用类似于图 2-17 中对  $x'$  轴所示的几何构图求出, 或用  $\theta + \frac{\pi}{2}$  代替方程式(e)中的  $\theta$  求出. 按照后一种步骤, 我们得到  $y'$  轴的旋转角  $\beta$  如下:

$$\beta = -\epsilon_x \sin \theta \cos \theta + \epsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta \quad (f)$$

$x'Oy'$  角的减小量(等于剪应变  $\gamma_\theta$ ) 为  $\beta - \alpha$ , 因此从方程(e)和(f)我们得到

$$\gamma_\theta = -2\epsilon_x \sin \theta \cos \theta + 2\epsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

或者, 用 2 除每项后,

$$\frac{1}{2} \gamma_\theta = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2-37a)$$

再作适当的三角置换, 我们就可将上式改写为另一种形式:

$$\frac{1}{2} \gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (2-37b)$$

方程(2-37)中的每一式, 均可用来求得倾斜轴的剪应变  $\gamma_\theta$ . 作为两种特殊的情况, 我们观察到, 当  $\theta = 0^\circ$  及  $\theta = 90^\circ$  时, 我们分别得到  $\gamma_\theta = \gamma_{xy}$  及  $\gamma_\theta = -\gamma_{xy}$ .

将平面应变的方程(2-36)和(2-37)与平面应力(见 2.5 节)的方程(2-23)和(2-24)相比较, 表明了  $\epsilon_\theta$  和  $\gamma_\theta$  的表达式具有与  $\sigma_x$  和  $\tau_{xy}$  的表达式相同的一般形式. 这些方程之间的相似性是  $\sigma_x, \sigma_y$  和  $\sigma_\theta$  分别对应于  $\epsilon_x, \epsilon_y$  和  $\epsilon_\theta$ , 而  $\tau_{xy}$  对应于  $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ ,  $\tau_\theta$  对应于  $-\frac{1}{2} \gamma_\theta$  (见表 2-1). 表 2-1 第二栏中的负号来源于我们对剪应力  $\tau_\theta$  所采用的符号约定(见图 2-9).

平面应力与平面应变方程之间的相似性表明, 关于平面应力的全部观察结果在平面应变中都有对应的部分. 例如, 与旋转了  $\theta + \pi/2$  角的一对轴线有关的正应变  $\epsilon'_\theta$  和剪应变  $\gamma'_\theta$ , 可将方程(2-36)和(2-37)中的  $\theta$  用  $\theta + \pi/2$  代替求得, 结果得出下列方程:

$$\epsilon_\theta + \epsilon'_\theta = \epsilon_x + \epsilon_y \quad \gamma_\theta = -\gamma'_\theta \quad (2-38)$$

这些方程表明, 正应变之和保持常数, 而互成  $90^\circ$  方向的剪应变大

表 2-1 平面应力变换方程(方程 2-23 和 2-24)与平面应变变换方程(方程 2-36 和 2-37)之间的相似性

应 力	应 变
$\sigma_x$	$\epsilon_x$
$\sigma_y$	$\epsilon_y$
$\tau_{xy}$	$\frac{1}{2} \gamma_{xy}$
$\sigma_\theta$	$\epsilon_\theta$
$\tau_\theta$	$-\frac{1}{2} \gamma_\theta$

小相等,但符号相反,这完全与应力的情况相类似(见 2.5 节)。

此外,主应变将位于由下式计算所得的方向上(试与方程 2-25 对比)

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (2-39)$$

其主应变可按下面的方程计算

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (2-40)$$

它对应于应力的方程(2-26)。在主平面上,剪应变为零。

最大剪应变发生在与主平面成  $45^\circ$  的平面上,并用下列方程给出

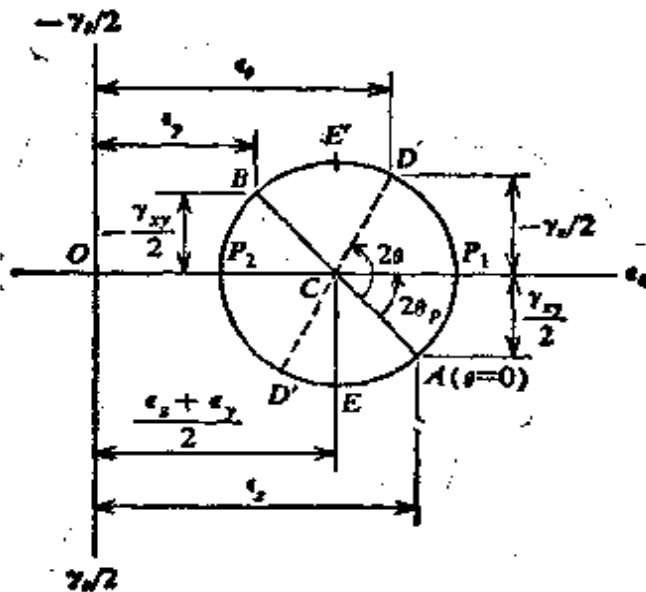


图 2-18 平面应变的莫尔圆。

$$\frac{1}{2} \gamma_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (2-41)$$

在最大剪应变的平面上, 正应变为  $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ .

平面应变的莫尔图可用与平面应力莫尔圆相同的方法来作, 如图2-18中所说明的那样. 正应变  $\epsilon_x$  画在水平轴上, 剪应变除以2后画在垂直轴向下方向(试将图2-18同2-11比较). 圆心  $O$  的横坐标等于  $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ ; 代表与  $\omega$  方向有关应变的  $A$  点具有坐标  $\epsilon_x$  及  $\gamma_{xy}/2$ . 在过  $A$  点直径上的相反一端的点  $B$  具有坐标  $\epsilon_y$  及  $-\gamma_{xy}/2$ , 它代表着与旋转了一个角  $\theta = 90^\circ$  的一对轴有关的应变. 与其它旋转后的轴有关的应变用  $D$  点求得, 它由从  $A$  点量取  $2\theta$  角来定位. 此外, 主应变以  $P_1$  和  $P_2$  点来代表, 而最大剪应变则以  $E$  和  $E'$  点来代表. 所有这些量, 借助此圆均可很容易地确定.

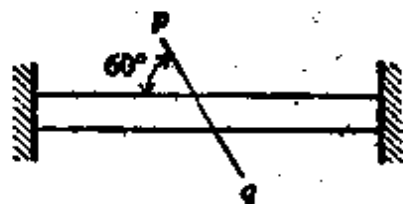
应用应变莫尔圆, 从应变片测量值求得主应变的方法在参考文献2-12和2-13中叙述.

## 习 题

**2.1-1** 一直径为20 mm的圆杆, 受有轴向拉伸载荷  $P = 80 \text{ kN}$ , 试问杆中的最大剪应力是多少?

**2.1-2** 试求  $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$  方形截面钢杆的最大容许拉伸载荷  $P$ . 假设拉伸时容许正应力为  $140 \text{ N/mm}^2$ , 容许剪应力为  $90 \text{ N/mm}^2$ .

**2.1-3** 一金属杆在室温 ( $21^\circ\text{C}$ ) 下固定于两刚性支座之间, 如图所示. 试计算当温度升高到  $93^\circ\text{C}$  时, 斜截面  $pq$  上的正应力和剪应力. 假设  $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ .

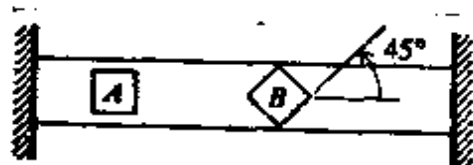


习题 2.1-3

**2.1-4** 一受拉杆(见图2-1), 在斜截面  $pq$  上的应力为  $\sigma_\theta = 80 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_\theta = 30 \text{ N/mm}^2$ . 试求应力  $\sigma_x$  和角  $\theta$ .

**2.1-5** 一受拉的棱柱形杆(见图2-4a), 其横截面面积  $A = 1200 \text{ mm}^2$ , 承受载荷  $P = 144 \text{ kN}$ . 试确定作用在  $\theta = 30^\circ$  的微元边上的应力.

**2.1-6** 一矩形截面的铜杆固定于两刚性支座之间(见图). 然后将杆的温度升高  $56^\circ\text{C}$ , 试确定微元  $A$  和  $B$  所有边上的应力, 并将结果示于微元草图上. (假设  $\alpha = 0.00002/^\circ\text{C}$ ,  $E = 110 \text{ kN/mm}^2$ .)



习题 2.1-6

2.1-7 作用于图2-4c所示微元边上的正应力  $\sigma_x = 80 \text{ N/mm}^2$  和  $\sigma'_x = 40 \text{ N/mm}^2$ 。试求应力  $\tau_{xy}$ ,  $\tau'_{xy}$ ,  $\sigma_{\theta}$  和  $\tau_{\theta}$ 。

2.1-8 一拉伸元件是用两块材料沿  $mm$  线粘合而成。由于实际的原因,  $\theta$  角被限制在  $0^\circ$  至  $60^\circ$  的范围内。在粘合点上的容许剪应力 ( $\tau_w$ ) 为容许拉应力 ( $\sigma_w$ ) 的  $3/4$ , 试问为使该杆能承受最大载荷  $P$ , 其  $\theta$  角应为多大? (假设以结合点的强度控制设计。)



习题 2.1-8和 2.1-9

2.1-9 假如  $\tau_w = 7 \text{ N/mm}^2$  和  $\sigma_w = 14 \text{ N/mm}^2$ , 再解上题。并确定最大容许载荷  $P$ , 假设杆的横截面积为  $960 \text{ mm}^2$ 。

2.2-1 试求图 2-5 所示微元的应力  $\sigma_x$ ,  $\sigma'_x$ ,  $\tau_{xy}$  和  $\tau'_{xy}$ 。假如  $\sigma_x = 80 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = -40 \text{ N/mm}^2$  和  $\theta = 30^\circ$ 。

2.2-2 若按  $\tau_{\theta}$  为最大值来选择  $\theta$  角, 再解上题。

2.2-3 试研究旋转微元边上的正应力和剪应力(图 2-5c), 假如主应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  相等 ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ ); 并确定微元单位体积的变化, 假设  $\nu = 0.25$ ,  $\sigma_0 = 100 \text{ N/mm}^2$ ,  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ 。

2.2-4 一个  $\theta = 45^\circ$  的旋转微元(见图 2-5c), 承受应力  $\sigma_x = \sigma'_x = 14 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau_{xy} = 28 \text{ N/mm}^2$ , 试求作用在主平面上的主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  (见图 2-5a)。

2.2-5 一个双轴应力微元(见图 2-5), 承受正应力  $\sigma_x = 120 \text{ N/mm}^2$  和  $\sigma_y = -40 \text{ N/mm}^2$ 。(a) 试求微元旋转  $\theta = 30^\circ$  时其上的应力; (b) 确定最大剪应力平面, 并确定那些平面上的正应力和剪应力; (c) 确定正应力为零的平面 ( $\theta < 90^\circ$ ), 然后画出以该平面作为一边的微元, 同时确定微元所有边上的正应力和剪应力。

2.2-6 试确定双轴应力微元上的应力  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$ 。假如  $\epsilon_x = 0.001$ ,  $\epsilon_y = -0.0007$  (假设  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ )。

2.2-7 一薄板(厚度为  $t$ ), 在双轴应力状态下, 承受应力  $\sigma_x = 140$



$\text{N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 60 \text{ N/mm}^2$ . 假设  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\nu = 0.25$ , 若  $t = 6 \text{ mm}$ , 试求薄板厚度的减小值。

**2.2-8** 每边长为  $100 \text{ mm}$  的混凝土立方体, 在互相垂直的两个方向上受力  $P = 70 \text{ kN}$  的压缩. 试求立方体的体积变化, 假设  $\nu = 0.1$ ,  $E = 28 \text{ kN/mm}^2$ .

**2.2-9** 一个双轴应力状态下的材料微元, 其主应变  $\epsilon_x = 0.00004$ ,  $\epsilon_y = 0.00017$ , 若  $\nu = 0.3$ , 试求应变  $\epsilon_x$ .

**2.2-10** 试求轴向受拉的棱柱形杆的泊松比  $\nu$ . 假设单位体积的变化与单位面积的变化之比值为  $0.75$ .

**2.2-11** 一个双轴应力微元, 如图 2-5 所示, 在  $x$  和  $y$  方向的主应变分别为  $\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$ . 试导出用  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  和角度  $\theta$  表示的  $\sigma_\theta$  方向上的应变  $\epsilon_\theta$  的表达式; 并将结果和方程(2-7a)或方程(2-8a)加以比较.

**2.3-1** 试导出在纯剪时, 微元体的单位体积变化的表达式.

**2.3-2** 一纯剪状态下的微元承受剪应力  $\tau_{\max} = 140 \text{ N/mm}^2$  (见图 2-6b), 试求最大剪应变  $\gamma$ . 假设  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\nu = 0.25$ .

**2.3-3** 一个双轴应力状态下的微元, 受有应力  $\sigma_x = -\sigma_y = 70 \text{ N/mm}^2$ , 试求主应变  $\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$  及最大剪应变  $\gamma$ . 假如  $E = 70 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\nu = 0.25$ .

**2.4-1** 绘出纯剪情况下的莫尔圆(见图 2-6), 并从圆的几何图形证明方程(2-17).

**2.4-2** 绘出单向应力状态下的莫尔圆(见图 2-4), 并从圆的几何图形证明方程(2-1), (2-2)和(2-3).

**2.4-3** 绘出双轴应力状态下的莫尔圆(见图 2-5), 其中  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ .

**2.4-4** 对于图 2-8 所给出的例题, 试确定微元旋转到剪应力  $\tau_\theta$  为最大时, 其上的应力(将结果示于微元草图上).

**2.4-5** 用莫尔圆解习题 2.1-5.

**2.4-6** 一个单向应力状态下的材料微元, 承受应力  $\sigma_x = -360 \text{ N/mm}^2$ . 试用莫尔圆确定在  $\theta = 75^\circ$  时的微元上的应力.

**2.4-7** 用莫尔圆解习题 2.1-7.

**2.4-8** 用莫尔圆解习题 2.2-1.

**2.4-9** 用莫尔圆解习题 2.2-2.

**2.4-10** 一个双轴应力状态下的微元, 其上主应力  $\sigma_x = 20 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 28 \text{ N/mm}^2$ , 试求最大剪应力平面上的应力.

**2.4-11** 用莫尔圆解习题 2.2-4.

**2.4-12** 用莫尔圆解习题 2.2-5.

2.5-1 一个平面应力微元(图 2-9a), 受有应力  $\sigma_x = 34 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 20 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau_{xy} = -7 \text{ N/mm}^2$  的作用。试确定其主应力和主平面, 并将结果示于微元草图上。

2.5-2 一平面应力微元(图 2-9a), 受有应力  $\sigma_x = -34 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 20 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau_{xy} = -7 \text{ N/mm}^2$  的作用。试确定其主应力和主平面, 并将结果示于微元草图上。

2.5-3 试确定上题中微元的最大剪应力及其所在平面, 并将结果示于微元草图上。

2.5-4 一平面应力微元(图 2-9a), 受有应力  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = 14 \text{ N/mm}^2$  (纯剪)。试求微元旋转  $15^\circ$  后其所有边上的应力, 并将结果示于微元草图上。

2.5-5 一平面应力状态下的微元(图 2-9a), 受有应力  $\sigma_x = -4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 12 \text{ N/mm}^2$  和  $\tau_{xy} = -8 \text{ N/mm}^2$ 。试确定: (a) 主应力和主平面; (b) 最大剪应力及其作用平面, 并将结果示于旋转后的微元草图上。

2.5-6 求解上题。假设  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 28 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{xy} = 14 \text{ N/mm}^2$ 。

2.5-7 一平面应力微元旋转了角  $\theta = 30^\circ$ 。在  $\theta = 30^\circ$  的平面上的应力为  $\sigma_\theta = -26 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_\theta = 30 \text{ N/mm}^2$ ; 在  $\theta = 120^\circ$  的平面上应力为  $\sigma'_\theta = -26 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau'_\theta = -30 \text{ N/mm}^2$ 。试求应力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$ 。

2.6-1 用莫尔圆解习题 2.5-1。

2.6-2 用莫尔圆解习题 2.5-2。

2.6-3 用莫尔圆解习题 2.5-3。

2.6-4 用莫尔圆解习题 2.5-4。

2.6-5 用莫尔圆解习题 2.5-5。

2.6-6 用莫尔圆解习题 2.5-6。

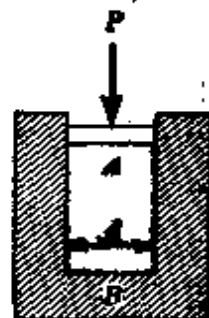
2.6-7 用莫尔圆解习题 2.5-7。

2.6-8 从图 2-11 的几何图形证明  $D$  点的坐标如方程 (2-24) 所得。

2.7-1 一处于双轴应力状态下的薄板, 受有应力  $\sigma_x = 70 \text{ N/mm}^2$  和  $\sigma_y = 140 \text{ N/mm}^2$ 。 $z$  方向上的应力为零。试问材料中最大正应力和剪应力是多少?

2.7-2 一直径为  $d$  的橡胶圆柱, 用力  $P$  压于钢圆柱内(见图)。试确定橡胶与钢之间的压力  $p$ 。假设  $P = 4.6 \text{ kN}$ ,  $d = 50 \text{ mm}$ , 橡胶的泊松比为  $\nu = 0.45$ 。

2.7-3 一直径为  $25 \text{ mm}$  的实心钢球, 受到  $14 \text{ N/mm}^2$  的静水压力。试问其体积的减少量为多少? (假



习题 2.7-2

设  $E=200\text{kN/mm}^2$ ,  $\nu=0.3$ .)

**2.8-1** 应用第 2.8 节所导出的方程, 求主应变  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  以及它们的方向. 假设  $\varepsilon_x=500 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_y=140 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma_{xy}=-360 \times 10^{-6}$ ; 并用应变莫尔圆校核其结果.

**2.8-2** 求解上题. 假设  $\varepsilon_x=-140 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_y=-500 \times 10^{-6}$  和  $\gamma_{xy}=-360 \times 10^{-6}$ .

**2.8-3** 求解习题 2.8-1. 假设  $\varepsilon_x=500 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_y=300 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma_{xy}=1050 \times 10^{-6}$ .

## 第三章 扭 转

### 3.1 圆杆的扭转

让我们研究一根由作用在端面上的力偶  $T$  而扭转的圆形截面杆(图 3-1a)\*. 以此方式受载的杆件称为处于纯扭转状态. 从对称性考虑可以证明, 圆杆的横截面象刚体一样绕纵轴旋转, 其半径仍保持直线, 横截面仍保持圆形. 此外, 如果杆的总扭角很小, 杆长和其半径  $r$  均不会改变.

扭转时杆的一端对另一端将有绕纵轴的旋转. 例如, 如果把杆的左端当成固定的, 那么右端相对于左端就转过一个  $\phi$  角(图 3-1a). 同时, 杆件表面上的纵线, 如线  $nm$ , 将转过一个微小角度到位置  $nm'$ . 由于这种旋转, 杆件表面上的矩形微元, 例如图中所

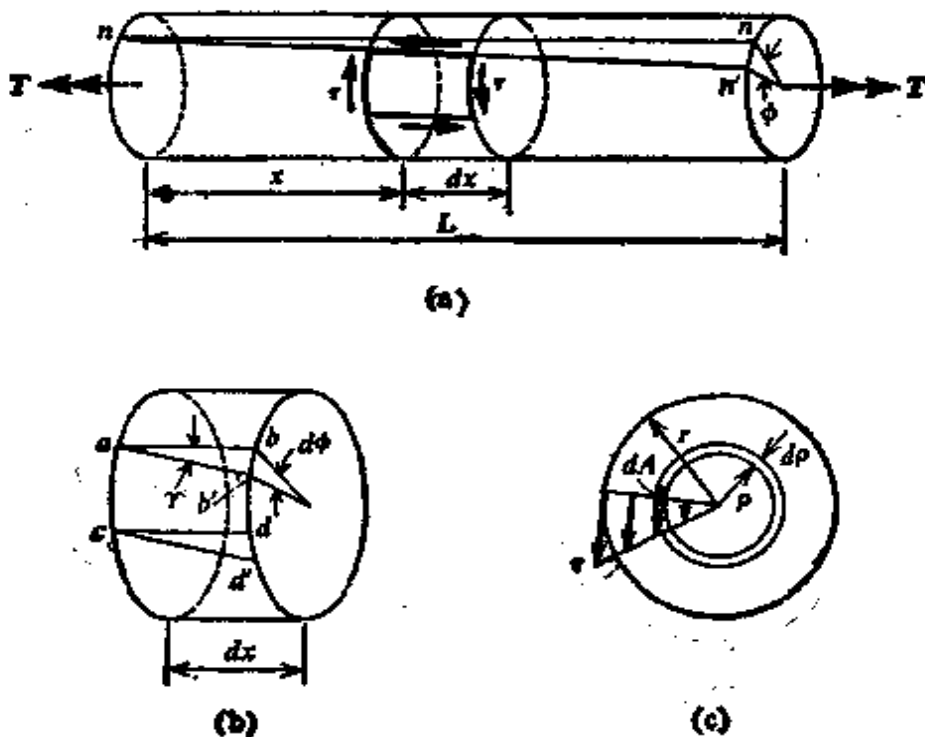


图 3-1. 受纯扭的圆杆.

\* 在图中用双箭头矢量表示力偶, 力偶的方向或转向按矢量的右手定则确定.

示的相距  $dx$  的两个横截面之间的微元, 被扭成一个菱形。该微元又示于图 3-1b 中, 图中把杆件的圆盘状部分已与杆件的其余部分分离开。微元的原位形标以  $abcd$ 。扭转时, 右边截面相对于另一面旋转, 而点  $b$  和  $d$  分别移到  $b'$  和  $d'$ 。在此旋转过程中微元的各边长度不变, 但在棱角处的角度不再等于  $90^\circ$ 。因此, 我们看出该微元处于纯剪状态(第 2、3 节), 而剪应变  $\gamma$  的值等于角  $b'ac$  的减小量。此角度为

$$\gamma = \frac{bb'}{ab}$$

距离  $bb'$  是半径  $r$  张角  $d\phi$  所对的微小弧长,  $d\phi$  是一个截面相对另一截面的旋转角。因此, 我们求得  $bb' = rd\phi$ 。另外, 距离  $ab$  等于微元的长度  $dx$ 。将这些表达式代入上面的方程, 我们得到

$$\gamma = \frac{rd\phi}{dx} \quad (a)$$

当轴受到纯扭转时, 扭转角的变化率  $d\phi/dx$  沿杆长为一直数。该常数代表单位长度的扭转角, 并将用  $\theta$  表示。因此, 我们得知  $\theta = \phi/L$ , 其中  $L$  为轴的长度。于是, 从方程(a), 我们有

$$\gamma = r\theta = \frac{r\phi}{L} \quad (3-1)$$

作用在微元边上的剪应力  $\tau$ , 具有如图 3-1a 所示的方向。对于线性弹性材料, 剪应力的大小(由方程 1-14 和 3-1)为

$$\tau = G\gamma = G r\theta \quad (3-2)$$

方程(3-1)和(3-2)显示出轴表面的应力和应变与单位长度扭转角之间的关系。

轴内部的应力状态可按类似于对轴表面所用的方法来确定。因为扭转时杆件横截面内的半径保持直线而不扭曲, 于是我们得知, 上述对于表面微元  $abcd$  的讨论, 亦将适用于半径为  $\rho$  的内部圆柱体表面上的相似微元(图 3-1c)。所以, 这样的内部微元也处于纯剪状态, 其相应的剪应变和剪应力由下列表达式给出:

$$\gamma = \rho\theta \quad \tau = G\rho\theta \quad (3-3a, b)$$

这些方程表明，剪应变和剪应力随距圆心的径向距离  $\rho$  线性地变化，并且在外表面处具有最大值。应力分布按三角形应力图绘于图 3-1c 中。



图 3-2. 圆杆中的纵向剪应力。

作用在横截面内并由方程 (3-3b) 给出的剪应力，伴随有作用在轴的纵面上相等的剪应力 (见图 3-2)。此结果是从互相垂直的平面上总是存在着相等的剪应力这一事实推出的，正如前面第 1.9 节所阐明的那样，如果

材料的纵向抗剪强度比横向弱 (例如木材)，那么受扭轴的首次裂纹就会沿纵轴方向出现在表面上。

如在第 2.3 节中已阐明的那样，在轴表面上的纯剪应力状态 (图 3-1a)，等效于在转过  $45^\circ$  角的微元上作用相等的拉应力和压应力。因此，与杆轴线成  $45^\circ$  面的矩形微元将受到图

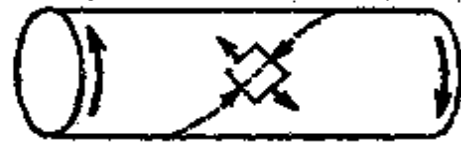


图 3-3. 在  $45^\circ$  微元上的拉应力和压应力。

3-3 所示的应力。若抗拉强度比抗剪强度弱的材料被扭转时，就会沿着与轴线成  $45^\circ$  的螺旋线发生拉伸破坏。扭转一支粉笔，可容易地演示这一破坏形式。

现在将要建立所作用的扭矩  $T$  与由它引起的扭转角之间的关系。示于图 3-1c 中的剪应力的合力必须是与总扭矩  $T$  静力等效的。作用在面积为  $dA$  的微元上的剪力 (图中以阴影线表示) 为  $\tau dA$ ，此力对杆轴之矩为  $\tau \rho dA$ 。使用方程 (3-3b)，我们得知，此矩亦等于  $G\theta \rho^2 dA$ 。总扭矩  $T$  为在整个横截面上这种微元力矩之和，因此

$$T = \int G\theta \rho^2 dA = G\theta \int \rho^2 dA = G\theta J \quad (3-4)$$

其中

$$J = \int \rho^2 dA \quad (3-5)$$

为圆截面的极惯性矩。对半径为  $r$  或者直径为  $d$  的圆，极惯性矩 (见附录 B，情况 6) 为

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3-6)$$

由方程(3-4), 我们得到

$$\theta = \frac{T}{GJ} \quad (3-7)$$

上式表明, 单位长度的扭转角  $\theta$  按与扭矩  $T$  成正比而与乘积  $GJ$  成反比地改变,  $GJ$  称为轴的扭转刚度. 总扭角  $\phi$  (等于  $\theta L$ ) 为

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (3-8)$$

此方程对理论的实验验证是有用的, 而且它已被许多实验检验过, 那些实验证明了在该公式推导时所作的假设是正确的. 还应注意, 扭转实验通常用来确定各种材料的剪切弹性模量  $G$ . 如果在给定轴中由于扭矩产生的扭转角已被测出, 那么由方程(3-8)便可容易地计算出  $G$  的大小.

将方程(3-7)中的  $\theta$  代入到方程(3-2), 我们便得到计算实心圆轴受扭时的最大剪应力方程:

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} \quad (3-9)$$

该式表明, 最大剪应力与作用的扭矩成正比, 而与横截面的极惯性矩成反比. 在距圆心为  $\rho$  的横截面内任一点处的剪应力为

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (3-10)$$

它由式(3-3b)而得\*.

在机械设计中, 轴的直径有时必须根据它要传递的功率来确定. 当轴旋转一周时, 扭矩  $T$  所作之功为  $2\pi T$ , 因此每分钟所作之功为  $2\pi nT$ , 其中  $n$  为轴每分钟的转数. 回忆一瓦等于 1 焦耳 (即 1 Nm/s), 我们得知功率  $W$  为

$$W = \frac{2\pi nT}{60}$$

只是  $T$  要用 Nm 来度量. 若功率  $W$  给定, 轴的扭矩  $T$  可根据下

\* 以上方程是对实心圆杆导出的, 非圆形实心杆的扭转将在《高等材料力学》中研究. 这里所给出的初等扭转理论起源于 C. A. 库仑 (Coulomb, 1736—1806) 和 T. 杨 (Young 参考文献 3-1) 的著作. 一般的扭转理论应归功于圣维南 (参考文献 3-2).

列方程确定:

$$T = \frac{60W}{2\pi n} \approx \frac{9.5W}{n} \quad (3-11)$$

式中  $T$  的单位为  $\text{Nm}$ , 若扭矩  $T$  已知, 轴内的最大剪应力可由方程(3-9)求得, 而扭角可由方程(3-8)求得.

**例题 1** 有两段不同直径的实心圆轴  $AB$ , 两端固定并承受扭矩  $T_0$ , 如图 3-4a 所示. 试求端部的反扭矩  $T_a$  和  $T_b$  以及在  $T_0$  作用截面处的旋转角  $\phi_0$ .

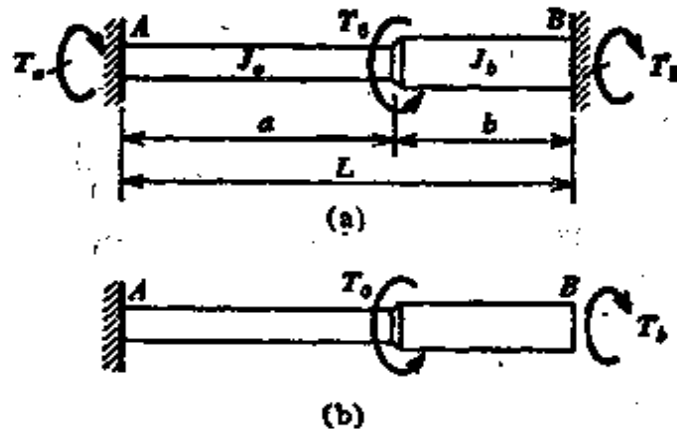


图 3-4. 例题 1.

该杆件是静不定的, 因有两个未知扭矩  $T_a$  和  $T_b$ , 而只有一个静力平衡方程:

$$T_a + T_b = T_0 \quad (b)$$

如果选择反扭矩  $T_b$  为多余反力, 并假想杆的  $B$  端被切开使其脱开支座 (图 3-4b), 我们会观察到,  $B$  端总的旋转角  $\phi_b$  为  $T_0$  和  $T_b$  所产生的旋转角之和. 因此, 我们有

$$\phi_b = \frac{T_0 a}{GJ_a} - \frac{T_b a}{GJ_a} - \frac{T_b b}{GJ_b}$$

由于  $B$  端的旋转角必等于零, 协调方程变为  $\phi_b = 0$ . 因此, 我们得到扭矩  $T_b$  的下列结果:

$$T_b = \frac{T_0}{1 + \frac{bJ_a}{aJ_b}} \quad (c)$$

将此结果代入方程(b), 就给出了  $T_a$  的类似表达式:

$$T_a = \frac{T_0}{1 + \frac{aJ_b}{bJ_a}} = \frac{bJ_a}{aJ_b} T_b \quad (d)$$

$T_0$  作用处横截面的旋转角  $\phi_0$  可由杆的左侧或右侧部分求得如下:



$$\phi_0 = \frac{T_0 a}{GJ_0} = \frac{T_0 b}{GJ_0} = \frac{T_0 ab}{G(bJ_0 + aJ_0)} \quad (e)$$

**例题 2** 一长为  $L$  的实心圆截面锥形杆  $AB$  (图 3-5) 受扭矩  $T$  作用而扭转。试求杆的扭转角  $\phi$ 。

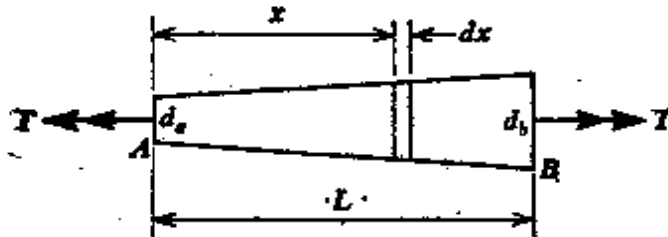


图 3-5. 例题 2.

如果该杆的锥角很小，我们对长为  $dx$  的微段 (图 3-5) 应用方程 (3-8) 就可相当精确地求出  $\phi$  角。对此微段，扭角为

$$d\phi = \frac{T dx}{GJ_x}$$

其中  $J_x$  表示距左端为  $x$  处横截面的极惯性矩。把  $A$  和  $B$  端的直径分别用  $d_a$  和  $d_b$  来表示，我们得知， $J_x$  的表达式为

$$J_x = \frac{\pi}{32} \left( d_a + \frac{d_b - d_a}{L} x \right)^4 \quad (f)$$

总扭角  $\phi$  为

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T dx}{GJ_x} \quad (g)$$

将方程 (f) 代入方程 (g) 并积分，我们求得

$$\phi = \frac{32TL}{3\pi G} \left( \frac{1}{d_b - d_a} \right) \left( \frac{1}{d_a^3} - \frac{1}{d_b^3} \right) \quad (h)$$

该例题说明当  $J$  为  $x$  的函数时，如何使方程 (3-8) 适用于求旋转角  $\phi$ 。当  $T$  沿着杆的轴线变化时，亦可采用同样的方法。

### 3.2 空心圆杆的扭转

正如上节所述，实心圆杆受扭时的最大剪应力在外表面处最大，而在中心处等于零。因此，实心轴的大部分材料受力将远低于容许应力。如果减轻重量和节省材料是重要的，则使用空心轴就是合理的。

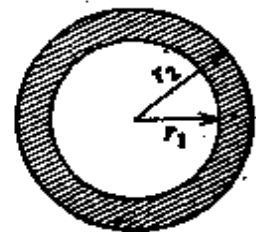


图 3-6. 空心圆管。

空心圆轴的扭转分析，基于与实心轴相同的假设。因此，由于横截面内的径向线保持直线，上节中导出的

剪应力和剪应变的表达式(方程 3-3)仍可使用。自然,在这些表达式中所出现的径向距离  $\rho$  被限于  $r_1$  至  $r_2$  的范围内,其中  $r_1$  为圆管的内半径,而  $r_2$  为圆管的外半径(图 3-6)。

所施加的扭矩  $T$  和每单位长度的扭转角  $\theta$  之间的关系,可由方程(3-4)和(3-5)求得,只是积分限将为  $\rho=r_1$  和  $\rho=r_2$ 。因此,关系式  $T=G\theta J$  仍然有效,只是  $J$  为环形截面的极惯性矩:

$$J = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) \quad (3-12)$$

只要  $J$  按上式计算,则上节中给出的关于  $\theta$ 、 $\phi$  和  $\tau$  的基本方程(方程 3-7 至 3-10)可用于圆管\*。

**例题 1** 一空心轴和一实心轴具有相同的外半径  $r$ 。空心轴的内半径为  $0.6r$ 。假设这两根轴承受相同的扭矩,试比较它们的重量和最大剪应力。

重量与横截面面积成正比,因而,实心轴的重量与  $\pi r^2$  成正比,而空心轴的重量与  $\pi r^2 - \pi(0.6r)^2 = 0.64\pi r^2$  成正比。故空心轴的重量为实心轴重量的 64%。

最大剪应力与  $1/J$  成正比。对于实心轴,我们有  $J = \pi r^4/2$ , 而对空心轴  $J = \pi r^4/2 - \pi(0.6r)^4/2 = 0.8704\pi r^4/2$ 。所以,空心轴的最大剪应力与实心轴的最大剪应力之比为 1.15。这些结果表明,对于具有  $r_1/r_2 = 0.6$  的空心轴,其最大剪应力(与实心轴相比)增加了 15%,但其重量却减少了 36%。



图 3-7. 例题 2.

**例题 2** 一根圆杆系由空心管  $B$  和实芯  $A$  牢固的胶接在一起而制成,并象一根实心杆那样承力(图 3-7)。内部材料的剪切弹性模量为  $G_a$ , 外部材料的剪切弹性模量为  $G_b$ , 当此组合杆承受扭矩  $T$  时,试分别导出内部和外部材料的最大剪应力  $\tau_a$  和  $\tau_b$  的公式。

管和芯两者单位长度的扭转角必须相同。因此,由方程(3-3b)得

$$\theta = \frac{\tau_a}{G_a r_a} = \frac{\tau_b}{G_b r_b} \quad (a)$$

其中  $\tau_a$  为内部材料在半径  $r_a$  处的剪应力,而  $\tau_b$  为外部材料在半径  $r_b$  处的剪应力。又总扭矩  $T$  是由芯内的扭矩  $T_a$  加上管内的扭矩  $T_b$  所组成:

$$T = T_a + T_b = G_a \theta J_a + G_b \theta J_b \quad (b)$$

\* 任意截面形状的薄壁管的扭转在 3.4 节中讨论,也在《高等材料力学》中讨论。

如方程(3-4)所确定的那样。极惯性矩  $J_a$  和  $J_b$  为

$$J_a = \frac{\pi r_a^4}{2} \quad J_b = \frac{\pi}{2} (r_b^4 - r_a^4)$$

由方程(b)解出  $\theta$ , 得

$$\theta = \frac{T}{G_a J_a + G_b J_b}$$

上式与方程(a)联合, 给出

$$\tau_a = T \frac{G_a r_a}{G_a J_a + G_b J_b}, \quad \tau_b = T \frac{G_b r_b}{G_a J_a + G_b J_b} \quad (c)$$

杆的两部分所负担的扭矩为

$$T_a = T \frac{G_a J_a}{G_a J_a + G_b J_b}, \quad T_b = T \frac{G_b J_b}{G_a J_a + G_b J_b} \quad (d)$$

注意, 此例题涉及了静不定问题的分析。

### 3.8 扭转应变能

实心圆轴的应变能可根据前面对纯剪时的弹性材料微元所导出的方程(1-23a)计算, 此处将该方程重写如下:

$$u = \frac{\tau^2}{2G} \quad (a)$$

在该方程中,  $u$  为每单位体积的应变能,  $\tau$  为剪应力。为了将该方程用于受扭杆件, 我们必须得出  $u$  的一般表达式, 然后沿整个杆件的体积进行积分。

如果  $\tau_{\max}$  为杆外表面处的剪应力, 那么在距杆轴为  $\rho$  处的剪应力就是  $\tau_{\max} \rho/r$ , 其中  $r$  为外半径。在此径向距离处单位体积的应变能(根据方程 a) 为

$$u = \frac{\tau_{\max}^2 \rho^3}{2r^2 G}$$

而在长为  $L$ , 半径为  $\rho$  及厚度为  $d\rho$  的微元管内的应变能为

$$dU = u dV = \frac{\pi \tau_{\max}^2 L \rho^3 d\rho}{r^2 G}$$

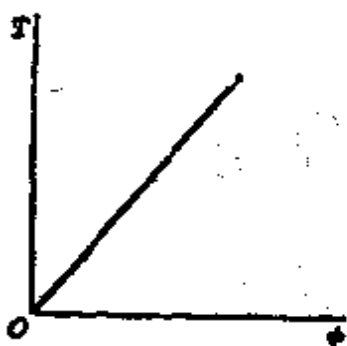
在上下限  $\rho=0$  和  $\rho=r$  之间对上式进行积分, 便得总应变能, 因此

$$U = \frac{\pi \tau_{\max}^2 L}{r^2 G} \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi \tau_{\max}^2 L r^3}{4G} \quad (3-13)$$

只要最大剪应力为已知, 就可用此方程求出实心轴的应变能。注

意,  $\tau_{\max} = T r / J$ , 其中  $J = \pi r^4 / 2$ , 于是我们可将方程(3-13)写为另一种形式

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad (3-14)$$



该式给出用扭矩  $T$  表示的应变能。

上述推导也可对空心圆管进行, 此时还会得到方程(3-14), 只是  $J$  应为其相应的惯性矩(方程 3-12)。

求得扭转应变能的一个更为直接的方法是根据载荷-变位图(图 3-8)。

如果杆件的材料服从虎克定律, 作用的扭矩  $T$  和扭转角  $\phi$  之间的关系就是线性的, 并由方程(3-8)给出。在杆件扭转过程中, 扭矩  $T$  所作之功等于载荷-变位曲线下侧的面积, 因此贮存在杆中的相应的应变能为

$$U = \frac{T\phi}{2} \quad (3-15)$$

将方程(3-8)和(3-15)联合, 给出下列任一形式的应变能表达式:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad U = \frac{GJ\phi^2}{2L} \quad (3-16a, b)$$

这两个方程中的第一个与方程(3-14)相同并用扭矩  $T$  表示应变能; 第二个表达式用扭转角  $\phi$  表示应变能。只要使用相应的  $J$  的表达式, 这些方程对于实心或空心圆轴都是成立的。注意方程(3-16)与以前导出的受拉杆件方程(方程 1-16)之间的相似性。

如果受扭杆件为变半径圆形截面杆, (例如, 象图 3-5 所示)或扭矩沿杆件变化, 则为了求得杆件的应变能, 我们必须研究距杆的一端  $x$  处, 长为  $dx$  的微段圆盘。假设作用在此微段上的扭矩为  $T_x$ , 并且横截面的极惯性矩为  $J_x$ , 我们从方程(3-16a)得知, 微段的应变能为

$$dU = \frac{T_x^2 dx}{2GJ_x}$$

杆中总应变能现可表达为下列形式

$$U = \int_0^L \frac{T_x^2 dx}{2GJ_x} \quad (3-17a)$$

另一种作法, 我们可从方程 (3-16b) 开始, 并注意到长为  $dx$  的微段的扭转角为  $d\phi$ . 于是我们由方程(3-16b)得到微段应变能的下列表达式:

$$dU = \frac{GJ_p(d\phi)^2}{2 dx} = \frac{GJ_p}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx$$

由此

$$U = \int_0^L \frac{GJ_p}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \quad (3-17b)$$

方程(3-17)的任何一个均可用来求应变能, 这取决于已知扭矩  $T_x$  还是已知单位长度的扭角  $\theta$ (等于  $d\phi/dx$ ).

### 3.4 薄壁管

一根任意截面形状的薄壁管表示在图 3-9a 中. 管的厚度  $t$  可沿其横截面周边而变, 但假设它与横截面的总宽度相比是很小的. 该管为柱状, 并在每端承受扭矩  $T$ . 在此扭矩作用下, 管的每个截面上将产生剪应力 (图 3-9b). 虽然剪应力沿着横截面的周边可能是变化的, 但在管的微小厚度上可以认为它们是均匀的.

为了研究剪应力  $\tau$  的大小, 首先让我们考虑一个长为  $dx$  的微元  $abcd$ , 它是通过作两个纵向切面  $ab$  和  $cd$ (图 3-9b)而得到的. 因为两个互垂面上的剪应力大小相等(见第 1.9 节), 所以在该微元的纵向边缘上, 将存在着与横截面上作用的相同大小的剪应力. 纵面上的剪应力具有合力  $F_1$  和  $F_2$ (图 3-9c), 它们可以表示如下:

$$F_1 = \tau_1 t_1 dx \quad F_2 = \tau_2 t_2 dx$$

其中  $\tau_1$  和  $\tau_2$  分别表示  $b$  点和  $c$  点的剪应力, 而  $t_1$  和  $t_2$  为在相同位置处管的厚度. 根据图 3-9c 中微元的平衡, 我们得知  $F_1 = F_2$ , 或

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$$

由于纵向切面  $ab$  和  $cd$  的位置是任意选取的, 所以我们从上面的方程看出: 在横截面内每一点处的剪应力与管壁厚度之乘积均相同. 此乘积称为剪流并将以符号  $f$  表示之:

$$f = \tau t = \text{常数} \quad (3-18)$$

因而, 最大剪应力发生在厚度最小处, 反之亦然. 自然, 如果管的厚度是均匀的, 那么沿着管的周边剪应力  $\tau$  就为常数.

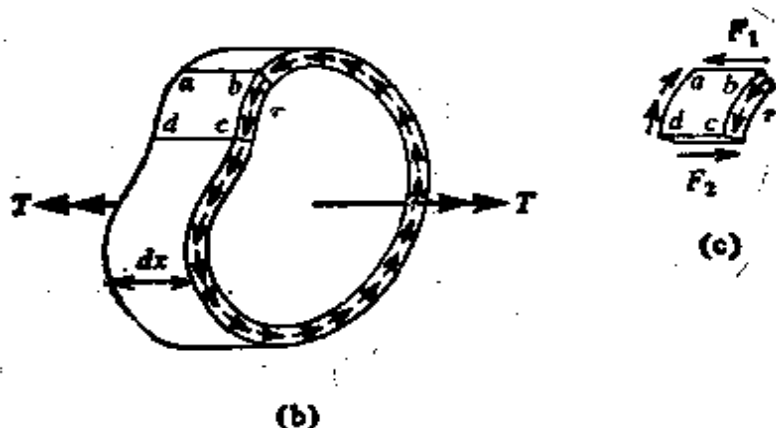
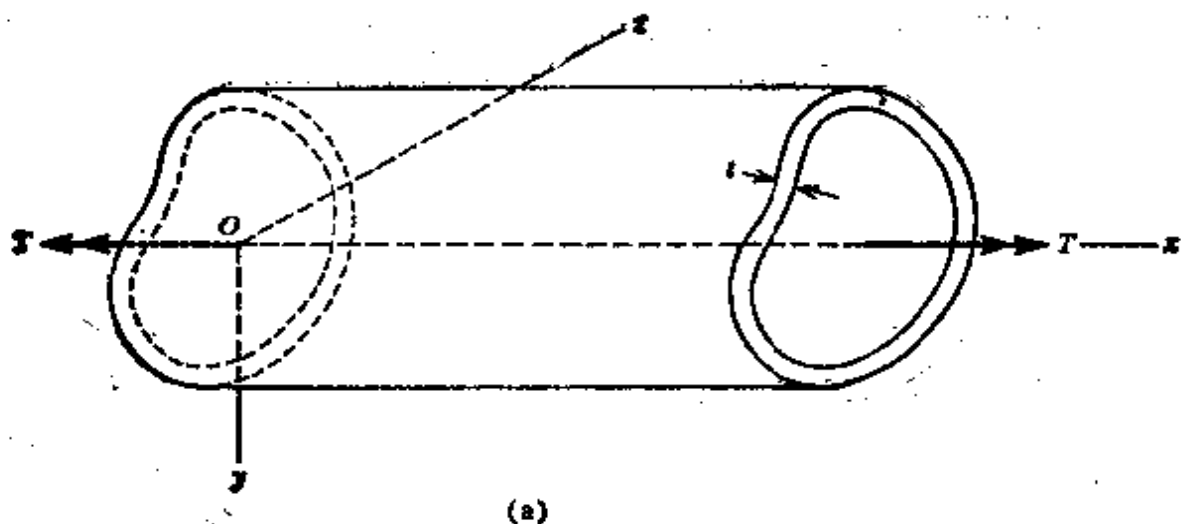


图 3-9. 任意横截面形状的薄壁管。

为使剪流  $f$  与作用在管上的扭矩  $T$  联系起来，我们研究横截面内长为  $ds$  的一个微元(图 3-10)。作用在阴影微元上的总的剪力为  $f ds$ ，此力对任意点  $O$  之矩为

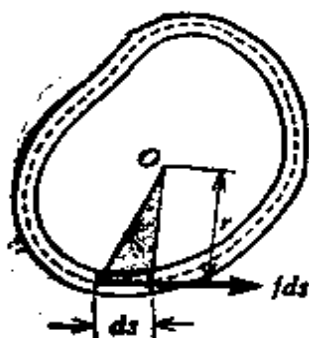


图 3-10. 管的横截面。

$$dT = r f ds$$

其中  $r$  为从  $O$  到管壁中线的切线的距离，沿横截面中线的整个长度  $L_m$  进行积分便得到总扭矩：

$$T = f \int_0^{L_m} r ds$$

对此表达式中的积分可给一个简单的几何解释。  $r ds$  这个量代表图 3-10 所示的小三角形的面积的两倍。注意，该三角形的底边长为  $ds$ ，而高等于  $r$ 。因此，上述积分代表管壁中线所围面积的两

倍。用  $A_m$  表示这一面积, 我们有

$$T = 2f A_m$$

或

$$f = \tau t = \frac{T}{2A_m} \quad (3-19)$$

根据此方程, 可以计算任何薄壁管的剪流或剪应力。

通过研究管的应变能, 可以计算管的单位长度的扭转角。正如方程(1-23a)所给, 单位体积的应变能为  $\tau^2/2G$ , 因此管的单位长度的应变能为

$$U = \int_0^{L_m} \frac{\tau^2 t}{2G} ds = \frac{f^2}{2G} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t}$$

将方程(3-19)的剪流表达式代入, 并使应变能等于扭矩  $T$  所作之功, 我们得

$$\frac{T^2}{8GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} = \frac{T\theta}{2}$$

所以, 单位长度的扭转角为

$$\theta = \frac{T}{4GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} \quad (3-20)$$

当横截面的尺寸已知时, 根据此式可以计算扭转角。如果厚度  $t$  为常数, 该方程就变为

$$\theta = \frac{TL_m}{4GtA_m^2} = \frac{\tau L_m}{2GA_m} \quad (3-21)$$

将管长  $L$  乘以  $\theta$  即得总扭转角  $\phi^*$ 。

薄壁管单位长度扭转角的方程(3-20)具有与实心圆杆的方程(3-7)相同的形式, 只要我们对  $J$  采用下列表达式:

$$J = \frac{4A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}} \quad (3-22)$$

量  $J$  一般称为横截面的扭转常数。我们知道, 对于圆截面杆而言, 扭转常数等于极惯性矩, 而对薄壁管, 它由方程(3-22)给出。当管的厚度  $t$  为常数时, 方程(3-22)简化为

\* 方程(3-19)和(3-21)分别称为布雷特 (Bredt) 第一公式和第二公式(参考文献 3-3 和 3-4)。

$$J = \frac{4tA_m^2}{L_m} \quad (3-23)$$



图 3-11. 薄壁圆管.

对于一根具有等厚度  $t$  及中线半径为  $r$  的薄圆管(图 3-11), 中线长度为  $L_m = 2\pi r$ , 且此线所围面积为  $A_m = \pi r^2$ . 因此其剪流和剪应力(根据方程 3-19)为

$$f = \frac{T}{2\pi r^2} \quad \tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} \quad (3-24a, b)$$

由方程(3-20), 得到的单位长度的扭转角为

$$\theta = \frac{T}{2\pi G r^3 t} \quad (3-25)$$

及扭转常数为

$$J = 2\pi r^3 t \quad (3-26)$$

有关薄圆管的所有这些结果, 也可从前面有关空心管导出的方程求得(见第 3.2 节). 例如, 扭转常数(对此情况, 等于极惯性矩)为

$$J = \int \rho^2 dA \approx r^2 \int dA \approx 2\pi r^3 t$$

在此假设半径  $\rho$  在整个厚度上接近常数, 并等于  $r$ . 其最大剪应力(见方程 3-9)为

$$\tau = \frac{T r}{J} \approx \frac{T}{2\pi r^2 t}$$

这里假设沿整个厚度剪应力  $\tau$  为常数并等于横截面中线处之值.

如果一根受扭管的壁很薄, 管壁屈曲的可能性就必须加以考虑. 例如, 一根由低碳钢制成的圆管, 当比值  $r/t$ (见图 3-11) 约为 60 时, 在正常的工作应力下将发生屈曲(见参考文献 3-5).

**例题 1** 试将近似方程(3-24b)所计算的薄壁圆管(图 3-11)的平均剪应力与按扭转公式(方程 3-9)计算的最大剪应力进行比较.

剪应力的近似公式给出

$$\tau_1 = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{T}{2\pi r^3 \beta^2} \quad (a)$$

在式中引进了符号  $\beta = r/t$ . 管中的真实最大剪应力由下列方程给出

$$\tau_2 = \frac{T(r+t/2)}{J} \quad (b)$$



其中

$$J = \frac{\sigma}{2} \left[ \left( r + \frac{t}{2} \right)^4 - \left( r - \frac{t}{2} \right)^4 \right]$$

它由方程(3-12)给出。展开之后,  $J$  的表达式简化为

$$J = \frac{\sigma r t}{2} (4r^2 + t^2)$$

因此,  $\tau_2$  的表达式(方程 b)变为

$$\tau_2 = \frac{T(2r+t)}{\sigma r t (4r^2 + t^2)} = \frac{T(2\beta+1)}{\sigma t^2 \beta (4\beta^2 + 1)} \quad (c)$$

比值  $\tau_1/\tau_2$  为

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{4\beta^2 + 1}{2\beta(2\beta + 1)} \quad (d)$$

它只取决于量  $\beta$ , 亦即比例  $r/t$ 。对于等于 5, 10 和 20 的  $\beta$  值, 由方程(d) 我们分别得到比值  $\tau_1/\tau_2 = 0.92, 0.96$  和  $0.98$ 。因此, 方程(d)表明, 由应力近似公式给出的结果仅比由精确公式给出的结果略小, 而且近似公式的精确度随着比值  $r/t$  的增大而增大。

**例题 2** 一根圆管和一根方管(图 3-12) 系用相同材料制成。两根管具有相同的长度、厚度, 与横截面面积, 并承受相同的扭矩。试问这两根管的剪应力之比与扭转角之比为多少?(略去方管拐角处应力集中的影响)

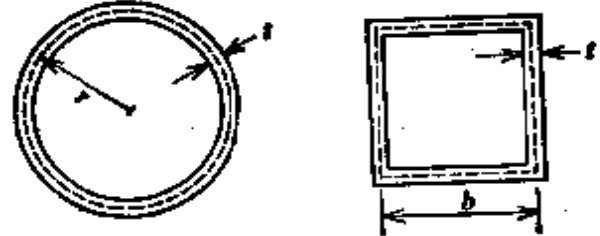


图 3-12. 例题 2.

对于圆管, 由横截面中线所围的面积  $A_{m1}$  为  $A_{m1} = \sigma r^2$ , 其中  $r$  为中线的半径。另外, 圆管的横截面面积为  $A_1 = 2\sigma r t$ 。

对于方管, 其横截面面积为  $A_2 = 4bt$ , 其中  $b$  为沿中线度量的边长。由于两根管的面积是相同的, 我们得到  $b = \sigma r/2$ 。另外, 截面中线所围的面积为  $A_{m2} = b^2$ 。

圆管内的剪应力与方管内的剪应力之比  $\tau_1/\tau_2$  为(见方程 3-9)

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} = \frac{b^2}{\sigma r^2} = \frac{\sigma}{4} = 0.785 \quad (e)$$

扭转角之比(见方程 3-21) 为

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\tau_1 A_{m2}}{\tau_2 A_{m1}} = \left( \frac{\sigma}{4} \right)^2 = 0.617 \quad (f)$$

这些结果表明, 圆管不仅具有比方管低的剪应力, 而且具有较高的抗扭刚度。

### 3.5 圆杆的非弹性扭转

在 3.1 和 3.2 节中对圆杆扭转导出的方程, 只有在材料服从

虎克定律时才适用。现在让我们研究当剪应力超过比例极限时杆件的性态。在此情况下，从对称性考虑我们仍然可以假设圆截面保持平面，而其半径保持直线。可见，用与弹性扭转情况下相同的公式给出在距杆轴为  $\rho$  处的剪应变  $\gamma$  (见图 3-1c)，即

$$\gamma = \rho\theta \quad (3-27)$$

在横截面外边缘的最大剪应变为

$$\gamma_{\max} = r\theta \quad (3-28)$$

其中  $r$  为杆的半径。如果已知材料的剪应力-应变图(图 3-13a)，便可确定杆中任意点处的剪应力  $\tau$ 。在横截面外边缘处其应变为  $\gamma_{\max}$ ，而相应的应力  $\tau_{\max}$  可由应力-应变图求得。在杆的中间各点处，可使用相同的方法。结果，横截面上的剪应力分布将具有与应力-应变图本身相同的形状。

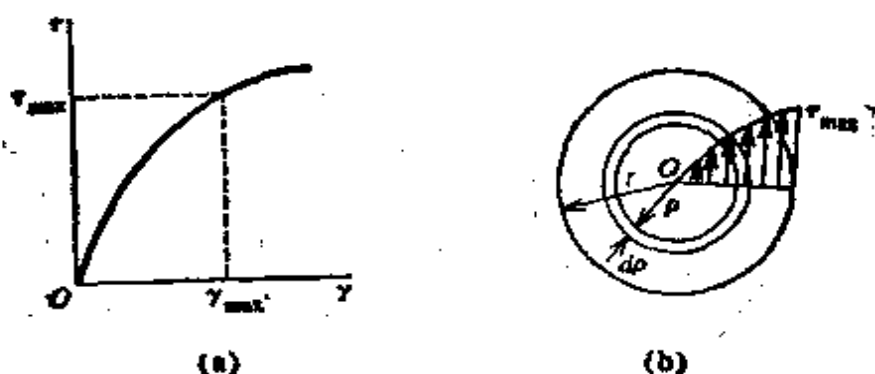


图 3-13. 圆杆的非弹性扭转。

为了产生所假定的单位长度扭角  $\theta$  而必须作用在杆上的扭矩  $T$ ，可以根据静力学方程求得(见图 3-13b)：

$$T = \int_0^r 2\pi\rho^2\tau d\rho \quad (3-29)$$

由方程(3-27)，我们得  $\rho = \gamma/\theta$  和  $d\rho = d\gamma/\theta$ 。将这些关系式代入方程(3-29)，并将积分上限改变为  $\gamma_{\max} = r\theta$ ，我们得到

$$T = \frac{2\pi}{\theta^3} \int_0^{\gamma_{\max}} \tau\gamma^2 d\gamma \quad (3-30)$$

该方程右边的积分具有一简单的几何解释。它是在应力-应变图(图 3-13a)下侧坐标原点  $O$  与最大应变  $\gamma_{\max}$  之间的面积对竖直轴(即  $\tau$  轴)的惯性矩。因此，对于任何一个假定的  $\theta$  值，我们能够

计算  $\gamma_{\max}$  和相应的惯性矩。然后, 根据方程(3-30), 我们可以得到扭矩  $T$  的值。对各种  $\theta$  值重复这一步骤, 我们便得到表示  $T$  与  $\theta$  关系的一条曲线。有了这样一条曲线, 对任何一个给定的  $T$  值, 我们便可容易地确定  $\theta$  和  $\tau_{\max}$ 。

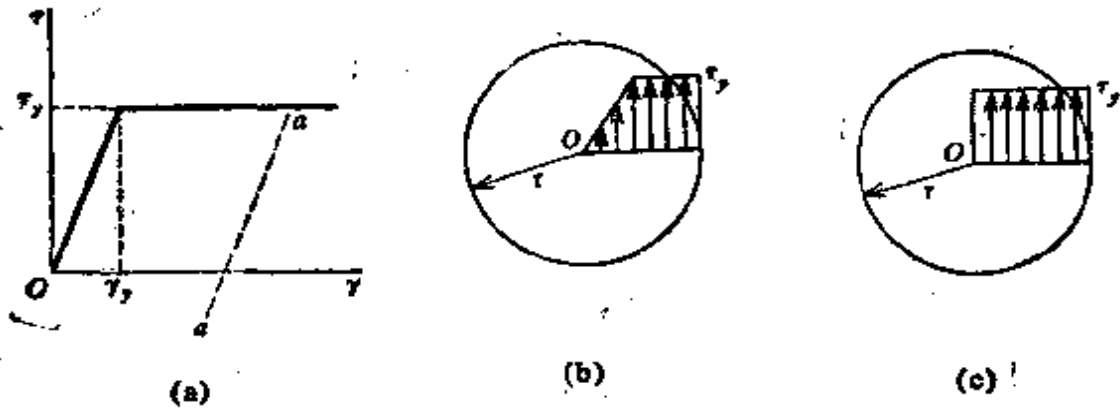


图 3-14. 弹塑性材料杆的扭转。

如果杆件的材料具有明显的屈服点  $\tau_y$ , 那么应力-应变图可以理想化为如图 3-14a 所示。该图由两条直线所组成: 第一条代表线性弹性性态, 第二条代表完全塑性性态。只要杆件中的最大应变小于  $\gamma_y$ , 杆就表现为弹性性态, 并可使用在第 3.1 节中导出的公式。当横截面外边缘上的应变超过  $\gamma_y$  时, 横截面上的应力分布将具有图 3-14b 所示的形式。该图表明, 屈服从外边缘开始并随着应变增大而逐渐向内移动。如果应变变得很大, 那么屈服区将接近杆的中部, 而应力分布图将接近于图 3-14c 所示的均匀分布。相应的扭矩  $T$  为杆的极限扭矩, 而它的值(根据方程 3-29)为

$$T_y = \int_0^r 2\pi\rho^2\tau_y d\rho = \frac{2\pi r^3\tau_y}{3} \quad (3-31)$$

当达到该扭矩值时, 即使扭矩不再增加, 轴的进一步扭转亦将出现。最后, 应变硬化效应将变得很显著, 于是便出现了大于  $\tau_y$  的应力。

杆中最初开始屈服时的扭矩  $T_y$ , 可由方程 (3-9) 以  $\tau_y$  代替  $\tau_{\max}$  而得:

$$T_y = \frac{\tau_y J}{r} = \frac{\pi r^3\tau_y}{2} \quad (3-32)$$

比较方程(3-31)和(3-32), 我们看出极限扭矩与屈服扭矩之比为

$$\frac{T_u}{T_y} = \frac{4}{3} \quad (3-33)$$

由此结果我们看到, 杆内屈服开始后, 只要扭矩增加三分之一, 就会使杆达到极限承载能力。

**残余应力** 如果杆件在扭转时加载超过了弹性极限, 而后再将载荷移去, 杆中就会保留某些应力。这种应力称为残余应力。为了说明其计算方法, 让我们假设一根实心圆杆加载至极限扭矩  $T_u$ , 因而产生图 3-14c 所示的应力分布, 而后再将该扭矩完全移去。在载荷移去的过程中, 亦即在卸载过程中, 材料服从应力-应变图上的一根与表达虎克定律的初始直线相平行的直线 (图 3-14a 中的线  $a-a$ ), 因此, 卸载过程中产生的应力可以根据线性弹性性态的方程 (方程 3-9 和 3-10) 求得。

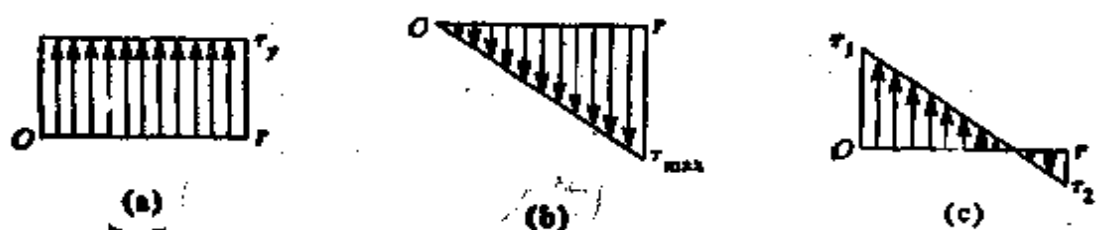


图 3-15. 残余应力

加载与卸载过程中所产生的叠加应力示于图 3-15 中。加载过程中所达到的应力示于图的第一部分, 相应的扭矩为  $T_u = 2\pi r^3 \tau_y / 3$ 。同样的扭矩也可用图 3-15b 中的卸载应力图表示, 只是现在扭矩所作用的方向是相反的, 而且其性态为线性弹性的, 最大应力为  $\tau_{\max} = T_u r / J$  或  $\tau_{\max} = 4\tau_y / 3$ 。通过叠加加载时和卸载时的应力, 得出杆中的残余应力示于图 3-15c 中, 在杆中心处残余应力为

$$\tau_1 = \tau_y$$

而在横截面外边缘处, 残余应力为

$$\tau_2 = \tau_{\max} - \tau_y = \tau_y / 3$$

后一应力与  $\tau_1$  反向。这种计算残余应力的方法也可用于其他形状的应力-应变图。

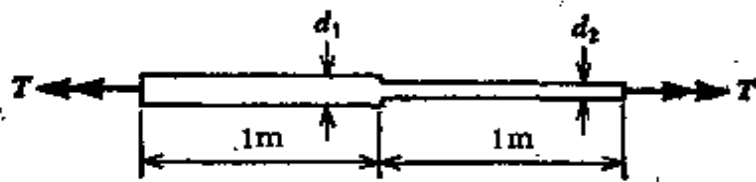
## 习 题

**3.1-1** 一直径  $d=50\text{ mm}$  的钢轴, 假如其扭转角为  $6^\circ$  时, 最大剪应力为  $90\text{ N/mm}^2$ , 试确定钢轴的长度 ( $G=80\text{ kN/mm}^2$ ).

**3.1-2** 假如一钢丝被扭转  $90^\circ$  时, 最大剪应力为  $90\text{ N/mm}^2$ , 试问钢丝的长度与直径之比值 ( $L/d$ ) 是多少 ( $G=80\text{ kN/mm}^2$ )?

**3.1-3** 假如圆杆的容许剪应力  $\tau_w=20\text{ N/mm}^2$ , 单位长度上的容许扭转角每 4 米为  $1^\circ$ , 试问当杆承受扭矩  $T=3.6\text{ kN}\cdot\text{m}$  时, 它所需的最小直径是多少? (假设  $G=80\text{ kN/mm}^2$ ).

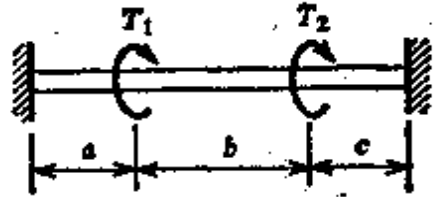
**3.1-4** 一受扭杆, 其一半长度的直径为  $d_1=50\text{ mm}$ , 另一半长度的直径为  $d_2=38\text{ mm}$  (见图). 假如扭转角  $\phi$  不超过  $0.01$  弧度, 试问容许扭矩  $T$  为多少? (假设  $G=80\text{ kN/mm}^2$ .)



习题 3.1-4

**3.1-5** 扭矩  $T$  作用在一直径为  $d$  的实心圆杆上, 测得该杆表面上 (与轴成  $45^\circ$ ) 的最大正应变为  $\epsilon$ . 试导出以  $T$ ,  $d$  和  $\epsilon$  表示的剪切弹性模量  $G$  的公式.

**3.1-6** 试问图中所示两端固定圆杆中间区域内的扭矩是多少? 假设  $T_1=2T_2$ , 又  $a=c=L/4$ ,  $b=L/2$ .



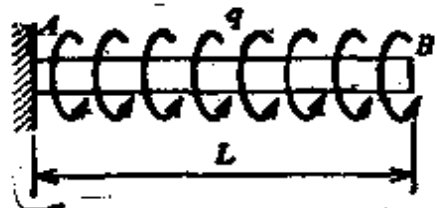
习题 3.1-6

**3.1-7** 试确定轴在转速为每分钟 120 转, 传递  $150\text{ kW}$  的载荷时, 所需的直径  $d$  为多少? 假设剪切时容许工作应力为  $\tau_w=20\text{ N/mm}^2$ .

**3.1-8** 一简单的圆盘式离合器, 将扭矩从一根轴传递到另一根轴, 如



习题 3.1-8



习题 3.1-9

图所示。离合器的诸盘为圆形板(直径为 $d$ )，是用法向力 $P$ 把它们压合在一起。假设力 $P$ 是均匀地分布在离合器圆板的表面上，并且各板之间的摩擦系数为 $f$ ，试求离合器在无滑动时所能传递的最大扭矩 $T$ 。

**3.1-9** 一左端固定的圆截面杆 $AB$ (见图)，其上作用有等集度 $q$ 的分布扭矩，试导出该杆 $B$ 端的扭转角 $\phi$ 的公式。

**3.1-10** 参见图3-5所示并在例题2中讨论过的杆，试问该杆的扭转角 $\phi$ 是直径为 $d_0$ 的棱柱形杆的扭转角的两倍时，比值 $d_0/d_0$ 等于多少？

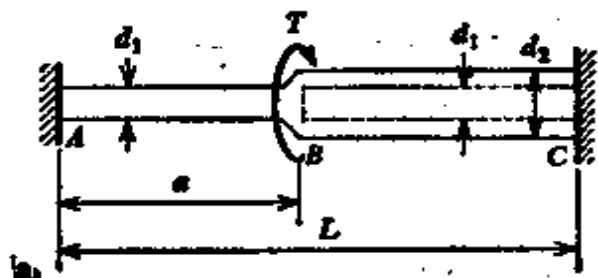
**3.1-11** 一实心圆截面杆(直径 $d=80\text{ mm}$ )，其上同时作用有 $200\text{ kN}$ 的轴向拉伸载荷 $P$ 和 $3.4\text{ kN}\cdot\text{m}$ 的扭矩 $T$ 。试计算杆中的最大拉应力、最大压应力和最大剪应力。

**3.2-1** 相同材料的一根实心圆轴和一根空心圆轴，按传递相同的扭矩 $T$ 和具有相同的最大剪应力来进行设计。如果空心圆轴的内半径是外半径的 $0.8$ 倍。试求：(a)空心圆轴与实心圆轴的重量比；(b)空心圆轴的外径与实心圆轴的直径比。

**3.2-2** 一空心铝轴( $G=28\text{ kN/mm}^2$ )，外径为 $100\text{ mm}$ ，内径为 $90\text{ mm}$ ，长为 $2\text{ m}$ 。(a)如果轴由于两端扭矩而扭转，试问当最大剪应力为 $70\text{ N/mm}^2$ ，其总扭角 $\phi$ 是多少？(b)试问对于能承受相同的扭矩、并具有相同的最大应力的实心轴，其直径是多少？

**3.2-3** 一船用螺旋推进器的空心轴，以每分钟 $100$ 转传递 $6\text{ MW}$ 的载荷，轴的最大剪应力为 $35\text{ N/mm}^2$ ，试求轴的外径 $d$ ，假设其内径为 $d/2$ 。

**3.2-4** 一两端固定的杆 $ABC$ ，在截面 $B$ 处承受一扭矩 $T$ (见图)，杆从 $A$ 至 $B$ 为实心圆截面(直径= $d_1$ )，从 $B$ 至 $C$ 为空心圆截面(外径= $d_2$ ，内径= $d_1$ )。试导出欲使 $A$ 、 $C$ 两端的反作用扭矩在数值上相等时的比值 $a/L$ 的表达式。



习题 3.2-4

**3.3-1** 试问习题3.1-4中杆的扭转角 $\phi$ 等于 $0.01$ 弧度

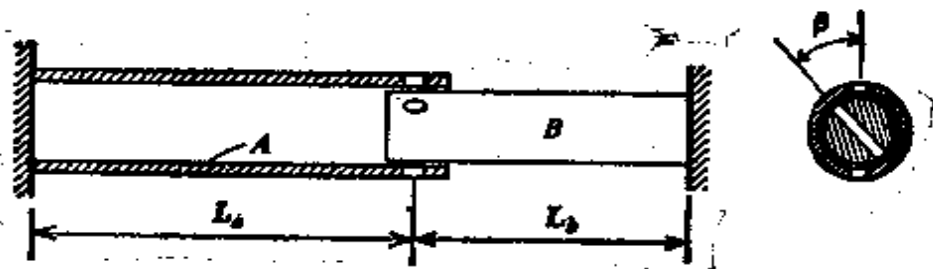
时，杆内所储存的应变能为多少？

**3.3-2** 试求习题3.1-6中杆内储存的应变能。

**3.3-3** 试求习题3.1-9中杆内储存的应变能。

**3.3-4** 两根相同长度、相同材料的实心圆杆，具有不同的横截面积 $A_1$ 和 $A_2$ 。假如两杆上作用有相同的扭矩 $T$ ，试问储存在两杆中的应变能之比值为多少？

**3.3-5** 一空心管 $A$ 套在一实心杆 $B$ 的一端，如图所示。 $B$ 杆上有一



习题 3.3-5

通孔，它与通过杆 A 上两孔的直线成  $\beta$  角，然后将杆 B 扭转，直到诸孔对准并安上一销钉。试问当该系统回复到静平衡时，两杆中所储存的总应变能是多少？（令  $J_A$  和  $J_B$  分别表示 A 管和 B 杆的极惯性矩，两杆的弹性模量  $G$  相同）

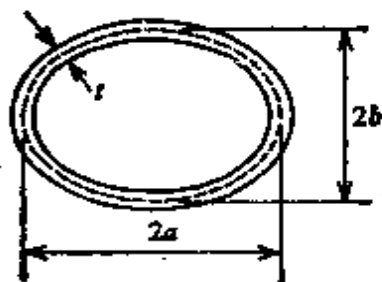
**3.3-6** 一根一端带有飞轮的实心圆轴 ( $G=80 \text{ kN/mm}^2$ )，以每分钟 120 转旋转，轴在另一端突然被刹住。试确定由于突然停止转动，而在轴上产生的最大剪应力。假设轴长度为 1.6 m，轴的直径为 50 mm，飞轮重 450 N，飞轮的旋转半径为 250 mm。（提示：令转动飞轮的动能等于轴的应变能。）

**3.4-1** 一厚度为 30 mm、内径为 230 mm 的空心圆管，承受扭矩  $T=180 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。试确定管中的最大剪应力，使用：(a) 薄壁管的近似理论和 (b) 精确的扭转理论。

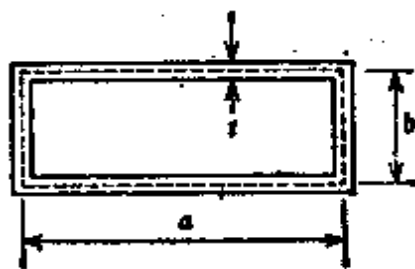
**3.4-2** 一内径为 100 mm 的圆截面薄壁管轴，其上作用的扭矩为  $6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。如果容许剪应力为  $90 \text{ N/mm}^2$ ，试确定所需要的壁厚  $t$ ，使用：(a) 薄壁管的近似理论和 (b) 精确的扭转理论。

**3.4-3** 一薄壁圆管和一实心圆杆，其材料相同，横截面面积也相同，且均受扭。若这两种情况中的最大剪应力相等，试问管的应变能与实心杆的应变能之比值为多少？

**3.4-4** 一椭圆截面的薄壁管 (见图)，其上作用有扭矩  $T=6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。试确定剪应力  $\tau$  和单位长度上的扭角  $\theta$ ，假设  $G=80 \text{ kN/mm}^2$ ， $t=5 \text{ mm}$ ， $a=75 \text{ mm}$ ， $b=50 \text{ mm}$ 。（注意：椭圆面积为  $\pi ab$ ，其周长近似为  $1.5\pi(a+b) - \pi\sqrt{ab}$ ）



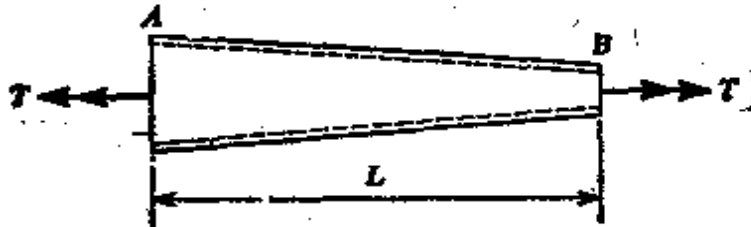
习题 3.4-4



习题 3.4-5

**3.4-5** 一矩形截面薄壁管(见图), 壁厚  $t$  为常数, 其上作用有扭矩  $T$ . 若其横截面面积保持不变, 试问管中剪应力  $\tau$  是如何随比值  $\beta = a/b$  而变化? 又问扭转常数  $J$  是如何随  $\beta$  而变化?

**3.4-6** 一薄壁圆截面锥形长管(见图), 其上作用有扭矩  $T$ . 管的壁厚  $t$  为常数, 长度为  $L$ .  $A$  和  $B$  两端处横截面中线的直径分别为  $d_a$  和  $d_b$ , 试导出该管的扭角  $\phi$  的公式.



习题 3.4-6

**3.5-1** 假设杆的材料服从虎克定律 ( $\tau = G\gamma$ ), 试用方程(3-30)导出实心圆截面杆的方程(3-7).

**3.5-2** 一实心圆截面杆(半径  $= r$ ), 受有扭矩  $T$ , 其组成材料在受剪时的应力-应变图由方程  $\tau^n = Br$  表示, 式中  $n$  和  $B$  皆为常数. (a) 试导出在横截面的外缘处剪应力  $\tau$  的公式; (b) 假设在破坏时, 极限剪应力和应变分别为  $\tau_u$  和  $\gamma_u$ , 其中,  $\tau_u^n = B\gamma_u$ , 试导出极限扭矩  $T_u$  的公式.

**3.5-3** 试导出作用于实心圆杆上的扭矩  $T$  的公式, 假如其应力分布如图 3-14b 所示. 假定在横截面的外缘处应变  $\gamma_{\max}$  是已知的, 且使用图 3-14a 所示的应力-应变曲线. (注意:  $\gamma_{\max} > \gamma_y$ ,  $T_u > T > T_y$ ). 通过观察,  $\gamma_{\max} = \gamma_y$  时,  $T = T_y$ ;  $\gamma_{\max}$  变得很大时,  $T$  接近  $T_u$ , 以此校核所得的结果.

**3.5-4** 试求空心圆截面杆(见图 3-6)的极限扭矩  $T_u$  与屈服扭矩  $T_y$  之比值. 假设杆材料的应力-应变关系示于 3-14a 图中.

**3.5-5** 试用方程(3-29)证明, 图 3-15c 所示的残余应力 ( $\tau_1 = \tau_y$ ,  $\tau_2 = -\tau_y/3$ ) 所表示的扭矩为零.



## 第四章 剪力和弯矩

### 4.1 梁的类型

承受与其轴线相垂直的作用力的杆件称为梁。本章我们只研究几种最简单类型的梁，如图 4-1 所示的那些类型。在每一种情况下，均假设梁具有一个对称平面，该平面与图自身平面相平行。因此，梁的横截面具有一根竖直对称轴。此外，假设载荷作用在对称面内，因而梁的弯曲就发生在该平面内。后面在第八章中，我们将研究更一般的弯曲型式，其中梁可具有非对称截面。

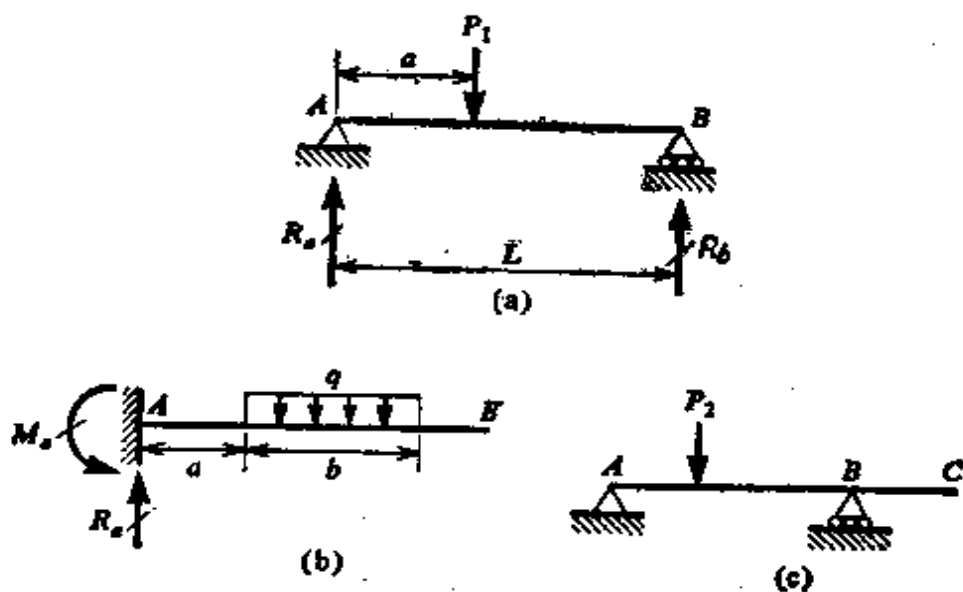


图 4-1. 梁的类型。

在图 4-1a 中所表示的一端为铰接支座，另一端为滚动支座的梁，称为简支梁或简单梁。简支梁的主要特征为弯曲时梁的两端均可自由转动，但是他们不能沿横向（即垂直于杆轴方向）移动。另外，梁的一端可在轴向（即水平地）自由移动。简支梁的支座既可承受向上也可承受向下作用的竖直反力。

在图 4-1b 中所示的一端嵌入或固定，而另一端自由的梁称为悬臂梁。在固定端，梁既不能转动也不能移动。而在自由端，它既

能转动又能移动。图中第三个例子表示一根具有外伸臂的梁，该梁在  $A$  和  $B$  处简支，而在  $C$  处为自由端。

梁上的载荷可以是集中力，如图 4-1a 和 c 中的  $P_1$  和  $P_2$ ，也可以是分布载荷，如图 4-1b 中的载荷  $q$ 。分布载荷由它们的集度来表征，集度用沿梁轴线单位长度上的力来表示。对于图 4-1b 所示的均布载荷，其集度为一常数；而另一方面，可变载荷是一种作为沿梁轴距离的函数而变化的载荷。

图 4-1b 中所示的梁均为静定的，因为它们的所有反力均可根据静力平衡方程确定。例如，承受载荷  $P_1$  的简支梁（图 4-1a）的情况，两个反力都是竖直的。而它们的大小可通过对两端力矩求和而得，因此，我们求出

$$R_a = \frac{P_1(L-a)}{L} \quad R_b = \frac{P_1 a}{L}$$

具有外伸臂的梁（图 4-1c）的反力可用同样的方法求出。

对于悬臂梁（图 4-1b），所施加的载荷  $q$  由作用在固定端的竖直反力  $R_a$  和力偶  $M_a$  来平衡，如该图所示。根据竖直方向力的总和，我们得出

$$R_a = qb$$

再由对  $A$  点力矩之和，我们求出

$$M_a = qb \left( a + \frac{b}{2} \right)$$

反力矩  $M_a$  沿逆时针方向作用，如图所示。

上述例子说明了如何用静力学来计算静定梁的反力（力和力矩）。静不定梁反力的确定需要考虑梁的弯曲，因此，这一课题将推迟到第七章讨论。

图 4-1 所示的理想支承条件只在实践中偶然遇到。例如，桥的长跨梁有时在其端部用销钉和滚柱构成。然而，在短跨梁中，通常有某些约束以阻止支座的水平移动。正如第 7.8 节所述，在大多数情况下，这种约束对梁的作用影响很小，可以略而不计。但是，如果梁是很柔软的，或者如果在端部的水平约束是很刚硬的，就可能需要考虑这种影响。为此，要求进行如 7.8 节中所讨论的静不定

分析。

## 4.2 梁中的应力合力

作为实例，现在让我们研究在自由端受到一个倾斜力  $P$  作用的悬臂梁(图 4-2a)。如果我们在横截面  $mn$  处将梁切开，并分离出梁的左边部分为自由体(图 4-2b)，那么我们会看到，梁的被移去部分(亦即右边部分)对左边部分的作用，必须使左边部分保持平衡。在我们现阶段的研究，横截面  $mn$  上的应力分布是未知的，但我们确已知道应力的合力必定要平衡外载荷  $P$ 。下面这种作法是很方便的，即将合力分解为垂直于横截面且通过该截面形心作用的轴向力  $N$  和平行于横截面作用的剪力  $V$ ，以及作用在梁平面内的弯矩  $M$ 。

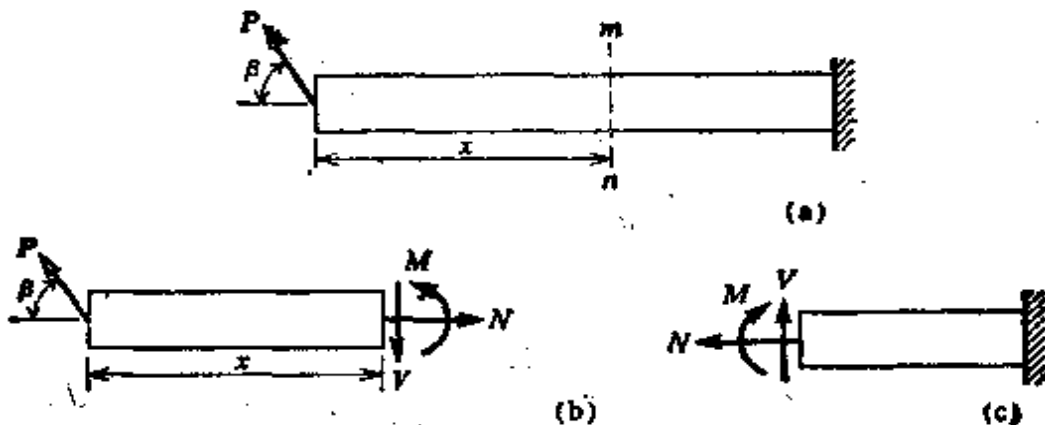


图 4-2. 应力合力  $N$ ,  $V$  和  $M$ 。

作用在梁横截面上的轴力、剪力和弯矩称为应力合力。对于静定梁，应力的合力可由平衡方程确定。因此，对图 4-2 所绘的悬臂梁，我们可就该图第二部分所示的自由体图写出三个静力平衡方程。根据水平方向和竖直方向的力之总和，我们分别求出

$$N = P \cos \beta \quad V = P \sin \beta$$

又根据对通过横截面  $mn$  形心的一根轴\*所取力矩之总和，我们得到

$$M = Px \sin \beta$$

\* 此轴应与图面垂直。——译者注

其中  $x$  为从自由端到截面  $mn$  的距离。因此，通过使用自由体图和静力平衡方程，我们就能毫无困难地计算应力合力。由轴向力  $N$  单独作用时梁中的应力已在第一章中讨论过，在下一章我们将看到如何求得与弯矩  $M$  和剪力  $V$  有关的应力。

当应力合力  $N$ 、 $V$  和  $M$  沿图 4-2b 所示的方向作用时，将假设为正。然而，这种符号约定只在讨论梁的左边部分平衡时才是有用的。如果研究梁的右边部分，我们就会发现其应力合力大小相同，但方向相反(见图 4-2c)。因此，我们必须认识到，应力合力的代数符号并不取决于它在空间的方向，譬如向左或向右，更确切地说，它取决于该力相对于它所作用的那部分材料的方向。为了说明这一事实，在图 4-3 中重复了  $N$ 、 $V$  和  $M$  的符号约定，在该图中表示了作用在梁微段上的应力合力。我们看出，正的轴向力指向背离其作用面的方向(拉力)，正的剪力沿其作用面顺时针方向作用，而正的弯矩使梁的上部受压。

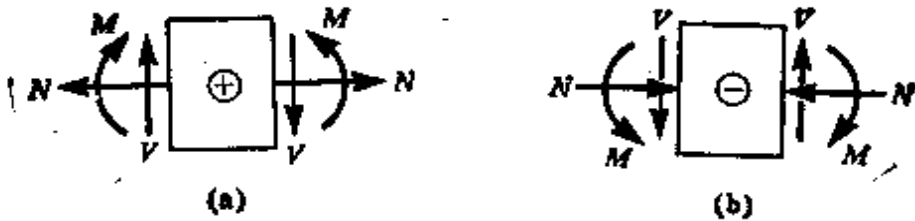


图 4-3. 应力合力的符号约定。

**例题 1** 一根简单梁  $AB$  承受两个载荷，一个集中力  $P$  和一个力偶  $M_0$ ，其作用如图 4-4a 所示。试求在如下横截面处梁的剪力和弯矩：(a) 距梁中点左侧微小距离处，及(b) 距梁中点右侧微小距离处。

分析该梁的第一步是求反力  $R_a$  和  $R_b$ 。对  $A$  和  $B$  端取矩给出两个平衡方程，据此我们求出

$$R_a = \frac{3}{4}P - \frac{M_0}{L} \quad R_b = \frac{1}{4}P + \frac{M_0}{L}$$

下一步，梁在靠近中点左侧的横截面处被切开，并绘出梁的任意一半的自由体图。在此例中，我们选择梁的左半边，相应的图表示在图 4-4b 中。在图中出现了力  $P$  和反力  $R_a$ ，也出现了未知的剪力  $V$  和弯矩  $M$ ，两者均以正方向表示。弯矩  $M_0$  并未在图中出现，因为该梁是在  $M_0$  作用点的左侧被切开的。沿竖直方向诸力之总和给出

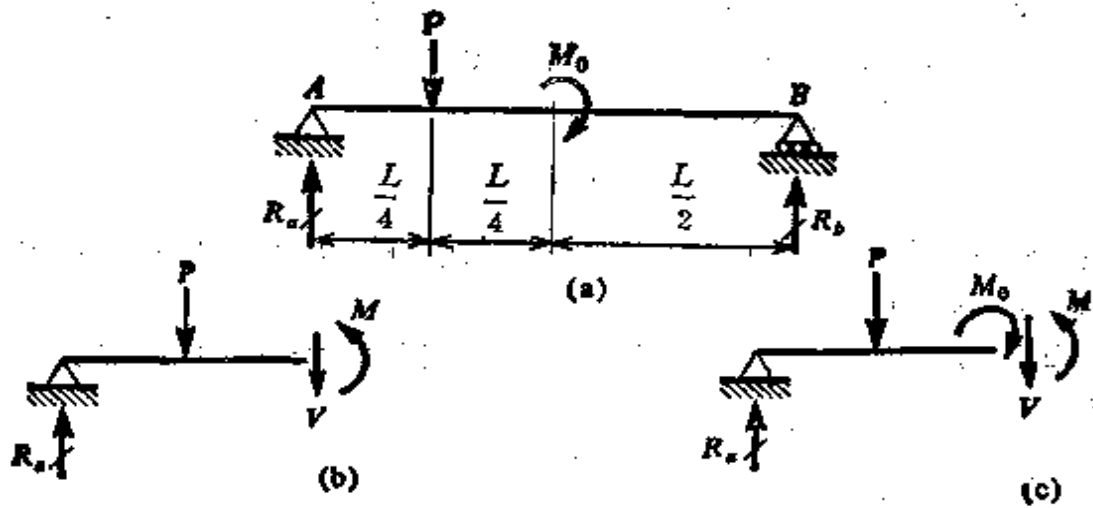


图4-4. 例题1.

$$V = R_a - P = \frac{P}{4} - \frac{M_0}{L}$$

此式表示剪力为负的，因此，该力的作用方向与图4-4b所假设的正方向相反。在梁被切开处，对通过横截面的轴线取矩(图4-4)给出

$$M = \frac{R_a L}{2} - \frac{PL}{4} - \frac{PL}{8} - \frac{M_0}{2}$$

依照该方程中各项的相对大小，我们看出，弯矩可能为正，也可能为负。

为了求得梁中点右侧横截面上的应力合力，我们在该截面处将梁切开，并再次绘出相应的自由体图(图4-4c)。此图与前一图形唯一不同之处是，现在力偶  $M_0$  作用在切开截面左侧那部分梁上。再对竖直方向的力求和，并对通过所切截面的轴线取矩，我们得到

$$V = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L} \quad M = \frac{PL}{8} + \frac{M_0}{2}$$

由此结果我们看出，当所切截面从力偶  $M_0$  的左侧移到右侧时，剪力不变，但弯矩的代数值增加一个等于  $M_0$  的量。

**例题2** 一根A端自由，B端固定的悬臂梁，承受集度为  $q$  的线性变化分布载荷(见图4-5a)。试求距自由端为  $x$  处的剪力  $V$  和弯矩  $M$ 。

我们首先从距左端为  $x$  处将梁切开，并分离出梁的一部分作为自由体

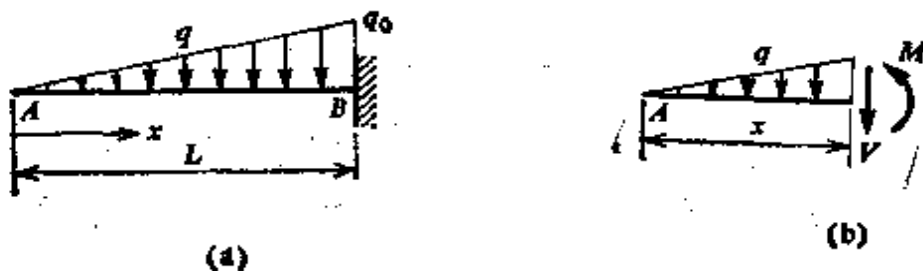


图4-5. 例题2.

(图 4-5b). 和上例一样, 假设剪力  $V$  和弯矩  $M$  为正. 已知分布载荷的集度为  $q=q_0x/L$ , 因此, 在图 4-5b 的自由体上总的向下载荷等于  $q_0x^2/2L$ . 所以, 我们由竖直方向的平衡求出

$$V = -\frac{q_0x^2}{2L} \quad (a)$$

由该方程我们看出, 在自由端  $A$  处 ( $x=0$ ), 剪力  $V=0$ , 而在固定端  $B$  处 ( $x=L$ ), 剪力  $V=-q_0L/2$ .

为了求出梁的弯矩, 我们写出对通过所切截面轴线的力矩平衡方程, 就得到

$$M = -\frac{q_0x^3}{6L} \quad (b)$$

再研究梁的两端, 我们看出当  $x=0$  时, 弯矩为零, 而当  $x=L$  时, 弯矩等于  $-q_0L^3/6$ . 方程 (a) 和 (b) 可以用来求得梁任意点处的  $V$  和  $M$ , 我们又由观察得知, 剪力和弯矩皆在梁的固定端处达到其数值上的最大值.

### 4.3 载荷、剪力和弯矩之间的关系

现在我们将要得出梁的剪力  $V$ , 弯矩  $M$  和载荷之间的一些重要关系. 让我们研究从相距为  $dx$  的两个横截面之间切出的梁的一个微段 (图 4-6a). 如果作用在微段左侧面上的剪力和弯矩为正, 它们就具有图示的方向. 一般地, 剪力和弯矩随着沿梁轴度量的距离  $x$  而变, 由此可以得知, 在微段的右侧面上的剪力和弯矩数值与其左侧面上的值稍有不同. 分别以  $dV$  和  $dM$  表示  $V$  和  $M$  的增量, 我们看出, 在右侧面上相应的量为  $V+dV$  和  $M+dM$ .

作用在微段上的载荷可能是分布载荷、集中载荷或力偶. 假设载荷为分布的且集度为  $q$ , 我们由图 4-6a 看出, 总载荷 (设  $q$  向下作用为正) 等于  $q dx$ . 于是, 根据竖直方向力的平衡, 我们得到

$$V - (V + dV) - q dx = 0$$

或

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (4-1)$$

因此, 当集度为  $q$  的分布载荷作用在梁上时, 剪力沿着梁变化, 并且它对  $x$  的变化率等于  $-q$ , 由此结论得出, 如果  $q=0$ , 剪力就为常数.

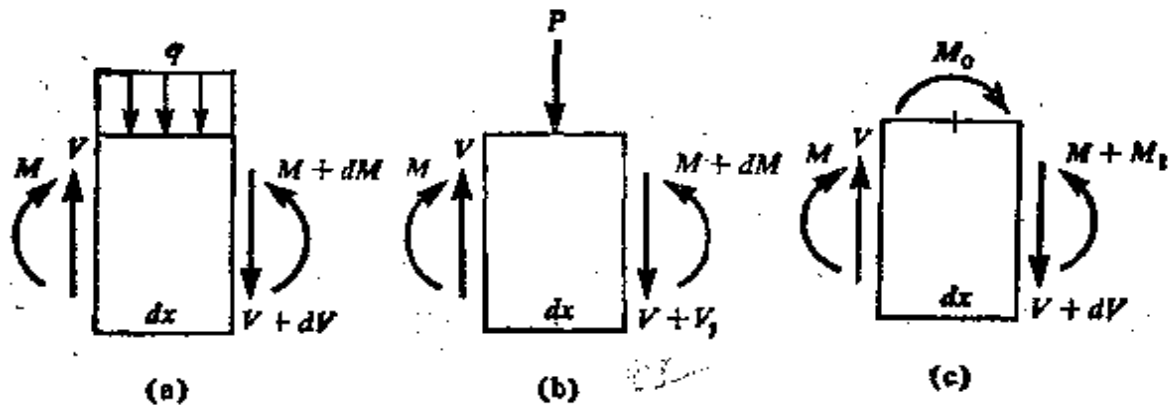


图 4-6. 用以导出载荷、剪力及弯矩之间关系的微段。

对通过图 4-6a 所示微段左侧面的轴线取矩并求和, 我们得到

$$M + q dx \left( \frac{dx}{2} \right) + (V + dV) dx - (M + dM) = 0$$

略去微分的乘积, 由此方程我们得到如下关系式:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (4-2)$$

该方程表明, 假若分布载荷 (或无载荷) 作用在梁上, 弯矩的变化率等于剪力的代数值。

现在让我们假设, 梁的微段受到集中力  $P$  的作用 (见图 4-6b), 根据微段在竖直方向的平衡我们看出, 在微段的两侧之间的剪力会有一个突变或不连续, 其剪力的增量  $V_1$  等于载荷  $P$  的负值:

$$V_1 = -P \quad (4-3)$$

因此, 当我们从载荷作用点左侧移至右侧时, 剪力突然减小了一个等于  $P$  的量。

在图 4-6b 中微段的左侧边缘处, 弯矩的变化率 (见方程 4-2) 为  $dM/dx = V$ 。在右侧边缘处, 弯矩的变化率为  $dM/dx = V + V_1$ 。因此可以断定: 在集中力  $P$  的作用点上, 变化率  $dM/dx$  突然减小了一个等于  $P$  的量。

最后要研究的情况为力偶  $M_0$  形式的载荷 (图 4-6c)。根据竖直方向的平衡, 我们得到  $dV = 0$ , 它表明, 当我们从载荷作用点左侧移至右侧时, 剪力保持常数。微段的力矩平衡方程给出

$$M + M_0 + V dx - (M + M_1) = 0$$

或

$$M_1 = M_0 \quad (4-4)$$

其中  $M_1$  为弯矩的增量。此方程表明，当我们沿该梁从左侧移到右侧时，由于所施加的力偶  $M_0$ ，梁内弯矩有一突然的增加。

当对梁的剪力和弯矩的变化进行全面的研 究时，方程(4-1)——(4-4)是很有用的，这将在下一节中加以说明。

**例题** 对上节例题 2 中讨论过的承受线性变化载荷的悬臂梁（见图 4-5），试验证方程(4-1)和(4-2)。

上节的方程(a)和(b)为

$$V = -\frac{q_0 x^2}{2L} \quad M = -\frac{q_0 x^3}{6L}$$

取导数  $dV/dx$ ，我们求得

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{q_0 x}{L}$$

注意到在此例中的载荷集度为  $q_0 x/L$ ，我们得知，方程(4-1)被满足。此外，取导数  $dM/dx$ ，我们得到

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{q_0 x^2}{2L}$$

它等于剪力  $V$ ，因此，方程(4-2)也被满足。

#### 4.4 剪力图和弯矩图

梁的剪力  $V$  和弯矩  $M$  通常随着它们所在的横截面位置的距离  $x$  而变。在设计梁时，希望知道梁的所有横截面上的  $V$  和  $M$  值，而提供这种资料的方便方法是用图形表示它们如何沿梁轴变化。为了绘制这种图形，我们取横坐标为横截面的位置，而取纵坐标为剪力或弯矩的相应值。这种图形称为剪力图 and 弯矩图。

为了说明这些图的绘制方法，让我们研究一根承受集中载荷的简支梁  $AB$  (图 4-7a)。该梁的反力为

$$R_a = \frac{Pb}{L} \quad R_b = \frac{Pa}{L}$$

在  $P$  左侧的任一截面处，亦即对位于  $0 < x < a$  处的横截面，根据平衡可以断定



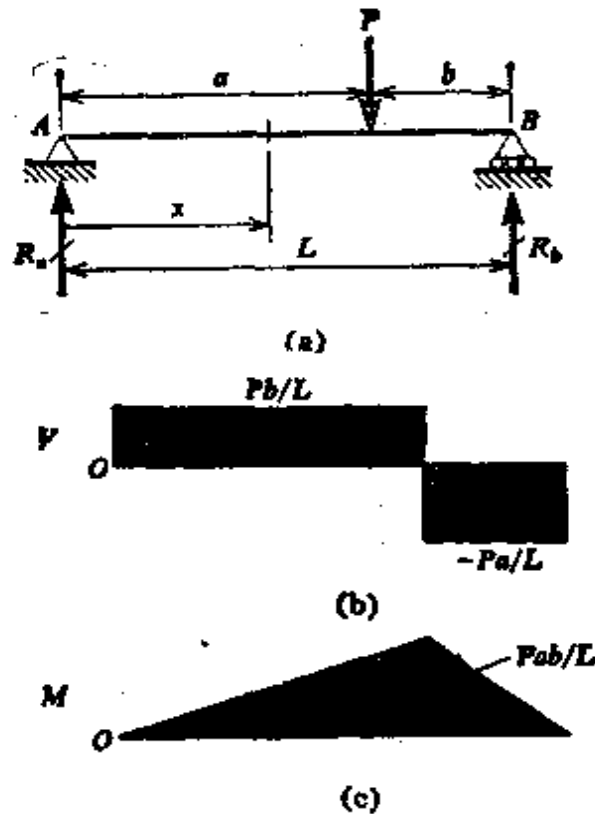


图 4-7. 简支梁承受集中载荷时的剪力图和弯矩图。

$$V = \frac{Pb}{L} \quad M = \frac{Pb}{L} x \quad (a)$$

由这些表达式我们看到，从支座  $A$  到载荷作用点剪力保持常数，而弯矩随  $x$  线性变化。对于  $x=0$ ，弯矩为零；对于  $x=a$ ，弯矩为  $Pab/L$ 。剪力和弯矩图的相应部分分别示于图 4-7b 和 c。

对于载荷  $P$  右侧的横截面，即对于  $a < x < L$ ，我们求得

$$V = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L} \quad (b)$$

$$M = \frac{Pb}{L} x - P(x-a) = Pa \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad (c)$$

我们再一次得知，剪力为常数，并且弯矩为  $x$  的线性函数。在  $x=a$  处，弯矩等于  $Pab/L$ ，而在  $x=L$  处，弯矩为零。

整个梁的剪力和弯矩图示于图 4-7b 和 c。可以看出，弯矩图的斜率  $dM/dx$  等于  $V$  (方程 4-2)，剪力图的斜率  $dV/dx$  等于  $-q$  (即它等于零)，与方程 (4-1) 一致。在载荷  $P$  的作用点处，剪力图有突变 (等于  $P$ )，而弯矩图的斜率也有一个相应的变化。

在推导载荷  $P$  的右侧剪力和弯矩的表达式 (b) 和 (c) 时，我们

研究了梁的左边部分的平衡，该部分受到两个力  $R_a$  和  $P$  的作用。在此例中，如果研究仅有反力  $R_b$  (等于  $Pa/L$ ) 作用的梁的右侧部分就会更简单。按此方法，我们直接得出方程

$$V = -\frac{Pa}{L} \quad M = \frac{Pa}{L}(L-x)$$

此两式与前面求得的方程 (b) 和 (c) 是相同的。

注意到这样一点是很有趣的，即构成上例剪力图的两个矩形具有相等的面积。此结果并非偶然，因为对方程 (4-2) 进行积分，我们有

$$\int_A^B dM = \int_A^B V dx \quad (d)$$

其中积分限  $A$  和  $B$  表示积分从  $A$  端至  $B$  端沿整个梁长进行。该方程的右边表示剪力图的整个面积。方程的左边积分之后，给出  $B$  端和  $A$  端弯矩之差  $M_b - M_a$ 。在简支梁情况下，其端点处的弯矩为零，因此左边的积分也为零。于是，我们得出结论，在此例中，剪力图的总面积必为零。

当一个力偶形式的载荷作用在梁上时，使用方程 (d) 必须小心慎重，因为此时弯矩存在着不连续性，方程左边的积分不能越过这样的不连续点而进行。代替的方法是：可以先对力偶左边梁的部分，然后再对力偶右边梁的部分计算其积分值，将其结果加起来即得积分的最后值。

如果简支梁上有几个集中载荷作用 (图 4-8a)，必须对载荷作用点之间梁的每个区段确定其  $V$  和  $M$  的表达式。仍以梁的左端起度量  $x$ ，对于梁的第一个区段 ( $0 < x < a_1$ )，我们得出

$$V = R_a \quad M = R_a x \quad (e)$$

对于第二区段 ( $a_1 < x < a_2$ )，我们得出

$$V = R_a - P_1 \quad M = R_a x - P_1(x - a_1) \quad (f)$$

对于梁的第三部分 ( $a_2 < x < a_3$ )，考虑梁的右边部分比考虑左边部分更为有利。按此方法我们得出

$$V = -R_b + P_3 \quad (g)$$

和

$$M = R_b(L-x) - P_3(L - b_3 - x) \quad (h)$$

最后，对于梁的最末部分，我们得出

$$V = -R_b \quad M = R_b(L-x) \quad (i)$$

由表达式(e)~(i), 我们看到, 在梁的每一个部分中, 剪力保持常数. 因此, 其剪力图具有图

$$V = R_a \quad M = R_a x$$

4-8b 所示的形状. 此外, 梁每个区段的弯矩为  $x$  的线性函数. 因此, 相应的图形用斜直线表示. 为了加快画出这些图线, 我们将  $x = a_1$ ,  $x = a_2$  和  $x = a_3$  分别代入方程(e)、(f)和(i), 求得集中载荷处的弯矩. 以此方式我们得到下列弯矩值

$$M_1 = R_a a_1$$

$$M_2 = R_a a_2 - P_1(a_2 - a_1)$$

$$M_3 = R_a b_3$$

使用这些值, 弯矩图(图4-8c)便可容易地作出. 应该注意, 相应于剪力图的每一个不连续处, 弯矩图的斜率  $dM/dx$  都有相应的变化.

在设计梁时, 找出弯矩最大和最小的横截面通常是很重要的. 对于承受集中载荷的梁, 如上例, 最大弯矩总是发生在集中载荷之一的作用点处. 根据方程(4-2)我们知道, 任一点处弯矩图的斜率等于此处的剪力. 因此, 在剪力改变符号的横截面上, 弯矩具有最大值或最小值. 当我们沿着  $x$  轴进行观察时, 如果剪力从正值变为负值(如图4-8b), 那么弯矩图的斜率也从正值变为负值. 因此, 在这个截面上必有最大弯矩. 相反, 剪力从负值变为正值, 则表明有最小弯矩. 一般来说, 剪力图在几处与水平轴相交是有可能的. 相应于每个交点, 在弯矩图上将有一个最大值或一个最小值. 为了求出梁中数值上最大的弯矩, 所有这些最大和最小值都必须加以研究.

紧接着让我们研究承受均匀载荷的简支梁(图4-9a). 在此

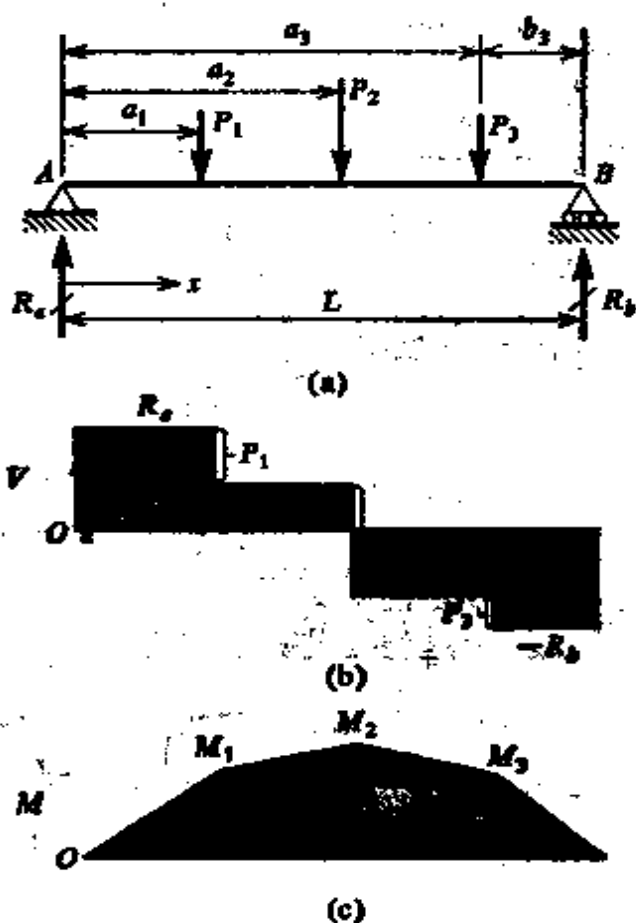
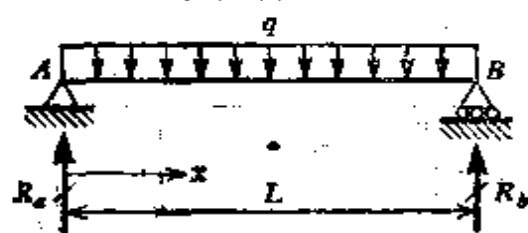
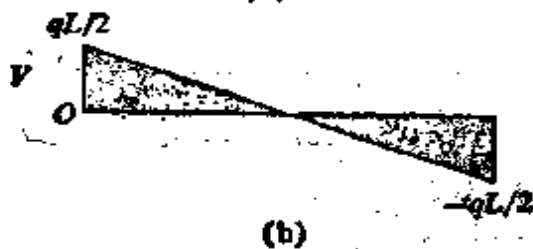


图4-8. 简支梁承受几个集中载荷时的剪力和弯矩图.

情况下,反力  $R_a$  和  $R_b$  均等于  $qL/2$ 。因此,在距左边 A 端为  $x$  处的横截面上,我们得到



(a)



(b)



(c)

图 4-9 承受均布载荷的简支梁的剪力和弯矩图。

$$V = \frac{qL}{2} - qx$$

$$M = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad (j)$$

由这两个方程中第一个我们看出,剪力图由一条斜直线构成,该直线在  $x=0$  和  $x=L$  处纵坐标分别等于  $qL/2$  和  $-qL/2$ ,如图 4-9b 所示。此外,弯矩图为一抛物线,它对称于梁的中点(图 4-9c)。在梁的两端弯矩为零,而最大值发生在跨度中点,该处剪力改变符号。此最大值是用  $x=L/2$  代入到表达式 (j) 之中而得,由此给出  $M_{\max} = qL^2/8$ 。

**例题 1** 试确定简支梁在部分跨度上受到集度为  $q$  的均布载荷时(图 4-10a)的剪力图 and 弯矩图。

我们首先求整个梁的反力:

$$R_a = \frac{qb}{L} \left( c + \frac{b}{2} \right) \quad R_b = \frac{qb}{L} \left( a + \frac{b}{2} \right) \quad (k)$$

为求剪力和弯矩,我们必须分别研究梁的三个区段。对于梁左端的未受载部分( $0 < x < a$ ),我们求得

$$V = R_a \quad M = R_a x \quad (l)$$

对于梁的受载部分的横截面,从反力  $R_a$  减去作用在该横截面的左边梁上的载荷  $q(x-a)$  即得剪力。用反力  $R_a$  之矩减去该横截面的左边载荷之矩,可得同一区段的弯矩。以此方式我们求得

$$V = R_a - q(x-a) \quad (m)$$

$$M = R_a x - q(x-a)(x-a)/2 \quad (n)$$

对于梁的右端未受载部分,我们求得

$$V = -R_b \quad M = R_b(L-x) \quad (o)$$

应用表达式(l)至(o), 我们可以容易地作出剪力图及弯矩图. 前一个图(见图 4-10b)是由相应于梁的未加载部分的两条水平线和相应于均匀加载区段的斜线所组成. 弯矩图(图 4-10c)由两条相应于梁的未加载部分的斜直线和相应于加载部分的一根抛物线所组成. 斜线和抛物线在其交点处相切. 这一结论是根据在这些点处剪力的大小没有突变这一事实得到的. 因此, 根据方程(4-2), 弯矩图的斜率不可能有任何突变. 最大的弯矩位于剪力改变符号之处, 它的值可用相应的  $x$  值代入到方程(n)中来确定.

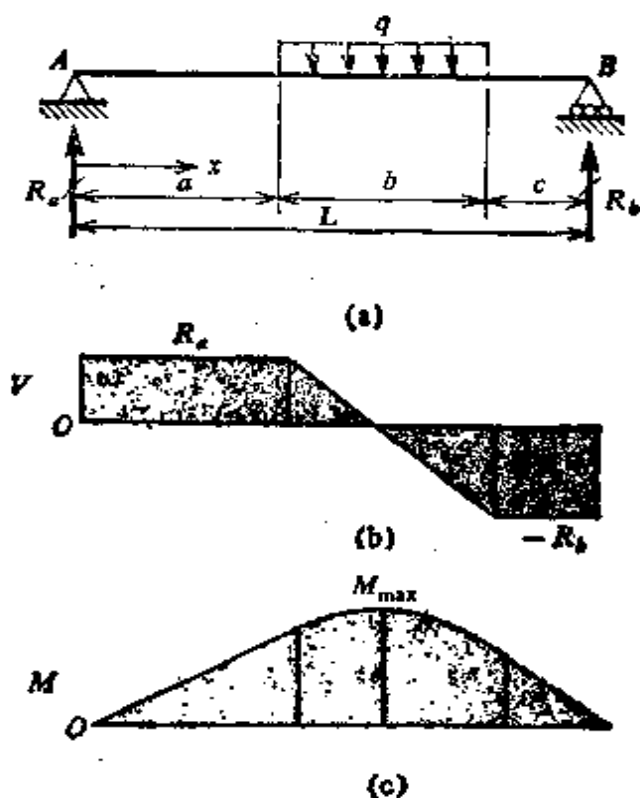


图 4-10. 例题 1.

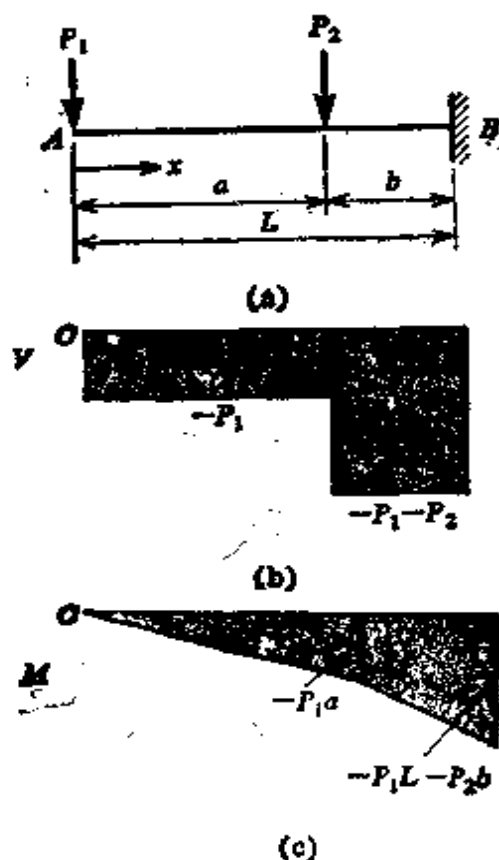


图 4-11. 例题 2.

**例题 2** 试绘出图 4-11a 所示悬臂梁的剪力和弯矩图  
仍从梁的左端度量  $x$ , 并研究  $0 < x < a$  区段, 我们得到

$$V = -P_1 \quad M = -P_1x$$

对于梁的右边部分 ( $a < x < L$ ), 我们得

$$V = -P_1 - P_2 \quad M = -P_1x - P_2(x-a)$$

相应的剪力和弯矩图表示在图 4-11b 和 c 中, 弯矩图由两条斜线组成, 其斜率等于悬臂梁相应区段中的剪力, 剪力图的总面积不为零而等于  $-P_1L - P_2b$ , 它也等于梁 B 端处的弯矩。

当不只一个载荷作用在梁上时, 其剪力和弯矩可通过对各个载荷分别作用时所得出的这些量求和而得。例如, 在上例中我们看出, 剪力图(图 4-11b)就是当载荷  $P_1$  和  $P_2$  各单独作用在梁上时所得剪力图的叠加。类似的说明亦适用于图 4-11c 所示的弯矩图。

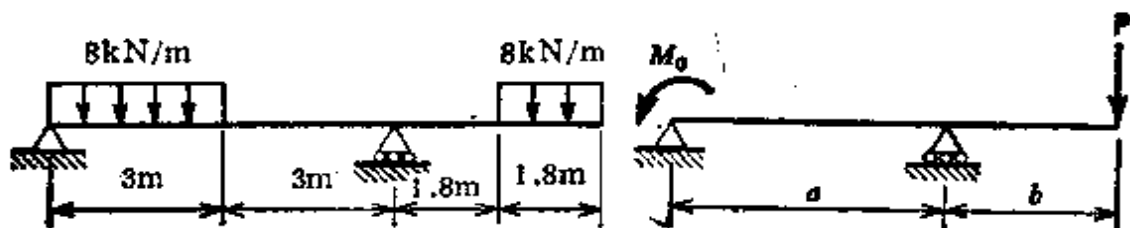
## 习 题

**4.2-1** 试确定图 4-1a 所示的简支梁中点处的剪力  $V$  和弯矩  $M$ , 假设  $P_1 = 36 \text{ kN}$ ,  $L = 6 \text{ m}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ , 并求出梁上的最大剪力和最大弯矩。

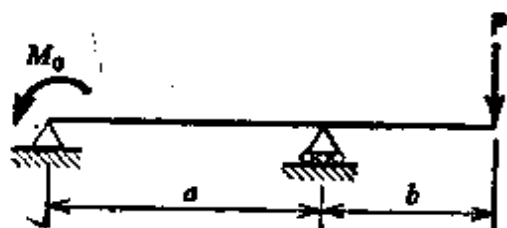
**4.2-2** 试求出图 4-1b 所示悬臂梁距左端为  $a$  处的剪力  $V$  和弯矩  $M$  的公式。

**4.2-3** 试求图 4-8a 所示简支梁中点处的剪力  $V$  和弯矩  $M$ , 假设  $a_1 = b_2 = 1 \text{ m}$ ,  $L = 4 \text{ m}$ ,  $P_1 = 5 \text{ kN}$ ,  $P_2 = 0$ ,  $P_3 = 10 \text{ kN}$ 。

**4.2-4** 试求图中所示梁距其左端为  $3 \text{ m}$  处横截面上的剪力  $V$  和弯矩  $M$ 。



习题 4.2-4

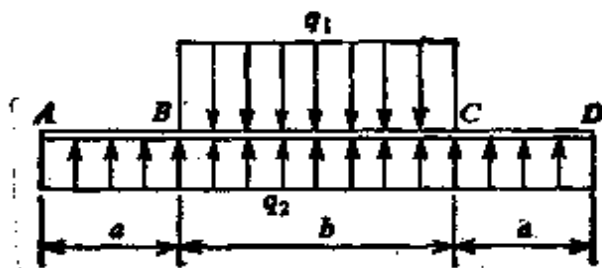


习题 4.2-5

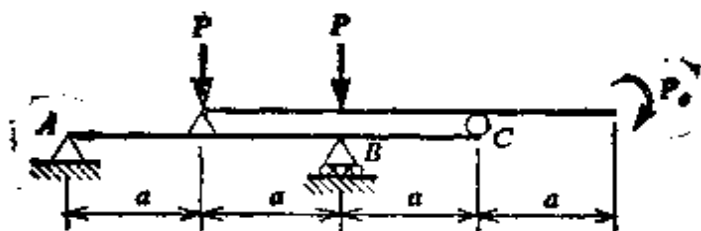
**4.2-5** 试确定图中所示梁距其左支座为  $2 \text{ m}$  处截面上的剪力  $V$  和弯矩  $M$ 。假设  $M_0 = 16 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $P = 36 \text{ kN}$ ,  $a = 2.5 \text{ m}$ ,  $b = 1.5 \text{ m}$ 。

**4.2-6** 梁  $ABCD$ , 其上作用有集度为  $q_1$  和  $q_2$  的均布载荷, 如图所示。试求梁在  $B$  点处和中点处的剪力  $V$  和弯矩  $M$ 。假设  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 4 \text{ m}$ ,  $q_1 = 40 \text{ kN/m}$ 。

**4.2-7** 试确定在图示加载方式下  $ABC$  梁在数值上为最大的弯矩。



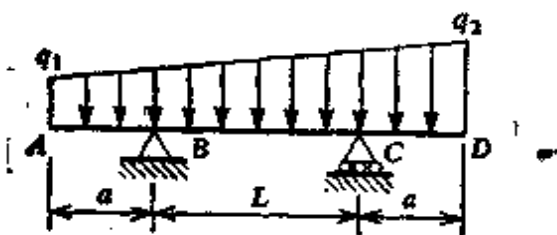
习题 4.2-6



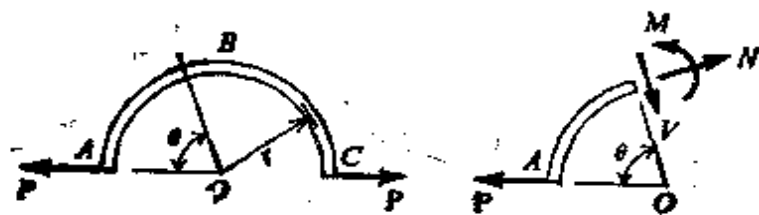
习题 4.2-7

**4.2-6** 图中所示的  $ABCD$  梁有两个外伸臂, 其上作用有集度为线性变化的分布载荷. 试问比值  $a/L$  为多大时, 梁中点处的剪力  $V$  总是为零?

**4.2-9** 一曲杆  $ABC$ , 其上作用有一对大小相等而方向相反的力  $P$ , 如图所示. 杆的轴线形成半径为  $r$  的半圆. 试确定由  $\theta$  角所定义的截面上的轴向力  $N$ , 剪力  $V$  和弯矩  $M$  (见图).



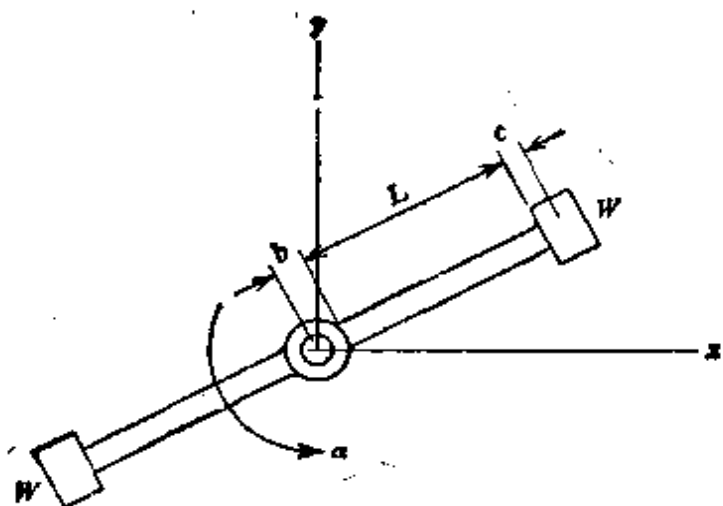
习题 4.2-8



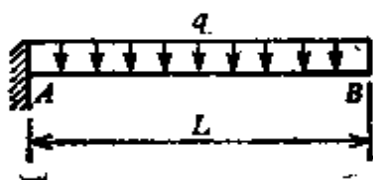
习题 4.2-9

**4.2-10** 图中所示的装置在光滑的水平面上以角加速度  $\alpha$  绕  $z$  轴 (它为竖直轴) 旋转, 两臂的单位长度重量均为  $w$ , 臂的两端皆有  $W = 2wL$  的重物. 试导出臂中最大剪力和最大弯矩的公式. 假设  $b = L/10$ ,  $c = L/15$ .

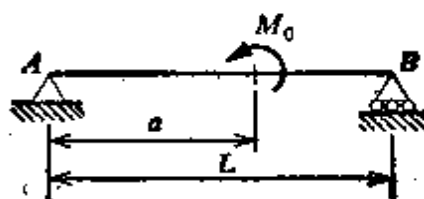
对于有关第 4.4 节的习题, 除非另作说明外, 皆近似地按比例尺画出其剪力图和弯矩图, 并标注上所有关键性纵坐标值, 包括其最大值和最小值.



习题 4.2-10

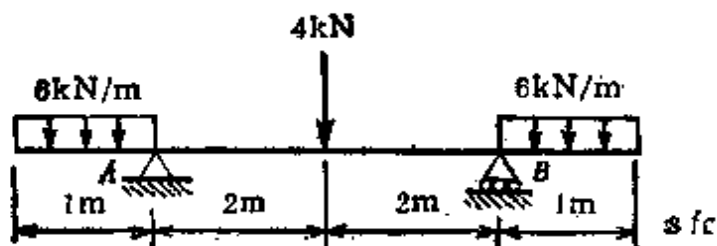


习题 4.4-1

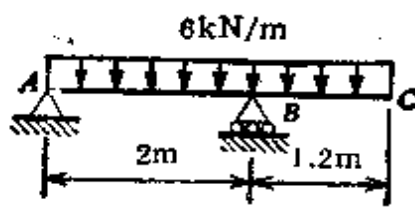


习题 4.4-3

- 4.4-1 试画出承受均布载荷之悬臂梁的剪力图和弯矩图(见图).
- 4.4-2 试绘制图 4-8a 所示简支梁的剪力图和弯矩图, 假设  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $P_2 = 0$ ,  $P_1 = P_3 = P$ .
- 4.4-3 试绘制受载情况如图所示简支梁的剪力图和弯矩图.
- 4.4-4 试绘制图 4-4a 所示简支梁的剪力图和弯矩图, 假设  $M_0 = PL/2$ .
- 4.4-5 试画出图 4-5a 所示承受线性变化载荷的悬臂梁的剪力图和弯矩图.
- 4.4-6 试画出习题 4.2-4 图中所示具有一个外伸臂的梁的剪力图和弯矩图.
- 4.4-7 试绘制习题 4.2-5 图中所示具有一个外伸臂的梁的剪力图和弯矩图, 假设  $M_0 = 16 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $P = 36 \text{ kN}$ ,  $a = 2.5 \text{ m}$  及  $b = 1.5 \text{ m}$ .
- 4.4-8 试画出习题 4.2-8 中梁的剪力图和弯矩图, 假设  $a = L/4$ .

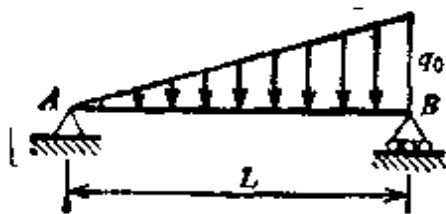


习题 4.4-9

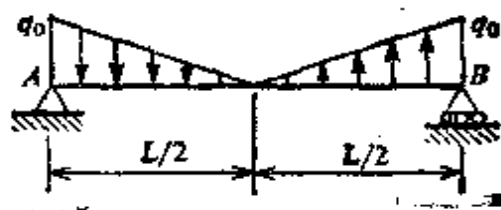


习题 4.4-10

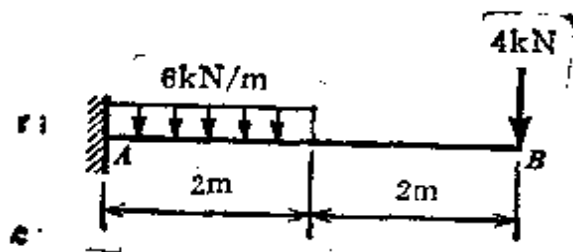




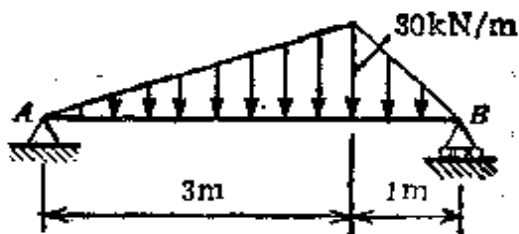
习题 4.4-11



习题 4.4-12



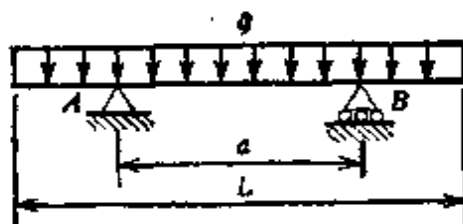
习题 4.4-13



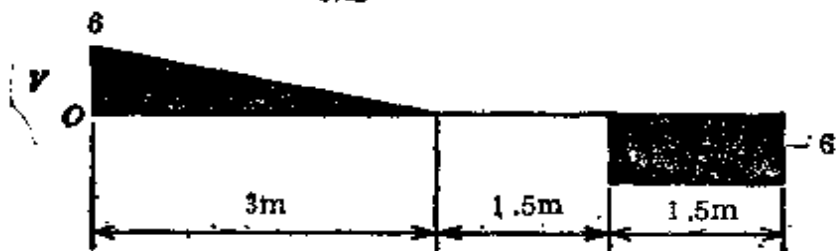
习题 4.4-14

4.4-9 至 4.4-14 试绘制图中所示梁的剪力图和弯矩图。

4.4-15 一具有两个相等外伸臂的梁(见图), 总长度为  $L$ , 其上作用有均匀分布载荷  $q$ 。试求出使梁中点处弯矩数值上等于支座处弯矩时其支座间的距离  $a$ 。并绘出在这种情况下下的剪力图和弯矩图。



习题 4.4-15

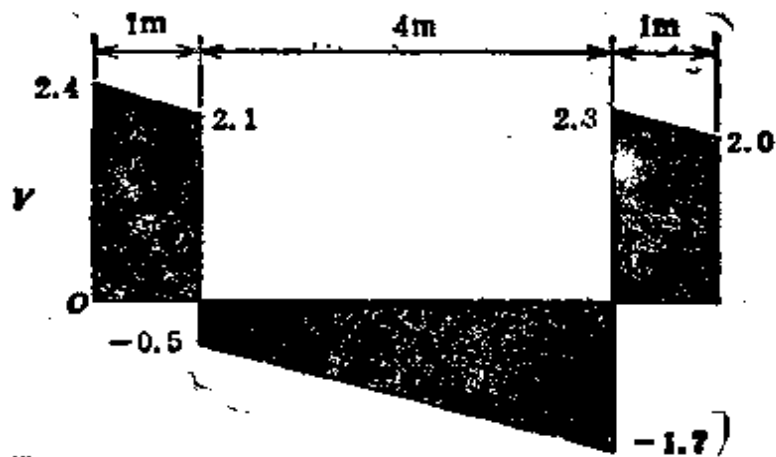


习题 4.4-16

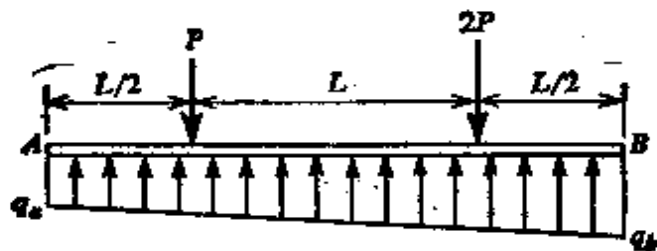
4.4-16 一简支梁的剪力图(单位为 kN) 如图所示, 试确定梁上的载荷并作弯矩图。

4.4-17 一根梁的剪力图(单位为 kN) 如图所示, 试问梁上的最大正弯矩和负弯矩为多少? (假设梁的左端弯矩为零。)

4.4-18 有一长为  $2L$  的梁  $AB$  (见图), 在所示位置上作用有载荷  $P$  和  $2P$ 。该梁置于基础上, 基础产生的连续分布反力作用于梁上。假设分布反力的集度从  $A$  至  $B$  是线性变化的。试求  $A$  端和  $B$  端分布反力的集度  $q$ 。



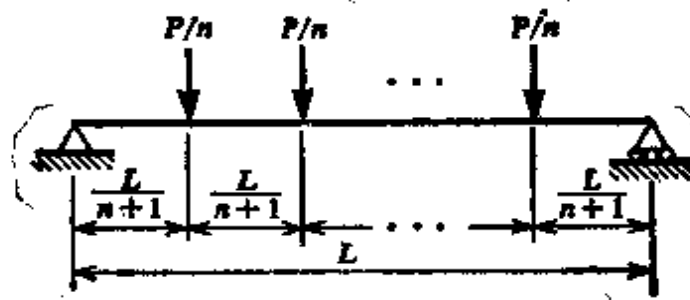
习题 4.4-17



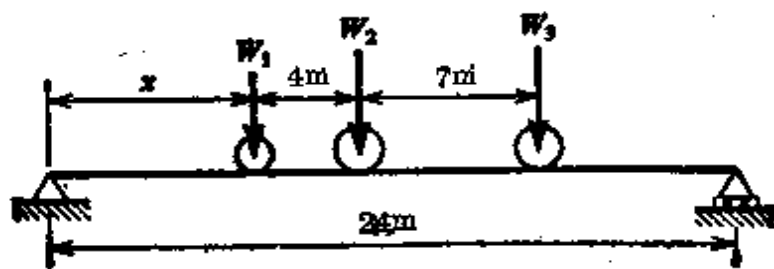
习题 4.4-18

和  $q_0$ , 并确定梁上最大弯矩值及其作用位置。

**4.4-19** 一简支梁上的载荷由  $n$  个等间距的集中力所组成(见图)。作用的总载荷为  $P$ , 每个力为  $P/n$ 。梁的长度为  $L$ , 载荷的间距为  $L/(n+1)$ 。(a) 试导出梁上最大弯矩的一般公式。(b) 根据公式对几个连续的  $n$  值 ( $n=$



习题 4.4-19



习题 4.4-20

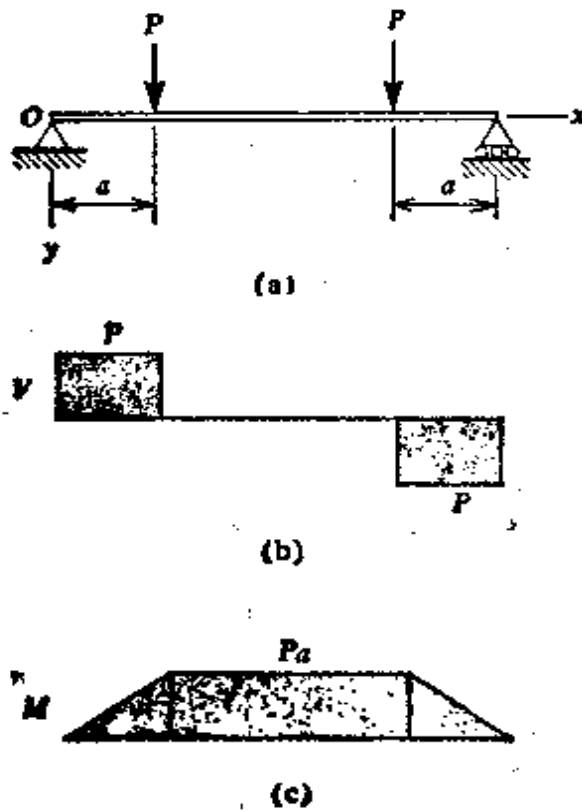
1, 2, 3, 4...) 确定其最大弯矩。(c) 将这些结果和由于集度为  $q$  (而  $qL=P$ ) 的均布载荷所产生的最大弯矩进行比较。

**4.4-20** 三个轮载在一根简支梁上移动, 如图所示。试确定使梁中产生最大弯矩时以距离  $x$  所定义的轮子的位置, 假设  $W_1=18\text{ kN}$ ,  $W_2=W_3=72\text{ kN}$ 。并确定梁的最大弯矩。

## 第五章 梁中的应力

### 5.1 梁中的正应力

为了介绍梁应力这一课题,让我们研究图 5-1a 所示承受两个



$P$  力的梁. 该梁的中间区段没有剪力, 而是受到等于  $Pa$  的常弯矩 (图 5-1b 和 c). 这种常弯矩的情况称为纯弯.

为了求出由纯弯产生的应力分布, 必须研究梁的变形, 我们将假设  $xy$  平面 (图 5-1a) 为梁的对称面, 而载荷作用在同一平面内, 因此弯曲变形也发生在这个平面内. 在弯矩  $M$  的作用下, 梁的轴线弯成一个圆弧 (见图 5-2a), 而梁的横截面, 譬如  $mn$  和  $pq$  保持平面并垂直于梁的纵向纤维. 在纯弯条件下梁的横截面保持平面这一事实, 可用实验方法通过精细的应变测量来建立, 或者在纯理论的基础上建立. 在后一种情况下, 只需注意到载荷的对称性要求梁的所有微段同样地变形, 这只有在横截面保持平面时才是可能的. 这个结论, 不管梁的材料是否为线性弹性, 都是正确的\*.

由于图 5-2a 所示的弯曲变形的结果, 我们发现, 横截面  $mn$

\* 见参考文献 5-1.

和  $pq$  绕垂直于  $xy$  平面的轴线作相对旋转, 因而, 梁凸边的纵向纤维伸长, 而凹边的纵向纤维缩短。于是, 梁的上部纤维处于压缩状态而下部纤维处于拉伸状态。在梁的顶部和底部之间的某处, 存在一个纵向纤维长度不变的面, 该面在图 5-2a 中用虚线  $ss$  表示, 称为梁的中性面。它与任一个横截面的交线, 称为该横截面的中性轴, 例如, 对于图 5-2b 所示的横截面,  $z$  轴即为中性轴, 变形之后, 两个相邻的横截面  $mn$  和  $pq$  (图 5-2a) 交于点  $O$ , 该点为梁纵轴的曲率中心。这两个平面之间的夹角用  $d\theta$  表示, 而曲率半径用  $\rho$  表示。根据该图的几何形状我们得知

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (5-1)$$

其中  $\kappa$  为曲率, 等于曲率半径的倒数,  $dx$  为相邻两个横截面  $mn$  和  $pq$  之间微段的长度\*。

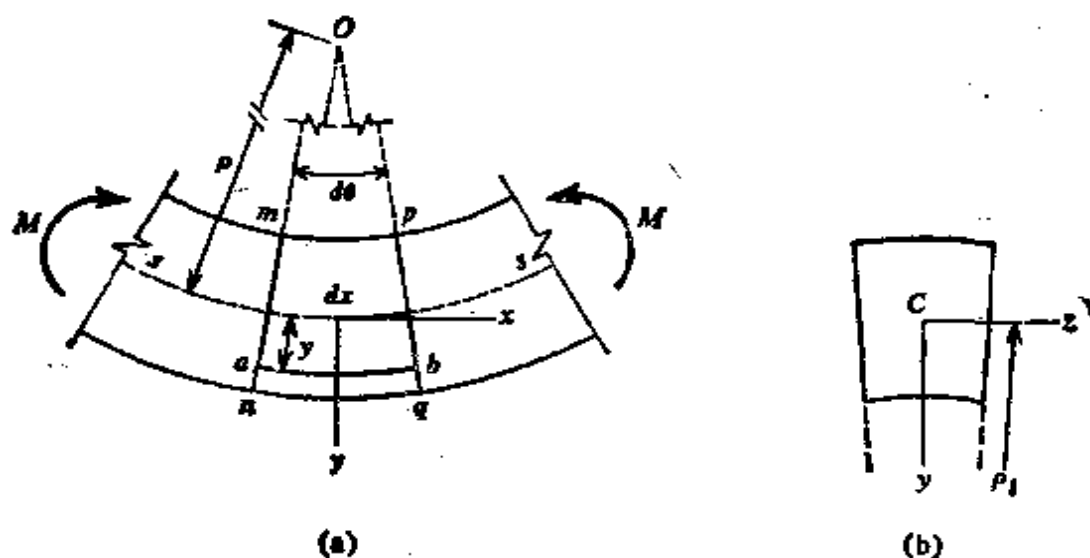


图 5-2. 纯弯时的变形。

离中性面为  $y$  的一根典型纵向纤维  $ab$  (图 5-2a) 的伸长现可求得如下。纤维的总长为  $(\rho + y)d\theta$ , 或  $(1 + y/\rho)dx$ 。由于该纤维的原长为  $dx$ , 我们得知, 它的伸长为  $ydx/\rho$ , 且相应的应变为

\* 本章我们只考虑曲率  $\kappa$  的绝对值。后面, 在第 6.1 节中, 将引入适当的曲率符号约定。

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho} = \kappa y \quad (5-2)$$

该方程表明,纵向应变  $\epsilon_x$  与曲率和距中性面的距离  $y$  成正比。当所考虑的纤维在中性轴以下时,距离  $y$  为正,应变亦为正(拉伸)。当纤维位于中性轴以上时, $y$  和  $\epsilon_x$  两者都为负,表示材料受压。方程(5-2)完全根据变形杆的几何图形导出,所以它与材料的性质无关。因而,当梁的材料具有任何一种应力-应变图时,该方程总是成立的。

梁的实验表明,纤维的轴向应变伴随有横向应变,正如同简单拉伸或压缩时的情况(见第 1.4 节)。中性面以下纵向纤维的伸长伴随有横向收缩,而中性面以上将有横向膨胀。由于横向应变的结果,横截面的形状改变,就像图 5-2b 中对矩形横截面的特定情况所表示的那样。该矩形的两条侧边变得彼此倾斜,其横向应变为

$$\epsilon_z = -\nu\epsilon_x = -\nu\kappa y \quad (5-3)$$

其中  $\nu$  为泊松比。因为此种挠曲,横截面上所有原先平行于  $x$  轴的直线变弯以便与截面两侧边保持垂直。它们的曲率半径  $\rho_1$  将比  $\rho$  大,其比值与  $\epsilon_x$  大于  $\epsilon_z$  的倍数相同(见方程 5-3),因此我们得

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\nu} \quad \kappa_1 = \nu\kappa \quad (5-4)$$

式中  $\kappa_1 = 1/\rho_1$  为  $yz$  平面的曲率。

对于用具有线性应力-应变图(虎克材料)的弹性材料制成的梁,我们有  $\sigma = E\epsilon$ , 因此,梁的正应力为(见方程 5-2):

$$\sigma_x = \kappa E y \quad (5-5)$$

我们看出,这些应力与距中性轴的距离  $y$  成线性变化,如图 5-3a 所示。中性轴以下为拉应力,中性轴以上为压应力,这些应力的合力必等同于作用在横截面上的弯矩  $M$ 。

令  $dA$  代表横截面上距中性轴为  $y$  的面积微元(图 5-3b)。那么作用于这个面积上的微元力为  $\sigma_x dA$ 。因为横截面上没有法向合力作用, $\sigma_x dA$  沿整个横截面面积的积分必等于零,所以

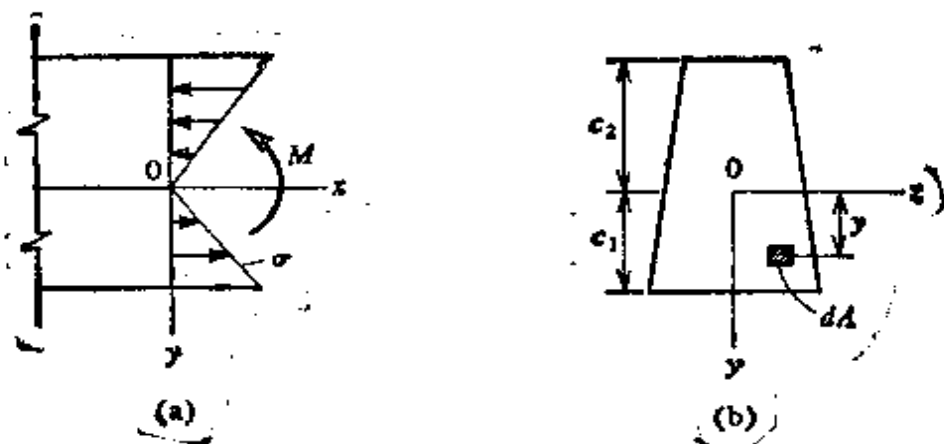


图5-3. 梁的应力分布.

$$\int \sigma_x dA - \int \kappa E y dA = 0$$

因为曲率  $\kappa$  和弹性模量  $E$  均为常数, 由此方程我们断定

$$\int y dA = 0 \quad (5-6)$$

该方程是对纯弯梁而言. 它说明了横截面面积对于中性轴即  $z$  轴的一次矩等于零. 因此, 我们得知, 中性轴通过横截面的形心. 这一性质可以用于确定任一横截面形状的中性轴位置, 如前所述, 其限制条件是  $y$  轴必为对称轴. 因为  $y$  轴是一根对称轴, 它也必定通过横截面的形心, 于是,  $y$  轴和  $z$  轴的原点位于形心处(见图 5-3b). 而且, 这两根轴均为横截面的主轴(见附录 A 关于面积主轴的讨论).

微元力  $\sigma_x dA$  对中性轴之矩为  $\sigma_x y dA$ . 在整个横截面面积上所有这样的微元力矩的积分必等于弯矩  $M$ , 因此

$$M = \int \sigma_x y dA = \kappa E \int y^2 dA = \kappa EI \quad (5-7)$$

其中

$$I = \int y^2 dA \quad (5-8)$$

为横截面面积对  $z$  轴亦即中性轴的惯性矩. 方程(5-7)可重新写成下列形式:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (5-9)$$

该式表明梁纵轴的曲率与弯矩  $M$  成正比, 而与量  $EI$  成反比,  $EI$  称为梁的弯曲刚度。

合并方程(5-5)和(5-9), 我们得到下列梁的正应力方程:

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \quad (5-10)$$

在该方程中, 当弯矩使梁的顶部产生压缩时  $M$  为正, 而  $y$  以向下方向为正(见图 5-3)。

梁中最大的拉应力和压应力发生在距中性轴最远的点处。用  $c_1$  和  $c_2$  分别代表最远处受拉和受压纤维的距离, 如图 5-3b 所示, 并假设  $M$  为正, 由方程(5-10)我们得到

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{S_1} \quad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{S_2} \quad (5-11)$$

其中  $S_1 = I/c_1$  和  $S_2 = I/c_2$  称为横截面面积的截面模量。如果横截面关于  $z$  轴对称, 那么  $c_1 = c_2 = c$ , 最大拉应力和最大压应力在数值上相等:

$$(\sigma_x)_{\max} = -(\sigma_x)_{\min} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \quad (5-12)$$

其中截面模量为

$$S = \frac{I}{c} \quad (5-13)$$

对于宽为  $b$  和高为  $h$  的矩形横截面梁(见图 5-4a), 其惯性矩和截面模量为

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad S = \frac{bh^2}{6} \quad (5-14)$$

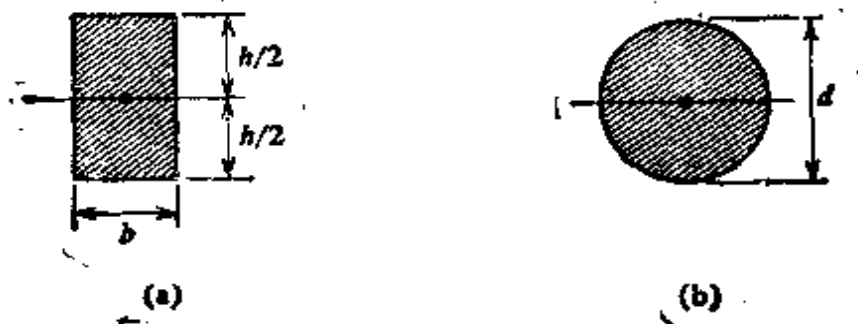


图 5-4.



对于直径为  $d$  的实心圆截面(图 5-4b), 我们有

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad S = \frac{\pi d^3}{32} \quad (5-15)$$

对其它各种形状梁的横截面, 例如宽翼缘梁, I 字梁和槽形梁, 其截面性质均列入各种手册的表格中. 附录 O 给出这些截面的一个简表, 可以用来求解本书中的习题.

上述梁内正应力的分析是由纯弯推出的, 这意味着在横截面上没有剪力作用. 与剪应力有关的变形包含了横截面的翘曲, 因此, 弯曲之前的平截面在弯曲之后不再保持平面. 这种翘曲使得其性态复杂化, 但是, 较精确的分析表明, 根据弯曲公式(方程 5-10)所计算的正应力并不因为剪应力及相关翘曲的存在而显著地改变(参看文献 5-2). 因此, 即使当我们有非均匀弯曲时, 使用纯弯理论来计算正应力也是合理的. 剪应力的计算将在第 5.3 节研究.\*

**例题 1** 一外伸臂梁  $AB$ , 受载和支承如图 5-5 所示. 试求梁的最大正应力及中点处的挠度  $\delta$ . 假设梁具有直径  $d=250$  mm 的圆形横截面, 并假设  $a=340$  mm,  $L=1.5$  m,  $P=120$  kN 及  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>.

梁的支座之间的部分处于纯弯状态, 具有

$$M = Pa = 40.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

横截面的截面模量为

$$S = \pi d^3 / 32 = 1.534 \times 10^6 \text{ mm}^3,$$

所以, 最大正应力(根据方程 5-12)为

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} = \frac{40.8 \times 10^6}{1.534 \times 10^6} = 26.6 \text{ N/mm}^2$$

由方程(5-9), 我们求得圆弧  $CD$  的曲率半径(见图 5-5):

$$\rho = \frac{EI}{M} = \frac{200 \times 10^3 \times 191.8 \times 10^6}{40.8 \times 10^6} = 940 \text{ m}$$

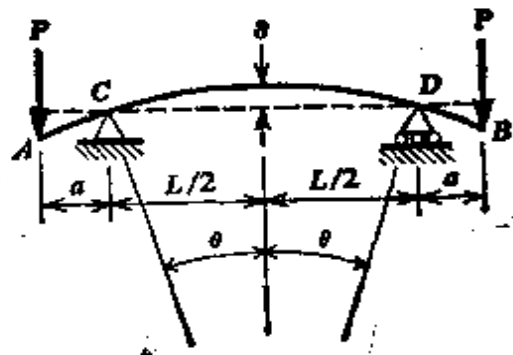


图 5-5. 例题 1.

\* 梁的初等理论的历史发展状况, 包括伽利略, 马略特(Mariotta), 雅各布·伯努利, 欧拉, 吉拉德(Girard), 帕伦特(Parent), 库伦, 圣维南以及其他人的贡献, 在参考文献 5-3 中叙述.

其中  $I = \pi d^4 / 64 = 191.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$ 。由图 5-5 我们得知, 挠度  $\delta$  为

$$\delta = \rho(1 - \cos \theta) \quad (\text{a})$$

式中  $\theta$  为一微小角度, 等于  $L/2\rho$ , 或  $0.000798$  弧度。对于很小的角度, 我们有  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ , 因此方程(a)变为

$$\delta = \frac{\rho \theta^2}{2} = \frac{L^2}{8\rho} = 0.299 \text{ mm}$$

**例题 2** 图 5-6 所示的梁 ABC 是由槽形截面构成, 其截面方位如图 5-6b 所示。该槽形为一个 C305 × 45 的截面, 如附录表 C-3 所列。试计算梁中的最大拉应力和最大压应力。

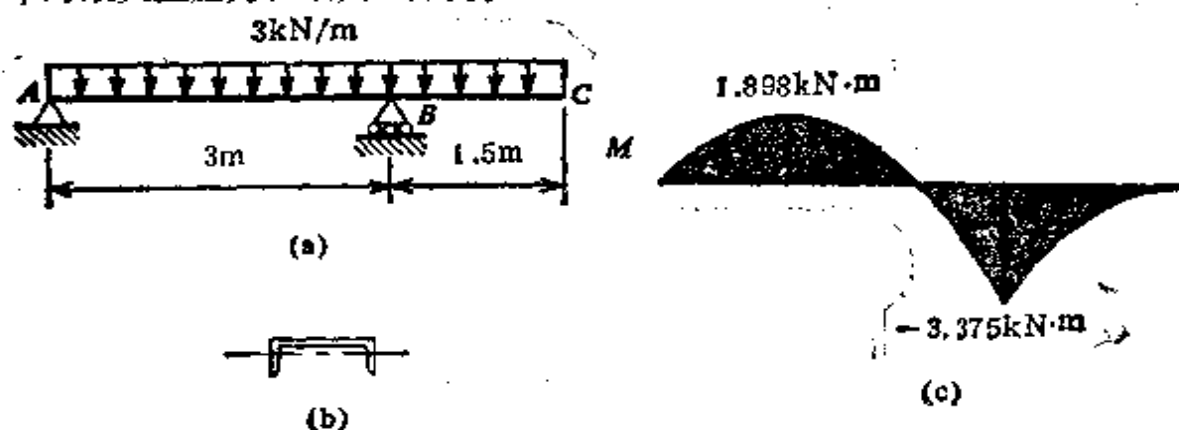


图 5-6. 例题 2.

该梁的弯矩图示于图 5-6c 中, 我们由图可知, 最大正弯矩和最大负弯矩分别为  $1.898$  和  $-3.375 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。梁的截面模量可借助附录中所给的特性表查得。对于梁的顶部和底部, 截面模量分别为

$$S_1 = \frac{2.16 \times 10^6}{17.3} = 124,800 \text{ mm}^3 \quad S_2 = \frac{2.16 \times 10^6}{63.2} = 34,170 \text{ mm}^3$$

现在, 我们可由方程  $\sigma = M/S$  计算应力。在最大正弯矩处, 最大拉应力和最大压应力分别为

$$\sigma_t = \frac{1.898}{0.03417} = 55.5 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_c = -\frac{1.898}{0.1248} = -15.2 \text{ N/mm}^2$$

类似地, 在最大负弯矩处, 此应力为

$$\sigma_t = \frac{3.375}{0.1248} = 27 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_c = \frac{3.375}{0.03417} = -98.7 \text{ N/mm}^2$$

通过比较以上算出的四个应力值, 我们看出, 梁的最大拉应力为  $55.5 \text{ N/mm}^2$ , 而最大压应力为  $-98.7 \text{ N/mm}^2$ 。

## 5.2 梁的设计

梁横截面的选择, 取决于所用的材料、结构型式、载荷性质以

及许多其它因素。若仅从弯曲设计的观点考虑，所需的横截面面积的截面模量可由如下方程求得

$$S = \frac{M_{\max}}{\sigma_w} \quad (5-16)$$

式中  $\sigma_w$  为容许应力，而  $M_{\max}$  为最大弯矩。如果拉伸和压缩的  $\sigma_w$  是相同的，那么选择双对称且形心位于梁高之半处的横截面形状是合理的。如果拉和压的容许应力不同，最好采用非对称的横截面，使受拉和受压的最远纤维的距离之比与各自的容许（容许）应力之比相同。在选择梁的横截面时，通常的作法不仅考虑所需的截面模量，而且还要使横截面的面积减至最小，从而使梁的自重减至最轻。

当设计钢梁或铝梁时，通常应参考那些给出标准结构截面性能与尺寸的手册（例如，参考文献 5-4 和 5-5）。但为避免在解习题时查阅手册，在附录 C 中给出了一些结构钢截面的简表。结构截面用标号来识别，譬如 W914×342，它意味着截面具有名义高度 914 mm，每米长的质量为 342 kg 的宽翼缘截面。对于 I 字梁（或 S 形）和槽形截面（或 C 形）应用类似的标号，如附录 C 所示。角形截面或 L 型材则按其边长和厚度来识别，如 L203×152×25。

在对比各种横截面形状时，我们首先考虑一宽为  $b$  高为  $h$  的矩形（图 5-4a）。其截面模量为

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} = 0.167 Ah \quad (a)$$

式中  $A$  代表横截面面积。可以看出，一个给定面积的矩形截面，随着高度  $h$  的增加而愈来愈经济。然而，这种增加是有限度的，因为如果截面变得太窄，梁的横向就不稳定。非常狭窄的矩形梁可以由横向屈曲（或侧向屈曲）引起破坏，而不是由于材料强度之不足。\*

对于直径为  $d$  的圆截面（图 5-4b），我们有

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{Ad}{8} = 0.125 Ad \quad (b)$$

将相同面积的圆形截面和正方形截面进行比较，我们求出正方形

\* 在参考文献 5-6 中讨论梁的横向屈曲。

的边长为  $h = d\sqrt{\pi}/2$ , 对于此值, 方程(a)给出

$$S = 0.148 Ad$$

此结果与(b)比较表明, 方形截面比圆形截面更为经济.

研究沿横截面高度的应力分布(图 5-3a)会得出这样的结论: 为了经济设计, 梁的大部分材料应当尽可能的远离中性轴. 对于一个给定横截面  $A$  和高度  $h$  的最有利的情况应当是将每一半面积配置在距中性轴为  $h/2$  处, 如图 5-7a 所示. 于是

$$I = 2\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ah^2}{4} \quad S = 0.5 Ah \quad (c)$$

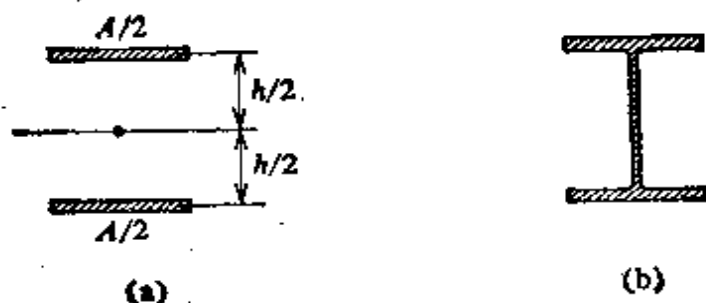


图 5-7.

实践中, 使用翼缘占据大多数材料的宽翼缘截面(图 5-7b)或 I 形截面, 可在某种程度上接近这一理想的极限情况. 因为需要把一部分材料置于梁的腹板上, 所以极限情况(c)永远不能实现. 对于标准的宽翼缘截面, 我们近似地有

$$S \approx 0.35 Ah \quad (d)$$

比较(d)和(a)表明, 宽翼缘截面比相同面积和相同高度的矩形截面经济得多. 另外, 由于它的宽度较大, 所以就横向屈曲来说, 宽翼缘梁就比相同高度和相同截面模量的矩形截面梁更为稳定. 由此简短的讨论我们得知, 为什么在金属结构中广泛采用宽翼缘梁.

**例题 1** (a) 试确定图 5-8 所示承受分布载荷的梁  $AB$  所需的截面模量  $S$ , 假设  $q = 60 \text{ kN/m}$  及容许弯曲应力  $\sigma_w = 110 \text{ N/mm}^2$ . 略去梁重不计. (b) 计及梁重, 试从附录表中选择一宽翼缘截面.

(a) 为了确定最大弯矩截面的位置, 最好先绘制图 5-8 所示的剪力图. 支座处的反力为

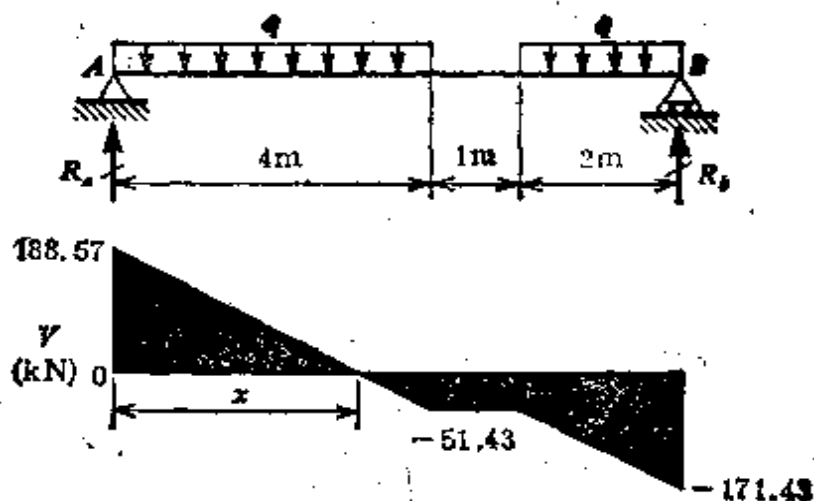


图 5-8. 例题 1.

$$R_a = 188.57 \text{ kN} \quad R_b = 171.43 \text{ kN}$$

用下列方程给出确定零剪力点的距离  $x$

$$R_a - qx = 0$$

从上式得  $x = R_a/q = 3.143 \text{ m}$ . 在距左端  $A$  为  $x$  处, 其弯矩为最大,

$$M_{\max} = R_a x - qx^2/2 = 296.32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

根据方程(5-16), 所需的截面模量为

$$S \rightarrow \frac{296.32 \times 10^6}{110} = 2693 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

(b) 参看附录中的宽翼缘截面表, 我们得知, 其中列出的具有所需截面模量的最轻截面为  $W 610 \times 125^*$ . 自然, 该表是被删节过的, 因此实际上在市场上有可能供用再轻一些的截面.

如果现在将梁的自重 ( $125 \times 9.81 \text{ N/m}$ ) 和梁上的其他载荷加起来, 就会发现最大弯矩增大到  $303.85 \text{ kN} \cdot \text{m}$ . 于是所需的  $S$  增大到  $2762 \times 10^3 \text{ mm}^3$ . 由于所选截面模量是  $3217 \times 10^3 \text{ mm}^3$ , 它仍然是符合要求的. 如果它不符合要求, 应当选择一根新的梁, 并重复以上过程, 但计算弯矩时要用新梁的重量.

**例题 2** 一正方形截面梁(图 5-9)在对角线的平面内受弯. 试证明由于切去图中阴影线所示的棱角, 梁中的最大正应力将减小.

整个正方形对  $z$  轴的惯性矩和截面模量分别为

$$I_z = \frac{a^4}{12} \quad S_z = \frac{\sqrt{2} a^3}{12}$$

其中  $a$  为正方形的边长. 现在让我们切去两个棱角使其每个边缩短  $\beta a$ , 其中

\* 在译本的附录 O 中, 我们已改用换算成国际单位制的新表, 与原表略有差别, 根据新表, 本应选  $W 533 \times 122$ , 但在此例题中, 我们保留了原文所选的截面. ——译者注

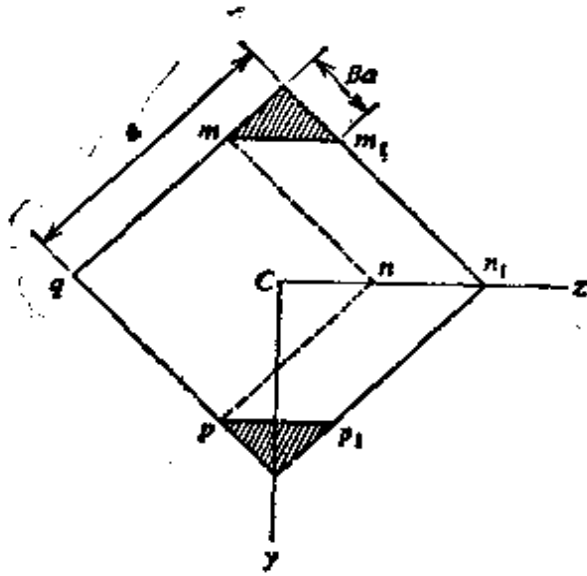


图 5-9. 例题 2.

$\beta$  是 0 到单位 1 之间的一个数。新的横截面由边长为  $a(1-\beta)$  的正方形  $mnpq$  和两个平行四边形  $mm_1n_1n$  和  $nn_1p_1p$  所组成。这个减小了的横截面对  $z$  轴的惯性矩为

$$I_2 = \frac{a^4(1-\beta)^4}{12} + \frac{2\beta a \sqrt{2}}{3} \cdot \left[ \frac{a(1-\beta)}{\sqrt{2}} \right]^3 = \frac{a^4(1-\beta)^3(1+3\beta)}{12}$$

而相应的截面模量为

$$S_2 = \frac{I_2 \sqrt{2}}{a(1-\beta)} = \frac{\sqrt{2} a^3 (1-\beta)^2 (1+3\beta)}{12}$$

如果我们这样来确定  $\beta$  值，使得截面模量为最大，那么我们会求出  $\beta = 1/9$ 。将此  $\beta$  值代入到  $S_2$  的表达式中，我们得出  $S_{\max} = 1.053 S_1$ 。因此，我们发现，切去两个棱角后使截面模量增加了约 5%，而最大弯曲应力也减小一个对应的数值。

当我们想到截面模量为惯性矩和横截面的一半高度之商时，此结果便容易理解。由于切去两个棱角，横截面惯性矩减小的比例比高度减小的比例要小。因此，截面模量实际上增大了。

### 5.3 梁中的剪应力

我们已经观察到，当梁受到横向载荷而弯曲时，在每个横截面上，通常将有弯矩  $M$  和剪力  $V$  同时作用。在第 5.1 节中，我们确定了与弯矩有关的正应力分布，本节我们将研究剪应力的分布。

让我们从宽为  $b$ 、高为  $h$  的矩形截面梁（图 5-10a）这一最简单情况开始。对该梁自然要假设剪应力  $\tau$  平行于剪力  $V$ ，亦即平行于横截面的竖直边。作为第二个假设，我们认为剪应力沿梁宽均匀分布。使用这两个假设，将使我们能够完全地确定作用在横截面上的剪应力分布。

在两个相邻的横截面之间和两个平行于中性面的平面之间，

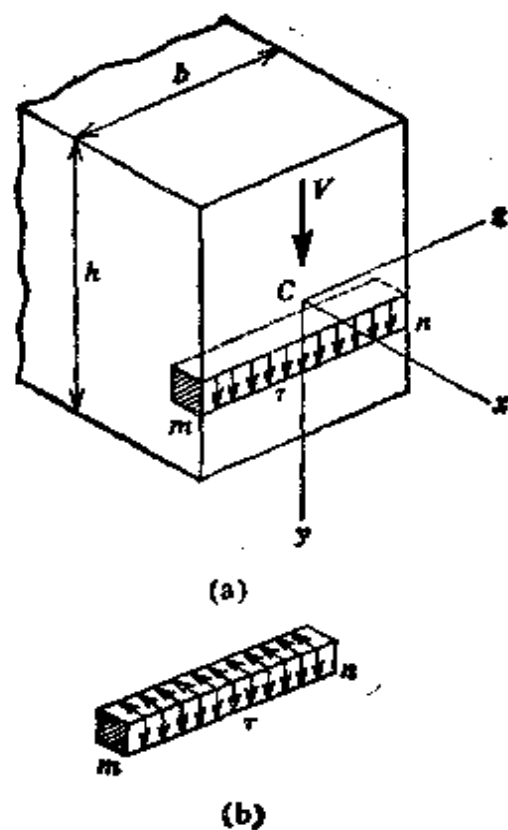


图 5-10. 矩形截面梁中的剪应力

可以切出一个梁的微元体,如图 5-10a 和 b 所示的微元体  $mn$ . 于是,根据上述假设,在微元体的竖直面存在均匀分布的竖直剪应力  $\tau$ . 根据第 1.9 节中关于剪应力的讨论,我们还得知,在微元体的一个面以及与其相垂直的面上同时发生相等的剪应力(图 5-10b). 因此,在梁的水平层间将有水平剪应力,同时在竖直横截面上也存在横向剪应力. 在梁的任意点处,这些成对的剪应力大小相等.

此种关于水平剪应力和竖直剪应力互等性的观察结果,导出有关梁的顶部和底部剪应力的一个有趣结论. 如果我们研究图 5-10 中所示位于梁的顶部或底部的微元  $mn$ ,显然,水平剪应力必为零,因为在梁的外表面上没有剪应力. 所以在梁的顶部或底部 ( $y = \pm h/2$ ) 上,竖直剪应力  $\tau$  也必为零.

梁中水平剪应力的存在可以通过简单实验来演示. 取两根高为  $h$  的相同矩形杆,并且将它们放置在简单支座上,如图 5-11a 所示,然后,使其承受

集中载荷。如果两杆之间没有摩擦，两杆将独立地发生弯曲。每根杆都将在上部受压而下部受拉，其情况如图 5-11b 所示。上杆的下部纵向纤维相对于下杆的上部纤维滑动。如果，我们有一根高度为  $2h$  的实心杆而不是两根杆，那么沿中性面必有剪应力，其大小应能阻止图 5-11b 所示的滑动。因为阻止了滑动，所以高度为  $2h$  的单根杆比高度各为  $h$  的两根分离杆坚固和刚硬得多。

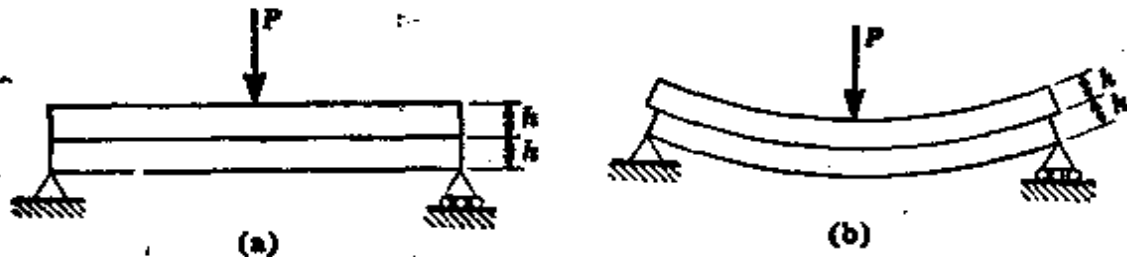


图 5-11.

已经表明，横截面上任意点处的竖直剪应力  $\tau$  在数值上等于同一点处的水平剪应力。后一种应力可根据从梁中相距为  $dx$  的两个相邻截面  $mn$  和  $m_1n_1$  间所切取的微元体  $pmn_1p_1$  (图 5-12a) 的平衡来计算。该微元体的底面为梁的下表面，无应力作用。它的上表面平行于中性面，并距中性面为任一距离  $y_1$ 。它受到在梁内这一高度上存在的水平剪应力的作用。微元体的端面上受到由弯矩所产生的正应力  $\sigma$ 。此外，在端面上还有竖直剪应力，但是它们并不计入微元体在水平方向 ( $x$  方向) 的平衡方程中，因此，没有在图 5-12a 中表示出来。

如果横截面  $mn$  和  $m_1n_1$  上的弯矩相等，亦即，如果梁处于纯弯状态，那么沿着边  $np$  和  $n_1p_1$  的正应力也就相等。因此，该微元

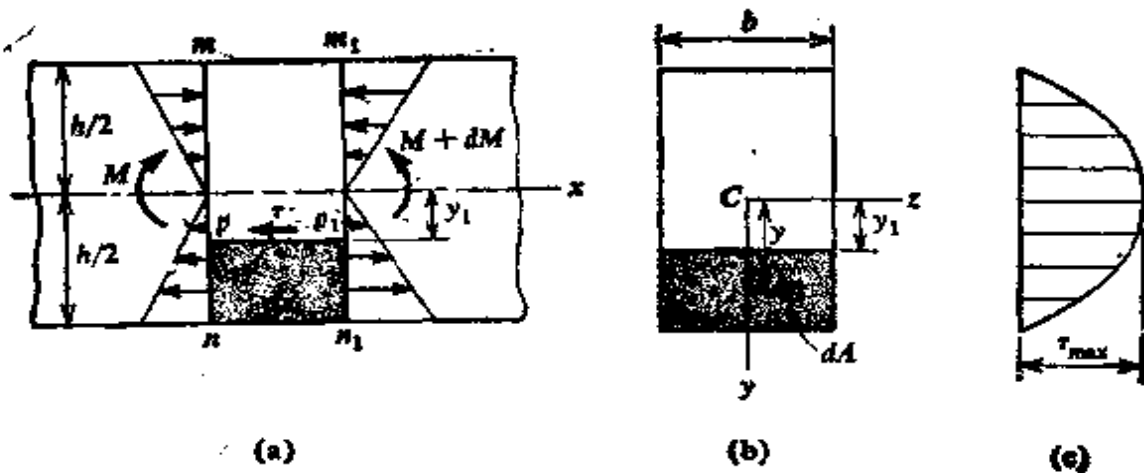


图 5-12. 矩形横截面梁的剪应力



体处于平衡,而剪应力  $\tau$  必为零。

在变弯矩这一更普遍的情况下,让我们用  $M$  和  $M+dM$  分别代表横截面  $mn$  和  $m_1n_1$  上的弯矩。作用在该微元体的左侧面微元面积  $dA$  上的法向力为(见方程 5-10)

$$\sigma_c dA = \frac{My}{I} dA$$

沿着面  $pn$  分布的所有微元力之和将为

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I} dA \quad (a)$$

同样地,作用在微元体的右侧面  $p_1n_1$  上的法向力之和为

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM)y}{I} dA \quad (b)$$

作用在该微元体的上表面  $pp_1$  上的水平剪力为

$$\tau b dx \quad (c)$$

表达式 (a)、(b) 和 (c) 中所给的力必须处于平衡状态,因此,

$$\tau b dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM)y}{I} dA - \int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I} dA$$

由此得

$$\tau = \frac{dM}{dx} \left( \frac{1}{Ib} \right) \int_{y_1}^{h/2} y dA$$

或,使用方程(4-2),

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int_{y_1}^{h/2} y dA \quad (5-17)$$

此方程中的积分表示横截面的阴影部分(图 5-12b)对中性轴  $z$  的一次矩。换句话说,该积分为所求剪应力  $\tau$  处的任一高度  $y_1$  以下的横截面面积的一次矩。(当  $y_1$  从中性轴以上度量时,此积分为所计算的剪应力处的高度以上面积的一次矩。)用  $Q$  代表该一次矩,我们可将方程(5-17)写为如下形式

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad (5-18)$$

为了确定  $\tau$  如何随距中性轴的距离  $y_1$  而变,现在我们必须考察  $Q$  随  $y_1$  的变化,因为  $V$ 、 $I$  和  $b$  均为常数。

对于图 5-12b 所示的矩形横截面,其阴影面积的  $Q$  值为

$$Q = b \left( \frac{h}{2} - y_1 \right) \left( y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (d)$$

上面的结果是由阴影面积乘其形心至  $z$  轴的距离而得，它也可以通过方程(5-17)中所表示的积分而得。现在将表达式(d)代入方程(5-18)，我们得到

$$\tau = \frac{V}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (5-19)$$

这个结果表明，剪应力随  $y_1$  呈抛物线变化，如图 5-12c 所示。当  $y_1 = \pm h/2$  时剪应力为零，而在中性轴处 ( $y_1 = 0$ ) 剪应力具有最大值：

$$\tau_{\max} = \frac{V h^2}{8I} = \frac{3V}{2A} \quad (5-20)$$

式中  $A = bh$  为横截面的面积。因而，最大剪应力(水平的或竖直的)比平均剪应力  $V/A$  大 50%\*。

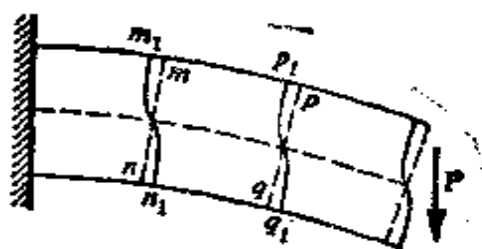


图 5-13. 由于剪切引起梁横截面翘曲。

因为剪应力  $\tau$  从梁顶到梁底呈抛物线变化，可见剪应变  $\gamma = \tau/G$  必按相同方式变化。因此，原为平面的梁的横截面变成翘曲的了。这种翘曲可用一根弯曲的梁加以演示，在该梁的侧面上画好竖直线，如图 5-13 中的  $mn$  和  $pq$  线。这些线将不再保持直线，而变为曲线，最大剪应变发生在中性面上，在  $m_1$ 、 $p_1$ 、 $n_1$  和  $q_1$  诸点处剪应变为零，并且曲线  $m_1m_1$  和  $p_1q_1$  与弯曲后杆的上、下表面保持垂直。在中性面上，曲线  $m_1n_1$  和  $p_1q_1$  的切线和垂直截面  $mn$  和  $pq$  之间的角度等于剪应变  $\gamma = \tau_{\max}/G$ 。只要剪力  $V$  沿梁保持常数，那么所有横截面的翘曲都是相同的，因而  $m_1m_1 = p_1p_1$  及  $m_1n_1 = q_1q_1$ 。这样，由弯矩产生的纵向纤维的伸长或缩短不受剪应变的影响，那么正应力  $\sigma$  的分布就和纯弯情况下相同。

对这一问题的更精细研究表明，即使有分布载荷作用在梁上，而剪力沿

\* 上述梁中剪应力分析是由焦罗斯基(Jourawski)所创(参考文献 5-7)。

着梁连续变化, 由于剪应变引起的横截面翘曲, 也并不显著影响纵向应变, 对于集中载荷, 其附近的应力分布较为复杂, 但是这些不规则性是很局部的, 不会明显地影响整个梁中的应力分布。因此, 将纯弯情况下导出的弯曲公式用于非均匀弯曲也是十分合理的。

**宽翼缘梁中的剪应力** 在研究宽翼缘梁或I字梁(图5-14a)腹板内的剪应力分布时, 所作的假设与矩形截面的相同, 即剪应力 $\tau$ 平行于 $y$ 轴而且沿着腹板的厚度 $t$ 均匀分布, 于是方程(5-18)又可用来计算其剪应力。研究距中性轴为 $y_1$ 的一点我们得知, 横截面的阴影部分对中性轴的一次矩为

$$Q = b \left( \frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2} \right) + t \left( \frac{h_1}{2} - y_1 \right) \left( y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2} \right)$$

由此 
$$Q = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right)$$

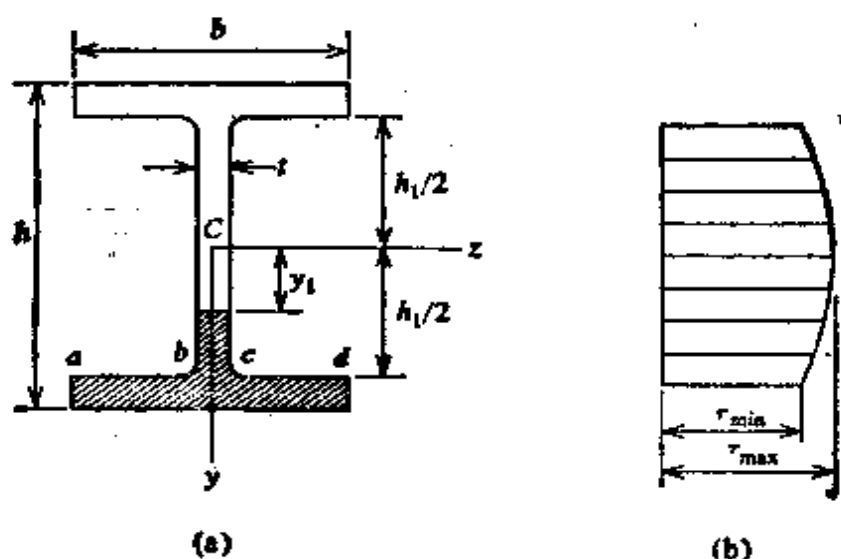


图5-14. 宽翼缘梁腹板中的剪应力。

因而, 梁腹板中的剪应力 $\tau$ 为

$$\tau = \frac{V}{It} \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right] \quad (5-21)$$

由此方程可以看出,  $\tau$ 沿腹板高度呈抛物线变化, 如图5-14b所示。最大剪应力发生在中性轴上, 并可令方程(5-21)中的 $y_1 = 0$

而求得. 腹板中的最小剪应力, 可令  $y_1 = \pm h_1/2$  得到. 因此我们求出

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{V}{It} \left( \frac{bh^3}{8} - \frac{bh_1^3}{8} + \frac{th_1^2}{8} \right) \\ \tau_{\min} &= \frac{V}{It} \left( \frac{bh^3}{8} - \frac{bh_1^3}{8} \right)\end{aligned}\quad (e)$$

通常, 腹板的厚度  $t$  要比宽度  $b$  小得多. 因此  $\tau_{\max}$  和  $\tau_{\min}$  之间就没有多大差别, 整个腹板截面上的剪应力分布几乎是均匀的. 单用腹板的横截面面积  $ht$  去除总剪力  $V$ , 可得  $\tau_{\max}$  的一个很好的近似值. 这种算法的根据是, 腹板横截面上分布的剪应力产生一个近似等于  $V$  的合力, 这表明了腹板几乎负担了所有剪力, 而翼缘只负担其中的一小部分.

在研究翼缘内的剪应力分布时, 不能假设沿翼缘宽度  $b$  的剪应力为常数. 例如, 我们立即可以看出, 在  $y_1 = h_1/2$  处, 自由表面  $ab$  和  $cd$  (图 5-14a) 上的剪应力必为零, 而在交接点  $bc$  处, 应力具有上面所计算的数值 (方程 e). 此项观察指明, 在腹板和翼缘的交接处, 剪应力的分布遵循更为复杂的规律, 该规律不能用初等分析来研究. 为了减少  $b$  和  $c$  点的应力集中, 使用图中所示的圆角. 对 I 字梁剪应力分布的进一步讨论将在后面第 8.4 节中进行.

**例题 1** 承受两个集中力  $P$  的简单梁 (图 5-1a), 具有宽  $b = 100 \text{ mm}$ , 高  $h = 150 \text{ mm}$  的矩形截面. 从梁端到载荷之一的距离  $\alpha$  为  $450 \text{ mm}$ . 假设梁为木制的,  $\sigma_w = 12 \text{ N/mm}^2$  及  $\tau_w = 1.5 \text{ N/mm}^2$ , 试确定  $P$  的容许值.

梁的最大弯矩  $M$  和最大剪力  $V$  为

$$M = P\alpha \quad V = P$$

又, 截面模量  $S$  和横截面面积  $A$  为

$$S = \frac{bh^2}{6} \quad A = bh$$

现在, 由方程 (5-12) 和 (5-20), 我们求得

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{6P\alpha}{bh^2} \quad \tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3P}{2bh}$$

所以, 载荷  $P$  的极限值为

$$P = \frac{\sigma_w b h^2}{6\alpha} \quad \text{和} \quad P = \frac{2\tau_w b h}{3}$$

将数字代入这些公式, 我们得到

$$P = 10 \text{ kN} \quad \text{和} \quad P = 15 \text{ kN}$$

因此, 弯曲应力控制了梁的设计, 其容许载荷  $P = 10 \text{ kN}$ 。

**例题 2** 图 5-15 表示一 T 字形横截面梁, 假设  $b = 100 \text{ mm}$ ,  $t = 24 \text{ mm}$ ,  $h = 200 \text{ mm}$ ,  $h_1 = 176 \text{ mm}$ , 及  $V = 45 \text{ kN}$ 。试确定梁腹板中的最大剪应力。

到横截面形心  $c$  的距离确定如下:

$$e = \frac{(76)(24)(12) + (200)(24)(100)}{(76)(24) + (200)(24)}$$

$$= 75.8 \text{ mm}$$

横截面对中性轴的惯性矩可以这样求出: 首先求出对轴  $m$  的惯性矩, 然后再用平行轴定理(见附录 A)。计算如下:

$$I = \frac{(100)(24)^3}{3} + \frac{(24)(176)^3}{3}$$

$$- (6624)(51.8)^2$$

$$= 26.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

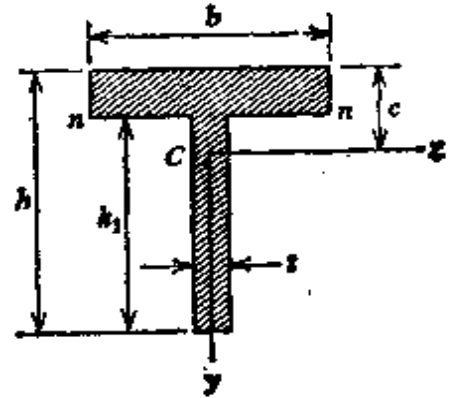


图 5-15. 例题 2.

最大剪应力发生在中性轴上, 中性轴以下面积的一次矩为

$$Q = \frac{(24)(124.2)^2}{2} = 185 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

现在代入方程(5-18), 我们得到

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(45 \times 10^3)(185 \times 10^3)}{(26.3 \times 10^6)(24)} = 13.2 \text{ N/mm}^2$$

它就是最大剪应力。

## 5.4 圆形横截面梁中的剪应力

当梁具有圆形横截面时(图 5-16a), 不再有任何根据假设所有剪应力平行于  $y$  轴。事实上, 我们可以容易地证明, 在横截面边界上的一点  $m$  处(图 5-16a), 其剪应力必与边界相切。让我们研究一个无限小的矩形平行六面体微元  $abcdfg$  (图 5-16b), 其  $adgf$  面位于梁的表面上, 而  $abcd$  面位于横截面的平面内。如果作用在微元体的  $abcd$  面上的剪应力具有  $\tau_1$  所示的方向, 那么它总能分解为两个分量, 沿径向的  $\tau_r$  和沿边界切线方向的  $\tau_t$ 。我们已经证明过(通过研究一个微元体的平衡), 如果剪应力  $\tau$  作用在微元体的一个面上, 则与其相垂直的面上也作用有数值相等的剪应力。将此概念应用于图

5-16b 所示的微元体上, 我们必定推断出, 如果作用在  $abcd$  面上的剪应力  $\tau_r$  沿半径方向, 就会有相等的剪应力  $\tau_r$  作用在微元体的  $adgf$  面上. 可见, 剪应力  $\tau_1$  的径向分量  $\tau_r$  必等于零, 因为梁的外表面是无应力的. 所以, 应力  $\tau_1$  沿梁横截面边界的切线方向作用.

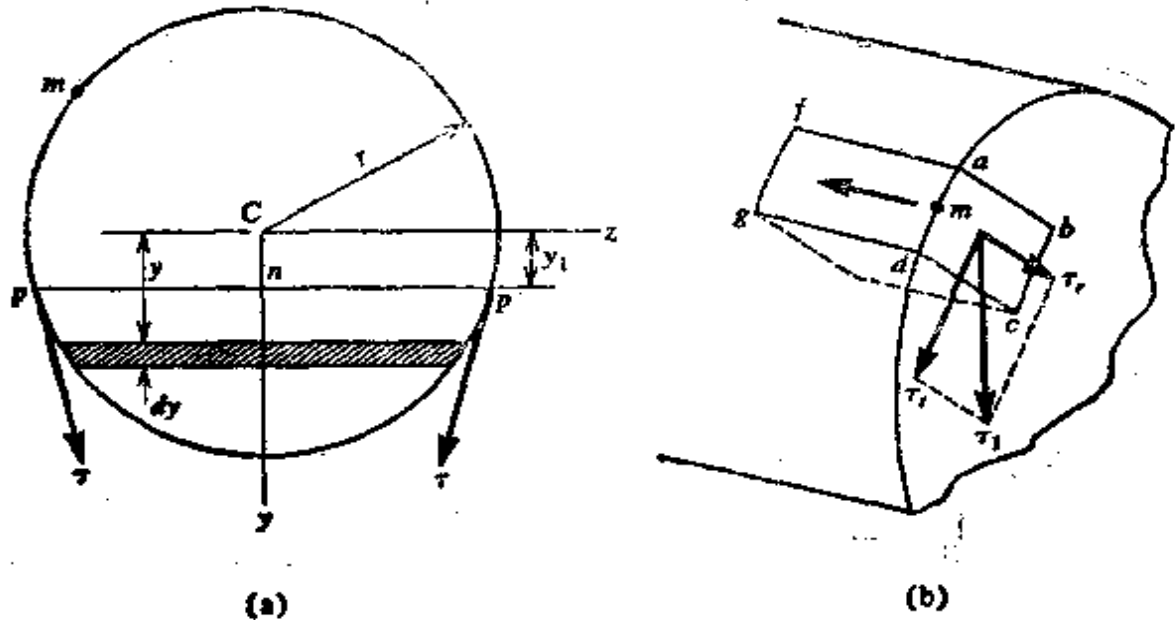


图 5-16. 圆形横截面梁中的剪应力.

现在让我们应用这一结论研究作用在距中性轴为  $y_1$  的弦  $pp$  上的剪应力(图 5-16a)。弦端处的剪应力  $\tau$  必与横截面的边界相切, 如图所示. 在弦的中点  $n$  处, 对称性要求其剪应力与  $y$  轴平行. 可见, 在点  $p$  和  $n$  处的剪应力方向将交于  $y$  轴上某一点. 现在假设, 在线  $pp$  上任一其它点的剪应力也指向此同一点, 我们就完全地确定了剪应力的方向.

作为第二个假设, 我们认为沿  $pp$  线所有点其剪应力的竖直分量是相等的. 由于此假设与矩形截面所作的假设完全吻合, 因此我们可使用方程 (5-18) 计算这一分量. 在这种情况下,  $b$  将代表弦  $pp$  的长度. 因为剪应力的方向和它的竖直分量此时均为已知, 所以横截面上任一点处剪应力的大小可以容易地计算出来.

现在让我们着手计算沿横截面的  $pp$  线上的剪应力(图 5-16a). 在应用方程 (5-18) 计算这些应力的竖直分量  $\tau_y$  时, 我们必须求出  $pp$  线以下圆的弓形对  $z$  轴的一次矩  $Q$ . 图中阴影线所示的微元面积长为  $2\sqrt{r^2 - y^2}$ , 宽为  $dy$ , 其中  $r$  为圆截面的半径. 此面积为  $dA = 2\sqrt{r^2 - y^2} dy$ . 此窄条对中性轴的一次矩为  $y dA$ , 整个弓形总的一次矩  $Q$  为

$$Q = \int_{y_1}^r 2y\sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} (r^2 - y_1^2)^{3/2}$$

将此结果代入到方程(5-18)中并取  $2\sqrt{r^2-y^2}$  为  $b$ , 我们求得剪应力的竖直分量:

$$\tau_y = \frac{V(r^2 - y_1^2)}{3I} \quad (a)$$

在边界上  $p$  点处总的剪应力为

$$\tau = \frac{\tau_y r}{\sqrt{r^2 - y_1^2}} = \frac{V r \sqrt{r^2 - y_1^2}}{3I} \quad (5-22)$$

我们由该方程得知, 最大的  $\tau$  由  $y_1=0$ , 亦即在横截面的中性轴处求得. 将  $I = \pi r^4/4$  代入, 我们求得

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A} \quad (5-23)$$

该方程表明, 对于圆形横截面, 最大剪应力比用横截面去除剪力所得的平均值大  $1/3$ . 在中性轴上, 剪应力  $\tau$  平行于  $y$  轴, 且在跨越横截面时为常数, 因此, 它们可以直接根据方程(5-18)计算.

上述近似理论对于计算实心圆梁的剪应力具有良好的准确度. 与精确理论比较表明, 其误差只有百分之几. 由弹性理论所得的精确结果可在参考文献 5-9 中查到.

如果梁为一薄壁空心圆截面, 那么我们就以较大的精确度假定: 在中性轴处, 剪应力沿管的厚度均匀分布. 因此, 方程(5-18)可用来求最大剪应力.

## 5.5 组合梁

在许多类型的结构中, 希望使用组合梁或装配式梁. 图 5-17 是此类梁的两个例子. 第一个例子为一空心方形截面的盒式梁, 它是由四块木板用钉、螺钉或胶结合在一起而构成的. 第二个例子为一根由三块钢板焊接而成的大梁. 组合梁内的应力通常根据以下假设计算: 梁的所有零件均牢固地连接在一起, 因此该梁如同一根整体梁一样. 于是计算包括两个阶段: (a) 把梁作为整体梁进行计算; (b) 设计连接件(钉, 焊缝, 螺栓等), 以保证该梁象一根整体梁一样的作用. 当设计该梁时, 可使用梁的常用公式, 并使用缩减的横截面积, 以便扣除必须的螺栓孔部分. 连接件的设计基于组合梁各零件之间所传递的总水平剪力.

梁的任何两个零件之间所传递的水平剪力的简单公式, 可再

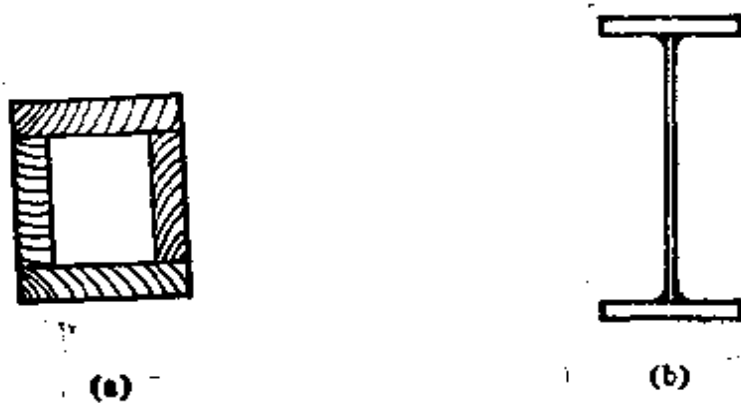


图 5-17. 组合梁: (a) 木盒梁; (b) 钢梁.

参照第 5.3 节图 5-12 导出. 在方程 (5-18) 的推导中, 曾假设剪应力  $\tau$  沿着梁宽  $b$  是均匀分布的. 在更为一般的情况下, 这一假设将不成立. 然而, 我们仍可计算作用在梁微元体上部表面上的总水平剪力, 譬如图 5-12a 中的微元  $pp_1m_1n_1$ . 这个总的力等于  $f dx$ , 其中  $f$  为沿梁轴单位长度的总剪力 (作用于梁的整个宽度上). 量  $f$  称为剪流, 对于矩形横截面梁而言, 它等于  $\tau b$ . 作用在图 5-12a 中微元体上表面的力  $f dx$  由作用在微元体两端面上正应力的合力之差来平衡. 因此, 如果我们依照推导方程 (5-18) 相同的方法进行, 就得出下面的剪流方程:

$$f = \frac{VQ}{I} \quad (5-24)$$

当设计梁的各零件之间的连接件时, 这个方程很有用, 因为该式给出了各零件之间传递的水平剪力 (梁的单位长度上). 现用例题来说明方程 (5-24) 的应用.

**例题** 一盒式梁 (图 5-18) 系由几块木板 (25 mm  $\times$  150 mm) 用螺丝钉连接而成. 作用在横截面上的剪力  $V$  为 4 kN, 每个螺丝钉的容许剪切载荷为  $F = 1.10$  kN. 试确定所需的螺丝钉间距  $s$ .

在一块水平板和两块竖直板之间传递的剪流  $f$  可由方程 (5-24) 求得. 该式中量  $Q$  为欲求剪流断面以外的横截面面积的一次矩, 亦即, 顶板面积对中性轴的一次矩, 因此

$$Q = 150(25)(87.5) = 328 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

整个横截面对中性轴的惯性矩为



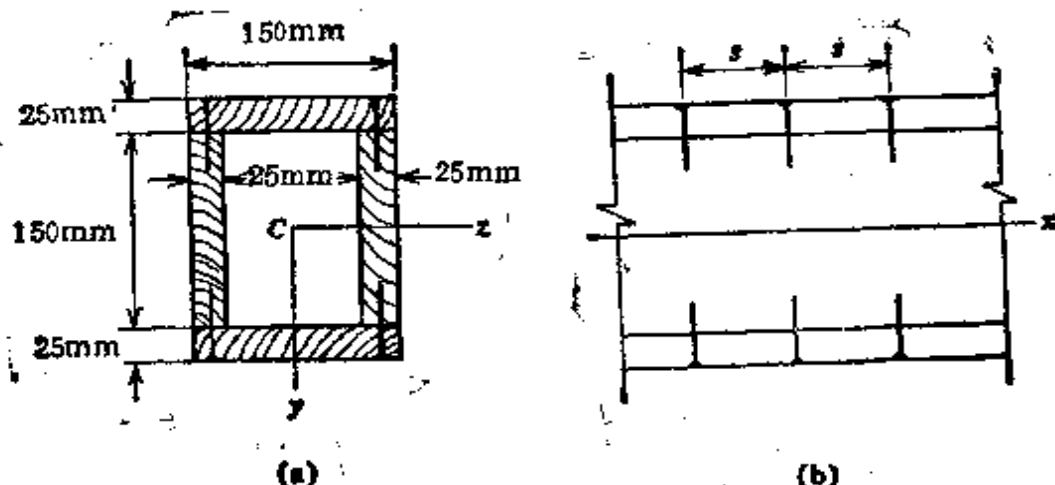


图 5-18. 数值例题.

$$I = \frac{150(200)^3}{12} - \frac{100(150)^3}{12} = 71.88 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

代入方程(5-24), 我们求出剪流为

$$f = \frac{4(328 \times 10^3)}{71.88 \times 10^6} = 18.3 \times 10^{-3} \text{ kN/mm}$$

这个每毫米长上的力必须由螺丝钉承受。因有两行螺丝钉, 每边有一行, 所以每毫米长度上螺丝钉的总承载能力为  $2F/s$ , 此量必须等于该剪流。因此, 我们有  $2F/s = f$ , 或

$$s = \frac{2F}{f} = \frac{2(1.10)}{18.3 \times 10^{-3}} = 120 \text{ mm}$$

为了得到一个安全的设计, 螺丝钉必须采用此间距或小于此间距。

## 5.6 梁中的主应力

使用方程  $\sigma = My/I$  和  $\tau = VG/Ib$ , 我们能够确定作用在梁的横截面上任何点处的正应力和剪应力。在梁的外边缘处正应力最大, 而在中性轴处为零; 在外边缘处剪应力为零, 而在中性轴处通常达到最大值。对梁中应力更全面的分析, 要求我们考虑这些剪应力和正应力的联合效应。特别是使用第二章所述的方法, 我们可以确定任何待求点处的主应力和最大剪应力。

为了弄清主应力的大小和方向在梁内是如何变化的, 我们先考察矩形横截面梁内的应力状态(图 5-19a)。在横截面上选择 5 个点, 如图中 A、B、C、D 和 E 所示。点 A 和 E 分别位于上表面

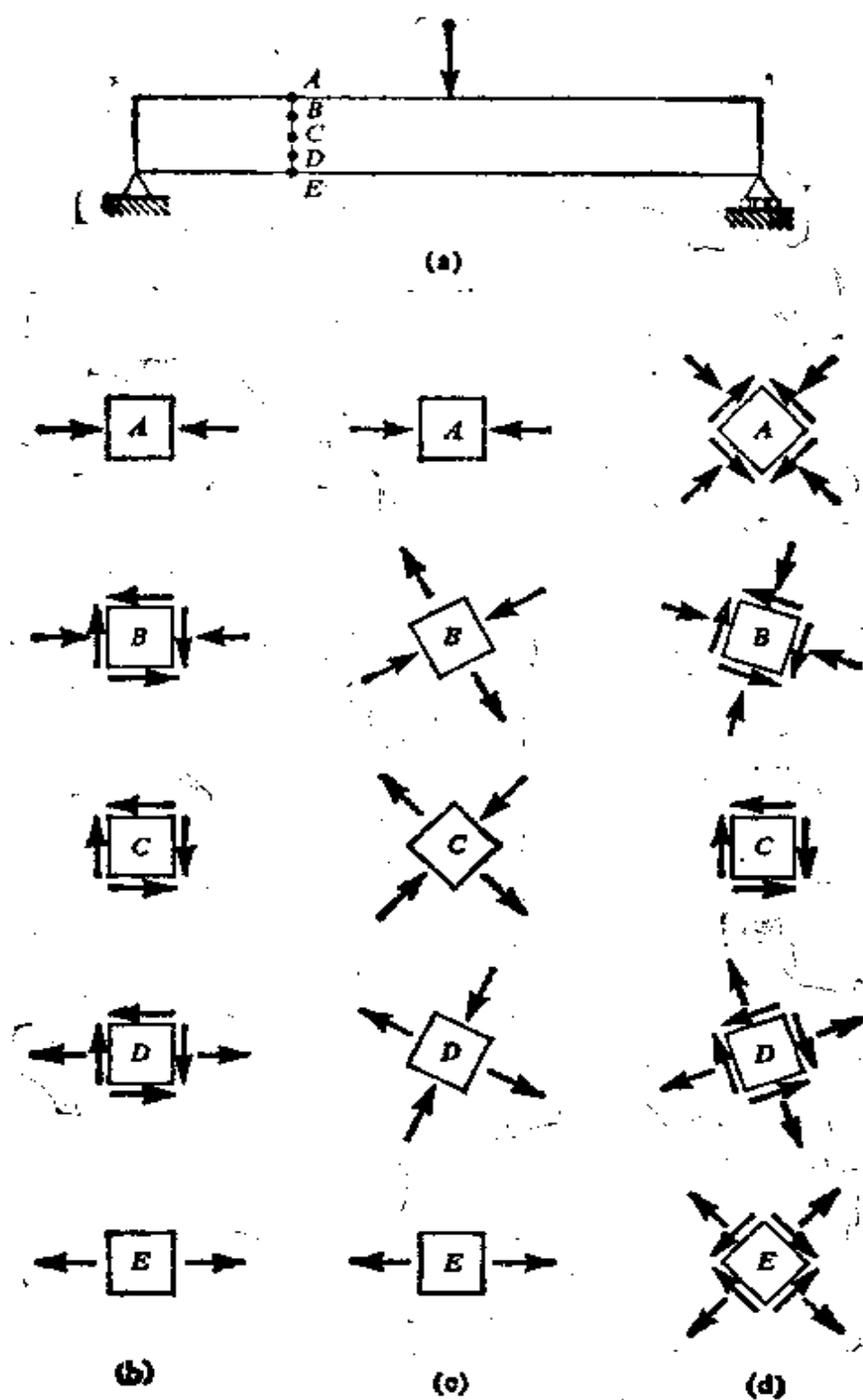


图 5-19. 矩形截面梁的应力: (b) 在点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  和  $E$  处的正应力和剪应力; (c) 主应力; 及 (d) 最大剪应力。

和下表面;点  $O$  位于梁高的中点处,如果横截面上的弯矩  $M$  和剪力  $V$  已知,就可计算每个点处的应力,然后可把这些应力用图表示为作用在从梁的相应点处所切出的微元体上(见图 5-19b),为了求出主应力和最大剪应力,我们可用平面应力的方程(见第 2.5 节)或莫尔圆(第 2.6 节),在每个点处主应力的方向近似地示于图 5-19c 中,而最大剪应力示于图 5-19d 中。

由图 5-19c 中的简图,我们可观察到主应力的变化。在梁顶,主压应力作用在水平方向上。当我们移近中性轴时,主压应力相对水平线而倾斜,而在中性轴(点  $O$ )上,它作用在与水平线成  $45^\circ$  的方向上。在  $D$  点,主压应力差不多是竖直的,而当我们向梁底靠近时,它的方向趋近竖直方向,从梁顶至梁底压应力的大小连续变化;到最底上一点,变为零。在矩形梁中,该应力的最大数值通常发生在点  $A$ ,虽然它亦可能发生在梁内一点,譬如  $B$  点,类似的说明也适应于主拉应力,当我们自点  $A$  移向点  $B$  时,其大小和方向两者也都在变化。

通过研究梁的许多横截面上的应力,我们将得到表示主应力如何变化的完整图形,根据这些数据,有可能作出两组称为应力轨迹的正交曲线,它给出了整个梁的主应力方向。图 5-20a 表明矩形横截面悬臂梁在端部承受集中力载荷时的应力轨迹。图中,实线用于主拉应力,而虚线用于主压应力。这两组曲线彼此正交,而且所有曲线以  $45^\circ$  与中性面\*相交。在梁的顶面与底面上,剪应力为零,其轨迹具有水平或竖直切线。矩形截面并承受均布载荷的简支梁的应力轨迹绘在图 5-20b 中\*\*。

根据梁中应力绘制的另一类曲线称为应力等值线。这种曲线连接相等的主应力点。作为实例,在图 5-21 中绘出了对矩形截面悬臂梁的典型应力等值线(仅对主拉应力而言)。

具有其他横截面形状的梁可用对矩形梁作过的相同方法来分析主应力。在宽翼缘梁或 I 字梁中的最大主应力有可能发生在腹

\* 原文误为中性轴——译者注

\*\* 应力轨迹由 K. 库尔曼(Culmann)于 1866 年绘出(参考文献 5-10)。

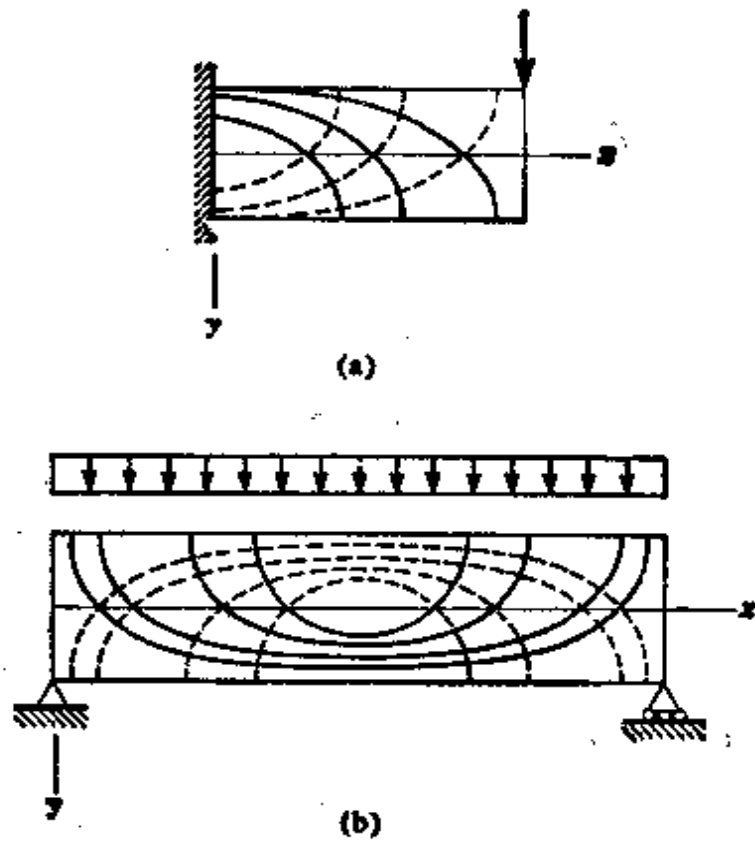


图 5-20. 主应力轨迹 (a) 悬臂梁; (b) 简支梁(实线表示主拉应力, 而虚线表示主压应力)。

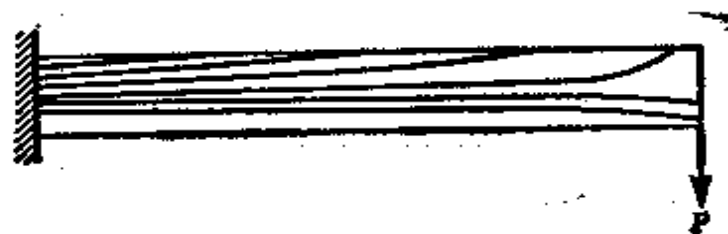


图 5-21. 悬臂梁的典型应力等值线。

板和翼缘的交接处, 尽管通常最大应力发生在梁的外边缘处。最大剪应力通常发生在中性轴上, 但在某种非常受载条件下它可能发生在中性轴的上面或下面。矩形和宽翼缘梁中的最大主应力和最大剪应力的位置均在参考文献 5-11 中作了详细讨论。

当分析梁的最大应力时, 必须时刻记住, 靠近梁的支座处和靠近载荷作用点处以及靠近形状突变处(凹角, 孔等), 将存在产生高应力的局部效应, 这些应力不能用普通梁的公式作预测。这种局部应力称为应力集中。

## 5.7 非棱柱形梁中的应力(近似理论).

前面诸节所讨论的梁,均假设为棱柱形,亦即沿整个梁的长度上横截面是不变的.然而,只要横截面的大小变化是很平缓的,对棱柱形梁所导出的公式也可用于非棱柱形梁,且具有较好的精确度.例如,在一根小锥度杆(见图5-22a)内由于弯矩产生的正应力可根据方程 $\sigma = My/I$ 计算.如果锥角很小,后面要说明其计算结果与某些精确结果比较,准确到百分之几以内.

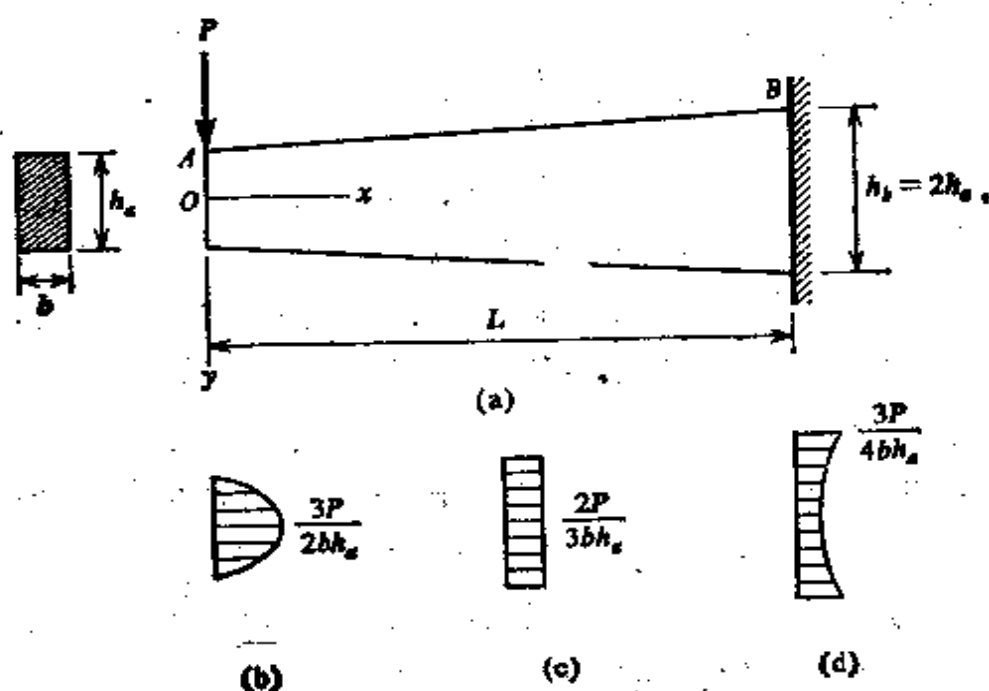


图5-22. 矩形截面的锥形梁.

然而,对于剪应力,由棱柱形杆导出的公式 $\tau = VQ/Ib$ 就不再适用了.我们必须代之以推导计及梁的高度变化影响的新关系式.为此目的,让我们研究从非棱柱形梁中切出的一个微小长度 $\Delta x$ 的微元体,如图5-23所示.在微元体的左侧面 $m_1n_1$ 上,弯矩为 $M_1$ ,而在右侧面 $m_2n_2$ 上,它为

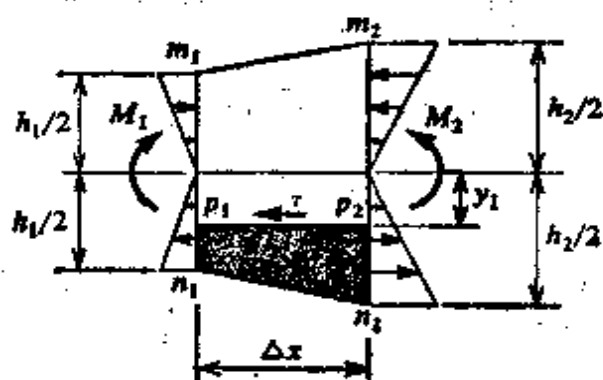


图5-23. 长度为 $\Delta x$ 的微元.

$M_2$ 。相应的梁高分别用  $h_1$  和  $h_2$  来代表，而  $y_1$  为从中性轴到剪应力  $\tau$  作用处的距离(试与棱柱形梁的图 5-12a 相比较)。

剪应力  $\tau$  根据微元体  $n_1 p_1 p_2 n_2$  的静力平衡方程求得。由于作用在微元体左侧面和右侧面上的弯曲正应力所产生的力分别为  $M_1 Q_1 / I_1$  和  $M_2 Q_2 / I_2$  (见第 5.3 节的方程 (a))。在这些表达式中， $I_1$  和  $I_2$  为两个横截面的惯性矩，而  $Q_1$  和  $Q_2$  分别为微元体的侧面  $p_1 n_1$  和  $p_2 n_2$  的面积对中性轴的一次矩。在微元体顶面  $p_1 p_2$  上总的力为  $\tau b \Delta x$ ，其中  $b$  为距中性轴为  $y_1$  处梁的宽度。因此，静力平衡方程变为

$$\tau b \Delta x = \frac{M_2 Q_2}{I_2} - \frac{M_1 Q_1}{I_1} \quad (5-25)$$

对任何特定的梁而言，将数值代入该方程，就可用来求出近似剪应力。其步骤如下。选择欲求剪应力  $\tau$  的梁截面。然后取相距微小距离  $\Delta x$  的相邻截面。在每一截面处，确定下列值：(1) 弯矩  $M$ ；(2) 欲求  $\tau$  外侧处横截面面积的一次矩  $Q$  (亦即在梁的外边缘和要确定的  $\tau$  处之间面积的一次矩)；及 (3) 该横截面的惯性矩  $I$ 。此后，将这些值代入方程 (5-25) 并对  $\tau$  求解。所假设的距离  $\Delta x$  愈小，其结果愈精确。然而，如果  $\Delta x$  太小，由于在方程 (5-25) 中取了几乎相等的两项之差，数值上的精确度就会受到损失。方程 (5-25) 是相当通用的，在许多实际情况下可用来求得变截面梁的剪应力。

在矩形截面梁(宽度  $b$  不变，而高度  $h$  改变)的特殊情况下，令  $\Delta x$  趋于零，方程 (2-25) 便可转换成更为精确的方程。为了得到这一结果，我们必须计算横截面 1 和 2 上的  $Q$  和  $I$ ：

$$Q_1 = \frac{b}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \quad Q_2 = \frac{b}{2} \left( \frac{h_2^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$I_1 = \frac{bh_1^3}{12} \quad I_2 = \frac{bh_2^3}{12}$$

现在，令  $h_2 = h_1 + \Delta h$ ，此处  $\Delta h$  为由截面 1 到截面 2 时  $h$  的增量，由上面的表达式我们得到

$$Q_2 = Q_1 + \frac{bh_1\Delta h}{4} \quad I_2 = I_1 + \frac{bh_1^3\Delta h}{4}$$

在求得这些表达式的过程中,已略去了包含  $\Delta h$  平方项和立方项,因为它们与保留项相比是很小的。再注意到  $M_2 = M_1 + \Delta M$ , 我们现在就把  $Q_2$ ,  $I_2$  和  $M_2$  的表达式代入方程(5-25):

$$\tau b \Delta x = \frac{(M_1 + \Delta M) \left( Q_1 + \frac{bh_1\Delta h}{4} \right)}{I_1 + \frac{bh_1^3\Delta h}{4}} - \frac{M_1 Q_1}{I_1}$$

为了简化该表达式,我们可用第二项的分母乘所有各项,然后把遗留下来的各乘积项展开,其结果是

$$\tau b I_1 \Delta x + \frac{\tau b^3 h_1^3}{4} \Delta h \Delta x = \frac{M_1 b h_1}{4} \Delta h + Q_1 \Delta M + \frac{b h_1}{4} \Delta h \Delta M - \frac{M_1 Q_1}{4 I_1} b h_1^3 \Delta h$$

在该方程中,凡包含两个微量乘积的各项均可略去,然后可用  $\Delta x$  去除该方程。在  $\Delta x$  变得愈来愈小的极限情况下,  $\Delta h/\Delta x$  项变成  $dh/dx$ , 且  $\Delta M/\Delta x$  变为  $dM/dx$ , 其值等于剪力  $V$ 。因此,该方程现在变为

$$\tau b I_1 = \frac{M_1 b h_1}{4} \frac{dh}{dx} + Q_1 V - \frac{M_1 Q_1 b h_1^3}{4 I_1} \frac{dh}{dx}$$

作为最后一步,我们用  $b I_1$  除以各项,然后去掉不再需要的数字注角。于是,非棱柱体矩形截面梁的剪应力  $\tau$  方程的最后形式为

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} + \frac{Mh}{4I} \left( 1 - \frac{Qh}{I} \right) \frac{dh}{dx} \quad (5-26)$$

此方程对于宽度  $b$  不变而高度  $h$  变化的梁是成立的。其高度可按任意方式变化,只要它的变化是平缓的。我们看到,横截面上的剪应力不但取决于剪力,而且也取决于弯矩  $M$  以及  $h$  对  $x$  的变化率。

作为特例,让我们研究图 5-22a 所示矩形截面悬臂梁的剪应力分布。该梁在端点处具有的高度为  $h_a$  和  $h_b = 2h_a$ , 且锥度均匀。因此,  $dh/dx$  为常数且等于

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_b - h_a}{L} = \frac{h_a}{L}$$

在左端  $A$  处弯矩为零,因此方程(5-26)给出与棱柱形梁相同的剪应力分布(见方程 5-18)。此种分布绘于图 5-22b 中,最大剪应力出现在中性轴上且等于  $1.5P/bh_a$ 。

在梁的中点( $x=L/2$ ),求得下列值:

$$V = P \quad h = 1.5h_a \quad Q = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad M = \frac{PL}{2} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

代入方程(5-26),得

$$\tau = \frac{2P}{3bh_0}$$

该应力绘于图 5-22c 中, 在这一特殊情况下, 我们得出有趣的结果, 即剪应力沿梁高均匀分布。在梁的左端 A 和与其中点之间, 剪应力的分布是从图 5-22b 所绘的情况逐渐变化到图 5-22c 所示的均匀分布情况。

在梁的右端 ( $x=L$ ), 我们有  $V=P$ ,  $h=h_0=2h_0$  及  $M=PL$ 。代入方程 (5-26) 给出

$$\tau = \frac{3P}{8bh_0} \left( 1 + \frac{y_1^2}{h_0^2} \right)$$

该应力绘于图 5-22d 中。注意在此横截面上的最大剪应力等于  $3P/4bh_0$ , 发生在梁的外边缘。最小剪应力等于最大剪应力之半, 发生在  $y_1=0$  的中性轴上。

具有一边水平而另一边有锥度的矩形梁中, 剪应力可使用与上述两条边都有锥度的梁的相同理论求出。对这种情况的讨论可在参考文献 5-12 中查到。

棱柱形梁的最大正应力总是发生在最大弯矩的截面上。然而, 当梁为非棱柱形时, 可能就不是这样。说明这种可能性的例子为一根实心圆形横截面的锥形悬臂梁 (见图 5-24)。如果我们假设  $d_b/d_a=2$ , 那么距左端为  $x$  处杆的直径  $d$  为

$$d = d_a + (d_b - d_a) \frac{x}{L} = d_a \left( 1 + \frac{x}{L} \right)$$

而相应的截面模量为

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi}{32} d_a^3 \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^3$$

因此, 最大正应力  $\sigma$  为

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{Px}{S} = \frac{32Px}{\pi d_a^3 \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^3}$$

取导数  $d\sigma/dx$  并令它等于零, 我们便可求出  $\sigma$  为最大的  $x$  值。此结果为  $x=L/2$ , 而相应的最大应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{128PL}{27\pi d_a^3} = 4.741 \frac{PL}{\pi d_a^3}$$

在最大弯矩的截面 (支承 B) 上, 应力为



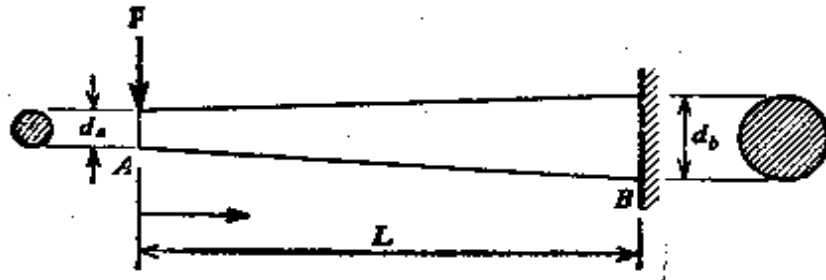


图 5-24. 圆形横截面的锥形梁。

$$\sigma_b = \frac{4PL}{\pi d_a^3}$$

因此,在此特例中,最大正应力发生在梁的跨长中点,比弯矩达到最大值的固定端处的应力大 19%。如果梁的锥度减小,最大正应力的截面会向固定端处移动。对于很小锥度的梁,最大正应力发生在 B 端,正如发生在棱柱形悬臂梁中的情况一样。

为了在梁中使用最少量的材料,我们可以变化其横截面,使得在所有横截面上保持一个不变的最大应力。在理想情况下,每个横截面上的最大应力皆等于容许应力,我们就得到被称为满应力设计的情形。这是结构最小重量设计的一种通用准则。自然,因为在制造梁时的一些实际问题,以及载荷可能与设计时所假设的不同,很少达到这种理想的情况。保持最大应力不变(按实际最大可能地)而设计的变尺寸结构的常见例子是汽车的板簧和具有变长度盖板的桥梁。

端部承受集中载荷的悬臂梁(图 5-25)可以当作满应力设计的简单例子。该梁的横截面假设为等宽度  $b$  和变高度  $h$  的矩形。要求保持不变的最大正应力  $\sigma_w$ 。因此,在每个横截面上,下述方程必须成立:

$$\sigma_w = \frac{M}{S} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6Px}{bh^2}$$

因此,支承处梁的高度  $h_0$  为

$$h_0 = \sqrt{\frac{6PL}{\sigma_w}}$$

而其他任意截面处的高度为

$$h = \sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_w}} \quad \text{或} \quad h = h_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$$

最后一个方程表明,梁的高度随  $x$  呈抛物线变化,因此,梁的大致形状如图 5-25 所示。因为只考虑了弯曲正应力,所以受载端的横截面面积为零。自然,

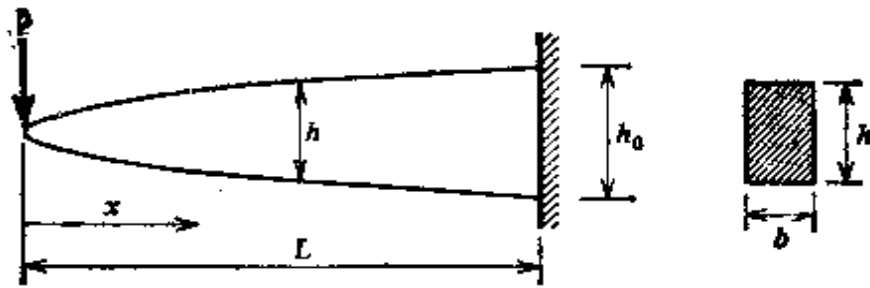


图 5-25. 最大正应力不变的梁(略去剪应力).

剪应力也是存在的, 实际上梁的横截面还必须具有足够的面积以传递剪力.

**精确的结果** 使用弹性理论的方法, 已经求出了矩形截面悬臂楔形体(图 5-26)的应力. 在横截面  $mn$  上的任一点  $p$  处的正应力与剪应力由下列公式(参考文献 5-13)给出:

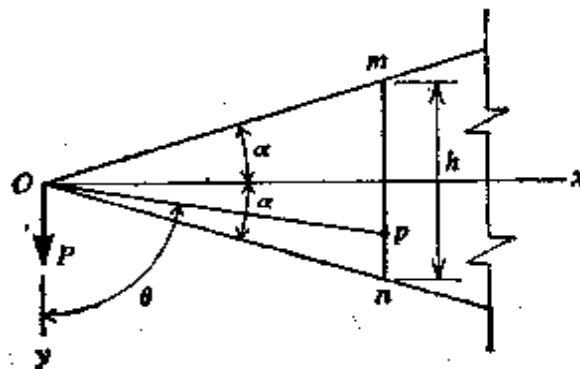


图 5-26. 矩形横截面的悬臂楔形体.

$$\sigma = -\frac{Pxy \sin^4 \theta}{bx^3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad \tau = \frac{Py^2 \sin^4 \theta}{bx^3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad (a)$$

其中  $x$  和  $y$  为  $p$  点的坐标,  $\theta$  为线  $Op$  与  $y$  轴的夹角,  $b$  为楔形体的厚度(假设为常数), 而  $\alpha$  为确定楔形体锥度的角度. 鉴于截面  $mn$  上的弯矩为  $M = Px$  以及同一截面上楔形体的高度为  $h = 2x \operatorname{tg} \alpha$ , 可将这些方程写成更方便的形式. 此外, 横截面  $mn$  的惯性矩为

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2bx^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}{3}$$

将  $M$ ,  $h$  和  $I$  的表达式代入方程(a), 我们求出

$$\sigma = -\frac{My}{I} \frac{2 \operatorname{tg}^3 \alpha \sin^4 \theta}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad (5-27)$$

$$\tau = \frac{P}{bh} \frac{8y^2 \operatorname{tg}^3 \alpha \sin^4 \theta}{h^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad (5-28)$$

在中性轴上 ( $\theta = \pi/2, y = 0$ ), 由方程 (5-27) 给出的正应力  $\sigma$  等于零, 而在梁的外边缘处达到最大值。在梁的顶部 ( $y = -h/2, \theta = \alpha + \pi/2$ ), 其应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh}{2I} \frac{2 \operatorname{tg}^3 \alpha \cos^4 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} = \beta \frac{Mh}{2I} \quad (5-29)$$

对于角  $\alpha$  的值等于  $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$  和  $20^\circ$ , 系数  $\beta$  的值分别为 1, 1.00, 0.970, 0.947 和 0.906。因此, 我们看出, 对于小锥度, 根据精确理论计算的应力和根据梁公式  $\sigma = My/I$  得到的应力之间差别很小。

对于剪应力, 我们看出, 在中性轴 ( $y = 0$ ) 上由方程 (5-28) 总是给出  $\tau = 0$ 。最大应力位于外边缘处, 该处

$$\tau_{\max} = \frac{P}{bh} \frac{2 \operatorname{tg}^3 \alpha \cos^4 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \gamma \frac{P}{bh} \quad (5-30)$$

对于角  $\alpha$  的值等于  $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$  和  $20^\circ$ , 系数  $\gamma$  分别等于 3, 3.00, 2.91, 2.84 和 2.72。因此, 最大剪应力约为平均剪应力  $P/bh$  的三倍, 并发生在外边缘处。

如果我们将矩形梁剪应力的近似理论 (见方程 5-26) 用于图 5-26 所绘的楔形体, 那么对截面  $mn$  求得:

$$V = P \quad Q = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad M = Px \quad \frac{dh}{dx} = \frac{h}{x}$$

将这些表达式代入方程 (5-26), 并注意  $y_1 = y$ , 我们得到

$$\tau = \frac{12Py^2}{bh^3} \quad (b)$$

在中性轴上, 该方程给出  $\tau = 0$ , 它与由方程 (5-28) 所得的精确结果一致。在外边缘处, 方程 (b) 给出  $\tau_{\max} = 3P/bh$ , 这与用方程 (5-30) 计算所得小锥度角的结果很符合。因此, 我们得出结论, 对于非棱柱形梁来说, 剪应力的近似理论用于设计是适宜的。另一方面, 公式  $\tau = VQ/Ib$  用于非棱柱形梁时, 将给出令人误解的结果。

## 5.8 复合梁

用两种以上材料构成的梁称为复合梁。此类梁的例子有，由两种不同金属胶接在一起的梁，其作用就像一根单个梁一样（双金属梁）；钢筋混凝土梁；以及夹层梁。在分析这种梁时，我们可以使用第5.1节论述的弯曲理论。因为不论梁是否由一种材料制成，纯弯时梁的横截面都保持平面，所以我们得知，复合梁的应变变化从梁顶到梁底是线性的（见方程5-2）。例如，在图5-27b中表示一根复合梁的应变分布，假设它由两种不同材料制成，梁的横截面画在图5-27a中。最初，横截面的中性轴位置是未知的，除非当横截面为双对称时，则中性轴位于梁高之半。

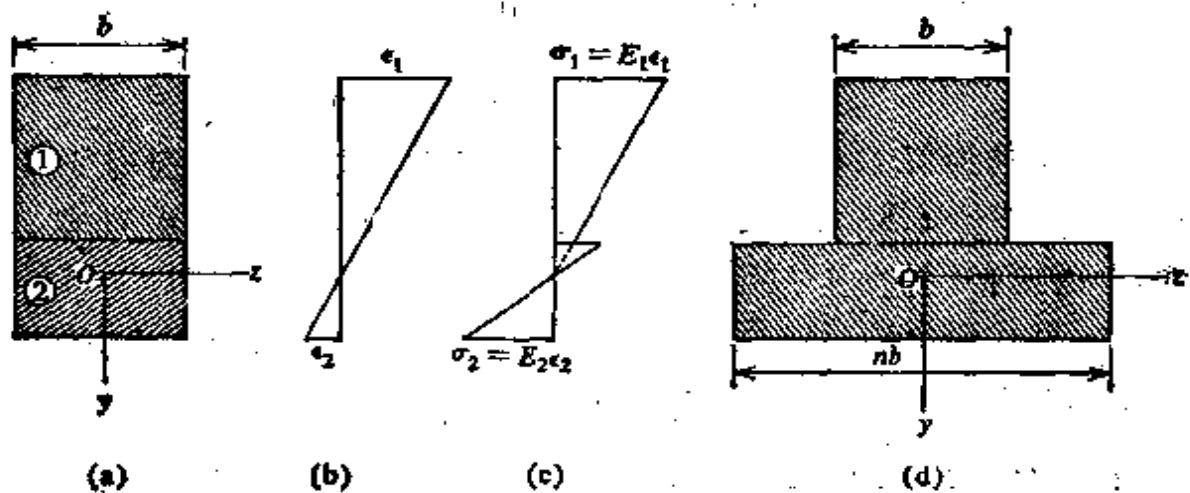


图5-27. 两种不同材料的梁: (a) 横截面; (b) 应变变化;  
(c) 应力变化; (d) 变换截面。

作用在横截面上的正应力可由应变乘以适当的材料弹性模量求得。在图5-27的例子中，假设在图中标明1和2的两种材料，分别具有弹性模量  $E_1$  和  $E_2$ 。假设  $E_2 > E_1$ ，于是我们得出5-27c所示的应力图。距中性轴为任一距离  $y$  处的正应力  $\sigma_x$  由如下方程（试与方程5-5相比较）给出，对于材料1和2，分别为

$$\sigma_{x_1} = \kappa E_1 y \quad \sigma_{x_2} = \kappa E_2 y \quad (5-31)$$

中性轴的位置可由作用在横截面上的轴力合力为零求出，因此

$$\int_1 \sigma_{x_1} dA + \int_2 \sigma_{x_2} dA = 0$$

不言而喻,其中第一个积分是在材料 1 的横截面面积上计算,而第二个积分是在材料 2 的横截面面积上计算. 用方程(5-31)的等效值代替上述方程中的  $\sigma_{x_1}$  和  $\sigma_{x_2}$ , 我们得到

$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0 \quad (5-32)$$

此方程可认为是方程(5-6)的广义形式, 可用来确定图 5-27 所示梁的中性轴位置. 然而, 对于由两种以上材料制成的梁, 在方程(5-32)中尚需附加一些类似的项. 如果我们注意到这些积分表示横截面面积的各部分对中性轴的一次矩, 该方程就不难使用.

梁的弯矩  $M$  和应力之间的关系可用推导方程(5-7)时所用的相同步骤求得:

$$\begin{aligned} M &= \int \sigma_x y dA = \int_1 \sigma_{x_1} y dA + \int_2 \sigma_{x_2} y dA \\ &= \kappa E_1 \int_1 y^2 dA + \kappa E_2 \int_2 y^2 dA \\ &= \kappa (E_1 I_1 + E_2 I_2) \end{aligned} \quad (5-33)$$

式中  $I_1$  和  $I_2$  分别为面积 1 和 2 对中性轴的惯性矩. 注意  $I = I_1 + I_2$ , 此处  $I$  为整个横截面面积的惯性矩. 联解方程(5-31)和(5-33), 得出梁中的应力为弯矩  $M$  的函数:

$$\sigma_{x_1} = \frac{MyE_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad \sigma_{x_2} = \frac{MyE_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (5-34a, b)$$

第一个方程给出了材料 1 中的应力, 而第二个方程给出了材料 2 中的应力. 如果  $E_1 = E_2 = E$ , 我们发现这两个方程简化为单一材料梁的方程  $\sigma_x = My/I$ . 下列例子将说明复合梁的分析.

**例题 1** 一根具有图 5-28 所示横截面尺寸的梁, 受到  $3.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$  的正弯矩. 假设  $E_1 = 7 \text{ kN/mm}^2$  及  $E_2 = 140 \text{ kN/mm}^2$ , 试求梁的两种材料内的最大和最小应力.

第一步是确定横截面的中性轴位置. 让我们假设中性轴位于材料 1 内, 如图所示. 然后, 我们分别用  $h_1$  和  $h_2$  表示从该轴至梁顶和梁底的距离. 参看

方程(5-32), 并使用牛顿和毫米单位, 我们得知, 在此方程中的两项为

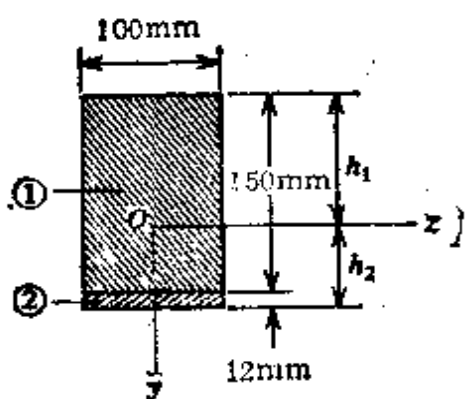


图 5-28. 例题 1.

$$E_1 \int_1 y dA = (7 \times 10^3) \left[ \left( -\frac{h_1}{2} \right) (h_1) (100) \right. \\ \left. + \left( \frac{150-h_1}{2} \right) (150-h_1) (100) \right] \\ = 105 \times 10^6 (75 - h_1)$$

$$E_2 \int_2 y dA = (140 \times 10^3) \\ \cdot [(150-h_1+6)(12)(100)] \\ = 168 \times 10^6 (156 - h_1)$$

现在代入方程(5-32)并求解, 我们求出  $h_1 = 124.8 \text{ mm}$ , 由此确定了中性轴的位置。

对中性轴的惯性矩  $I_1$  和  $I_2$  可用平行轴定理求得:

$$I_1 = \frac{1}{12} (100) (150)^3 + 100 (150) (124.8 - 75)^2 = 65.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} (100) (12)^3 + (12) (100) (156 - 124.8)^2 = 1.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

作为校核, 我们通过直接计算得知

$$I = \frac{1}{3} (100) (124.8)^3 + \left( \frac{1}{3} \right) (100) (37.2)^3 = 66.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

它等于  $I_1$  和  $I_2$  之和。

材料 1 中的最大压应力发生在梁的顶面, 此处  $y = -124.8 \text{ mm}$ , 该应力 (由方程 5-34a) 为  $-4.75 \text{ N/mm}^2$ . 在两种材料的连接处, 材料 1 中的应力 (根据方程 5-34a 用  $y = 25.2 \text{ mm}$  求得) 为  $0.96 \text{ N/mm}^2$ , 而材料 2 中的应力 (据方程 5-34b 用相同的  $y$  值求得) 为  $19.2 \text{ N/mm}^2$ . 在梁的下边缘处 ( $y = 37.2 \text{ mm}$ ), 材料 2 中的应力为  $28.3 \text{ N/mm}^2$ .

**变换截面法** 变换截面法提供了分析复合梁的一种简便方法. 其步骤为将两种以上材料组成的横截面变换为仅一种材料组成的等价横截面. 于是, 后者 (被称为变换横截面) 就可用与单一材料梁相同的一般方法加以分析.

如果要使变换截面为等价的, 那么它必须具有和原梁相同的中性轴和相同的抵抗弯矩的能力. 为了得知变换截面是如何求得的, 让我们参看确定中性轴位置的方程(5-32). 用  $E_1$  去除该方程, 并引进符号  $n = E_2/E_1$ , 此处  $n$  称为模量比, 我们有

$$\int_1 y dA + \int_2 yn dA = 0 \quad (5-35)$$

该方程表明,如果材料 2 的每个面积微元  $dA$  用系数  $n$  放大,那么只要每个这样的面积微元的距离  $y$  不改变,中性轴就不会改变.换句话说,我们可以认为横截面由两部分组成:(1)面积 1 仍为原状,及(2)面积 2 的宽度乘以  $n$ . 由此,我们得到全部有一种材料即材料 1 所组成的新的横截面.

对于图 5-27a 的梁,其变换截面表示在图 5-27d 中. 材料 1 保持不变,但是材料 2 所占据的宽度要乘以  $n$ . (注意:在插图中假设  $n > 1$ ,但这并不是必需的.)现在我们可以认为变换截面(图 5-27d)全部由材料 1 组成.从方程(5-35)可以看出,变换截面的中性轴将位于和原梁(图 5-27a)相同的位置.此外,变换截面的抗弯矩能力将与原横截面相同.此结论可从下面看出.对于变换截面,我们有  $\sigma_x = \kappa E_1 y$ ,因此

$$\begin{aligned} M &= \int_1 \sigma_x y dA = \int_1 \sigma_x y dA + \int_2 \sigma_x y dA \\ &= \kappa E_1 \int_1 y^2 dA + \kappa E_1 \int_2 y^2 dA \\ &= \kappa (E_1 I_1 + E_1 n I_2) = \kappa (E_1 I_1 + E_2 I_2) \end{aligned}$$

这和方程(5-33)的结果是相同的.因此,我们断定,在原梁和变换梁之间力矩是不变的.

变换截面中的应力可用通常的应力公式求出,因为该梁仅用一种材料组成.于是应力为

$$\sigma_x = \frac{My}{I_t} \quad (5-36)$$

其中  $I_t$  为变换截面对中性轴的惯性矩 ( $I_t = I_1 + nI_2$ ). 由于方程(5-36)与方程(5-34a)一致,因此,我们得出结论,原梁材料 1 中的应力与由变换截面所得的应力相同.然而,对原梁中材料 2,就不是这样的了.实际上,比较上述方程(5-36)与方程(5-34b)表明,为了求得原梁中的应力,变换梁中的应力必须乘以  $n$ . 因此,我们得出结论,因为变换截面由材料 1 组成,所以材料 1 中的应力就是

“真实”应力，但是在由材料 2 组成的梁范围内的应力必须使用模量比  $n$  加以变换。

变换截面法可容易地推广到两种以上材料的情况。同样地，将梁变换为具有任意  $E$  值的材料都是可能的，在此情况下，梁的所有部分均必须适当地变换为此种虚拟材料。自然，变换为原材料中的一种是比较简单和更为习惯的，究竟在它们中间选哪一个则是任意的。

**例题 2** 将例题 1 中所述并在图 5-28 中所绘的梁用变换截面法进行分析，使用完全由材料 1 组成的截面。由此，在变换截面中，梁的上部将保持不变(见图 5-29a)，但其下部的宽度将乘以  $n = E_2/E_1$ ，在此例中  $n$  为 20。

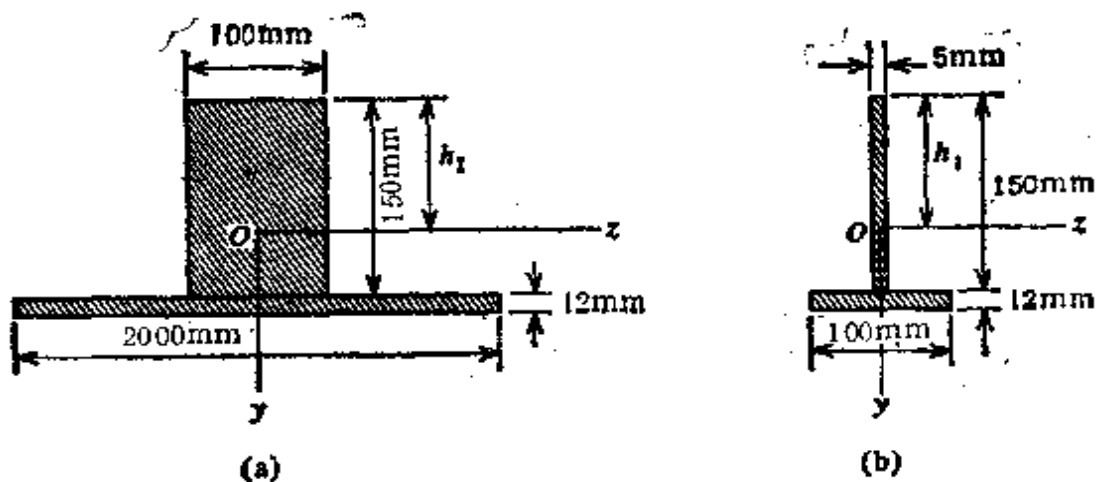


图 5-29. 例题 2 和 3.

为了确定中性轴的位置，我们必须求出变换截面的形心。计算面积对梁顶的一次矩，并除以总面积，我们发现  $h_1$  的计算如下：

$$h_1 = \frac{100(150)(75) + 2000(12)(156)}{100(150) + 2000(12)} = \frac{4869}{39} = 124.85 \text{ mm}$$

变换截面的惯性矩为

$$I_s = \frac{1}{12}(100)(150)^3 + 100(150)(49.85)^2 + \frac{1}{12}(2000)(12)^3 + 2000(12)(31.15)^2 = 88.98 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

在变换梁的顶部、连接处和底部的应力分别为

$$\sigma = \frac{My}{I_s} = \frac{(3.4 \times 10^6)(-124.85)}{88.98 \times 10^6} = -4.75 \text{ N/mm}^2$$



$$\sigma = \frac{My}{I_1} = \frac{(3.4 \times 10^6)(25.15)}{88.98 \times 10^6} = 0.96 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{My}{I_1} = \frac{(3.4 \times 10^6)(37.15)}{88.98 \times 10^6} = 1.415 \text{ N/mm}^2$$

对于材料 1, 原梁中的应力与变换梁中的相同, 对于材料 2 则不然. 因此, 上面算出的前两个应力给出在原梁中材料 1 相应位置的应力. 对于材料 2, 在梁的连接处和下边缘处的应力可在乘以  $n$  (等于 20) 后求得; 于是, 分别为

$$\sigma = 20(0.96) = 19.2 \text{ N/mm}^2 \quad \text{及} \quad \sigma = 20(1.415) = 28.3 \text{ N/mm}^2$$

所有这些结果都和例题 1 中求出的一致.

**例题 3** 为了进一步说明变换截面法, 让我们将梁变换为材料 2, 重新求解上述例题. 在此情况下,  $n$  将取值  $1/20$ . 在求变换截面时, 我们要注意, 由材料 2 所组成的这部分梁将不变, 然而由材料 1 所组成的这部分梁宽度乘以因子  $n$  而减小 (见图 5-29b).

现在我们遵照与上例中相同的步骤进行:

$$h_1 = \frac{5(150)(75) + 12(100)(156)}{5(150) + 12(100)} = 124.85 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{1}{12}(5)(150)^3 + 5(150)(49.85)^2 + \frac{1}{12}(100)(12)^3 + 100(12)(31.15)^2 = 4.449 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

在变换截面的顶部, 连接处和底部的应力分别为

$$\sigma = \frac{My}{I_1} = \frac{(3.4 \times 10^6)(-124.85)}{4.449 \times 10^6} = -95.4 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{My}{I_1} = \frac{(3.4 \times 10^6)(25.15)}{4.449 \times 10^6} = 19.2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{My}{I_1} = \frac{(3.4 \times 10^6)(37.15)}{4.449 \times 10^6} = 28.39 \text{ N/mm}^2$$

为求原梁中的应力, 材料 1 中的应力必须乘  $n$  加以变换, 于是, 在顶面和连接处我们有

$$\sigma = -\frac{1}{20}(95.4) = -4.77 \text{ N/mm}^2$$

及 
$$\sigma = \frac{1}{20}(19.2) = 0.96 \text{ N/mm}^2$$

材料 2 中的应力对原梁是有效的.

读者或许已注意到, 例题 2 和例题 3 的计算方法是很相似的, 变换为这种材料与变换为另一种材料相比并没有什么优越性.

变换截面法广泛应用于钢筋混凝土梁的分析中, 对于这种梁分析方法的讨论, 有兴趣的读者, 应当参阅钢筋混凝土设计方面的教本.

**夹层梁** 夹层梁是由外侧称为面板的两片薄层材料和夹在其中的厚芯组成(见图 5-30, 它表示一个典型的横截面), 夹芯通常为重量轻、强度低

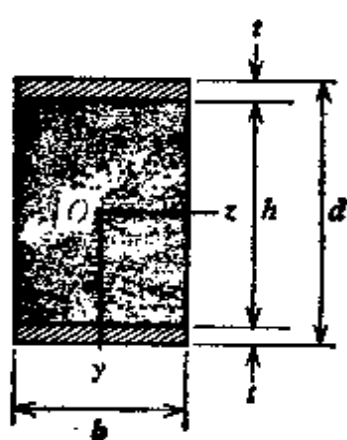


图 5-30. 夹层梁.

的材料, 它主要作为填充物或隔离层, 而面板为高强度材料. 夹层结构广泛用于要求重量轻而强度和刚度高的场合.

夹层梁弯曲的近似理论可以根据下述假设建立, 即面板承受全部纵向弯曲应力. 这一假设是合理的, 因为夹芯与面板相比, 其纵向弹性模量较低. 所以, 在梁的最外边缘处的正应力(见图 5-30)为

$$\sigma_z = \frac{Md}{2I_f} \quad (5-37)$$

其中  $I_f = bt(h+t)^2/2$  为面板对  $z$  轴的惯性矩. 因为面板较薄, 可假设夹芯承受全部剪应力. 所以, 在夹芯中的平均剪应力和剪应变分别为

$$\tau = \frac{V}{bh} \quad \gamma = \frac{V}{bhG_c} \quad (5-38)$$

其中  $V$  为剪力, 而  $G_c$  为夹芯材料的剪切模量.

已经建立了更为完整的夹层梁弯曲理论. 例如, 面板的弯曲可作为两根单独的梁来考虑. 对夹层梁的广泛论述以及夹层结构中板和壳的分析见参考文献 5-14. 该参考文献还包括了关于本课题的一个很完整的书目.

## 5.9 弯曲与扭转的组合

结构元件有时需要既承受弯曲载荷又承受扭转载荷, 例如, 传递扭矩的圆轴通常受到弯矩以及扭转力偶. 在这样的条件下, 只要应力合力已知, 完成应力分析并无任何根本性的困难. 应力合力可能包括弯矩、扭转力偶和剪力. 横截面上任一点处由于每个应力合力所产生的应力, 可用相应的公式来确定. 然后在选定点处其完整的应力状态可以使用第二章所导出的关系式或用莫尔圆来研究, 尤其可以计算主应力和最大剪应力. 元件中任意多个要害部位均可用此方法分析, 根据所有这些结果, 可以确定设计是否适当或者进行新的设计.

作为弯曲与扭转组合的一个简化实例，研究图 5-31a 中所示的圆杆。此悬臂梁承受绕纵轴的扭矩  $T$  和横向力  $Q$ ，在距支座为  $x$  处杆的任一横截面上，应力合力可由静力学求出。这些应力合力为：(1) 弯矩  $M$  等于  $Q(L-x)$ ，其中  $L$  为梁长；(2) 剪力  $V$  等于  $Q$ ；及(3) 扭转力偶  $T$ 。注意在此例中，当弯矩使梁的顶部产生拉力时，假设它为正。

如果我们现在考察位于杆的顶面上的一个微元 (图中微元  $A$ )，我们就看出，该微元承受由于  $M$  产生的弯曲应力  $\sigma_x$  和由于  $T$  产生的剪应力  $\tau$  (见图 5-31b)。这些应力分别由方程  $\sigma_x = My/I$  和  $\tau = T\rho/J$  得出。对于直径为  $d$  的圆轴，这些方程变为

$$\sigma_x = \frac{32M}{\pi d^3} \quad \tau = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (5-39)$$

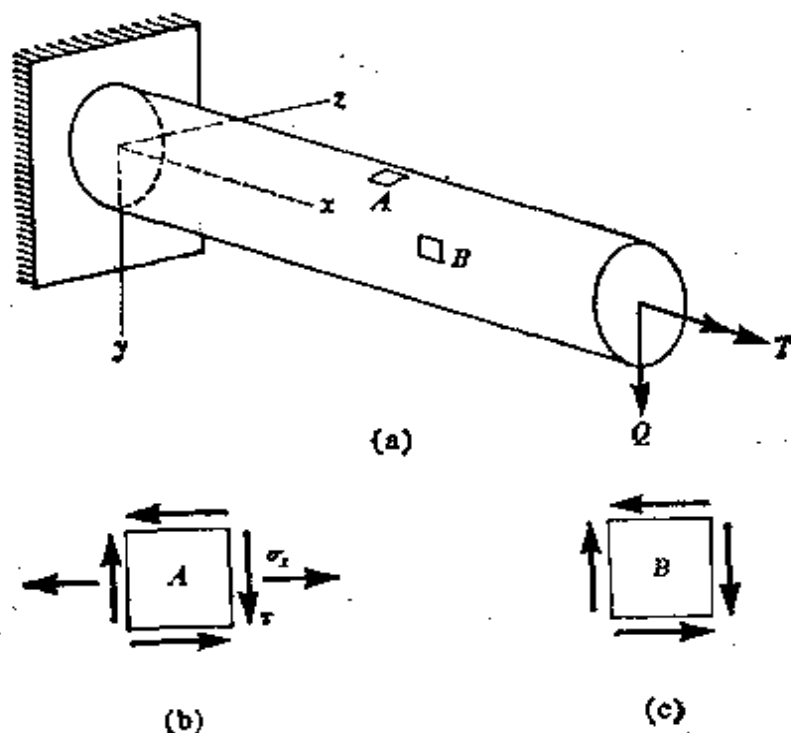


图 5-31. 弯曲与扭转的组合。

已知  $\sigma_x$  和  $\tau$ ，我们便可确定在  $A$  点处转过任何所需角度的微元上的应力。

$A$  点的主应力由方程(2-26)求出：

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (5-40)$$

此外,最大剪应力由方程(2-28)求出为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (5-41)$$

对于设计来说,得出以弯矩  $M$  和扭矩  $T$  所表示的主应力和最大剪应力的表达式是很有用的. 将方程(5-39)代入方程(5-40)和(5-41),我们得到

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3} (M \pm \sqrt{M^2 + T^2}) \quad (5-42)$$

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2} \quad (5-43)$$

如果正应力和剪应力的容许值  $\sigma_w$  和  $\tau_w$  已知,就能将它们代入上述两个方程以代替  $\sigma_1$  或  $\sigma_2$  和  $\tau_{\max}$ , 然后求解方程得出所需的圆杆直径\*. 自然,在弯矩  $M$  为最大值的杆端选一微元  $A$ , 将得到最大应力.

在上述讨论中假设微元选在梁顶处. 为了分析梁底处的应力可用类似的步骤. 最大应力通常发生在弯曲应力最大处,即在最大弯矩截面的梁顶或梁底. 然而,有时需要考虑其它的可能性. 例如,剪力  $V$  (等于  $Q$ ) 在中性轴上产生最大的剪应力. 所以,我们也必须考虑在杆侧面中性轴处所选的微元(微元  $B$ ). 该微元处于纯剪状态(图 5-31c),其剪应力由两部分组成: (1) 由于扭矩  $T$  产生的剪应力,由公式  $\tau = T\rho/T$  求得; 及 (2) 由于  $V$  产生的剪应力,由剪力公式  $\tau = VQ/Ib$  求得. 此种微元的主应力发生在与杆轴成  $45^\circ$  的平面上. 为了确定用于设计的最大正应力,可将这些应力与所求得的梁顶与梁底处的应力加以比较. 梁内的最大剪应力也可与微元  $A$  和  $B$  所得之值比较求出.

如果梁以更为复杂的方式支承着,或者其横截面形状并非圆形,我们仍能分析杆内各点的应力并加以比较. 在此过程中,自然应选择杆内正应力或剪应力为最大的点. 对所有那些看来会求得最大应力的点,比较所算得的应力,我们肯定可以获得绝对值最大的应力.

\* 此处欠妥,因确定直径时要用强度理论.——译者注

## 5.10 弯曲与轴向载荷的组合

现在让我们研究同时承受弯曲载荷和轴向力作用的杆件的分析方法。这一类型的简单实例如图 5-32a 所示，它描述了由倾斜力  $P$  作用的悬臂梁。此载荷可分解为两个分量，一个横向弯曲力  $Q$  和一个轴向力  $T$ 。在确定由这些力在杆中产生的应力时，需要区别两种可能性：(1) 梁的长度与其高度比较可能相对短些，这样的梁在弯曲时是比较刚硬的。于是杆的横向挠度将很小而轴向力的作用线仅产生轻微变化。在此情况下，我们可以求得由于  $T$  和  $Q$  彼此独立作用时的应力，并将它们叠加起来。(2) 梁可能相对细长并柔软，在此情况下，其弯曲挠度可能足够大，以致使力  $T$  的作用线产生变化。于是该力在梁内将产生附加的弯矩，因而，在轴向效应与弯曲效应之间，存在着相互影响或耦合作用。\*本节将只讨论相对刚硬并符合(1)中所述条件的杆件。

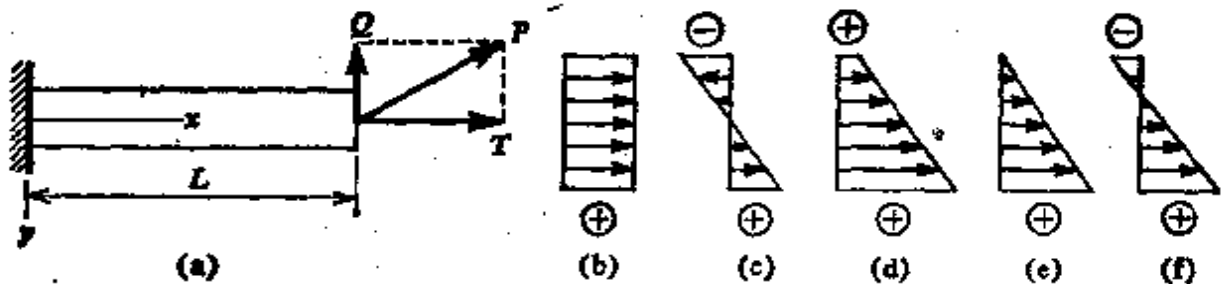


图 5-32. 弯曲与轴向载荷的组合。

在图 5-32a 中，梁的任一横截面内的应力合力是由  $T$  所产生的轴向应力和  $Q$  所产生的弯曲应力叠加而得。这些应力的分布分别示于图 5-32b 和 c 中。最终应力示于图 5-32d 中，可由下列方程求出：

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} \quad (5-44)$$

其中  $N$  为所研究的横截面上的轴向力， $M$  为其上的弯矩。对于图中的悬臂梁，我们有  $N = T$  及  $M = Q(L - x)$ 。注意，当  $N$  产生拉伸

\* 这后一种情况在有关柱的第 10 章中以及《高等材料力学》中加以讨论。

时, 它为正; 而  $M$  的正号则根据梁的符号约定(见图 4-3). 在这些条件下, 方程(5-44)中的正应力符号以拉伸为正, 压缩为负. 最终的应力分布将取决于方程中各项的相对代数值. 其分布可能是整个横截面受拉, 如图 5-32d 所示; 或者, 应力分布可能为三角形(图 5-32e); 再者, 截面可能部分受拉和部分受压(图 5-32f); 如果轴向力  $N$  为压力时, 甚至会全部受压. 在弯曲和轴向载荷组合的所有情况下, 显然, 横截面的中性轴(亦即, 零应力线)不再通过形心, 甚至可能在截面之外.

**例题** 一个矩形截面的简支梁(宽度  $b$  及高度  $h$ ) 承受一个作用方式如图 5-33 所示的载荷  $P$ . 假设距离  $a=2h$ , 试确定梁中最大的拉应力和压应力.

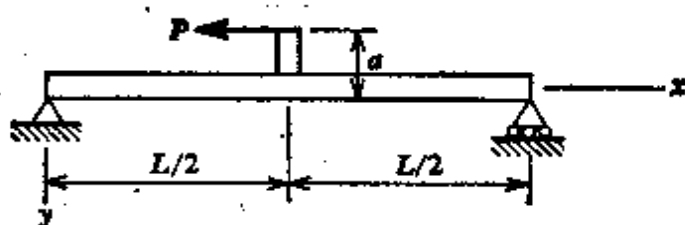


图 5-33. 例题.

我们首先观察到, 在梁的中点处弯矩为最大, 而且在梁的左半部分轴向压力等于  $P$ . 因此, 位于梁的中点左边微小距离处的横截面上, 轴向力和弯矩分别为

$$N = -P \quad M = \frac{Pa}{2} = Ph$$

所以, 我们由方程(5-44)求出梁底边和顶边(分别为  $y=h/2$  和  $y=-h/2$ )的应力如下:

$$\sigma_b = -\frac{P}{bh} + \frac{6P}{bh} = \frac{5P}{bh} \quad \sigma_t = -\frac{P}{bh} - \frac{6P}{bh} = -\frac{7P}{bh}$$

类似地, 恰在梁中心右边横截面上的应力(此处  $M = -Ph$  及  $N = 0$ )为

$$\sigma_b = -\frac{6P}{bh} \quad \sigma_t = \frac{6P}{bh}$$

比较这些不同的应力, 我们得知, 梁中最大的拉应力为  $6P/bh$ , 而最大的压应力为  $-7P/bh$ .

**偏心轴向力** 当杆件承受偏心作用的轴向载荷时(见图

5-34), 就会产生一种实用上有趣的特殊情况. 偏心力的作用等效于施加在形心处的力  $P$  加上一个等于  $Pe$  的弯曲力偶. 因此, 横截面上任一点的应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe y}{I} \quad (5-45)$$

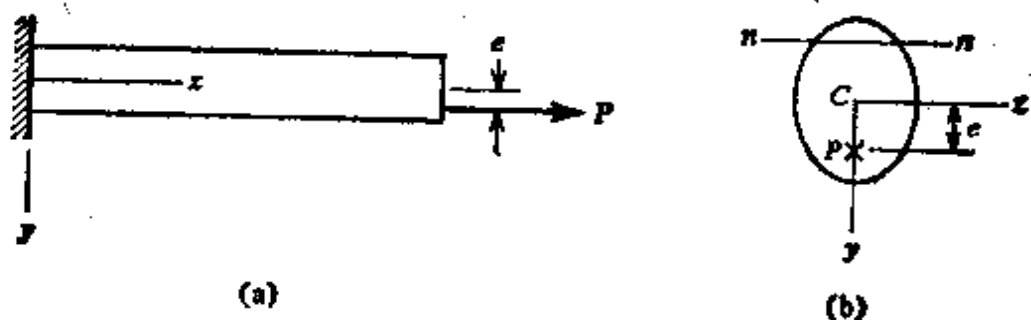


图 5-34. 偏心轴向力.

令方程(5-45)中的  $\sigma$  等于零, 即可求得中性轴(图 5-34b 中的线  $nn$ )方程, 于是

$$y = -\frac{I}{Ae} \quad (5-46)$$

为零应力线方程. 该方程中的负号表明, 当载荷  $P$  为作用于  $z$  轴以下的拉力时, 中性轴位于  $z$  轴之上. 如果偏心  $e$  减小, 中性轴就会远离形心, 如果  $e$  增大, 中性轴就会靠近形心.

当偏心拉力  $P$  的作用点不在横截面的两根主轴之一上时, 将同时对两根主轴弯曲. 用  $e_y$  和  $e_z$  表示  $P$  作用点的坐标(见图 5-35a), 我们得知, 对  $y$  和  $z$  轴的弯矩数值上分别等于  $Pe_z$  和  $Pe_y$ . 于是横截面内任一点处(用坐标  $y$  和  $z$  确定的一点)合成的正应力变为

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{I_y} + \frac{Pe_y y}{I_z} \quad (5-47)$$

式中  $I_y$  和  $I_z$  分别为对  $y$  轴和  $z$  轴的惯性矩. 当  $P$  位于  $y$  轴上且  $e_z$  等于零时, 该方程简化为方程(5-45). 又, 令  $\sigma$  等于零, 就可求出中性轴的方程, 此方程为

$$\frac{Ae_y}{I_z} y + \frac{Ae_z}{I_y} z + 1 = 0 \quad (5-48)$$

试式为  $y$  和  $z$  的线性方程，因而，中性轴为一条直线，如图 5-35a 中的  $mn$  线。此线能否与横截面相交，取决于横截面的形状和轴力  $P$  作用点的位置。在方程(5-48)中分别令  $z$  和  $y$  等于零并对交点求解即可求出  $mn$  线与  $y$  轴和  $z$  轴的交点。

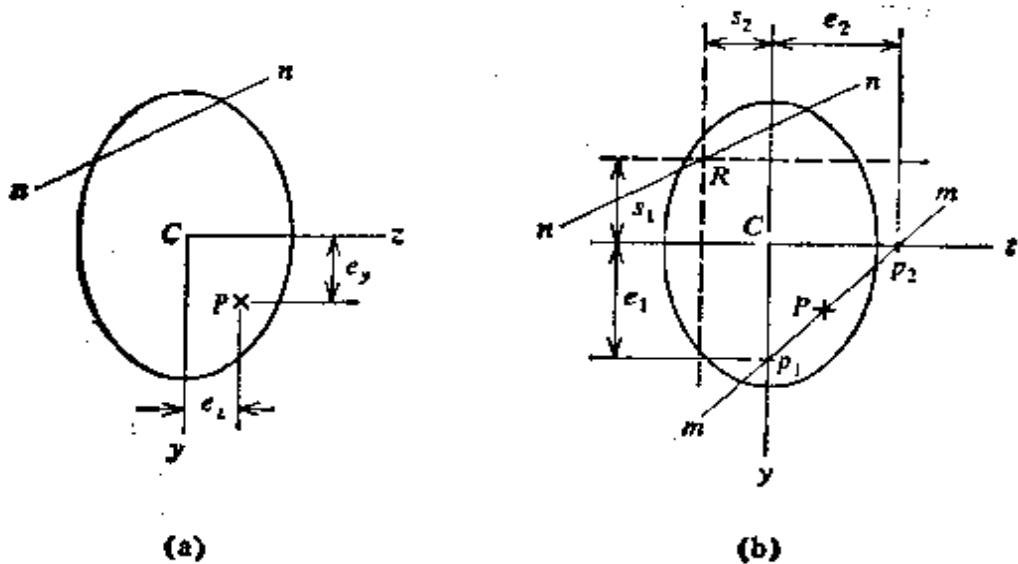


图 5-35. 对两个主轴产生弯曲的偏心轴向力。

在力  $P$  的作用点与中性轴位置之间存在着一个有趣的关系，即当力  $P$  沿着任一条直线  $mm$  移动时，中性轴则绕固定点  $R$  转动(见图 5-35b)。为了演示这个事实，我们首先注意到，力  $P$  可分解为两个平行的分力，一个作用于  $p_1$  处，而另一个作用于  $p_2$  处。在  $p_1$  处的分力作用在一个弯曲主平面内，因此相应的零应力线平行于  $z$  轴并位于距  $z$  轴  $s_1 = I_z / Ae_1$  处(见图 5-35b 及方程 5-46)。类似地，在  $p_2$  处的分力产生绕  $y$  轴的弯曲，其零应力线位于距  $y$  轴  $s_2 = I_y / Ae_2$  处。图中两条虚线相交的点  $R$  总是在两个载荷分量同时作用时的中性轴  $mn$  上。因此，当力  $P$  沿着线  $mm$  移动时，点  $R$  位置固定，而中性轴总是通过此点。

**横截面核心** 当所施加的轴向载荷  $P$  的偏心(图 5-34)很小时，中性轴将位于横截面之外。这意味着在全部横截面内正应力将具有相同的符号。当压缩载荷作用在抗拉能力甚弱的材料，如陶瓷材料或混凝土时，这种状况常常是很重要的。在这种情况下



下, 需要保证在横截面上任何一点不产生拉伸. 围绕形心会有一个小区域, 在此区域内作用的压缩载荷  $P$  将在整个横截面上产生压力. 这个区域称为截面的核心(或核仁).

矩形横截面的核心可用下列方法求出. 如果载荷位于正的  $y$  轴上(图 5-36), 当载荷位于距形心为  $e_1$  的  $p$  点上时, 中性轴将与截面的上边缘相吻合. 距离  $e_1$  可由方程(5-46)代入  $y = -h/2$  和  $I = bh^3/12$  和  $A = bh$  求出, 因此  $e_1 = h/6$ , 如图所示. 以同样的方法, 当  $P$  作用在  $z$  轴正向距形心为  $b/6$  的  $q$  点上时, 中性轴将与截面左边缘相吻合. 当载荷沿着点  $p$  和  $q$  之间的直线移动时, 其中性轴将绕着矩形截面角点  $m$  转动. 从而, 线  $pq$  为核心的一条边. 其它三条边可用对称性确定, 因之我们得知, 该核心是一个对角线为  $b/3$  和  $h/3$  的菱形. 只要压缩载荷  $P$  的作用点在此菱形之内, 中性轴就不会与横截面相交, 并且整个截面将处于受压状态. 其它横截面形状的核心可用对矩形所述的相同方法求出.\*

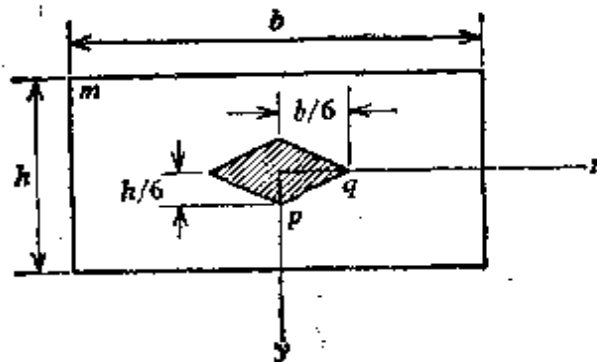


图 5-36. 矩形截面的核心.

## 习 题

**5.1-1** 当直径  $d = 0.8 \text{ mm}$  的钢丝绕在一直径为  $500 \text{ mm}$  的滑轮上时, 试确定钢丝中产生的最大应力 ( $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ).

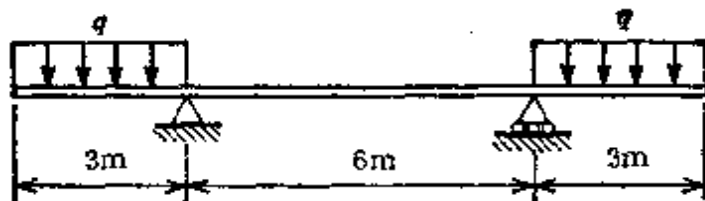
**5.1-2** 一截面尺寸为  $1 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$ 、长为  $L = 250 \text{ mm}$  的薄钢尺 ( $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ), 由于两端力偶的作用而弯曲成一中心角为  $60^\circ$  的圆弧, 试问钢尺内的最大应力是多少?

**5.1-3** 一根  $250 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$  的方形横截面木梁, 受载和支承情况

\* 横截面核心的概念是由布雷瑟(Bresse)在 1854 年提出的(见参考文献 5-15).

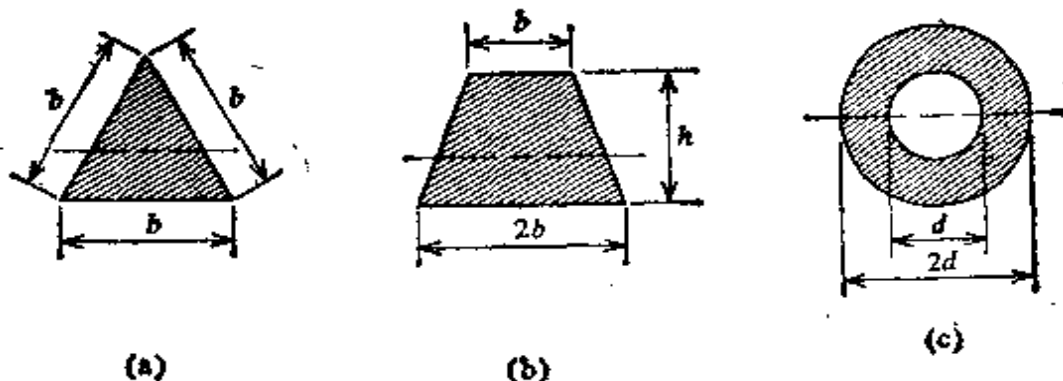
如图 5-5 所示, 试确定其容许载荷  $P$  和跨度中点处的挠度  $\delta$ , 假设  $L=2\text{ m}$ ,  $a=0.3\text{ m}$ ,  $E=10\text{ kN/mm}^2$ , 且梁的最大容许应力为  $\sigma_w=7\text{ N/mm}^2$ .

**5.1-4** 一根两端外伸臂的梁(见图), 每一外伸臂上承受集度为  $q=150\text{ kN/m}$  的均布载荷. 假设梁的截面为  $W762\times 256$ ,  $E=200\text{ kN/mm}^2$ , 试确定梁内的最大正应力和梁中点处向上的挠度  $\delta$ .



习题 5.1-4

**5.1-5** 假若容许应力(拉或压)为  $\sigma_w$ . 试问图示每一种截面所能承受的最大弯矩  $M_{\max}$  各为多少?



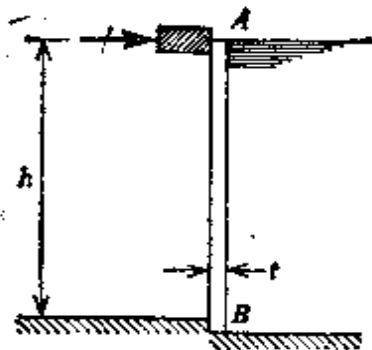
习题 5.1-5

**5.1-6** 试确定矩形截面简支梁(跨长为  $L$ )在其截面高度  $h$  上承受非均匀加热时梁的曲率  $\kappa$  和最大挠度  $\delta$ . 假设梁顶面的温度为  $T_1$ , 底面的温度为  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ), 且顶面与底面之间的温度是呈线性变化的(材料的热膨胀系数为  $\alpha$ , 弹性模量为  $E$ ).

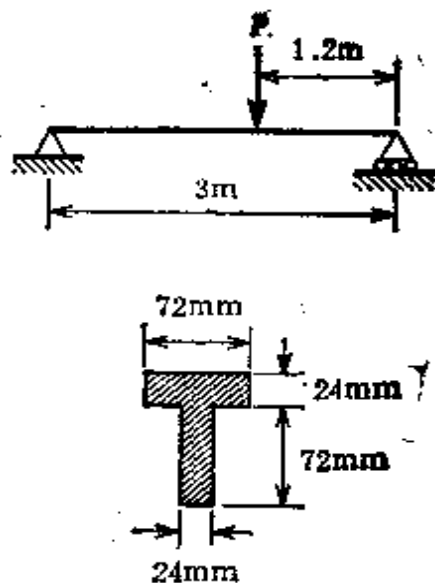
**5.1-7** 一跨长  $L=4\text{ m}$  的简支梁, 承受集度  $q=4\text{ kN/m}$  的均布载荷, 试计算其最大弯曲正应力, 假设梁为矩形截面, 其宽度为  $b=120\text{ mm}$ , 高度为  $h=200\text{ mm}$ .

**5.1-8** 一高度  $h=6\text{ m}$  的木制水闸(见图), 由厚度  $t=300\text{ mm}$ , 上、下端简支的竖直梁  $AB$  构成. 假设水单位体积的重量为  $9.8\text{ kN/m}^3$ , 试确定梁内最大弯曲正应力.

**5.1-9** 试确定图中所示简支梁由于弯曲而产生的最大正应力, 假设  $P=5\text{ kN}$ , 截面尺寸如图所示.

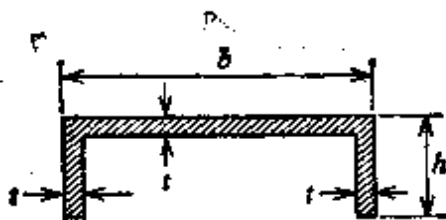


习题 5.1-8

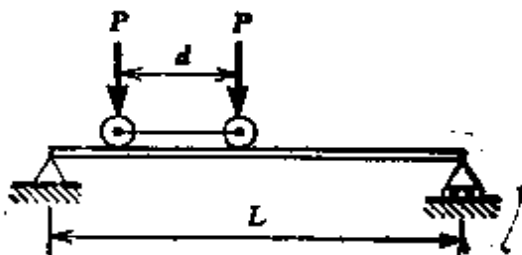


习题 5.1-9

**5.1-10** 一截面形状如图所示的槽形梁，两端简支，在梁中点作用有集中载荷  $P$ 。试确定许用载荷  $P$ ，假设弯曲时容许拉应力为  $140 \text{ N/mm}^2$ ，许用压应力为  $84 \text{ N/mm}^2$ 。（假设  $b=600 \text{ mm}$ ， $h=250 \text{ mm}$ ， $t=50 \text{ mm}$ ， $L=3 \text{ m}$ 。）



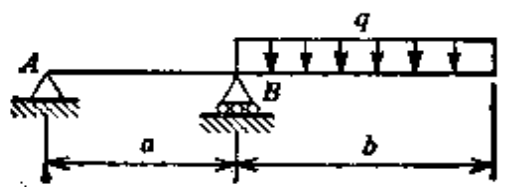
习题 5.1-10



习题 5.1-11

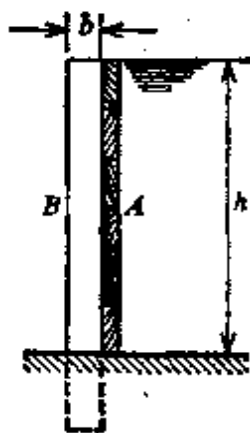
**5.1-11** 一简支梁，承受相距  $d=2 \text{ m}$  的两个轮载（见图），每个轮子传递载荷  $P=14 \text{ kN}$ ，而行车箱可位于梁上任何位置。梁的长度为  $L=7 \text{ m}$ ，若截面为  $\text{S}203 \times 34$ ，试确定梁中最大弯曲应力。

**5.2-1** 一圆截面木梁，支承于  $A$  和  $B$  处。沿其外伸臂作用有  $q=4 \text{ kN/m}$  的均布载荷（见图），假如  $\sigma_w=8 \text{ kN/mm}^2$ ， $a=1 \text{ m}$ ， $b=2 \text{ m}$ ，试确定所需的直径  $d$ 。梁的重量略去不计。

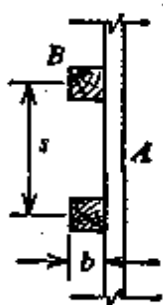


习题 5.2-1

**5.2-2** 一木制水闸由水平板  $A$  组成, 板  $A$  由下端固定的竖直梁  $B$  支持(见图). 假如水深  $h=2\text{ m}$ , 梁的间距  $S=1\text{ m}$ ,  $\sigma_w=3\text{ N/mm}^2$ , 试确定竖直梁方形截面所需的尺寸  $b$ .



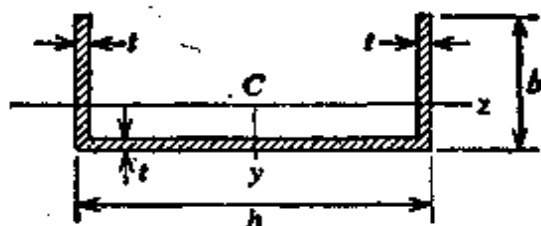
习题 5.2-2



习题 5.2-3

**5.2-3** 一矩形木梁由直径为  $d$  的圆木切割而成(见图), 试问为了得出最强的梁, 其尺寸  $b$  和  $h$  应为多少?

**5.2-4** 一具有槽形截面的梁(见图), 承受绕  $z$  轴的弯矩的作用. 试问为使该截面顶面和底面的弯曲正应力之比为  $3:1$ , 厚度  $t$  应为多少? 假设  $b=80\text{ mm}$ ,  $h=200\text{ mm}$ .



习题 5.2-4

**5.2-5** 试从附录 C 的表中选择一承受图 5-1a 所示梁上载荷的宽翼缘梁截面, 假设  $P=36\text{ kN}$ ,  $a=2\text{ m}$ ,  $\sigma_w=140\text{ N/mm}^2$ . 略去梁的重量.

**5.2-6** 一长度为  $4.6\text{ m}$  的简支梁, 其上作用有均布载荷  $q=6\text{ kN/m}$ , 且在梁中点作用有集中载荷  $P=18\text{ kN}$ . 假设  $\sigma_w=110\text{ N/mm}^2$ , 梁的重量略去不计, 试: (a) 确定该梁所需的截面模量  $S$ . (b) 考虑梁的自重, 从附录表中选择一适当的宽翼缘梁.

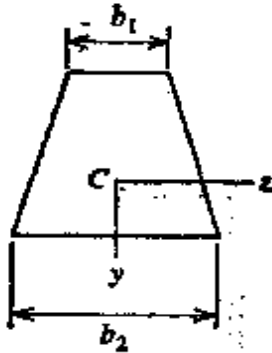
**5.2-7** 一悬臂梁, 其上作用有均布载荷  $q=3\text{ kN/m}$  和作用于自由端处的集中载荷  $P=2\text{ kN}$ , 假如梁长为  $L=1.5\text{ m}$ ,  $\sigma_w=100\text{ N/mm}^2$ , 梁的重量略去不计, 试: (a) 确定梁所需要的截面模量  $S$ . (b) 考虑梁的重量, 试从附录中表 C-2 选择一适当的 I 字梁.

**5.2-8** 两根具有相同横截面积的梁, 假如第一根梁为实心圆截面(直径为  $d_1$ ), 而第二根为外径等于  $d_2$  的圆管, 试求它们的截面模量之比  $S_2/S_1$ .

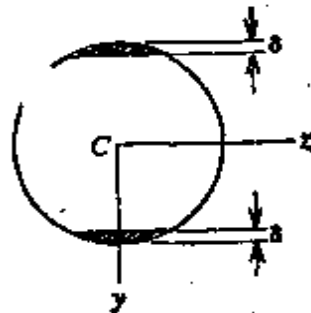
**5.2-9** 一梯形截面的纯弯棱柱形梁(见图), 梁的上部受压. 如果容许拉应力和容许压应力之比为  $\sigma_t/\sigma_c=\beta$ , 试计算重量最小时, 其上、下底边之

比  $b_1/b_2$ .

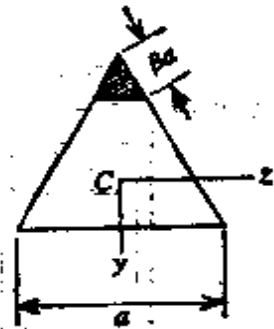
**5.2-10** 一圆截面梁( $d$ =直径), 绕  $z$  轴弯曲(见图), 为增大它的截面模量, 从梁上切去高为  $\delta$  的微小阴影部分. 试求使截面模量为最大时的  $\delta$  值.



习题 5.2-9



习题 5.2-10



习题 5.2-11

**5.2-11** 试确定数值  $\beta$ , 它决定了得到最强弯曲截面而应从一个等边三角形截面切去的量(见图).

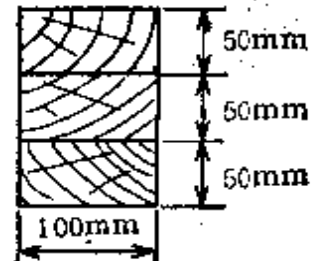
**5.3-1** 从矩形截面梁的剪应力  $\tau$  的表达式(方程 5-19)出发, 将它对整个截面进行积分, 证明其合成剪力等于  $V$ .

**5.3-2** 试确定承受均布载荷  $q=15 \text{ kN/m}$  的简支梁中的最大剪应力, 假设梁长为  $2 \text{ m}$ , 其横截面为宽度  $b=200 \text{ mm}$ , 高  $h=250 \text{ mm}$  的矩形截面.

**5.3-3** 一矩形截面(宽度  $b=150 \text{ mm}$ , 高度  $h=250 \text{ mm}$ )的木制简支梁, 在梁中点作用有集中载荷  $P$ , 假如  $\sigma_w=7 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_w=1 \text{ N/mm}^2$ , 跨长  $L=1 \text{ m}$ , 试问其容许载荷  $P$  值为多大?

**5.3-4** 试确定习题 5.1-8 中竖直梁  $AB$  中的最大剪应力.

**5.3-5** 一根由三块  $50 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  的木板胶合而成的、截面为  $100 \times 150 \text{ mm}$  的实心叠层木梁, 如图所示, 其胶合处的容许剪应力为  $0.35 \text{ N/mm}^2$ . 如果梁为长  $1 \text{ m}$  的悬臂梁, 试问自由端处的容许载荷  $P$  为多大? 又问其相应的最大弯曲应力为多大?



习题 5.3-5

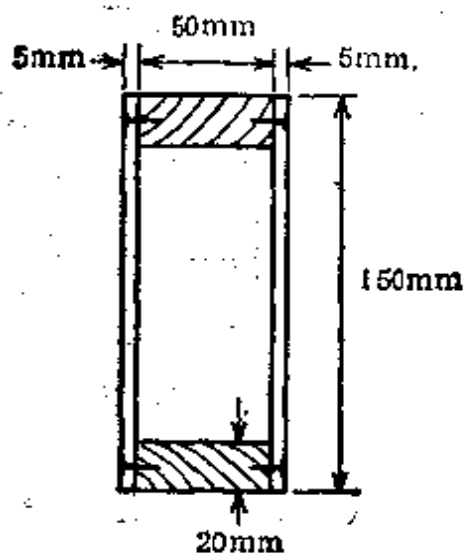
**5.3-6** 试计算宽翼缘梁腹板(图 5-14a)内的最大剪应力, 假设  $b=120 \text{ mm}$ ,  $t=12 \text{ mm}$ ,  $h=300 \text{ mm}$ ,  $h_1=270 \text{ mm}$ ,  $V=130 \text{ kN}$ . 并将该结果和用腹板面积去除  $V$  所得的近似结果相比较.

**5.3-7** 试计算习题 5.1-4 中梁内的最大剪应力.

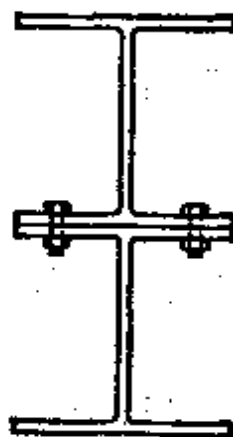
**5.3-8** 试确定习题 5.1-9 中梁内的最大剪应力.

**5.5-1** 一焊接梁,其横截面如图 5-17b 所示,它由两块  $24\text{ mm} \times 240\text{ mm}$  的翼缘板和厚为  $12\text{ mm}$ ,高为  $600\text{ mm}$  的腹板所组成。如果梁承受的总剪力为  $750\text{ kN}$ ,试问每条角填充焊缝必须传递多大的力(每  $\text{mm}$  焊接长度上)?

**5.5-2.** 一根用胶合板作为腹板的空心木梁,其横截面尺寸如图所示,胶合板用小钉与上、下翼缘连接起来,小钉能承受的容许剪力为  $90\text{ N}$ ,试求在剪力为  $450\text{ N}$  和  $900\text{ N}$  的截面处,钉子的最大容许间距。



习题 5.5-2

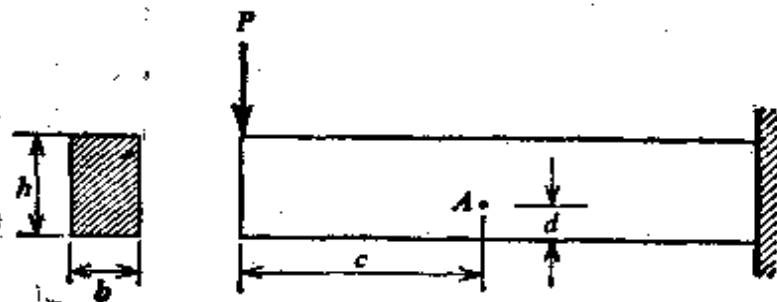


习题 5.5-3

**5.5-3** 两根  $W254 \times 37$  截面的钢梁(见附录 C),用螺栓把它们连在一起,形成一根梁,如图所示。假如  $V = 90\text{ kN}$ ,每个螺栓的剪切容许载荷为  $13.8\text{ kN}$ ,试求螺栓最大的容许间距为多少?

**5.5-4** 一木制箱形梁,按与图 5-18 所示的相似方式构成,只是其顶面和底面木板的截面尺寸为  $20\text{ mm} \times 200\text{ mm}$  (实际尺寸),两边的元件为  $50\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ ,如果钉子的纵向间距为  $s = 150\text{ mm}$ ,每个钉子的容许剪力为  $3\text{ kN}$ ,试求此截面所能承受的容许剪力  $V$ 。

**5.6-1** 一矩形截面的悬臂梁,在其自由端处作用有集中载荷  $P$ (见图),试确定  $A$  点处的主应力,并把它们表示在适当方位的微元草图上。假设  $b = 120\text{ mm}$ ,  $h = 300\text{ mm}$ ,  $P = 5\text{ kN}$ ,  $c = 0.5\text{ m}$ ,  $d = 80\text{ mm}$ 。



习题 5.6-1

5.6-2 求解上题。此时  $b=120\text{ mm}$ ,  $h=200\text{ mm}$ ,  $P=10\text{ kN}$ ,  $c=1\text{ m}$ ,  $d=150\text{ mm}$ 。

5.6-3 一矩形截面的简支梁(宽  $120\text{ mm}$ , 高  $200\text{ mm}$ ), 在其  $3\text{ m}$  长的跨度上作用有均布载荷  $14\text{ kN/m}$ 。试求距左支座  $0.3\text{ m}$  处截面上的主应力: (a) 中性轴处, (b) 中性轴以上  $50\text{ mm}$  处, (c) 在梁的顶面处。

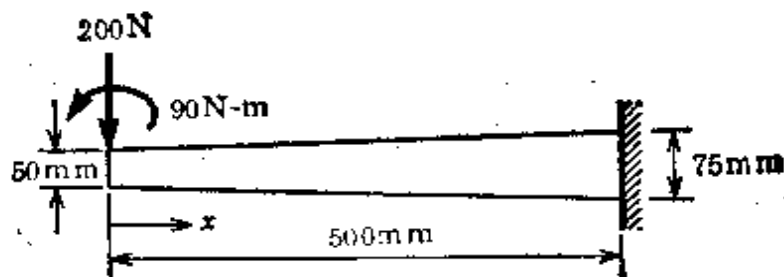
5.6-4 一宽翼缘截面梁(见图 5-14a), 其尺寸如下:  $b=120\text{ mm}$ ,  $t=12\text{ mm}$ ,  $h=300\text{ mm}$ ,  $h_1=270\text{ mm}$ , 梁为跨长  $L=3\text{ m}$  的简支梁, 承受  $q=90\text{ kN/m}$  的均布载荷, 试研究距左支座  $1\text{ m}$  处的截面上的主应力。考虑: (a) 下表面处, (b) 下翼缘与腹板连接处, (c) 中性轴上的应力。

5.7-1 试求图 5-24 所示的悬臂梁由于弯曲所产生的最大正应力, 假设  $d_o/d_e=3$ 。并将该应力和支座处的最大应力  $\sigma_o$  进行比较。

5.7-2 试问  $d_o/d_e$  之比值为多大时, 图 5-24 所示之悬臂梁的最大正应力发生在支座处?

5.7-3 一方形截面的锥形悬臂梁, 在其自由端处作用有集中载荷  $P$ , 梁的宽度和高度从自由端处的  $h$  线性变化至固定端处的  $2h$ , 梁的长度为  $L$ , 试求由于弯曲所产生的最大正应力。

5.7-4 一矩形截面的锥形悬臂梁, 其承受的载荷如图所示。梁的宽度为常数且等于  $25\text{ mm}$ , 而高度从受载端处的  $50\text{ mm}$  线性变化至支承处的  $75\text{ mm}$ 。(a) 试计算由于弯曲而产生的最大正应力, (b) 试计算在支承处的最大和最小剪应力。



习题 5.7-4

5.7-5 一等高度  $h$ 、变宽度  $b$  的矩形横截面悬臂梁, 在自由端处作用有一集中载荷  $P$ 。为使此梁成为满应力梁, 试问宽度  $b$  作为  $x$  的函数应如何变化( $x$  从自由端度量)? 仅考虑由于弯曲而产生的正应力, 并假设最大容许应力为  $\sigma_w$ 。

5.7-6 图 5-25 所示的悬臂梁应该成为什么样的形状以使它成为满应力设计? 假设它承受集度为  $q$  的均布载荷而不是集中载荷, 仅考虑由于弯曲而产生的正应力, 并假定最大容许应力为  $\sigma_w$ 。

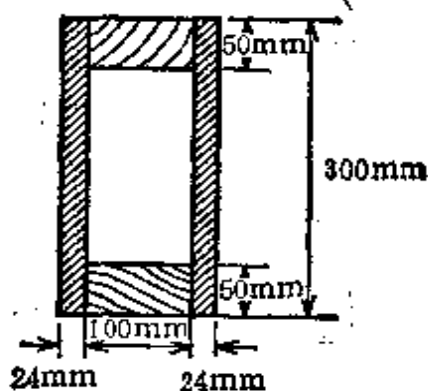
**5.7-7** 一等宽度  $b$ 、变高度  $h$  的矩形横截面简支梁(长为  $L$ )，它承受沿其跨度上可作用于任意位置处的集中载荷  $P$ 。为使此梁成为满应力梁，试问其高度  $h$  作为  $x$ (自梁中点量起)的函数应如何变化? 仅考虑由于弯曲而产生的正应力，并假设容许应力为  $\sigma_w$ 。

**5.8-1** 一长度为  $3\text{m}$  的简支梁，在其中点作用有载荷  $P=4\text{kN}$ 。该梁由木梁(宽  $100\text{mm}$ 、高  $150\text{mm}$ )构成，木梁底边由宽  $25\text{mm}$ 、厚  $12\text{mm}$  的钢杆加强。钢杆宽  $25\text{mm}$  的这一边和木梁相接，因此，两部分合成后的高度为  $162\text{mm}$ 。试求梁的这两部分中的最大应力，假设木材的  $E_w=10\text{kN/mm}^2$ ，钢的  $E_s=200\text{kN/mm}^2$ 。

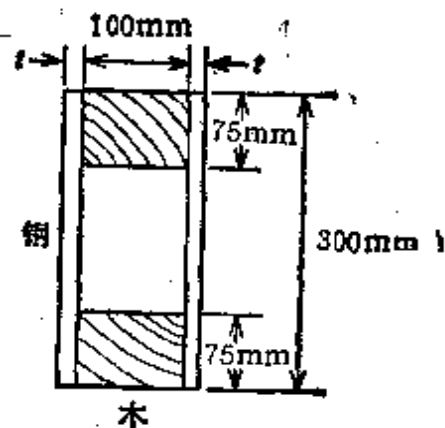
**5.8-2** 一复合梁由一底边为  $12\text{mm} \times 150\text{mm}$  的钢板加强的木梁所构成，木梁宽  $150\text{mm}$ 、高  $200\text{mm}$ ，木梁的弹性模量  $E_w=10\text{kN/mm}^2$ ，钢的  $E_s=200\text{kN/mm}^2$ 。试求梁的容许弯矩，假设木材的容许应力为  $\sigma_w=8\text{N/mm}^2$ ，钢的为  $\sigma_s=110\text{N/mm}^2$ 。

**5.8-3** 一根宽  $200\text{mm}$ 、高  $300\text{mm}$  的木梁，其顶面和底面都用  $12\text{mm} \times 200\text{mm}$  的钢板加强。试求梁的容许弯矩，假如木材的容许应力为  $\sigma_w=8\text{N/mm}^2$ ，钢的为  $\sigma_s=110\text{N/mm}^2$ 。假设钢和木材的弹性模量之比为  $20$ 。

**5.8-4** 一箱形梁，由道格拉斯枞木胶合板的腹板和红木的翼缘构成，如图所示。胶合板厚  $24\text{mm}$ 、宽  $300\text{mm}$ ，红木板翼缘为  $50\text{mm} \times 100\text{mm}$ (实际尺寸)，胶合板的弹性模量为  $11\text{kN/mm}^2$ ，红木的为  $8\text{kN/mm}^2$ 。如果胶合板的容许应力为  $14\text{N/mm}^2$ ，红木的为  $12\text{kN/mm}^2$ ，试求梁的容许弯矩。



习题 5.8-4

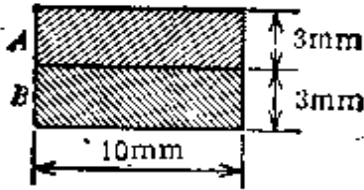


习题 5.8-5

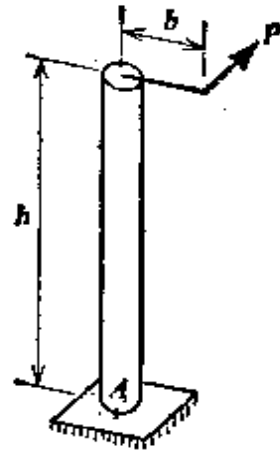
**5.8-5** 一跨长为  $4\text{m}$  的简支梁，承受  $40\text{kN/m}$  的均布载荷，梁的横截面如图所示。试问钢板所需要的厚度为多少? 假设钢的容许应力为  $120\text{N/mm}^2$ ，木材的为  $8\text{N/mm}^2$ 。假定钢的弹性模量为  $200\text{kN/mm}^2$ ，木材的为  $10\text{kN/mm}^2$ 。



5.8-6 一双金属片的横截面如图所示。假设  $E_a = 280 \text{ kN/mm}^2$ ,  $E_b = 140 \text{ kN/mm}^2$ , 试确定梁的较小截面模量, 即弯矩与最大弯曲正应力之比。



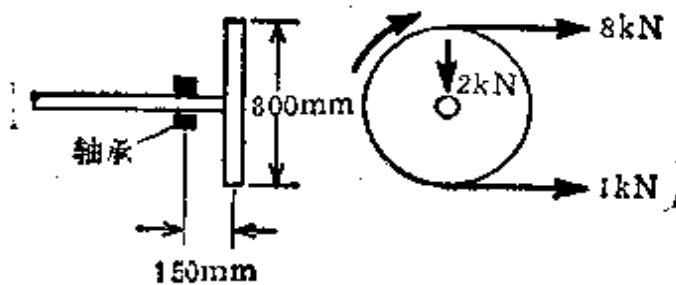
习题 5.8-6



习题 5.9-1

5.9-1 一空心圆截面柱, 承受一距其轴线为  $b = 1 \text{ m}$  处的水平力  $P = 1 \text{ kN}$  (见图)。柱的高度为  $h = 8 \text{ m}$ , 其截面模量为  $S = 160 \times 10^3 \text{ mm}^3$ 。试求 A 点 (见图) 处柱的主拉伸应力和最大剪应力, A 点是仅由弯曲作用时正应力最大之处。

5.9-2 一直径为  $60 \text{ mm}$  的轴, 带动直径为  $800 \text{ mm}$ 、重量为  $2 \text{ kN}$  的皮带轮 (见图), 皮带的拉力 (水平方向) 为  $8 \text{ kN}$  和  $1 \text{ kN}$ 。试确定距皮带轮  $150 \text{ mm}$  的轴承处轴的主拉应力和最大剪应力。(提示: 将竖直的和水平的载荷合成为一斜向作用的合力, 然后将由于此力产生的应力和由于扭矩产生的应力加以组合)。



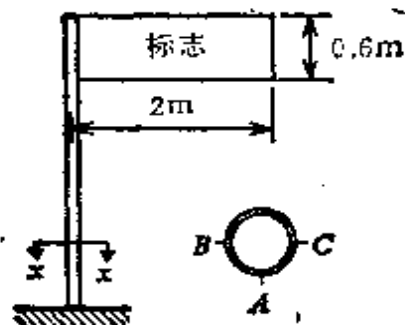
习题 5.9-2

5.9-3 图 5-31a 所示之实心圆杆, 承受一力  $Q = 8 \text{ kN}$  和一扭矩  $T = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 杆的半径为  $100 \text{ mm}$ , 试计算杆顶面上 A 点处的主应力。假设从 A 点到杆的加载端的距离为  $1.25 \text{ m}$ 。

5.9-4 一外径为  $50 \text{ mm}$  的空心管, 极惯性矩等于  $250 \times 10^3 \text{ mm}^4$ , 其支承情况如图 5-31a 所示。外加扭矩  $T = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 横向载荷为  $Q = 500 \text{ N}$ 。

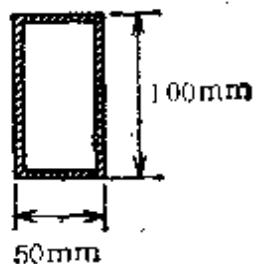
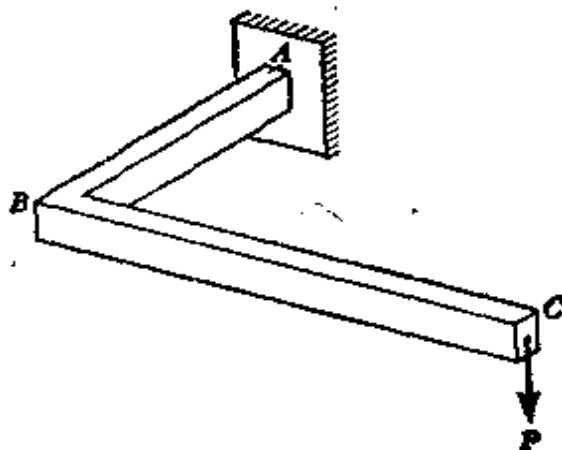
试求管顶面上  $A$  点处的主应力和最大剪应力，假设从  $A$  点到管的加载端的距离为  $1\text{ m}$ 。

**5.9-5** 作用于标志牌上的风压为  $1\text{ kN/m}^2$ ，该标志牌支承于外径等于  $100\text{ mm}$ 、内径  $90\text{ mm}$  的圆管上(见图)，牌子的尺寸为  $2\text{ m} \times 0.6\text{ m}$ ，其下边缘距地面为  $2.2\text{ m}$ ，试确定由于风压作用，在管底  $A$ 、 $B$  和  $C$  处产生的最大剪应力。



截面  $x-x$

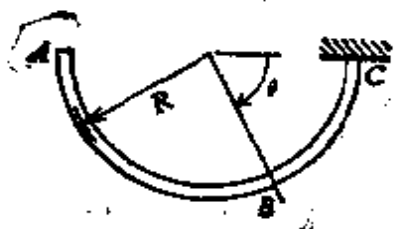
习题 5.9-5



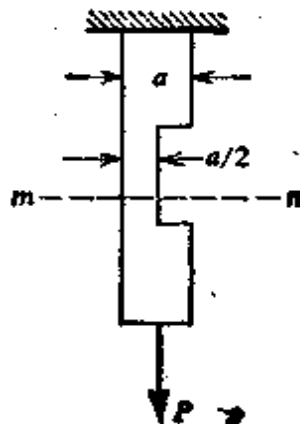
习题 5.9-6

**5.9-6** 一置于水平面内的  $L$  型托架，承受载荷  $P=1.6\text{ kN}$ (见图)，托架截面为空心矩形截面，其外部尺寸为  $50\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ ，壁厚为  $2\text{ mm}$ ，臂  $AB$  长为  $250\text{ mm}$ ， $BC$  长为  $500\text{ mm}$ ，试求支座处托架顶面  $A$  点的主应力。

**5.9-7** 一置于水平面内的半圆杆  $ABC$ ，支承于  $C$  点处(见图)，杆的



习题 5.9-7



习题 5.10-1

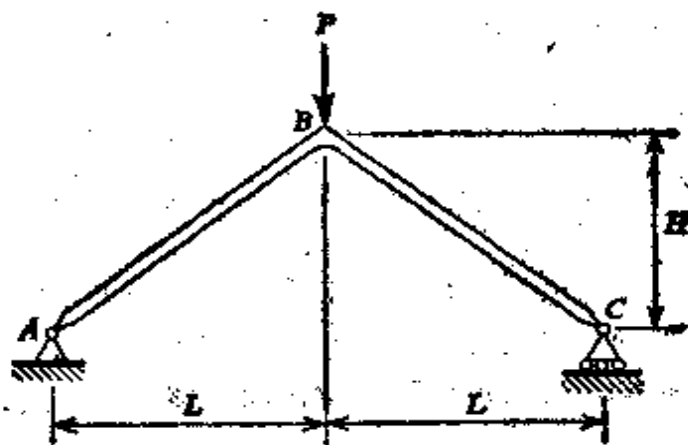
半径为  $R$ , 单位长度的重量为  $q$  (杆的总重等于  $\pi q R$ ). 试求出由角  $\theta$  所定义的  $B$  截面上的弯矩  $M$ 、剪力  $V$  和扭矩  $T$  的公式.

**5.10-1** 一方形杆的横截面积在图中所示的  $mn$  截面处减小了一半. 试求由于  $P$  力的作用, 在杆被减小的截面处的最大拉应力和压应力.

**5.10-2** 求解上题, 假设杆为圆形横截面.

**5.10-3** 一圆柱形塔, 高为  $h$ , 内径为  $d_1$ , 外径为  $d_2$ , 开始有微小倾斜. 试问为使塔中不产生拉力, 该塔与竖直线所成的最大容许倾角  $\alpha$  为多少? (仅考虑塔的自重这一载荷).

**5.10-4** 一刚架  $ABC$ , 由两根钢管在  $B$  处焊接而成, 每根钢管的截面积为  $A=10.4 \times 10^3 \text{ mm}^2$ , 惯性矩为  $I=88.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$ , 外径  $d=270 \text{ mm}$ . 试求刚架中的最大拉应力和压应力, 假设  $P=14 \text{ kN}$ ,  $L=2.4 \text{ m}$ ,  $H=1.8 \text{ m}$ .



习题 5.10-4

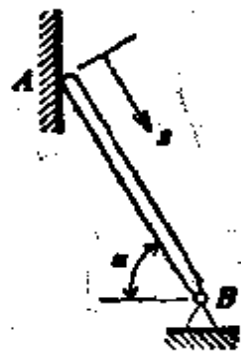
**5.10-5** 一根  $O152 \times 19$  的槽形截面 (见附录 C) 的短杆, 在其腹板形心处作用有轴向压力  $P$ , 基于  $80 \text{ N/mm}^2$  的容许压应力, 试求容许载荷  $P$ .

**5.10-6** 假设图 5-32a 所示之梁有宽度为  $b$ 、高为  $h$  的矩形横截面, 可知当  $Q$  和  $T$  的方向如图所示时, 距左端为  $x$  的任一横截面处, 其中性轴将位于截面形心之上. 令  $s$  表示从形心到中性轴的距离, (a) 试求出在  $Q=T$  的情况下,  $s$  作为  $x$  的函数的表达式, (b) 假如  $L=1 \text{ m}$ ,  $h=50 \text{ mm}$ , 作出  $0 \leq x \leq L$  范围内  $s$  的曲线图.

**5.10-7** 一高  $1.2 \text{ m}$ 、等厚度  $300 \text{ mm}$  的普通混凝土墙, 支撑在牢固的基础上并用作小坝. (a) 试求当水位达到与墙同高时, 墙底处的最大应力和最小应力. (假设混凝土单位体积的重量为  $22.8 \text{ kN/m}^3$ ), (b) 若要求混凝土中没有拉应力, 试问水的最大容许深度  $d$  为多少?

**5.10-8** 一实心圆截面杆, 其上作用有  $26 \text{ kN}$  的轴向拉力和  $3 \text{ kN}\cdot\text{m}$  的弯矩. 基于  $120 \text{ N/mm}^2$  的容许拉应力, 试问该杆所需的直径  $d$  为多少?

**5.10-9** 一实心圆杆  $AB$ ,  $B$  端铰支,  $A$  端靠在光滑的(无摩擦)的竖直面上(见图)。试确定从  $A$  点到由于杆重而产生的最大压应力截面的距离  $s$ 。(令  $L$ =杆长,  $d$ =直径,  $\alpha$ =杆轴与水平线间的夹角)。



习题 5.10-9

**5.10-10** 一拉伸元件由  $L102 \times 102 \times 19$  的角钢构成(见附录 C), 承受拉伸载荷  $P=100 \text{ kN}$ , 其作用点通过两角边中线交点, 试问杆中的最大拉应力为多大?

**5.10-11** 一根由  $W356 \times 64$  截面构成的短柱(见附录 C), 承受压缩载荷  $P=180 \text{ kN}$ , 它作用在横截面上一个外角点处, 试求该柱中的最大拉应力和最大压应力。

**5.10-12** 试证明圆形横截面(半径为  $r$ )的核心为一半径等于  $r/4$  的同心圆。

**5.10-13** 试证明外半径为  $r_2$ 、内半径为  $r_1$  的空心圆截面的核心是一个半径为  $r = (r_2^2 + r_1^2) / 4r_2$  的圆。且问: 当  $r_1$  趋近  $r_2$ , 截面成为薄环状时, 其核心半径的极限值是多少?

**5.10-14** 试确定边长为  $b$  的等边三角形截面的核心。

**5.10-15** 试确定边长为  $b$  的方形薄管截面的核心。

**5.10-16** 试确定  $W406 \times 74$  钢梁截面的核心(见附录 C)。

# 第六章 梁的挠度

## 6.1 挠曲线的微分方程

作用在梁上的横向载荷将使梁挠曲，因而梁的纵轴变形后变为一条曲线。在工程实践中，常常需要确定沿梁轴各点处的挠度。例如，挠度计算对于下章所述的静不定梁的分析就是必不可少的。另一个实例是在建筑物的设计中，通常要对最大挠度的大小规定一个上限。

让我们从考虑图 6-1a 所示的简支梁开始来讨论梁的挠度。在载荷  $P$  作用之前，梁的纵轴是直的。弯曲之后，梁轴变为一条曲线，用曲线  $ACB$  表示。如同我们前面对弯曲的讨论一样，让我们

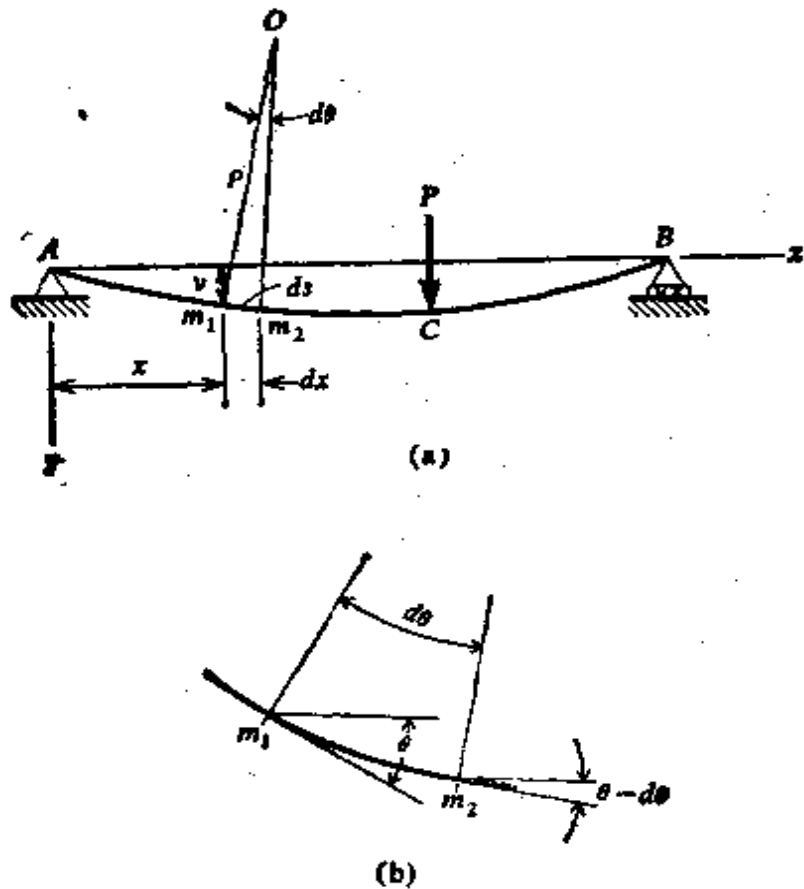


图 6-1. 弯曲梁的挠曲线。

假设  $xy$  平面为梁的对称面，并且所有的载荷均作用在该平面内，那么被称为梁挠曲线的  $AOB$  曲线也必定位于此平面内。

为了导出挠曲线的微分方程，我们将利用曲率  $\kappa$  和弯矩  $M$  之间的关系（见方程 5-9）。然而，现在我们必须认识到，挠曲线曲率的符号约定与所选择的坐标轴方向有关。如图 6-1a 所示，当假设  $x$  轴向右为正，并且  $y$  轴向下为正时，那么梁被弯成凹面朝下者梁轴的曲率为正，而当梁被弯成凹面朝上者梁轴的曲率为负。因此，图 6-1a 所示的梁弯曲具有负曲率。如果我们继续采用正弯矩  $M$  使梁的顶部产生压缩的符号约定，那么我们就看出，正弯矩产生负曲率，而负弯矩产生正曲率。因此，我们将把方程 (5-9) 重写如下：

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} \quad (6-1)$$

曲率  $\kappa$  和挠曲线方程之间的关系式现在可以通过研究相距为  $ds$  的两个点  $m_1$  和  $m_2$  求得（图 6-1a）。我们在其中每个点处绘出曲线切线的法线，这些法线交于曲率中心  $O$ 。假设在点  $m_1$  处挠曲线的切线与  $x$  轴成  $\theta$  角（图 6-1b）。在点  $m_2$  处相应的角为  $\theta - d\theta$ ，其中  $d\theta$  表示法线  $Om_1$  和  $Om_2$  之间的夹角。另外，我们由图看出， $ds = \rho d\theta$  而  $1/\rho = d\theta/ds$ 。因此，曲率  $\kappa$  等于角  $\theta$  关于沿挠曲线所度量的距离  $s$  的变化率：

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (6-2)$$

对于图 6-1b 中所绘的曲率，此量  $d\theta/ds$  为负，因为当我们沿着挠曲线从左向右移动时， $\theta$  角逐渐减小。

在大多数实际设计的例子中，梁只有微小的挠度出现。因此，挠曲线将很平坦，并且  $\theta$  角和曲线的斜率均为很小的量。因而我们可假设：

$$ds \approx dx \quad \theta \approx \text{tg } \theta = \frac{dv}{dx} \quad (6-3)$$

其中  $v$  为梁偏离其初始位置的挠度（见图 6-1a）。将这些表达式代入方程 (6-2)，我们得到

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (6-4)$$

然后与方程(6-1)合并,得

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (6-5)$$

此为梁的挠曲线的基本微分方程. 为了求出挠度  $v$ , 必须对每一种特定情况进行积分.

使用方程(6-5)的符号约定如下: (1)  $x$  轴和  $y$  轴具有图 6-1a 所示的正方向, 即向右和向下者为正; (2) 挠度  $v$  沿  $y$  正方向时为正; 及 (3) 当弯矩在梁的顶部产生压缩时为正. 如果  $v$  或者  $M$  的符号约定与此相反(例如, 选定  $v$  向上为正), 那么方程(6-5)中的负号应该变为正号.

将方程(6-5)对  $x$  微分, 然后代入方程  $q = -dV/dx$  和  $V = dM/dx$ (见方程 4-1 和 4-2), 我们求得

$$\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \quad (6-6)$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (6-7)$$

挠度  $v$  可通过求解方程(6-5)至(6-7)中的任何一个而求出, 这取决于是否  $M$  或  $V$  还是  $q$  为已知, 而且也取决于数学上的方便. 剪力  $V$  和载荷  $q$  的符号约定示于图 4-6a 中.

为了在以后的讨论中简单起见, 我们将采用小撇来表示微分, 因此

$$v' \equiv \frac{dv}{dx} \quad v'' \equiv \frac{d^2v}{dx^2} \quad v''' \equiv \frac{d^3v}{dx^3} \quad v'''' \equiv \frac{d^4v}{dx^4} \quad (6-8)$$

使用这种符号, 我们可将上面给出的微分方程表示为下列形式:

$$EIv'' = -M \quad EIv''' = -V \quad EIv'''' = q \quad (6-9a, b, c)$$

在以下两节中, 我们将使用这些方程求出梁的挠度. 其步骤包含了逐次积分方程, 所得的积分常数, 则由梁的边界条件求出. 由方程的推导我们看出, 只有当材料服从虎克定律并且挠曲线的斜率很小时, 它们才能成立. 另外, 还应当意识到, 方程是在只考虑由纯弯产生的变形而忽略了剪切变形的情况下导出的. 这种限制

对大多数实际应用来说是满足要求的，虽然偶然也需要考虑剪切效应引起的附加挠度（见第 6.11 和 11.4 节）。

**曲率的精确表达式** 如果梁的挠曲线具有很大的斜率，我们就不能使用方程(6-3)所给的简化式，而必须改为使用斜率  $v'$  与梁轴转角  $\theta$  相关的精确表达式：

$$\operatorname{tg} \theta = v' \quad \text{或} \quad \theta = \operatorname{arctg} v'$$

所以

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\operatorname{arctg} v')}{dx} \frac{dx}{ds}$$

注意到  $ds^2 = dx^2 + dv^2$ ，因此

$$\frac{ds}{dx} = \left[ 1 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = [1 + (v')^2]^{1/2}$$

还要注意到

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arctg} v') = \frac{v''}{1 + (v')^2}$$

我们得出

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \quad (6-10)$$

将此式与方程(6-4)比较，我们看出，平坦挠曲线的假设相当于将  $(v')^2$  与单位 1 相比而忽略不计，因此使得方程(6-10)中的分母等于 1。当求解涉及梁的大挠度问题时，必须用方程(6-10)作为曲率（见第 6.12 节）\*。

## 6.2 简支梁

现在让我们使用挠曲线微分方程求得简支梁的挠度。假设梁受到集度为  $q$  的均布载荷（见图 6-2），那么在距离左端支座为  $x$  处的弯矩就为  $M = qLx/2 - qx^2/2$ ，因此，由方程(6-9a)，我们得到

$$EIv'' = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

将此方程的两边各乘以  $dx$  并进行积分，我们求得

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C_1 \quad (a)$$

\* 阐明梁的曲率和弯矩成比例的基本关系（见方程 6-1）首先是由雅格布·伯努利得到的，虽然他得出了一个不正确的比例常数。这一关系式后来被欧拉所采用，他求解了大挠度（使用曲率方程 6-10）和小挠度（使用方程 6-5）两者的挠曲线微分方程。关于弹性曲线的历史，见参考文献 6-1。



式中  $C_1$  为积分常数。为了计算此常数，我们可由对称性看出，在跨长中点处挠曲线的斜率为零。因而，我们有下列条件：

$$\text{当 } x = \frac{L}{2} \text{ 时, } v' = 0$$

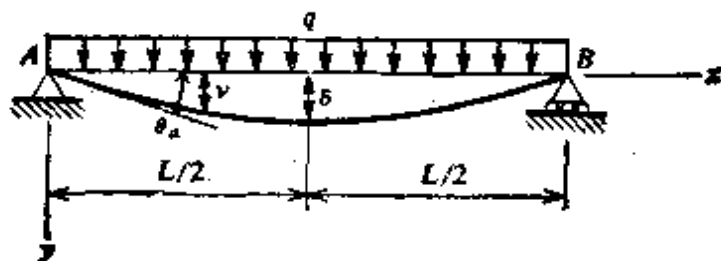


图 6-2. 受到均布载荷的简支梁的挠曲线。

上式可以更简洁地表示为

$$v'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

将此条件应用于方程(a)，给出

$$C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

于是方程(a)成为

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24} \quad (6-11)$$

再将此方程的两边各乘以  $dx$  并进行积分，我们得到

$$EIv = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3x}{24} + C_2 \quad (b)$$

积分常数  $C_2$  可根据当  $x=0$  时  $v=0$  的条件或

$$v(0) = 0$$

求出，将此条件应用于方程(b)，得  $C_2=0$ ，因此，挠度方程(方程 b)为

$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad (6-12)$$

根据此方程我们便可求出沿该梁任意点处的挠度。最大挠度  $\delta$  发生在跨度的中点处，可令方程(6-12)中的  $x=L/2$  而求得。其结果为

$$\delta = v_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (6-13)$$

最大斜率发生在梁的任何一端。在左端处( $x=0$ ), 我们由方程(6-11)求得\*

$$\theta_0 = v'_{\max} = \frac{qL^3}{24EI} \quad (6-14)$$

作为承受均匀载荷简支梁挠曲线的另一种推导方法, 我们可从四阶微分方程(方程 6-9c)出发:

$$EIv'''' = q$$

此方程的逐次积分给出

$$EIv''' = qx + C_1$$

$$EIv'' = \frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2$$

$$EIv' = \frac{qx^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

$$EIv = \frac{qx^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$$

为了计算这些积分常数, 需要四个边界条件。因为在梁的两端处挠度和弯矩均为零, 这四个条件如下:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad v''(0) = v''(L) = 0$$

由这些条件, 我们求出

$$C_1 = -\frac{qL}{2} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{qL^3}{24} \quad C_4 = 0$$

将这些常数的值代入上面的挠度方程, 给出

$$EIv = \frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}$$

此结果与求解二阶微分方程所得的(6-12)一致。

现在让我们研究一根具有集中载荷  $P$  的简支梁(见图 6-3)。载荷的位置用距端部的距离  $a$  和  $b$  来确定。此例中, 有两个不同的弯矩表达式, 一个是载荷左侧梁的一部分, 而另一个是右侧部分。所以我们对梁的每一部分分别写出方程(6-9a);

$$EIv'' = -Pbx/L \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EIv'' = -Pbx/L + P(x-a) \quad (a \leq x \leq L)$$

\* 由于假定梁的挠度很小, 可使斜率  $v'$  等于转角  $\theta$ , 如以前在方程(6-3)中所示。

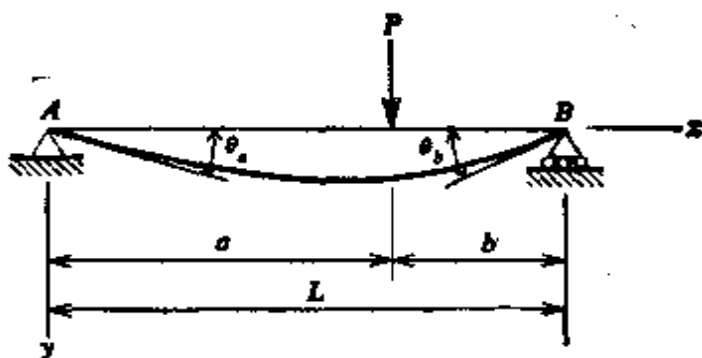


图 6-3. 承受一个集中载荷的简支梁。

积分这两个方程, 给出

$$EIv' = -Pbx^2/2L + C_1 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (c)$$

$$EIv' = -Pbx^2/2L + P(x-a)^2/2 + C_2 \quad (a \leq x \leq L) \quad (d)$$

再进行二次积分, 我们求得

$$EIv = -Pbx^3/6L + C_1x + C_3 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (e)$$

$$EIv = -Pbx^3/6L + P(x-a)^3/6 + C_2x + C_4 \quad (a \leq x \leq L) \quad (f)$$

在以上方程中出现的四个积分常数可由下列条件求出: (1) 在  $x=a$  处, 梁的两部分的斜率必须相等; (2) 在  $x=a$  处, 梁的两部分的挠度必须相等; (3) 在  $x=0$  处, 挠度为零; (4) 在  $x=L$  处, 挠度为零。根据第一个条件我们看出, 当  $x=a$  时, 斜率的表达式 (c) 和 (d) 必须相等。由此给出

$$-Pba^2/2L + C_1 = -Pba^2/2L + C_2$$

据此,  $C_1 = C_2$ 。第二个条件意味着当  $x=a$  时, 可使表达式 (e) 和 (f) 相等:

$$-Pba^3/6L + C_1a + C_3 = -Pba^3/6L + C_2a + C_4$$

此式给出  $C_3 = C_4$ 。最后, 当将条件 (3) 和 (4) 分别应用于表达式 (e) 和 (f) 时, 我们得出

$$C_3 = 0 \quad \text{及} \quad -PbL^2/6 + Pb^3/6 + C_2L = 0$$

从以上所有结果, 我们看出

$$C_1 = C_2 = Pb(L^2 - b^2)/6L \quad C_3 = C_4 = 0$$

将这些值代入到方程 (e) 和 (f) 之中, 即给出挠曲线方程:

$$EIv = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - b^2 - x^2) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (6-15a)$$

$$EIv = \frac{Pbx}{6L} (L^3 - b^3 - x^3) + \frac{P(x-a)^3}{6} \quad (a \leq x \leq L) \quad (6-15b)$$

这些方程中的第一个给出了梁在载荷左侧部分的挠曲线，而第二个方程给出了梁在载荷右侧部分的挠曲线。将  $C_1$  和  $C_2$  值代入方程(c)和(d)给出两部分梁的斜率为

$$EIv' = \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2 - 3x^2) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (6-16a)$$

$$EIv' = \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} \quad (a \leq x \leq L) \quad (6-16b)$$

根据这两个方程，便可计算出挠曲线上任一点处斜率之值。通常需求梁端的转角。因此，将  $x=0$  代入方程(6-16a)，将  $x=L$  代入方程(6-16b)，并且还用  $\theta_a$  和  $\theta_b$  表示梁端的转角(见图 6-3)，我们求得

$$\theta_a = v'(0) = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad (6-17a)$$

$$\theta_b = -v'(L) = \frac{Pab(L+a)}{6LEI} \quad (6-17b)$$

梁的最大挠度发生在挠曲线具有水平切线的点处。假设  $a > b$ ，最大挠度发生在梁的左侧部分(位于  $x=0$  和  $x=a$  之间)，根据方程(6-16a)的斜率  $v'$  等于零，我们便可确定该点的位置。若用  $x_1$  表示从梁的 A 端到最大挠度点的距离，我们则由方程(6-16a)求出

$$x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (a \geq b) \quad (6-18)$$

由此方程我们看出，当载荷  $P$  从梁的中点( $b=L/2$ )移至右端( $b$  趋于零)时，距离  $x_1$  就从  $L/2$  变至  $L/\sqrt{3} = 0.577L$ 。因此，我们得知，最大挠度总是发生在非常接近于梁中心的地方。将  $x_1$  (由方程 6-18 所得)代入到方程(6-15a)之中，即求出最大挠度：

$$v_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI} \quad (a \geq b) \quad (6-19)$$

将  $x=L/2$  代入到方程(6-15a)之中，求得梁的中点挠度：

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \quad (a \geq b) \quad (6-20)$$

因为最大挠度总是发生在梁的中点附近，所以方程(6-20)给出最大挠度的一个很好的近似值。在最不利的情况下(当  $b$  接近于零时)，最大挠度和中点挠度之差小于最大挠度的 3%。

当载荷  $P$  位于梁的中点时( $a=b=L/2$ )，上面的结果获得较为简单的形式，如下：

$$\theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI} \quad v_{\max} = v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{48EI} \quad (6-21a, b)$$

### 6.3 悬臂梁

图 6-4 表示一根左端固定并承受集度为  $q$  的均布载荷的悬臂梁。为了求得该梁的挠曲线方程，我们可用与对简支梁相同的方法，亦即，可求解三个微分方程(6-9)中的任意一个。如果从弯矩的二阶微分方程(方程 6-9a)开始，我们得到

$$EIv'' = -M = q(L-x)^2/2 \quad (a)$$

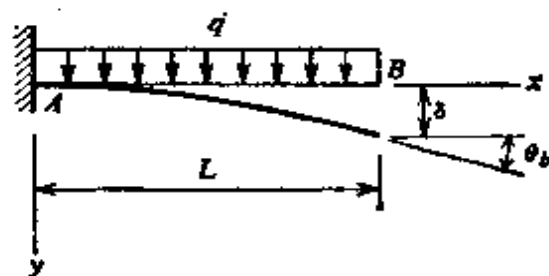


图 6-4. 承受均布载荷的悬臂梁。

该方程的第一次积分给出

$$EIv' = -q(L-x)^3/6 + C_1$$

积分常数  $C_1$  可由支座处梁的斜率为零的条件求出，因此，我们有  $v'(0) = 0$ ，此条件给出  $C_1 = qL^3/6$ 。所以，

$$v' = \frac{qx}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2) \quad (6-22)$$

此方程的积分得出

$$v = \frac{qx^3}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) + C_2$$

支座处挠度的边界条件为  $v(0) = 0$ ，它表明  $C_2 = 0$ 。因此，挠曲线方程为

$$v = \frac{qx^3}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad (6-23)$$

将  $x=L$  代入方程(6-22)和(6-23)之中,就可容易地求出梁自由端处(图6-4)的转角  $\theta_b$  和挠度  $\delta$  如下:

$$\theta_b = v'(L) = \frac{qL^3}{6EI} \quad \delta = v(L) = \frac{qL^4}{8EI} \quad (6-24a, b)$$

如果我们从剪力的微分方程(方程6-9b)着手分析该悬臂梁,我们就有  $V = q(L-x)$ , 所以

$$EIv'' = -qL + qx \quad (b)$$

积分得  $EIv' = -qLx + qx^2/2 + C_1$

因为在  $x=L$  处弯矩  $M$  为零,所以我们有边界条件  $v'(L) = 0$ , 因此,  $C_1 = qL^2/2$ , 及

$$EIv'' = -qLx + qx^2/2 + qL^2/2$$

此式与方程(a)相同. 所以,求解的其余部分与前面一样进行.

另一种可能性是从四阶微分方程开始(方程6-9c):

$$EIv'''' = q$$

第一次积分给出

$$EIv''' = qx + C_1 \quad (c)$$

因为在  $x=L$  处剪力为零,故边界条件为  $v'''(L) = 0$ , 由此  $C_1 = -qL$ . 将此  $C_1$  的表达式置于方程(c)时,该方程将与方程(b)等同,因此,求解的其余部分将与前述相同.

选用哪一个微分方程来寻求挠度,通常是一个数学上的方便或个人的偏爱问题.

## 6.4 力矩-面积法

求梁挠度的另一个方法是力矩-面积法,如果只想求出梁上某一点处的挠度和斜率,而不打算求出挠曲线的完整方程,这种方法就特别适用. 它的名称来源于利用弯矩图的面积.

让我们从研究梁的挠曲线的  $AB$  部分着手(见图6-5).  $A$  点和  $B$  点之间的弯矩图也已示于图中. 梁弯曲后相距为  $ds$  的两个横截面  $m_1$  和  $m_2$ , 将相交成一个等于  $ds/\rho$  的角  $d\theta$ , 其中  $\rho$  为曲率半径. 联合方程(6-4)和(6-5),而且只用其绝对值,我们可以写

出

$$d\theta = \frac{M dx}{EI} \quad (6-25)$$

借助图 6-5, 可给出此关系式如下一个简单的几何解释. 线  $m_1 p_1$  为挠曲线在  $m_1$  处的切线, 而线  $m_2 p_2$  为在  $m_2$  处的切线, 两根切线的夹角为  $d\theta$ . 按照方程 (6-25), 此  $d\theta$  角等于弯矩图的面积  $M dx$  (图中所示的交叉阴影线) 除以弯曲刚度  $EI$ .

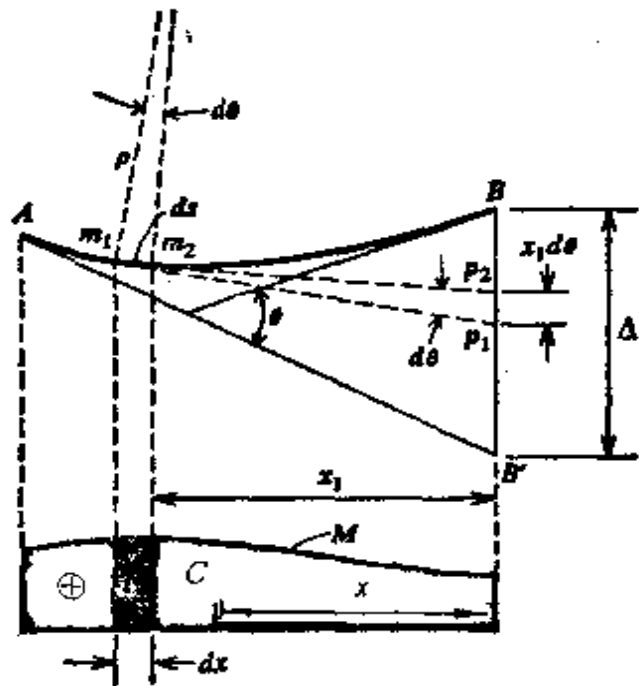


图 6-5. 力矩-面积法.

如果我们现在在  $A$  和  $B$  点之间对方程 (6-25) 进行积分, 那么就得到挠曲线的  $A$  和  $B$  处切线间的总夹角  $\theta$ :

$$\theta = \int_A^B \frac{M dx}{EI} \quad (6-26)$$

此方程中的积分代表  $A$ 、 $B$  之间弯矩图的总面积除以  $EI$ . 因此, 我们得出下面的定理:

**力矩-面积第一定理:** 在挠曲线  $A$ 、 $B$  两点处切线间的夹角  $\theta$ , 等于这两点间弯矩图的面积除以  $EI$ .

这个定理所用的符号约定为: (1) 正弯矩在梁的顶部产生压缩; (2) 当  $B$  处的切线相对于  $A$  处的切线逆时针旋转时  $\theta$  为正, 如图 6-5 所示. 若在  $A$ 、 $B$  之间的弯矩图的一部分为正, 而另一部分为负时, 则必须对与负弯矩有关的部分面积加上负号.

下面我们要研究  $B$  点相对于  $A$  点处切线  $AB'$  的挠度  $\Delta$  (图 6-5). 记住,  $\theta$  角是很小的量, 我们由该图观察到, 微段  $m_1 m_2$  的弯曲对距离  $\Delta$  所作的贡献为  $x_1 d\theta$ , 其中  $x_1$  为微段至  $B$  点的距离. 该微小距离  $x_1 d\theta$  等于

$$x_1 \frac{M dx}{EI}$$

从几何上可以解释为交叉阴影面积  $M dx$  对穿过  $B$  的一根竖直线的一次矩除以  $EI$ 。然后,从  $A$  到  $B$  积分,我们得总挠度  $\Delta$ 。

$$\Delta = \int_A^B x_1 \frac{M dx}{EI} \quad (6-27)$$

此方程中的积分代表了  $A$ 、 $B$  间的弯矩图面积对  $B$  点的一次矩除以  $EI$ 。因此,我们可将第二定理陈述如下:

**力矩-面积第二定理:**  $B$  点距  $A$  点切线的挠度  $\Delta$ , 等于  $A$ 、 $B$  之间弯矩图面积对  $B$  点的一次矩除以  $EI$ 。

需要时,该面积的一次矩,可用该面积和  $B$  点至其形心  $O$  的距离  $\bar{x}$  的乘积来求得(见图 6-5)。当弯矩为正,该面积必须取为正,而当弯矩为负,该面积必须取为负。注意,正面积(并因此有正的一次矩)意味着  $B$  在  $A$  处切线之上,反之,负力矩意味着  $B$  在切线之下。

在实际问题中,经常遇到的弯矩图面积为简单的几何图形,如矩形,三角形及抛物线形。这些图形的面积和形心距离列在附录 B 中。

现在要举几个例子,说明力矩-面积定理在求梁的转角和挠度方面的应用\*

**例题 1** 试确定承受一个集中载荷  $P$  的悬臂梁在其自由端处的转角  $\theta_b$  和挠度  $\delta$  (见图 6-6)。弯矩图为三角形形状,并示于图的下部。

根据力矩-面积第一定理,我们看到  $A$  点和  $B$  点间转角之差等于弯矩图的面积除以  $EI$ , 此面积为  $-PL^2/2EI$ 。负号意味着  $B$  处的切线是由  $A$  处切线顺时针旋转来的,而  $A$  处切线为水平线。因此,图中所示正的转角  $\theta_b$  为

$$\theta_b = \frac{PL^2}{2EI}$$

应用第二定理,可求出梁端的挠度  $\delta$ 。在挠曲线上的  $B$  点至  $A$  点处切线的距离  $\Delta$  等于弯矩面积对  $B$  点的一次矩除以  $EI$ 。

\* 力矩-面积法是由圣维南提出的(参考文献 6-6 和 6-7)。该方法由莫尔(参考文献 6-8 和 6-9)及格林(Greene)(参考文献 6-10)作了更充分的研究。



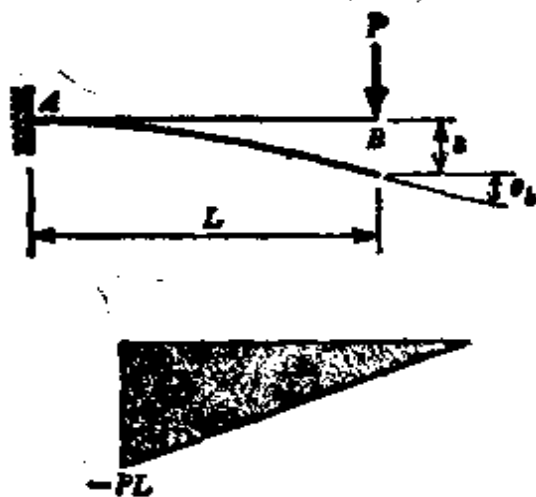


图 6-6. 例题 1. 承受一个集中载荷的悬臂梁。

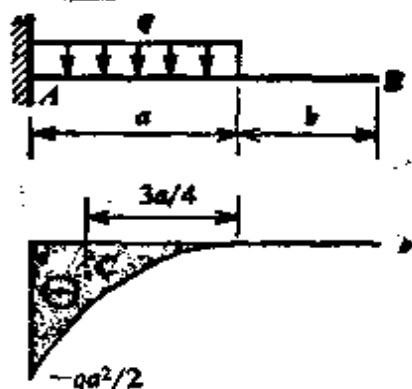


图 6-7. 例题 2. 在部分跨长上承受均布载荷的悬臂梁。

$$\Delta = -\frac{PL^2}{2EI} \left( \frac{2L}{3} \right) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

负号意味着在挠曲线上的点 B 位于 A 处切线之下。因此，挠度  $\delta$  为

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

**例题 2** 试求悬臂梁自由端的挠度  $\delta$ ，该梁在部分跨长上承受集度为  $q$  的均布载荷（见图 6-7）。

如上例所示，端点处的挠度  $\delta$  在数值上与弯矩图的面积对 B 点所取的一次矩除以  $EI$  是相同的。对于图示一般形状的二次抛物线，由附录 B 情况 11 给出其形心的距离为  $3a/4$ ，而面积为  $(qa^2/2)(a/3)$ 。因此  $\delta$  的表达式为

$$\delta = \frac{qa^2}{2EI} \left( \frac{a}{3} \right) \left( \frac{3a}{4} + b \right) = \frac{qa^3}{24EI} (3a + 4b)$$

**例题 3** 有一集中载荷作用在简支梁上（图 6-8）。试求在 A 点处挠曲线的转角  $\theta_0$ 、载荷 P 处的挠度  $\delta$  以及梁的最大挠度。

为了求出 A 点处的转角，我们首先注意到  $\theta_0$  等于距离  $BB'$  除以长度  $L$ 。距离  $BB'$  为 B 点距 A 点切线的挠度，因此可用弯矩图面积对 B 点的一次矩除以  $EI$  计算其值。弯矩图的面积为  $Pab/2$ ，由附录 B 情况 3 得到，其形心 C 至 B 点的距离为  $(L+b)/3$ 。所以，

$$BB' = \frac{Pab}{2EI} \left( \frac{L+b}{3} \right) = \frac{Pab}{6EI} (L+b)$$

此弯矩面积为正，它意味着 B 点在切线之上，这与所预料的一样。最后，我们有

$$\theta_0 = \frac{Pab}{6LEI} (L+b)$$

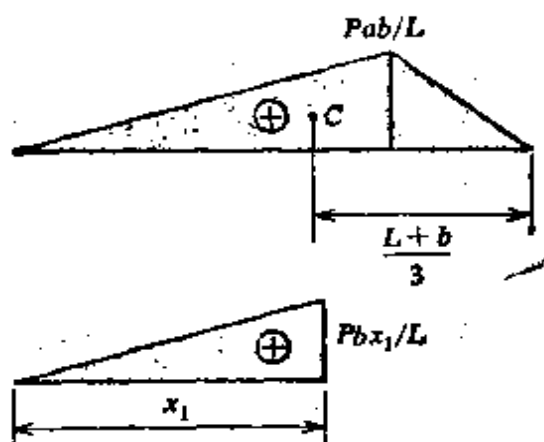
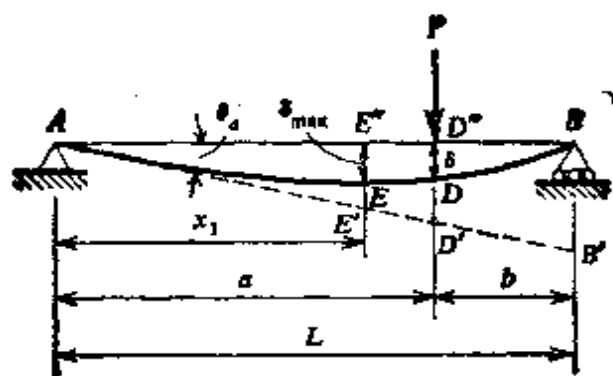


图6-8. 例题3. 承受一个集中载荷的简支梁。

载荷  $P$  处的挠度  $\delta$  可按距离  $D''D'$  减去距离  $DD'$  求出 (见图)。距离  $D''D'$  等于  $a\theta_a$ 。距离  $DD'$  等于  $D$  点至  $A$  点切线的挠度且可用力矩-面积第二定理求出:

$$DD' = \frac{Pab}{LEI} \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a}{3} \right) = \frac{Pa^3b}{6LEI}$$

因此, 我们得到  $\delta$ :

$$\delta = a\theta_a - \frac{Pa^3b}{6LEI} = \frac{Pa^3b^2}{3LEI}$$

梁的最大挠度发生在  $E$  点, 此处挠曲线具有水平切线。  $A$  点切线和  $E$  点切线间的夹角  $\theta$  等于  $A$  和  $E$  之间弯矩图的面积 (示于该图的最后部分) 除以  $EI$ 。这个角度必定与  $\theta_a$  相同, 因为  $E$  点的斜率为零。因此, 我们得出

$$\theta_a = \frac{x_1}{2} \left( \frac{Pbx_1}{LEI} \right) = \frac{Pbx_1^2}{2LEI}$$

其中  $x_1$  为  $A$  点至最大挠度处的距离。将  $\theta_a$  的表达式代入该方程内并求解  $x_1$ , 得出

$$x_1 = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}} = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

最大挠度  $\delta_{\max}$  可求得如下:

$$\delta_{\max} = E''E' - EE' = x_1 \theta_a - \frac{Pbx_1}{LEI} \left( \frac{x_1}{2} \right) \left( \frac{x_1}{3} \right) = \frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI} (L^2 - b^2)^{3/2}$$

换一种方法, 我们可稍为容易地求出  $\delta_{\max}$ , 由观察得知, 它等于点  $A$  在点  $B$  处弹性曲线切线之上的挠度. 此挠度为  $A$  点和  $B$  点之间弯矩图面积对  $A$  点的一次矩除以  $EI$ , 因此

$$\delta_{\max} = \frac{x_1}{2} \left( \frac{Pbx_1}{LEI} \right) \left( \frac{2x_1}{3} \right) = \frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI} (L^2 - b^2)^{3/2}$$

与前面相同. 以上结果是对  $a \geq b$  的情况而言.

## 6.5 叠加法

梁的挠曲线微分方程(方程 6-9) 是线性微分方程, 也就是说, 所有含挠度  $v$  或其导数的所有项仅自乘到一次幂. 这意味着在各种载荷条件下方程的解答可以叠加. 因此, 有若干个不同载荷同时作用时引起的梁的挠度可以用单个载荷分别作用所引起的挠度叠加求出. 例如, 如果  $v_1$  代表载荷  $q_1$  引起的挠度, 而  $v_2$  代表载荷  $q_2$  引起的挠度, 那么由  $q_1$  和  $q_2$  同时作用时产生的总挠度为  $v_1 + v_2$

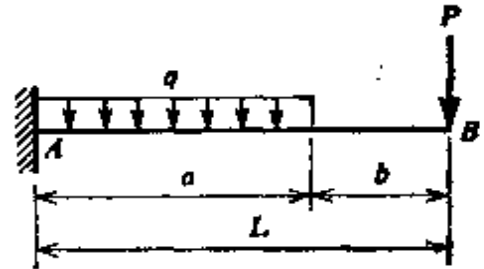


图 6-9. 承受两种载荷的悬臂梁.

为了说明这一概念, 研究图 6-9 所示的悬臂梁. 该梁在部分跨长上承受集度为  $q$  的均布载荷, 并在端部作用一集中载荷  $P$ . 让我们假设欲求自由端处的挠度  $\delta_b$ . 由于载荷  $P$  单独作用时  $B$  点的挠度为  $PL^3/3EI$ , 如上节的例题 1 所示. 另外, 由于均布载荷, 此挠度为  $qa^3(3a+4b)/24EI$ , 如上节例题 2 所得. 因此, 我们看出, 由于联合受载所产生的挠度  $\delta_b$  为

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{qa^3(3a+4b)}{24EI}$$

梁上任意一点处的挠度和转角可用类似的步骤求得.

正如刚才例题中所说明的那样, 当梁上总载荷系统可以细分成挠度为已知的若干加载情况时, 叠加法特别有用. 为了对此类情况使用时方便, 在附录 D 中给出梁挠度的表格. 使用这些表格和

叠加法,我们就能够求出梁在许多不同加载情况下的挠度和转角。

本节末尾将给出此类型的附加例题。

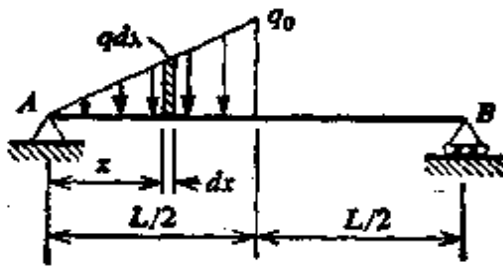


图 6-10. 承受三角形  
载荷的简支梁。

叠加法也可以用于分布载荷的情况,将分布载荷的微段当作一个集中载荷来考虑,然后对载荷作用的整个区段进行积分.从图 6-10 所示的这样一个例子中,可以容易地理解这个方法.作用于此简支梁 AB

左半边的载荷为三角形分布,我们假设要求出梁中点的挠度  $\delta$ . 分布载荷的微段  $q dx$  可被设想为一个集中载荷,作用在距左端为  $x$  处的集中载荷  $P$  在中点产生的挠度为

$$\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$$

此结果系由附录表 D-2 中的情况 5 得到. 将此式中的  $P$  代以  $q dx$ , 并注意到  $q = 2q_0x/L$ , 我们求得挠度为

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{L/2} \frac{qx dx}{48EI} (3L^2 - 4x^2) = \frac{q_0}{24LEI} \int_0^{L/2} (3L^2 - 4x^2)x^2 dx \\ &= \frac{qL^4}{240EI} \end{aligned}$$

用相同的方法,将分布载荷的微段叠加,我们可以计算出梁左端处的转角  $\theta_0$ . 由于集中载荷  $P$  所产生的转角的表达式(见表 D-2 的情况 5)为

$$\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

在此方程中,我们必须用  $2q_0x dx/L$  取代  $P$ , 用  $x$  取代  $a$ , 用  $L-x$  取代  $b$ , 由此

$$\theta_0 = \int_0^{L/2} \frac{q_0x dx}{3L^2EI} (x)(L-x)(2L-x) = \frac{41q_0L^3}{2880EI}$$

在以上各例中,为了求得梁的挠度,我们已经用了叠加的概念. 这一概念可用叠加原理的形式来叙述,它在应用力学中被广泛地使用. 只要所确定的量是所作用载荷的线性函数,这一原理

就成立。在这样的条件下，可先求出由于每一个载荷单独作用时的欲求量，然后将这些结果叠加，即可求得所有载荷同时作用时产生的总值。在求梁的挠度时，如果梁的材料服从虎克定律并且梁的挠度很小，叠加原理就能成立。小挠度的要求保证了挠曲线的微分方程式是线性的，也保证了载荷和反力的作用线不从其原始位置发生变化。

下面的例题为利用叠加原理计算梁的挠度提供了进一步的说明。

**例题 1** 一根简支梁在其两端作用有力偶  $M_0$  (见图 6-11)。试求梁两端处的转角  $\theta_a$  和  $\theta_b$  以及中点处挠度  $\delta$  的表达式。

应用表 D-2 的情况 7，我们用叠加法得到

$$\theta_a = \theta_b = \frac{M_0 L}{3EI} + \frac{M_0 L}{6EI} = \frac{M_0 L}{2EI}$$

及

$$\delta = (2) \frac{M_0 L^2}{16EI} = \frac{M_0 L^2}{8EI}$$

**例题 2** 悬臂梁  $AB$ ，沿其长的右半部分承受集度为  $q$  的均布载荷，如图 6-12 所示。试求自由端的挠度  $\delta_b$  和转角  $\theta_b$ 。

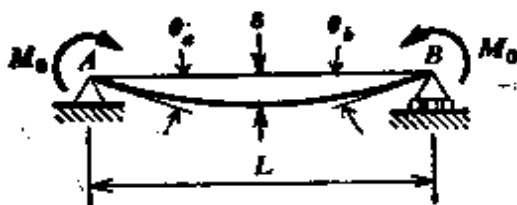


图 6-11. 例题 1. 在端点处承受力偶的简支梁。

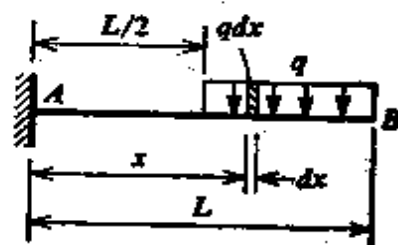


图 6-12. 例题 2. 部分跨长上承受均布载荷的悬臂梁。

我们从考虑距支座为  $x$  处载荷微段  $q dx$  开始。由表 D-1 情况 5 查得，此载荷微段在自由端产生的挠度  $d\delta$  和转角  $d\theta$  等于

$$d\delta = \frac{(q dx)(x^2)(3L-x)}{6EI} \quad d\theta = \frac{(q dx)(x^2)}{2EI}$$

因此，通过积分，我们得到

$$\delta_b = \frac{q}{6EI} \int_{L/2}^L x^2(3L-x) dx = \frac{41qL^4}{384EI}$$

$$\theta_b = \frac{q}{2EI} \int_{L/2}^L x^2 dx = \frac{7qL^3}{48EI}$$

使用表 D-1 情况 3 的公式, 并代入  $a=b=L/2$ , 可以更简便地求得相同的结果。

**例题 3** 一根具有外伸臂的简支梁承载如图 6-13a 所示。试求外伸臂端部的挠度  $\delta_0$ 。

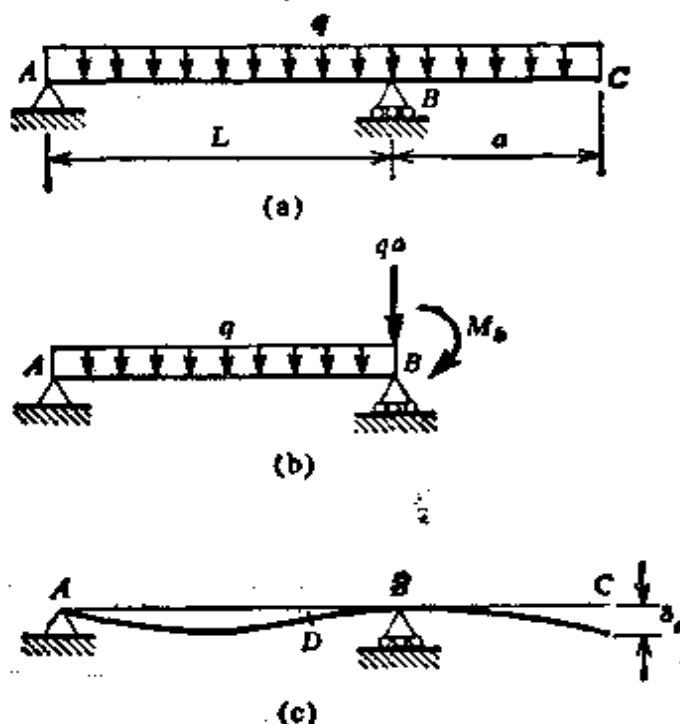


图 6-13. 例题 3. 具有外伸臂的简支梁。

$O$  点的挠度由两部分组成: (1) 梁轴在支座  $B$  处的旋转引起的挠度  $\delta_1$ , (2)  $BC$  部分像悬臂梁那样弯曲所引起的挠度  $\delta_2$ , 为了求得挠度的第一部分, 我们观察到, 梁的  $AB$  部分系与一根承受均布载荷并在右端受到力偶  $M_b$  (等于  $qa^2/2$ ) 及垂直载荷 (等于  $qa$ ) 的简支梁处于相同的情况, 如图 6-13b 所示。  $B$  端处的转角  $\theta_b$  为 (见表 D-2 情况 1 和 7):

$$\theta_b = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_b L}{3EI} = \frac{qL(L^2 - 4a^2)}{24EI}$$

由于  $B$  处的旋转所引起的  $O$  点挠度  $\delta_1$  等于  $a\theta_b$ , 或

$$\delta_1 = \frac{qaL(L^2 - 4a^2)}{24EI}$$

因为  $\theta_b$  逆时针转动时假设为正, 故此挠度以向上为正。

外伸臂本身的弯曲在  $C$  点产生向下的挠度  $\delta_2$ 。此挠度与长为  $a$  的悬臂梁的挠度相同 (见表 D-1 情况 1):

$$\delta_2 = \frac{qa^4}{8EI}$$

假设向下为正, 则  $O$  点的总挠度为

$$\delta_c = \delta_2 - \delta_1 = -\frac{qa}{24EI}(3a^3 + 4a^2L - L^3) \quad (a)$$

由此结果我们看出，当  $a$  与  $L$  相比为很小时，挠度  $\delta_c$  变为负值，而  $C$  点向上变位。

此例中梁的挠曲线形状表示在图 6-13c 中，此图表示的情况为  $a$  大到足以使  $C$  处产生向下挠变(大约  $a > 0.43L$ )，而又小到保证  $A$  处的反力向上( $a < L$ )。在这些条件下，该梁从  $A$  点到某一点，例如  $D$ ，具有正弯矩，因此，在梁的这部分内，挠曲线向下凸出。从  $D$  到  $C$ ，弯矩为负，挠曲线向上凸出。 $D$  点称为拐点或反弯点，该处梁轴的曲率为零(因为弯矩为零)。挠曲线的曲率在拐点处改变符号。

**例题 4** 试确定图 6-14 所示结构中铰链  $B$  处的挠度  $\delta_b$ 。注意，该结构由两部分组成：(1) 梁  $AB$ ，在  $A$  处简支。(2) 悬臂梁  $BC$ ，在  $C$  处固支。这两根梁在  $B$  处用一个销钉连接起来。

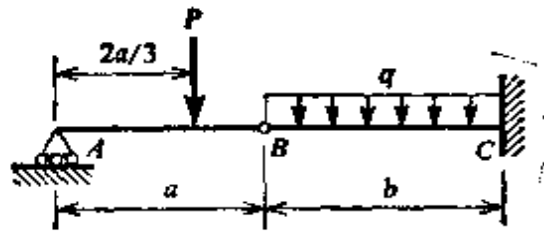


图 6-14. 例题 4. 带铰链的梁。

将  $AB$  梁视为自由体，我们看到，在  $A$  端和  $B$  端其竖直反力分别为  $P/3$  和  $2P/3$ 。因此， $BC$  梁处于一根悬臂梁的状况，受到集度为  $q$  的均布载荷以及在端点处等于  $2P/3$  的集中载荷。此悬臂梁端点的挠度与铰链的挠度是相同的，并为

$$\delta_b = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

## 6.6 非棱柱形梁

上节所介绍的计算棱柱形梁挠度的方法，可以很容易的适用于求非棱柱形梁的挠度。后一类型的梁包括各部分具有不同横截面面积的梁以及锥形梁(见图 6-15a 和 6-16 的实例)。当梁的横截面尺寸突然改变时，在发生变化的诸点就会存在局部的应力集中，然而，这些局部的应力对于挠度计算不会有显著的影响。对于锥形梁，只要其锥度很小，以前所导出的棱柱形梁的弯曲理论将给

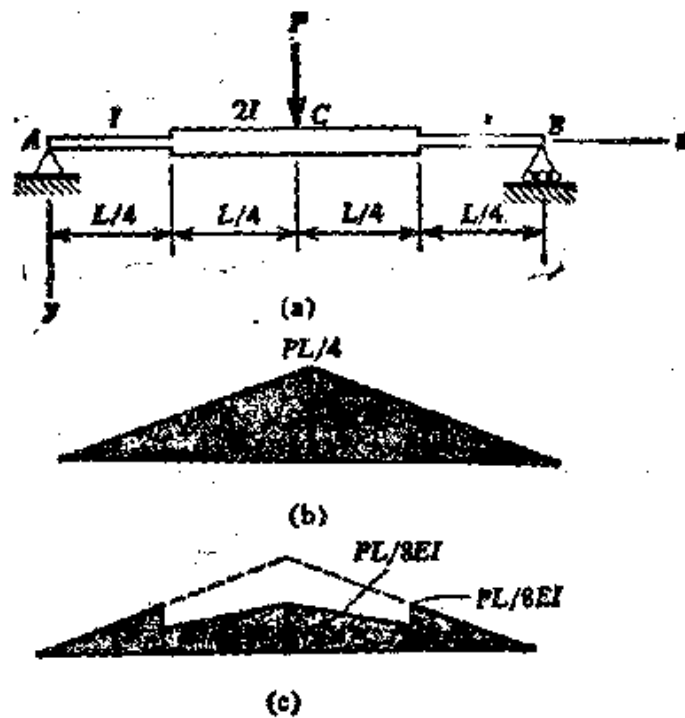


图 6-15. 具有两种不同惯性矩的简支梁。

出满意的结果。

挠曲线微分方程有时可以用来求得非棱柱形梁的挠度和转角。研究图 6-15a 所示的例子。假设该梁在其中间区段被加强，使梁在这部分的惯性矩为其端部区段惯性矩的两倍。该梁左半边的挠曲线微分方程(方程 6-9a)必须写成两部分：

$$EIv'' = -\frac{Px}{2} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{4}\right) \quad (a)$$

$$E(2I)v'' = -\frac{Px}{2} \quad \left(\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \quad (b)$$

对每一个方程积分，以求得斜率和挠度的表达式。式中将出现四个积分常数，它们可由以下条件求出：(1) 在  $x=0$  处， $v=0$ ；(2) 在  $x=L/2$  处， $v'=0$ ；(3) 在  $x=L/4$  处，由方程 (a) 所得的梁的斜率等于由方程 (b) 所得的斜率；(4) 在  $x=L/4$  处，由方程 (a) 所得的挠度等于由方程 (b) 所得的挠度。由这些条件求出积分常数之后，我们就会得出所论两区段中的每一区段上梁的挠曲线。这种求挠曲线的方法，只有在求解的微分方程的个数限于一个或两个，而且在方程中出现的函数容易被积分时，才是实用的。



对于锥形梁(图 6-16), 用正规的数学方法解微分方程可能很困难. 理由是, 其惯性矩  $I$  作为  $x$  的函数的表达式通常将是很复杂的, 并且可能产生出一个求解很麻烦的方程.



图 6-16. 锥形悬臂梁.

在图 6-15 中, 说明了力矩-面积法在求非棱柱形梁的挠度中的应用. 弯矩图在图 6-15b 中给出, 而  $M/EI$  示于图 6-15c 中.

图各部分的面积和一次矩可被用来求转角和挠度. 例如, 让我们求左边支座处的转角和中点的挠度. 由梁的对称性我们得知, 中心  $O$  处挠曲线的切线是水平的. 根据力矩-面积第一定理, 左边支座处的转角  $\theta_0$  等于  $A$  点和  $O$  点之间  $M/EI$  图的面积. 因此, 得到转角如下:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= (\text{三角形的面积}) + (\text{梯形的面积}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{L}{4} \right) \left( \frac{PL}{8EI} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{PL}{16EI} + \frac{PL}{8EI} \right) \left( \frac{L}{4} \right) \\ &= \frac{5PL^2}{128EI} \end{aligned}$$

$A$  点距  $O$  点处挠曲线切线的挠度等于梁中点的挠度  $\delta_0$ , 按照力矩-面积第二定理, 可用  $A$  和  $O$  之间的  $M/EI$  图对穿过  $A$  点竖直线的一次矩求得. 因此,

$$\begin{aligned} \delta_0 &= (\text{三角形的一次矩}) + (\text{梯形的一次矩}) \\ &= \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{L}{4} \right) \left( \frac{PL^2}{64EI} \right) + \left[ \frac{L}{4} + \frac{5}{9} \left( \frac{L}{4} \right) \right] \left[ \frac{3PL^2}{128EI} \right] \\ &= \frac{3PL^3}{256EI} \quad (c) \end{aligned}$$

求挠度和转角的另一个途径是使用叠加法, 现用图 6-17a 所示的悬臂梁为例来说明. 例如, 假设想求自由端的挠度  $\delta$ . 如果我们设想梁中点  $O$  被刚性地夹持住, 使得既不变位也不转动, 那么自由端的挠度  $\delta_1$  与长为  $L/2$  及惯性矩为  $I$  的悬臂梁的挠度相同;

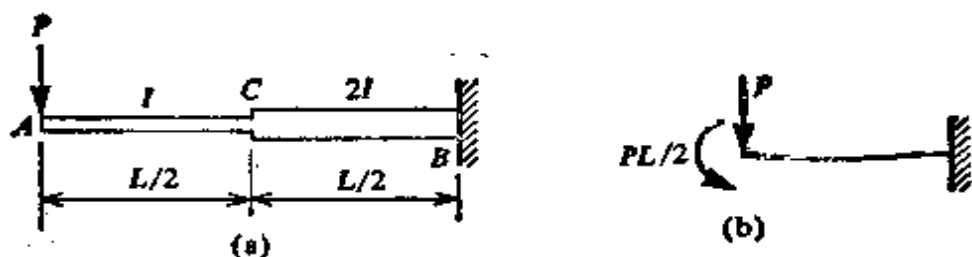


图 6-17. 具有两种不同惯性矩的悬臂梁。

$$\delta_1 = \frac{P(L/2)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{24EI}$$

然而, 梁的  $CB$  部分也象一根悬臂梁(图 6-17b)那样, 且对  $A$  点的挠度有贡献。此悬臂梁自由端的挠度  $\delta_c$  和转角  $\theta_c$  为

$$\delta_c = \frac{P(L/2)^3}{3(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)^2}{2(2EI)} = \frac{5PL^3}{96EI}$$

$$\theta_c = \frac{P(L/2)^2}{2(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)}{2EI} = \frac{3PL^2}{16EI}$$

此挠度  $\delta_c$  和转角  $\theta_c$  对载荷  $P$  处的挠度有一个附加的贡献  $\delta_2$  如下:

$$\delta_2 = \delta_c + \theta_c \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{7PL^3}{48EI}$$

因此, 自由端  $A$  的总挠度为

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{3PL^3}{16EI} \quad (d)$$

从以上例题我们看出, 当梁为非棱柱形时, 求梁挠度的任何标准方法都能使用。方法的选择及其步骤的细节将取决于所求解的问题。

## 6.7 有限差分法

有限差分法是用来求梁挠度的一种数值方法。当作用在梁的载荷不规则或梁为非棱柱形时, 差分法特别有用。此种方法的基本概念是用有限差分近似代替挠曲线微分方程(方程 6-5), 然后用代数方法求解沿梁长若干点处所得到的有限差分方程。方程的解答由各点挠度的近似值所组成。

为了说明此方法, 让我们从研究图 6-18 以曲线表示的一般函

数  $y=f(x)$  开始。  $x$  轴可分成一系列等分区间，从左到右连续地将各区间端点进行编号。这些点上曲线的纵坐标以相应点的号码作下标来表示。例如，在  $i-2, i-1, i, i+1$  等各点，其纵坐标分别为  $y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}$  等等。在此讨论中，相邻点之间的距离均取为  $h$ ，虽然在更一般的情况下，诸点之间的距离不必全然相同。

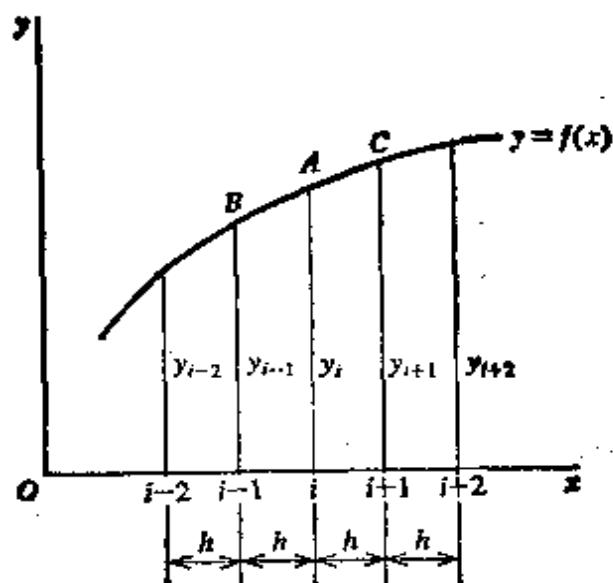


图 6-18. 有限差分法。

现在研究  $A$  点处函数  $y$  的一阶导数，  $A$  点相应于  $x$  轴上的  $i$  点 (见图 6-18)。此导数等于曲线在  $A$  点处的斜率，该斜率本身又近似地

等于连接点  $B$  和点  $C$  弦线的斜率。因此，我们有

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (6-28)$$

二阶导数  $d^2y/dx^2$  表示一阶导数的变化率。因此，在  $i$  点，可以这样地来逼近它：计算  $i$  点右侧的斜率减去  $i$  点左侧的斜率并除以该区间的长度。此方法给出下列表达式：

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (6-29)$$

方程 (6-28) 和 (6-29) 给出一阶导数和二阶导数的有限差分表示式。这些表达式称为中心差分，因为它们包括了  $i$  点两侧的纵坐标。另外也能得出仅包括  $i$  点右侧 (除  $i$  点的纵坐标外) 或仅包括  $i$  点左侧纵坐标的表达式。这样的表达式分别称为前向差分或后向差分。此外，高于二阶的导数也可表示为差分形式。然而，上面给出的差分公式将足以用来求出梁的挠度\*。

\* 关于有限差分法更完整的讨论，应参考数值方法方面的教科书 (例如，见参考文献 6-11)。

将二阶导数差分式(方程 6-29)与挠曲线微分方程(方程 6-5)联合,就得到梁的有限差分方程:

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} = -\frac{M_i}{(EI)_i}$$

或

$$v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1} = -h^2 \frac{M_i}{(EI)_i} \quad (6-30)$$

在此方程中,弯矩  $M$  和刚度  $EI$  的符号加上了下标  $i$ ,以强调它们是在梁轴  $i$  点上所计算的量。

为了应用方程(6-30),需要沿梁选择一系列的点,然后写出这些点的差分方程。解所得的方程组便可求出选择点处的挠度,下面将举例说明。以后在第 7.5 节,将说明如何应用此法分析静不定梁。

**例题 1** 作为有限差分法的说明,让我们研究一根承受均布载荷的简支梁的挠度计算问题(图 6-19a)。假设该梁的弯曲刚度  $EI$  为常数,长为  $L$ 。在此例中,将梁分为四个相等的区间(图 6-19b),因此,必须确定 1, 2 和 3 三点处的挠度。然而,由于对称,已知挠度中的两个是相同的( $v_1 = v_3$ ),因此,只有两个挠度被当作方程中的未知量。

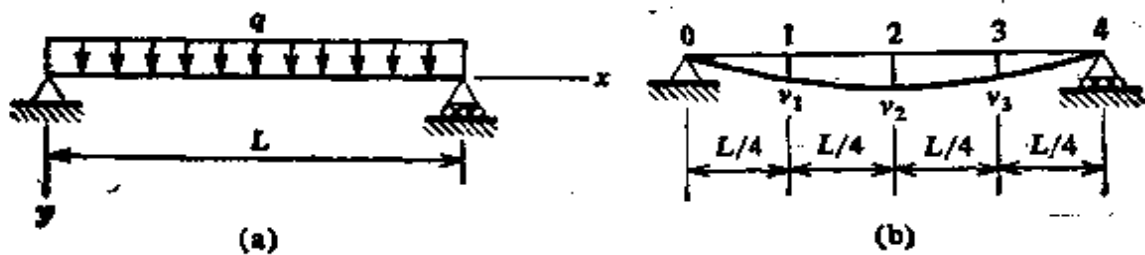


图 6-19. 例题 1.

点 1 处的有限差分方程(方程 6-30)为

$$v_0 - 2v_1 + v_2 = -\left(\frac{L}{4}\right)^2 \left(\frac{3qL^2}{32EI}\right)$$

这是因为  $h=L/4$  及  $M_1=3qL^2/32$ 。此外,因为梁端的挠度为零( $v_0=0$ ),上述方程简化为

$$2v_1 - v_2 = \frac{3qL^4}{512EI} \quad (a)$$

在点 2 处,弯矩  $M_2$  为  $qL^2/8$ ,差分方程变为

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = -\left(\frac{L}{4}\right)^2 \left(\frac{qL^2}{8EI}\right)$$

或因  $v_1 = v_3$ ,

$$v_1 - v_2 = -\frac{qL^4}{256EI} \quad (b)$$

现在, 我们可求解方程(a)和(b)得出挠度:

$$v_1 = v_3 = \frac{5qL^4}{512EI} = 0.00977 \frac{qL^4}{EI}$$

$$v_2 = \frac{7qL^4}{512EI} = 0.01367 \frac{qL^4}{EI}$$

这些挠度的精确结果为

$$v_1 = v_3 = \frac{19qL^4}{2048EI} = 0.00928 \frac{qL^4}{EI}$$

$$v_2 = \frac{5qL^4}{384EI} = 0.01302 \frac{qL^4}{EI}$$

比较以上所得之值, 我们看出, 有限差分结果大约比精确结果高 5%, 考虑到沿梁长仅用了四段, 这一精度是合理的。把梁分成更多区段并相应地求解较多的方程, 可以得到更高的精确度(见习题 6.7-1)。

**例题 2** 本例题系关于在图 6-20 中所示的非棱柱形悬臂梁。注意, 梁的 AB 区段所具有的惯性矩是 BC 区段的两倍。试确定梁自由端的挠度。

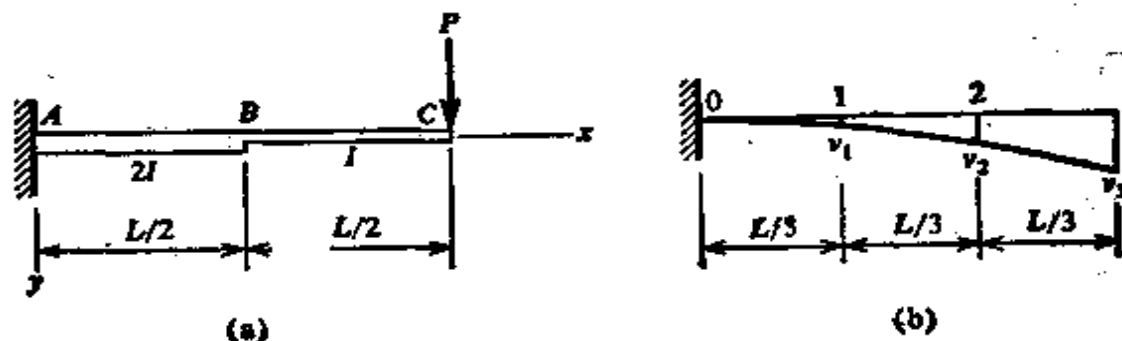


图 6-20. 例题 2.

当梁分为三个相等的区间时, 将有三个待求的未知挠度(见图 6-20b)。在点 0, 1 和 2 处的弯矩为

$$M_0 = -PL \quad M_1 = -\frac{2PL}{3} \quad M_2 = -\frac{PL}{3}$$

因此, 在点 0, 1 和 2 处的有限差分方程变为

$$v_{-1} - 2v_0 + v_1 = -\left(\frac{L}{3}\right)^2 \left(-\frac{PL}{2EI}\right) \quad (c)$$

$$v_0 - 2v_1 + v_2 = -\left(\frac{L}{3}\right)^2 \left(-\frac{PL}{3EI}\right) \quad (d)$$

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = -\left(\frac{L}{3}\right)^2 \left(-\frac{PL}{3EI}\right) \quad (e)$$

在这些方程的第一个方程中，出现了位于固定端左侧假想点处的虚构挠度  $v_{-1}$ 。使用固定端的边界条件之一，即斜率为零，可把这个虚构挠度以真实挠度来表达。任一函数的一阶导数，可用方程(6-28)的有限差分形式给出，当将此方程用于  $O$  点以求得梁的斜率时，我们得到

$$v_1 - v_{-1} = 0 \quad \text{或} \quad v_{-1} = v_1 \quad (f)$$

这样，挠度  $v_{-1}$  就用梁的真实挠度表示出来了。

固定端的第二个边界条件为  $v_0 = 0$ 。当使用了这两个边界条件时，方程(c)就简化为

$$v_1 = \frac{PL^3}{36EI}$$

现在，求解余下的有限差分方程(d)和(e)就是一件简单的事情了，得出

$$v_2 = \frac{5PL^3}{54EI} \quad v_3 = \frac{7PL^3}{36EI} = 0.1944 \frac{PL^3}{EI}$$

与上面所得  $v_3$  的值相比，梁自由端的精确挠度为

$$v_3 = \frac{3PL^3}{16EI} = 0.1875 \frac{PL^3}{EI}$$

它由上节中的方程(d)给出。因此，沿梁只用三段时给出的结果仅比精确值高4%。

## 6.8 弯曲应变能

让我们从纯弯梁的例子(图 6-21a)开始应变能的讨论，并假设梁中的应力低于比例极限。因为梁的弯矩为常数，梁将弯曲成曲率为  $M/EI$  的圆弧。该圆弧对应之角为

$$\theta = \frac{ML}{EI} \quad (6-31)$$

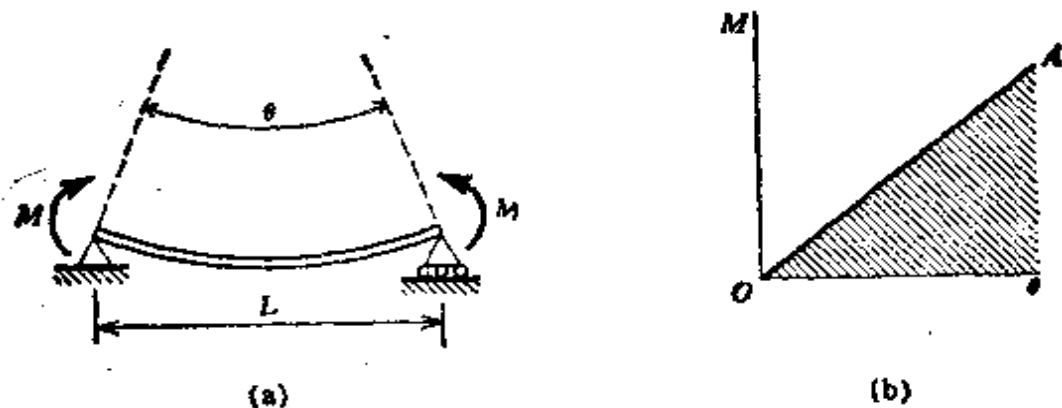


图 6-21. (a) 纯弯梁; (b) 表明弯矩和转角之间的线性关系图。

角  $\theta$  和载荷  $M$  之间的线性关系在图 6-21b 中用  $OA$  图线表示。当力偶  $M$  的值自零逐步增大到它们的最大值时，它们所作之功用载荷-挠度图下面的面积来表示（在图 6-21b 中以阴影线表示）。这个功等于储存在梁中的应变能，且为

$$U = \frac{M\theta}{2} \quad (6-32)$$

此式与作用在拉杆上的力所产生的应变能方程 (1-15) 相类似，也和作用在轴上的扭矩所产生的应变能方程 (3-15) 相类似。

现将方程 (6-31) 和 (6-32) 联合，我们就可用下面任一形式表示储存在纯弯梁中的应变能：

$$U = \frac{M^2 L}{2EI} \quad \text{或} \quad U = \frac{EI\theta^2}{2L} \quad (6-33a, b)$$

其中的第一个表达式给出用载荷  $M$  表示的应变能，而第二个给出用角  $\theta$  表示的应变能。

如果梁不是纯弯，而弯矩沿梁长改变，我们可以研究长度为  $dx$  的梁的微段然后积分以求得其应变能。微段两边之间的夹角  $d\theta$  为（见方程 6-4 和 6-5）：

$$d\theta = -\frac{M dx}{EI} = \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

于是，储存在微段中的应变能  $dU$  为

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI} \quad \text{或} \quad dU = \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$

从而，储存在梁中的总应变能为

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad \text{或} \quad U = \int \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (6-34a, b)$$

式中积分沿梁的全长进行。

应变能的方程 (6-34) 仅计及了梁中弯矩的影响。除此之外，在每个微段中还可能储存有一定的剪切应变能。后一种应变能将在后边第 6.11 节中讨论。然而，对于细长梁，剪切应变能与比它大得多的弯曲应变能相比，可以略而不计。

应变能的概念在结构分析和在抵抗动载荷或冲击载荷的结构

设计中, 具有重要的作用. 然而, 在本节中, 我们将仅限于几个简单例子, 说明如何计算梁的应变能, 以及如何处理理想化的冲击问题.

**例题 1** 试确定梁长为  $L$ , 在自由端承受一个集中载荷  $P$  的悬臂梁所储存的应变能(见图 6-6). 并求出梁端的挠度  $\delta$ .

悬臂梁在任一横截面处的弯矩为  $M = -Px$ , 其中  $x$  为距自由端的距离. 将该表达式代入方程(6-34a), 得

$$U = \int_0^L \frac{P^2 x^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

载荷所作之功为  $P\delta/2$ , 令此功等于应变能  $U$ , 得

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

此表达式与前面的结果一致(见第 6.4 节例题 1).

**例题 2** 试用承受均布载荷简支梁(见图 6-2)的挠曲线方程, 求储存在梁中的应变能  $U$  的表达式.

梁的挠曲线由方程(6-12)给出. 对该方程取二次导数, 给出

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{qx}{2EI}(x-L)$$

现将它代入方程(6-34b)并积分, 我们求出

$$U = \int_0^L \frac{q^2 x^2 (x-L)^2}{8EI} dx = \frac{q^2 L^5}{240EI}$$

**由于冲击产生的挠度** 承受冲击载荷的梁, 其动态挠度可由载荷所作之功等于储存在梁中的应变能来确定. 作为实例, 研究一根在中点受到重  $W$  的落体撞击的简支梁(图 6-22). 假设在碰撞过程中没有能量损失, 并且梁的质量和落体的质量相比可以略而不计. 换句话说, 重物  $W$  下落过程中所作之功完全转化为梁的弹性应变能, 而梁由于其位置改变而产生的势能则略而不计.

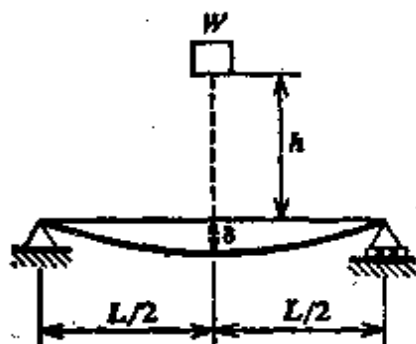


图 6-22. 冲击所产生的梁挠度.

重物下落了距离  $h + \delta$  所做的功(其中  $h$  为重物在梁上方的初始高度, 而  $\delta$  为最大挠度)为



$$W(h + \delta) \quad (a)$$

如果我们令  $P$  代表当梁的挠度为最大时施加在梁上的力, 并假设梁的挠曲形状与载荷  $P$  静态作用时的相同, 那么力  $P$  为

$$P = \frac{48EI\delta}{L^3}$$

梁相应的总应变能为

$$U = \frac{P\delta}{2} = \frac{24EI\delta^2}{L^3} \quad (b)$$

令落体所作之功(见式 a)等于应变能(方程 b), 给出

$$\delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2h\delta_{st} = 0$$

式中  $\delta_{st} = WL^3/48EI$  为载荷  $W$  静态作用时梁的挠度. 由上面方程我们可得最大挠度:

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st}} \quad (6-35)$$

由此方程我们看出, 动态挠度  $\delta$  总是大于静态挠度  $\delta_{st}$ . 如果高度  $h=0$ , 这意味着载荷  $W$  突然作用而没有任何自由下落, 其挠度为静态挠度的两倍. 如果高度  $h$  很大, 那么方程(6-35)中包含  $h$  的项占优势, 因而该方程简化为  $\delta = \sqrt{2h\delta_{st}}$ . 所有这些观察结果均和以前研究拉杆受冲击时所遇到的相类似(见第 1.10 节).

由方程(6-35)算得的挠度  $\delta$ , 代表了基于冲击时没有能量损失这一假设的上限值. 举例来说, 接触表面的局部变形就会产生能量损失. 因此, 梁的应变能减小了, 而最大挠度小于用方程(6-35)所推算的挠度.\*

## 6.9 与挠度成比例的载荷

在以上有关梁挠度的全部讨论中, 均假设载荷为已知量. 然而, 尚有另外一些情况, 其中载荷取决于挠度, 因此, 载荷的确定成为分析的一部分. 一根梁支持着一个表面, 其上聚集着液体就是一例. 当梁挠曲时, 形成凹洼区, 其中充满液体并形成一个小水池. 水池的出现增大了载荷, 因而也增大了挠度, 于是将有更多的液体

\* 如果我们计及梁的质量, 其挠度也要减小, 见参考文献 1-16 和 1-17.

聚集起来。这样，或者挠度继续增大直到梁破坏，或者梁将达到一个平衡位置，不再有附加挠度发生。这种性态最常见的例子是在平屋顶上聚集雨水，我们称此情况为筑池问题。

让我们假设梁  $AB$  (图 6-23a) 在端点处简支，它是支承平板或桥面的平行梁系统的一部分 (见图 6-23b)，筑池问题发生之前，假设梁具有下式给出的初始挠度  $v_1$

$$v_1 = v_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (a)$$

如果现在液体在平板上筑池，则沿该梁单位长度上的载荷集度将为

$$q = s\gamma v \quad (b)$$

式中  $s$  为梁的间距， $\gamma$  为液体单位体积的重量，而  $v$  为梁的总挠度。总挠度  $v$  为初始挠度  $v_1$  和由筑池液体的重量所产生的附加挠度  $v_2$  之和 (图 6-23a)。

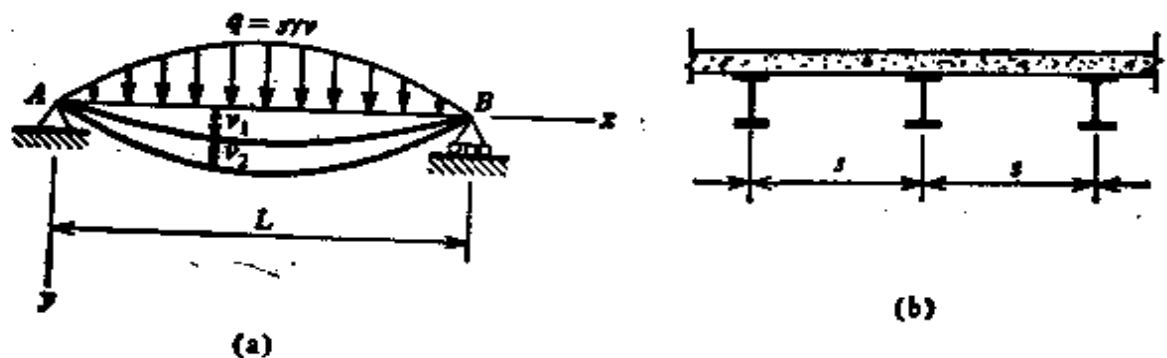


图 6-23. 简支梁上的筑池载荷。

现在，该梁可通过求解梁挠度的四阶微分方程 (方程 6-9c) 来分析。该方程变为

$$EIv_2'''' = q = s\gamma v$$

将  $v = v_1 + v_2$  代入上面的方程，并从方程 (a) 获取  $v_1$ ，我们得到

$$EIv_2'''' - s\gamma v_2 = s\gamma v_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

现在用  $EI$  去除上式，并引进符号

$$\alpha^4 = \frac{s\gamma}{EI} \quad (6-36)$$

我们发现，微分方程变为

$$v_2''' - a^4 v_2 = a^4 v_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (6-37)$$

上述微分方程的通解由两部分组成：齐次解和特解。前者是由去掉右边项并用零来代替所得的齐次方程的解；后者是方程的某一特解，当把它代入方程左边时会得出右边项。应用求解微分方程的标准方法，我们求出齐次解：

$$(v_2)_H = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 \cos hax + C_4 \sin hax \quad (c)$$

它包含四个任意常数。通过直接代入齐次微分方程可很容易地验证这个解的正确性。其特解为

$$(v_2)_p = \frac{bv_0}{1-b} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (d)$$

式中  $b$  为一无量纲参数：

$$b = \frac{a^4 L^4}{\pi^4} = \frac{\gamma L^4}{\pi^4 EI} \quad (6-38)$$

用代入微分方程的方法也能验证此特解。

现在，将齐次解和特解组合，即可求得方程(6-37)的通解：

$$v_2 = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 \cos hax + C_4 \sin hax + \frac{bv_0}{1-b} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (e)$$

此解中的四个积分常数可根据如下四个边界条件求出：(1)  $x=0$ ,  $v_2=0$ ；(2)  $x=0$ ,  $v_2''=0$ ；(3)  $x=L$ ,  $v_2=0$ ；(4)  $x=L$ ,  $v_2''=0$ 。由前两个条件我们求出  $C_1=C_3=0$ ，而由后两个我们求出  $C_2=C_4=0$ 。因此，挠度  $v_2$  的最终方程仅为由方程(d)所给的特解。于是梁的总挠度变为

$$v = v_1 + v_2 = v_0 \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{bv_0}{1-b} \sin \frac{\pi x}{L}$$

或

$$v = \frac{v_0}{1-b} \sin \frac{\pi x}{L} = \frac{v_1}{1-b} \quad (f)$$

最后的结果表明：由于筑池，初始挠度  $v_1$  要用放大因子  $1/(1-b)$  放大。当  $b=0$  时，该因子等于 1，而当  $b$  趋于 1 时，它将无限增大。因此，我们可以说，对于小于 1 的  $b$  值，亦即对于

$$\frac{s^2 L^4}{\alpha^4 EI} < 1 \quad (6-31)$$

挠度  $v$  具有确定值, 且梁达到一个平衡位置。如果  $b \geq 1$ , 在筑池载荷作用下, 梁是不稳定的, 并且在理论上挠度变为无限大。当然, 必须牢记, 该微分方程仅限于小挠度和线弹性梁, 因此, 上述结果对于大挠度而言是不成立的。

作为筑池问题的第二个例子, 让我们假设一根原来是直的简支梁, 承受集度为  $q_0$  的均布载荷。因为筑池效应, 将产生一个附加载荷  $q_1 = syv$ , 其中  $v$  为梁的总挠度。所以, 总载荷为  $q = q_0 + syv$ , 而挠曲线微分方程变为

$$EIv'''' = q_0 + syv$$

或

$$v'''' - \alpha^4 v = \frac{q_0}{EI} \quad (g)$$

该方程具有与前面相同的齐次解(见方程 c)以及下列特解:

$$(v)_p = -\frac{q_0}{sy} \quad (h)$$

将四个边界条件应用于通解, 我们便得到积分常数:

$$C_1 = C_3 = \frac{q_0}{2sy} \quad C_2 = \frac{q_0}{2sy} \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \quad C_4 = -\frac{q_0}{2sy} \operatorname{tgh} \frac{\alpha L}{2}$$

知道这些常数后, 即可容易地写出挠度  $v$  的通解, 此后便可计算沿梁任何一个特定截面处的挠度之值。例如, 在梁中点处, 挠度为

$$v_0 = \frac{q_0}{2sy} \left( \sec \frac{\alpha L}{2} + \operatorname{sech} \frac{\alpha L}{2} - 2 \right)$$

回忆单独由于均布载荷  $q_0$  作用而无筑池问题时, 中点的挠度为  $5q_0 L^4 / 384EI$ , 我们将上述挠度重新表达成下列形式:

$$v_0 = \frac{5q_0 L^4}{384EI} \psi_1 \quad (i)$$

其中

$$\psi_1 = \frac{192}{5\alpha^4 L^4} \left( \sec \frac{\alpha L}{2} + \operatorname{sech} \frac{\alpha L}{2} - 2 \right) \quad (j)$$

系数  $\psi_1$  是一个无量纲的放大因数, 当  $\alpha L = 0$  时, 其值为 1, 而当  $\alpha L$  趋近于  $\pi$  时, 其值趋向无限大。于是, 我们再次发现, 存在着一个临界值, 当在此值以下时, 梁是稳定的, 且能达到某一平衡位置。该临界值由方程  $\alpha L = \pi$  或  $b = 1$  给出, 而其稳定条件则与前面所得的相同(见方程 6-39)。在一般情况下会发现, 适用于简支梁的这一稳定条件与引起初始挠度的载荷类型无关。

确保梁具有足够的弯曲刚度  $EI$  或提供足够的拱度(或初始向上挠度), 可以避免因筑池产生的破坏。对于有关屋顶系统的特定设计资料, 见参考文献 6-12 和 6-13, 其中包括了附加的参考文献。

对于集中载荷的大小与载荷处挠度有关的那些情况(习题 6.9-1 和 6.9-2 属于这类例子), 通常可作为比上面筑池问题要简单得多的另一种分析类型。

## 6.10 热效应

均匀的温度增长会使无约束杆或梁的长度增加如下的量值

$$\Delta L = \alpha L \Delta T \quad (6-40)$$

式中  $\Delta L$  代表长度的增量,  $\alpha$  为温度膨胀系数\*,  $L$  为原长,  $\Delta T$  为温度的增量。如果梁以这样的方式支承着, 即纵向膨胀可自由产生, 如同本章已研究过的所有的梁那样, 则均匀的温度变化不会在梁中产生任何应力。这种梁也不会有任何横向挠度, 因为此种梁没有弯曲的趋势。

如果沿梁的高度温度不是常数, 梁的性态则完全不同。例如, 假设原来是直的并且处于均匀温度  $T_0$  的一根简支梁, 在其顶面的温度变为  $T_1$ , 底面的温度变为  $T_2$ , 如图 6-24a 所示。如果我们假设梁顶和梁底之间温度变化是线性的, 那么梁的平均温度为  $T_{aver} = (T_1 + T_2)/2$  并发生于高度的中间。正如前段所述, 此平均温度与初始温度  $T_0$  之间的任何差别, 将引起梁的长度改变。梁底

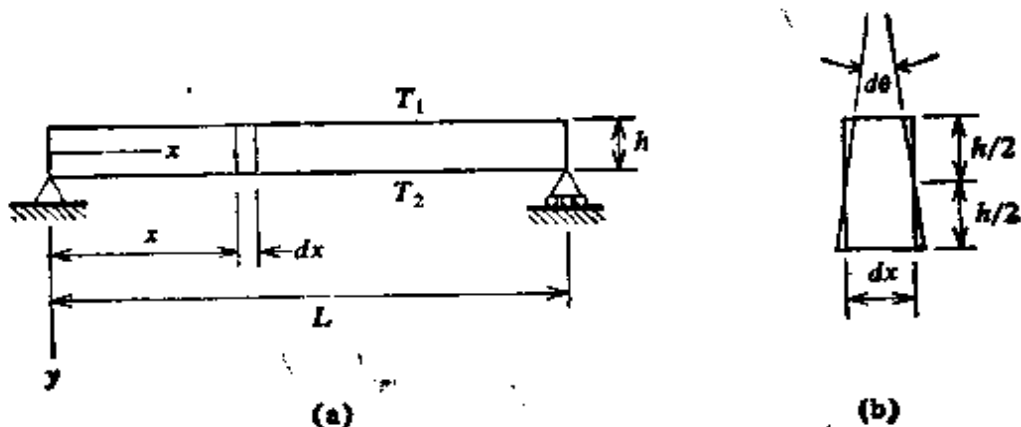


图 6-24. 梁中的热效应。

\*  $\alpha$  的数值表已在第 1.7 节中给出。

和梁顶之间的温度差  $\Delta T = T_2 - T_1$  使梁轴产生一个曲率, 这意味着梁产生了横向挠度。

为了研究横向挠度, 我们可研究长为  $\Delta x$  的微段的变形(图 6-24b)。该微段底面和顶面长度的变化分别为  $\alpha(T_2 - T_0)dx$  和  $\alpha(T_1 - T_0)dx$ 。如果  $T_2$  大于  $T_1$ , 那么该微段两侧也将彼此相对地旋转  $d\theta$  角, 如图 6-24b 所示。由图中的几何关系得知,  $d\theta$  角依照下列方程与尺寸的变化相联系:

$$h d\theta = \alpha(T_2 - T_0)dx - \alpha(T_1 - T_0)dx$$

或

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \quad (6-41)$$

式中  $h$  为梁的高度。我们已经知道, 量  $d\theta/dx$  代表梁挠曲线的曲率(见方程 6-4), 因此, 我们得出了下列挠曲线微分方程:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \quad (6-42)$$

该方程须加负号, 以保持前面所采用的符号约定, 注意, 当  $T_2$  大于  $T_1$  时, 曲率为负。  $\alpha(T_2 - T_1)/h$  这个量是前面挠曲线微分方程中出现的  $M/EI$  的对应项。

既然我们已经建立了在梁顶和梁底之间受到温度变化时的基本微分方程(6-42), 我们就可以使用对弯矩效应叙述过的相同方法求解此方程。也就是说, 我们可以逐次积分方程得到  $dv/dx$  和  $v$ , 而后使用边界条件计算积分常数。另外, 也可以应用力矩-面积定理, 在这些定理中, 需要用  $\alpha(T_2 - T_1)/h$  代替  $M/EI$ 。习题 6.10-1 至 6.10-3 可用这些方法中的任何一个求解。

## 6.11 剪切变形的效应

在本章的上述部分中, 当求挠度时只考虑了弯曲变形的影响。剪切变形会产生附加挠度, 对一根矩形截面梁而言, 剪切变形使梁长为  $dx$  的微段发生变形如图 6-25a 所示。由于剪应力沿梁高变化, 所以横截面将变为曲面。图中仅表示由于剪切引起的变形, 因而弯曲变形和作用在微段上的弯矩均从简图中略去,  $mn$  线代表梁的原来轴线, 假设它是水平的, 而  $mp$  线表示在剪切

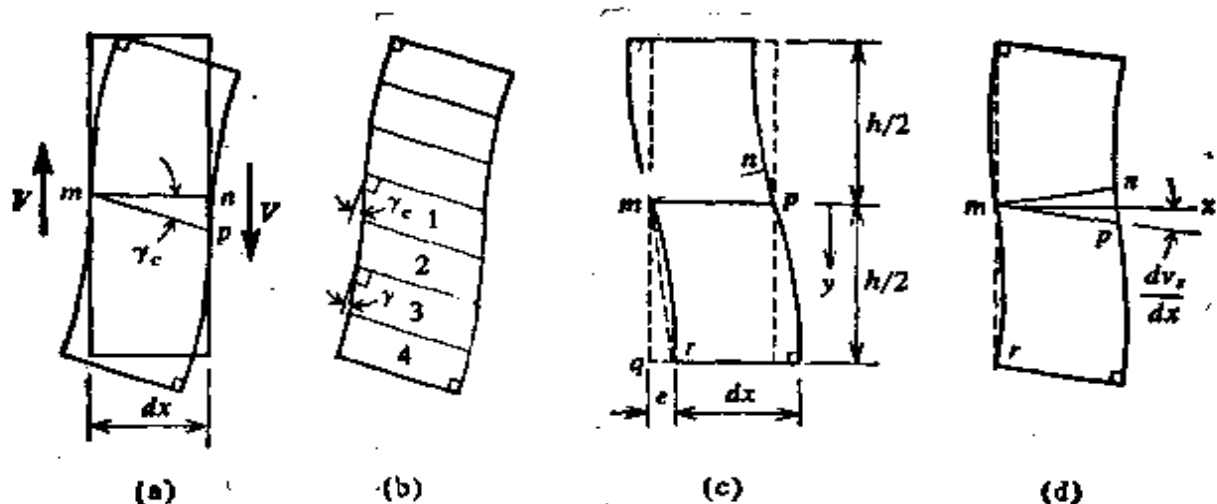


图 6-25 梁的剪切变形。

变形发生之后此轴线的位置。如果在  $m$  和  $n$  两点处，假设微段的两侧边仍为竖直，那么梁顶及梁底的边缘将平行于与水平线成  $\gamma_c$  角的  $mp$  线 ( $\gamma_c$  为中性轴处的剪应变)。如果将微段分成许多薄层，每层均假设处于纯剪状态，那么该微段的变形便可容易地想象出来 (图 6-25b)。薄层 1 的剪应变为  $\gamma_c$ ，而薄层 2 和 3 的剪应变将小于  $\gamma_c$ 。在最外的薄层 4，剪应变必为零，因此该层的各边成直角。

仅由剪切作用所引起的梁挠曲线的斜率近似地等于中性轴处的剪应变 (见图 6-25a)。于是，若用  $v_s$  代表仅由剪切作用所引起的挠度，我们便得到斜率的下列表达式：

$$\frac{dv_s}{dx} = \gamma_c = \frac{\alpha_s V}{GA} \quad (6-43)$$

式中  $V/A$  为剪力除以梁的横截面积所得的平均剪应力， $\alpha_s$  为一数值因子 (或剪切系数)，用它与平均剪应力相乘得到横截面形心处的剪应力，而  $G$  为剪切弹性模量。对于矩形截面  $\alpha_s = 3/2$  (见方程 5-20)，对于圆形截面  $\alpha_s = 4/3$  (见方程 5-23)，对于 I 字形截面  $\alpha_s$  近似等于  $A/A_w$ ，其中  $A_w$  为梁的腹板面积。量  $GA/\alpha_s$  被称为梁的剪切刚度\*。

当梁上作用连续分布的载荷  $q$  时，剪力  $V$  为一连续函数，可将此函数对  $x$  进行微分。于是仅由剪力引起的曲率为

$$\frac{d^2v_s}{dx^2} = \frac{\alpha_s}{GA} \frac{dV}{dx} = -\frac{\alpha_s q}{GA} \quad (a)$$

梁的总挠度  $v$  为按照本章前面各节叙述的方法所求的弯曲挠度  $v_b$  和剪切挠度  $v_s$  之和。于是  $v = v_b + v_s$ 。因此，总曲率为

\* 用虚功方法确定的梁的剪切刚度为  $GA/f_s$ ，其中  $f_s$  (称为剪切型式因子) 可能与剪切系数  $\alpha_s$  不同，见第 11.4 节。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v_b}{dx^2} + \frac{d^2v_s}{dx^2} = -\frac{M}{EI} - \frac{\alpha q}{GA} \quad (6-44)$$

连续进行积分即可求解这一方程, 以确定在必须计及剪切影响的情况下梁的挠度。

梁的端部条件可用来计算求解方程(6-44)时所出现的积分常数之值。例如, 在简支处, 挠度为零( $v=v_b=v_s=0$ )。在固支处, 挠度也为零, 而斜率的条件则取决于梁端的夹持情况。如果在中性轴处的微元体侧边保持竖直(如图 6-25a), 那么斜率的条件为

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = \gamma_0 \quad (b)$$

因为, 在此情况下, 梁轴在支承处由于弯曲变形引起的斜率为零, 而由于剪切变形引起的斜率为  $\gamma_0$ 。如果梁端部是以总挠曲线斜率为零这种方式被约束住, 那么其条件为

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = 0 \quad (c)$$

而梁端的取向如图 6-25c 所示,  $mp$  线为水平方向。

另一种可能性是梁顶和梁底保持在一条竖直线上(图 6-25d)。在此情况下,  $mn$  线及  $mp$  线两者均不保持水平。其斜率  $dv_s/dx$  可由图 6-25c 中的微段顺时针旋转到  $mr$  线成竖直时得出。旋转角为  $qmr$ , 等于  $e$  除以  $h/2$ 。可以看出, 距离  $e$  为

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy \quad (d)$$

其中  $\gamma$  为距中性轴为  $y$  处(图 6-25c)的剪应变(图 6-25b)。此种情况的边界条件现可陈述如下:

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{2e}{h} \quad (e)$$

对任一特定形状的横截面, 均可计算由方程(d)给出的  $e$  值。对宽度为  $b$  的矩形横截面梁, 我们有

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy = \frac{1}{G} \int_0^{h/2} \tau dy = \frac{1}{bG} \int_0^{h/2} \tau b dy = \frac{V}{2bG} \quad (f)$$

且条件(e)变为

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA} \quad (g)$$

其中  $A=bh$  为横截面面积。对于 I 字梁, 腹板几乎承担全部的剪力, 且沿整个腹板高度剪应力接近均匀, 于是我们有

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy = \frac{1}{G} \int_0^{h/2} \tau dy = \frac{1}{t_w G} \int_0^{h/2} \tau t_w dy \approx \frac{V}{2t_w G} \quad (h)$$



其条件变为

$$\frac{dv_s}{dx} = 0 \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA_w} \quad (i)$$

其中  $A_w \approx ht_w$  为梁的腹板面积。

为说明剪切挠度的计算, 让我们以一根承受均布载荷  $q$  的简支梁(见图 6-2)作为第一个例子。该梁的曲率方程变为(见方程 6-44):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q}{2EI}(xL - x^2) - \frac{\alpha_s q}{GA}$$

该式经两次积分后给出挠度  $v$ :

$$v = \frac{q}{24EI}(x^4 - 2x^3L) - \frac{\alpha_s q}{2GA}x^2 + C_1x + C_2$$

在梁端( $x=0$  及  $x=L$ ), 挠度  $v$  为零, 此条件给出  $C_1$  和  $C_2$  的下列表达式:

$$C_1 = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{\alpha_s qL}{2GA} \quad C_2 = 0$$

因此, 梁的挠曲线为

$$v = \frac{qL^4}{24EI} \left(\frac{x}{L}\right) \left(\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^2}{L^2} + 1\right) + \frac{\alpha_s qL^2}{2GA} \left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (6-45)$$

该方程右边有两项: 第一项为由弯矩产生的挠度(试与方程 6-12 比较), 而第二项给出由剪切变形所引起的附加挠度。

在梁中点处( $x=L/2$ ), 挠度为

$$v_o = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{\alpha_s qL^2}{8GA} = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + \frac{48\alpha_s EI}{5GA L^2}\right) \quad (6-46)$$

考察方程中的最后一项, 就可对剪切影响的相对重要性进行判断。如果略去剪切变形, 其效果恰似我们假设梁的剪切刚度为无限大( $GA/\alpha_s = \infty$ )的情况, 于是上述方程的最后一项变为零, 只余下弯曲挠度。当包括剪切影响并保留最后一项时, 我们发现挠度增大了。对于实心梁, 如矩形横截面梁, 最后一项的值与单位 1 相比是很小的, 但是, 对于其他梁, 如夹层梁, 它可能相当大。

为了求得一些数字结果, 研究一根高为  $h$  的矩形截面梁(于是  $\alpha_s = 1.5$ ,  $I/A = h^2/12$ ), 且  $E/G = 2.5$ 。在此情况下的中点挠度为

$$v_o = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + 3\frac{h^2}{L^2}\right) \quad (6-47)$$

可以看出, 当  $L/h = 10$  时, 剪切变形的影响将使挠度增加 3%。对于较小的  $L/h$  比值, 亦即对于短而深的梁, 其影响增大。对于 I 字梁, 其影响与矩形梁相似, 只是剪切挠度的相对值通常要大二或三倍。对于夹层结构梁, 由于剪切而引起的挠度增加, 可能高达 50%。

以上求解剪切挠度时所使用的微分方程是根据以下假设导出的, 即梁的每一横截面均能自由翘曲, 如图 6-25a 所示。均匀受载的简支梁, 属于近似

满足此种假设的情况。在梁的中点处，横截面不可能有翘曲（由于对称）。另外因为在中点处  $V=0$ ，所以该截面就不存在翘曲的趋势。从梁的中点到端部，翘曲逐渐增大，如同剪力从中点到端部增大一样。于是，由翘曲提供的阻止其挠度的附加约束仅有比较小的影响，然而可以看出，约束翘曲的这种效应减少了以上所计算的挠度。

对于承受均布载荷的矩形截面简支梁，其挠曲线已经用弹性理论方法确定（参考文献 6-14）。当泊松比  $\nu=0.25$  时，求出中点处的挠度为

$$v_0 = \frac{5qL^4}{384EI} \left( 1 + 2.2 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (6-48)$$

此式给出的挠度略小于由方程(6-47)所求得的挠度。上述结果中的第二项不仅计及了剪切影响，也计及了竖直方向的应力  $\sigma_y$ （由作用在梁顶的均布载荷  $q$  所产生）的影响。

我们要研究的第二个例子是一根在中点处承受集中载荷  $P$  的简支梁。在梁的左半部，弯矩、剪力和载荷集度的表达式分别为： $M = Px/2$ ， $V = P/2$ ，及  $q=0$ 。因此，由于弯矩和剪力所产生的曲率方程变为

$$\frac{d^2v_b}{dx^2} = -\frac{Px}{2EI} \quad \frac{d^2v_s}{dx^2} = 0 \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$$

这两个方程必须分开进行积分，而不能像第一个例子那样合并在一起进行积分，因为与弯曲挠度有关的斜率边界条件和与剪切挠度有关的斜率边界条件在梁中点处是不同的。应用  $x=L/2$ ， $dv_b/dx=0$  及  $x=0$ ， $v_s=0$  作为边界条件，连续两次积分  $v_b$  的微分方程，给出弯曲挠度：

$$v_b = \frac{PL^3}{48EI} \left( \frac{x}{L} \right) \left( 3 - 4 \frac{x^2}{L^2} \right) \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$$

积分  $v_s$  的微分方程给出

$$\frac{dv_s}{dx} = C_1$$

该式表明，由于剪切而产生的斜率沿整个梁的左半部为一常数。如方程(6-43)所给出的一样，此斜率等于  $\alpha_s V/GA$ 。结合  $x=0$  时， $v_s=0$  的条件的第二次积分得出仅由剪切作用而产生的挠度方程：

$$v_s = \frac{\alpha_s Px}{2GA} \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$$

总挠度（对于  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ ）为

$$v = v_b + v_s = \frac{PL^3}{48EI} \left( \frac{x}{L} \right) \left( 3 - 4 \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{\alpha_s Px}{2GA} \quad (6-49)$$

而在梁的中点处，我们有

$$v_0 = \frac{PL^3}{48EI} \left( 1 + \frac{12\alpha_s EI}{GAL^2} \right) \quad (6-50)$$

剪切变形在每种特定情况下的相对重要性又可通过计算括号中最末项的数值来定。

由解微分方程求得的上述解答(方程 6-49)给出过大的挠度,正如前面已指出的那样,这是因为略去了翘曲的影响。由对称性我们知道,梁中点处的平面必然保持平面,那里不可能出现翘曲。然而,中点左侧和右侧的相邻截面上分别承受  $P/2$  和  $-P/2$  的剪力,这些截面应当发生翘曲。因为它们倾向于向相反的方向翘曲,但又受到约束而不能翘曲,这就必将产生附加的应力。附加的翘曲约束将力图阻碍梁的挠度,因此,实际的剪切挠度将小于上面所确定的挠度。

对于  $E/G=2.5$  的矩形截面梁,由方程(6-50)给出的中点挠度为

$$v_o = \frac{PL^3}{48EI} \left( 1 + 3.75 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (6-51)$$

可将它与下述更精确的结果进行比较,该精确解是在  $\nu=0.25$  和  $E/G=2.5$  时根据弹性理论(参考文献 6-15)得出的:

$$v_o = \frac{PL^3}{48EI} \left( 1 + 2.78 \frac{h^2}{L^2} - 0.84 \frac{h^3}{L^3} \right) \quad (6-52)$$

后一方程给出的挠度比方程(6-51)所给的要小,因为它计及了载荷作用处的梁中点附近的局部应力。

要研究的第三个例子是一根左端固定并在自由端承受集中载荷  $P$  的悬臂梁(见图 6-6)。前面已经求出了弯曲挠度  $v_o$ (见第 6.4 节例题 1),在此只有剪切挠度  $v_s$  要加以讨论。因为剪力为常数,所以由于剪切而引起的梁的斜率  $dv_s/dx$  也是常数。该斜率值取决于梁左端如何支承。如果在中性轴处微段的侧边保持竖直,并且梁端自由翘曲(见图 6-25a),那么斜率为

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{\alpha_s P}{GA}$$

而剪切挠度为

$$v_s = \frac{\alpha_s P}{GA} x \quad (j)$$

如果支座处的挠曲线保持水平,并且端部横截面如图 6-25c 所示的那样翘曲,那么  $dv_s/dx=0$ ,且没有剪切挠度  $v_s$ 。最后,如果梁的上、下边缘在支持点处沿竖直方向仍保持平齐,且梁如图 6-25d 所示的那样发生翘曲,那么由于剪切而产生的斜率为

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{2e}{h}$$

仅由剪切而产生的挠曲线为

$$v_s = \frac{2e}{h} x \quad (k)$$

将  $x=L$  代入上述  $v_s$  的方程, 并把它加到由于弯曲作用而在自由端产生的挠度  $PL^3/3EI$  上, 即求出悬臂梁在自由端部的总挠度。

上边给出的在中点处承受集中载荷的简支梁公式中(见方程 6-52), 用  $2P$  代替  $P$  和用  $2L$  代替  $L$ , 即可得出根据弹性理论方法求出的悬臂梁端部的挠度。所得挠度对于在固定端处翘曲受阻, 亦即端部横截面仍保持平面的悬臂梁才是正确的\*。

在以上全部推导中, 我们使用了剪切系数  $\alpha_s$ , 它定义为中性轴处的剪应力(或剪应变)与横截面上的平均剪应力(或剪应变)之比。以此方式确定的  $\alpha_s$  用来计算剪切刚度  $GA/\alpha_s$ 。然而, 剪切刚度更为精确的确定已经用弹性理论完成。下列  $\alpha_s$  公式取自参考文献 6-17, 该文献还包括了关于剪切系数的文献目录。对于实心矩形横截面和实心圆形横截面, 其系数分别为

$$\alpha_s = \frac{12+11\nu}{10(1+\nu)} \quad \alpha_s = \frac{7+6\nu}{6(1+\nu)} \quad (6-53a, b)$$

对  $\nu=0.3$ , 我们分别由此方程得出矩形和圆形的  $\alpha_s=1.18$  和  $\alpha_s=1.13$ 。在上边所导出的剪切挠度方程中应用这些新的值(以代替  $3/2$  和  $4/3$  值), 我们得到那些挠度的较小值。自然, 必须牢记, 对于静挠度问题, 计算剪切挠度时不应要求很高的精确度, 因为它只占总挠度的百分之几。

确定梁的剪切挠度的另一个方法是建立在虚功原理基础上的单位载荷法(见第 11.4 节)。此法对于矩形梁的剪切挠度所给出的结果通常略小于应用剪切系数  $3/2$  的微分方程的解, 但很接近于应用  $\alpha_s=1.18$  所得的结果。关于用单位载荷法所得的梁剪切挠度的讨论在第 11.4 节中给出, 而各种受载情况下梁剪切挠度的公式表在参考文献 6-18 中给出。

在求夹层梁的挠度时(见第 5.8 节), 通常需要计及剪切变形的影响, 因为夹芯材料的剪切模量  $G_c$  很小, 因此剪切刚度也很小。本节已叙述过的方法可用来计算这类梁的挠度。梁的弯曲刚度  $EI$  代以  $E_f I_f$ , 其中  $E_f$  为面板的弹性模量,  $I_f$  为其惯性矩(见方程 5-37)。剪切刚度  $GA/\alpha_s$  变为  $G_c A_c$ , 因为我们可以假设剪应力沿整个夹芯面积  $A_c$  均匀分布, 所以, 剪切系数  $\alpha_s$  变为 1。在实际应用时, 由于夹层梁所用的材料种类繁多, 通常发生的情况是弯曲刚度和剪切刚度因缺乏准确的数据而不能计算求得。在此情况下, 必须针对所使用的特定材料和结构类型用实验来确定刚度。

**剪切应变能** 由于剪力  $V$  的影响而储存在梁微段中的应变能表达式可以容易地求得。由图 6-25a 我们看出, 剪力所作之功等于储存在微段中的应变能  $dU_s$ 。它为

\* 剪切对梁挠曲公式的影响是由蓬斯莱提出的(参考文献 6-16)。

$$dU_s = \frac{V \gamma_c dx}{2}$$

应用方程(6-43), 可将该表达式改写为

$$dU_s = \frac{\alpha_s V^2 dx}{2GA}$$

于是, 单独由于剪切影响在梁中所储存的总应变能为

$$U_s = \int \frac{\alpha_s V^2 dx}{2GA} \quad (6-54)$$

剪切应变能可与弯曲应变能(方程 6-34)相加得出总应变能。自然, 在大多数情况下, 剪切应变能与弯曲应变能相比, 可以略而不计\*。

## 6.12 梁的大挠度

本章前面所确定的梁挠度是通过解近似微分方程  $EIv'' = -M$  得到的, 只要梁的斜率很小, 其结果是满意的。当斜率变得很大因而挠度也变得很大时, 必须使用精确的挠曲线微分方程。此方程基于梁的材料保持线弹性这一假设, 它为(见方程 6-1 和 6-2):

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -M \quad (6-55)$$

量  $d\theta/ds$  代表梁的曲率, 亦即  $\theta$  角(挠曲线的转角)对  $s$ (沿曲线本身量得的距离)的变化率。当转动很小时, 距离  $s$  变得与距离  $x$  相同, 而转角  $\theta$  变得与斜率  $dv/dx$  相同。因此,  $d\theta/ds$  可用  $d^2v/dx^2$  逼近。然而, 对于大挠度, 这种简化是不成立的, 必须解方程(6-55)。由此方程求出的弹性曲线的精确形状称为柔软弹性线。

对于许多不同类型的梁和载荷情况, 已经得到了柔软弹性线问题的数学解。因为这些解法很冗长, 不宜在此处列出。而我们将仅就一个有实用意义的例子给出最后结果, 同时给出参考文献, 指明在那里可以找到其他的解答。\*\*

\* 用虚功方法导出的梁的剪切应变能表达式与方程(6-54)相似, 只是剪切系数  $\alpha_s$  要用型式因子  $f_s$  代替, 见方程(11-17)。

\*\* 柔软弹性线问题首先由雅各布·伯努利, 欧拉, 拉格朗日(Lagrange), 和普拉纳(Plana)研究过(参考文献 6-19 至 6-24)。柔软弹性线问题的解可在参考文献 6-25 至 6-28 查到。有关梁大挠度最完整的参考文献是 R. 弗里希-费伊(Frisch-Fay)的书(参考文献 6-28), 该书又包括许多参考资料, 另一个文献目录可在文献 6-29 中查到。

让我们研究图 6-26 所示的悬臂梁  $AB$ 。假设载荷  $P$  使梁产生大挠度，结果梁的末端从  $B$  点移到  $B'$  点。梁端的转角以  $\theta_0$  表示，而水平位移和垂直位移分别为  $\delta_h$  和  $\delta_v$ 。挠曲线的长度  $AB'$  等于其初始长度  $L$ ，因为略去了由于法向拉力而引起的轴向长度变化。因该梁是静定的，其弯矩  $M$  的表达式可以容易地求得，并代入方程 (6-55)。于是该方程经过大量换算，其中包括对因变量的变换，又应用了适当的边界条件之后，可得出用椭圆函数形式表达的方程的解\*。根据这个解可得出求  $\theta_0$ 、 $\delta_v$  以及  $\delta_h$  的方程。特别用于求解角  $\theta_0$  的超越方程如下：

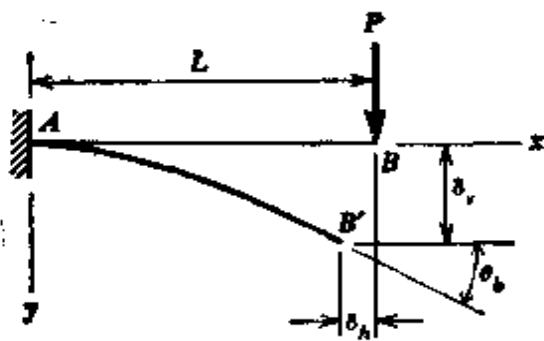


图 6-26. 悬臂梁的大挠度。

示，而水平位移和垂直位移分别为  $\delta_h$  和  $\delta_v$ 。挠曲线的长度  $AB'$  等于其初始长度  $L$ ，因为略去了由于法向拉力而引起的轴向长度变化。因该梁是静定的，其弯矩  $M$  的表达式可以容易地求得，并代入方程 (6-55)。于是该方程经过大量换算，其中包括对因变量的

变换，又应用了适当的边界条件之后，可得出用椭圆函数形式表达的方程的解\*。根据这个解可得出求  $\theta_0$ 、 $\delta_v$  以及  $\delta_h$  的方程。特别用于求解角  $\theta_0$  的超越方程如下：

$$F(k) - F(k, \phi) = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \quad (6-56)$$

此方程中各项具有如下定义：

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin \theta_0}{2}} \quad (a)$$

$$\phi = \arcsin \frac{1}{k\sqrt{2}} \quad (b)$$

$F(k)$  = 第一类完全椭圆积分

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (c)$$

$F(k, \phi)$  = 第一类椭圆积分

$$= \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (d)$$

对于自变量  $k$  和  $\phi$  的不同数值，椭圆积分  $F(k)$  和  $F(k, \phi)$  的数值已在许多手册中列成表格\*\*。

因为方程 (6-56) 的超越性质，所以必须用试凑法求解以得出

\* 椭圆函数在高等数学教科书中详细的讨论，例见参考文献 6-30。

\*\* 例如见参考文献 6-31 至 6-33。

$\theta_0$ . 其步骤如下: (1) 假设一个在  $0^\circ$  和  $90^\circ$  之间的  $\theta_0$  值; (2) 根据方程(a)计算  $k$ ; (3) 由椭圆函数表查得相应的  $F(k)$  值; (4) 根据方程式(b)计算  $\phi$ ; (5) 已知  $k$  和  $\phi$ , 由表查得  $F(k, \phi)$  的值; (6) 根据方程(6-56)计算载荷  $P$ . 这一过程将给出此一特定假设之  $\theta_0$  值所对应的载荷  $P$ . 对  $\theta_0$  的其他假设值重复这一计算, 我们就可以确定许多我们想要的  $\theta_0$  和  $P$  的对应值. 用这种方式确定的数值清单表示在表 6-1 中\*. 注意, 对于很小的载荷值, 根据方程  $\theta_0 = PL^2/2EI$  求出的转角是非常精确的.

表 6-1 悬臂梁承受集中载荷时的转角和挠度(见图 6-26)

$\frac{PL^2}{EI}$	$\frac{\theta_0}{\pi/2}$	$\frac{\delta_v}{L}$	$\frac{\delta_s}{L}$
0	0	0	0
0.25	0.079	0.083	0.004
0.50	0.156	0.162	0.016
0.75	0.228	0.235	0.034
1	0.294	0.302	0.056
2	0.498	0.494	0.160
3	0.628	0.603	0.255
4	0.714	0.670	0.329
5	0.774	0.714	0.388
6	0.817	0.744	0.434
7	0.849	0.767	0.472
8	0.874	0.785	0.504
9	0.894	0.799	0.531
10	0.911	0.811	0.555
$\infty$	1	1	1

悬臂梁端点处的竖直挠度方程为

$$\frac{\delta_v}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EI}{PL^2}} [E(k) - E(k, \phi)] \quad (6-57)$$

其中

$$E(k) = \text{第二类完全椭圆积分} \\ = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (e)$$

\* 表 6-1 所给的值是由罗扬(Rojahn)计算的(参考文献 6-34).

$E(k, \phi) =$  第二类椭圆积分

$$= \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (f)$$

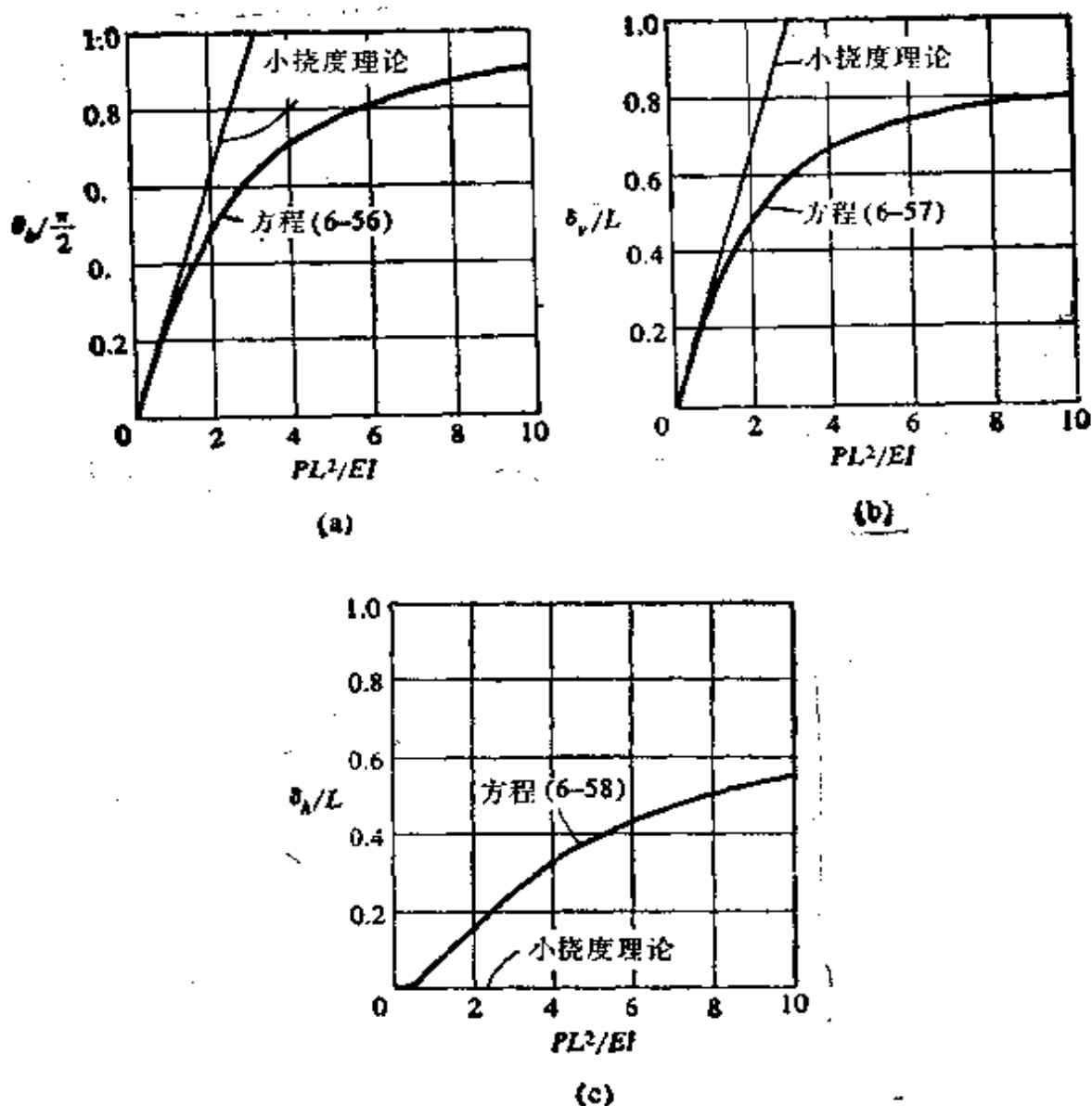


图 6-27. 图 6-26 所示悬臂梁的变位: (a) 转角  $\theta_v$ ; (b) 竖直挠度  $\delta_v$ ;  
(c) 水平挠度  $\delta_h$ .

使用解方程 (6-56) 已得到的  $\theta_v$ ,  $k$ ,  $\phi$  和  $PL^2/EI$  值, 可容易地求解方程 (6-57). 唯一要增加的步骤是根据椭圆积分表来确定  $E(k)$  和  $E(k, \phi)$ , 然后将这些值直接代入方程 (6-57). 表 6-1 给出某些最终的结果.

最后, 由下列方程可求得水平挠度:



$$\frac{\delta_b}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EI \sin \theta_b}{PL^2}} \quad (6-58)$$

此种情况的结果, 示于表 6-1 最末一列。转角  $\theta_b$  和挠度  $\delta_a$  及  $\delta_b$  也可用图线示于图 6-27a, b 及 c 中。在每一种情况下, 当载荷趋近于零时, 大挠度结果与用小挠度理论所得结果完全吻合。

端点受到竖直载荷的悬臂梁(图 6-26)的完整解在参考文献 6-28, 6-35 和 6-36 中给出, 受到均布载荷的悬臂梁的挠度在参考文献 6-37 中给出。悬臂梁的解答可以适用于对称受载的简支梁, 方法是把简支梁的一半视为和悬臂梁一样。大挠度的其他许多情况在参考文献 6-28 中描述。

在梁被端部力偶和端部力弯曲的一般三维情况下, 柔软弹性线的微分方程与一重物绕一固定点运动的微分方程具有相同的形式。这种比拟是 G. B. 基尔霍夫(Kirchhoff)在 1859 年观察到的, 并称为基尔霍夫动力比拟(参考文献 6-38)。在杆端处只有轴向力的特殊情况下, 柔软弹性线的微分方程变得与具有大转角的普通摆的微分方程相同。关于弹性系统与动力系统之间的基尔霍夫比拟的资料, 应查阅参考文献 6-39。

## 习 题

**6.2-1** 将承受均布载荷的简支梁的挠曲线方程(方程 6-12)进行逐次微分, 得到梁的弯矩  $M$ 、剪力  $V$  和载荷  $q$  的表达式(见方程 6-9), 并将它们与第 4.4 节方程(j)相比较, 证明所得表达式是正确的。

**6.2-2** 试计算承受均布载荷的简支梁的最大挠度  $\delta$ , 假设梁的跨长  $L=3\text{ m}$ ,  $q=6\text{ kN/m}$ , 梁中由于  $q$  作用而产生的最大正应力为  $7\text{ N/mm}^2$ , 梁为正方形截面, 是由弹性模量为  $E=10\text{ kN/mm}^2$  的木材构成的。

**6.2-3** 一承受均布载荷的宽翼缘简支钢梁, 其最大挠度为  $8\text{ mm}$ , 在端点处的最大斜率为  $0.01$  弧度。试计算梁的高度  $h$ , 假如最大正应力为  $120\text{ N/mm}^2$ , 假定  $E=200\text{ kN/mm}^2$ 。

**6.2-4** 一矩形截面的简支梁, 承受均布载荷的作用, 使梁在中心处产生了  $50\text{ mm}$  的挠度。该梁要用相同材料, 也是矩形截面的另一根来替换。而新梁的宽度只是原来梁宽的一半。试问新梁的高度  $h_2$  与原来梁的高度  $h_1$  之比是多少? 假设新梁在同样载荷下产生的挠度仅为  $12\text{ mm}$ 。

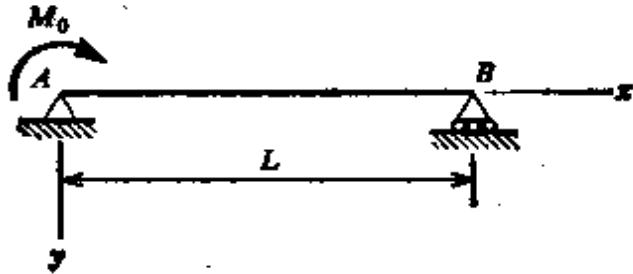
**6.2-5** 试求图 6-3 所示载荷  $P$  的位置, 假设两端转角的比值为  $\theta_a/\theta_b=3/4$ 。

**6.2-6** 试求图 6-3 所示梁的最大挠度与梁中点处挠度之比值, 假设

$a=L/3$ .

由对挠曲线微分方程进行积分, 解习题 6.2-7 至 6.2-10

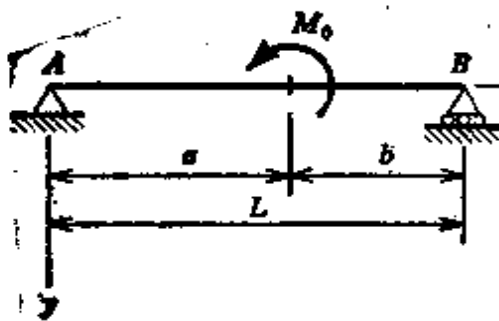
6.2-7 试导出简支梁在端部力偶  $M_0$  作用下的挠度曲线方程(见图). 试问梁的最大挠度是多少?



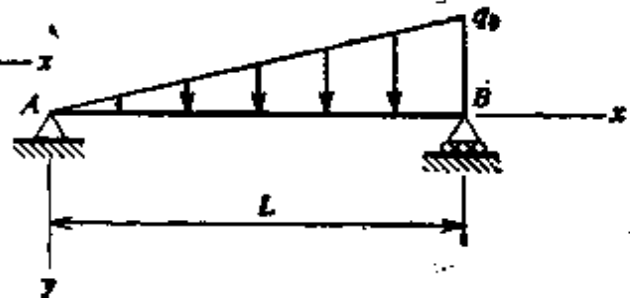
习题 6.2-7 图

6.2-8 试导出距左端为  $a$  处作用有力偶  $M_0$  的简支梁的挠曲线方程(见图).

6.2-9 试导出承受最大集度为  $q_0$  的三角形分布载荷的简支梁的挠曲线方程(见图). 从四阶微分方程(方程 6-9c)推导起.

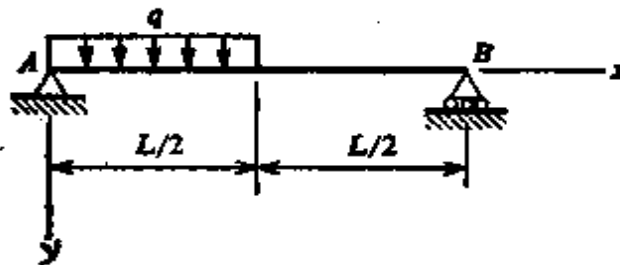


习题 6.2-8



习题 6.2-9

6.2-10 试导出左半跨承受均布载荷的简支梁的挠曲线方程(见图).



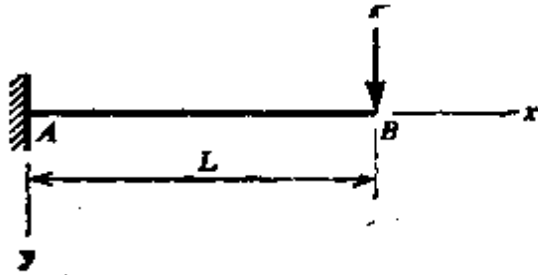
习题 6.2-10

6.3-1 一承受均布载荷的悬臂梁(图 6-4), 其自由端处的挠度等于  $\beta L$ , 这里  $\beta$  为一很小的数,  $L$  为梁的长度. 试问自由端处挠曲线的转角为多少?

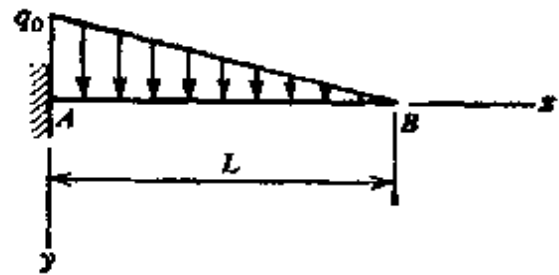
**6.3-2** 一承受均布载荷的悬臂梁(见图 6-4), 其高度  $h$  为跨长  $L$  的十分之一. 梁为钢制宽翼缘截面, 其  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ , 受拉和受压容许工作应力为  $140 \text{ N/mm}^2$ . 试计算当梁是满载时, 端点处的挠度与跨长之比  $\delta/L$ .

由对挠曲线微分方程进行积分, 解习题 6.3-3 至 6.3-6

**6.3-3** 试导出自由端处作用有集中载荷  $P$  的悬臂梁的挠曲线方程, 并确定自由端的挠度  $\delta$  和转角  $\theta_0$ .



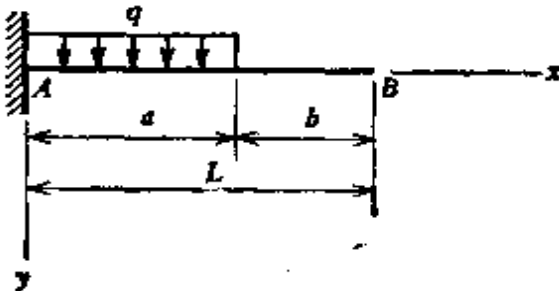
习题 6.3-3



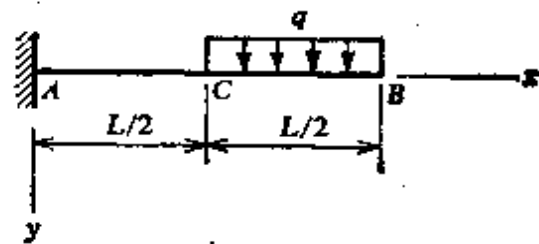
习题 6.3-4

**6.3-4** 一悬臂梁, 承受最大集度为  $q_0$  的三角形分布载荷, 如图所示. 试求出自由端处的挠度  $\delta$  和转角  $\theta_0$  的公式.

**6.3-5** 试求出悬臂梁在图示载荷作用下的挠曲线方程.



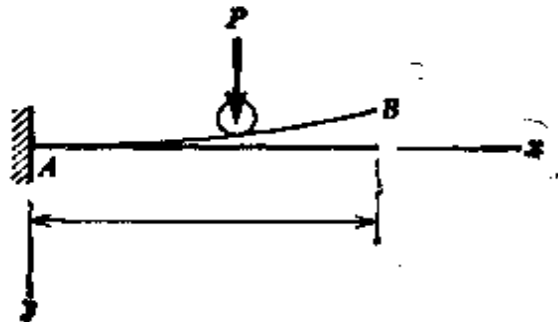
习题 6.3-5



习题 6.3-6

**6.3-6** 试确定悬臂梁在图示载荷作用下,  $B$  点和  $C$  点处的挠度.

**6.3-7** 试问加载前曲杆  $AB$ (见图)的轴线方程式必须是怎样的, 方能使得载荷  $P$  沿杆移动时, 杆总能保持在同一水平线上?



习题 6.3-7

### 用力矩-面积法解习题 6.4.1 至 6.4.8

**6.4-1** 一悬臂梁, 在其整个长度上作用有集度为  $q$  的均布载荷(见图 6-4). 试求自由端处的转角  $\theta_0$  和挠度  $\delta_0$ .

**6.4-2** 一悬臂梁, 其上作用有三角形分布载荷(见题 6.3-4 图). 试确定自由端处的转角  $\theta_0$  和挠度  $\delta$ .

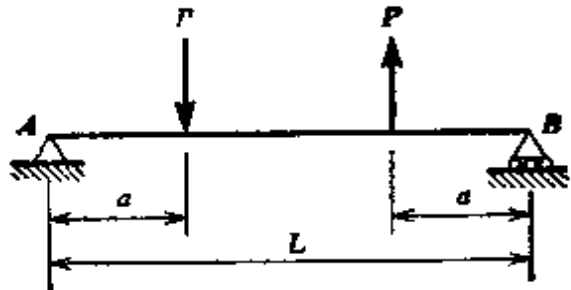
**6.4-3** 求解习题 6.3-6

**6.4-4** 试求承受图 6-2 所示均布载荷  $q$  的简支梁的转角  $\theta_0$  和中点处的挠度  $\delta$ .

**6.4-5** 试求一端作用有力偶  $M_0$  的简支梁的最大挠度  $\delta_{max}$ .

**6.4-6** 试确定图 5-1a 所示梁左支座处的转角  $\theta_0$  和梁中点处的最大挠度  $\delta_{max}$ .

**6.4-7** 图中所示简支梁, 其上作用有两个集中载荷, 一个方向向下, 另一个方向向上. 试求左端处的转角  $\theta_0$ , 方向向下载荷  $P$  作用处的挠度  $\delta_1$  和中点处的挠度  $\delta_2$ .



习题 6.4-7

**6.4-8** 一简支梁, 承受一三角形分布载荷(见习题 6.2-9 图). 试求左支座处的转角  $\theta_0$  和最大挠度  $\delta_{max}$ .

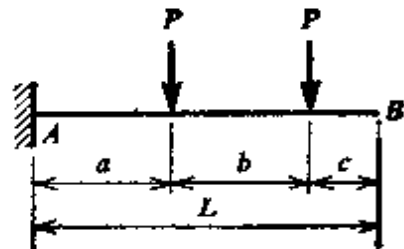
### 用叠加法解习题 6.5-1 至 6.5-15

**6.5-1** 试求图 6-9 所示悬臂梁中点处的挠度  $\delta$  和转角  $\theta$ , 假设  $a = 3L/4$ ,  $P = qL$ .

**6.5-2** 试求出图 6-13a 所示外伸梁左支座处的转角  $\theta_0$ .

**6.5-3** 一悬臂梁  $AB$ , 其上作用有两个集中载荷, 如图所示. 试求自由端的挠度  $\delta_0$ , 假设  $a = b = c = L/3$ .

**6.5-4** 一简支梁, 沿其跨度承受三个等间距的集中载荷. 第一个载荷距左支座为  $L/4$ , 第二个载荷位于中间, 第三个载荷距右支座为  $L/4$ . 假设每个载荷都等于  $P$ , 试求梁中点处的挠度.



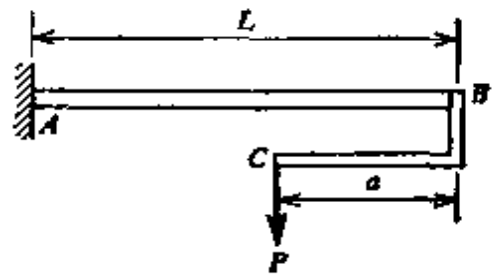
习题 6.5-3

**6.5-5** 一长为  $L$  的悬臂梁, 左端  $A$  为固支, 右端  $B$  自由. 在其自由端作用有向下的集中载荷  $P$  和逆时针方向的力偶  $M_0$ . (a) 试求使梁自由端的斜率为零时的  $M_0$  值(以  $P$  和  $L$  表示).

(b) 试问此时自由端处的挠度  $\delta$  是多少?

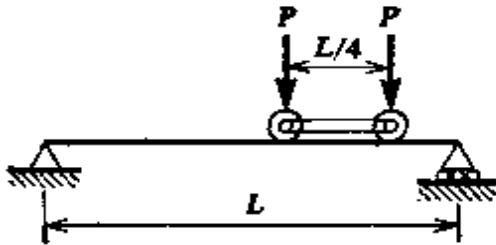
**6.5-6** 一悬臂梁  $AB$ , 如图所示, 在它的自由端装一托架  $BC$ , 力  $P$  作用于托架的端点处. 试求为使  $B$  点的竖直挠度为零时的比值  $a/L$ .

**6.5-7** 两根相同材料的棱柱形梁, 互为几何相似. 第二根梁的每个尺寸都是第一根梁的相应尺寸的  $n$  倍, 两根梁以相同的方式支承, 且其上的载荷仅是梁的自重. 试求第二根梁的挠度与第一根梁相应挠度之比值  $\delta_2/\delta_1$ .

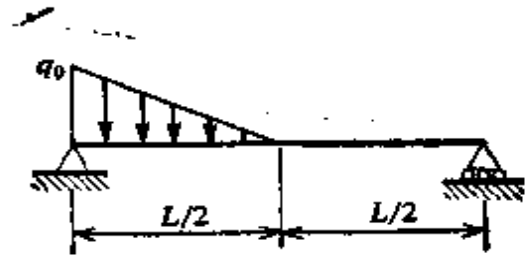


习题 6.5-6

**6.5-8** 两个相等的轮载, 相距  $L/4$ , 在长为  $L$  的简支梁上缓慢地移动(见图). 试确定梁中点处的最大挠度值.



习题 6.5-8

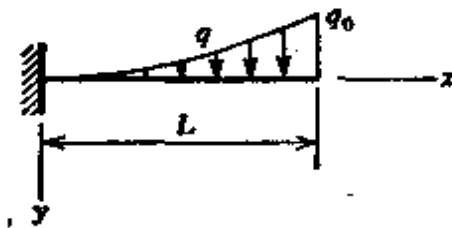


习题 6.5-9

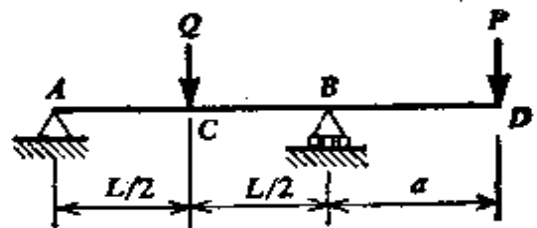
**6.5-9** 试求图示简支梁中点处的挠度  $\delta$ .

**6.5-10** 一悬臂梁, 承受按抛物线变化的载荷, 如图所示. 载荷集度的方程为  $q = q_0 x^2/L^2$ . 试问梁的最大斜率为多少?

**6.5-11** 一外伸梁, 承受两个集中载荷, 如图所示. 试求  $Q=0$  时,  $C$  点处和  $D$  点处的挠度.



习题 6.5-10



习题 6.5-11, 6.5-12 和 6.5-13

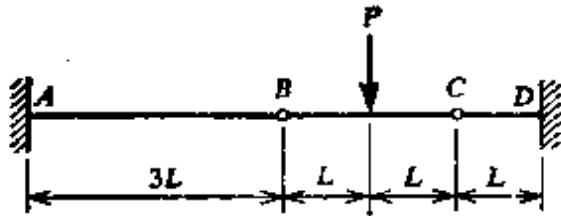
**6.5-12** 试求图中所示外伸梁在支座  $A$  处的转角  $\theta_a$ , 假设  $Q=2P$ ,  $a=L/2$ .

**6.5-13** 试求图示梁上使载荷  $P$  处的挠度为零时两载荷之比值  $P/Q$ .

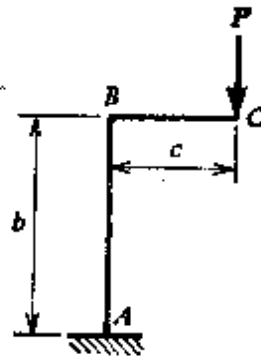
**6.5-14** 图中所示的梁在  $A$  处和  $D$  处为固支, 并由  $B$  处和  $C$  处销接

在一起的三个元件所组成, 试求载荷  $P$  处的挠度  $\delta$ 。

**6.5-15** 试求图示刚架  $ABC$  的  $C$  端处挠度的水平分量和竖直分量, 假设  $EI$  为常数, (略去轴向变形的影响, 仅考虑弯曲的影响)。



习题 6.5-14



习题 6.5-15

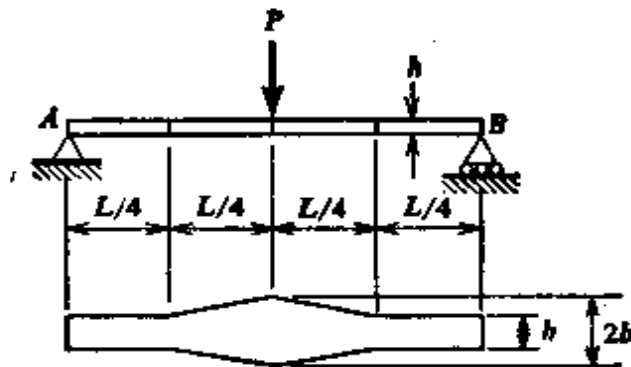
**6.6-1** 试由解挠曲线的微分方程求得图 6-15a 所示简支梁左半部分挠度  $v$  的方程。

**6.6-2** 试求图 6-17a 所示悬臂梁在自由端  $A$  处的转角  $\theta$ 。

**6.6-3** 参考图 6-15a 所示简支梁, 假设其两端区段内的惯性矩为  $I_1$ , 而中间区段内为  $I_2$ 。试求梁中点处的挠度  $\delta_0$ 。

**6.6-4** 假设图 6-17a 所示悬臂梁的左半段的惯性矩为  $I_1$ , 右半段的为  $I_2$ 。同时, 假设整个梁上作用有集度为  $q$  的均布载荷(而  $P=0$ )。试确定梁在自由端  $A$  处的挠度  $\delta_a$ 。

**6.6-5** 试确定图中所示简支梁  $AB$  在中点处的挠度  $\delta$ 。该梁高度  $h$  不变, 但其宽度变化如图中下部分所示。



习题 6.6-5

**6.6-6** 假设图 6-16 所示的锥形悬臂梁, 具有等宽度  $b$  的矩形截面, 梁的高度自  $A$  端的  $d_a$  至  $B$  端的  $d_b$  呈线性变化, 试求自由端处的挠度  $\delta_b$ 。假设  $d_a = 2d_b$ 。

**6.6-7** 假设图 6-16 所示的锥形悬臂梁, 具有等厚度为  $t$  的薄壁空心

圆截面,  $A$  端直径  $d_a$  为  $B$  端直径  $d_b$  的两倍. 试求梁在自由端处的挠度  $\delta$ .

用有限差分法解习题 6.7-1 至 6.7-8

**6.7-1** 试求图 6-19a 所示的简支梁中点处的挠度  $\delta$ , 将梁分成六个等长的区段, 并将所得结果和第 6.7 节例题 1 所得的结果进行比较.

**6.7-2** 一简支梁在中点处作用集中力  $P$ , 试确定其中点处的挠度  $\delta$ . 把梁分成四个相等的区段, 并假设  $EI$  为常数.

**6.7-3** 试求简支梁在集中载荷  $P$  作用处的挠度  $\delta$ . 假如载荷  $P$  作用于距梁左端  $L/4$  处. 将梁分成四个相等的区段, 并假设  $EI$  为常数.

**6.7-4** 试计算具有常数  $EI$  的悬臂梁在自由端处的挠度  $\delta$ . 假若梁在自由端处作用有集中载荷  $P$ . 沿梁使用三个相等的区段.

**6.7-5** 试求出承受集度为  $q$  的均布载荷悬臂梁自由端处的挠度  $\delta$ , 假设  $EI$  为常数, 并将梁分成四个相等的区段.

**6.7-6** 试确定承受三角形分布载荷的悬臂梁在自由端处的挠度  $\delta$ , (见习题 6.3-4). 假设  $EI$  为常数, 并将梁分成四个相等的区段.

**6.7-7** 试求图 6-15a 所示的非棱柱形简支梁中点处的挠度  $\delta$ , 沿梁使用六个等长的区段.

**6.7-8** 试确定图 6-16 所示的锥形悬臂梁自由端处的挠度  $\delta$ , 沿梁使用三个区段. 梁为等宽度  $b$  的矩形截面梁, 且  $A$  端处梁的高度  $d_a$  为  $B$  端处高度  $d_b$  的两倍.

**6.8-1** 试导出以梁的最大正应力  $\sigma_{\max}$  来表示的纯弯梁中所储存的应变能  $U$  的表达式(图 6-21a). 假设梁为矩形截面(宽为  $b$ 、高为  $h$ ). (将  $U$  表达为最大应力  $\sigma_{\max}$ 、弹性模量  $E$  和梁的尺寸的函数).

**6.8-2** 试确定长为  $L$ 、跨度中点处作用有集中载荷  $P$  的简支梁中所储存的应变能  $U$ . 根据此结果求出梁中点处的挠度  $\delta$ .

**6.8-3** 一长为  $L$  的简支梁, 按这样的方式受载: 梁的挠曲线由方程  $v = \delta \sin \frac{\pi x}{L}$  给出, 式中  $\delta$  为中点处的挠度. 试求梁中所储存的应变能  $U$ .

**6.8-4** 一简支梁长为  $L$ , 承受两个集中载荷, 如图 5-1a 所示. 假设  $a = L/4$ , 试求梁中所储存的应变能  $U$ . 并用此结果确定载荷之一作用处的挠度  $\delta$ .

**6.8-5** 两根矩形截面简支梁, 是由相同材料构成, 并具有相等的长度, 承受同样的载荷. 两根梁的宽度也相同, 但第一根梁的高度是第二根梁的两倍. 试求这两根梁中所储存的应变能之比值  $U_1:U_2$ .

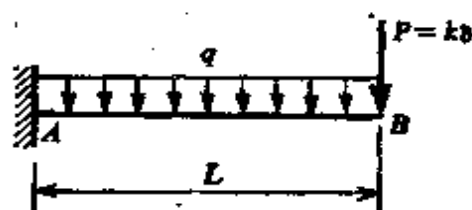
**6.8-6** 一长 2 m、截面为矩形(宽 120 mm、高 200 mm)的木制悬臂梁, 承受  $q = 3 \text{ kN/m}$  的均布载荷. 试确定梁中所储存的应变能, 假设  $E = 10$

$\text{kN/mm}^2$ .

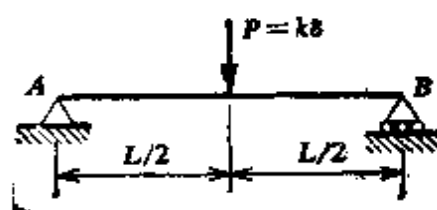
**6.8-7** 一重物  $W$  从高度  $h$  处下落到一简支梁上(见图 6-22)。该梁为具有长  $L$ 、截面面积  $A$  的矩形截面。假设高度  $h$  比起  $W$  所产生的梁的静挠度要大得多,试导出梁中最大正应力  $\sigma_{\max}$  的公式。

**6.8-8** 一重物  $W=500\text{ N}$ , 从高  $h=300\text{ mm}$  处下落到一长  $L=3\text{ m}$  的简支梁上(见图 6-22)。如果梁的容许正应力为  $\sigma_w=200\text{ N/mm}^2$ 。试从附录 C 表 C-2 中选择满意的、最轻的 I 字梁, 假设  $E=200\text{ kN/mm}^2$ 。

**6.9-1** 一悬臂梁承受着集度为  $q$  的均布载荷和一等于  $k\delta$  的集中载荷  $P$ , 这里  $k$  为一比例常数, 试确定梁在自由端  $B$  处的挠度  $\delta$ (见图)。又问梁在什么样的条件下是稳定的?



习题 6.9-1



习题 6.9-2

**6.9-2** 试求承受集中载荷  $P$  等于  $k\delta$  的简支梁  $AB$  中点处的总挠度  $\delta$ (见图)。假设梁中点处有初始挠度  $\delta_0$ 。并问梁在什么条件下是稳定的?

**6.9-3** 试求解在中点处作用有集中载荷  $P$  的简支梁的汇聚问题。

**6.10-1** 一长为  $L$ 、高为  $h$  的简支梁(见图 6-24a), 受到温度的变化, 使梁底面的温度为  $T_2$ , 梁顶面的温度为  $T_1$ 。试求该梁的挠曲线方程。

**6.10-2** 一长为  $L$ 、高为  $h$  的悬臂梁, 其上表面温度为  $T_1$ , 下表面温度为  $T_2$ 。试求由于温差  $T_2 - T_1$  而引起的梁在自由端处的挠度  $\delta$  和转角  $\theta$ 。

**6.10-3** 一长为  $L$ 、高为  $h$  的简支梁(见图 6-24a), 其上表面温度为  $T_1$ , 下表面温度为  $T_2$ , 温度  $T_1$  和  $T_2$  皆为  $x$  的函数, 即  $T_2 - T_1 = T_0 x$ , 式中  $T_0$  为一常数。试求梁的最大挠度。



## 第七章 静不定梁

### 7.1 静不定梁

本章我们将对反力数目大于静力平衡方程数目的梁进行分析。这样的梁被称为静不定梁，它们的分析需要考虑其挠度。在以前各章中，只研究了静定梁，且对每种情况下我们都可由解静力平衡方程立即求得梁的反力。已知反力，我们便可求得弯矩和剪力，接着就能求出应力和挠度。然而，若梁是静不定的，我们就不可能只靠静力学解出诸力，而必须考虑梁的挠度，并求得协调方程以补充静力方程。与此相同的方法已在第一章含有拉压元件的静不定问题中讨论过。

图 7-1 说明几种静不定梁。该图(a)中的梁在支承  $A$  被固定(或被嵌入)，而在  $B$  处简支，这样的梁称为支承悬臂梁或“固定-简支”梁。梁的反力由  $A$  处的水平反力和竖直反力， $A$  处的力偶以及  $B$  处的一个竖直反力所组成。因为梁只有三个独立的静力平衡方程，所以不可能用静力学计算所有这四个反力。超过平衡方程数目的反力数称为静不定度。因此，绘于图 7-1a 的梁为一度静不定。超出以静定方式支承结构所需数目的任何反力称为静余力，而这种多余力的数目必然与静不定度相同。例如，图 7-1a 所示的反力  $R_4$  可视为多余力。要注意，当把它从结构上移去时，就余下一根悬臂梁。当多余力被放松之后，所余下的静定结构称为放松结构或基本结构。研究图 7-1a 中梁的另一途径是将反力矩  $M_0$  视为多余力；如果移去它，放松结构则为一根在  $A$  处铰接支承而在  $B$  处滚动支承的简支梁。

如果梁上所有的载荷均为竖直的(图 7-1b)，那么就出现了一个特殊情况，此时水平反力为零。然而梁仍为一度静不定梁，因为现在梁有两个独立的静力平衡方程，但却有三个支反力。

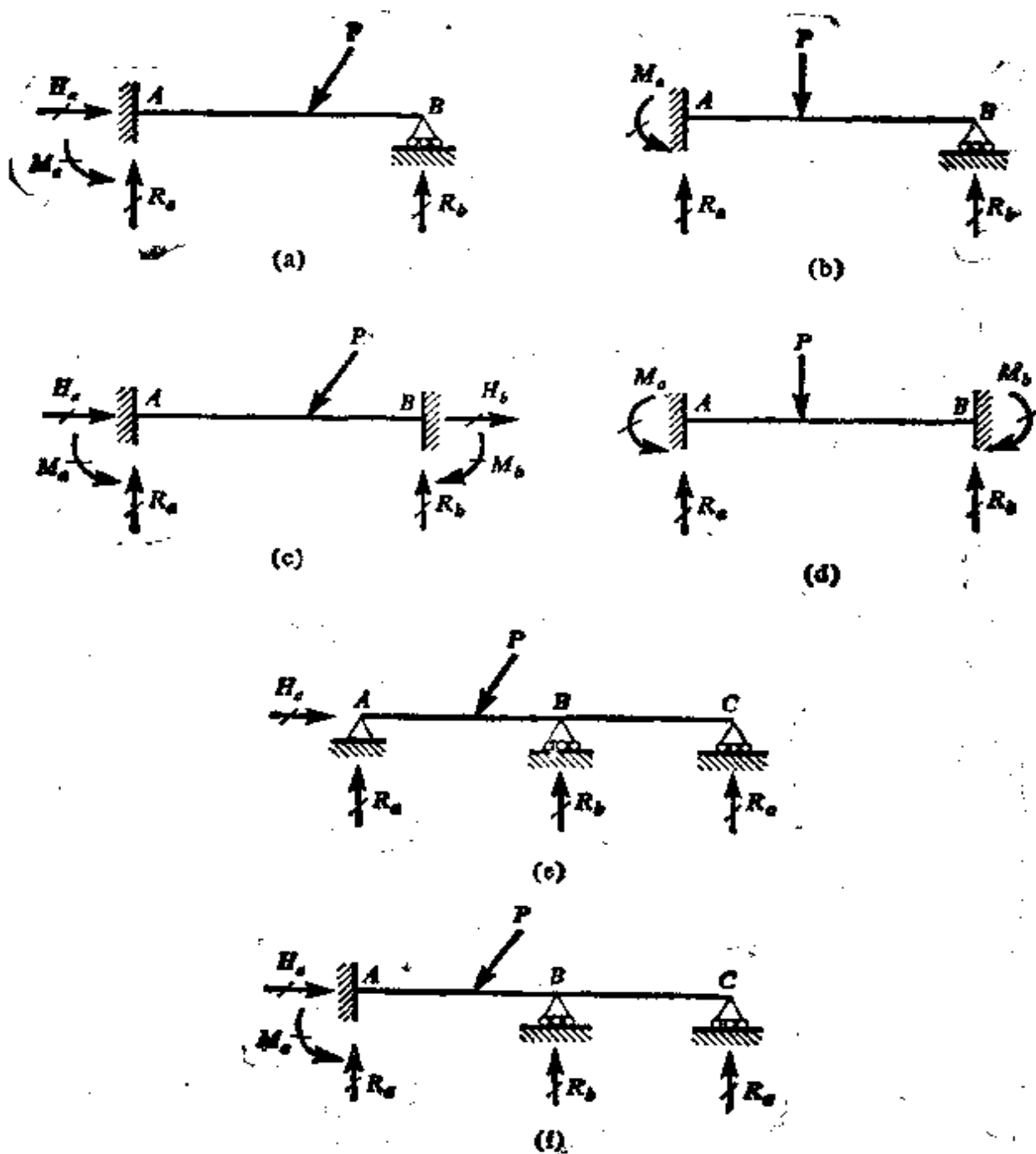


图 7-1. 静不定梁。

表示于图 7-1e 中的固定端梁，有时称为“固定-固定”梁。在每个支承处都有三个反力，因此该梁总共有六个未知反力。因为有三个平衡方程，所以该梁为三度静不定。如果我们把一端处的诸反力取为三个多余反力，并且将它们从结构上移去，余下的悬臂梁就是放松结构。如果我们移去两个固定端处的弯矩和一个水平反力，放松结构就是一根简支梁。

再研究仅有竖直载荷的特殊情况(图 7-1d), 我们发现现在只有四个反力需要确定. 静力平衡方程的数目为两个, 因此该梁为二度静不定.

图 7-1 中所示的其余两根梁, 是连续梁的例子, 之所以称为连续梁, 是因为它们多于一跨而且在支承处是连续的. 图 7-1e 所示的梁为一度静不定, 因为有四个反力, 而只有三个静力平衡方程. 如果选取  $R_b$  为多余力, 并且假想把它从梁上移去, 那么就留下一根静定的简支梁  $AO$ . 如果选取  $R_c$ , 放松结构将为一根具有外伸臂  $BO$  的简支梁  $AB$ . 图中所示的最后一根梁为两度静不定. 我们可以选取  $R_b$  和  $R_c$  为多余反力, 于是放松结构为一根悬臂梁.

在以下各节中, 我们将讨论分析静不定梁的各种方法. 在每种情况下, 其目的均为确定多余反力, 因为多余反力已知后, 其余的反力总可以由静力学求出. 在力已知后, 我们便可确定任一点的应力和挠度.

## 7.2 挠曲线的微分方程

静不定梁可由解挠曲线微分方程来分析. 其步骤基本上和静定梁的相同(见 6.1 节至 6.3 节), 包括建立微分方程, 得出其通解, 其次应用边界条件计算积分常数. 既可应用以弯矩表示的二阶方程(方程 6-9a), 也可以应用以剪力表示的三阶方程(方程 6-9b), 或者以横向载荷集度表示的四阶方程(方程 6-9c). 总会有足够的边界条件, 不仅可确定积分常数, 而且也可求出多余反力. 因为当有大量的积分常数需要求算时, 出现了计算上的困难, 所以此方法在实际上只用于相对简单的受载情况和单跨梁.

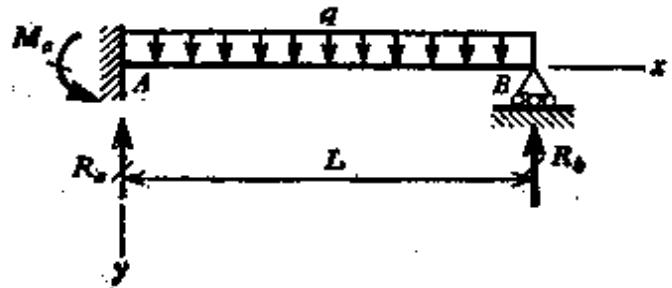


图 7-2. 支承悬臂梁.

为了说明这一方法, 让我们分析图 7-2 所示的承受均布载荷的支承悬臂梁. 如果我们选择解二阶微分方程, 就必须求得梁的任一横截面上弯矩  $M$  的表

达式。为此目的,我们需要选取一个多余反力,然后用它表示所有其它反力。让我们选取反力  $R_b$  为多余力,于是由静力平衡方程我们看出,用  $R_b$  表示的  $A$  处的反力为

$$R_a = qL - R_b \quad M_a = \frac{qL^2}{2} - R_b L \quad (a)$$

现在,我们可以得出用  $R_b$  表示的弯矩一般式:

$$\begin{aligned} M &= R_a x - M_a - \frac{qx^2}{2} \\ &= qLx - R_b x - \frac{qL^2}{2} + R_b L - \frac{qx^2}{2} \end{aligned}$$

于是挠曲线的微分方程变为

$$EIv'' = -M = -qLx + R_b x + \frac{qL^2}{2} - R_b L + \frac{qx^2}{2}$$

连续积分两次给出

$$\begin{aligned} EIv' &= -\frac{qLx^2}{2} + \frac{R_b x^2}{2} + \frac{qL^2 x}{2} - R_b Lx + \frac{qx^3}{6} + C_1 \\ EIv &= -\frac{qLx^3}{6} + \frac{R_b x^3}{6} + \frac{qL^2 x^2}{4} - \frac{R_b Lx^2}{2} \\ &\quad + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

在这些方程中有三个未知量 ( $C_1$ ,  $C_2$  和  $R_b$ ), 并三个边界条件:

$$v(0) = 0 \quad v'(0) = 0 \quad v(L) = 0$$

应用这些条件于以上方程, 给出  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ , 及

$$R_b = \frac{3qL}{8} \quad (7-1)$$

多余力  $R_b$  的值确定之后, 我们可以容易地由方程 (a) 求出其余的反力:

$$R_a = \frac{5qL}{8} \quad M_a = \frac{qL^2}{8} \quad (7-2)$$

此外, 我们现在可将这些量代入到挠度  $v$ , 斜率  $v'$  及弯矩  $M$  的诸方程中, 由此得到该梁的完整分析结果。

分析图 7-2 所示梁的另一方法是把反力  $M_a$  取为多余力。那么就需要用  $M_a$  表示弯矩  $M$ , 将所得到的表达式代入二阶微分方

程，并和上面一样求解之。还有另外一个途径是由四阶微分方程开始。此法将在下列例题中加以说明。

**例题** 试用求解挠曲线四阶微分方程分析图 7-3 所示的固定端梁。

由于集中载荷  $P$  作用于梁的中点，因此，我们由对称性得出结论： $M_b = M_a$  及  $R_a = R_b = P/2$ 。这样，只剩下一个多余力 ( $M_a$ ) 待定。在  $x=0$  和  $x=L/2$  之间的区段内，梁上没有载荷，因此，微分方程变为

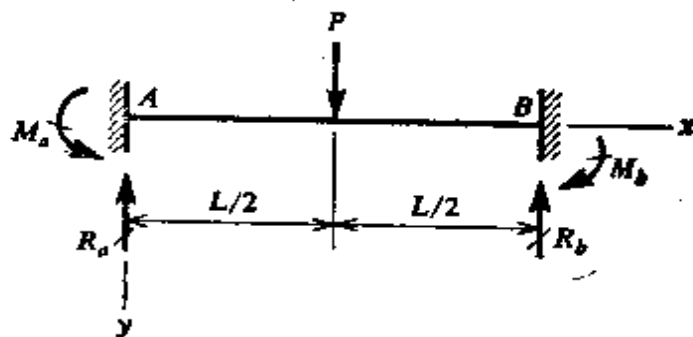


图 7-3. 例题。固定端梁。

$$EIv'''' = 0 \quad (a)$$

由此得出

$$EIv''' = C_1 \quad (b)$$

$$EIv'' = C_1x + C_2 \quad (c)$$

$$EIv' = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad (d)$$

$$EIv = \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \quad (e)$$

用于梁的左半边的边界条件如下。首先，这部分梁的剪力全等于  $R_a$ ，因此，由方程 (b) 我们得到  $C_1 = -P/2$ 。其次，我们观察到，在  $x=0$  处的弯矩等于  $-M_a$ ，所以，由方程 (c) 我们得到  $C_2 = M_a$ 。关于斜率 (方程 d) 共有两个条件，即当  $x=0$  和  $x=L/2$  时， $v'=0$ 。由此得出  $C_3=0$  及

$$M_a = \frac{PL}{8} \quad (7-3)$$

于是，多余力矩  $M_a$  已被求出。最后，当  $x=0$ ，我们有  $v=0$  的条件，它给出  $C_4=0$ 。综合所有这些结果，我们就能写出挠曲线的方程：

$$v = \frac{Px^2}{48EI} (3L - 4x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \quad (7-4)$$

微分此方程我们可以求出斜率方程和弯矩方程。

确实如本例题那样，总存在足够的边界条件不仅用以计算积分常数，而且用以计算多余约束反力。有时，需要建立梁的多个区段的微分方程，然后使用各区段之间的连续条件，就像以前静定梁中所作的那样\*。

\* 最早用微分方程分析静不定梁出现在纳维尔 (Navier) 的材料力学书中 (参考文献 7-1 和 7-2)。

### 7.3 叠加法

此种方法可认为是静不定结构分析的最基本的途径。它适用于许多不同类型的结构,除去本章主要讨论的梁之外,还有桁架和刚架。以前在分析由拉压元件所组成的静不定系统中,我们已使用过这种方法(见1.6节)。

叠加法的实质可用最简单的说法来描述。第一步是识别静多余力,如在上节中所阐明的那样。然后从静不定梁中移去多余约束,留下静定放松结构。此放松结构上任何一个需求的位移都可用第六章中所述的方法求出。特别是,由载荷所引起的相应于多余约束的位移(平移或转动)可加以确定。其次,多余力本身可视为作用在放松结构上的载荷,而相应的位移也可计算出来。根据叠加原理,我们知道,由实际载荷和多余力同时作用所产生的最终位移必然等于分别计算的那些位移之和。在多余约束情况下,相

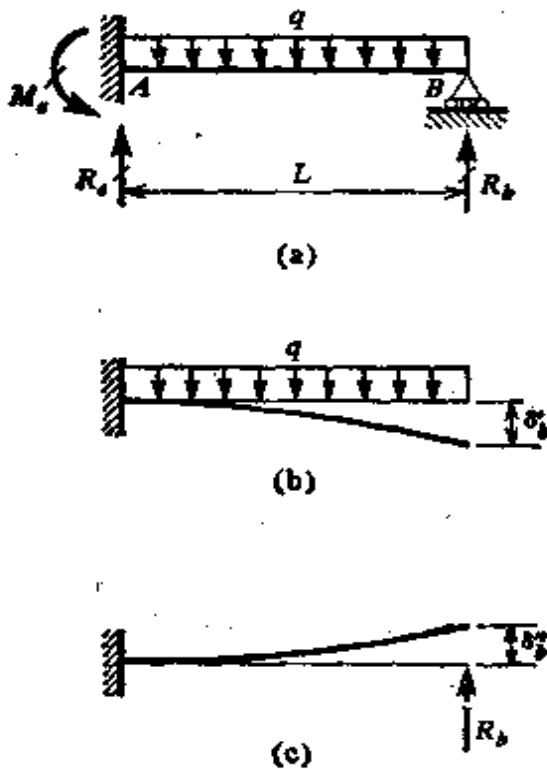


图 7-4. 叠加法。

应的位移或为零或为某一已知值,因此,我们可写出表达这一事实的叠加方程。最后,解这些方程可求得多余反力之值,此后,所有其他的反力均可由静力平衡方程确定。

上段所述的步骤,可通过举例说明使其更为明确。让我们再次分析一根承受均布载荷的支承悬臂梁(见图7-4a)。当反力 $R_B$ 取为静多余力并移去相应的约束时,我们得到一根悬臂梁以作为放松结构。相应于多余力并由均布载荷引起的梁的挠度用 $\delta_B$ 表示(见图7-4b),而由多余力引起的挠度用 $\delta_B'$ 表示(见图7-4c)。通过叠加挠度 $\delta_B$ 和 $\delta_B'$ 所得原结构的总挠度 $\delta_B$ 必定为零。这一结论

• 234 •

导致下列叠加方程:

$$\delta_b = \delta'_b - \delta''_b = 0 \quad (a)$$

方程中出现负号是因为  $\delta'_b$  向下, 而  $\delta''_b$  向上. 由于载荷  $q$  和多余力  $R_b$  引起的挠度  $\delta'_b$  和  $\delta''_b$  可以很容易地借助附录中的表 D-1 求出(见情况 1 和 4). 使用表中所给的公式, 我们从方程 (a) 得到:

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{R_b L^3}{3EI} = 0$$

由此

$$R_b = \frac{3qL}{8} \quad (7-5)$$

现在, 考虑梁的平衡就可求出反力  $R_a$  和力矩  $M_a$ , 其结果为

$$R_a = \frac{5qL}{8} \quad M_a = \frac{qL^2}{8} \quad (7-6)$$

此梁可用另一方法加以分析, 即取力矩  $M_a$  为多余力, 在此情况下, 其放松结构为一根简支梁(图 7-5b 和 c). 由于作用在放松结构上的均布载荷所产生的转角(表 D-2, 情况 1)为

$$\theta'_a = \frac{qL^3}{24EI}$$

而由多余力  $M_a$  引起的相应转角(表 D-2, 情况 7)为

$$\theta''_a = \frac{M_a L}{3EI}$$

表示原梁在支承 A 处总转角为零的叠加方程变为

$$\theta_a = \theta'_a - \theta''_a = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_a L}{3EI} = 0 \quad (b)$$

解此方程, 我们得到  $M_a = qL^2/8$ , 与前面所得结果一致.

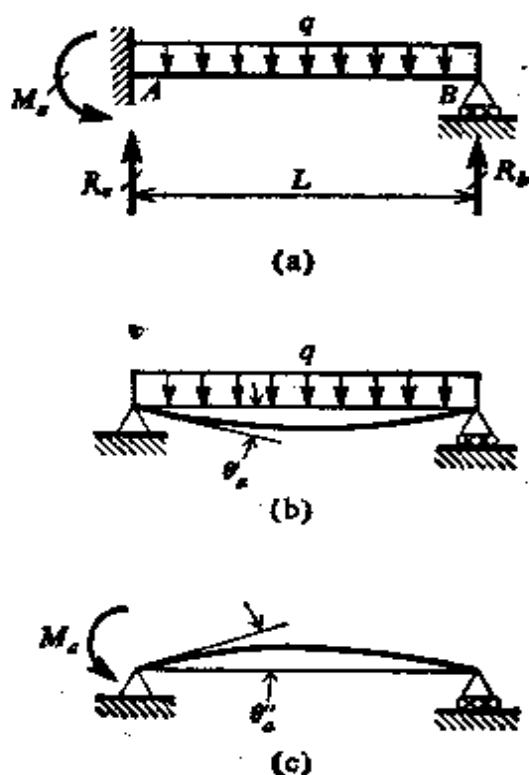
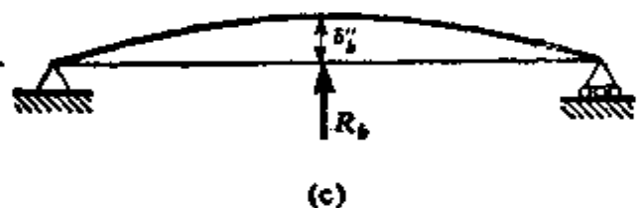
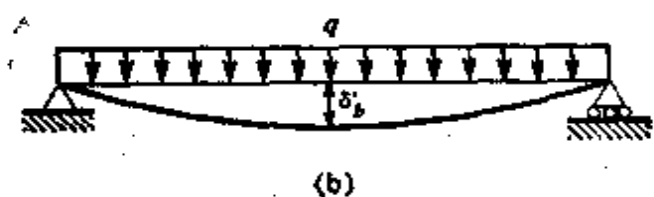
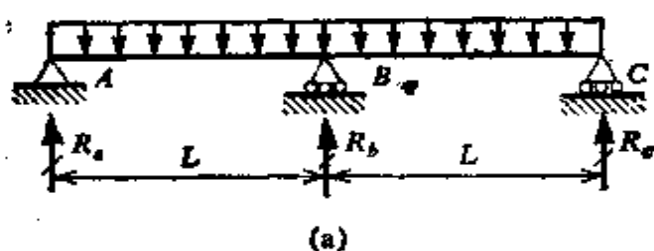


图 7-5. 叠加法.

求出静不定梁的反力之后，所有应力合力(轴向力，剪力和弯矩)的计算不会再有其它困难，因为单只用静力平衡方程就足以达到目的了。再进一步，或使用挠曲线微分方程，或结合着附录 D 中所列公式使用叠加原理，就可求出任一点的挠度和斜率。在以下的范例中，以及在习题中，将把注意力主要放在求出反力，因为这是求解中关键的一步。

本节所使用的分析方法通常称为柔度分析法或者力分析法。后一名称来源于使用力(力或力偶)作为多余力；前一名称是因为所使用的未知量的系数(如方程 b 中的  $L/3EI$ )为柔度，亦即单位载荷产生的变位。在第十一章中将更广泛地论述柔度，在那里，结构分析的论题将用广义形式加以介绍。表示强加变位条件的叠加方程(见方程 a 和 b)通常称为协调方程。

**例题 1** 试用叠加法确定图 7-6a 所示的两跨连续梁的支反力。注意，该梁承受集度为  $q$  的均布载荷。



选取中间的反力  $R_b$  为多余力，我们看出，放松结构为一根简支梁(图 7-6b)。在均布载荷作用下，放松结构中 B 点的挠度(见表 D-2 情况 1)为

$$\delta_b = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

此处  $L$  为每跨的长度。由多余约束力所产生的向上的挠度(见图 7-6c)为

$$\begin{aligned} \delta_b' &= \frac{R_b(2L)^3}{48EI} \\ &= \frac{R_b L^3}{6EI} \end{aligned}$$

它由表 D-2 情况 4 查得。适于 B 点处竖直挠度的协调方程为

图 7-6. 例题 1. 两跨连续梁。



$$\delta_b = \delta'_b - \delta''_b = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{R_b L^3}{6EI} = 0$$

由此

$$R_b = \frac{5qL}{4} \quad (7-7)$$

另外两个反力值为  $R_a = R_c = 3qL/8$ , 它们系由静力平衡求出。所有反力已知后, 我们进一步去求应力的合力和挠度就不会再有困难。

**例题 2** 一固定端梁在图 7-7a 所示位置承受集中力  $P$ 。试求梁端的反力和反力矩。

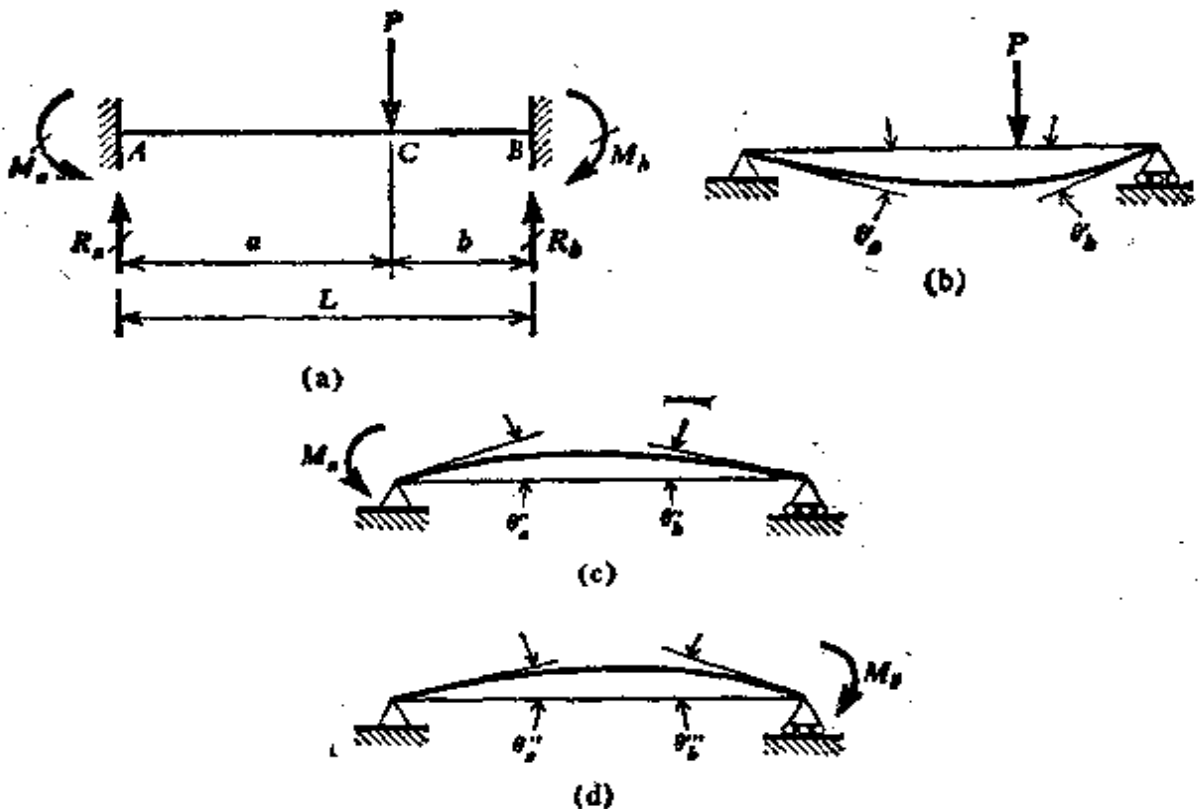


图 7-7. 例题 2. 固定端梁。

让我们选取反力矩  $M_a$  和  $M_b$  为多余力, 从而得出一根简支梁形式的放松结构(图 7-7b)。由载荷  $P$  在梁两端处产生的转角从表 D-2 情况 5 查得

$$\theta'_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad \theta'_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

现在, 我们将多余力矩  $M_a$  和  $M_b$  当成载荷一样作用在放松结构上(图 7-7c 和 d)。由于  $M_a$  在梁两端处产生的转角为

$$\theta''_a = \frac{M_a L}{3EI} \quad \theta''_b = \frac{M_a L}{6EI}$$

而由  $M_b$  在梁两端处产生的转角为

$$\theta_a'' = \frac{M_b L}{6EI} \quad \theta_b'' = \frac{M_a L}{3EI}$$

因为在原梁中两端处的转角为零, 所以我们有二个协调方程:

$$\theta_a = \theta_a' - \theta_a'' - \theta_a''' = 0$$

$$\theta_b = \theta_b' - \theta_b'' - \theta_b''' = 0$$

将各转角的表达式代入这些方程之后, 我们得出二个含  $M_a$  和  $M_b$  为未知量的联立方程:

$$\frac{M_a L}{3EI} + \frac{M_b L}{6EI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

$$\frac{M_a L}{6EI} + \frac{M_b L}{3EI} = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

其解为

$$M_a = \frac{Pab^2}{L^2} \quad M_b = \frac{Pa^2b}{L^2} \quad (7-8)$$

应用这些结果以及平衡方程, 我们得出下列竖直反力的公式:

$$R_a = \frac{Pb^2}{L^3}(L+2a) \quad R_b = \frac{Pa^2}{L^3}(L+2b) \quad (7-9)$$

为了说明如何能使用叠加原理来求挠度, 现在让我们计算固定端梁在载荷作用处的  $C$  点的挠度(图 7-7a)。由表 D-2 情况 5, 放松结构在  $P$  力作用下(图 7-7b)于该点处的挠度为

$$\delta_c' = \frac{Pa^2b^2}{3LEI}$$

在放松结构中的同一点由于力偶  $M_a$  和  $M_b$  所产生的向上挠度(见图 7-7c 和 d)为

$$\delta_c'' = \frac{M_a ab}{6LEI}(L+b) \quad \delta_c''' = \frac{M_b ab}{6LEI}(L+a)$$

它们系由表 D-2 情况 7 查得。将方程(7-8)的  $M_a$  和  $M_b$  之值代入, 这些表达式变为

$$\delta_c'' = \frac{Pa^2b^2}{6L^2EI}(L+b) \quad \delta_c''' = \frac{Pa^2b^2}{6L^2EI}(L+a)$$

所以,  $C$  点的总挠度为

$$\delta_c = \delta_c' - \delta_c'' - \delta_c''' = \frac{Pa^2b^2}{3L^2EI} \quad (7-10)$$

当  $P$  作用在梁中点的这一特殊情况下, 中点的挠度为

$$\delta_o = \frac{PL^3}{192EI} \quad (7-11)$$

而反力为

$$M_a = M_b = \frac{PL}{8} \quad R_a = R_b = \frac{P}{2} \quad (7-12)$$

**例题 3** 试求固定端梁在部分跨度上承受均布载荷时的反力(图 7-8).

让我们在距梁左端为  $x$  处分离出一载荷微元  $qdx$ . 将此微元作为一个集中力, 我们就可利用上例中导出的公式. 首先从力矩  $M_a$  和  $M_b$  的公式(见方程 7-8)开始, 我们可用  $qdx$  取代  $P$ ,  $a$  取代  $a$ , 并以  $L-x$

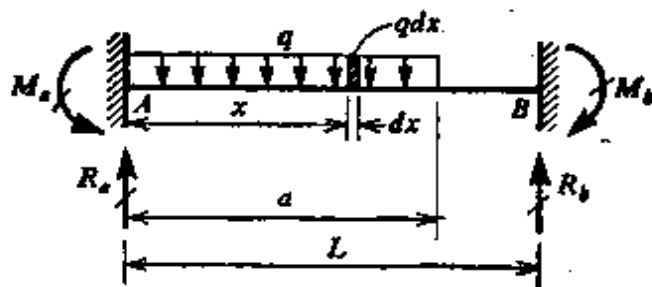


图 7-8 例题 3. 部分跨度上承受均布载荷的固定端梁.

取代  $b$ , 于是, 由于载荷微元所产生的固定端的力矩为

$$dM_a = \frac{qx(L-x)^2 dx}{L^2} \quad dM_b = \frac{qx^2(L-x) dx}{L^2}$$

沿梁的受载长度积分, 得

$$M_a = \int dM_a = \frac{q}{L^2} \int_0^a x(L-x)^2 dx = \frac{qa^2}{12L^2} (6L^2 - 8aL + 3a^2) \quad (7-13)$$

$$M_b = \int dM_b = \frac{q}{L^2} \int_0^a x^2(L-x) dx = \frac{qa^3}{12L^2} (4L - 3a) \quad (7-14)$$

类似地, 端部的竖直反力可以借助方程(7-9)求出:

$$R_a = \frac{q}{L^2} \int_0^a (L-x)^2(L+2x) dx = \frac{qa}{2L^3} (2L^3 - 2a^2L + a^3) \quad (7-15)$$

$$R_b = \frac{q}{L^3} \int_0^a x^2(3L-2x) dx = \frac{qa^3}{3L^3} (2L-a) \quad (7-16)$$

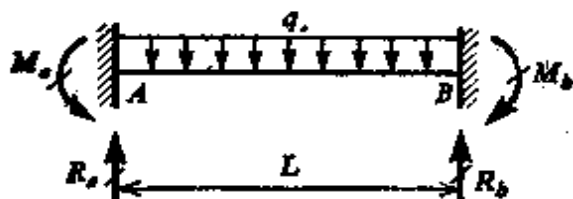


图 7-9. 例题 3. 承受均布载荷的固定端梁.

这就求出了所需的结果.

如果固定端梁沿其整个跨长承受均布载荷(图 7-9), 我们就可将  $a=L$  代入上面方程, 得出反力为

$$M_a = M_b = \frac{qL^2}{12} \quad R_a = R_b = \frac{qL}{2} \quad (7-17)$$

具有固定端的梁在其支承处的反力通常称为固定端力矩和固定端反力. 它们在诸如刚度法(见第十一章)和力矩分配法这样的结构分析方法中具有重要作用. 因此, 有大量的固定端力矩和反力表可以利用(例如, 见参考文献 7-3).

**例题 4** 梁  $ABC$ (图 7-10a) 在  $A$  和  $B$  处简支且在  $C$  点处悬挂于缆索上, 在均布载荷  $q$  作用之前, 在缆索中没有力, 也没任何松弛. 当荷载  $q$  作

用时,在  $O$  处梁向下挠曲并在缆索内产生拉力  $T$ , 试求此力的大小。

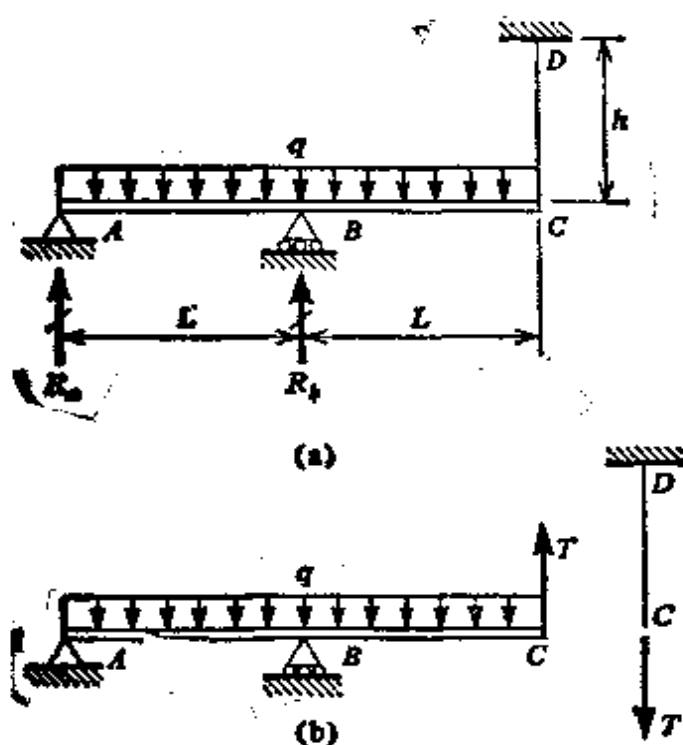


图 7-10. 例题 4. 用缆索支承的梁。

分析时,取缆索中的未知力  $T$  为多余力,并将结构切成两部分(图 7-10b), 这样作较为方便。于是放松结构由梁  $ABC$  和作为独立结构的缆索所组成,力  $T$  在梁上向上作用,而在缆索上向下作用。梁上  $O$  点处的挠度由两部分组成: 由于均布载荷所产生的向下的挠度  $\delta_0''$  和由于力  $T$  所产生的向上的挠度  $\delta_0''$ 。与此同时,缆索的端部(点  $O$ )也将向下变位一个量  $\delta_0''$ , 其值等于缆索的伸长。因此,表达梁端向下的位移等于缆索端部的位移这一事实的协调方程为

$$\delta_0'' - \delta_0'' = \delta_0''$$

列出这一方程之后,我们将转到计算这三项挠度的工作上来。

由均布载荷所产生的外伸臂端的挠度可由第 6.5 节的例题 3 所给的结果求出。应用该例中的方程(a), 并代入  $a=L$ , 我们得到

$$\delta_0'' = \frac{qL^4}{4EI}$$

此处  $EI$  为梁的抗弯刚度。由于力  $T$  在梁  $O$  点处产生的挠度可由习题 6.5-11 的答案中代入  $a=L$  获得, 因此,

$$\delta_0'' = \frac{2TL^3}{3EI}$$

最后,缆索的伸长量为

$$\delta_0'' = \frac{Th}{EA}$$

此处  $h$  为缆索的长度,而  $EA$  为其轴向刚度。

将以上各挠度公式代入协调方程并求解力  $T$ , 我们得到

$$T = \frac{3qAL^4}{8AL^3 + 12hI} \quad (7-18)$$

注意,在此例中的多余力取为内力值而不是外部支反力,多余力的选取通常根据求解的方便而定。

## 7.4 力矩-面积法

分析静不定梁的另一种方法是用力矩-面积法,这一方法早先 在第 6.4 节中已作为求梁挠度的一种方法描述过. 其步骤包括了 利用两个力矩-面积定理得出计算多余力所需的补充方程. 这些 补充的方程,代表了梁的关于斜率和挠度的条件,而这类条件的数 目总是等于多余力的数目.

使用力矩-面积法进行梁的分析,以前述的相同步骤开始, 即选取多余力,并从结构上将它们移去,使之成为静定放松结 构. 然后假设载荷作用在放松结构上,并画出相应的弯矩图. 类 似地,多余力也像载荷一样作用在放松结构上,并且再次画出所 产生的弯矩图. 在此阶段,引用力矩-面积定理提供由包含  $M/EI$  图的面积和一次矩的方程所组成的补充关系式. 自然,所使用的 特定关系式将取决于梁的类型和多余力的选择.

**例题 1** 试用力矩-面积法求出图 7-11a 所示的固定-简支梁的支反力.

如果将  $R_b$  选为多余力,那么放松结构为一根悬臂梁,该梁由  $P$  和  $R_b$  所 产生的弯矩图如图 7-11b 所示. 因为在支承  $A$  处梁的斜率为零,所以我们 看出,挠曲线在  $A$  处的切线将通过  $B$  点. 因此,根据力矩-面积第二定理推

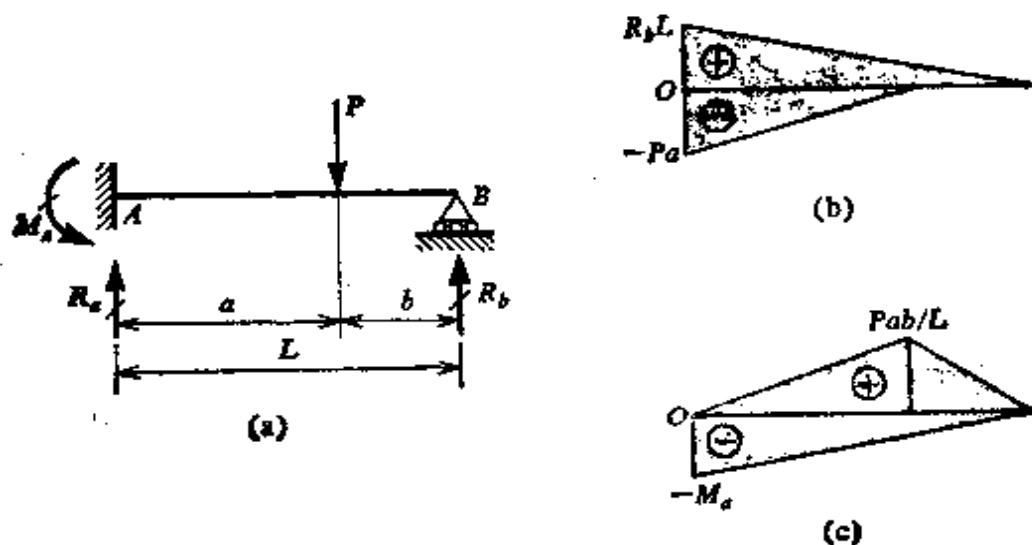


图 7-11. 例题 1. 力矩-面积法.

出在  $A$  和  $B$  之间  $M/EI$  图对  $B$  点的一次矩必等于零。这一关系给出方程

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R_b L}{EI} \right) (L) \left( \frac{2L}{3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{Pa}{EI} \right) (a) \left( L - \frac{a}{3} \right) = 0$$

由此

$$R_b = \frac{Pa^2}{2L^3} (3L - a) \quad (7-19)$$

知道这个多余反力后, 我们便可根据静力平衡求出另外两个反力, 其结果为

$$R_a = \frac{Pb}{2L^3} (3L^2 - b^2) \quad M_a = \frac{Pab}{2L^2} (L + b) \quad (7-20)$$

作为另一个方法, 我们可将反力矩  $M_a$  作为多余力来求解同一根梁。在此情况下, 放松结构为一根简支梁, 而由  $P$  和  $M_a$  所产生的相应弯矩图如图 7-11c 所示。再使用力矩-面积第二定理并取  $M/EI$  图对  $B$  点的一次矩, 我们得到

$$\frac{1}{2} \left( \frac{Pab}{LEI} \right) (L) \left( \frac{L+b}{3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{M_a}{EI} \right) (L) \left( \frac{2L}{3} \right) = 0$$

解此方程, 我们得出与前相同的  $M_a$  (见方程 7-20)。

由以上结果, 代入  $a=b=L/2$ , 我们可容易地得到梁在其中点作用集中载荷时的反力。于是

$$R_a = \frac{11P}{16} \quad R_b = \frac{5P}{16} \quad M_a = \frac{3PL}{16} \quad (7-21)$$

**例题 2** 试确定固定端梁承受力偶  $M_0$  时的反力 (图 7-12a), 并求出力偶作用处的  $C$  点的挠度。

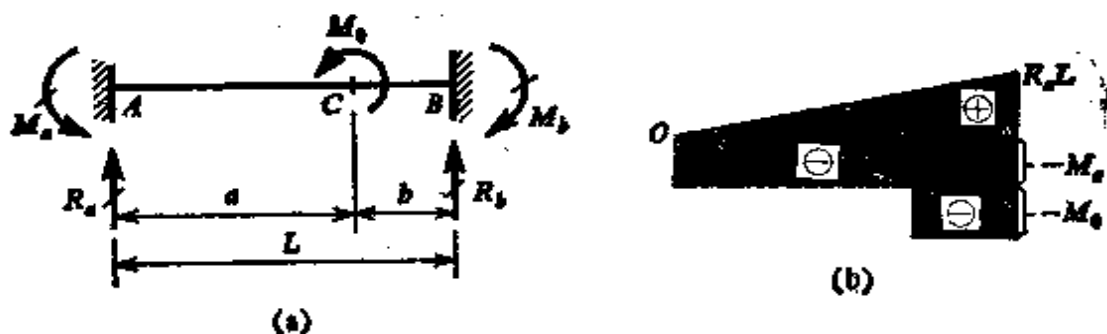


图 7-12 例题 2. 力矩-面积法。

首先必须选取多余力, 可能的选择是  $R_a$  和  $M_a$ , 或者  $R_b$  和  $M_b$ , 或者  $M_a$  和  $M_b$ 。让我们作第一种选择, 取支承  $A$  处的反力为多余力。于是我们就有一根固定在  $B$  处的悬臂梁作为放松结构, 并且我们可容易地画出由  $R_a$ 、 $M_a$  和载荷  $M_0$  所产生的弯矩图 (见图 7-12b)。

为了求出两个多余力, 需要两个与梁的挠曲有关的条件。作为第一个条件, 我们注意到梁两端的斜率为零, 因此在  $A$  和  $B$  之间斜率变化为零。根据力矩-面积第一定理得出,  $A$  和  $B$  之间  $M/EI$  图的面积必为零, 因此

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R_a L}{EI}\right)(L) - \frac{M_a}{EI}(L) - \frac{M_0}{EI}(b) = 0$$

或

$$R_a L^2 - 2M_a L = 2M_0 b \quad (a)$$

第二个条件根据  $A$  处挠曲线的切线通过  $B$  点这一事实而得, 这意味着, 在  $A$  和  $B$  之间  $M/EI$  图的面积对  $B$  点的一次矩为零. 所得的方程为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R_a L}{EI}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right) - \frac{M_a}{EI}(L)\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{M_0}{EI}(b)\left(\frac{b}{2}\right) = 0$$

或

$$R_a L^3 - 3M_a L^2 = 3M_0 b^2 \quad (b)$$

现在, 我们可以联解方程 (a) 和 (b) 以求出多余力:

$$R_a = \frac{6M_0 ab}{L^3} \quad M_a = \frac{M_0 b}{L^2}(2a - b) \quad (7-22)$$

另外两个反力根据静力平衡得出为

$$R_b = -R_a \quad M_b = \frac{M_0 a}{L^2}(a - 2b) \quad (7-23)$$

载荷作用处的挠度  $\delta_0$  可根据力矩-面积第二定理求出. 该挠度等于  $A$  和  $C$  之间  $M/EI$  图的面积对  $C$  点的一次矩. 参看图 7-12b, 我们看出, 此挠度为

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\left(\frac{R_a L}{EI}\right)(a)\left(\frac{a}{3}\right) - \frac{M_a}{EI}(a)\left(\frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{R_a a^3}{6EI} - \frac{M_a a^2}{2EI} \end{aligned}$$

代入  $R_a$  和  $M_a$  的表达式 (见方程 7-22), 我们得出载荷处的挠度为

$$\delta_0 = \frac{M_0 a^2 b^2 (b - a)}{2L^3 EI} \quad (7-24)$$

当力偶  $M_0$  作用在跨度中点时, 梁的反力为

$$M_a = -M_b = \frac{M_0}{4} \quad R_a = -R_b = \frac{3M_0}{2L} \quad (7-25)$$

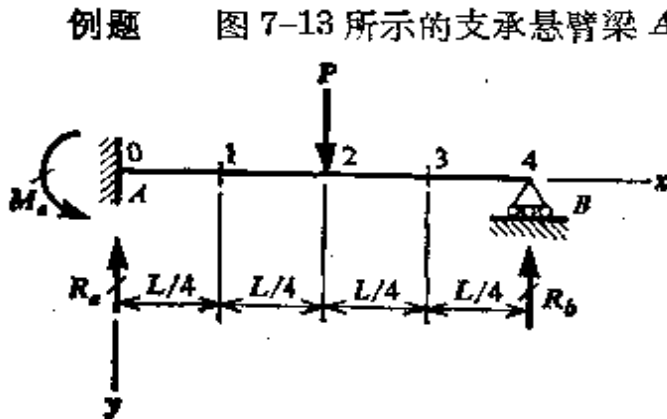
而中点的挠度 (方程 7-24) 变为零.

## 7.5 有限差分法

以前用来求梁挠度的有限差分法, 也可以用来分析静不定梁. 在第 6.7 节中我们看到, 为求梁的挠度, 需要知道沿梁轴每个选定点的弯矩  $M_i$  (见方程 6-30). 因为有多少个未知挠度, 就有多少个有限差分方程, 所以通过解联立方程组, 就可求出挠度.

对于静不定梁, 和往常一样, 从选取多余未知量开始分析. 选出它们之后, 就可用多余力和作用的载荷这两者来表示梁任一截

面上的弯矩。然后将所得的弯矩表达式代入有限差分方程(方程6-30)。由此可见,在有限差分方程中出现的未知量数目将等于沿梁轴未知挠度的个数和多余反力的个数之和。总有足够数量的方程以解出这些未知数,因为相应于每一个多余力就有一个斜率或挠度条件。有限差分法的优点是,可用它分析非棱柱形梁,其工作量实际上与分析棱柱形梁所需要的相同。



**例题** 图7-13所示的支承悬臂梁  $AB$  具有常值抗弯刚度  $EI$ , 并且在  
 中点处承受载荷  $P$ . 将竖直反力  $R_b$  选作多余力, 分析的目  
 的是要计算它的值。

当梁被分为四个等长区  
 段时(见图7-13)就有三个未  
 知挠度( $v_1, v_2$  和  $v_3$ ). 因为还  
 有一个多余力, 故未知量的总  
 数为四, 所以需要四个有限差

图7-13. 例题. 有限差分法.

分方程。在沿梁轴的0、1、2、3点上应用方程(6-30)会得到这些方程。因此,需要计算用多余力表达的这些点处的弯矩如下:

$$M_0 = R_b L - \frac{PL}{2} \quad M_1 = \frac{3R_b L}{4} - \frac{PL}{4} \quad M_2 = \frac{R_b L}{2} \quad M_3 = \frac{R_b L}{4}$$

0点处的有限差分方程变为

$$v_{-1} - 2v_0 + v_1 = -\frac{L^2}{16EI} \left( R_b L - \frac{PL}{2} \right)$$

因为在固定端处挠度为零( $v_0=0$ )及斜率为零( $v_{-1}=v_1$ ), 所以该方程简化为

$$v_1 + \frac{R_b L^3}{32EI} = \frac{PL^3}{64EI} \quad (a)$$

注意,  $v_1$  和  $R_b$  均为未知量, 因此将它们置于方程的左边。在1、2和3点处的有限差分方程可用类似的方式求得, 于是我们得出如下三个方程:

$$-2v_1 + v_2 + \frac{3R_b L^3}{64EI} = \frac{PL^3}{64EI} \quad (b)$$

$$v_1 - 2v_2 + v_3 + \frac{R_b L^3}{32EI} = 0 \quad (c)$$

$$v_2 - 2v_3 + \frac{R_b L^3}{64EI} = 0 \quad (d)$$

求解这四个方程(a)、(b)、(c)和(d)可得出三个挠度和多余力  $R_b$ .  $R_b$  的解  
 答为



$$R_0 = \frac{7P}{22} = 0.3182P$$

它略高于精确值(见方程 7-21):

$$R_0 = \frac{5P}{16} = 0.3125P$$

因此, 即使梁只分为少量区段, 有限差分法也能得出很满意的多余力值。当使用大量的区段时, 其计算不宜用手算, 而应当利用计算机来求解联立方程组。

## 7.6 连续梁

连续跨越多个支座的梁(例如, 参看图 7-14)称为连续梁, 通常在房屋建筑、管道、桥梁以及各种特殊结构中都会遇到。如果作用在连续梁上的载荷是竖直的, 并且没有轴向变形, 那么所有的反力都是竖直的。为了表明这一特性, 我们可将支承中的一个视为销接支座, 而其它的支承均为滚动支座, 如图所示。这样, 支反力的总数与支座的总数相等, 而静不定度将比此数少二, 因此, 对图 7-14 所示的梁, 有五个竖直反力, 其中有三个是多余力。



图 7-14. 连续梁。

虽然我们可用上节中所述的任一方法分析连续梁, 但是只有叠加法是切实可行的。一种可能是选取中间支座的反力为多余力, 在此情况下, 放松结构为一根简支梁。这种方法已在第 7.3 节例题 1 中(见图 7-6)使用过, 并对只有两跨或三跨的梁是适宜的。当多余力多于两个时, 选取中间支座处梁的弯矩为多余力更为有利。这种选取将大大简化计算, 因为它导出的联立方程组中, 不管多余力的总数如何, 每一个方程中最多出现三个未知数。

现在让我们更详细地研究这一分析连续梁的方法。当各支座处的弯矩从结构中放松时, 该处梁的连续性被破坏, 因此, 放松结构由一系列的简支梁所组成。每一根这样的梁均承受垂直于它

的外载荷和作用在梁端处的两个多余力矩。在所有这些载荷的作用下，我们可以确定每根简支梁两端处的转角。表示每个支座处相邻的梁必具有相同转角这一事实的协调方程，提供了为求解未知弯矩所需的方程。例如，考虑图 7-15a 所示连续梁的一部分，三个顺序的支座用  $A$ 、 $B$  和  $C$  标识，而两个相邻的跨长和惯性矩分别用  $L_a$ 、 $I_a$  和  $L_b$ 、 $I_b$  表示。令  $M_a$ 、 $M_b$  和  $M_c$  表示三个支座处梁的弯矩。这些弯矩的真实方向将取决于梁上的载荷，但是为了推导的需要，我们将假设它们为正，即在梁的顶部产生压缩。在图 7-15b 中表示出这个由简支梁组成的放松结构的两个相邻跨。每一跨都承受所作用的外载荷加上多余弯矩。

图 7-15b 所示的载荷使两个简支梁产生挠度。左边梁在支

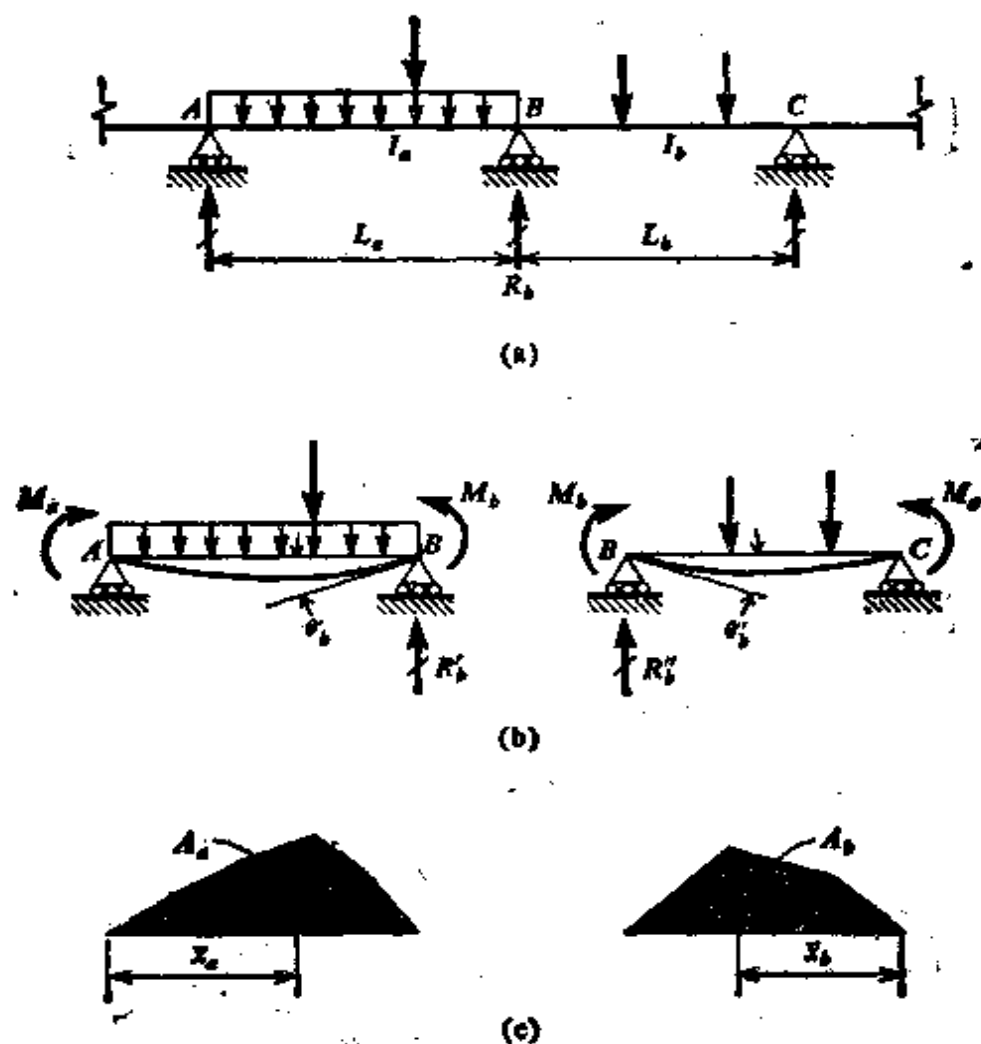


图 7-15. 三弯矩方程。

座  $B$  处的转角在图中表为  $\theta'_b$ , 而右边梁在相同支座处的转角表为  $\theta''_b$ , 如图所示, 这些转角均取正号, 即与正弯矩  $M_b$  的方向相同. 因为实际上通过支座  $B$  的梁轴是连续的, 所以此协调方程为

$$\theta'_b = -\theta''_b \quad (\text{a})$$

它表明两个简支梁在  $B$  处的斜率必须彼此匹配这一事实. 下一步是导出角  $\theta'_b$  和  $\theta''_b$  的恰当的表达式.

与作用在放松结构上的外载荷有关的弯矩图如图 7-15c 所示. 这些弯矩图的特定形状取决于载荷的性质. 然而, 在所有情况下, 我们均可用它们的面积和形心的距离表示弯矩图的特征. 让我们分别以  $A_a$  和  $A_b$  表示两个弯矩图的面积. 另外, 从  $A$  点到  $A_a$  的形心距离用  $\bar{x}_a$  表示, 而从  $O$  点到  $A_b$  的形心距离用  $\bar{x}_b$  表示. 现在我们可以使用弯矩图的这些特性来计算转角  $\theta'_b$  和  $\theta''_b$ . 根据力矩-面积第二定理我们注意到, 梁  $AB$  上的外载荷对转角  $\theta'_b$  的贡献为

$$\frac{A_a \bar{x}_a}{EI_a L_a}$$

此外, 力矩  $M_a$  和  $M_b$  对  $\theta'_b$  贡献下列的量:

$$\frac{M_a L_a}{6EI_a} \quad \text{和} \quad \frac{M_b L_b}{3EI_a}$$

因此, 转角  $\theta'_b$  为

$$\theta'_b = \frac{M_a L_a}{6EI_a} + \frac{M_b L_b}{3EI_a} + \frac{A_a \bar{x}_a}{EI_a L_a} \quad (\text{b})$$

考虑右跨  $BC$ , 我们用类似的方式得到  $\theta''_b$  的下列方程:

$$\theta''_b = \frac{M_b L_b}{3EI_b} + \frac{M_c L_c}{6EI_b} + \frac{A_b \bar{x}_b}{EI_b L_b} \quad (\text{c})$$

将 (b) 和 (c) 代入方程 (a) 并重新整理, 我们得到

$$\begin{aligned} M_a \left( \frac{L_a}{I_a} \right) + 2M_b \left( \frac{L_a}{I_a} + \frac{L_b}{I_b} \right) + M_c \left( \frac{L_b}{I_b} \right) \\ = - \frac{6A_a \bar{x}_a}{I_a L_a} - \frac{6A_b \bar{x}_b}{I_b L_b} \end{aligned} \quad (7-26)$$

这个方程称为三弯矩方程, 因为它与梁内三个顺序的弯矩有关. 对于连续梁的每一个中间支座均可写出一个这样的方程, 于是提供

出与未知弯矩数一样多的方程。

如果所有跨都有相同的惯性矩  $I$ ，那么三弯矩方程变得略微简单些：

$$M_a L_a + 2M_b(L_a + L_b) + M_c L_b = -\frac{6A_a \bar{x}_a}{L_a} - \frac{6A_b \bar{x}_b}{L_b} \quad (7-27)$$

如果作用在梁上的载荷已知，则上述方程的右边诸项总能计算出来。例如，如果  $AB$  跨上作用着集度为  $q$  的均布载荷，我们有

$$A_a = \frac{2}{3} \left( \frac{qL_a^2}{8} \right) (L_a) = \frac{qL_a^3}{12} \quad \bar{x}_a = \frac{L_a}{2}$$

因此，

$$\frac{6A_a \bar{x}_a}{L_a} = \frac{qL_a^3}{4} \quad (7-28)$$

对于在跨长中点承受集中载荷  $P$  的情况，其结果为

$$A_a = \frac{1}{2} \left( \frac{PL_a}{4} \right) (L_a) = \frac{PL_a^2}{8} \quad \bar{x}_a = \frac{L_a}{2}$$

及

$$\frac{6A_a \bar{x}_a}{L_a} = \frac{3PL_a^2}{8} \quad (7-29)$$

这两个例子足以表明，当涉及弯矩图的一些计算项时并无多大困难。一旦完成了这一步，仅需写下各项就可列出方程组，而后，解方程组得出未知弯矩。\*

在以上讨论中，始终假设连续梁两个最外端处为简支。如果其中一个或两个为固定端，那么多余力矩的数目将要增加（见图 7-16a）。处理这种情况的最简单的办法是用附加梁跨取代固定端，然后赋予该跨以无限大之惯性矩（图 7-16b）。具有无限大刚度的附加跨度的效应是阻止支座 1 处的转动，这与固定端的强加条件是相同的。在图 7-16b 所示的连续梁上求出的 1、2、3 点处的弯矩与在原梁上所求出的相同。附加跨长的长度无关紧要（除了它必须大于零外），因为它总不参与三弯矩方程。

求出连续梁支座处的弯矩之后，用静力平衡方程求出反力则

\* 三弯矩方程是由法国工程师克拉佩龙 (Clapeyron) 和贝尔托特 (Bertot) 在 19 世纪中期导出的（见参考文献 7-4）。

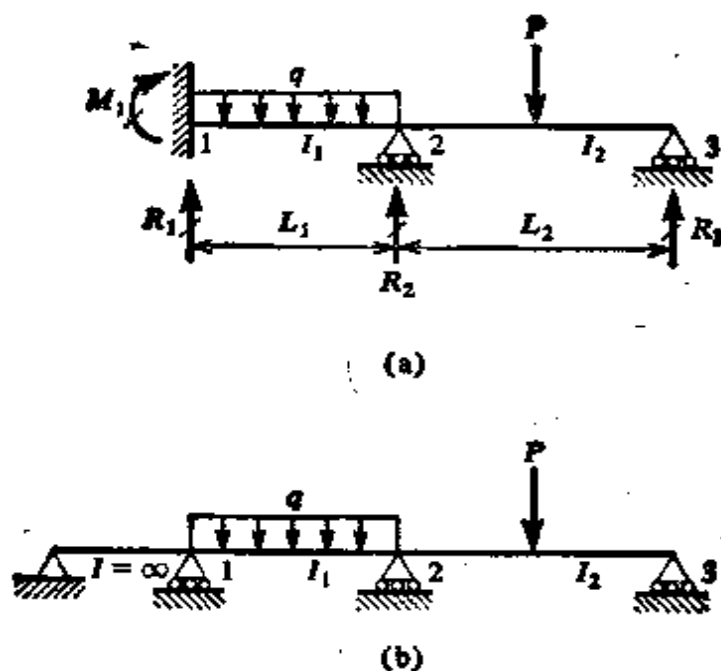


图 7-16. 用无限大惯性矩的一跨代替固定端。

毫无困难。再次考虑相邻的两跨(图 7-15b), 令  $R'_b$  和  $R''_b$  为两根简支梁  $AB$  和  $BC$  在支座  $B$  处的反力, 它们的和给出支座  $B$  处的总反力  $R_b$  (图 7-15a)。反力  $R'_b$  系由三部分组成: 由外载荷产生的简支梁的反力, 由  $M_a$  产生的反力(等于  $M_a/L_a$ ), 和由  $M_b$  产生的反力(等于  $-M_b/L_a$ )。类似地, 反力  $R''_b$  等于简支梁由于载荷产生的反力加上  $M_b/L_b$  和  $-M_c/L_b$ 。综合所有这些项给出总反力  $R_b$ 。在每一支座处, 都采用这一相同的步骤, 直到所有反力都计算出来为止。自然, 如果有一集中载荷作用在梁的支座上, 它将直接转换为反力。

**例题 1** 为了说明三弯矩方程的应用, 将求解图 7-17 所示的例题。该梁具有三个相等跨长, 且惯性矩为常数, 并在第一和第三跨梁上作用有载荷。假设集中载荷  $P$  等于  $qL$ 。

因为所有跨的惯性矩相同, 所以在此例中可用方程(7-27)。作为预备工作, 我们将首先确定出三跨中的每一跨方程的右边诸项  $6A\bar{x}/L$ 。对于 1-2 跨, 该项由方程(7-28)给出为  $qL^3/4$ 。对于 2-3 跨, 因为其上没有载荷, 此项变为零。最后, 对于 3-4 跨我们观察到此弯矩图为一三角形, 其最大纵坐标等于  $3PL/16$ 。此三角形的面积为  $3PL^2/32$ , 而形心距点 4 为  $5L/12$ (见附录

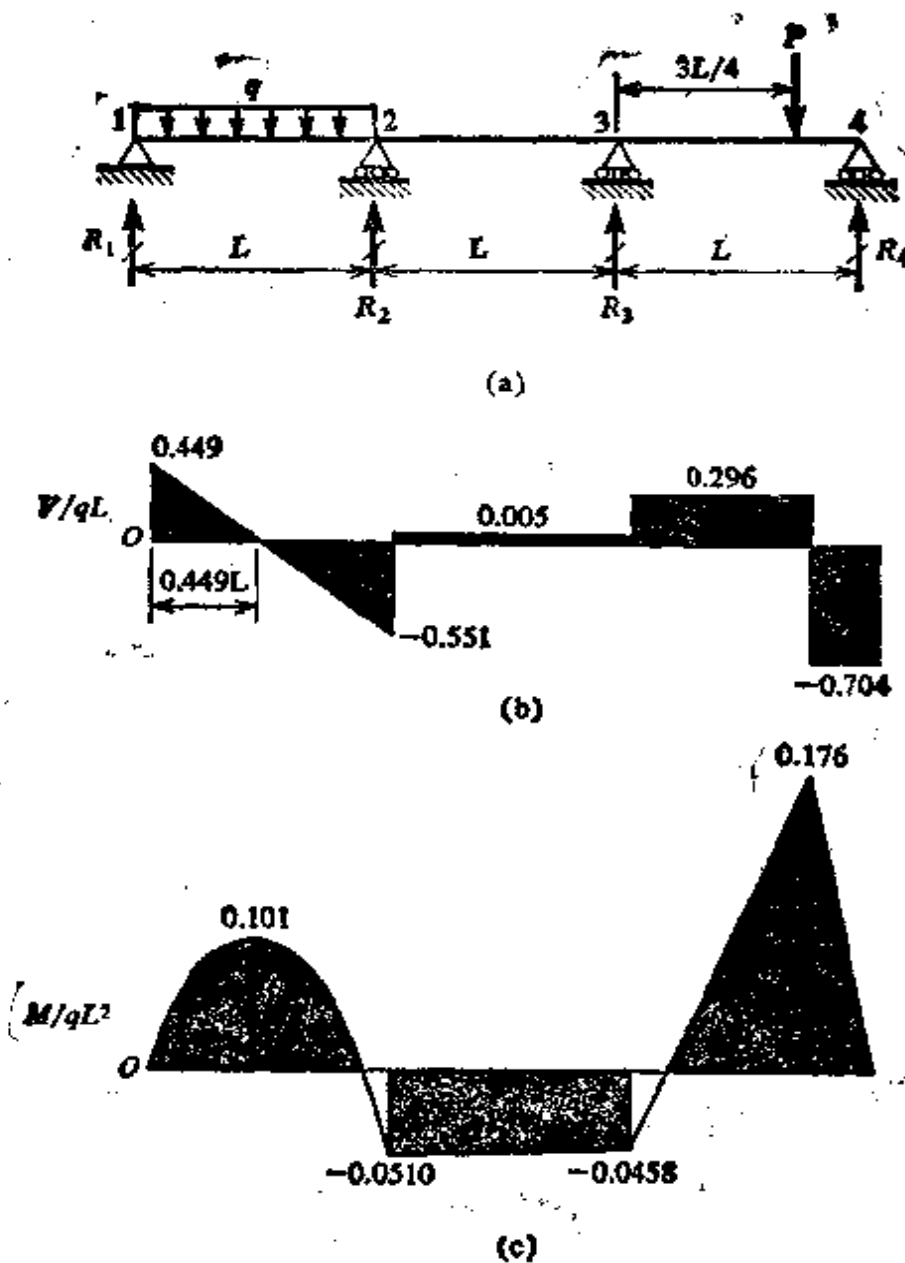


图 7-17. 例题 1. 三弯矩方程.

B, 情况 3), 因此,  $6A\bar{x}/L$  这一项的值为  $15PL^2/64$ , 因为假设  $P$  等于  $qL$ , 故此值变为  $15qL^3/64$ .

现在, 我们就能够对中间支座写出三弯矩方程. 考虑支座 2, 我们辨认出在一般方程(7-27)中的  $M_0$  变为  $M_1$  (它为零),  $M_1$  变为  $M_2$ , 而  $M_2$  变为  $M_3$ , 于是

$$2M_2(2L) + M_3(L) = -\frac{qL^3}{4}$$

或

$$4M_2 + M_3 = -\frac{qL^3}{4} \quad (d)$$

类似地, 支座 3 处的三弯矩方程为

$$M_2(L) + 2M_3(2L) = -\frac{15qL^3}{64}$$

或

$$M_2 + 4M_3 = -\frac{15qL^2}{64} \quad (e)$$

解方程(d)和(e)给出弯矩:

$$M_2 = -\frac{49qL^2}{960} \quad M_3 = -\frac{11qL^2}{240} \quad (f)$$

画出梁的三部分中每部分的自由体图, 然后写出静力平衡方程, 我们得到反力:

$$R_1 = \frac{431qL}{960} \quad R_2 = \frac{89qL}{160} \quad R_3 = \frac{93qL}{320} \quad R_4 = \frac{169qL}{240} \quad (g)$$

根据这些数据, 我们便可构画出整个梁的剪力图和弯矩图, 如图 7-17b 和 c 所示。

**例题 2** 假设一连续梁的各支座由于沉陷或某些其它原因不在同一条水平线上。试问, 如何将此影响包括在三弯矩方程中?

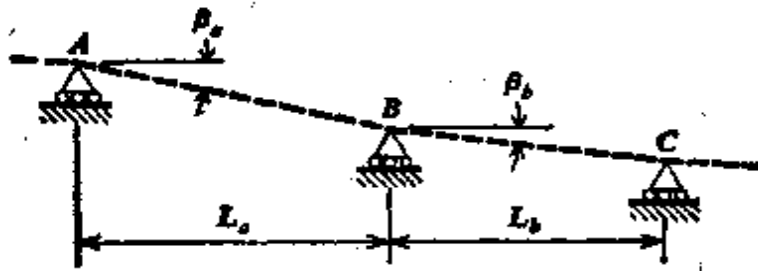


图 7-18. 例题 2. 不同水平线上的支座。

让我们假设三个顺序的支座 A、B 和 C 位于图 7-18 所示的位置。连接 A、B、C 三点的虚线并非代表梁的轴线, 而仅是支承点之间的连线(试与图 7-15a 比较)。令  $\beta_a$  和  $\beta_b$  表示这些线的倾斜角。当右边支座低于左边支座时, 假设为正。现在仍回到  $\theta'_a$  的方程(b), 我们注意到, 现存各项仍将保留在该方程中, 但是另外必须计及  $\beta_a$  的影响。角  $\beta_a$  的存在会减小  $\theta'_a$  之值。以取代方程(b), 我们得

$$\theta'_a = \frac{M_a L_a}{6EI_a} + \frac{M_b L_a}{3EI_a} + \frac{A_a \bar{x}_a}{EI_a L_a} - \beta_a \quad (h)$$

$\theta'_b$  的方程(见方程(c))也改变如下:

$$\theta'_b = \frac{M_b L_b}{3EI_b} + \frac{M_c L_b}{6EI_b} + \frac{A_b \bar{x}_b}{EI_b L_b} + \beta_b \quad (i)$$

代入连续性方程(方程(a))并重新整理, 我们得出三弯矩方程更为普遍的形式:

$$\begin{aligned}
 & M_a \left( \frac{L_a}{I_a} \right) + 2M_b \left( \frac{L_a}{I_a} + \frac{L_b}{I_b} \right) + M_c \left( \frac{L_b}{I_b} \right) \\
 & = -\frac{6A_a \bar{x}_a}{I_a L_a} - \frac{6A_b \bar{x}_b}{I_b L_b} + 6E(\beta_a - \beta_b)
 \end{aligned} \tag{7-30}$$

每当支座不在同一水平线上时, 就可用此方程取代方程(7-26)。

## 7.7 热效应

静不定梁中的温度变化将在梁内产生应力和挠度。这些量可用类似于梁上有载荷作用时所描述的方法来确定。其中最有用的方法也许就是叠加法, 此法将通过研究图 7-19 所示的固定端梁加以说明。假设该梁顶面的温度为  $T_1$ , 底面的温度为  $T_2$ 。当使用叠加法时, 我们先将多余反力放松得到一个静定梁。如果我们取  $R_b$  和  $M_b$  为多余力, 放松结构就变为一根悬臂梁。由于温度差所引起的该悬臂梁  $B$  端的挠度和转角为

$$\delta'_b = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} \quad \theta'_b = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L}{h}$$

这在前面习题 6.10-2 中已求出。在这些方程中,  $\alpha$  为温度膨胀系数, 而  $h$  为梁的高度。当  $T_2$  大于  $T_1$  时挠度  $\delta'_b$  向上, 而转角  $\theta'_b$  为逆时针转向。

在放松结构中由于  $R_b$  产生的挠度和转角为

$$\delta''_b = \frac{R_b L^3}{3EI} \quad \theta''_b = \frac{R_b L^2}{2EI}$$

而由于  $M_b$  产生的为

$$\delta'''_b = -\frac{M_b L^2}{2EI} \quad \theta'''_b = -\frac{M_b L}{EI}$$

此处向上的挠度和逆时针的转角均为正。现在我们可以写出协调方程如下:

$$\delta'_b + \delta''_b + \delta'''_b = 0 \quad \theta'_b + \theta''_b + \theta'''_b = 0$$



将各变位值代入这些方程中然后求解,我们求出

$$R_b = 0 \quad M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

$R_b$  为零这一事实,可由梁的对称性预料到,如果在一开始就利用了这一事实,那么上述求解就会简化,因为此时只需一个协调方程。根据对称性观察到的另一个结果为力矩  $M_a$  等于  $M_b$ 。所以,图 7-19 所示固定端梁的最终反力如下:

$$R_a = R_b = 0 \quad M_a = M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \quad (7-31)$$

可用于分析图 7-19 所示梁的另一途径,是求解挠曲线微分方程的方法。对于此例,其微分方程变为

$$EIv'' = -M - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \quad (7-32)$$

要注意,该方程同时包含了弯矩影响(试与方程 6-9a 比较)和温度影响(见方程 6-42)。梁中的弯矩表达式为

$$M = R_a x - M_a$$

然而,先前已注意到,根据梁的对称性质我们能看出没有竖直反力,因此,可令  $R_a = 0$  并且得出

$$EIv'' = M_a - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

该方程的第一次积分得到

$$EIv' = M_a x - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} x + C_1$$

关于斜率的两个边界条件(当  $x=0$  和  $x=L$  时,  $v'=0$ ) 给出  $C_1=0$  和  $M_a = \alpha EI(T_2 - T_1)/h$ , 这与方程(7-31)一致。以此方式求出固定端力矩之后,我们即可认为已将静不定问题解出。然而,如果欲求挠曲线方程,可再进行一次积分。所得挠度  $v$  的表达式有时是意想不到的。

## 7.8 梁端的水平位移

假设  $AB$  梁的一端为铰接支座,而另一端可以水平地自由移动(图 7-20a)。当梁由于承载而弯曲时, $B$  端将从  $B$  到  $B'$  沿水平方向移动一个很小的距离  $\lambda$ 。位移  $\lambda$  等于梁的原长  $L$  和弯曲后梁的弦长  $AB'$  之差,为求出这个距离,我们开始先考虑沿梁的弯曲轴

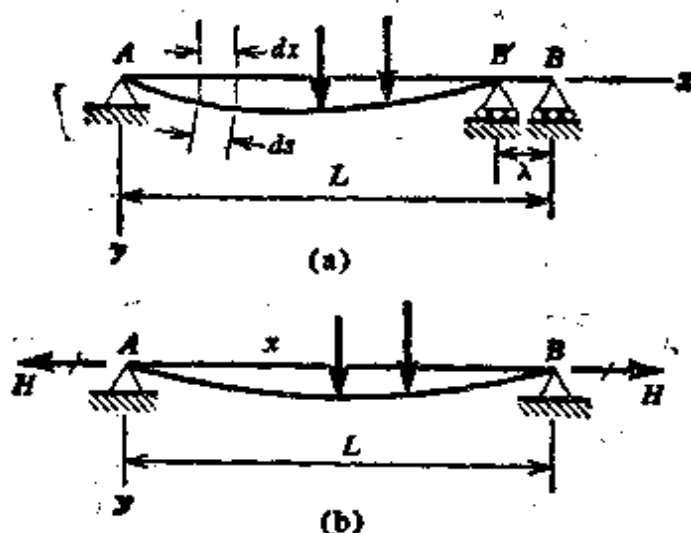


图 7-20. (a) 梁端的水平位移; (b) 不能移动支承的梁的水平反力。

线量得长为  $ds$  的一个微段。此微段在  $x$  轴上的投影长度为  $dx$ 。长度  $ds$  和其水平投影之差为

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dv^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - dx \quad (a)$$

式中  $v$  代表梁的挠度。现在，由二项式定理我们得知，只要  $t$  在数值上小于 1，则

$$(1+t)^{1/2} \approx 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \dots$$

如果  $t$  与单位 1 相比很小，与前两项相比，我们可略去包含  $t^2$ ， $t^3$  等等各项，而得出

$$(1+t)^{1/2} \approx 1 + \frac{t}{2} \quad (7-33)$$

方程(a)中的  $(dv/dx)^2$  这一项总是非常小的，因此，使用方程(7-33)，我们就可将方程(a)重新写为

$$ds - dx = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right] - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

如果将这一表达式沿梁长积分，便得出梁的总长和弦长  $AB'$  之差  $\lambda$ 。此差值为

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \quad (7-34)$$

因此，每当梁的挠曲线微分方程已知时，我们就可使用方程(7-34)

得出水平位移  $\lambda$ , 通常它是一个很小的量。

如果梁两端的水平位移受阻, 如图 7-20b 所示, 那么在每端将产生水平反力  $H$ 。当弯曲发生时, 此力将使梁轴伸长。此外,  $H$  力本身将对梁中的弯矩有影响, 因而也对梁的挠曲线有影响。为了确定力  $H$  的重要性, 让我们只求它的一个近似表达式, 而不打算对这一复杂问题作精确分析\*。梁挠曲线形状的一种合理近似是一条具有以下方程的抛物线。

$$v = \frac{4\delta x(L-x)}{L^2} \quad (\text{b})$$

式中  $\delta$  为 midpoint 挠度。将表达式 (b) 代入方程 (7-34), 可求出相应于这一假设的挠曲形状的距离  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{8\delta^2}{3L}$$

使梁伸长这个量所需的力  $H$  为

$$H = \frac{EA\lambda}{L} = \frac{8EA\delta^2}{3L^2}$$

而相应的轴向拉应力为

$$\sigma = \frac{H}{A} = \frac{8E\delta^2}{3L^2} \quad (\text{c})$$

梁中点的挠度  $\delta$  与其长度相比通常很小, 例如, 比值  $\delta/L$  可能为  $1/500$ 。使用这个数值, 并假设材料为  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$  的钢, 由方程 (c) 我们看出, 应力  $\sigma$  仅为  $2.2 \text{ N/mm}^2$ 。因此, 由于  $H$  引起的轴向应力与梁的容许弯曲应力相比是很小的。此外, 实际上梁的端部不可能刚性地支持着, 总会发生某些微小的水平位移, 从而减小了上面所计算的轴向力。于是我们得出结论: 习惯上略去水平约束力的影响, 并假设梁的一端位于滚柱上是有道理的\*\*。

## 习 题

**7.2-1** 试用在第 7.2 节中得到的结果, 绘出图 7-2 所示有支承悬臂

\* 在高等材料力学中详细讨论同时具有轴向载荷和横向载荷作用的梁。

\*\* 具有不移动的支座的梁, 其更精确的分析见参考文献 7-7。

梁的剪力和弯矩图,并注明包括最大值和最小值在内的所有关键性纵坐标。

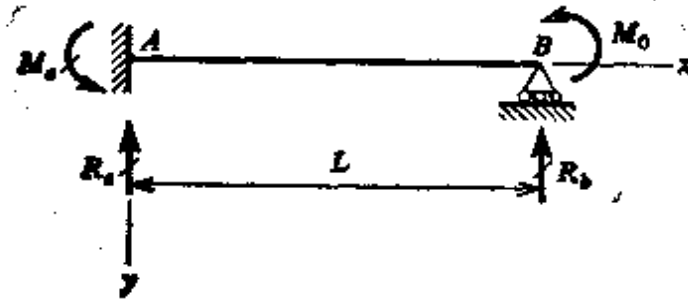
7.2-2 试确定图 7-2 所示的支承悬臂梁的最大挠度  $\delta_{\max}$  的位置及其值。

7.2-3 由解挠曲线的二阶微分方程,并以反力矩  $M_0$  作为多余力,确定图 7-2 所示的支承悬臂梁的反力。

7.2-4 由解挠曲线的四阶微分方程确定图 7-2 所示的支承悬臂梁的反力。

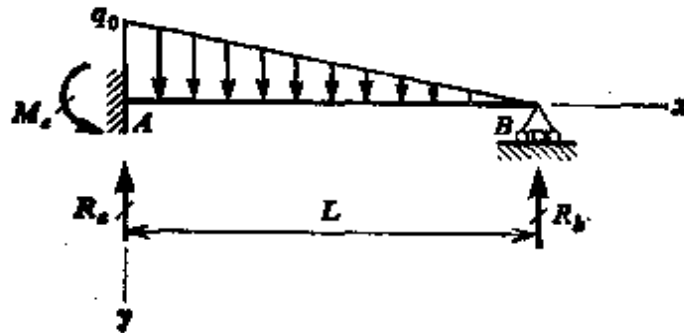
7.2-5 试导出承受均布载荷的固定端梁的挠曲线方程,并确定其反力(见图 7-9)。

7.2-6 试确定图中所示支承悬臂梁的反力和挠曲线方程。梁上的载荷为作用于  $B$  端处的力偶  $M_0$ 。



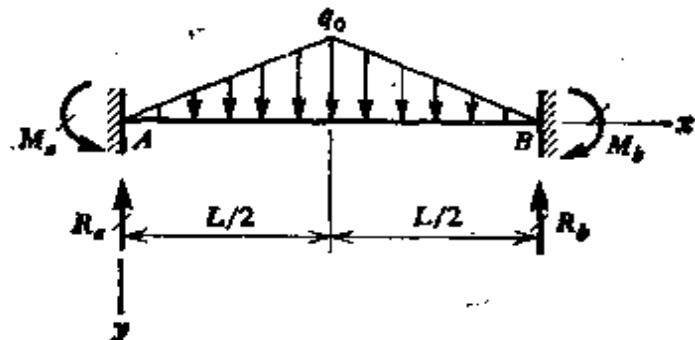
习题 7.2-6

7.2-7 试求出承受三角形分布载荷的支承悬臂梁的挠曲线方程,并求出梁的全部反力(见图)。



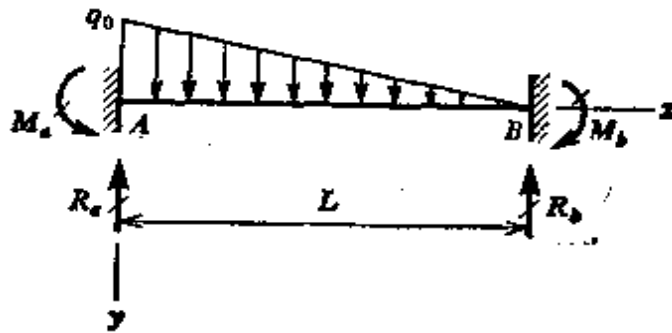
习题 7.2-7

7.2-8 试求图示固定端梁的反力和挠曲线方程。



习题 7.2-8

7.2-9 试导出承受三角形分布载荷的固定端梁的挠曲线方程, 并确定其全部反力(见图).



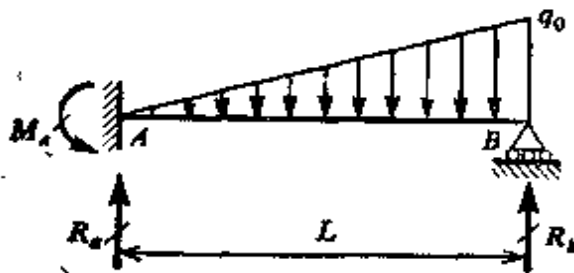
习题 7.2-9

用叠加法解题 7.3-1 至 7.3-15

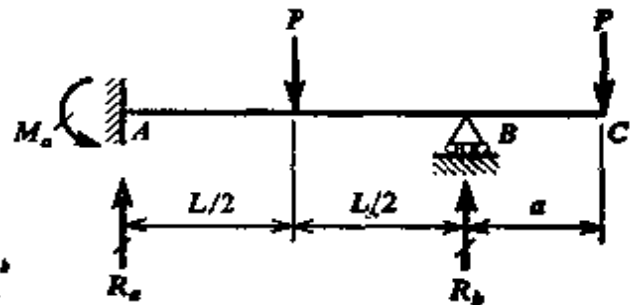
7.3-1 选择反力  $R_B$  作为多余反力, 求出图 7-6a 所示双跨梁的全部反力, 同时画出梁的剪力和弯矩图.

7.3-2 试以反力  $M_A$  和  $R_B$  作为多余力, 求出用 7-7a 所示集中载荷作用下固定端梁的全部反力. 同时画出梁的剪力图和弯矩图.

7.3-3 试确定图中所示承受三角形载荷的支承悬臂梁的全部反力.



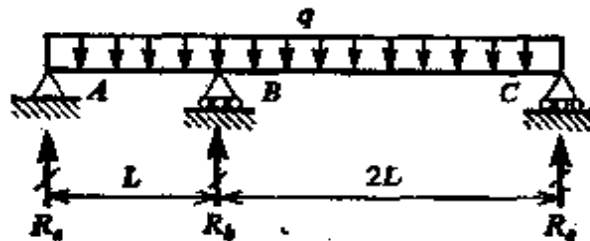
习题 7.3-3



习题 7.3-4

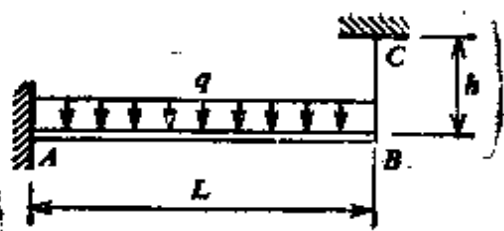
7.3-4 试求出图中所示梁的反力.

7.3-5 一两跨不相等的连续梁, 其上作用有均布载荷, 如图所示. 试求其全部反力.

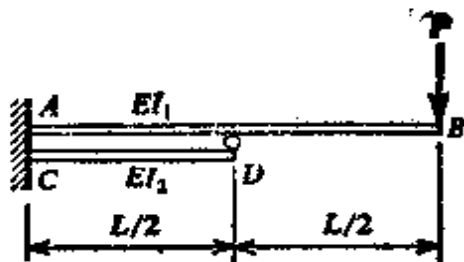


习题 7.3-5

7.3-6 图示悬臂梁 AB, 在它的自由端用缆索 BC 悬吊住, 在载荷作用之前, 缆索是拉紧的, 但没有受力. 试求在集度为  $q$  的均布载荷作用下, 缆



习题 7.3-6

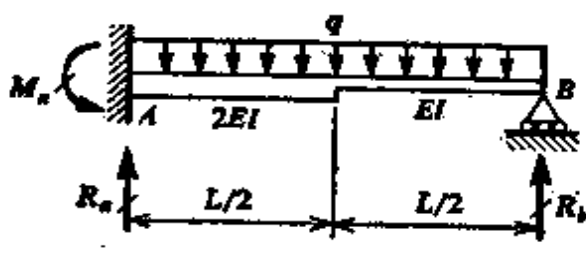


习题 7.3-7

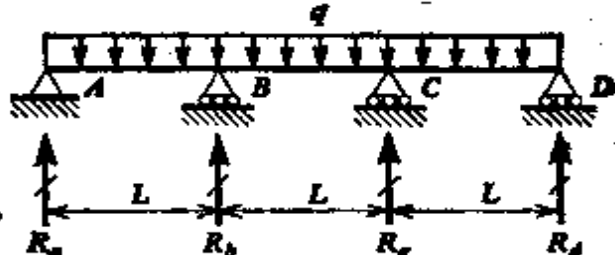
索中所产生的拉力  $T$ 。假设  $EI$  = 梁的抗弯刚度,  $EA$  = 缆索的轴向刚度。

**7.3-7** 两悬臂梁  $AB$  和  $CD$ , 支承如图所示, 在两梁之间的  $D$  处放置有辊子, 上面梁的抗弯刚度为  $EI_1$ , 下面梁的抗弯刚度为  $EI_2$ 。试求  $D$  处梁之间所传递的力  $F$ 。

**7.3-8** 图中绘有承受均布载荷的非棱柱形梁  $AB$ , 试求梁的全部反力。



习题 7.3-8



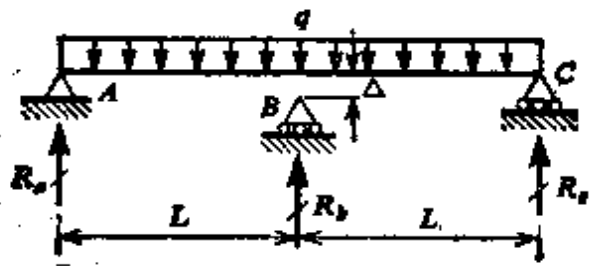
习题 7.3-9

**7.3-9** 试求出图中所示三跨连续梁反力的表达式。

**7.3-10** 试取支座处的力矩作为多余力, 求出在部分跨度上作用有均布载荷的固定端梁(图 7-8)的全部反力。

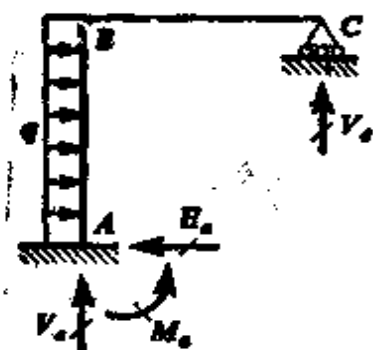
**7.3-11** 一根三跨连续梁(见习题 7.3-9 图), 在  $AB$  跨上作用有均布载荷, 而  $BC$  跨和  $CD$  跨上则无载荷, 试确定梁的反力。

**7.3-12** 一双跨梁, 在受载之前支承于  $A$  处和  $C$  处(见图), 梁与支座  $B$  之间有一微小的间隙  $\Delta$ 。当均布载荷作用于梁上时, 其间隙密合了, 同时三个支座处都产生了反力, 试问要使三个支反力相等, 间隙  $\Delta$  应为多大?

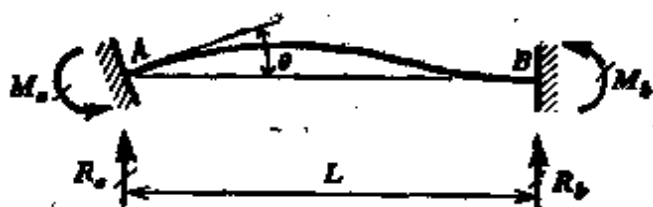


习题 7.3-12

**7.3-13** 一连续刚架  $ABC$ ,  $A$  处为固定支座,  $C$  处为滚动支座,  $B$  处为刚性角连接(见图)。试求刚架的全部反力。(注:略去元件的轴向变形,仅考虑弯曲的影响,同时假设每个元件的长度皆为  $L$ , 抗弯刚度皆为  $EI$ )。



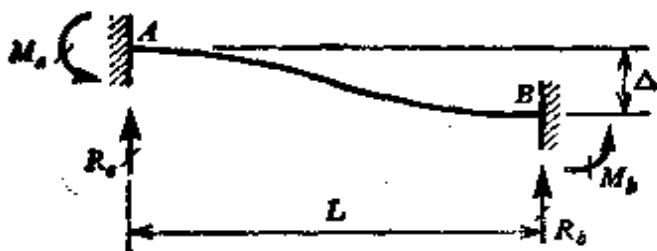
习题 7.3-13



习题 7.3-14

**7.3-14** 一固定端梁  $AB$ , 其左边的支座转过了一个微小角度  $\theta$  (见图)。试确定梁的反力。

**7.3-15** 一固定端梁  $AB$ , 其一端相对于另一端沿横向移动了距离  $\Delta$  (见图)。试求梁的反力。



习题 7.3-15

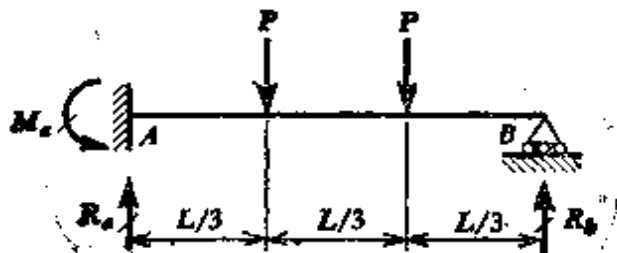
#### 用力矩-面积法解题 7.4-1 至 7.4-9

**7.4-1** 试求图 7-2 所示的承受均布载荷的支承悬臂梁的反力。

**7.4-2** 习题 7.2-6 图中所示的支承悬臂梁承受力偶  $M_0$  的作用。试求该梁的反力。

**7.4-3** 试确定习题 7.3-4 图中所示的外伸支承悬臂梁的全部反力。

**7.4-4** 有两个集中载荷作用在固定-简支梁上, 如图所示。试求该梁的反力。

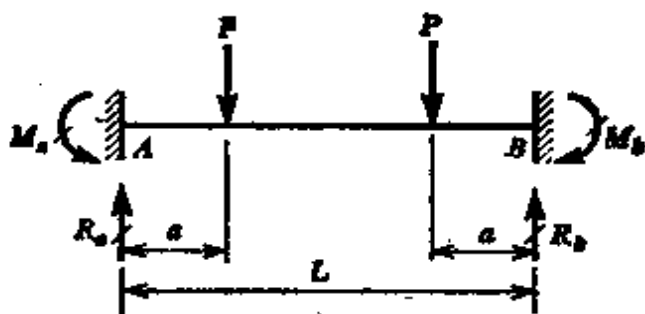


习题 7.4-4

**7.4-5** 试求在中点处作用集中载荷的固定端梁的反力(见图 7-3), 同时求出梁中点处的挠度。

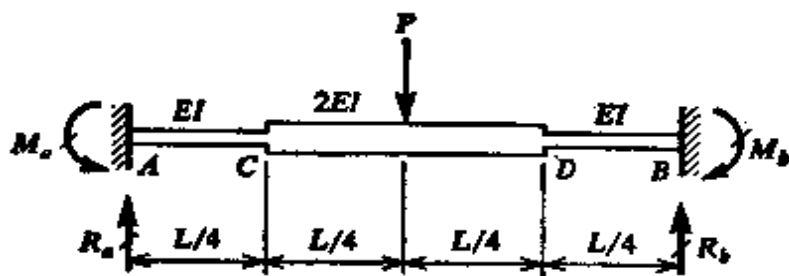
**7.4-6** 试确定承受均布载荷作用的固定端梁的反力和中点处的挠度(见图 7-9)。

**7.4-7** 试求承受两个集中载荷作用的固定端梁的反力(见图)



习题 7.4-7

**7.4-8** 试求图中所示承受集中力  $P$  作用的非棱柱形梁的固定端力矩。



习题 7.4-8

**7.4-9** 试求图 7-7a 所示固定端梁支座处的反力和载荷  $P$  作用处的挠度。

用有限差分法解习题 7.5-1 至 7.5-4

**7.5-1** 试求图 7-2 所示承受均布载荷的支承悬臂梁右端的反力  $R_B$ 。沿梁使用四个相等的区段。

**7.5-2** 试求习题 7.3-3 图中所示作用有三角形分布载荷的梁左端的反力矩  $M_A$ 。沿梁使用四个相等的区段。

**7.5-3** 试求在中点处作用有集中力  $P$  的固定端梁的固定端力矩  $M_A$  和  $M_B$ (见图 7-3)。将梁分成四个等长的区段。

**7.5-4** 试确定习题 7.3-5 中两跨连续梁支座  $B$  处的反力  $R_B$ 。取每个区段的长度等于  $L/2$ 。

用三弯矩方程解习题 7.6-1 至 7.6-10

**7.6-1** 求解习题 7.3-5。



7.6-2 求解习题 7.3-9.

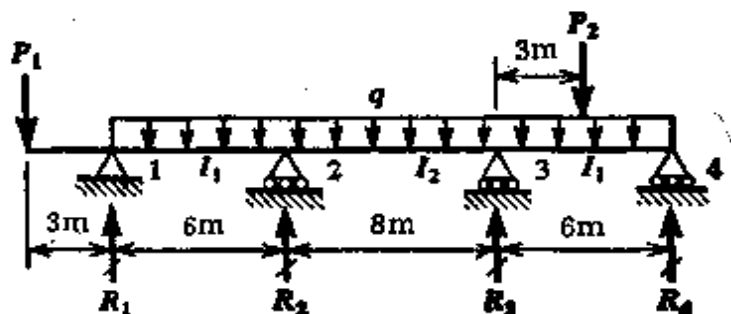
7.6-3 一根两跨连续梁, 在其整个长度上作用有集度为  $q$  的均布载荷. 假设当载荷  $q$  作用时, 中间支座下沉了距离  $\Delta$ , 试确定中间支座处的弯矩  $M$ . 两跨具有相同的长度  $L$  和相同的弯曲刚度  $EI$ .

7.6-4 一根三跨连续梁, 每跨长为  $L$ , 在每跨中点处作用有集中载荷  $P$ , 试画出该梁的剪力和弯矩图.

7.6-5 一根三跨连续梁, 在第一跨上作用有集度为  $q$  的均布载荷, 而第二和第三跨上无载荷作用, 试求每一支座处的弯矩. 假设每跨的长度为  $L$ .

7.6-6 一根四跨连续梁, 在其整个长度上作用有集度为  $q$  的均布载荷, 假设每跨的长度为  $L$ , 试确定支座处的弯矩并画出剪力和弯矩图.

7.6-7 一连续梁支于四个支座上, 其左端有一外伸臂, 如图所示, 试求支座处的弯矩. 假设  $P_1=5\text{ kN}$ ,  $q=6\text{ kN/m}$ ,  $P_2=9\text{ kN}$ ,  $I_1=50\times 10^6\text{ mm}^4$ ,  $I_2=45\times 10^6\text{ mm}^4$ .

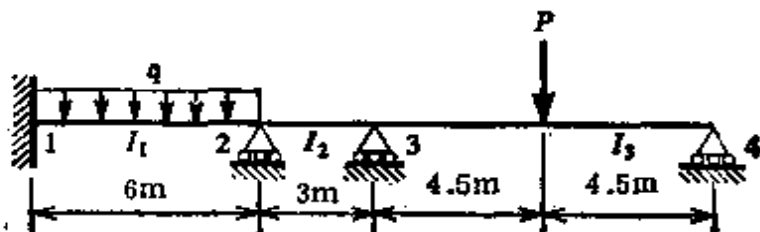


习题 7.6-7

7.6-8 参见图 7-16a 所示带有固定支座的连续梁, 假设  $L_1=L_2=L$ ,  $I_1=I_2$ , 且  $P=0$ , 试确定由载荷  $q$  所引起的弯矩  $M_1$  和  $M_2$ .

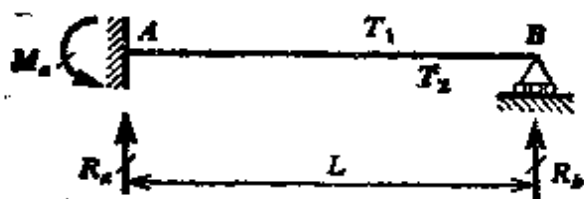
7.6-9 一根七跨等长的连续梁, 仅中间跨上作用有均布载荷  $q$ , 试确定各支座处的弯矩.

7.6-10 图中所示连续梁, 其 1 处固支, 2, 3 和 4 处简支, 均布载荷  $q=80\text{ kN/m}$ ,  $P=44\text{ kN}$ . 三跨的惯性矩分别为  $I_1=10^9\text{ mm}^4$ ,  $I_2=0.5\times 10^9\text{ mm}^4$ ,  $I_3=3\times 10^9\text{ mm}^4$ . 在载荷作用下, 第 3 支座竖直下沉了  $\Delta=2\text{ mm}$ , 试求梁的弯矩  $M_1$ ,  $M_2$  和  $M_3$ . (假设  $E=200\text{ kN/mm}^2$ ).

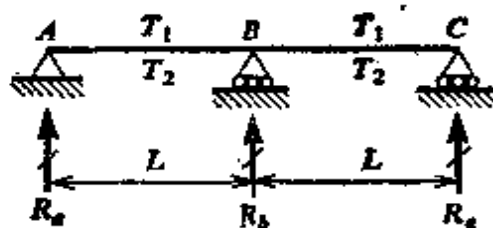


习题 7.6-10

7.7-1 一支承的悬臂梁,左端  $A$  固支,右端  $B$  简支,其上表面温度为  $T_1$ ,下表面的温度为  $T_2$ (见图),试求梁的反力。



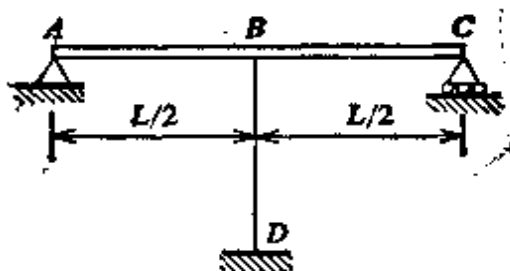
习题 7.7-1



习题 7.7-3

7.7-2 一根双跨梁,受到温差的影响(见图),试求该梁的反力。

7.7-3 一简支梁  $AC$ , 和缆索  $BD$  连接在一起\*, 缆索是拉紧的,但没有初始拉力(见图),缆索的长度为  $H$ , 截面积为  $A$ . 试求当其温度下降  $T$  度时,缆索中的拉力  $S$ , 假设梁和缆索是用相同材料制成的。



习题 7.7-3

7.8-1 试计算承受集度为  $q$  的均布载荷的简支梁一端的水平移动量  $\lambda$ 。

7.8-2 假设一根两端为固定铰支座的梁(见图 7-20b), 其挠曲线由方程  $v = \delta \sin \frac{\pi x}{L}$  给定。试确定梁两端的水平力  $H$ 。

\* 原书误为  $AB$  和  $OD$ ——译者注

## 第八章 非对称弯曲

### 8.1 承受斜向载荷的对称梁

在第五章建立梁弯曲的理论时, 我们把注意力只限于具有轴向对称平面的梁(图 5-1 至 5-3 的  $xy$  平面)。此外, 我们假设横向载荷作用在同一平面内, 因此梁亦在此平面内弯曲。在这些条件下, 中性轴和竖直对称轴均为横截面的形心主轴。另外, 由于弯曲所产生的正应力随距中性轴的距离线性地变化, 并根据弯曲公式  $\sigma_x = My/I$  (见图 5-3 和方程 5-10) 进行计算。

本章我们将研究各种非对称弯曲的例子, 每当上述假设不满足时, 就会发生非对称弯曲。当我们有一根对称梁(横截面内有两根对称轴), 但载荷作用在与对称轴斜交的方向上时, 就会发生最简单的非对称弯曲情况。当梁本身不对称时, 则发生另一类型的非对称弯曲, 这个问题将在下节讨论。

如果对称梁上具有斜向载荷, 如图 8-1a 的悬臂梁所示的那样, 就可使用叠加法求得其应力和挠度。此载荷可以分解为两个作用在对称平面内的分量, 然后就可分别解决每个载荷下的弯曲问题。通过叠加这些结果, 求得最终的应力和挠度。对于图 8-1a 所绘的梁, 载荷沿  $y$  方向的分量为  $P \cos \theta$ , 而沿负  $z$  方向为  $P \sin \theta$ 。在距固定端为  $x$  的一个中间截面上, 相应的弯矩为

$$M_x = (P \cos \theta)(L-x) \quad M_y = (P \sin \theta)(L-x)$$

在图 8-1b 中, 弯矩  $M_x$  和  $M_y$  均以其正向表示, 注意, 当每个弯矩的矢量(力矩的指向按右手定则绘出)沿其相应轴的正向时假设它为正。合成弯矩矢量  $M$  也示于图中, 它的矢量与  $z$  轴成  $\theta$  角。

因为力矩  $M_x$  和  $M_y$  均为梁对称平面内的弯矩, 所以相应的应力可根据弯曲公式求出。如果我们研究横截面上坐标为  $y$  和  $z$  的任一点  $A$  (图 8-1b), 我们得知, 此点的正应力为

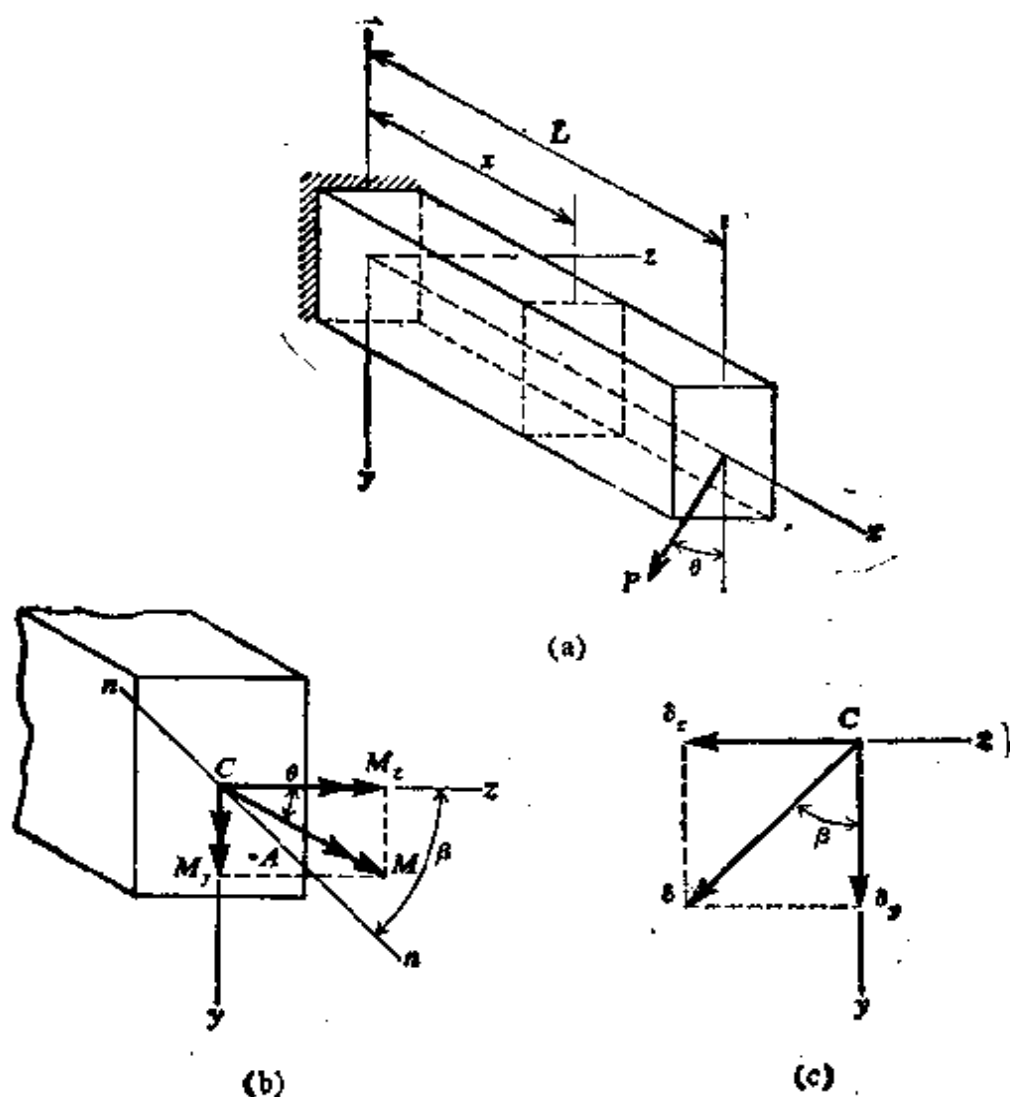


图 8-1. 承受斜向载荷的对称梁。

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (8-1)$$

式中  $I_y$  和  $I_z$  分别为对  $y$  和  $z$  轴的惯性矩。

最大应力将发生在矩中性轴最远的点。中性轴的位置可通过使应力  $\sigma_x$  (方程 8-1) 等于零来确定。将  $M_y = M \sin \theta$  和  $M_z = M \cos \theta$  代入方程 (8-1), 然后使  $\sigma_x$  等于零, 我们得到

$$\frac{\sin \theta}{I_y} z - \frac{\cos \theta}{I_z} y = 0 \quad (8-2)$$

为中性轴 (图 8-1b 中的  $mn$  线) 的方程。中性轴与  $z$  轴之间的夹角  $\beta$  用下列表达式来定义:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta \quad (8-3)$$

一般来说,角 $\beta$ 和 $\theta$ 不同,因此中性轴并不垂直于载荷平面。只有当 $\theta=0^\circ$ ,  $\theta=90^\circ$ , 或 $I_x=I_y$ 时才出现例外的情形。在这三种情况中的第一种情况下,载荷位于主平面 $xy$ 内,并且中性轴为 $z$ 轴。第二种情况与此类似,只是载荷位于 $xz$ 平面内,且 $y$ 轴为中性轴。最后,在第三种情况下,我们有 $I_x=I_y$ ,这意味着主惯性矩是相等的。在此情况下,所有通过形心的轴都有相同的惯性矩,并且均为主轴。因此,载荷平面不论其方向如何总是主平面,而中性轴总是与它垂直。

受到斜向载荷的对称梁的挠度可对载荷的两个分量分别求出,然后将其结果叠加。例如,在图8-1a所示悬臂梁的情况下,自由端沿正 $y$ 方向和负 $z$ 方向的挠度为

$$\delta_y = \frac{PL^3 \cos \theta}{3EI_x} \quad \delta_z = \frac{PL^3 \sin \theta}{3EI_y}$$

如图8-1c所示,总挠度 $\delta$ 为

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} \quad (8-4)$$

合成挠度矢量 $\delta$ 和 $y$ 轴间的夹角 $\beta$ 由下列方程给出:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta_z}{\delta_y} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \theta$$

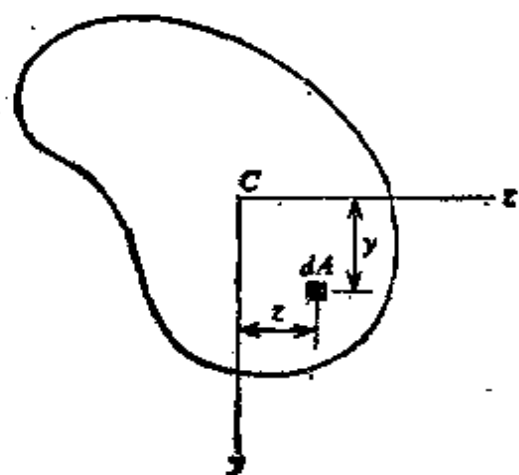
它与方程(8-3)相同。由此我们断定,合成挠度位于和中性轴相垂直的平面内。

## 8.2 非对称梁的纯弯曲

现在我们有条件研究一根具有非对称截面的梁(图8-2)。假设弯矩作用在横截面上,让我们在横截面平面内,任意选择两根互相垂直的轴 $y$ 和 $z$ ,研究使 $z$ 轴为中性轴所需的条件。为此,我们看出在距中性轴为 $y$ 的面积微元 $dA$ 上的应力按方程(5-5)给出为 $\sigma_x = \kappa E y$ ,而且微元上相应的力为 $\kappa E y dA$ 。已知此力之后,我们现在便可用静力学求得应力合力。因为没有轴向力,所以沿 $x$ 方向的合力必为零,因此,

$$\kappa E \int y dA = 0 \quad \text{或} \quad \int y dA = 0 \quad (a)$$

式中的积分遍及整个横截面面积。方程(a)表明,中性轴必通过横截面的形心,从而确定了 $y$ 与 $z$ 轴的原点。



其次,让我们研究弯矩。绕 $z$ 轴的合成弯矩为

$$\{M_z\} = -\kappa E \int y^2 dA = -\kappa E I_{yz} \quad (b)$$

绕 $y$ 轴的合成弯矩为

$$\{M_y\} = -\kappa E \int yz dA = -\kappa E I_{yz} \quad (c)$$

图 8-2. 具有任选之轴的非对称截面

式中  $I_{yz}$  为横截面面积对  $y$  和  $z$  轴的惯性积(在方程 b 和 c 中使用绝对值符号的理由是因为我们对弯矩和曲率没有建立一致的符号约定,然而,这件事在此阶段无关紧要)。由方程(b)和(c),我们可以推出一些有趣的结论。如果以 $z$ 轴为中性轴发生弯曲,我们看出绕 $y$ 轴以及绕 $z$ 轴的弯矩都必定存在。这两个弯矩可以合成为一个合力矩,其矢量与 $y$ 和 $z$ 轴均成倾斜方向,因此,施加弯矩的平面不垂直于中性轴。然而,如果 $y$ 和 $z$ 轴被选为横截面的形心主轴,那么  $I_{yz} = 0$ , 且  $M_y$  消失(见方程 c)。此种情况意味着所需作用在横截面上唯一的力矩是  $M_z$ , 它是作用在  $xy$  平面内的力矩,其矢量沿  $z$  轴(中性轴)方向。

于是,我们得出如下重要结论。当一个非对称梁处于纯弯状态下,仅当 $y$ 和 $z$ 轴为横截面的形心主轴时,其弯曲平面( $xy$ 平面)才垂直于中性面( $yz$ 平面)。所以,如果弯矩作用在主平面内,该平面即变为弯曲平面,中性轴与它相垂直,常用的弯曲理论是成立的。

上述结果提出了一个相对简捷的方法去分析承受任意弯矩  $M$  的非对称梁(图 8-3)。我们开始先用附录 A 中所述的方法确定形心主轴  $y$  和  $z$ 。然后再将力偶  $M$  沿这两个方向分解为  $M_y$  和  $M_z$ 。力偶  $M_y$  作用在  $xz$  平面内,当它的矢量沿着  $y$  轴的正向时,假设它为正。类似地,力偶  $M_z$  作用在  $xy$  平面内,当它的矢量沿

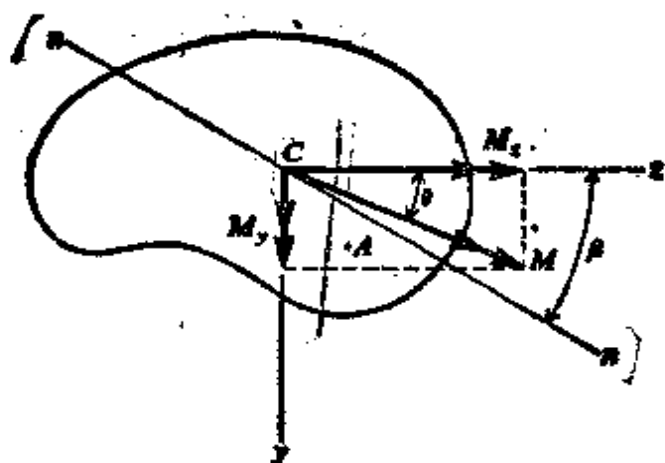


图 8-3. 承受沿形心主轴方向分解为两个分量的弯矩  $M$  的非对称截面。

着  $z$  轴的正向时为正。这些分量为

$$M_y = M \sin \theta \quad M_z = M \cos \theta \quad (d)$$

式中  $\theta$  为矢量  $M$  与  $z$  轴之间的夹角。因为力偶  $M_z$  作用在主平面内, 我们知道, 它将产生以  $z$  轴为中性轴的梁弯曲, 因此, 纯弯时所有常用的应力和挠度公式对此情况都适用。同样, 我们看出力偶  $M_y$  将产生以  $y$  轴为中性轴的弯曲。于是, 任一点  $A$  处的总弯曲应力为

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (8-5)$$

式中  $y$  和  $z$  为点  $A$  的坐标。该方程和对于对称截面所导出的方程 (8-1) 是相同的。

中性轴  $mn$  (见图 8-3) 为零应力线, 其方程系由 8.1 节中所用的相同方法求得, 该方程为

$$\frac{\sin \theta}{I_y} z - \frac{\cos \theta}{I_z} y = 0 \quad (8-6)$$

还有, 中性轴和  $z$  轴之间的夹角  $\beta$ , 亦可如以前那样求出, 该方程为

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta \quad (8-7)$$

我们再次观察到, 一般来说, 角  $\theta$  和  $\beta$  是不相等的, 所以中性轴并不垂直于施加力偶  $M$  的作用面。只有上节中提及的三种特殊情形例外。

弯矩  $M_y$  和  $M_z$  产生的挠度可由常用的挠度公式求得。由  $M_y$

产生的挠度将全部位于  $xz$  平面内，而由  $M_x$  产生的挠度将位于  $xy$  平面内。这些挠度叠加起来可以得出合成挠度，它位于垂直中性轴的平面内。

**纯弯的一般理论** 在上述讨论中，我们叙述了一种分析方法，它要求我们确定横截面的中性轴，然后将弯矩沿着主轴分解为两个分量。这一方法是根据这样的事实提出的：当利用主轴时，我们能够使用通常的应力公式和挠度公式。然而，也有另外一些情况，利用横截面内非主轴为参考轴倒是方便的。图 8-4 所示的 Z 形截面就是这类例子，其  $y$  和  $z$  轴不是主轴，但用它们作计算却很方便。

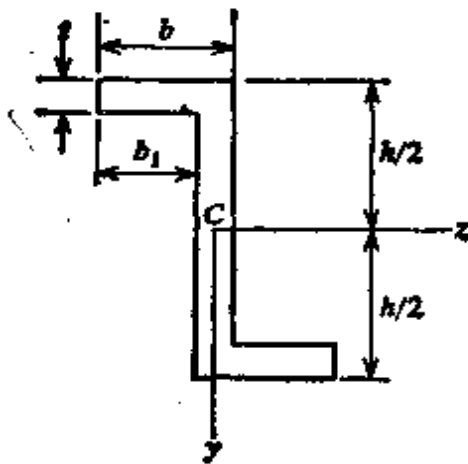


图 8-4. 形心轴不是主轴的非对称 Z 形截面。

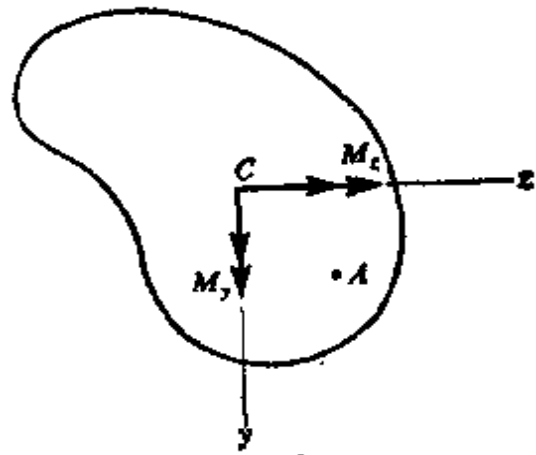


图 8-5. 形心轴不是主轴的非对称横截面。

为了导出与主轴无关的更为一般的弯曲理论的方程，让我们研究图 8-5 所示的非对称横截面，并假设  $y$  和  $z$  为形心轴但不是主轴。另外我们还假设弯曲力偶  $M_y$  和  $M_z$  作用在横截面上，如图所示。在此一般情况下，梁的弯曲将在  $xy$  和  $xz$  两个平面内同时发生。让我们以  $\kappa_y = 1/\rho_y$  表示  $xy$  平面内的曲率，其中  $\rho_y$  为曲率半径，并以  $\kappa_z = 1/\rho_z$  表示  $xz$  平面内的曲率。当梁在  $xy$  平面内的挠曲形状向下凹，亦即沿着正  $y$  方向凹时，曲率  $\kappa_y$  将假设为正。同样，当在  $xz$  平面内的挠曲形状沿着正  $z$  方向凹时， $\kappa_z$  将假设为正。这些符号约定示于图 8-6 中。于是坐标为  $y$  和  $z$  的点  $A$  处的应力为



$$\sigma_x = -\kappa_y E y - \kappa_z E z \quad (e)$$

由于所假设的曲率符号约定，式中的负号是需要的。

现在可以计算横截面上的应力合力。因为沿  $x$  方向的合力为零，我们得到

$$\int \sigma_x dA = 0$$

或 
$$\kappa_y \int y dA + \kappa_z \int z dA = 0$$

这个方程自动被满足，因为坐标轴的原点位于横截面的形心处，故而方程中的两个积分均为零。绕  $y$  轴的力矩  $M_y$  为

$$M_y = \int \sigma_x z dA = -\kappa_y E \int yz dA - \kappa_z E \int z^2 dA$$

或 
$$M_y = -\kappa_y E I_{yz} - \kappa_z E I_z \quad (f)$$

以类似的方法，我们得到绕  $z$  轴的力矩

$$M_z = -\int \sigma_x y dA = \kappa_y E \int y^2 dA + \kappa_z E \int yz dA$$

或 
$$M_z = \kappa_y E I_y + \kappa_z E I_{yz} \quad (g)$$

联解方程 (f) 和 (g)，我们得到以弯矩表示曲率的如下表达式：

$$\kappa_y = \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad \kappa_z = -\frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad (8-8 a, b)$$

最后，将这些表达式代入方程 (e)，我们得到应力  $\sigma_x$  的公式：

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (8-9)$$

最后的这个方程为广义弯曲公式，当绕任意两根互垂的形心轴作用的弯矩  $M_y$  和  $M_z$  已知时，可用该式计算梁中的弯曲应力。这些轴并非一定是主轴。

现在可以识别几种特殊的弯曲情况。假设弯矩  $M_z$  存在，但弯矩  $M_y$  为零。例如，在图 8-4 所示的 Z 形截面的弯曲中，可能出现这种情况。于是曲率的表达式简化为

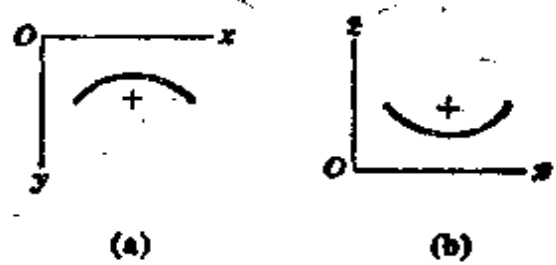


图 8-6. 曲率的符号约定：(a) 正曲率  $\kappa_y$ ；(b) 正曲率  $\kappa_z$ 。

$$\kappa_y = \frac{M_z I_y}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad \kappa_z = -\frac{M_y I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad (8-10 a, b)$$

而应力为

$$\sigma_x = \frac{M_z (I_{yz} z - I_y y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (8-11)$$

此外,如果两根轴为主轴,从而  $I_{yz} = 0$ , 这些方程进一步简化为

$$\kappa_y = \frac{M_z}{E I_z} \quad \kappa_z = 0 \quad \sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \quad (8-12 a, b, c)$$

这些均为在主平面  $xy$  内弯曲时的常用方程。

如果力矩  $M_y$  和  $M_z$  两者同时作用,而且两轴均为主轴,那么我们又可令  $I_{yz}$  等于零,而方程(8-8)和(8-9)简化为

$$\kappa_y = \frac{M_z}{E I_z} \quad \kappa_z = -\frac{M_y}{E I_y} \quad (8-13 a, b)$$

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad (8-14)$$

注意,最后一个方程与方程(8-5)相同。

### 8.3 非对称梁由于横向载荷产生的弯曲

在上节中,全部讨论均处理非对称梁的纯弯曲。现在出现的问题是,若梁由于横向载荷而弯曲,此横向载荷除产生弯矩外,也产生剪力,此时该梁的性态如何。为了帮助了解这一问题的性质,让我们参看图 8-7a 所示的非对称悬臂梁。在该梁的自由端处,力  $P$  沿平行于  $y$  轴的竖直方向作用。因为  $z$  轴为一根对称轴,故  $y$  与  $z$  轴均为形心主轴(图 8-7b)。

让我们假设载荷  $P$  使梁绕  $z$  轴产生弯曲,亦即  $z$  轴为中性轴。于是,在梁的任一中间横截面上将存在两种应力合力:绕  $z$  轴的弯矩  $M_z$  和沿  $y$  方向的剪力  $V_y$  (等于  $P$ ) (图 8-7b)。相应于这两种应力合力,将在横截面上产生正应力和剪应力。自然,正应力的合力为弯矩  $M_z$ ,而剪应力的合力为剪力  $P$ 。这个合成剪力的作用线将通过  $z$  轴上某一点  $S$ ,通常该点不会与形心  $O$  相吻合。此点称为梁横截面的剪心或弯心。如果载荷  $P$  并未通过剪心作用,

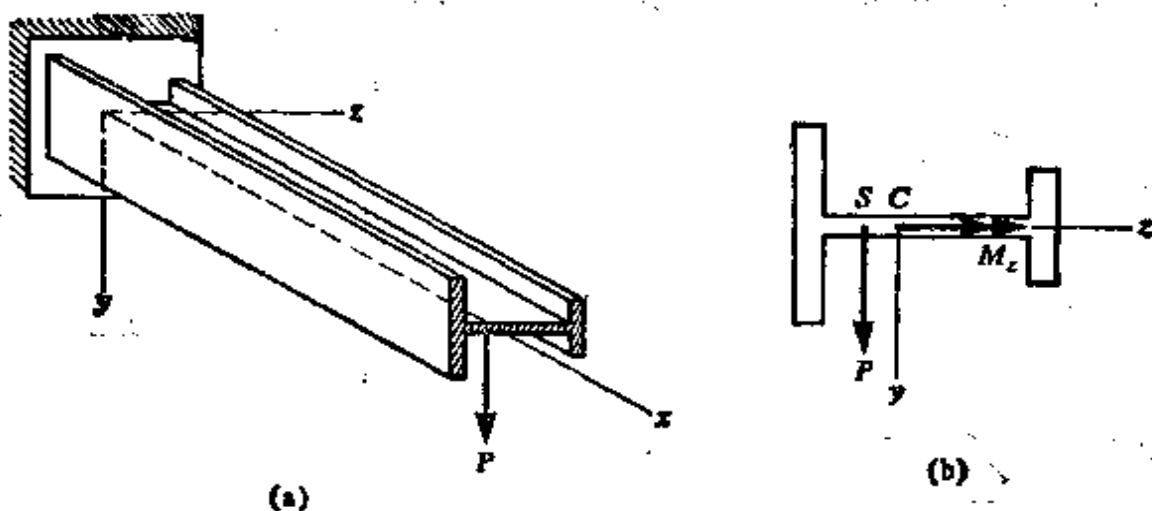


图 8-7. (a)受横向载荷的非对称梁; (b)表明剪心  $S$  和形心  $C$  的梁横截面.

就会产生扭动并使梁发生扭转.

现在我们已经得到一个重要的观察结果, 即作用在非对称梁上的载荷通常将产生梁的弯扭组合. 只有在所加的载荷通过剪心  $S$  时, 才出现通常的无扭动的弯曲. 因此, 剪心位置的确定是很有意义的.

对于图 8-7 所示的梁, 横截面上剪心的位置比较容易确定. 我们可把该梁视为由三个矩形部分即两个翼缘和一个腹板所组成(图 8-8). 所有这三部分都在  $xy$  平面内弯曲, 因此弯曲时具有相同的曲率, 所以每部分负担的弯矩与其对  $z$  轴的惯性矩成正比:

$$\alpha = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2} = \frac{M_3}{EI_3}$$

其中  $M_1$ ,  $M_2$  和  $M_3$  分别为 1, 2, 3 部分所负担的弯矩, 而  $I_1$ ,  $I_2$  和  $I_3$  为它们各自对  $z$  轴的惯性矩. 因为  $I_3$  与  $I_1$  和  $I_2$  相比是很小的, 故我们可略去腹板的影响, 并假设所有载荷均由两个翼缘负担, 因此我们有

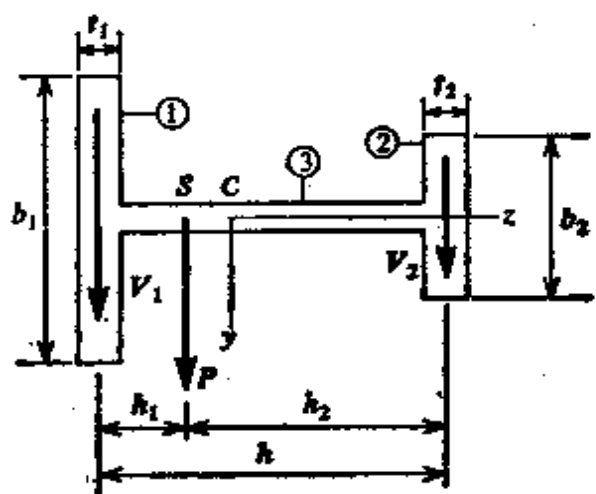


图 8-8. 表明剪心  $S$  位置的非对称 I 字梁横截面.

$$\frac{M_1}{I_1} = \frac{M_2}{I_2}$$

和 
$$M_1 = \frac{M_0 I_1}{I_1 + I_2} \quad M_2 = \frac{M_0 I_2}{I_1 + I_2}$$

式中  $M_0 = M_1 + M_2$  为总弯矩，两个翼缘中的剪力  $V_1$  和  $V_2$  如同弯矩的比例一样，所以

$$V_1 = \frac{V I_1}{I_1 + I_2} \quad V_2 = \frac{V I_2}{I_1 + I_2} \quad (a)$$

式中  $V = V_1 + V_2$  为总剪力（等于  $P$ ）。这些剪力合力的作用线确定了剪心  $S$  的位置（图 8-8）。

让我们以  $h$  代表两个翼缘中心之间的距离，以  $h_1$  和  $h_2$  代表从剪心  $S$  到两个翼缘中心的距离。于是，可以令对  $S$  点取矩之和等于零来确定这两个距离：

$$V_1 h_1 - V_2 h_2 = 0$$

或者使用方程 (a)，

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{I_2}{I_1} \quad (8-15)$$

代入  $I_1 = t_1 b_1^3 / 12$  和  $I_2 = t_2 b_2^3 / 12$ ，并使用方程  $h_1 + h_2 = h$ ，我们便从方程 (8-15) 得到距离  $h_1$  和  $h_2$  的下列公式：

$$h_1 = \frac{t_2 b_2^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3} \quad h_2 = \frac{t_1 b_1^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3} \quad (8-16 a, b)$$

这样，我们就确立了非对称  $I$  字梁的剪心位置。比较剪心  $S$  和形心  $O$  的位置可以表明，只要  $b_1 > b_2$  和  $b_1^3 t_1 > b_2^3 t_2$ ， $S$  永远位于  $O$  和左翼缘之间。

在特殊情况下，若  $y$  轴也是横截面对称轴，因而  $t_1 = t_2$  和  $b_1 = b_2$ ，则由方程 (8-16) 我们得到：

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$$

该式表明，剪心位于形心处。通常，对于横截面上具有两根对称轴的梁，如圆形，矩形或宽翼缘截面，其剪心与形心重合。因此，在这些情况下，通过形心作用的任何载荷将产生弯曲而无扭转。

若尺寸  $b_2$  变为零时，则发生另一种特殊情况，此时我们得一

T字形梁(图 8-9)。根据方程(8-16),我们得到  $h_1=0$  和  $h_2=h$ , 表明剪心位于腹板和翼缘的交接处。

通常,如果梁具有一根对称轴,如图 8-8 和 8-9 所示,剪心将永远位于对称轴上。任何一个通过剪心的载荷,即便它可能沿斜向作用,亦可将它分解为两个分量,一个沿  $z$  轴方向而另一个平行于  $y$  轴。第一个载荷将在  $xz$  平面内以  $y$  轴为中性轴产生弯曲。

第二个载荷在  $xy$  平面内以  $z$  轴为中性轴产生弯曲(无扭转)。如果载荷不通过剪心作用,它总能用一个通过此点的载荷和一个扭转力偶所代替。于是通过剪心的载荷效应可按上述方法处理,而扭转力偶的效应可用相应的扭转分析来处理。

确定剪心的位置并不总是一件容易的工作。对于实心截面和闭口空心截面,通常它靠近形心。这类截面一般都有较高的扭转刚度,因此,如果载荷作用在形心或形心附近,我们可以忽略扭转的影响。薄壁开口截面(如槽形和角形)对于抗扭是很弱的,在此情况下,当载荷不通过剪心时,知道剪心的位置以及计及扭转的影响都是很重要的。此类横截面将在下面两节中详细研究。

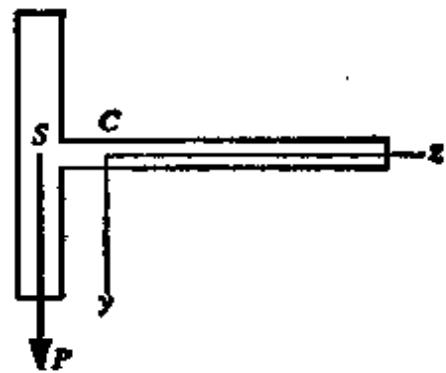


图 8-9. T字形梁的剪心。

#### 8.4 薄壁开口截面梁的剪应力

我们已经研究了具有两根对称轴的梁的剪应力分布(见第 5.3 节)。在那里说明了只要剪应力沿梁的宽度均匀分布,剪应力就可用下列公式给出:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad (5-18)$$

这种限制对于薄的矩形截面梁和宽翼缘梁的腹板以及少数其他形状的梁是满足的。现在我们要研究一种特殊类别的梁,称为薄壁开口截面梁,对于这种梁,我们可以用与推导方程(5-18)相同的方法来确定其剪应力。用两个特点区分所研究的这种梁:(1)横截面

的厚度与其全高或全宽相比是很小的，及(2)横截面是开口的，如 I 字梁或槽形梁的情况，而不是闭口的，如空心盒式截面那种情况。薄壁开口截面梁通常称为结构截面或型材截面，在工程中被广泛地采用。

我们将从考察横截面的中心线  $mm$  为任意形状的一根梁 (图 8-10a) 开始，来研究结构截面内的剪应力。  $y$  和  $z$  轴为横截面的形心主轴，而载荷  $P$  平行于  $y$  轴作用 (图 8-10b)。如果载荷  $P$  通过剪心  $S$ ，该梁就无扭转，在  $xy$  平面内将发生简单弯曲，而  $z$  轴就是中性轴。梁内任一点的正应力由下列方程给出：

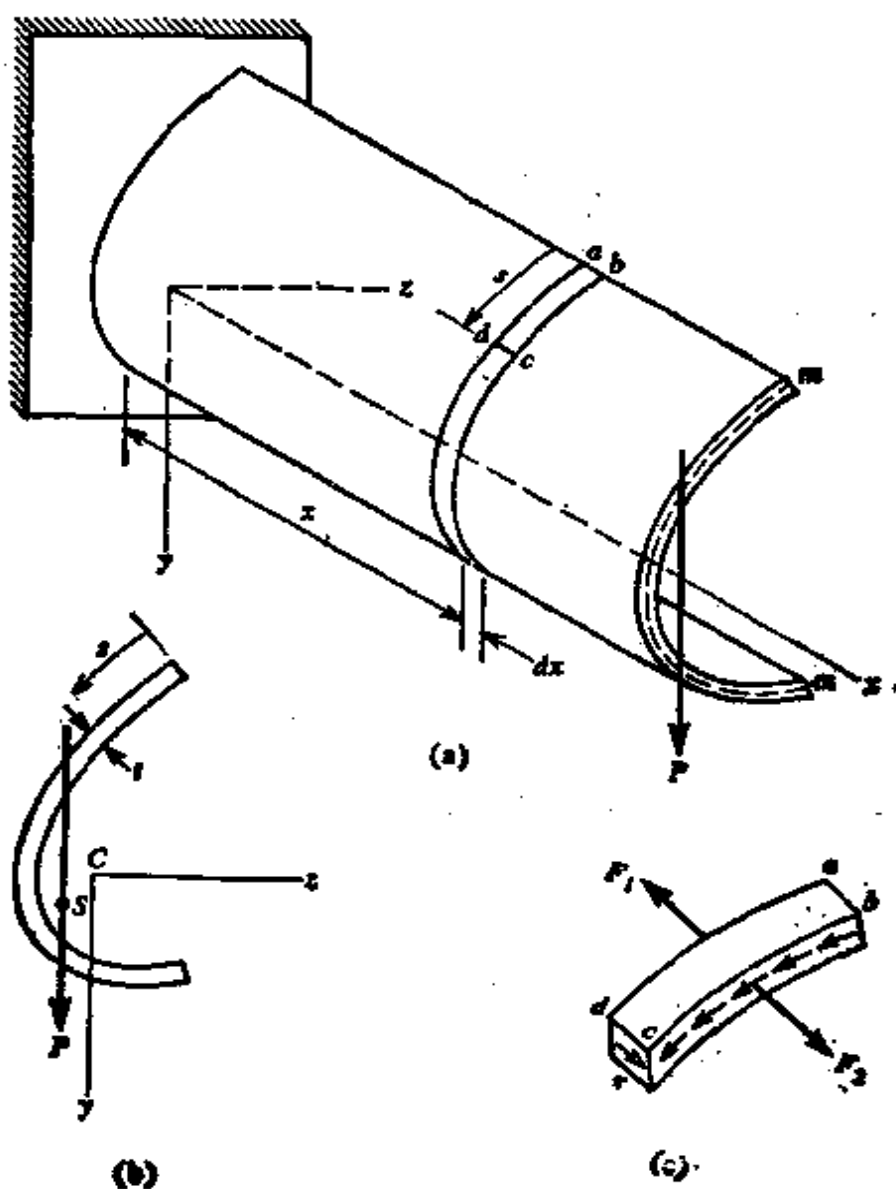


图 8-10. 薄壁开口截面梁中的剪应力 (注:  $y$  和  $z$  轴为形心主轴)。

$$\sigma_x = -\frac{M_x y}{I_x} \quad (a)$$

式中  $M_x$  为对  $z$  轴的弯矩, 而  $y$  为所考虑之点的坐标。

现在研究在相距  $dx$  的两个横截面之间切出的沿截面中线度量为  $S$  的微元体  $abcd$  (图 8-10a)。作用在  $ad$  面上的正应力的合力以  $F_1$  表示(图 8-10c), 而  $bc$  面上的合力以  $F_2$  表示。因为  $ad$  面上的弯矩比  $bc$  面上的大, 所以力  $F_1$  大于  $F_2$ 。因此, 为了保持静力平衡, 剪应力  $\tau$  必须沿  $cd$  面作用。这些剪应力必须平行于微元体的无应力表面, 并且必定伴随有作用在横截面  $ad$  和  $bc$  上成对的剪应力。将图 8-10c 所示微元体上沿  $x$  方向的力加起来, 我们得到

$$\tau t dx = F_1 - F_2 \quad (b)$$

式中  $t$  为  $cd$  处横截面的厚度, 亦即  $t$  为距横截面自由边为  $s$  处的厚度。使用方程(a), 我们断定

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x dA = -\frac{M_{x1}}{I_x} \int_0^s y dA$$

式中  $dA$  为微元体侧边  $ad$  上的一个面积微元,  $y$  为微元  $dA$  的坐标, 而  $M_{x1}$  为该横截面的弯矩。对于  $F_2$ , 可得出类似的表达式:

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x dA = -\frac{M_{x2}}{I_x} \int_0^s y dA$$

将  $F_1$  和  $F_2$  的表达式代入方程(b), 我们得到

$$\tau = \frac{M_{x2} - M_{x1}}{dx} \frac{1}{I_x t} \int_0^s y dA$$

$(M_{x2} - M_{x1})/dx$  这个量为弯矩的变化率, 并等于  $-V_y$ , 此处  $V_y$  为沿  $y$  方向的剪力(在图 8-10 中等于  $P$ )。所以, 剪应力的方程为

$$\tau = -\frac{V_y}{I_x t} \int_0^s y dA \quad (8-17)$$

此方程给出了横截面上距自由边为  $s$  的任一点处的剪应力。方程右边的积分代表从  $s=0$  到  $s=s$  的横截面面积对中性轴的一次矩。用  $Q_s$  表示该一次矩, 并且只用剪应力的绝对值, 我们便可将该方程写成较为简单的形式:

$$\tau = \frac{V_y Q_x}{I_x t} \quad (8-18)$$

它与方程(5-18)相类似。剪应力的方向沿横截面的中线，平行于截面的边缘，并假设沿壁厚  $t$  的集度为一常数。厚度本身不一定为常数，但可作为  $s$  的函数而变化。

横截面上任意点处的剪流等于此剪应力和该点处厚度的乘积，它为

$$f = \tau t = \frac{V_y Q_x}{I_x} \quad (8-19)$$

因为  $V_y$  和  $I_x$  为常数，故此方程表明剪流与  $Q_x$  成正比。在截面的顶边和底边，一次矩  $Q_x$  为零，那么剪应力就为零。剪流在这些端点之间连续地变化，且当  $Q_x$  为最大时达到最大值，最大  $Q_x$  发生在中性轴上。

如果图 8-10 所示的梁由通过剪心且平行于  $z$  轴的载荷而弯曲，那么  $y$  轴就是弯曲的中性轴。在此情况下，我们可重复同样的分析方法，并得到下列方程以取代方程(8-18)和(8-19)：

$$\tau = \frac{V_z Q_y}{I_y t} \quad f = \tau t = \frac{V_z Q_y}{I_y} \quad (8-20 \text{ a, b})$$

在这些方程中， $V_z$  为平行于  $z$  轴的剪力，而  $Q_y$  为对  $y$  轴的一次矩。

**例题** 研究宽翼缘梁的腹板平面内承受沿竖直方向作用的力  $P$  时的剪应力(图 8-11a)。

开始让我们先取该梁中间部分的一个横截面(8-11b)，并研究上翼缘右边部分的应力。梁的这部分的距离  $s$  将从剪应力为零的点  $a$  起向左量至断面  $bb$ 。点  $a$  和断面  $bb$  之间的面积为  $st_y$ ，此处  $t_y$  为翼缘的厚度，该面积形心距中性轴的距离为  $h/2$ (注意， $h$  为两个翼缘中心线之间梁的高度)。因而，对于断面  $bb$ ，我们有  $Q_x = st_y h/2$ ，所以在  $bb$  处的剪应力为

$$\tau = \frac{shP}{2I_x} \quad (c)$$

它由方程(8-18)求得。通过研究在点  $a$  与断面  $bb$  之间切出的翼缘微元(见图 8-11a 中的微元  $A$ )上所作用的力，可以求出该应力的方向。为了清晰地显示出作用在微元上的力，用较大的比例尺将该微元绘于图 8-11c 中。我们立即可以看出，拉力  $F_1$  大于  $F_2$ ，因为微元背面的弯矩比前面的大。因此，就



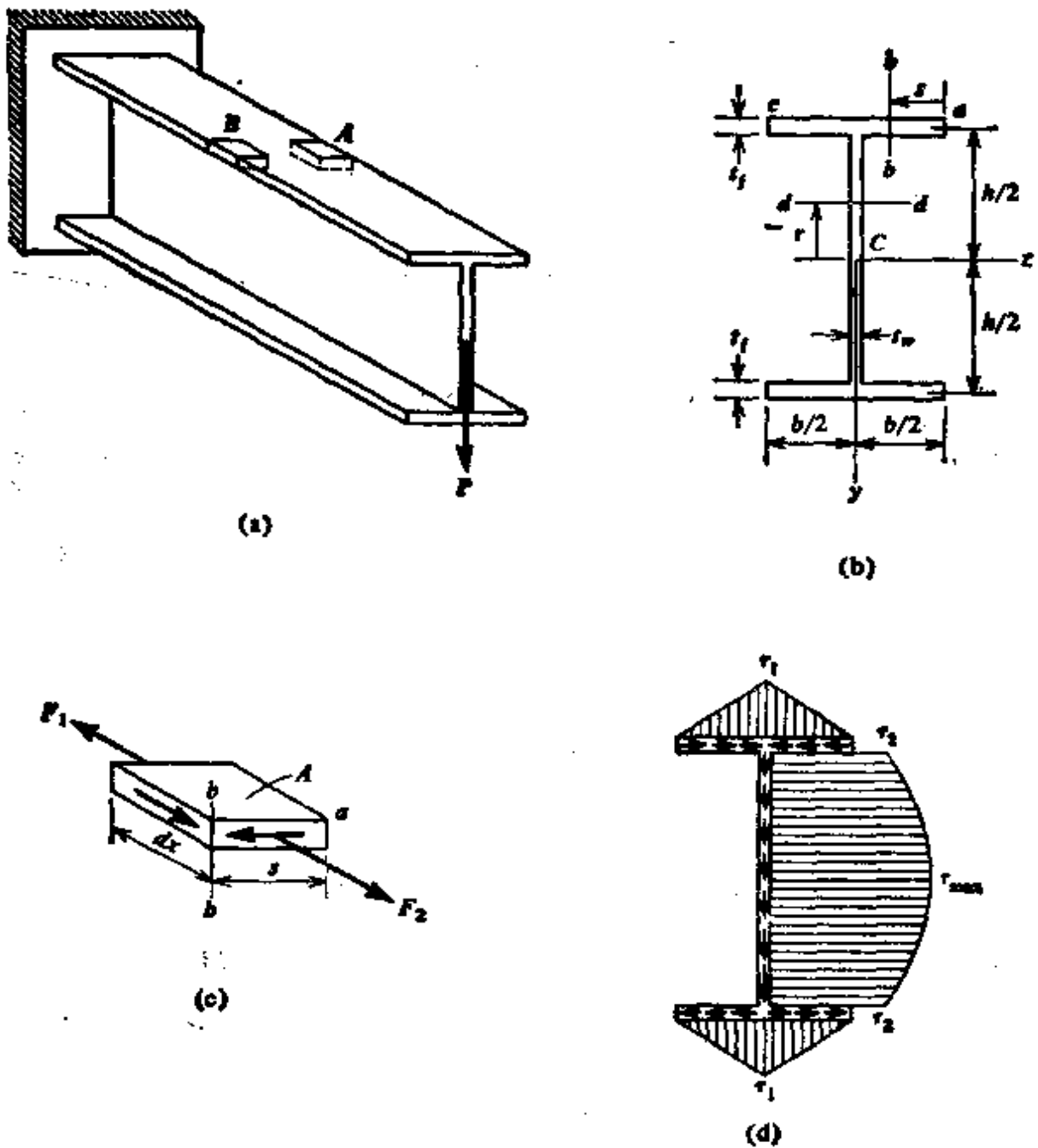


图 8-11. 例题. 宽翼缘梁中的剪应力,

平衡来看, 得知微元  $A$  左面上的剪应力必定朝向读者作用。于是这个结论支配了横截面上剪应力的方向; 即它们必定向左作用。现在回到图 8-11b, 我们看出, 我们已经完全确定了断面  $bb$  处的剪应力大小和方向。此断面可在点  $a$  至翼缘和腹板交接之间的任何位置选取, 因此遍及这个区段的剪应力为水平向左, 其大小由方程(c)给出。我们从方程(c)也可看出, 应力随距离  $s$  线性地增加, 如在图 8-11d 中的图线所示。当  $s=b/2$  时,  $\tau_1$  达到最大值, 此处  $b$  为翼缘的宽度, 因此

$$\tau_1 = \frac{bhP}{4I_x} \quad (d)$$

相应的剪流为

$$f_1 = \tau_1 t_f = \frac{bht_f P}{4I_x} \quad (e)$$

注意,在这一近似分析中,我们已经计算了翼缘与腹板中心线交接处的剪应力,并未计及横截面的厚度。这种分析方法对于薄壁截面是适宜的。

从上翼缘左边部分的  $c$  点开始(图 8-11b),并向右度量  $s$ , 我们可以再一次进行同样的分析。我们将发现,剪应力的大小再次用方程(e)和(d)给出。然而,通过切出微元  $B$ (图 8-11a)并考虑它的平衡,现在我们会发现横截面上的剪应力向右作用,如图 8-11d 所示。

下一步是确定腹板上的剪应力。考虑在腹板顶端恰恰处于翼缘之下的一个水平切口,我们求出一次矩为

$$Q_x = \frac{bt_f h}{2}$$

相应的剪应力为

$$\tau_2 = \frac{bht_f P}{2I_x t_w} \quad (f)$$

式中  $t_w$  为腹板的厚度,相应的剪流为

$$f_2 = \tau_2 t_w = \frac{bht_f P}{2I_x} \quad (g)$$

正如所料,它等于剪流  $f_1$  的两倍。腹板中的剪应力竖直向下作用,且其数值增大至中性轴为止。在位于距中性轴为  $r$  处的  $dd$  断面上,其剪应力计算如下:

$$Q_x = \frac{bt_f h}{2} + \left(\frac{h}{2} - r\right)(t_w) \left(\frac{h/2 + r}{2}\right) = \frac{bt_f h}{2} + \frac{t_w}{2} \left(\frac{h^2}{4} - r^2\right)$$

及

$$\tau = \left(\frac{bt_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2\right) \frac{P}{2I_x} \quad (h)$$

当  $r = h/2$ , 此方程简化为方程(f), 而当  $r = 0$  时, 它给出最大剪应力:

$$\tau_{\max} = \left(\frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{4}\right) \frac{Ph}{2I_x} \quad (i)$$

应当再次指出,我们已在横截面中心线尺寸的基础上做了全部计算,这对于薄壁截面给出了比较准确的结果。然而,由于这个原因,用方程(h)计算所得的宽翼缘梁腹板上的剪应力可能与我们前面分析中所得的(见方程 5-21)稍有不同。

腹板中的剪应力是按抛物线变化的,如图 8-11d 所示,虽然它变化并不大。这个事实可由  $\tau_{\max}$  与  $\tau_2$  之比看出,该比值为

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_2} = 1 + \frac{ht_w}{4bt_f} \quad (j)$$

第二项通常很小，例如，如果我们取典型值譬如  $h=2b$  及  $t_f=2t_w$ ，该比值  $\tau_{\max}/\tau_2=1.25$ 。

最后，我们可使用对上翼缘相同的方法研究下翼缘的剪应力。我们将发现，此应力与上翼缘中的相同，只是它们具有图 8-11d 所示的方向。

由图 8-11d 我们看出，横截面上的剪应力从上翼缘的最外边缘向内“流动”，然后向下通过腹板，最后向外“流”向下翼缘的边缘。此种流动在任何结构截面内总是连续的，所以它可作为确定应力方向的一种简便方法。因为剪力在梁上向下作用，所以我们得知腹板内的剪流必定是向下的。然后，由于对剪流所要求的连续性，知道了腹板内的剪流方向，也就立刻知道翼缘内的方向。使用这一简单方法得到的应力方向要比设想从梁中切出的诸如  $A$  (图 8-11c) 这样的微元体来得容易。

横截面上所有剪应力的合力显然是一个竖直力，因为翼缘内的水平应力彼此抵消而不产生合力。腹板内的剪应力有一合力  $R$ ，它可通过沿整个高度积分剪应力求得：

$$R = \int \tau dA = 2 \int_0^{h/2} \tau t_w dr$$

现将方程(h)代入，我们得到

$$R = 2t_w \int_0^{h/2} \left( \frac{bt_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2 \right) \left( \frac{P}{2I_x} \right) dr = \left( \frac{bt_f}{t_w} + \frac{h}{6} \right) \frac{h^2 t_w P}{2I_x} \quad (k)$$

$I_x$  项可展开如下：

$$I_x = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bt_f h^3}{2} \quad (l)$$

式中第一项为腹板的惯性矩，而第二项为翼缘的惯性矩，这些都使用中心线的尺寸来计算。当把  $I_x$  的表达式代入方程(k)时，我们得到  $R=P$ ，它确立了这一事实，即作用在横截面上的剪应力合力等于竖直载荷  $P$ 。该合力通过形心  $O$ ，而形心也是宽翼缘梁的剪心。

## 8.5 薄壁开口截面的剪心

上节我们建立了求薄壁开口截面梁的剪应力的公式和方法。现在我们将应用那些资料来确定几种不同形状的剪心。要研究的第一种情况是对  $z$  轴弯曲并受到平行  $y$  轴的竖直剪力  $V_y$  的槽形截面(图 8-12a)。此槽形的剪应力分布示于图 8-12b 中。为了求出翼缘和腹板交接处的应力  $\tau_1$ ，我们使用方程(8-18)，其中  $Q_x$  等

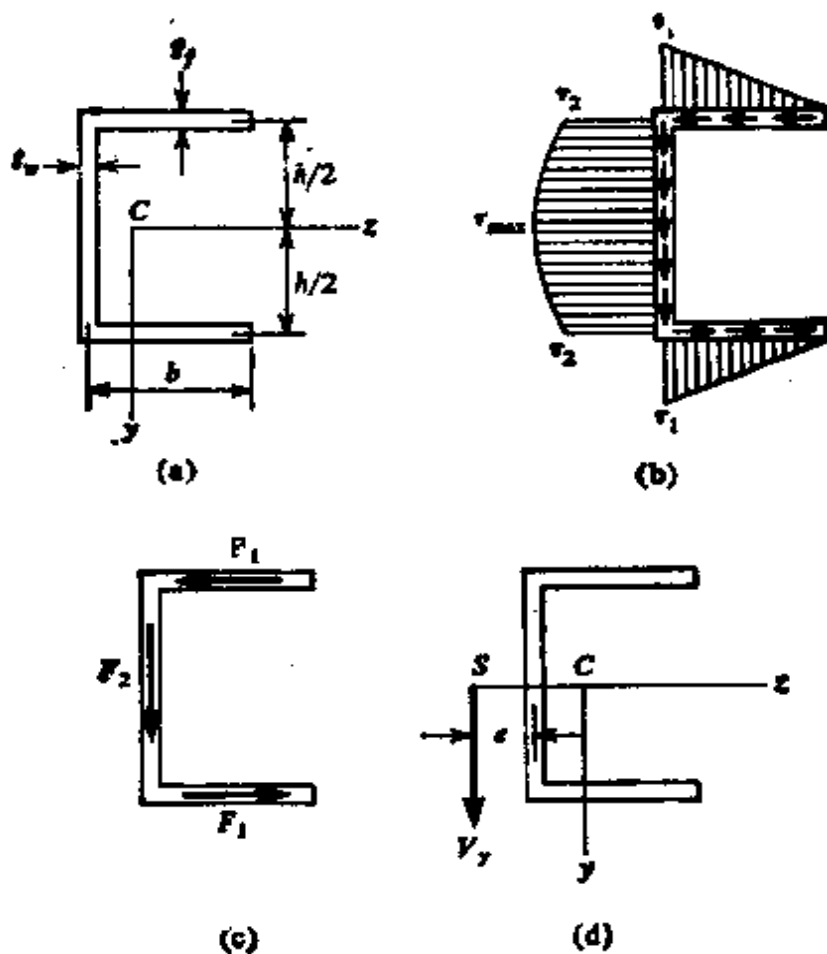


图 8-12. 槽形截面的剪心。

于翼缘面积对  $z$  轴的一次矩:

$$Q_s = \frac{bt_f h}{2}$$

因此, 应力  $\tau_1$  为

$$\tau_1 = \frac{bhV_y}{2I_s} \quad (a)$$

以相同的方法, 我们求出腹板顶部的应力  $\tau_2$  为

$$\tau_2 = \frac{bt_f h V_y}{2t_w I_s} \quad (b)$$

另外, 中性轴处的应力为

$$\tau_{\max} = \left( bt_f + \frac{ht_w}{4} \right) \frac{hV_y}{2t_w I_s} \quad (c)$$

根据剪应力的三角形图形, 可容易地求出每一个翼缘总的力  $F_1$  (图 8-12c)。每一个力等于应力三角形面积乘以应力作用处的

翼缘厚度;

$$F_1 = \left( \frac{\tau_1 b}{2} \right) (t_f) = \frac{hb^2 t_f V_y}{4I_s}$$

腹板内的竖直力  $F_2$  等于剪力  $V_y$ , 这可容易地根据抛物线形应力图验证如下. 我们注意到, 该图由两部分组成, 一个是尺寸为  $\tau_2$  和  $h$  的矩形, 另一个是抛物线形, 其面积等于

$$\frac{2}{3} (\tau_{\max} - \tau_2) h$$

因而, 总的力等于应力图面积乘以腹板厚度, 即

$$F_2 = \tau_2 h t_w + \frac{2}{3} (\tau_{\max} - \tau_2) h t_w$$

代入  $\tau_2$  和  $\tau_{\max}$  的表达式并化简, 给出

$$F_2 = \left( \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2} \right) \frac{V_y}{I_s}$$

最后, 代入

$$I_s = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bh^2 t_f}{2} \quad (d)$$

正如我们所料, 结果表明  $F_2$  等于  $V_y$ .

图 8-12c 中所示的三个力与通过剪心  $S$  作用的合力  $V_y$  是静力等效的 (见图 8-12d). 因为此合力对剪心没有力矩, 可见图 8-12c 中所示的诸力也必定不会对剪心产生力矩. 这个条件使我们能够确定从腹板中心线到剪心的距离  $e$ :

$$F_1 h - F_2 e = 0$$

或

$$e = \frac{F_1 h}{F_2} = \frac{F_1 h}{V_y} = \frac{b^2 h^2 t_f}{4I_s} \quad (8-21a)$$

将  $I_s$  的方程 (d) 代入, 我们得到确定剪心位置方程的另一种形式:

$$e = \frac{3b^2 t_f}{ht_w + 6bt_f} \quad (8-21b)$$

槽形梁每当受到通过剪心  $S$  作用的力时, 将承受简单弯曲. 如果载荷平行于  $y$  轴作用, 但通过剪心之外的某个点 (例如, 载荷可能作用在腹板平面内), 它们就可用通过剪心的载荷和扭转力偶组成的等效力系来代替, 于是我们得到梁的弯曲和扭转的组合. 如

果载荷作用在  $z$  轴方向, 通过  $S$  点和  $O$  点, 我们就得到对  $y$  轴的简单弯曲。如果载荷沿倾斜方向, 它们就可用平行于  $y$  轴和  $z$  轴的静力等效载荷来代替; 这些载荷可按对上述情况阐明的那样去处理。

要研究的下一个截面是等边三角形截面 (图 8-13a), 假设它受到剪力  $V_y$ 。角的每边长为  $b$ , 厚为  $t$ 。在距某一边缘的距离  $s$  处, 剪应力为

$$\tau = \frac{V_y Q_s}{I_s t} = \frac{3sV_y}{\sqrt{2} b^3 t} \left( b - \frac{s}{2} \right) \quad (e)$$

式中我们已经使用了这样的关系:

$$Q_s = \frac{st}{\sqrt{2}} \left( b - \frac{s}{2} \right) \quad I_s = \frac{b^3 t}{3}$$

方程 (e) 表明,  $\tau$  随  $s$  呈二次变化, 当  $s=b$  时, 它达到最大值:

$$\tau_{\max} = \frac{3V_y}{2\sqrt{2} bt}$$

每条边的总剪力  $F$  (见图 8-13b) 为

$$F = \int_0^b \tau t ds = \frac{3V_y}{\sqrt{2} b^3} \int_0^b \left( bs - \frac{s^2}{2} \right) ds = \frac{V_y}{\sqrt{2}}$$

取力  $F$  的竖直分量, 我们看出, 诸边力的合力等于竖直力  $V_y$ 。

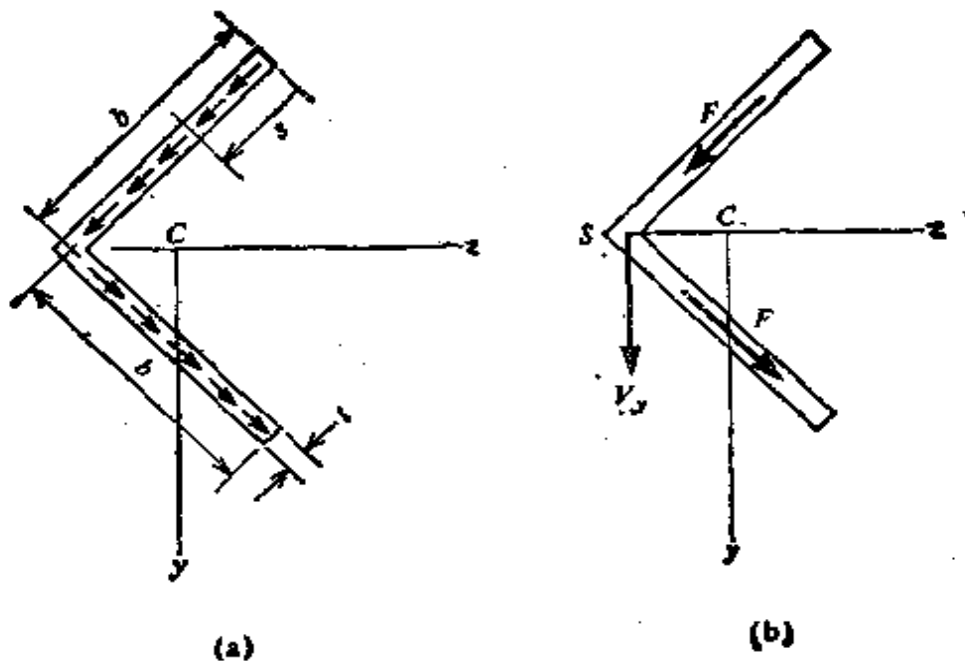


图 8-13. 等边三角形截面的剪心。

另外，我们还看到，此合力必通过两个  $F$  力作用线的交点，因此，我们断定角形截面的剪心  $S$  位于两角边的接合处。

在所有两个交叉矩形单元所组成的截面情况下，如图 8-14 中的例子，我们将会发现，剪应力产生两个交于其接合处的合力。因此，该点成为剪心\*。

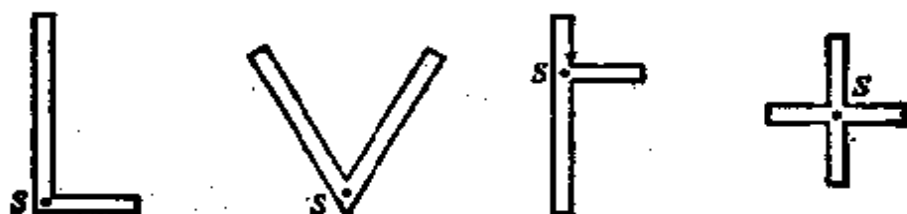


图 8-14. 两个交叉的矩形组成的截面的剪心。

**例题 1** 试确定图 8-15 所示薄壁半圆形截面的剪心  $S$ 。

让我们考虑一个沿横截面中线度量的距离  $s$  所确定的断面  $bb$ 。位于截面边缘处的  $a$  点与断面  $bb$  之间所对的中心角用  $\theta$  表示。所以，我们有  $s=r\theta$ ，此处  $r$  为中线的半径。  $a$  和  $bb$  之间面积的一次矩为

$$Q_s = \int y dA = \int_0^\theta (r \cos \phi)(rt) d\phi \\ = r^2 t \sin \theta$$

式中  $t$  为截面的厚度。因而，断面  $bb$  处的剪应力  $\tau$  为

$$\tau = \frac{V_y Q_s}{I_x t} = \frac{V_y r^2 \sin \theta}{I_x}$$

代入  $I_x = \pi r^3 t / 2$ ，我们得到

$$\tau = \frac{2V_y \sin \theta}{\pi r t} \quad (f)$$

当  $\theta=0$  和  $\theta=\pi$  时，该表达式给出  $\tau=0$ ，而当  $\theta=\pi/2$  时，我们得到最大剪应力。

剪应力  $\tau$  对  $O$  点之矩为

\* 首次确定横截面剪心是在 1913 年(见参考文献 8-1)。关于后来的工作及剪心概念的历史发展，见参考文献 8-1 至 8-19。

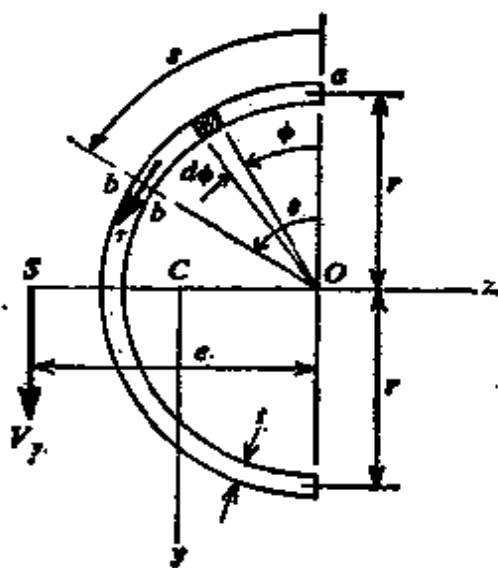


图 8-15 例. 题 1. 薄壁半圆形截面的剪心。

$$T = \int \tau r dA = \int_0^{\pi} \frac{2V_y r \sin \theta}{\alpha} d\theta = \frac{4rV_y}{\alpha}$$

此力矩必与作用在剪心处的力  $V_y$  所产生的力矩相等, 因此,

$$V_y e = \frac{4rV_y}{\alpha}$$

于是, 点  $O$  至剪心的距离  $e$  为

$$e = \frac{4r}{\alpha} \quad (8-22)$$

**例题 2** 试确定图 8-16a 所示 Z 字形截面的剪心 (图中所示的  $y$  和  $z$  轴为通过形心  $C$  的主轴)。

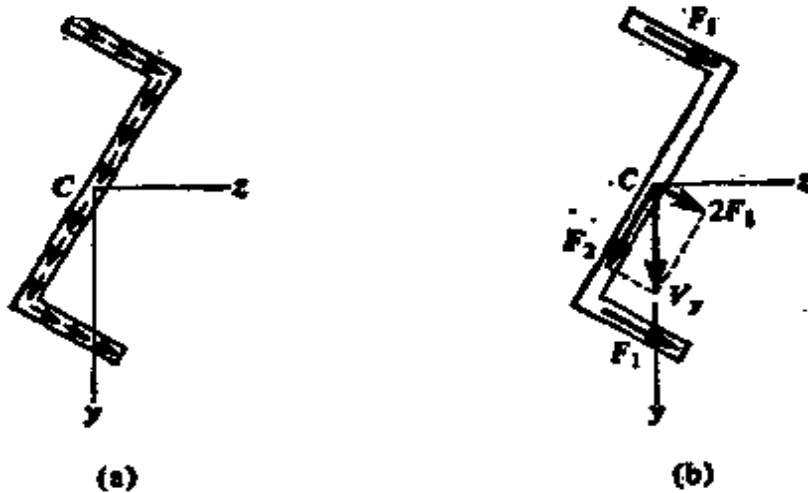


图 8-16. 例题 2. Z 形截面的剪心。

让我们开始先设想一个剪力  $V_y$  平行于  $y$  轴作用。那么在翼缘与腹板内的剪应力将沿图 8-16a 所示的方向。由对称性考虑我们得知, 两翼缘中总的力必定彼此相等(图 8-16b)。作用在横截面上所有这三个力的合力(翼缘内的  $F_1$ , 腹板内的  $F_2$ )必等于剪力  $V_y$ 。两个力  $F_1$  有一合力  $2F_1$ , 通过形心并平行于翼缘作用。此合力与力  $F_2$  在形心处相交, 因此, 该点必为剪心。在图 8-16b 中表明了力  $2F_1$  和  $F_2$  合成为剪力  $V_y$ 。

如果该梁受到平行于  $z$  轴的一个剪力  $V_z$ , 那么我们得到类似的结论, 即剪心与形心相重合。

假如使用主轴, Z 字形截面中的剪应力计算就会变得复杂化。原因很明显, 翼缘和腹板与两根主轴成斜交。在下一节中, 我们将说明如何使用平行于腹板和翼缘的非主轴来计算 Z 字形截面的剪应力。

## 8.6 梁关于非主轴弯曲时的剪应力

在前面推导薄壁开口截面梁的剪应力公式中, 假设  $y$  和  $z$  轴



为主轴，我们得到方程(8-18)至(8-20)。现在我们将省却那个假设，而导出与非主轴  $y$  和  $z$  (图 8-17) 有关的更为普遍的方程。让我们假设梁上的载荷平行于  $y$  轴并产生弯矩  $M_x$  和剪力  $V_y$ 。还假设诸力通过剪心  $S$  作用。弯矩  $M_x$  将绕  $y$  和  $z$  两轴都产生弯曲，相应的应力由方程(8-11)给出：

$$\sigma_x = \frac{M_x(I_{yz}z - I_y y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (8-11)$$

式中  $y$  和  $z$  为横截面上一点的坐标。现在我们继续以图 8-10 所表明的方法从梁内切出一个微元体。作用在微元体上的力  $F_1$  和  $F_2$  (图 8-10c) 用与以前相同的步骤求出，只是正应力必须用方程(8-11)来定，因此，

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x dA = \frac{M_{x1}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y) dA$$

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x dA = \frac{M_{x2}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y) dA$$

和 
$$\tau = \frac{M_{x1} - M_{x2}}{dx} \frac{1}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_0^s (I_{yz}z - I_y y) dA$$

我们再次注意到， $(M_{x2} - M_{x1})/dx$  这个量等于  $-V_y$ ，因此

$$\tau = \frac{V_y}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[ I_{yz} \int_0^s z dA - I_y \int_0^s y dA \right] \quad (8-23)$$

这个方程为广义剪应力公式，当其轴为主轴时 ( $I_{yz} = 0$ )，则简化为方程(8-17)。

用上述相同的方法进行，我们可以导出通过剪心并平行于  $z$  轴作用的剪力  $V_z$  所产生的剪应力公式，其结果为

$$\tau = \frac{V_z}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[ I_{yz} \int_0^s y dA - I_z \int_0^s z dA \right] \quad (8-24)$$

注意，当我们取主轴时，该方程简化为方程(8-20a) (符号除外)。在

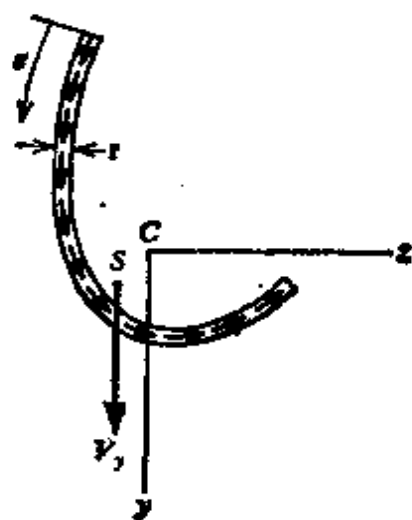


图 8-17. 薄壁开口截面梁中的剪应力 (注:  $y$  和  $z$  轴为非形心主轴)。

上述研究中,我们总是取  $Q_y$  和  $Q_z$  为正,并从物理概念的考虑得到剪应力的方向,然而,在方程(8-23)和(8-24)中,需要遵循一次矩的符号约定,因为它们可能为正或为负.把  $y$  和  $z$  作为代数量处理就易于来完成此事.

导出广义剪应力公式(8-23)和(8-24)之后,我们现在可以继续求得在任一特定情况下的剪应力分布.另外,通过求剪力  $V_y$  和  $V_z$  的作用线并指出其交点就可以确定截面的剪心.此步骤在下列例题中加以说明.

**例题 1** 试确定由于剪力  $V_y$  和  $V_z$  在 Z 字形截面内产生的剪应力(图 8-18a).

我们从计算如下截面性质开始:

$$I_y = \frac{h^3 t_w}{12} + \frac{b h^2 t_f}{2} \quad I_z = \frac{2b^3 t_f}{3} \quad I_{yz} = \frac{b^2 h t_f}{2} \quad (a)$$

式中尺寸  $h$ ,  $b$ ,  $t_w$  和  $t_f$  的定义如图所示.由于剪力  $V_y$ , 上翼缘中的剪应力(由方程 8-23)为

$$\tau = \frac{V_y}{t_f(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[ I_{yz} \int_0^s (s-b) t_f ds + I_z \int_0^s \frac{h}{2} t_f ds \right]$$

式中  $s$  沿翼缘从左向右度量.求此积分,我们得出上述方程方括弧中的项,等于

$$\frac{b^2 h t_f^2}{12} (3s^2 - 2bs)$$

将该表达式连同  $I_y$ ,  $I_z$  及  $I_{yz}$  的表达式一起,代入  $\tau$  的方程中,我们得到翼缘中的下列应力公式:

$$\tau = \frac{3V_y(3s^2 - 2bs)}{bh(2ht_w + 3bt_f)} \quad (0 \leq s \leq b) \quad (b)$$

当  $s$  小于  $2b/3$  时,此上翼缘中的剪应力向左作用;而当  $s$  处于  $2b/3$  和  $b$  之间时,它们反过来向右作用.翼缘上总的合成剪力为

$$F = \int_0^b \tau t_f ds = 0$$

在下翼缘中存在类似的情况.

腹板内的剪应力也可由方程(8-23)求出,可以证明,腹板内的总合力等于  $V_y$ . 中性轴上的剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{3V_y(ht_w + bt_f)}{ht_w(2ht_w + 3bt_f)} \quad (c)$$

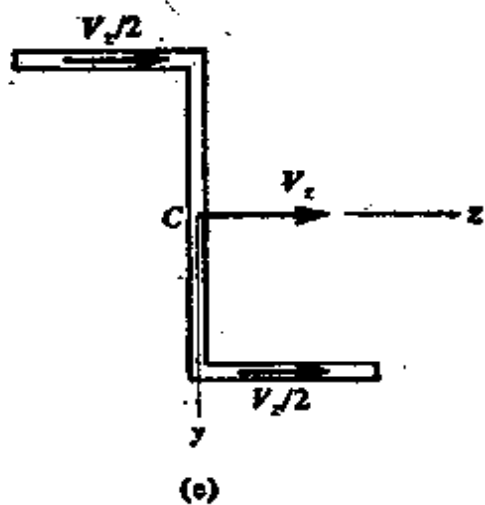
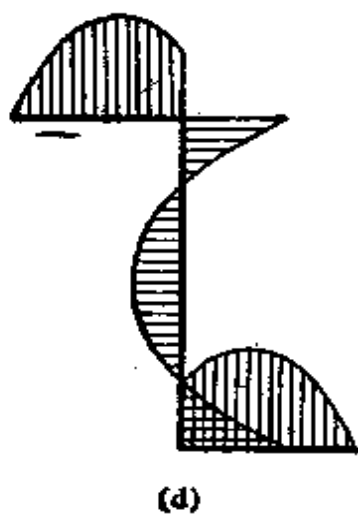
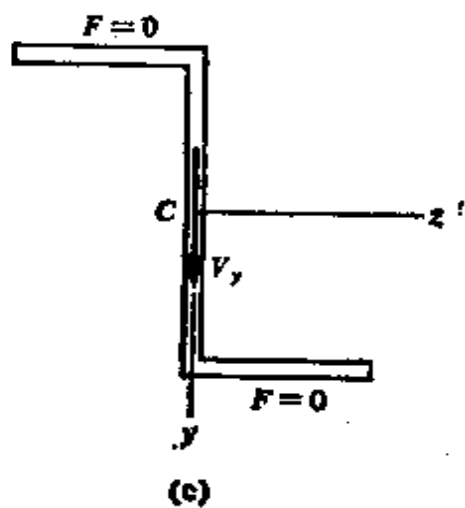
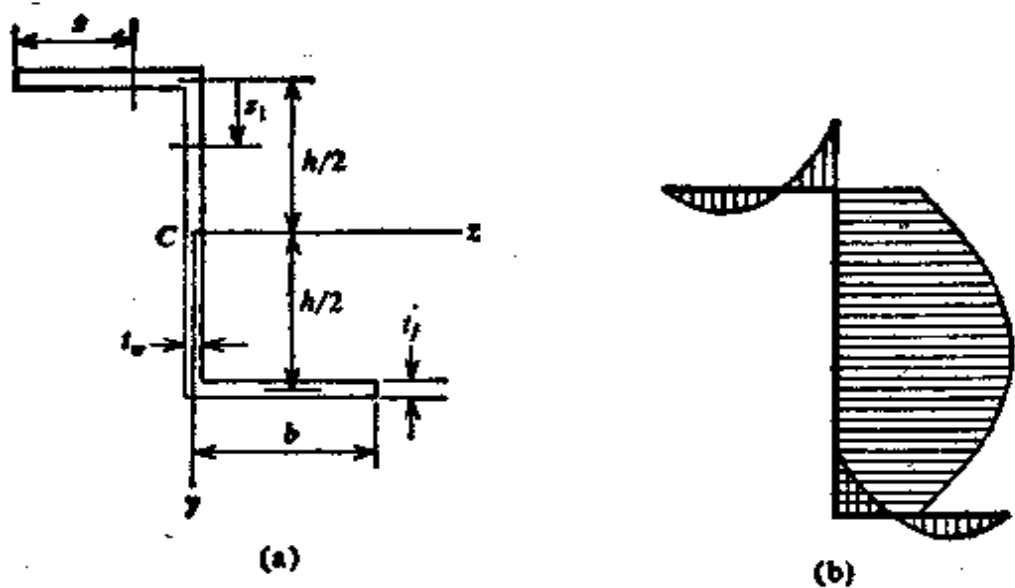


图 8-18. 例题 1. Z 字形截面的剪应力。

由  $V_y$  产生的剪应力分布示于图 8-18b, 而在翼缘和腹板中的合力示于图 8-18c.

现在让我们研究作用在横截面上的水平剪力  $V_x$ . 对于上翼缘, 我们使用方程(8-24), 该式变为

$$\tau = \frac{V_x}{t_f(I_y I_x - I_{yx}^2)} \left[ -I_{yx} \int_0^s \frac{h}{2} t_f ds + I_x \int_0^s (b-s) t_f ds \right]$$

计算方括号中的项, 我们得到

$$\frac{h^2 t_f}{24} [bs(2ht_w + 6bt_f) - s^2(ht_w + 6bt_f)]$$

于是  $\tau$  的最终表达式变为

$$\tau = \frac{3V_x}{2b^3 t_f (2ht_w + 3bt_f)} [bs(2ht_w + 6bt_f) - s^2(ht_w + 6bt_f)] \quad (d)$$

在上翼缘中, 这些应力向右作用, 其分布示于图 8-18d. 翼缘中总合力  $F$  为

$$F = \int_0^b \tau t_f ds = \frac{V_x}{2}$$

如图 8-18e 所示.

$V_x$  在腹板中产生的剪应力由方程(8-24)求出, 它为

$$\tau = \frac{3V_x(h^2 + 6s_1^2 - 6hs_1)}{2bh(2ht_w + 3bt_f)} \quad (e)$$

式中  $s_1$  从翼缘和腹板的交接处量起 (图 8-18a). 剪应力在腹板中部区段内反转方向 (见图 8-18d), 结果腹板内总的合成剪力为零.

**例题 2** 试确定图 8-19a 所示非对称槽形截面剪心  $S$  的位置.

我们开始先注意到, 上下翼缘的宽度分别为  $b_1$  和  $b_2$ , 而截面的高度为  $h$ . 厚度为常数并等于  $t$ .  $y$  和  $z$  轴通过形心  $C$  并平行于腹板和翼缘, 因而它们不是主轴. 形心位置用尺寸  $c$  和  $d$  来确定, 它们是

$$c = \frac{h^2 + 2b_1 h}{2(h + b_1 + b_2)} \quad d = \frac{b_1^2 + b_2^2}{2(h + b_1 + b_2)} \quad (f)$$

剪心  $S$  用距形心轴的距离  $e_1$  和  $e_2$  来定位, 下面要确定这些值.

现在让我们假设剪力  $V_y$  通过剪心作用 (图 8-19b). 由方程(8-23)求出上翼缘中的剪应力为

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V_y}{t(I_y I_x - I_{yx}^2)} \left[ I_{yx} \int_0^s (b_1 - d - s) t ds + I_y \int_0^s (h - c) t ds \right] \\ &= \frac{V_y}{I_y I_x - I_{yx}^2} \left[ I_{yx} (b_1 - d) s + I_y (h - c) s - \frac{I_{yx} s^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (g)$$

式中  $s$  按图示方式度量. 翼缘中总的力  $F_1$  为

$$F_1 = \int_0^{b_1} \tau t ds = \frac{b_1^2 t V_y}{6(I_y I_x - I_{yx}^2)} [I_{yx} (2b_1 - 3d) + 3I_y (h - c)] \quad (h)$$

因为梁上没有水平外力作用, 所以下翼缘中的剪力也必等于  $F_1$ ; 另外, 腹板

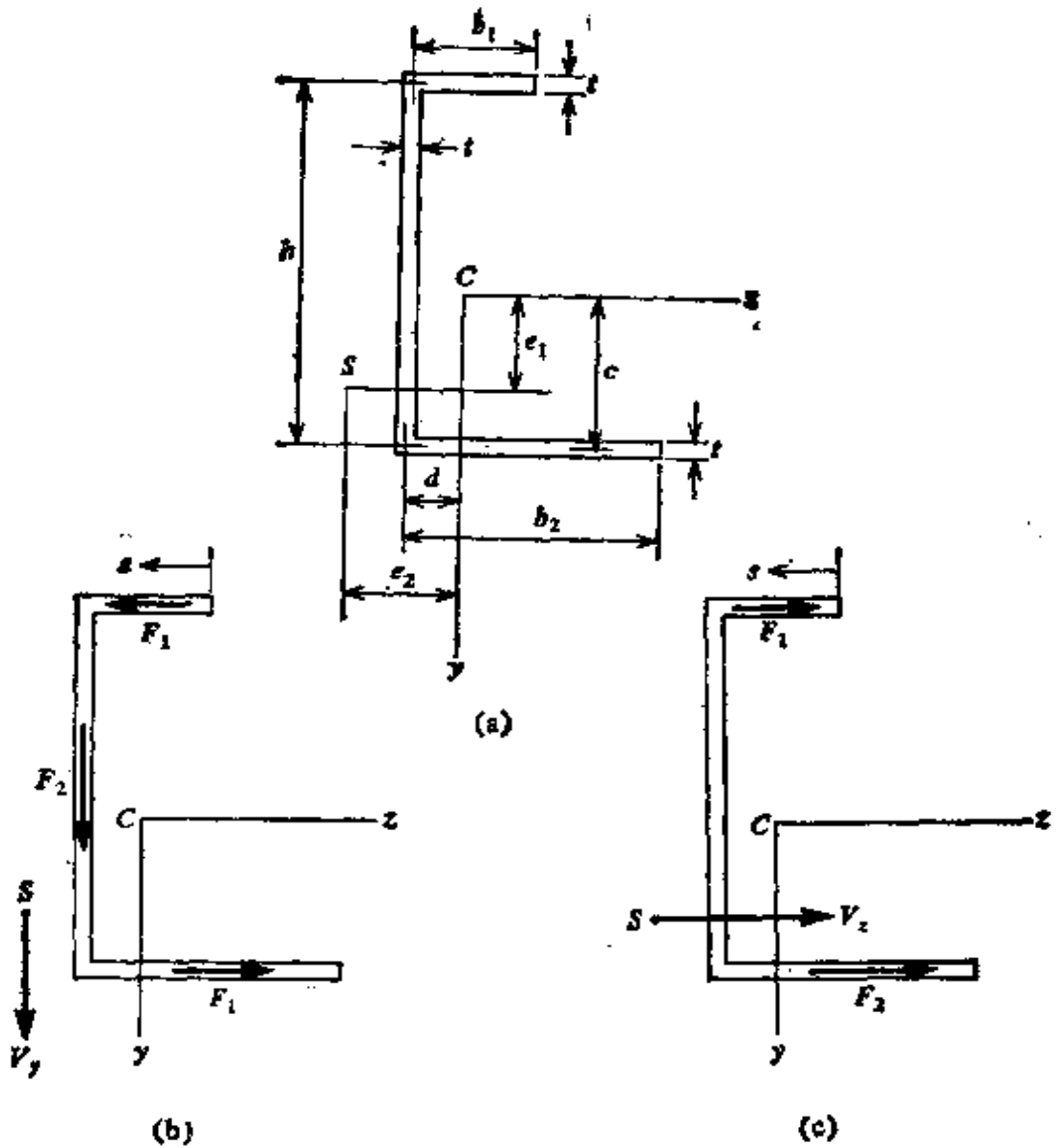


图 8-19. 例题 2. 非对称槽形截面的剪心.

中的剪力  $F_2$  必等于  $V_y$ . 因为通过剪心作用的力  $V_y$  对  $O$  点之矩等于翼缘和腹板中的三个力对  $O$  点之矩, 于是我们得到

$$V_y e_2 = F_2 d + F_1 h$$

或 
$$e_2 = d + \frac{F_1 h}{V_y}$$

将方程(h)的  $F_1$  代入, 我们得出  $e_2$  的下列方程:

$$e_2 = d + \frac{b_1^2 h t}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [I_{yz} (2b_1 - 3d) + 3I_y (h - c)] \quad (8-25)$$

在两个翼缘相等的特殊情况下,  $y$  和  $z$  轴变为主轴, 我们就有  $I_{yz} = 0$ ,  $c = h/2$  及  $b_1 = b_2 = b$ , 那么由方程(8-25), 我们得出

$$e_2 = d + \frac{b^2 h^2 t}{4I_y}$$

它与我们先前的结果是一致的(方程 8-21a)。

现在让我们假设剪力  $V_x$  作用在梁上(图 8-19c)。在此情况下, 我们可用方程(8-24)计算上翼缘的剪应力:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V_x}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} \left[ I_{yz} \int_0^s (c-h)t ds - I_z \int_0^s (b_1-d-s)t ds \right] \\ &= \frac{V_x}{I_y I_z - I_{yz}^2} \left[ I_{yz}(c-h)s + I_z(d-b_1)s + \frac{I_z s^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (i)$$

翼缘中总的剪力  $F_1$  为

$$F_1 = - \int_0^{b_1} \tau t ds = \frac{b_1^2 t V_x}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [3I_{yz}(h-c) + I_z(2b_1-3d)] \quad (j)$$

这里, 我们在方程的前面引进了一个负号, 因为方程(i)中的剪应力向左为正, 而我们却乐意取  $F_1$  向右为正, 如图 8-19c 所示。因为没有  $y$  方向的外力, 所以腹板中的合力必为零。下翼缘的力用  $F_2$  表示, 如图所示。对下翼缘取矩给出方程

$$V_x(c-e_1) = F_1 h$$

由此

$$e_1 = c - \frac{F_1 h}{V_x}$$

将方程(j)的  $F_1$  代入, 我们得到  $e_1$  的下列方程:

$$e_1 = c - \frac{b_1^2 h t}{6(I_y I_z - I_{yz}^2)} [3I_{yz}(h-c) + I_z(2b_1-3d)] \quad (8-26)$$

再考虑等翼缘的特殊情况, 我们有  $I_{yz}=0$ ,  $c=h/2$ ,  $b_1=b_2=b$ , 及  $d=b^2/(h+2b)$ , 由此

$$e_1 = \frac{h}{2} - \frac{b^3 h t (b+2h)}{6I_y (h+2b)}$$

现在代入

$$I_y = \frac{b^3 t (b+2h)}{3(h+2b)}$$

此为对称槽形截面的惯性矩, 正如所料, 我们得到  $e_1=0$ 。

于是, 在一个非对称槽形截面的任一特定情况下, 我们可将横截面的尺寸和性质代入方程(8-25)和(8-26), 从而得出剪心的位置。让我们取如下尺寸作为数字例题:

$$b_1 = b \quad b_2 = 2b \quad h = 3b$$

于是我们求出

$$c = \frac{5b}{4} \quad d = \frac{5b}{12}$$

$$I_y = \frac{47}{24} b^3 t \quad I_z = \frac{69}{8} b^3 t \quad I_{yz} = \frac{13}{8} b^3 t$$

代入方程(8-25)和(8-26), 我们求得

$$e_1 = \frac{55b}{76} \quad e_2 = \frac{187b}{228}$$

它们为形心轴至剪心的距离。

## 习 题

**8.1-1** 试证明若图 8-1a 所示的载荷  $P$  沿矩形截面的对角线作用, 那么, 中性轴将沿另一条对角线。

**8.1-2** 对于图 8-1 所示的矩形截面的悬臂梁, 试求确定中性轴位置的  $\beta$  角, 并确定由于弯曲而产生的最大正应力。假设  $\theta = 45^\circ$ ,  $P = 1 \text{ kN}$ ,  $L = 1.5 \text{ m}$ , 梁的宽度为  $75 \text{ mm}$ , 高度为  $150 \text{ mm}$ 。

**8.1-3** 一矩形截面悬臂梁, 在斜向载荷  $P$  作用下面产生弯曲 (见图 8-1a), 试问当  $\theta$  角从  $0$  变化到  $2\pi$  时, 梁端将描绘出什么样的曲线?

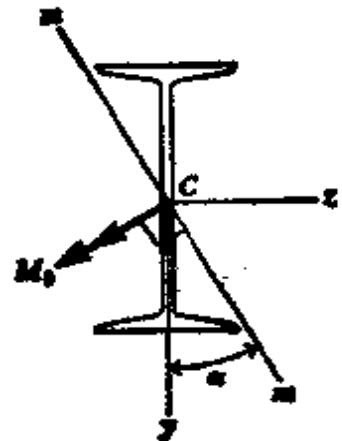
**8.1-4** 一水平简支梁, 长为  $L$ 、截面为正方形 (宽 = 高 =  $a$ ), 梁的侧面为竖直方位。一竖直载荷  $P$  作用于距梁一端  $L/3$  处, 而一水平载荷  $P$  作用于距梁另一端的  $L/3$  处。试计算梁因弯曲而产生的最大正应力。假设  $L = 4 \text{ m}$ ,  $a = 300 \text{ mm}$ ,  $P = 27 \text{ kN}$ 。

**8.1-5** 一根轴线为水平的固定端梁, 其横截面为圆形。沿梁的整个长度上作用有集度为  $q$  的竖直均布载荷, 且在梁中点处作用有水平横向载荷。试求梁由于弯曲而产生的最大正应力, 假设  $PL = 2.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $qL^2 = 4.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , 杆的直径为  $100 \text{ mm}$ 。

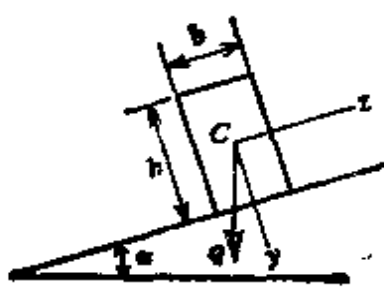
**8.1-6** 一标准 I 字梁, 型号为 S203 × 27 (见附录 C 表 C-2), 其两端为简支, 两个大小相等、方向相反的力偶  $M_0$  作用于梁两端, 使梁发生弯曲, 两力偶作用于  $mm$  平面内, 如图所示。试求梁的最大弯曲正应力和最大挠度  $\delta$ 。假设  $M_0 = 6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ , 梁的长度为  $4 \text{ m}$ 。

**8.1-7** 一矩形截面木梁, 其两端为简支, 梁的纵轴是水平的, 但截面是倾斜的, 如图所示。梁上的载荷为集度等于  $q$  的竖直均布载荷, 试确定由于弯曲而产生的最大正应力和梁中点处的垂直挠度。假设  $L = 3 \text{ m}$ ,  $b = 150 \text{ mm}$ ,  $h = 200 \text{ mm}$ ,  $\text{tg}\alpha = 1/3$ ,  $E = 10 \text{ kN/mm}^2$ ,  $q = 3 \text{ kN/m}$ 。

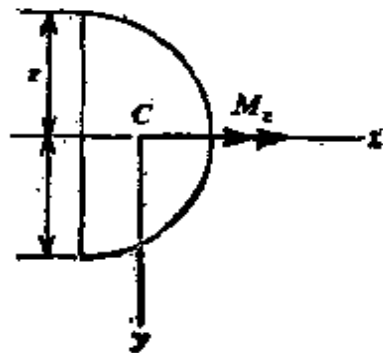
**8.1-8** 再研究上题中的梁, 假设  $L = 3 \text{ m}$ ,  $b = 250 \text{ mm}$ ,  $h = 75 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $E = 11 \text{ kN/mm}^2$ ,  $q = 1.6 \text{ kN/m}$ , 试求由于弯曲而产生的最大正应力



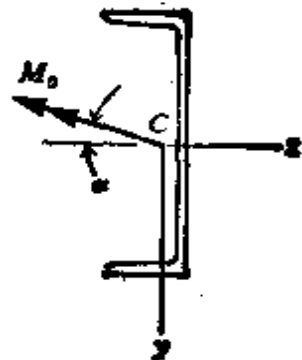
习题 8.1-6



习题 8.1-7 和 8.1-8



习题 8.2-1



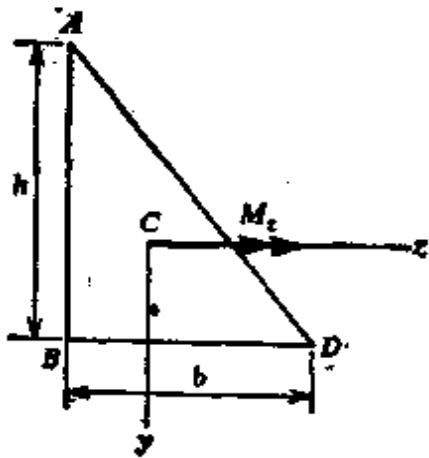
习题 8.2-2

及梁中点处的竖直挠度和水平挠度。

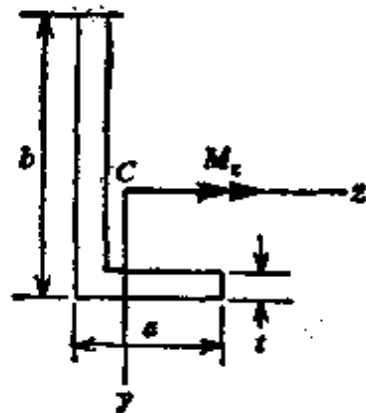
**8.2-1** 一半圆形横截面梁(见图), 其上作用有弯矩  $M_z$ , 试求此弯矩的最大容许值, 假设容许应力为  $\sigma_w$ 。

**8.2-2** 一截面为 C203×17 的槽形梁(见附录 C 表 C-3), 其上有呈  $\alpha$  角作用的弯曲力偶  $M_0$ (见图)。试确定梁的最大拉应力和最大压应力。假设  $M_0=3\text{kN}\cdot\text{m}$ ,  $\text{tg}\alpha=1/3$ 。

**8.2-3** 一力偶  $M$ , 作用于横截面为直角三角形的梁上(见图), 试导出顶点 A, B 和 D 处的应力公式, 并确定中性轴的位置。



习题 8.2-3



习题 8.2-5, 8.2-7 和 8.2-8

**8.2-4** 一 Z 字形截面梁(图 8-4), 承受一作用于  $xy$  平面内的弯矩  $M_x$ , 大小为  $4.5\text{kN}\cdot\text{m}$ , 试求梁的最大弯曲正应力。假设  $h=150\text{mm}$ ,  $b=90\text{mm}$ ,  $b_1=78\text{mm}$ ,  $t=12\text{mm}$ 。

**8.2-5** 一角形截面梁(见图), 承受弯矩  $M_x=9\text{kN}\cdot\text{m}$ , 试求 A 点处的应力。假设  $a=100\text{mm}$ ,  $b=150\text{mm}$ ,  $t=12\text{mm}$ 。

**8.2-6** 试求可作用于  $120\times 60\times 12\text{mm}$  的角形截面上的最大弯矩。假设该角形截面是绕其较大的主轴弯曲, 其容许应力为  $\sigma_w=120\text{N}/\text{mm}^2$ 。

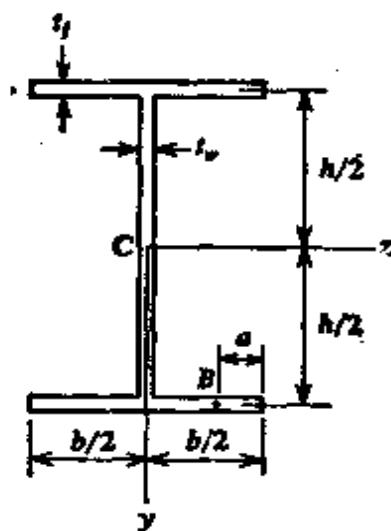
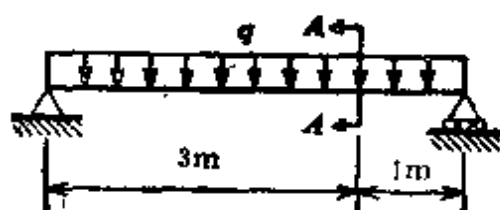
**8.2-7** 一角形截面梁在力偶  $M_x=1\text{kN}\cdot\text{m}$  的作用下产生弯曲(见



图), 试确定梁中的最大弯曲正应力. 假设  $a=60\text{ mm}$ ,  $b=120\text{ mm}$ ,  $t=12\text{ mm}$ , 应用方程(8-11)求解.

**8.2-8** 先确定主轴位置, 并将弯曲力偶沿主轴方向分解, 然后应用方程(8-5), 再解上题.

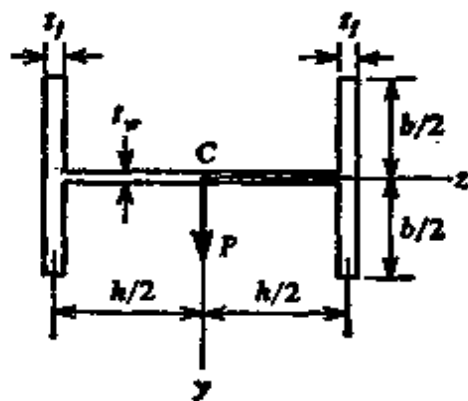
**8.4-1** 一宽翼缘截面简支梁, 承受均布载荷  $q=4\text{ kN/m}$ , 如图所示. 横截面尺寸为  $h=288\text{ mm}$ ,  $b=200\text{ mm}$ ,  $t_f=t_w=12\text{ mm}$ . (a) 试问截面 A-A 处横截面上的最大剪应力为多少? (b) 试问在截面 A-A 上 B 点处剪应力(大小和方向)如何? B 点位于距下翼缘外边缘  $a=24\text{ mm}$  处. 注意: 在计算惯性矩  $I_x$  和一次矩  $Q_x$  时, 采用横截面中心线尺寸.



习题 8.4-1

**8.4-2** 求解上题. 根据横截面的实际尺寸而不是采用中心线尺寸进行计算.

**8.4-3** 一宽翼缘梁, 承受垂直于腹板作用的力  $P$  (见图). 试研究其上的剪应力, 确定所有剪应力的大小和方向, 并证明剪应力的合力等于  $P$ . 采用中心线尺寸计算  $I_x$  和  $Q_x$ .



习题 8.4-3

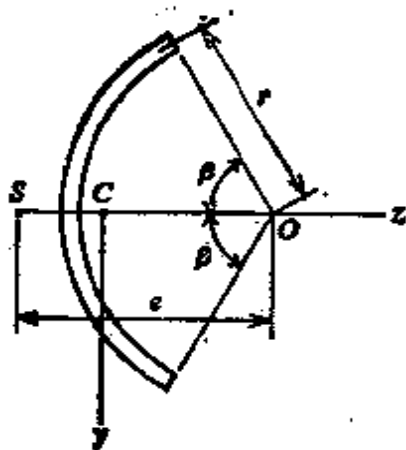
**8.4-4** 对于非对称 I 字梁, 承受通过剪切中心且垂直于腹板作用的力  $P$  (见图 8-8), 再求解上题.

**8.4-5** 对于图 8-9 所示 T 字梁, 再解习题 8.4-3. 假设翼缘的厚度为  $t_f$ , 宽度为  $b_f$ .

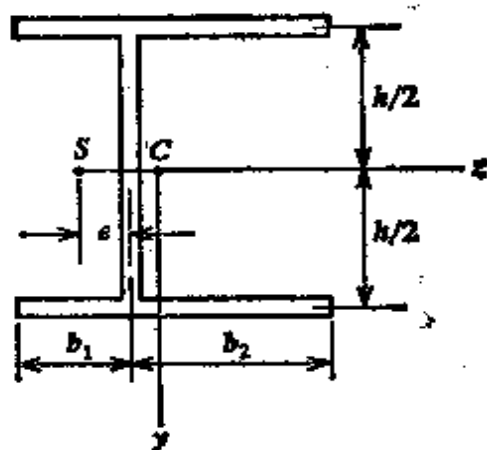
**8.5-1** 试确定在 C305×31 槽形梁中的剪应力(见附录 C), 假设剪力通过剪切中心,  $V_y=60\text{ kN}$  (见图 8-12), 并确定截面剪切中心位置的距离  $e$  (注意: 采用中心线尺寸计算  $Q_x$  和  $e$ ,  $I_x$  则可从附录的表中查得).

**8.5-2** 试证明作用于薄壁半圆形截面梁上剪应力的合力等于  $V_y$  (参考图 8-15 和方程 f).

**8.5-3** 试确定圆弧状薄壁截面剪切中心  $S$  的位置(见图), 并用图形表示当  $\beta$  从 0 到  $\pi$  时, 距离  $e$  是如何变化的.



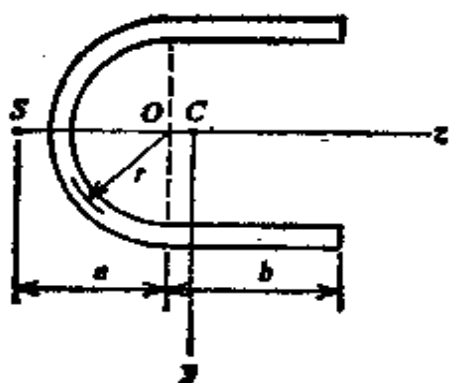
习题 8.5-3



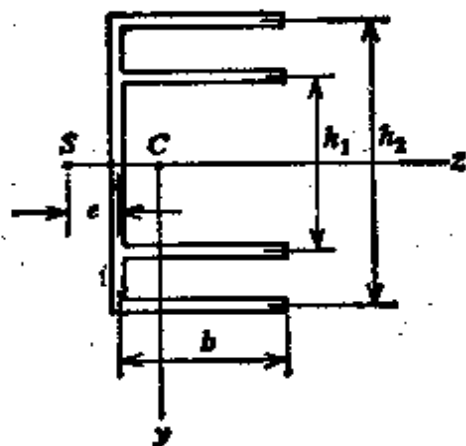
习题 8.5-4

**8.5-4** 试导出确定图中所示不均衡 I 字梁剪切中心  $S$  的位置的公式。假设其壁厚为常数且很小。

**8.5-5** 试确定图中所示薄壁截面剪切中心  $S$  的位置。假设其壁厚为常数。



习题 8.5-5



习题 8.5-6

**8.5-6** 试导出确定图中所示薄壁截面剪切中心位置的距离  $e$  的公式。假设整个截面的厚度为常数。

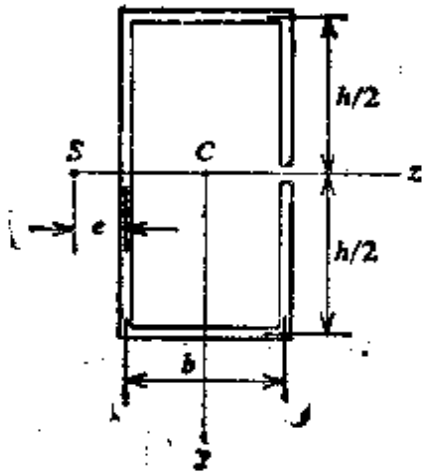
**8.5-7** 试求出确定图中所示开口箱形截面剪切中心  $S$  位置的距离  $e$  的公式。假设其壁厚为常数,且很小。

**8.5-8** 对于图中所示帽形截面,再求解上题。假设  $a = h/2$ 。

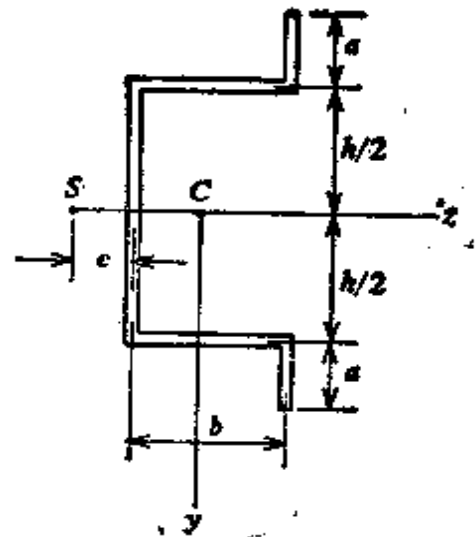
**8.5-9** 试求出确定图中所示 C 字型薄壁截面剪切中心  $S$  位置的距离  $e$ 。假设壁厚为常数。

**8.5-10** 对图中所示帽形截面,再求解上题。

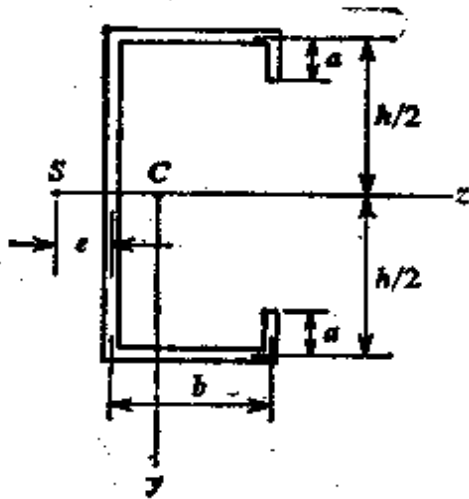
**8.5-11** 一简支梁长  $L = 3\text{ m}$ , 在中点处作用有集中载荷  $P = 18\text{ kN}$ 。其横截面为角形截面, 尺寸如图所示。载荷  $P$  通过角形截面竖直角边的中间平



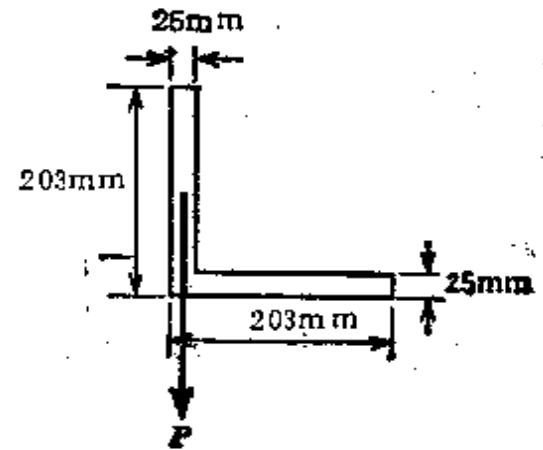
习题 8.5-7



习题 8.5-8 和 8.5-10



习题 8.5-9



习题 8.5-11

面而作用, 试求由于弯曲而产生的最大拉应力  $\sigma_1$  和最大压应力  $\sigma_2$ 。

## 第九章 非弹性弯曲

### 9.1 引言

非弹性弯曲是指材料不服从虎克定律时梁的弯曲。因此，每当梁受载而其应力超过材料的比例极限时，就发生非弹性弯曲。自然地，非弹性弯曲时梁的性态取决于其应力-应变图的形状。该图在超出比例极限后可能为曲线，如图 1-4 所示，或者，材料可能是钢，它呈现出明显的屈服，并具有图 1-2 所示的应力-应变图。在任一情况下，如果应力-应变图已知，总能确定出梁的应力、应变和挠度，就如本章中将要说明的那样。

非弹性梁分析的基础是梁的横截面在受纯弯时仍保持平面这一事实，这个条件对于非线性非弹性材料如同对于线弹性材料一样是成立的(见第 5.1 节)。这一概念能使我们推断出梁的应变沿其高度线性变化。于是，借助应力-应变图和静力方程，我们就能得到应力和应变的大小。我们也能计算出梁的曲率和挠度。

通过对结构进行非弹性分析，我们可以确定其极限承载能力，它通常要比比例极限载荷(即，梁的任何一点都不超过比例极限时所能承受的最大载荷)大得多。对于设计来说，为了确定抵抗破坏或塌陷的安全系数，最大载荷有时是需要的。自然，这个系数与防止超过比例极限的安全系数很不相同。许多工程师在设计钢结构时宁可使用极限载荷设计的概念(见第 1.3 节)而不用弹性设计。

### 9.2 非弹性弯曲方程

为了得出非弹性弯曲的基本方程，让我们研究一根承受正弯矩  $M$  的纯弯梁(见图 9-1a)。弯曲力偶作用在  $xy$  平面内，假设该平面为横截面的对称面(图 9-1b)。于是，梁将在此同一平面内挠曲，因此该平面就是弯曲平面。我们可将  $z$  轴视为横截面的中性

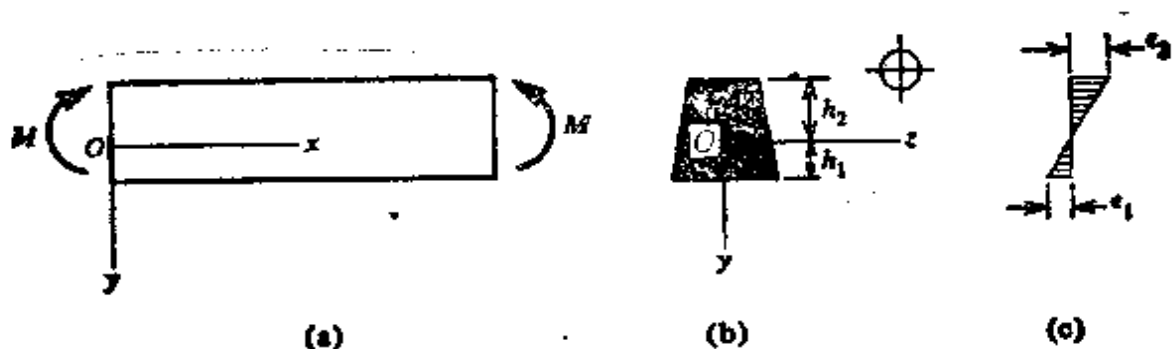


图 9-1. 梁的非弹性弯曲.

轴, 它的位置待定.

根据对称性考虑我们知道, 不论材料的性质如何, 梁的应变均为线性分布, 正如前面第 5.1 节讨论过的那样. 因此, 应变从梁顶至梁底按图 9-1c 所绘方式变化, 下边缘和上边缘的应变分别用  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  表示. 用  $\rho$  表示挠曲线的曲率半径, 我们看出, 在距中性面为  $y$  处的应变为 (见方程 5-2):

$$\epsilon = \frac{y}{\rho} = \kappa y \quad (9-1)$$

其中  $\kappa = \frac{1}{\rho}$  为曲率. 最外边缘处的应变为

$$\epsilon_1 = \kappa h_1 \quad \epsilon_2 = -\kappa h_2 \quad (9-2 \text{ a, b})$$

式中  $h_1$  和  $h_2$  分别为中性轴至梁的下表面和上表面的距离. 由这些方程我们看出, 只要我们知道了曲率和中性轴的位置, 应变就可以容易地确定.

使用材料的应力-应变图和静力学方程, 可以求出中性轴的位置. 静力学方程表示出在梁的任一横截面上作用的正应力的水平合力为零, 因而,

$$\int \sigma dA = 0 \quad (9-3)$$

其中  $dA$  为横截面中的面积微元, 而积分是对整个横截面进行的. 使用第二个静力学方程, 亦即说明作用在横截面上的应力合力等于弯矩  $M$  的方程, 可求得曲率:

$$\int \sigma y dA = M \quad (9-4)$$

自然,方程(9-3)和(9-4)与以前用来分析线弹性材料梁的方程相同(见第5.1节).在本章中我们将用这些方程求解非弹性弯曲问题.

梁的曲率算出后,使曲率等于  $d^2v/dx^2$ (见方程6-4),而后对挠度  $v$  求解,便可求出梁的微小挠度.在以前为求弹性梁挠度所建立的某些方法可用于非弹性弯曲,只需使用适当的曲率表达式代替  $M/EI$  这个量,正如在后面第9.6节所述的那样.

### 9.3 塑性弯曲

非弹性弯曲的最简单情况就是塑性弯曲,它出现在梁的材料

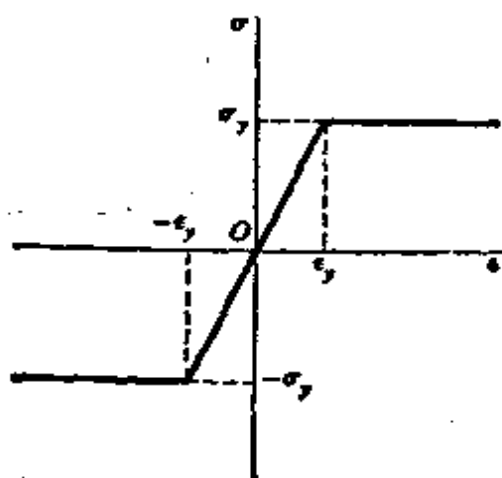


图9-2. 弹-塑性材料的应力-应变图.

为弹-塑性时.这种材料在到达屈服应力之前服从虎克定律,然后在常值应力下塑性屈服.在拉伸和压缩时具有相同屈服应力  $\sigma_y$  和相同弹性模量  $E$  的弹-塑性材料的应力-应变图示于图9-2中.我们看出,弹塑性材料具有一个线弹性区,接着有一个完全塑性区.由于这个原因,“完全塑性材料”一词常常被用于弹-塑性材料.

因为结构钢具有明显确定的屈服点,而且屈服时经受很大的应变,所以可被理想化为弹-塑性材料.在达到屈服应力之后完全塑性的假设意味着应变硬化效应略去不计,但是因为应变硬化使钢的强度增加,故略去它通常是偏于安全的.

现在让我们研究一根受到纯弯曲的弹-塑材料的梁(图9-1).当作用的弯曲力偶  $M$  很小时,梁中的最大应力小于  $\sigma_y$ ,该梁处于通常的具有线性应力分布的弹性弯曲状态,如图9-3a所示.在这些条件下,我们由方程(9-1)至(9-4)得知,中性轴通过横截面的形心,正应力为  $\sigma = My/I$ ,而曲率为  $M/EI$ .这些结果直到梁内距中性轴最远点的应力达到屈服应力之前(图9-3b)都是有效的.此时作用在梁上的相应力矩称为屈服力矩  $M_y$ .

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \sigma_y S \quad (9-5)$$

例如,对于矩形截面梁我们得到

$$M_y = \frac{\sigma_y b h^2}{6} \quad (9-6)$$

式中  $b$  为横截面的宽度,而  $h$  为横截面的高度.

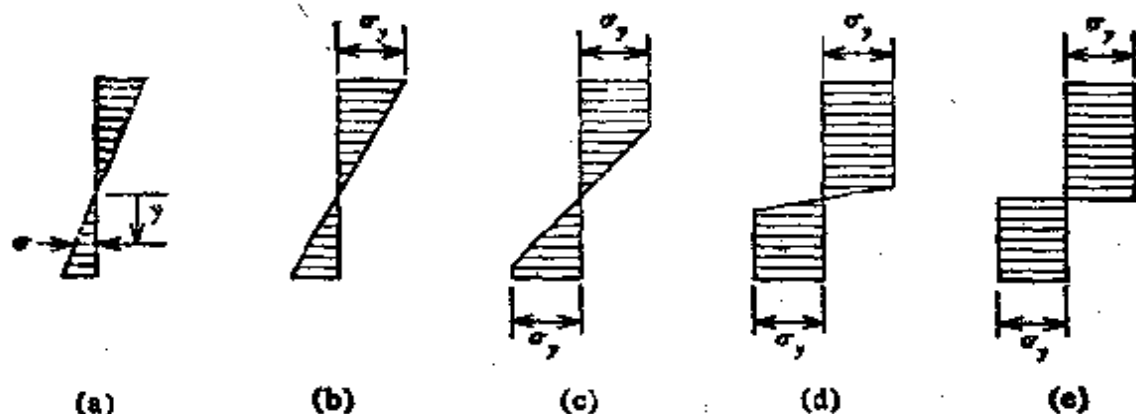


图 9-3. 弹-塑性材料梁的应力分布.

如果现在我们将弯矩增加到屈服力矩  $M_y$  以上,横截面最的外点的应变将继续增加,最大应变将超过屈服应变  $\epsilon_y$ . 然而,由于塑性屈服,最大应力将保持常值,并等于  $\sigma_y$ . 因而,其应力情况将如图 9-3c 所示. 梁的外边区域变为塑性,而中间的“核心”保持弹性.

弯矩再增加,塑性区更进一步向内朝中性轴扩展,一直达到图 9-3d 所示的情况为止. 在此阶段,最外纤维的应变也许为屈服应变  $\epsilon_y$  的 10 或 15 倍,而弹性核心几乎消失. 因此,从实用的观点来看,此梁已达到了极限抗弯能力,而且我们可将极限应力分布理想化为由两个矩形部分组成(图 9-3e). 相应于这一理想化应力分布的弯矩称为塑性力矩  $M_p$ , 它表示弹-塑性材料梁能够经受的最大力矩.

塑性力矩的确定显然是很重要的,因为它是梁的极限弯矩或最大弯矩. 为了求出  $M_p$ , 我们开始先确定横截面中性轴的位置(图 9-4a). 在中性轴以上,横截面内的每一微元都具有等于  $\sigma_y$  的压应力(图 9-4b); 在中性轴以下,应力为拉应力,也等于  $\sigma_y$ .

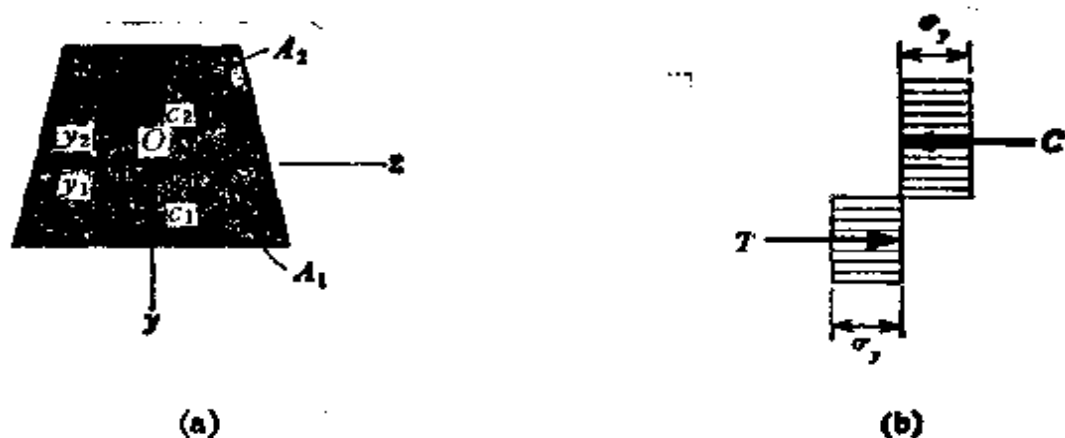


图9-4. 塑性力矩  $M_p$  的确定.

总拉力  $T$  等于  $\sigma_y A_1$ , 其中  $A_1$  为中性轴以下的横截面面积. 类似地, 压力  $C$  为  $\sigma_y A_2$ , 其中  $A_2$  为中性轴以上的横截面面积. 如方程(9-3)所示, 横截面上的合力必为零, 因此

$$T - C = 0 \quad \text{或} \quad A_1 = A_2 \quad (\text{a})$$

因为横截面的总面积为  $A = A_1 + A_2$ , 由方程(a), 显然

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \quad (9-7)$$

我们得出结论: 中性轴将横截面分为两个相等的面积. 因此, 一般来说, 塑性力矩  $M_p$  的中性轴与线弹性弯曲的中性轴不同. 例如, 对于像图9-4a所示的梯形横截面, 其塑性情况下的中性轴略低于弹性情况下的中性轴. 自然, 如果横截面为双对称的, 象矩形梁或宽翼缘梁, 中性轴对塑性弯曲和弹性弯曲来说是相同的.

现在, 根据方程(9-4), 用积分的方法, 或与积分等效的方法即直接将图9-4b中的力  $T$  和  $C$  对中性轴取矩, 可求出塑性力矩  $M_p$ . 因此, 我们求得

$$M_p = T y_1 + C y_2$$

式中  $y_1$  和  $y_2$  分别为中性轴到面积  $A_1$  和  $A_2$  的形心  $c_1$  和  $c_2$  的距离. 用  $\sigma_y A/2$  代替  $T$  和  $C$ , 我们得到

$$M_p = \frac{\sigma_y A (y_1 + y_2)}{2} \quad (9-8)$$

在每一种特定情况下, 这一方法都是将横截面分为两个相等的面积, 确定每一半的形心位置, 然后使用方程(9-8)计算  $M_p$ .



类似于弹性弯曲的方程(9-5), 我们可将方程(9-8)写成下列形式:

$$M_p = \sigma_y Z \quad (9-9)$$

式中

$$Z = \frac{A(y_1 + y_2)}{2} \quad (9-10)$$

为横截面的塑性模量。塑性模量在几何上可解释为中性轴以上横截面面积的一次矩(对中性轴取矩)加上中性轴以下面积的一次矩。

梁的塑性力矩与其屈服力矩之比仅为横截面形状的功能, 通常称它为形状因子  $f$ :

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z}{S} \quad (9-11)$$

如果我们取一矩形截面梁( $b$  = 宽度及  $h$  = 高度), 其塑性模量变为(见方程 9-10):

$$Z = \frac{bh}{2} \left( \frac{h}{4} + \frac{h}{4} \right) = \frac{bh^2}{4} \quad (9-12)$$

回忆其截面模量为  $S = bh^2/6$ , 我们看出, 矩形梁的形状因子为

$$f = \frac{3}{2} \quad (9-13)$$

因此, 矩形梁的塑性力矩比屈服力矩大 50%。

对于宽翼缘梁(见图 9-5), 将一个翼缘和中性轴以上的部分腹板取一次矩然后乘 2, 就可容易地算出其塑性模量。因此

$$Z = bt_f(h - t_f) + t_w \left( \frac{h}{2} - t_f \right)^2 \quad (9-14)$$

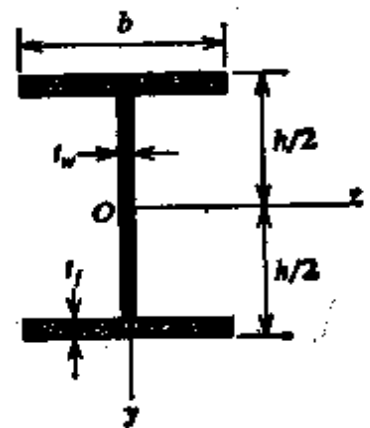


图 9-5. 宽翼缘梁。

式中右边的第一项表示翼缘的贡献, 第二项为腹板的贡献。对于标准宽翼缘梁, 其  $Z$  值列于 AISC 手册中(见参考文献 5-4)。宽翼缘梁的形状因子  $f$  的典型值在 1.1 至 1.2 范围之内, 取决于横截面的比例。

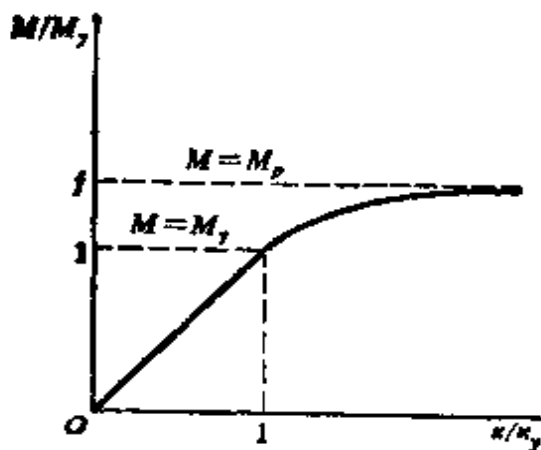
**弯矩-曲率关系** 已经看到, 对于小于屈服力矩  $M_y$  的弯矩

值,其曲率  $\kappa$  为  $M/EI$ . 如果用  $\kappa_y$  代表屈服曲率,亦即当  $M$  等于  $M_y$  时的曲率,我们有

$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI} \quad (9-15)$$

因此,在线弹性范围内梁的力矩-曲率关系可用无量纲形式表示如下:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\kappa}{\kappa_y} \quad (0 \leq M \leq M_y) \quad (9-16)$$



这一方程用图 9-6 中弯矩-曲率图的直线部分表示。

当弯矩变得比  $M_y$  大时,梁的一部分将变为完全塑性,正如早先对于图 9-3c 所讨论过的那样。于是弯矩-曲率关系变为非线性的,如图 9-6 所示。随着塑性区进一步向梁的中性轴渗透,图

图 9-6. 弹塑性材料梁的弯矩-曲率图。 9-6 中的曲线变得平坦,并趋近于一条水平渐近线。这条渐近线代表塑性力矩  $M_p$ ,因此渐近线的纵坐标即为形状因子  $f$ 。此曲线的方程自然依横截面的形状而定。

让我们再次选取矩形截面梁的情形(图 9-7a),令  $e$  表示从中性轴到弹性核心边缘的距离。完全塑性区用图 (a) 中的阴影部分

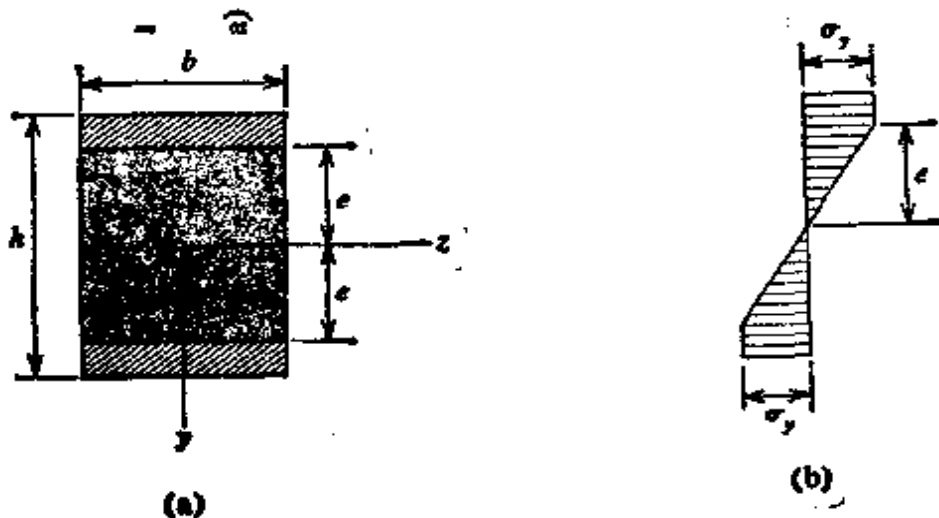


图 9-7. 矩形截面梁的应力分布。

表示,而梁的应力分布示于图(b)中.此应力分布所代表的弯矩为

$$M = \sigma_y b \left( \frac{h}{2} - e \right) \left( \frac{h}{2} + e \right) + \sigma_y b \left( \frac{2e^2}{3} \right) \quad (b)$$

式中右边的第一项为由完全塑性区的应力产生的力矩,而第二项为由弹性核心的应力产生的力矩.化简方程(b),我们得到

$$M = \frac{\sigma_y b h^2}{6} \left( \frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) = M_y \left( \frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) \quad (c)$$

注意,当  $e = h/2$  时,我们由方程(c)得到  $M = M_y$ ; 而当  $e = 0$  时,我们得到  $M = 3M_y/2$ ,它就等于矩形截面的塑性力矩  $M_p$ .

图9-7所示的矩形梁的曲率可以很容易地通过使用方程  $\kappa = \epsilon/y$  求出(见方程9-1),即将该方程应用于梁内弹性核心外边缘上的一点处.在这样的点上,我们有  $\epsilon = \sigma_y/E$  和  $y = e$ ,因此

$$\kappa = \frac{\sigma_y}{Ee} \quad (d)$$

此方程可表示为无量纲形式,方法是引进矩形梁屈服曲率  $\kappa_y$  的下列表达式:

$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI} = \frac{2\sigma_y}{Eh} \quad (e)$$

综合方程(d)和(e)得

$$\frac{\kappa}{\kappa_y} = \frac{h}{2e} \quad (f)$$

现在我们可在方程(c)和(f)之间消去  $e/h$ , 因此得到下列无量纲形式的力矩-曲率方程:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} - \frac{\kappa_y^2}{2\kappa^2} \quad (M_y \leq M \leq M_p) \quad (9-17)$$

从方程(9-17)求解用力矩表达的曲率,我们得到

$$\frac{\kappa}{\kappa_y} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2M/M_y}} \quad (M_y \leq M \leq M_p) \quad (9-18)$$

在图9-8中给出一根矩形梁的力矩-曲率关系图(根据方程9-17或9-18).

对于其他形状的横截面,依类似的步骤得出其力矩-曲率方程.对于菱形、圆形和典型的宽翼缘梁其方程的图线绘于图9-8

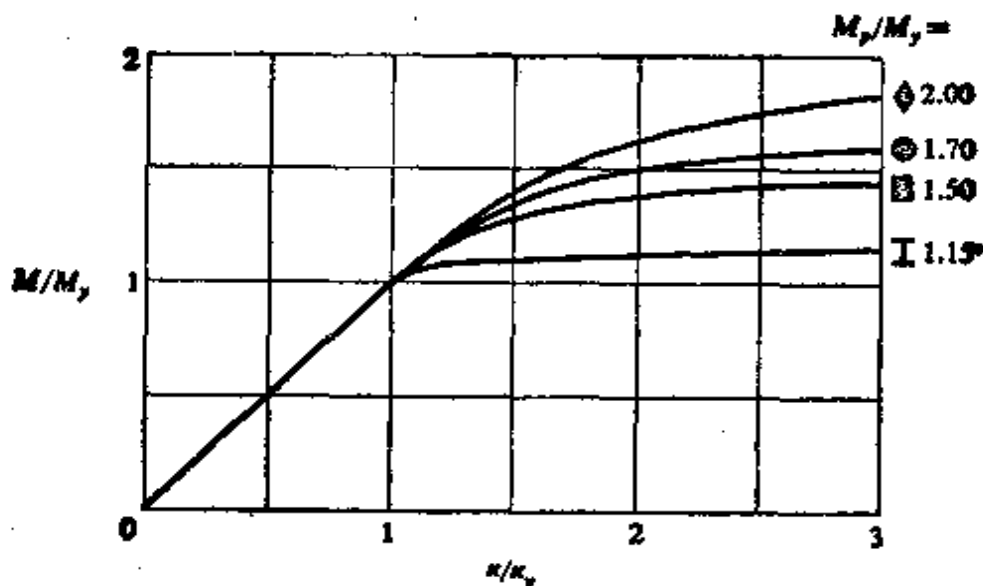


图 9-8. 弹塑性材料梁的力矩-曲率图。

中,在每种情况下,图形开始为直线,代表线弹性区;而后为曲线,代表梁内有一部分为塑性区,一部分为弹性区。在该图的后一阶段,在梁的塑性区内发生屈服而无应力增加,而在梁的中心弹性区内随着应力增加同时发生附加变形。因此,梁的变形将由弹性区控制,这种状态有时被称为**内含塑性流**。当曲率变得很大时,图 9-8 中的曲线趋近一条水平线。在此阶段,梁可继续变形而不增加所作用的弯矩。因此我们得到**无约束塑性流**的情况,而相应的弯矩为塑性力矩  $M_p$ 。无约束塑性流的存在,引出下节所述的塑性铰的概念。

#### 9.4 塑性铰

为了说明塑性铰的概念,让我们研究一根弹-塑性材料简支梁在其中点承受集中载荷  $P$  时的状态(图 9-9a)。弯矩图为三角形形状,其最大弯矩等于  $PL/4$ (图 9-9b)。如果最大弯矩大于  $M_y$  而小于  $M_p$ ,在梁的中间部分将有一个**内含塑性流区**(图 9-9a)存在。完全塑性区在图中用阴影表示,因为弯矩已知,所以在任一横截面内这种区域的渗透深度可以很容易地求出\*。因此,对任一特定梁,

\* 在确定塑性区的大小时,我们略去了剪力的影响,并使用上节所述的纯弯理论,这种作法是恰当的,因为剪力的影响很小。

其塑性区可以完全确定。

梁的曲率图示于图 9-9c 中。曲率自梁端向中间线性增加，直到塑性区边缘为止，该处的曲率等于它的屈服值  $\kappa_y$ 。而后曲率以较快速度增加，并在梁的中心处达到最大值  $\kappa_{max}$ 。只要在梁的中点继续存在弹性核心，最大曲率仍保持为有限值。

当载荷增大而最大弯矩接近塑性弯矩  $M_p$  时，塑性区进一步向内朝着梁中点处的中性轴扩展。

最后，当  $M_{max}$  等于  $M_p$  时，梁中点处的横截面完全为塑性的（图 9-10），于是梁中点处的曲率变得极大，而可能发生无约束塑性流。最大弯矩不可能再增加，而梁上的载荷为它的最大值。梁由于在中间截面上发生过

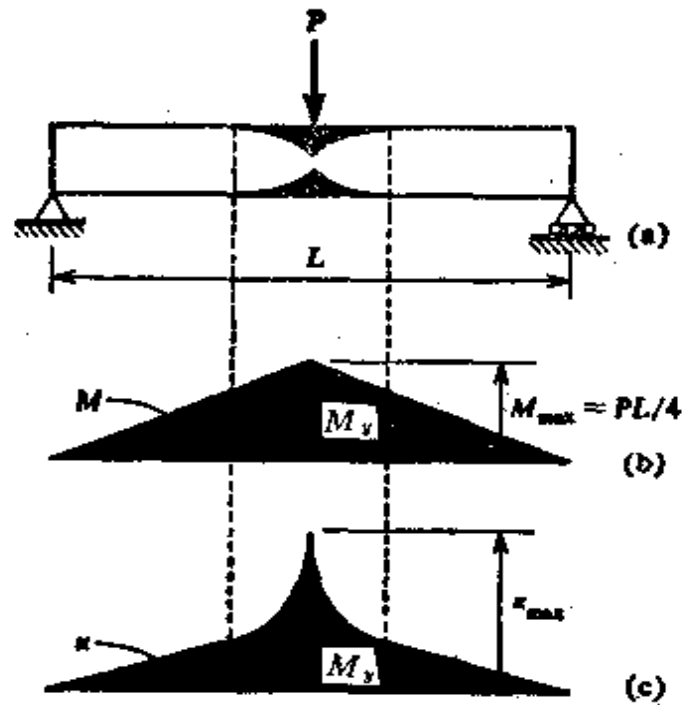


图 9.9. 部分塑性梁。

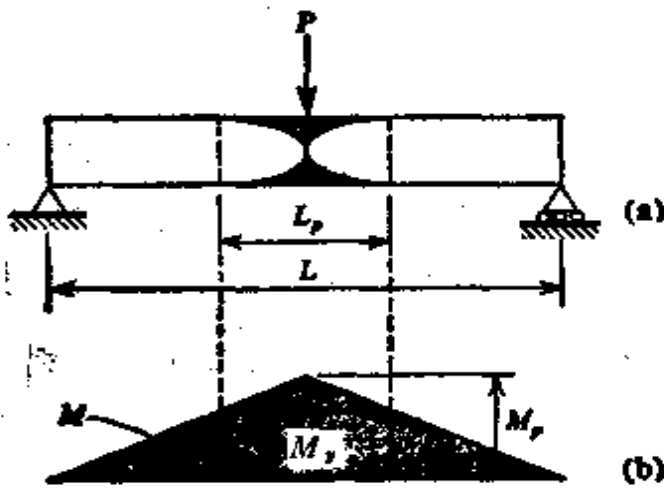


图 9-10 . 塑性铰。

度转动而破坏，而梁的两半段仍然是相当刚硬的。因此，该梁的性态就象两根刚性杆用一个塑性铰连接在一起一样，此塑性铰允许两杆在常力矩  $M_p$  作用下彼此相对转动。

在图 9-10 所示的梁中，围绕塑性铰的塑性区长度  $L_p$ ，可很容易地由该区边缘的弯矩等于  $M_p$  这一事实计算出来。由此，我们有

在图 9-10 所示的梁中，围绕塑性铰的塑性区长度  $L_p$ ，可很容易地由该区边缘的弯矩等于  $M_p$  这一事实计算出来。由此，我们有

$$M_p = \frac{P}{2} \left( \frac{L - L_p}{2} \right) \quad (a)$$

此外,我们知道最大弯矩  $PL/4$  等于  $M_p$ , 因此

$$P = \frac{4M_p}{L} \quad (b)$$

对于受到一个集中载荷的简支梁,将表达式(b)代入方程(a),并对  $L_p$  求解,得出

$$L_p = L \left( 1 - \frac{M_v}{M_p} \right) = L \left( 1 - \frac{1}{f} \right) \quad (9-19)$$

对于矩形梁 ( $f=1.5$ ), 我们得出  $L_p=L/3$ , 而对宽翼缘梁 ( $f=1.1 \sim 1.2$ ), 我们得到  $L_p=0.09L \sim 0.17L$ . 因此, 宽翼缘梁的塑性区要比矩形梁的塑性区小得多.

尽管塑性区扩展至梁的相当一段长度上, 曲度却趋向于集中在有塑性铰的横截面上. 因此, 对大多数场合, 我们可认为塑性铰没有尺寸大小, 亦即, 可认为塑性铰位于梁的一个单独横截面上. 塑性铰的出现, 意味着梁将在铰的横截面处转动, 而弯矩保持常值且等于  $M_p$ . 自然, 塑性铰总是在最大弯矩的截面上形成.

## 9.5 梁的塑性分析

塑性铰的概念为确定弹-塑性梁所能承受的最大载荷提供了一个有用的方法. 我们已在上节的说明中看到, 塑性铰的出现允许发生无限制的转动. 所以, 如果梁是静定的, 一个单铰的形成已足以引起破坏. 产生这个铰所需的载荷值(亦即极限载荷), 可根据简单的静力学计算. 例如, 图 9-10a 所绘的梁, 其极限载荷  $P_u$ . 根据上节的方程(b)求出, 为

$$P_u = \frac{4M_p}{L}$$

计算弹塑性梁的极限载荷和确定塑性铰位置的工作, 通常称为塑性分析.

现在让我们研究另一根静定梁的例子(见图 9-11a). 该梁在左半边具有集度为  $q$  的均布载荷. 弯矩图示于图的部分(b), 我们发现最大弯矩为  $M_{\max} = 9qL^2/128$ . 和所有的静定梁一样, 此例中的弯矩图只根据静力学便可求出, 并不取决于梁的材料是弹性的

或者非弹性的。

当载荷逐渐作用到梁上，如果最大弯矩变得等于梁的屈服弯矩  $M_y$  时，我们就遇到初始屈服，相应的载荷称为屈服载荷。因此，该梁的屈服载荷为

$$q_y = \frac{128M_y}{9L^2}$$

随着载荷的进一步增大，最终将在最大弯矩的截面上形成塑性铰，如图 9-11c 中的黑色圆圈所示。其相应的极限载荷为

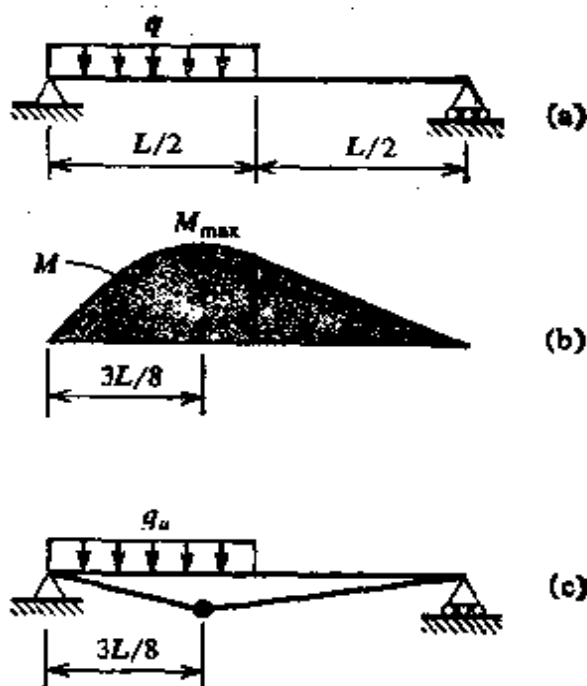


图 9-11. 静定梁的塑性分析。

$$q_u = \frac{128M_p}{9L^2}$$

式中  $M_p$  为梁的塑性弯矩。塑性铰形成之后，该梁可想象为用此铰连接的两根杆所组成。在此情况下梁形成一个机构，它可在极限载荷作用下继续挠曲。经常用“破坏机构”或“塌陷机构”一词来描述这种情况。

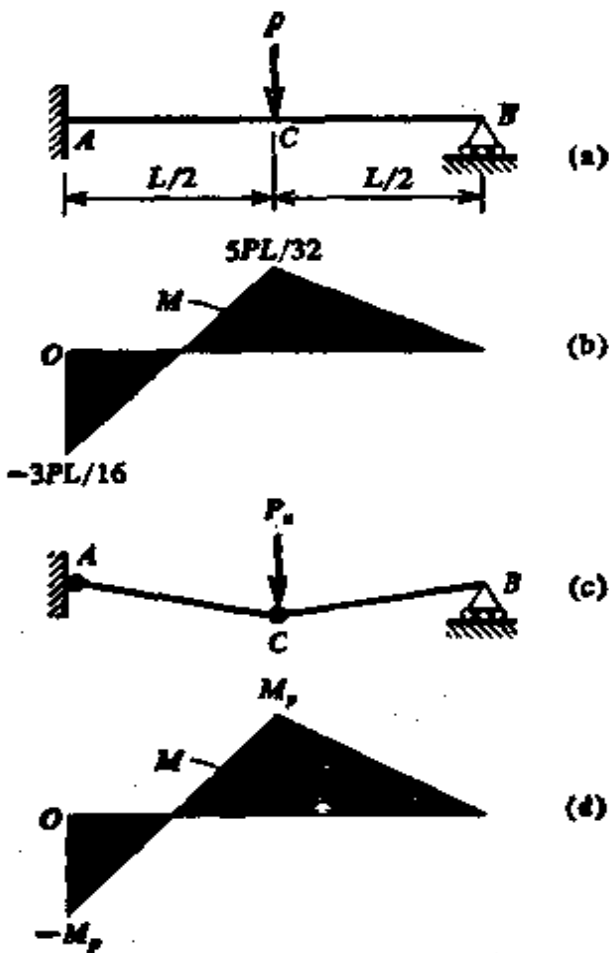
静定梁的极限载荷与屈服载荷之比总是等于  $M_p/M_y$ ，从上例即可看出，它就是横截面的形状因子  $f$ 。然而，对静不定梁来说，这一比值随梁的类型和载荷而变。

为了演示静不定梁的性态，我们将取一根在中点处承受集中载荷  $P$  的支承悬臂梁为例(图 9-12a)。对任一个小于屈服载荷  $P_y$  的载荷值，弯矩图具有图 9-12b 所示的形状。最大弯矩在固定端  $A$  处，数值上等于  $3PL/16$ 。因此，屈服载荷为

$$P_y = \frac{16M_y}{3L} \quad (a)$$

如果  $P$  增加到超过  $P_y$  值，在截面  $A$  处将发生附加屈服。不久，在一稍大于  $P_y$  的载荷下，在弯矩图的峰值截面  $O$  处也开始屈服。如

果我们继续增大此载荷，将在梁的  $A$  端形成塑性铰。然而，这个



单一铰不会引起梁的完全破坏。此梁实际将表现为一根静定简支梁，在截面  $C$  处受到载荷  $P$  而在  $A$  端受到力矩  $M_p$  的作用。因而，该结构将经受载荷  $P$  的进一步增加，直到最后  $C$  处的弯矩也达到塑性弯矩  $M_p$  为止。在这时， $A$  和  $C$  处都有塑性铰而且结构已经成为机构（图9-12c）。此时出现了无约束挠曲，载荷不可能再增加，就此，已经达到了极限载荷  $P_u$ 。

为确定极限载荷，我们不需要象上段所述那样详细地研究梁从初始加载直到塌陷时的性态。

相反，我们可直接研究图9-12c所示的破坏情况并用静力学计算  $P_u$ 。因为在塑性铰处的弯矩等于  $M_p$ ，所以立刻得知破坏情况下完整的弯矩图（见图9-12d）。因而，载荷  $P_u$  可很容易由平衡考虑求出。例如，我们根据整个梁的自由体图可求出支座  $B$  的反力  $R_b$ 。对  $A$  取矩（图9-12c）给出：

$$M_p - \frac{P_u L}{2} + R_b L = 0 \quad \text{或} \quad R_b = \frac{P_u}{2} - \frac{M_p}{L}$$

下一步，使用  $CB$  部分的自由体图并对  $C$  点取矩，我们得到：

$$-M_p + \frac{R_b L}{2} = 0$$

将此方程与前面的一个方程联解，我们得出

$$P_u = \frac{6M_p}{L} \quad (b)$$



此为梁的极限载荷。

我们现在由方程(a)和(b)得出极限载荷和屈服载荷之比:

$$\frac{P_u}{P_y} = \frac{9M_p}{8M_y}$$

它大于静定梁所得比值。此种增大的理由很易看出。虽然对于静定梁弯矩图的形状总是保持不变,但对静不定梁来说发生弯矩的重新分配。在图9-12所示的梁的例子中,初始弯矩图在截面A具有最大值(图9-12b)。在该截面上形成铰后,此处的弯矩将保持不变,尽管在其它各处的弯矩将继续增加,直至达到图9-21d所示的情况为止。这种弯矩的重新分配总是具有增大静不定结构极限强度的趋势,因为一旦一个截面破坏,结构的其他部分就开始承受附加的载荷。

塑性分析的便利特色之一是简易,仅仅使用静力学即可计算出极限载荷。单纯的静力分析自然要比在线弹性范围内所要求的静不定分析简单得多。此外,由塑性分析所得结果对边界条件的缺陷是不敏感的。固定端的微小转动或简支支承的微小沉陷对极限载荷没有影响。而同样的缺陷对结构的弹性性态将有明显的影响。

当用静力学计算极限载荷时,使用虚位移原理通常会有很大优越性。这个原理说明,如果有一刚体系统在一组力的作用下处于平衡,那么在该体系发生的微小虚位移过程中,由那些力所作的功必为零。让我们将此原理应用于图9-12所描述的例子。我们认为,破坏机构由两根杆AO和OB所组成,在A及O处带有塑性铰,如图

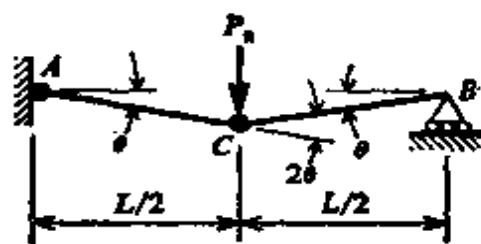


图9-13. 虚位移原理的应用。

9-13所示,我们可用杆AO转动的微小角度 $\theta$ 引入一个虚位移。在发生位移过程中,杆OB将转过一微小角度 $\theta$ ,而O点将下移 $\theta L/2$ 距离。由力 $P_u$ 所作之功为正,并等于 $P_u$ 乘以 $\theta L/2$ 。由塑性力矩 $M_p$ 所作之功为负,因为它们与杆的转向相反,在截面A

处此功为  $-M_p\theta$ ，而在截面  $C$  处，此功为  $-M_p(2\theta)$ 。所以，梁的虚功方程为

$$\frac{P_u\theta L}{2} - M_p\theta - 2M_p\theta = 0$$

消去定义为虚位移的  $\theta$  角，我们得到

$$P_u = \frac{6M_p}{L}$$

与前面的结果相同。使用虚位移原理的优点在于简洁，我们只需要引入一个虚位移，而后写出一个虚功方程。与此相反，更常规的静力学方法要求我们不仅利用整个结构的自由体图，而且也要利用各部份的自由体图。

在上例中，只可能有一种确定塑性铰位置的方式，因此只有一种破坏机构要考虑。然而，往往发生有几种不同的可能机构的情况，而且哪一种是正确的可能也并不明显。在此情况下，我们必须

依次研究每一种机构并计算其相应的载荷(或载荷系)值。自然，正确的破坏机构在最小载荷的值时出现。这个载荷即为结构的真实极限载荷。

为了说明破坏机构的适当选择，让我们以图 9-14a 所示的梁  $AB$  为例。该梁支持着作用在  $C$  和  $D$  截面上的两个集中载荷。这个梁的弯矩峰值发生在载荷或反力作用的横截面上，亦即在  $A$ 、 $C$  或  $D$  处。如果在这三个横截面中的两个有了塑性铰，就会形成破坏机构，其三种可能性示于图 9-14b、c 和 d。对于每一种假设的机

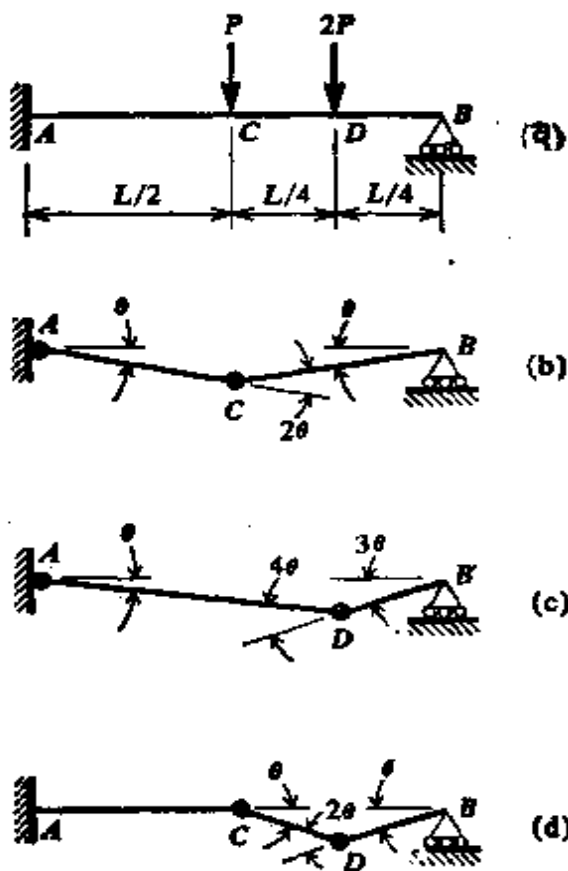


图 9-14. 说明可能的破坏机构的例题。

构, 载荷  $P$  的大小可很容易根据虚位移原理算出. 由此, 对于图 9-14b 所示的机构, 我们得出

$$P\left(\frac{\theta L}{2}\right) + 2P\left(\frac{\theta L}{4}\right) - M_P\theta - M_P(2\theta) = 0$$

或  $P = 3M_P/L$ . 类似地, 求出相应于图 9-14c 所示机构的载荷  $P$  为  $5M_P/2L$ , 而相应于图 9-14d 所示机构的载荷为  $6M_P/L$ . 比较这三个结果, 我们得出结论, 图 9-14a 中所示梁的极限载荷为

$$P_u = \frac{5M_P}{2L}$$

而其塌陷机构在截面  $A$  和  $D$  处具有塑性铰.

还有另一个塑性分析的例子, 让我们考察一根承受均布载荷的支承悬臂梁 (图 9-15a). 梁中最大负弯矩发生在固定端  $A$  处, 而最大正弯矩发生在靠近梁中点的某处. 因此, 塌陷机构将在  $A$  和  $C$  处有塑性铰, 如在图 9-15b 中所画的情形. 如果我们对这个机构引入一个虚位移, 并以  $\theta$  代表  $AC$  部分的转角, 那么在  $C$  处铰的竖直位移就为  $\theta b$ , 其中  $b$  为铰距. 此外,  $CB$  部分的转角变为  $\theta_1 = \theta b / (L - b)$ . 于是, 塑性力矩  $M_P$  在各铰处所作的虚功为

$$-M_P\theta - M_P(\theta + \theta_1) \quad (c)$$

取一载荷微元  $q dx$  乘以它移动的虚位移, 然后沿梁长积分, 即可求得施加的载荷  $q$  所作的功. 因  $q$  为常数, 其结果就等于  $q$  与图 9-15b 所示位移图面积的乘积. 于是, 载荷  $q$  的虚功为

$$q\left(\frac{L}{2}\right)(\theta b) \quad (d)$$

将表达式 (c) 和 (d) 相加, 并使它等于零, 便得虚功方程. 求解所得的方程, 得出

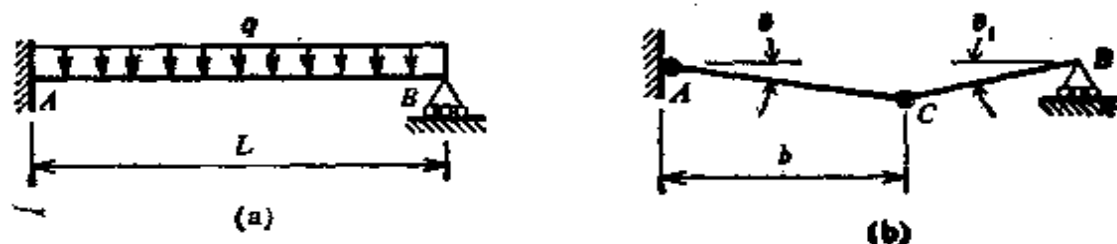


图 9-15. 承受均布载荷梁的塑性分析.

$$q_u = \frac{2M_P}{bL} \left( \frac{2L-b}{L-b} \right) \quad (e)$$

该表达式给出以距离  $b$  所表示的极限载荷，其中  $b$  仍是一个未知量。然而，我们已经注意到，当考虑各种可能的破坏机构时，正确的机构为给出最低极限载荷值的那一个。将这一概念应用于此问题，我们断定距离  $b$  必定为使  $q_u$  为最小值者。所以，我们可将  $q_u$  对  $b$  取导数，令此导数为零，并解出  $b$ 。其结果为

$$b = L(2 - \sqrt{2}) \quad (f)$$

另一个方法是建立梁的弯矩表达式，然后求出最大弯矩的位置，此处将是塑性铰的位置。自然，刚才叙述的这种计算（或使  $q_u$  为最小，或确定最大弯矩点的位置），仅对那些在数学上容易处理的最简单的问题中才是可能的。在比较复杂的情况下，通过假设几个塑性铰的位置，然后计算每种情况下相应的载荷，作这样的数值求解是比较容易的。根据这样的计算，能以良好的精确度求出最小的载荷  $q_u$  和塑性铰的位置。

现在回到所论的问题，我们由方程 (f) 取距离  $b$  并代入  $q_u$  的表达式（见方程 e），得出

$$q_u = \frac{2M_P}{L^2} (3 + 2\sqrt{2}) \approx \frac{11.66M_P}{L^2} \quad (g)$$

即为该梁上极限载荷的表达式。作为旁注，该梁的极限载荷  $q_u$  与屈服载荷  $q_y$  之比可以很容易算出，此比值为  $1.46M_P/M_y$ ，比静定梁的比值要高得多。

固定端梁和连续梁的塑性分析可用类似于在上例中所述的方式完成。当有三个塑性铰形成时固定端梁就会变为机构，通常，在每个支承处有一塑性铰，加上中间某个位置处的一个塑性铰。连续梁内有一跨形成机构就塌陷。如果它为一个内跨，就需要三个塑性铰：在该跨的每一端各有一个，并在中间位置上有一个。对于一个具有简单支承的端跨，只要有两个塑性铰就形成机构，其中一个在里面的第一个支座上，另一个就在端跨之内。

塑性分析最重要的应用是设计平面刚架，当达到极限载荷

时,这类刚架形成机构,但是,它们的分析要比梁复杂得多.有兴趣的读者,可以学习一些有关塑性分析方法方面的较深的资料文献(见参考文献9-1至9-8).

当分析在非弹性范围内的梁或其它结构时,我们必须牢记,叠加原理不成立,结构的性态不仅取决于载荷的终值,而且也 and 加载的顺序有关.为了说明这一点,研究如图9-16a所示作用有两个载荷  $P$  的梁  $AB$ .如果这两个载荷同时作用,弯矩图的形状如图(b)所示,且屈服载荷为  $P_y = 9M_y/L$ .现在假设首先施加作用在  $C$  点的载荷,而后施加作用在  $D$  点的载荷.当只有  $C$  处的载荷作用时,弯矩图具有图9-16c所示的形状.其最大弯矩值为上述情况的两倍,因此,单独在  $C$  处作用的

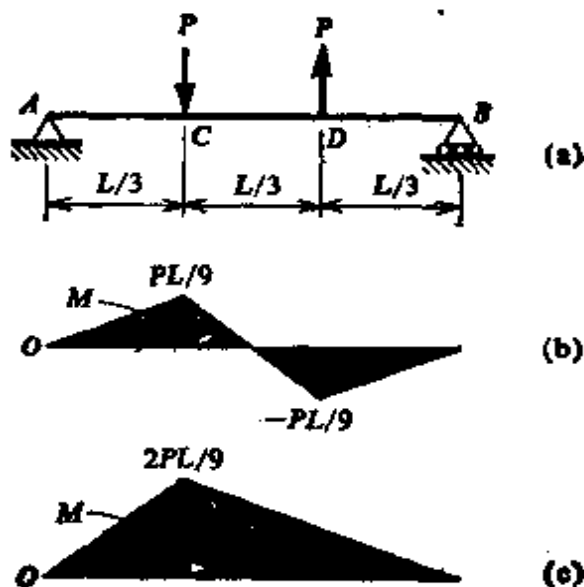


图9-16. 承受两个载荷的梁.

的载荷  $P$ ,即使保持小于上面刚算出的  $P_y$  值,也可能产生塑性性态.当另一个载荷  $P$  作用在  $D$  点时,这一塑性性态将不会消失,因此很显然,梁的最后状况将和载荷同时作用的情况不同.

由于这个原因,在我们的研究中我们将总是假设诸力同时作用于结构上,并且在加载过程中诸载荷的比值保持常数.

**塑性设计** 以极限承载能力为根据的钢结构设计称为塑性设计或极限载荷设计.\*在塑性设计中,我们首先确立结构的资用载荷,然后用载荷因子譬如1.7去乘那些载荷,以得出极限载荷.对极限载荷条件下的结构设计要用塑性分析的概念.这个方法与我们所熟悉的弹性设计或容许应力设计不同,在弹性设计或容许应力设计中,对屈服应力使用安全系数以给出资用应力,然后进行结构设计(使用弹性分析的概念),使之不超过资用应力.

\* 极限设计这一术语也曾被使用过.

这两种设计方法的主要差别是,塑性设计得到的结构,其所有各部份抵抗破坏的安全系数几乎是均匀的,而按弹性设计的结构抵抗屈服的安全系数是均匀的。根据先前关于非弹性作用下结构中的弯矩如何重新分配的讨论,我们可以很容易理解,用这两种方法设计的结构,其各部分将具有不同的相对比例。

有关塑性设计和塑性分析课题方面的文献非常广泛,希望从事这一课题的读者可从本书后面列出的参考文献着手(见参考文献9-1至9-18)。这些参考文献包括了该领域中领先研究的文献目录。

## 9.6 挠度

非弹性梁的挠度可根据曲率和挠度之间的基本关系计算(见方程6-4):

$$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (9-20)$$

这个方程是单纯根据几何考虑导出的,因此它对任何材料的梁都是有效的。自然,该方程只限于小挠度。为了使用方程(9-20)计算挠度,必须已知曲率 $\kappa$ 。对于线弹性材料,该曲率为 $M/EI$ 。对于非弹性梁(如弹-塑性梁),必须使用适当的曲率表达式(如方程9-18)。当使用方程(9-20)时,剪力对挠度的影响被略去了,这对于通常的应用场合是足够精确的。

在第六章中叙述过的对弹性梁求解方程(9-20)的若干方法也可用于非弹性弯曲。例如,逐次积分法是相当有效的,虽然它只适用于一些简单梁。力矩-面积法也可应用,只是现在我们将称它为曲率-面积法,因为这两个定理必须用曲率图的面积取代 $M/EI$ 图的面积重新加以陈述。因此,曲率-面积定理为

1. 在 $A$ 和 $B$ 两点处,挠曲线切线之间的夹角 $\theta$ 等于这两点之间曲率图的面积。

2.  $B$ 点距 $A$ 点切线的挠度 $\Delta$ 等于 $A$ 和 $B$ 之间曲率图的面积对 $B$ 点的一次矩。

可按对弹性梁使用力矩-面积定理相同的方式,用这些定理来求出非弹性梁的斜率和挠度。

因为曲率图通常不能用简单函数来表达,所以一般需要用数值法求挠度。例如,可以算出在沿梁轴的一组离散点上的曲率,并可在这些点的每一点处画出曲率图的纵坐标。这些纵坐标可用直线连成一个逼近精确图形的近似图形。然后,可用数值计算求出近似图的面积和一次矩,接着可根据曲率-面积定理确定其挠度和斜率。只有很简单的问题才可用这些方法处理;对于复杂结构,已建立各种近似的方法。有关求挠度方面深一步的资料应查阅有关文献。

对于超过比例极限的梁,叠加原理不能应用。所以,当确定非弹性梁的挠度时,我们不能使用叠加法。

**例题** 一根在自由端承受集中载荷  $P$  的悬臂梁  $AB$ (见图 9-17a)系由一种弹塑性材料所制成。试确定从开始加载到破坏梁自由端处的转角  $\theta$  和挠度  $\delta$ , 假设该梁具有矩形截面。

让我们开始先粗略地画出梁的弯矩图(图 9-17b)。我们看出,最大弯矩等于  $PL$ , 而且只要这个值小于屈服弯矩  $M_y$ , 该梁就是完全弹性的。在弹性范围内,我们有

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI} \quad \delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

首先使梁产生屈服的屈服载荷  $P_y$  由下列方程给出:

$$P_y = \frac{M_y}{L} \quad (a)$$

而由屈服载荷引起的转角  $\theta_y$  和挠度  $\delta_y$  为

$$\theta_y = \frac{P_y L^2}{2EI} \quad \delta_y = \frac{P_y L^3}{3EI} \quad (b)$$

这些是弹性范围内转角和挠度的最大值。我们可用下列简化方程以无量纲

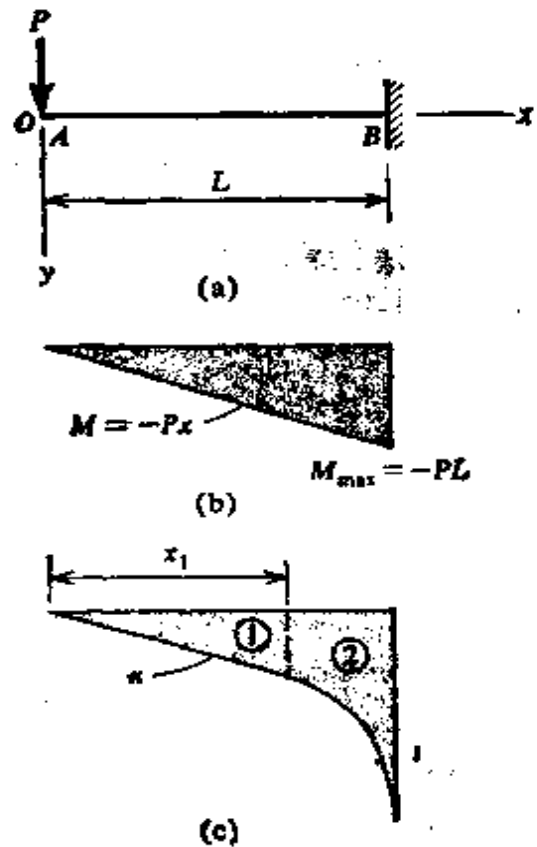


图 9-17. 例题. 矩形横截面的弹-塑性梁。

形式表示整个弹性范围内的转角和挠度:

$$\frac{\theta}{\theta_y} = \frac{P}{P_y} \quad \frac{\delta}{\delta_y} = \frac{P}{P_y} \quad \left(0 \leq \frac{P}{P_y} \leq 1\right) \quad (c)$$

当梁内的最大弯矩超过  $M_y$  时, 该梁将有两个区域: (1) 完全弹性性态区, (2) 弹-塑性性态区, 如图 9-17c 的曲率图所示。在区域(1)内, 其曲率为

$$\kappa = \frac{Px}{EI} \quad (d)$$

而在区域(2), 它为(见方程 9-18)

$$\kappa = \frac{\kappa_y}{\sqrt{3 - 2Px/M_y}} \quad (e)$$

其中  $\kappa_y = M_y/EI$ 。根据方程  $Px_1 = M_y$ , 可求出弹性区的长度  $x_1$ , 因此

$$x_1 = \frac{M_y}{P} \quad (f)$$

根据曲率-面积第一定理, 梁端的转角等于曲率图的面积:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^{x_1} \frac{Px \, dx}{EI} + \int_{x_1}^L \frac{\kappa_y \, dx}{\sqrt{3 - 2Px/M_y}} \\ &= \frac{Px_1^2}{2EI} + \frac{\kappa_y M_y}{P} [\sqrt{3 - 2Px_1/M_y} - \sqrt{3 - 2PL/M_y}] \end{aligned}$$

如果以  $M_y/EI$  代替  $\kappa_y$ , 以  $M_y/P$  代替  $x_1$  及  $P_y L$  代替  $M_y$ , 则上述方程变为

$$\frac{\theta}{\theta_y} = \frac{P_y}{P} [3 - 2\sqrt{3 - 2P/P_y}] \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_y} \leq \frac{3}{2}\right) \quad (g)$$

式中  $\theta_y$  由方程(b)给出。直到梁内最大弯矩变得等于塑性弯矩  $M_y$ , 即相当于  $P/P_y = 3/2$  之前, 这个方程都是有效的。在  $P/P_y$  达到此值的瞬间, 转角为  $\theta/\theta_y = 2$ 。接着, 此角无限地增大。载荷  $P/P_y$  与转角  $\theta/\theta_y$  的关系曲线图示于图 9-18。

梁端的挠度根据曲率-面积第二定理计算如下:

$$\delta = \int_0^{x_1} \frac{Px^2 \, dx}{EI} + \int_{x_1}^L \frac{\kappa_y x \, dx}{\sqrt{3 - 2Px/M_y}}$$

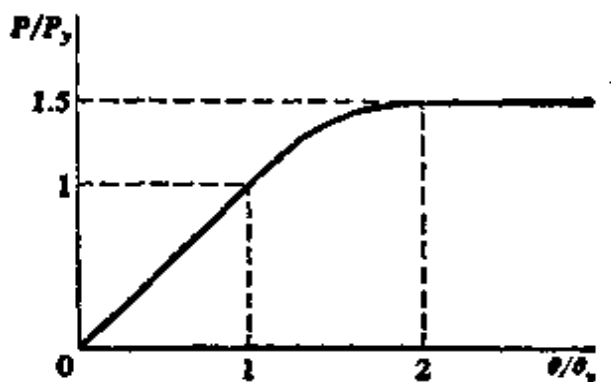


图 9-18. 图 9-17 所示悬臂梁的载荷与转角的关系曲线。



通过计算这两个积分, 并进行与方程(g)同样的代换, 我们得到

$$\frac{\delta}{\delta_v} = \left(\frac{P_v}{P}\right)^2 \left[ 5 - \left(3 + \frac{P}{P_v}\right) \sqrt{3 - \frac{2P}{P_v}} \right] \quad \left(1 < \frac{P}{P_v} \leq \frac{3}{2}\right) \quad (h)$$

式中  $\delta_v$  由方程(b)得出. 当  $P/P_v = 3/2$  时, 挠度是  $\delta/\delta_v = 20/9$ . 其载荷-挠度图绘于图 9-19 中.

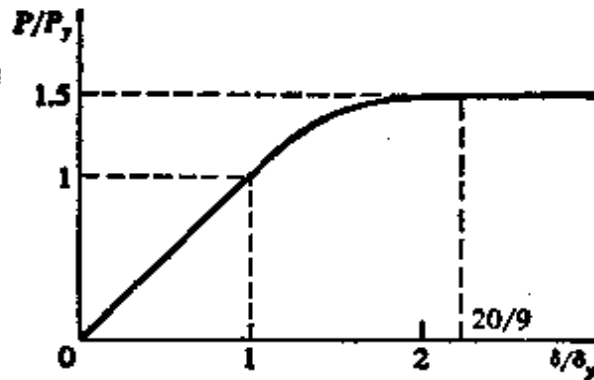


图 9-19. 图 9-17 所示悬臂梁的载荷与挠度的关系曲线.

## 9.7 非弹性弯曲

在以上四节中, 我们已经详细地论述了弹-塑性材料的一种特殊情况. 因为这种材料非常精确地代表了结构钢的性态, 所以它对工程师来说是极为重要的. 现在我们将研究非弹性弯曲更为一般的情形, 其中材料具有如图 9-20 中的曲线  $AOB$  所示的应力-应变图. 让我们仍从研究矩形截面梁着手(图 9-21), 其中  $h_1$  和  $h_2$  分别为中性轴至梁的下表面和上表面的距离.

为了确定矩形梁的中性轴位置, 我们用方程(9-1)和(9-3). 根据方程(9-1), 我们得到

$$y = \rho \epsilon \quad dy = \rho d\epsilon \quad (a)$$

代入方程(9-3)得到

$$\int \sigma dA = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma b dy = \rho b \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = 0$$

式中  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  分别为梁的底面和顶面处的应变(见图 9-1). 注意, 这些应变也在图 9-20 的应力-应变曲线上示出. 上述方程表明, 中性轴的位置确定是使

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = 0 \quad (9-21)$$

$$y = \rho \epsilon \quad dy = \rho d\epsilon$$

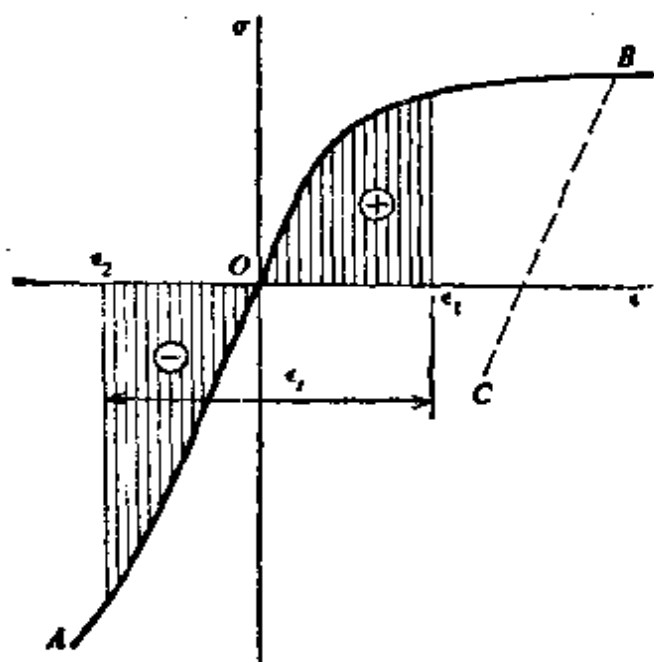


图 9-20. 应力-应变图.

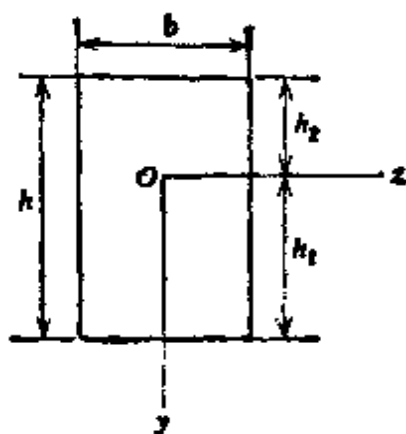


图 9-21. 矩形截面的非弹性梁.

现在让我们用  $\epsilon_t$  代表梁中最大正的应变和最大负的应变绝对值的和:

$$\epsilon_t = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \kappa h_1 + \kappa h_2 = \kappa h \quad (9-22)$$

为求解方程(9-21),我们用图 9-20 中的曲线  $AOB$ ,并将长度  $\epsilon_t$  以这样的方式标在水平轴上,使得该图的拉伸面积等于压缩面积.以此方式,我们将得到最外纤维处的应变  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ ,这些应变相应于总应变  $\epsilon_t$  的某一假设值.于是,相应的中性轴的位置很容易由方程(9-2)求得如下:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\epsilon_1}{-\epsilon_2} = \left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right| \quad (9-23)$$

因为应变  $\epsilon$  与自中性轴的距离成线性关系(见图 9-1c),所以我们得出结论:如果用距离  $h$  取代  $\epsilon_t$ ,则图 9-20 中的应力-应变图  $AOB$  表示弯曲应力沿梁整个高度上的分布.于是,对于一个假设的  $\epsilon_t$  值,现在我们知道了中性轴的位置和梁的整个高度上的应力和应变.由方程(9-22),我们也知道了梁的曲率.

下一步要使用方程(9-4)求出所作用的弯矩  $M$ . 代入方程(a),可将方程(9-4)化为下列形式:

$$\int \sigma y dA = \int_{-h_1}^{h_2} \sigma y b dy = \rho^2 b \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma \epsilon d\epsilon = M \quad (b)$$

由方程(9-22)观察出 $\rho = 1/\kappa = h/\epsilon_t$ , 我们可将方程(b)写成下列形式:

$$M = \frac{bh^3}{\epsilon_t^2} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma \epsilon d\epsilon \quad (9-24)$$

此表达式中的积分代表图9-20的应力-应变曲线以下的面积(阴影面积)对竖直角的一次矩。因此, 通过在每种特定情况下计算这一积分并代入方程(9-24), 我们就可求出弯矩 $M$ , 从而完成了在所假设的 $\epsilon_t$ 值下纯弯梁的分析。

对于另外的 $\epsilon_t$ 值, 可以重复这一全过程, 每次进行这样的计算都能给出一个曲率值和一个相应的弯矩值。由这些数据, 可画出弯矩-曲率图(图9-22)。这样的图适合于某一特定的应力-应变曲线及某一特定的矩形横截面梁。

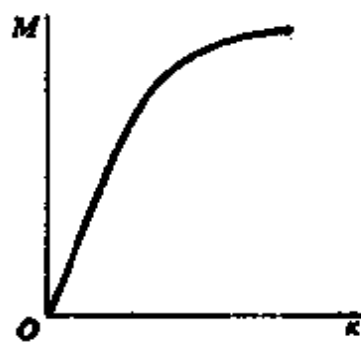


图9-22. 非弹性弯曲的弯矩-曲率图。

如果应力-应变图的拉压部分是相同的, 计算就可简化, 因为此时我们立即知道中性轴通过矩形横截面的形心。下列方程适用于这种情况:

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2} \quad (9-25)$$

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{\epsilon_t}{2} \quad (9-26)$$

$$M = \frac{2bh^3}{\epsilon_t^2} \int_0^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon \quad (9-27)$$

由这些方程中的最后一个方程, 我们可以对任一个假设的 $\epsilon_t$ 值计算出 $M$ , 此后, 即可由方程(9-22)求出曲率。

在线弹性材料矩形梁的特殊情况下, 我们有 $\sigma = E\epsilon$ , 方程(9-27)给出

$$M = \frac{2bh^3}{\epsilon_t^2} \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon^2 d\epsilon = \frac{2bh^3 E \epsilon_1^3}{3\epsilon_t^2} \quad (c)$$

现将 $\epsilon_t = 2\epsilon_1$ 和 $\sigma_{\max} = E\epsilon_1$ 代入方程(c), 我们得到

$$M = \frac{\sigma_{\max} bh^3}{6} = \sigma_{\max} S \quad (d)$$

式中  $\sigma_{\max}$  为梁底面处的应力。此外，如果我们将  $\epsilon_t = 2\epsilon_1$  和  $\epsilon_1 = xh/2$  代入方程 (c)，我们得到

$$x = \frac{M}{Ebh^3/12} = \frac{M}{EI} \quad (e)$$

方程 (d) 和 (e) 是熟悉的线弹性弯曲方程。

如果我们有宽度  $b$  变化的某种其它形状的横截面而不是矩形 (例如，见图 9-1b)，那么我们得到下述式子以取代方程 (9-21) 和 (9-24)。

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma b d\epsilon = 0 \quad (9-28)$$

$$M = \frac{h^2}{\epsilon_t^2} \int_{\sigma} \sigma b \epsilon d\epsilon \quad (9-29)$$

式中宽度  $b$  已被保留在积分号内。作为特例，让我们研究一个 T 字形截面 (图 9-23)。用  $\epsilon_3$  表示腹板和翼缘交接处的应变，我们可将上述方程写成如下形式：

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_3} \sigma d\epsilon + \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_3} \sigma \frac{b_1}{b_2} d\epsilon = 0 \quad (f)$$

$$M = \frac{b_2 h^2}{\epsilon_t^2} \left[ \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_3} \sigma \epsilon d\epsilon + \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_3} \sigma \frac{b_1}{b_2} \epsilon d\epsilon \right] \quad (g)$$

从这些方程我们看出，相应于横截面的翼缘范围内的应力-应变图的纵坐标必须按  $b_1/b_2$  的比值放大 (见图 9-24)。在确定中性轴位

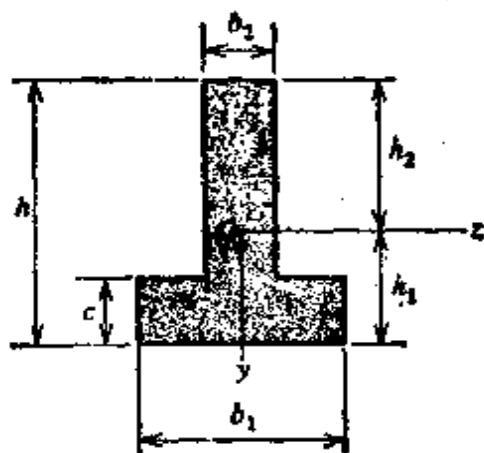


图 9-23. T 字型截面的非弹性梁。

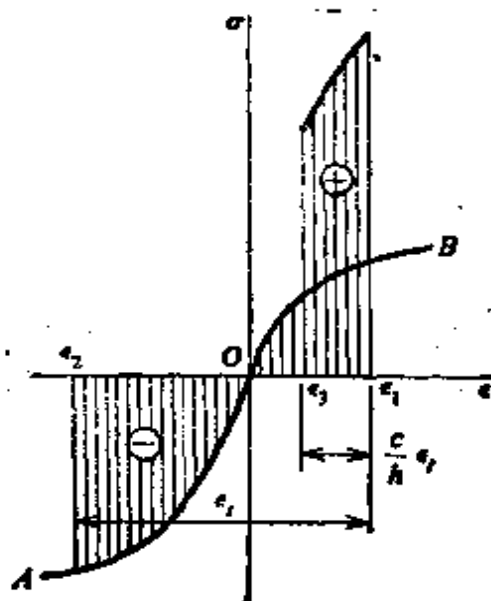


图 9-24. 修正的应力-应变图

置时, 我们仍按前述情况进行, 在图 9-24 的水平轴上标出所假设的距离  $\epsilon_t$  的位置, 使得两个阴影面积在数值上相等。自然, 该位置必须用试凑法求出。对于每一个试算位置, 在腹板和翼缘的交接处的应变  $\epsilon_s$  可由下列方程求得:

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_s}{\epsilon_t} = \frac{c}{h} \quad (h)$$

以此方式进行, 可求得最外层纤维的应变  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ 。

由方程 (f) 确定中性轴位置之后, 现在我们可由方程 (g) 求出弯矩。注意到, 在方括号内的两个积分代表图 9-24 中的阴影面积对通过原点  $O$  的竖直轴的一次矩。计算此一次矩, 而后代入方程 (g), 我们得到相应于所假设的  $\epsilon_t$  值的弯矩  $M$ 。我们也可由方程 (9-22) 求出相应的曲率  $\kappa$ , 然后就可作出 T 字形截面梁的弯矩-曲率图。类似的过程可用于宽翼缘梁。

上述有关非弹性弯曲梁的分析是很普遍的, 可用于任何应力-应变曲线和任一截面形状。然而, 有时应力-应变曲线可用一个分析表达式逼近, 在此情况下, 也许能通过直接计算确定应力、应变和曲率。通常这只有在相对简单的情况下才是可能的, 如下例中对矩形截面梁所说明的那样。

**例题** 一根矩形截面梁(见图 9-21), 由具有两根直线组成的应力-应变图的材料所制成, 如图 9-25 所示, 拉伸弹性模量为  $E_1$ , 而压缩弹性模量为  $E_2$ , 因此

$$\sigma = E_1 \epsilon \quad \epsilon \geq 0 \quad (i)$$

$$\sigma = E_2 \epsilon \quad \epsilon \leq 0 \quad (j)$$

假设该梁承受正弯矩  $M$ 。分析的目的是确定中性轴的位置, 求得弯矩-曲率表达式, 并求出梁中的最大应力和最大应变。

让我们分别以  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  代表梁底和梁顶处的应变。相应的最大应力为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ 。这些应力和应变示于图 9-25 中。为了确定中性轴的位置, 我们注意到, 在应力-应变曲线下的两块阴影面积必须相等, 因此

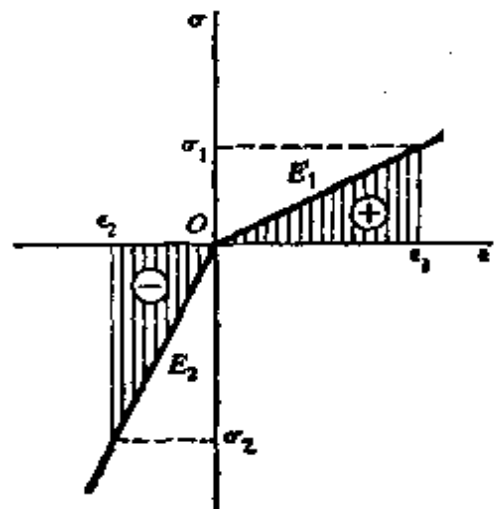


图 9-25 例。由两根直线组成的应力-应变图。

$$\frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} = \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} \quad (\text{k})$$

由方程(i)和(j)我们知道

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_1 \quad \sigma_2 = E_2 \epsilon_2 \quad (\text{l})$$

此外, 我们有如下关系式

$$\epsilon_1 = \kappa h_1 \quad \epsilon_2 = -\kappa h_2 \quad (\text{m})$$

将上述四个方程代入到方程(k)中, 我们得到联系  $h_1$  和  $h_2$  的第一个方程.

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2 \quad (\text{n})$$

此外, 我们还有方程

$$h = h_1 + h_2 \quad (\text{o})$$

联解方程(n)和(o), 即可求出距离  $h_1$  和  $h_2$ .

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad (9-30)$$

中性轴的位置就此确定.

下一步我们转到方程(9-24)以计算弯矩. 将方程(i)和(j)代入该方程, 给出

$$M = \frac{bh^2}{\epsilon_1^2} \left[ \int_{\epsilon_2}^0 E_2 \epsilon^2 d\epsilon + \int_0^{\epsilon_1} E_1 \epsilon^2 d\epsilon \right]$$

此式变为

$$M = \frac{bh^2}{3\epsilon_1^2} [-E_2 \epsilon_2^3 + E_1 \epsilon_1^3] \quad (\text{p})$$

应变  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  通过方程(m)与曲率联系起来. 将方程(9-30)代入方程(m), 得到

$$\epsilon_1 = \kappa h \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad \epsilon_2 = -\kappa h \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}$$

此外, 应变  $\epsilon_1$  等于  $\kappa h$  (见方程 9-22). 现在我们将  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$  和  $\epsilon_1$  的这些表达式代入方程(p), 得出

$$M = \frac{4E_1 E_2 I \kappa}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (\text{q})$$

式中  $I = bh^3/12$ . 最后, 让我们引进符号

$$E_r = \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (9-31)$$

从而方程(q)变为  $M = E_r I \kappa$ , 因此曲率变为

$$\kappa = \frac{M}{E_r I} \quad (9-32)$$

$E_r$  这个量称为**减缩弹性模量**, 其值总是介于  $E_1$  和  $E_2$  之间. 在特殊情况下, 当两个模量相同并等于  $E$  时,  $E_r$  也等于  $E$ .

根据弯矩, 现在很容易求出梁最外层纤维的应力和应变。我们取  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的方程(m), 并代入曲率的方程(9-32), 得

$$\epsilon_1 = \frac{Mh_1}{E_r I} \quad \epsilon_2 = -\frac{Mh_2}{E_r I} \quad (9-33)$$

然后, 由应力-应变方程(方程 l) 得

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{I} \frac{E_1}{E_r} \quad \sigma_2 = -\frac{Mh_2}{I} \frac{E_2}{E_r} \quad (9-34)$$

该梁的分析就此完成。

**挠度** 一旦我们知道了弯矩-曲率图就可求出静定非弹性梁的挠度。进行计算的方法已在 9.6 节讨论过。然而, 在静不定梁的情况下, 其分析要复杂得多, 因为我们不能用叠加原理去求多余反力。让我们研究一个简单的例子, 说明解决的方法。

假设我们有一根非弹性梁, 一端固定, 另一端简支。固定端的反力矩可用如下的试凑法求得。假设此力矩的一个试算值, 并绘制其相应的弯矩图。接下去使用弯矩-曲率关系绘制梁的曲率图。由曲率图, 我们可以计算固定端处的转角。如果多余力矩试算值选得正确, 这个角应为零。通过反复试算, 我们最后可得到多余力矩的真实值。类似的方法可用来分析任一根静不定梁。

## 9.8 残余应力

当梁受到非弹性弯曲, 然后将载荷移去时, 梁将产生某些永久变形, 并且该梁没恢复到它原来的形状。梁中那些受力超过弹性极限的纤维将具有永久变形, 并将阻止那些受到弹性应力的纤维在卸载后恢复到它们的初始长度。因此, 梁中将存在某些残余应力。

如果已知由于初始非弹性弯曲所引起的应力, 则不难确定梁中残余应力的型式。假设由于正弯矩  $M$  所引起的梁中应力分布由图 9-26a 所示的图形给出。为简化起见, 我们假设梁的横截面具有两根对称轴, 而材料在拉伸和压缩时具有相同的性质。由此得知, 中性轴位于梁高之半, 其最大拉应力和最大压应力数值上相

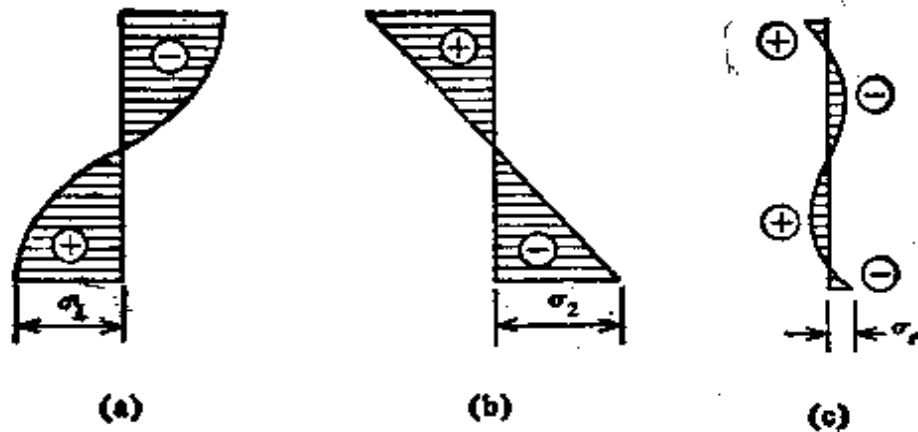


图 9-26. 非弹性弯曲时的残余应力。

同(等于  $\sigma_1$ )。当此梁卸载时, 相当于此梁被等于  $M$  的负弯矩所弯曲。在卸载的过程中, 假设梁呈弹性状态, 并且服从虎克定律, 如图 9-20 的应力-应变图上的  $BO$  线所示。因此, 在卸载过程中叠加上去的应力分布为一直线(图 9-26b), 于是这些应力可由公式  $\sigma = My/I$  求得。最大卸载应力为  $\sigma_2 = M/S$ 。

初始非弹性弯曲应力和线性卸载应力叠加将给出移去载荷之后留在梁中的应力。这些残余应力绘于图 9-26c 中, 其值很容易按照绘于图 9-26a 和 b 中应力的代数和算出。例如, 在梁的底边处, 残余应力为  $\sigma_r = \sigma_1 + \sigma_2$ 。对于所画的情况,  $\sigma_2$  为负数, 且在数值上大于  $\sigma_1$ , 因此  $\sigma_r$  也为负值。

现假设原来的正弯矩  $M$  重新作用在图 9-26c 所示具有残余应力的梁上, 梁中每根纤维将保持弹性, 并服从虎克定律, 直到它的应力达到卸载发生之前的原先数值为止。因此, 现在作用的弯矩  $M$  将产生具有线性关系的应力, 只要所加的弯矩不超过  $M$ , 该梁将表现为线弹性状态。由于  $M$  产生的应力将与图 9-26b 所示的相同, 但方向相反, 而最终应力将如图 9-26a 所示。因此, 只要弯曲的方向不变, 而且弯矩不超过初始弯矩, 初始非弹性弯曲加上由于卸载而得到的附加残余应力的效应, 是使梁表现为线弹性状态。

按本节含意, 残余应力是结构被加载而又卸载后残留的应力。在辗压结构型钢中存在着由制造过程而产生的另一种类型的残余

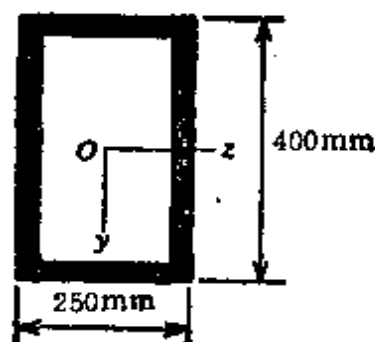


应力。因为辗压操作和截面的不均匀加热和冷却，所以从生产者那里得到的结构梁就存在有应力。这种应力通常称为残余应力或初应力，它可能大到 70 或 100 N/mm<sup>2</sup>。有关结构梁中残余应力的资料，见参考文献 9-19 至 9-21。关于弯曲时残余应力的附加资料，包括用实验方法确定残余应力，在参考文献 9-22 和 9-23 中给出。

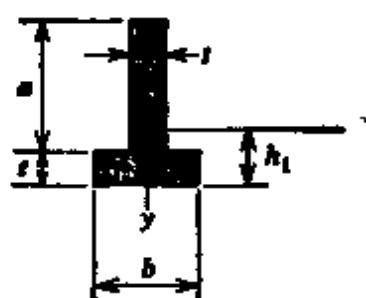
## 习 题

按材料为弹-塑性的假定求解第 9.3 节中的问题

**9.3-1** 试确定图中所示空心箱形截面的塑性弯矩  $M_p$ ，假设  $\sigma_y = 250$  N/mm<sup>2</sup>，壁厚为 25 mm。



习题 9.3-1

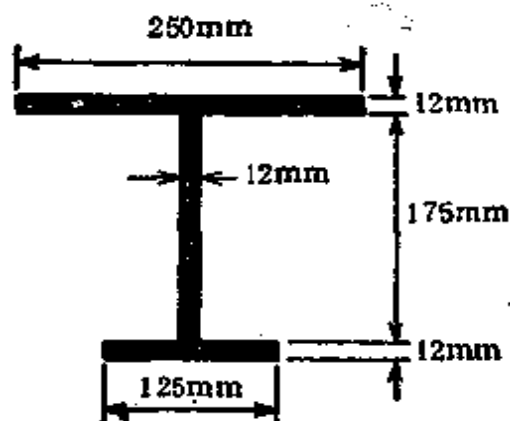


习题 9.3-2

**9.3-2** 试确定图中所示 T 形截面完全塑性条件下中性轴的位置（即求距离  $h_1$ ），并求塑性弯矩  $M_p$  值，假设  $a = 200$  mm， $b = 150$  mm， $t = 50$  mm， $\sigma_y = 250$  N/mm<sup>2</sup>。

**9.3-3** 试计算 W305 × 40 型截面的塑性模量  $Z$ （见附录 C）。

**9.3-4** 一非对称的钢制宽翼缘梁（屈服应力为 240 N/mm<sup>2</sup>），截面如图所示，试问其塑性弯矩  $M_p$  等于多少？



习题 9.3-4

**9.3-5** 试确定圆截面梁的形状因子  $f$ 。

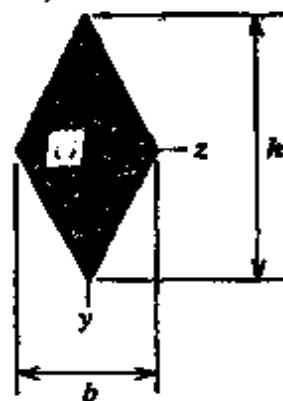
**9.3-6** 试确定菱形截面的形状因子  $f$ （见图）。

**9.3-7** (a) 试确定外半径为  $r_1$ 、内半径为  $r_2$  的圆管截面的形状因子  $f$ 。(b) 在壁厚很薄的特殊情况下，试问其形状

因子  $f$  为多少?

**9.3-8** 试确定 W406×74 截面的形状因子  $f$  (见附录 C).

**9.3-9** 一矩形截面梁 ( $b$  = 宽,  $h$  = 高), 由弹-塑性材料构成. 所承受的弯矩  $M$  大于屈服弯矩  $M_y$ , 小于塑性弯矩  $M_p$ , 试求出中性轴至塑性区域的距离  $e$  的公式 (见图 9-7).



**9.3-10** 一截面为 W356×45 的钢梁 ( $\sigma_y = 250$  N/mm<sup>2</sup>,  $E = 200$  kN/mm<sup>2</sup>), 其上作用的弯矩  $M$  使整个翼缘产生塑性屈服, 但腹板仍保持弹性. (a) 试求弯矩  $M$  的大小. (b) 求出曲率  $\kappa$ .

**9.3-11** 试导出菱形截面弹-塑性梁 (见习题 9.3-6 的图) 中  $M/M_y$  与  $\kappa/\kappa_y$  之间关系的弯矩-曲率方程 (与方程 9-17 类似).

**按材料为弹-塑性的假定求解第 9.4 节中的习题**

**9.4-1** 一长为  $L$  的简支梁, 承受均布载荷. 试确定梁中间处塑性区域的长度  $L_p$ , 假设最大弯矩等于塑性弯矩  $M_p$ .

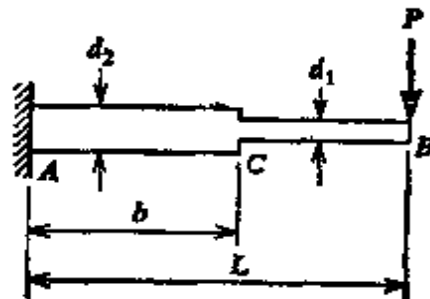
**9.4-2** 对于一矩形截面梁,  $M_{\max} = 1.46M_y$ , 试按比例作出图 9-9. (应计算足够多个数值, 以便精确地画出塑性区的边界、弯矩图和曲率图).

**按材料为弹-塑性的假定求解第 9.5 节中的习题**

**9.5-1** 试确定极限载荷  $P_u$ : 对于 (a) 一长为  $L$  的悬臂梁, 在自由端处作用有集中载荷  $P$ . (b) 一长为  $L$  的简支梁, 在距两端点  $L/3$  处作用有两个相等的载荷  $P$ .

**9.5-2** 试问在整个跨度上作用有均布载荷  $q$  的简支梁的极限载荷  $q_u$  为多少? 假设  $L = 1.2$  m,  $\sigma_y = 220$  N/mm<sup>2</sup>, 截面为 80 mm × 80 mm 的方形截面.

**9.5-3** 一根具有两个不同直径  $d_1$  和  $d_2$  的圆截面悬臂梁  $AB$ . 如图所示. 载荷  $P$  作用于自由端处. (a) 当载荷达到其极限  $P_u$  值时, 为使截面  $A$  和  $C$  处同时形成塑性铰, 试确定两直径之比值  $d_1/d_2$ . (b) 试求为使梁承受极限载荷  $P_u$  而有最轻重量的距离  $b$ .



习题 9.5-3

**9.5-4** 一根支承悬臂梁, 如图 9-12a 所示, 在距固定端距离为  $b$  处作用有集中载荷  $P$ . (a) 试计算该梁的极限载荷  $P_u$ . (b) 假设载荷可作用于梁跨度上任何位置, 试问为得到最严重的极限

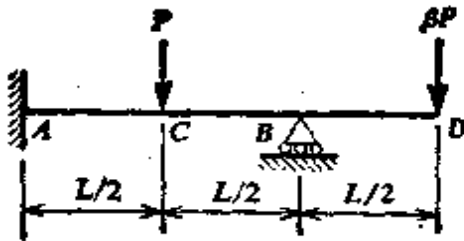
载荷情况, 距离  $b$  应为多少?

9.5-5 一固定端梁、在中间处作用有集中载荷  $P$ 。(a) 试求极限载荷  $P_u$ 。(b) 试问梁的极限载荷与屈服载荷之比值  $P_u/P_y$  等于多少?

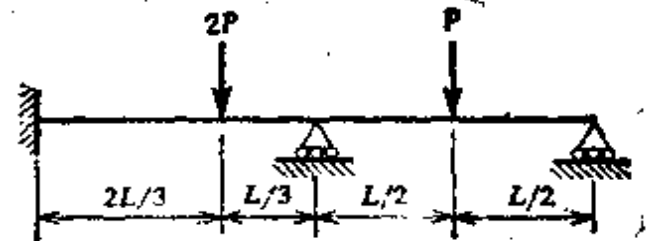
9.5-6 一固定端梁承受均布载荷  $q$ 。(a) 试问极限载荷  $q_u$  是多少?(b) 试问极限载荷与屈服载荷之比值  $q_u/q_y$  为多少?

9.5-7 试确定图 9-14a 所示梁的极限载荷  $P_u$ , 假设梁的两端为固支。

9.5-8 图中所示的梁,  $A$  处为固支,  $B$  处为简支。载荷  $P$  作用于截面  $C$  处, 载荷  $\beta P$  作用于  $D$  端, 这里  $\beta$  为一正值系数。(a) 试求此梁的极限载荷  $P_u$ 。(b) 试问  $\beta$  为何值时, 梁上的总极限载荷为最大?



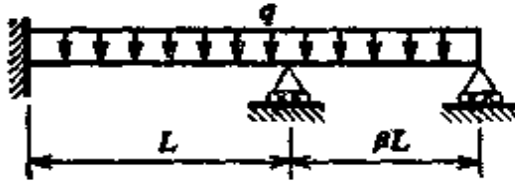
习题 9.5-8



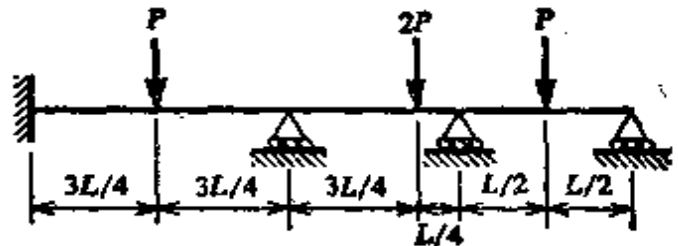
习题 9.5-9

9.5-9 试确定受载如图所示的双跨梁的极限载荷  $P_u$ 。

9.5-10 试求图中所示双跨梁的极限载荷  $q_u$ , 假设(a)系数  $\beta = \frac{2}{3}$ ; (b) 系数  $\beta = 1$ 。



习题 9.5-10

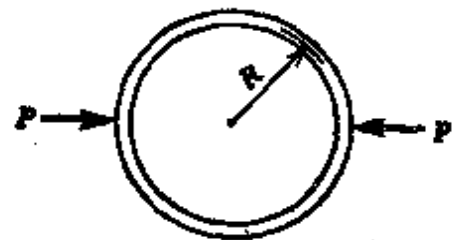


习题 9.5-11

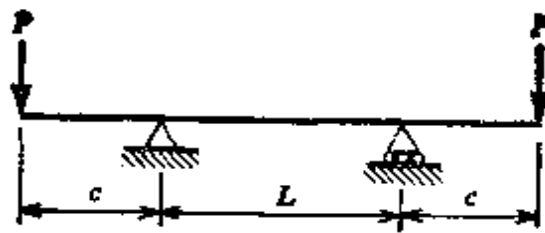
9.5-11 试确定图中所示三跨连续梁的极限载荷  $P_u$ 。

9.5-12 试求图中所示承受两个力  $P$  作用的半径为  $R$  的细圆环的极限载荷  $P_u$ 。

9.6-1 一根两端有外伸臂的梁, 承受两个集中力  $P$ , 如图所示。梁为矩形截面, 由弹-塑性材料构成。试导出梁中点处挠度  $\delta$  的下列公式:



习题 9.5-12



习题 9.6-1

$$\frac{\delta}{\delta_v} = \frac{P}{P_v} \quad \left(0 \leq \frac{P}{P_v} \leq 1\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_v} = \left(3 - \frac{2P}{P_v}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_v} \leq \frac{3}{2}\right)$$

式中,  $\delta_v = P_v c L^2 / 8EI$ ,  $P_v = M_v / c$ . 按比例作出  $P/P_v$  画为  $\delta/\delta_v$  的函数图形.

**9.6-2** 一长为  $L$  的矩形截面简支梁, 在中心处作用有集中载荷  $P$ . 梁由弹-塑性材料构成. 试导出梁支座处的转角  $\theta$  和中点处的挠度  $\delta$  的下列公式:

$$\frac{\theta}{\theta_v} = \frac{P_v}{P} \left[ 3 - 2\sqrt{3 - \frac{2P}{P_v}} \right] \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_v} \leq \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_v} = \left(\frac{P_v}{P}\right)^2 \left[ 5 - \left(3 + \frac{P}{P_v}\right) \sqrt{3 - \frac{2P}{P_v}} \right] \quad \left(1 \leq \frac{P}{P_v} \leq \frac{3}{2}\right)$$

式中,  $\theta_v = P_v L^2 / 16EI$ ,  $\delta_v = P_v L^3 / 48EI$ ,  $P_v = 4M_v / L$ . (这些公式的图形见图 9-18 和 9-19).

**9.6-3** 一矩形截面的悬臂梁, 长度为  $L$ , 假如梁承受单位长度上集度为  $q$  的均布载荷, 并假设材料为弹-塑性的. 试导出自由端处的转角  $\theta$  和挠度  $\delta$  的下列表达式:

$$\frac{\theta}{\theta_v} = \sqrt{\frac{9q_v}{2q}} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{2q}{3q_v}} - 0.4839 \right] \quad \left(1 \leq \frac{q}{q_v} \leq \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_v} = \frac{q_v}{q} \left[ 3 - 2\sqrt{3 - \frac{2q}{q_v}} \right] \quad \left(1 \leq \frac{q}{q_v} \leq \frac{3}{2}\right)$$

式中,  $\theta_v = q_v L^3 / 6EI$ ,  $\delta_v = q_v L^4 / 8EI$ ,  $q_v = 2M_v / L^2$ . 并按比例画出  $q/q_v$  作为  $\theta/\theta_v$  函数和  $q/q_v$  作为  $\delta/\delta_v$  函数的图形.

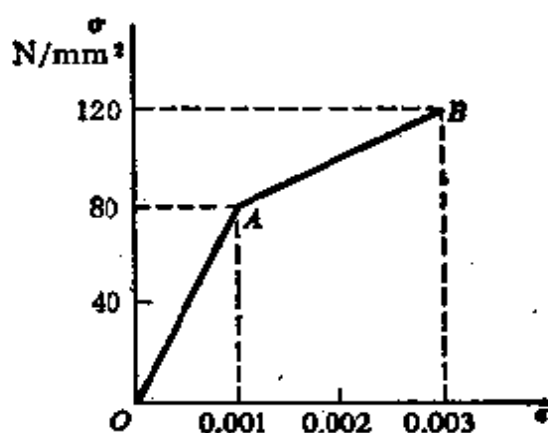
**9.7-1** 一矩形截面梁 ( $b=75 \text{ mm}$ ,  $h=150 \text{ mm}$ ), 由表 9-1 中给出的数据所定义的应力-应变曲线的材料所构成. 其拉伸和压缩的应力-应变曲线相同. 梁在弯矩  $M$  的作用下弯曲, 产生的最大应力为  $7.3 \text{ N/mm}^2$ . 试计算弯矩  $M$  的数值.

表 9-1 习题 9.7-1 的数据

应力 $\sigma$ N/mm <sup>2</sup>	应变 $\epsilon$ (10 <sup>-6</sup> )	应力 $\sigma$ N/mm <sup>2</sup>	应变 $\epsilon$ (10 <sup>-6</sup> )
0	0	7.0	70
5.0	16	7.5	113
5.5	25	8.0	183
6.2	42		

**9.7-2** 一宽为 150 mm、高为 300 mm 的矩形截面梁, 承受弯矩  $M = 18 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , 梁的材料的受拉弹性模量为  $E_1 = 9 \text{ kN/mm}^2$ , 受压弹性模量为  $E_2 = 25 \text{ kN/mm}^2$  (见图 9-25). (a) 试确定梁的中性轴的位置 (见图 9-21). (b) 试确定梁的最大拉应力和最大压应力. (c) 试计算梁的曲率半径.

**9.7-3** 一脆性材料构成的梁, 其拉伸的应力-应变图可由图中所示的两根直线  $OAB$  近似地表达, 于  $B$  点处发生断裂. 压缩图和拉伸图相同. 梁为矩形截面, 宽度为 100 mm, 高度为 300 mm. 试确定此梁的最大抗弯力矩  $M_{\max}$ .



习题 9.7-3

**9.7-4** 一矩形截面梁 (宽度为  $b$ 、高度为  $h$ ), 由按下列方程

$$\sigma = B_1 \epsilon - B_2 \epsilon^2$$

确定受拉时的应力-应变图的材料制成, 式中  $B_1$  和  $B_2$  皆为常数. 压缩图和拉伸图相同. 试导出梁抗弯力矩  $M$  的公式, 假设最大应变为  $\epsilon_1$

**9.7-5** 有一梁, 假设其材料受拉时的应力-应变规律为  $\sigma = B\epsilon^n$ , 式中  $B$  和  $n$  皆为常数 ( $0 < n < 1$ ). 压缩的应力-应变图和拉伸的相同. 梁的截面为宽度  $b$ 、高度  $h$  的矩形截面. (a) 试导出该梁的弯矩-曲率关系的下列公式:

$$M = \frac{bh^{n+2}B\epsilon_1^n}{2^{n+1}(n+2)}$$

(b) 试导出梁中最大应力的下列公式:

$$\sigma_1 = \frac{Mc}{I} \left( \frac{n+2}{3} \right)$$

式中  $c = h/2$ ,  $I = bh^3/12$ . (c) 试导出至中性轴距离为  $y$  处, 梁应力  $\sigma$  的下列公式:

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \left( \frac{2y}{h} \right)^n$$

作出对于不同  $n$  值的梁的应力分布图 (为方便起见, 作  $\sigma/\sigma_1$  对  $2y/h$  的曲线

图, 并选择  $n=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$ 。(d) 对于以上全部结果, 研究并说明当  $n=1$  和  $n=0$  时的特殊情况。

**9.7-6** 一矩形梁(宽度为  $b$ 、高度为  $h$ )，中性轴至下表面处的应力分布由方程

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^m$$

给出, 式中  $\sigma_1$  为下表面的最大应力,  $y$  自中性轴向下度量,  $m$  为一常数 ( $m > 1$ )。中性轴位于梁高之半。梁上半部的应力分布与下半部相同。(a) 试求此梁的弯矩  $M$ 。(b) 作出对于不同  $m$  值的梁的应力分布图(为方便起见, 作出  $\sigma/\sigma_1$  对  $2y/h$  的图形, 并选取  $m=1, 2, 4, 10$ )。

**9.7-7** 一长为  $L$  的悬臂梁, 自由端处作用有载荷  $P$ 。梁的截面是宽度为  $b$ 、高度为  $h$  的矩形截面。梁的材料的应力-应变曲线由方程  $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$  给出, 式中  $B$  为常数。拉伸和压缩的应力-应变曲线相同。试求梁在自由端处的转角  $\theta$  和挠度  $\delta$ 。

**9.8-1** 一矩形截面梁, 由屈服应力  $\sigma_y$  的弹-塑性材料构成。梁承受一等于塑性弯矩  $M_p$  的正弯矩, 然后将此弯矩移去。(a) 试绘出梁的残余应力图。(b) 试问梁顶面处的残余应力为多少? (c) 试问横截面上半部分靠近中点处的残余应力为多少? (d) 如果这根带有残余应力的梁再承受正弯矩, 那么, 作用于梁上并使梁仍具有线弹性性能的弯矩最大值是多少? 这个弯矩与初始加载时的屈服弯矩之比值为多少?

**9.8-2** 一正弯矩  $M$  作用于具有双对称截面的梁上。梁由具有屈服应力  $\sigma_y$  的弹-塑性材料构成。弯矩  $M$  介于梁的屈服弯矩  $M_y$  和塑性弯矩  $M_p$  之间。移去此弯矩  $M$  后, 发现梁顶面纤维中存在有等于  $\beta\sigma_y$  的残余应力。(a) 试问弯矩  $M$  为多少? (b) 试问系数  $\beta$  的极限是多少?

## 第十章 柱

柱的选择通常是结构设计中非常重要的一部分，因为柱的破坏往往具有灾难性的结局。另外，由于柱的性态比较复杂，所以它的设计比受弯或受扭的杆件来说更为困难。如果柱的长度与其宽度相比很大时，它可能因屈曲亦即因弯曲和横向挠曲而破坏，而不是由于直接压缩而破坏。屈曲可能是弹性的或非弹性的，这取决于柱的细长度。以下几节我们将主要讨论弹性性态的细长柱。

### 10.1 承受偏心轴向载荷的柱

为了研究柱的性态，我们开始将先考虑受到偏心作用的轴向力  $P$  的细长柱(图 10-1)。柱的两端简支，偏心距  $e$  从其横截面的形心至轴向力作用线量取。假设  $xy$  平面为柱的对称平面，我们观察到，该柱将在此同一平面内挠曲。

在距柱下端为  $x$  处的弯矩为

$$M = P(e + v) \quad (a)$$

此处  $v$  为柱沿  $y$  方向的横向挠度。方程 (a) 中弯矩的符号按以前确定梁挠度时采用的约定(见第 6.1 节)。于是图 10-1 所示的柱的挠曲线方程变为(见方程 6-9a)：

$$EIv'' = -M = -P(e + v) \quad (b)$$

引进符号

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (10-1)$$

我们可将方程 (b) 写为下列形式

$$v'' + k^2v = -k^2e \quad (c)$$

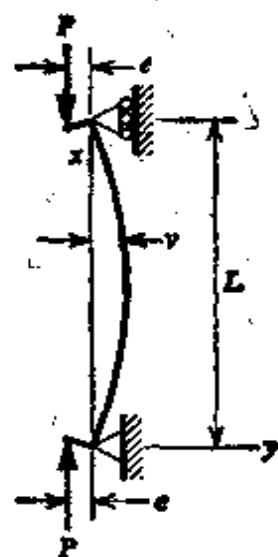


图 10-1. 承受偏心轴向力的柱。

该方程为具有常系数的线性微分方程, 它的解由两部分组成: (a) 使等号右边为零所得出的齐次方程的解, (b) 相应于方程(c) 的实际右端的特解. 齐次解有时称为余解, 它是

$$v_H = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

其中  $C_1$  和  $C_2$  为有待于依边界条件计算的任意常数. 特解为

$$v_p = -e$$

所以, 方程(c)的通解等于  $v_H + v_p$ , 为

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e \quad (d)$$

将表达式(d)代入方程(c), 便可容易地加以验证.

这两个积分常数必须由杆端条件来确定. 这些条件是

$$\text{在 } x=0 \text{ 和 } x=L \text{ 处, } v=0$$

将这些边界条件用于方程(d), 我们得到

$$C_2 = e \quad C_1 = \frac{e(1 - \cos kL)}{\sin kL} = e \operatorname{tg} \frac{kL}{2}$$

所以, 挠曲线方程为

$$v = e \left( \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right) \quad (e)$$

已知偏心  $e$  和载荷  $P$ , 我们便可根据此方程计算柱的挠度.

将  $x=L/2$  代入方程(e), 可计算出柱中点处的挠度:

$$\delta = e \left( \sec \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (10-2)$$

作为一种特殊情况, 我们可以由该方程注意到, 假如  $P=0$  (这意味着  $k=0$  及  $\sec kL/2=1$ ), 则挠度  $\delta$  为零. 如果我们现在选择偏心距  $e$  的某一特定值  $e_1$ , 便可根据方程(10-2)绘出一条载荷-挠度曲线 ( $P$  作为  $\delta$  的函数). 这样一条曲线示于图 10-2 中, 我们看出, 当载荷  $P$  增加时, 挠度  $\delta$  亦增大, 虽然该关系为非线性的. 如果选择一个新的  $e_2$  值 (大于  $e_1$ ), 那么其挠度相应地会大一些.

由图 10-2 看出, 当载荷  $P$  接近于一个确定的临界值时, 挠度无限增大. 此临界载荷值以  $P_{cr}$  表示, 它可根据方程(10-2)求出, 因由观察可知, 当  $kL/2 = \pi/2$  时, 该式中的正割项变为无限大. 因此, 当  $kL = \pi$  时, 挠度  $\delta$  变为无限大, 由此给出下列  $P$  值 (见方程



10-1):

$$P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (10-3)$$

当考虑偏心距为零的情况时, 可得出临界载荷的相同结果. 如果  $e=0$ , 对于所有小于  $\pi/2$  的  $kL/2$  值, 由方程 (10-2) 得到的挠度  $\delta$  均为零, 因为在所有这样的情况下, 第二项为有限值.

因此, 当  $P$  小于  $P_{cr}$  时, 其挠度保持为零. 但是当  $P = P_{cr}$  及  $kL/2 = \pi/2$  时,

根据方程 (10-2), 挠度  $\delta$  是不确定的, 它可以为任意值. 这一情况在载荷-挠度图上 (图 10-2) 用标明  $e=0$  的水平线表示.

在讨论图 10-2 所示的曲线时, 必须牢记, 方程 (10-2) 的推导是建立在小挠度和线弹性的假设基础之上. 因此, 挠度  $\delta$  只是在一种假设的意义上变得很大. 如果不是小挠度, 则必须像以前在第 6.1 和 6.12 中所讨论的那样使用精确的曲率表达式. 此外, 在实际的柱中, 当挠度变得很大之前, 也许就会超过比例极限.

由图 10-2 我们可观察到一个重要结果, 载荷  $P$  与它产生的挠度之间不成比例. 因此, 即使挠度很小, 而且材料仍为线弹性, 叠加原理也不能使用. 如果我们考虑到图 10-1 所示的载荷等效于作用在端部中心的载荷  $P$  加上力偶  $Pe$ , 该结论的道理就很容易理解. 力偶  $Pe$  单独作用时产生的挠度可按梁弯曲的常规方法求出 (见第 6 章). 在这样的情况下, 梁上出现小挠度并不会改变载荷的作用, 而且不考虑梁的挠度就可以计算梁的弯矩. 然而, 当柱上还有轴向载荷时, 由力偶  $Pe$  产生的挠度使轴向力除了压缩作用外, 还附加一个弯曲作用. 此轴向力的弯曲作用产生附加的挠度, 该挠度反过来影响到弯矩. 因此, 不根据挠度就不可能求出弯矩, 而且在轴向载荷和挠度之间存在着一一种非线性关系. \*

\* 受到横向载荷和轴向载荷联合作用的梁的更为广泛的讨论在《高等材料力学》中介绍.

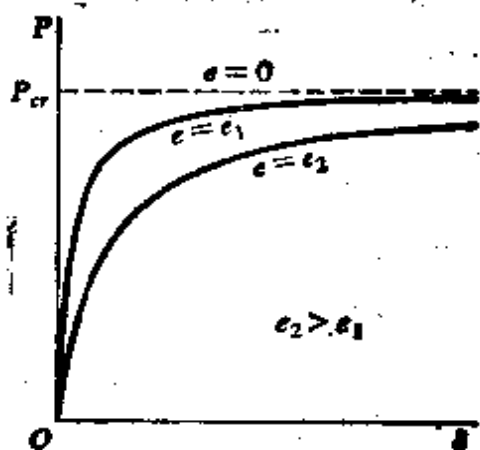


图 10-2. 图 10-1 所示柱的  
载荷-挠度图.

如果作用在图 10-1 所示柱上的轴向力与临界载荷相比极小时 (譬如说, 比临界载荷的 2% 还小), 那么  $kL/2$  这个量将足够小, 以致我们可将正割函数用它的级数展开式的前两项来表示:

$$\sec \frac{kL}{2} \approx 1 + \frac{k^2 L^2}{8}$$

将此表达式代入方程 (10-2), 我们得到

$$\delta = \frac{k^2 L^2 e}{8} = \frac{PeL^2}{8EI} \quad (f)$$

此结果与两端承受力偶  $Pe$  的简支梁中点处的挠度相同 (见第 6.5 节例题 1)。因此, 我们可得结论: 每当轴向力  $P$  远小于  $P_{cr}$  时, 如短柱的情况 (见第 5.10 节), 挠度对弯矩大小的影响就可略去不计, 并可使用普通梁的挠度公式 (见第 6 章和附录 D)。

图 10-1 的偏心加载柱中的最大弯矩发生在中点, 并由下列方程给出:

$$M_{\max} = P(e + \delta) = Pe \sec \frac{kL}{2} \quad (10-4)$$

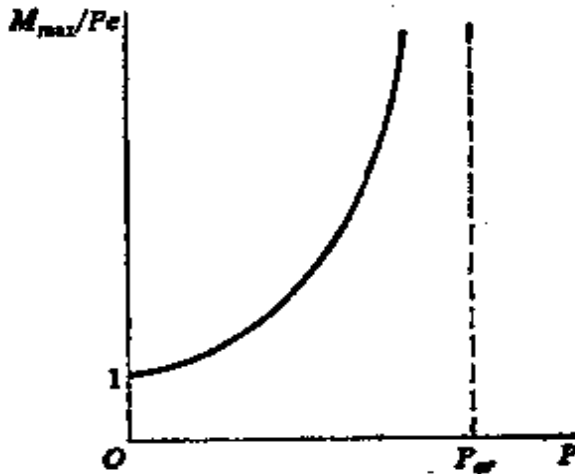


图 10-3. 图 10-1 所示柱的最大弯矩图。随着  $P$  增加, 弯矩非线性地增大, 而当  $P$  接近它的临界值  $\pi^2 EI/L^2$  时, 弯矩变得很大。柱中的最大压应力发生在凹侧, 它为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{S} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{S} \sec \frac{kL}{2} \quad (10-5)$$

此处  $S$  表示截面模量。该方程将在第 10.4 节更详细地加以讨论。

在上述全部讨论中, 已经假定柱的弯曲发生在对称平面内 (图 10-1 中的  $xy$  平面)。如果柱有两个对称平面, 并且偏心距  $e$  不沿横截面主轴之一的方向, 则需将弯曲力偶  $Pe$  分解为两个分力偶, 每一个都作用在柱的对称平面内。于是在两个对称平面的每一个平面内的挠度, 可按上面讨论过的相同方式进行研究。

## 10.2 柱的临界载荷

在上节中曾指出,当轴向力接近临界值时,偏心受压柱的挠度迅速增加.当 $P$ 等于 $P_{cr}$ 时,挠度及弯矩公式(方程 10-2 和 10-4)给出无限大值.对于简支柱,我们发现 $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ ,该值仅取决于柱的尺寸和材料的弹性模量.只要柱保持弹性,我们就可将临界载荷视为柱的极限载荷,因为当接近此载荷时,柱的挠度变得很大.在实际设计中,引进一个适当的安全系数,而且容许载荷取得比临界载荷小得多.

在达到临界载荷之前,许多普通尺寸的柱会达到比例极限以上的应力.这样的柱在载荷低于弹性临界载荷时发生非弹性屈曲.然而,在本章我们将只涉及到柱的弹性屈曲\*.

柱的临界载荷可用直接方式通过研究一根理想柱的性态来计算,假设理想柱是完全笔直的而且被中心作用的载荷(通过横截面形心作用的载荷)压缩.让我们首先研究一根长为 $L$ 的细长理想柱,其下端固定,上端自由(图 10-4a).假设柱的材料是线性弹性的.如果轴向载荷 $P$ 小于临界值,杆件保持直线,并且只经受轴向压缩.这种平衡的直线形式是稳定的,这意味着,如果作用一横

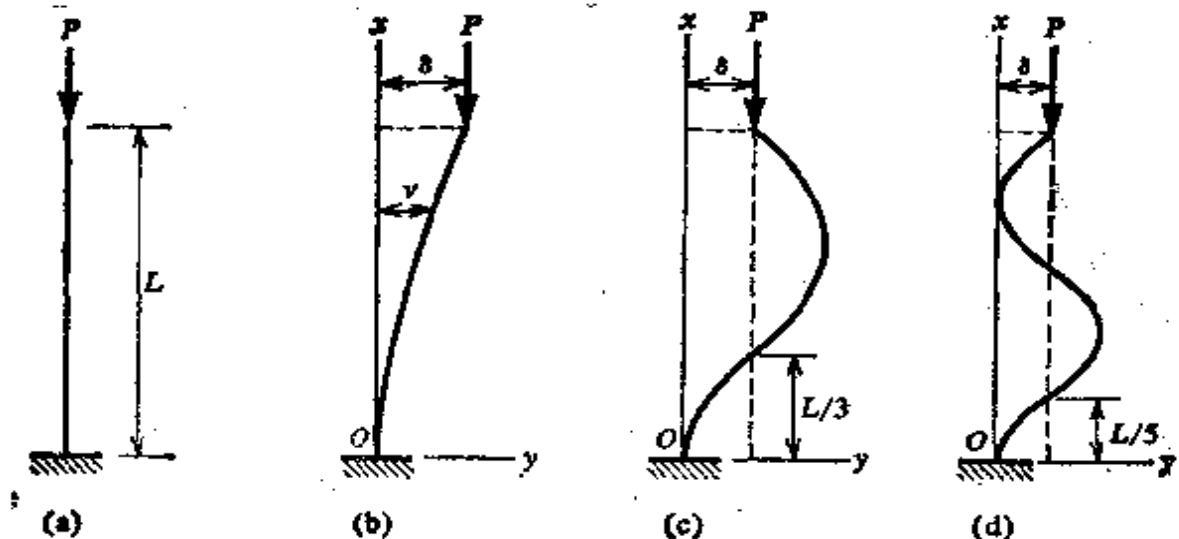


图 10-4. 基础固定而上端自由的理想细长柱: (a) 屈曲之前; (b)  $n=1$  的屈曲模式; (c)  $n=3$  的模式; (d)  $n=5$  的模式.

\* 非弹性屈曲在《高等材料力学》以及参考文献 10-1 和 10-2 中加以讨论.

向力并产生微小挠度,那么当横向力被移去时,挠度将消失,该杆件将回到原直线形式。然而,随着  $P$  逐渐增大而变得等于  $P_{cr}$  时,则达到中性平衡状态。在此载荷下,柱在理论上可能有任意的微小挠度值,而且一个很小的横向力将产生挠度,在横向力移去后它并不消失。在更大的载荷值时,柱是不稳的并将发生塌陷。这种不稳定的现象称为屈曲,我们可以认为,在临界载荷下,柱发生屈曲或变得不稳定。临界载荷也可定义为足以使柱保持微弯状态的轴向力(图 10-4b)。

柱的临界载荷可用挠曲线的微分方程来计算。对于图 10-4b 所示的柱,在距基础为  $x$  处的弯矩为

$$M = -P(\delta - v)$$

此处  $\delta$  为自由端的挠度。于是微分方程变为

$$EIv'' - M = P(\delta - v) \quad (a)$$

因为柱的上端沿任意方向的挠曲是自由的,显然,杆的屈曲将发生在最小弯曲刚度  $EI$  的平面内,亦即,弯曲将绕具有较小惯性矩的主轴发生。我们假设屈曲发生的平面是  $xy$  平面,而且此平面是柱的对称平面。利用上节引进的符号  $k^2 = P/EI$ ,我们可将方程(a)写成下列形式:

$$v'' + k^2v - k^2\delta$$

该方程的通解为

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta \quad (b)$$

为了求出常数  $C_1$  和  $C_2$ ,我们利用柱的固定端处的边界条件:

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } v=v'=0$$

将方程(b)微分给出

$$v' = C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx \quad (c)$$

现将边界条件代入方程(b)和(c),我们求出

$$C_1 = 0 \quad C_2 = -\delta$$

而挠曲线为

$$v = \delta(1 - \cos kx) \quad (d)$$

在此方程中,挠度  $\delta$  仍然待定。

为了得到有关挠度的更多的资料，我们使用柱上端的下列条件：

$$\text{在 } x=L \text{ 处, } v=\delta$$

此条件给出(见方程 d)

$$\delta \cos kL=0 \quad (\text{e})$$

根据上式我们断定，或  $\delta=0$  或  $\cos kL=0$ 。如果  $\delta=0$ ，杆件无挠度，因此就没有屈曲(图 10-4a)。在这种情况下， $kL$  这个量可有任意值，而方程(e)又仍将满足。所以，载荷  $P$  也可有任意值。此结果用图 10-5 所示的载荷-挠度图的竖直轴表示。

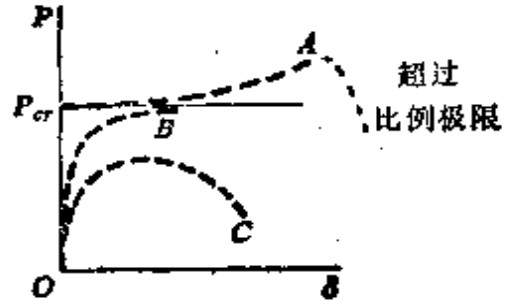


图 10-5. 柱的载荷-挠度图

另一种可能性是  $\cos kL=0$ ，在此情况下，我们由方程(e)看出， $\delta$  可具有任意微小值。 $\cos kL=0$  的条件要求

$$kL=\frac{n\pi}{2} \quad (\text{f})$$

此处  $n=1, 3, 5, \dots$ 。为了得到满足方程(f)的  $P$  的最小值，我们取  $n=1$ ，得出  $kL=\pi/2$ ，据此

$$P_{cr}=\frac{\sigma^2 EI}{4L^2} \quad (10-6)$$

该公式给出图 10-4a 所示柱的最小临界载荷，亦即给出能使柱保持微弯形状的最小轴向力值。为了确定挠曲线的形状，我们观察到  $k=\pi/2L$ ，因此方程(d)中的  $kx$  这个量从 0 变至  $\pi/2$ 。所以挠曲线的形状如图 10-4b 所示。按这个解，挠度  $\delta$  的大小仍为不定值，此种情形用载荷-挠度图  $P=P_{cr}$  处的水平线表示(图 10-5)。当然，在这种理想化的分析中，我们必须再次牢记，假设挠度是很小的。

理想弹性柱的临界载荷  $P_{cr}$  通常称为欧拉载荷，因为著名的数学家欧拉 (Leonhard Euler 1707—1783) 是率先研究细长柱屈曲并确定了临界载荷的学者(参考文献 1-1 至 1-3 以及 10-1 至

10-8)。

由方程(10-6)我们看出, 柱的临界载荷与抗弯刚度  $EI$  成正比, 而与其长度的平方成反比。还可注意到, 临界载荷与材料的压缩强度无关。因此, 使用较高屈服应力的钢材, 不会提高细长钢柱的临界载荷。然而, 临界载荷可通过增大其横截面的惯性矩而增大。这个结果可通过将材料尽可能地配置得远离横截面的形心来实现。因此, 对于柱来说, 管状元件比具有相同横截面面积的实心元件更为经济。通过减小管状元件截面的壁厚和增大其横向尺寸, 柱的稳定性增加, 这是因为  $I$  较大。然而, 壁的厚度有一个下限, 低于它, 壁本身变得不稳定。那时, 不是柱作为整体屈曲, 而是壁以波纹状或起皱的形式使其产生局部屈曲。这种类型的屈曲称为局部屈曲, 需作更详细的研究(参考文献 10-1)。

现在回到方程(f), 我们看出, 取较高的指数  $n$  的值时, 可得无限多个临界载荷。因此, 对于图 10-4a 的柱, 一般说来,

$$P_{cr} = \frac{n^2 \sigma^2 EI}{4L^2} \quad (g)$$

相应的挠曲线方程为(见方程 d)

$$v = \delta \left( 1 - \cos \frac{n\sigma x}{2L} \right) \quad (h)$$

该方程表明, 随着  $n$  的增加, 挠曲线中就有愈来愈多的波形。当  $n=1$  时, 挠曲线有半个波, 如图 10-4b 所示。对于下一种情况( $n=3$ ), 我们得出

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2} \quad v = \delta \left( 1 - \cos \frac{3\sigma x}{2L} \right)$$

对于  $n=5$ , 我们得到

$$P_{cr} = \frac{25\pi^2 EI}{4L^2} \quad v = \delta \left( 1 - \cos \frac{5\sigma x}{2L} \right)$$

这两种情况的挠曲线分别示于图 10-4c 和 d。虽然它们表示出柱屈曲时理论上的可能模态, 但是它们并无实际意义, 因为当载荷  $P$  达到方程(10-6)所给的值时, 柱就将以第一种模态发生屈曲(图 10-4b)。

对两端简支和两端固支的柱, 其临界屈曲载荷可根据上述情况的解求得, 比如, 根据对称性, 显然, 具有铰支端的柱以第一种

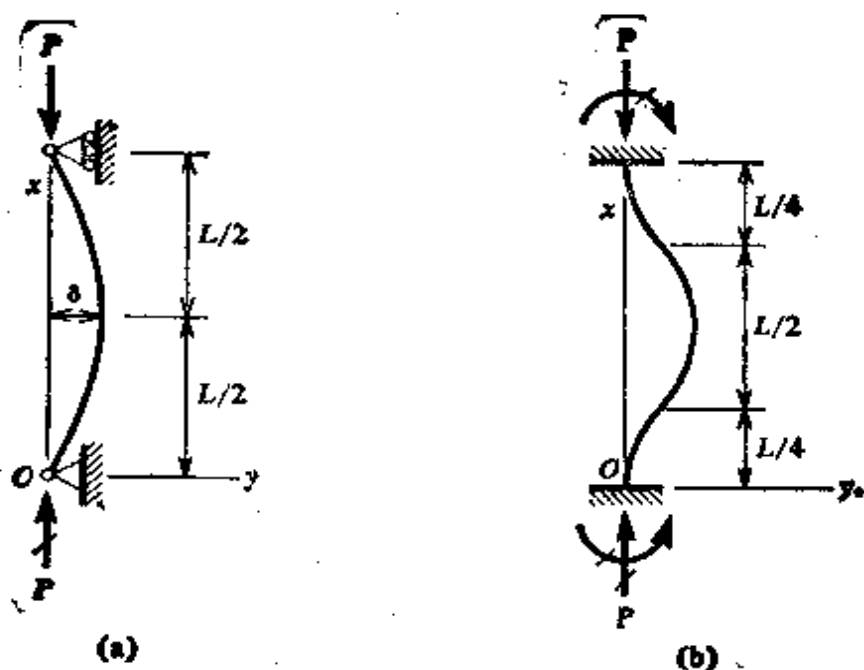


图 10-6. (a) 铰支端的柱; (b) 固定端的柱.

模态屈曲时其挠曲线(图 10-6a)的中点处将有一根竖直切线。因此,该柱的每一半和图 10-4b 的杆处于相同的情形,根据方程 (10-6),用  $L/2$  代以  $L$ ,就得出其临界载荷:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (10-7)$$

这一相同的结果曾在第 10.1 节导出过(见方程 10-3)。在实践中,也许简支端柱比任何其它形式的柱更常用到,故称它为棱柱杆屈曲的基本情况。

如果柱在两端固支(图 10-6b),则在支承处存在着屈曲时产生的反力矩。第一种屈曲模态的挠曲线是一条在距端点  $L/4$  处有一拐点的余弦曲线。柱的每四分之一长表现为一根悬臂柱(图 10-4b),所以用  $L/4$  代替方程(10-6)中的  $L$ ,即求得临界载荷:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (10-8)$$

其他各种支承和载荷条件下柱的临界屈曲载荷在本节末的例题中和《高等材料力学》中进行推导。

**柱的大挠度** 在推导挠曲线方程(方程 d)时,最大挠度  $\delta$  仍然是未定的。所以,我们得出结论:在  $P = P_{cr}$  时,柱可以有任

意微小的挠度,此情形用图 10-5 中的水平线表示。这个理论限于小挠度,因为我们使用了柱曲率的近似表达式  $v''$ , 而不是精确的表达式(方程 6-10)。对于某些情况(参考 10-1),已经求得精确微分方程的解,并且表明,实际上并不存在柱挠度的不确定性。相反,对于理想的弹性柱,我们发现其载荷-挠度图遵循图 10-5 中的虚线  $A$ 。如果,经受大挠度后,柱中的应力超过了比例极限,那么载荷-挠度曲线将从曲线  $A$  下降。

在用弹性柱作的实验中,载荷-挠度图通常与图 10-5 中的曲线  $B$  类似(亦见图 10-2)。由于加载及柱的制造都不准确,在载荷低于  $P_{cr}$  时就出现了横向挠度,而且当接近临界载荷时,横向挠度变得很大。杆件制造与所加载荷愈准确,曲线  $B$  就愈接近理论结果(两根直线,其中一根竖直,一根水平)。如果在载荷低于  $P_{cr}$  时柱的应力超过了比例极限,则载荷-挠度图与曲线  $C$  类似。这条曲线上的最高点代表非弹性屈曲柱的理论屈曲载荷,这个载荷比同一柱的欧拉载荷要低。

**例题** 长为  $L$  的细长柱下端固支,上端铰支(图 10-7)。试导出此柱最低临界载荷的表达式,并确定其相应的屈曲模态形状。

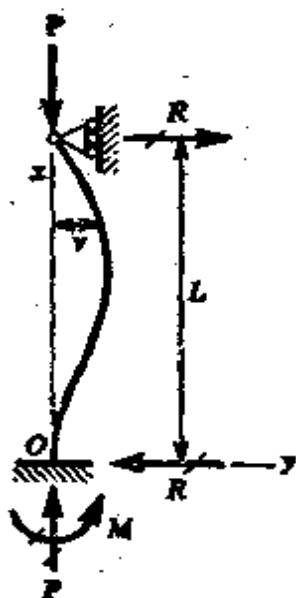


图 10-7. 例题. 基础固支而上部铰接的柱

当此柱屈曲时,柱的上端产生水平反力(图 10-7)。在固定端处,同时引起一水平力和一力偶。根据静力平衡,我们知道,这两个水平力大小相等而方向相反,力偶  $M$  等于  $RL$ 。在距基础为  $x$  处的弯矩为

$$M = Pv - R(L - x)$$

挠曲线微分方程为

$$EIv'' = -Pv + R(L - x)$$

此方程的通解为

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + R(L - x)/P \quad (i)$$

此处  $k^2 = P/EI$ 。

为了确定常数  $C_1$  和  $C_2$  及未知反力  $R$ ,我们在端点处有下列三个条件:

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } v=v'=0$$



在  $x=L$  处,  $v=0$

将这些条件应用于方程(i), 得出

$$C_2 + RL/P = 0 \quad C_1 k - R/P = 0 \quad C_1 \operatorname{tg} kL + C_2 = 0 \quad (j)$$

若取  $C_1 = C_2 = R = 0$ , 则所有这些方程都得到满足, 在此情况下, 挠度消失, 我们得到直的, 无屈曲的平衡形式。为了能够得出平衡的屈曲形状, 我们需求方程(j)的非平凡解。可以看出, 方程(j)是含有未知数  $C_1$ ,  $C_2$  和  $R$  的齐次方程, 只有当系数的行列式为零时, 这样一组方程才具有非平凡解。因此, 我们得到下列屈曲方程:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & L/P \\ k & 0 & -1/P \\ \operatorname{tg} kL & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

或者将行列式展开

$$kL = \operatorname{tg} kL \quad (k)$$

这个超越方程确定了临界载荷。满足此方程的最小非零的  $kL$  值为  $kL = 4.493$ , 它可用试凑法求出。相应的临界载荷为

$$P_{\text{cr}} = (kL)^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{20.19EI}{L^2} \quad (10-9)$$

此值介于两端铰接柱和两端固支柱的临界载荷之间(见方程 10-7 和 10-8)。

现在我们可回到方程(j)并求以  $R$  表示的  $C_1$  和  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{R}{kP} \quad C_2 = -\frac{RL}{P}$$

代入方程(i), 得出挠曲线方程:

$$v = \frac{R}{Pk} \left[ \sin kx - kL \cos kx + kL \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right] \quad (l)$$

此方程中的  $P$  值和  $k$  值由上段得知。在方括号中的项代表屈曲柱的挠度模式, 但是挠度的振幅仍不确定, 因为  $R$  是任意的。

### 10.3 柱中的应力

中心受载柱的平均压应力用其横截面面积去除轴向力求出。当轴向力等于临界载荷时, 以此方式求得的应力称为临界应力  $\sigma_{\text{cr}}$ 。因此, 对于屈曲的基本情况(图 10-6a), 临界载荷由方程(10-7)给出, 而临界应力为

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{P_{\text{cr}}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (10-10)$$

式中我们用符号

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (a)$$

表示横截面的最小回转半径。在方程(10-10)分母中出现的比值  $L/r$ ，称为柱的长细比。我们可以注意到，临界应力与此比值的平方成反比。自然，为使方程(10-10)成立，临界应力必须保持在材料的比例极限以内。

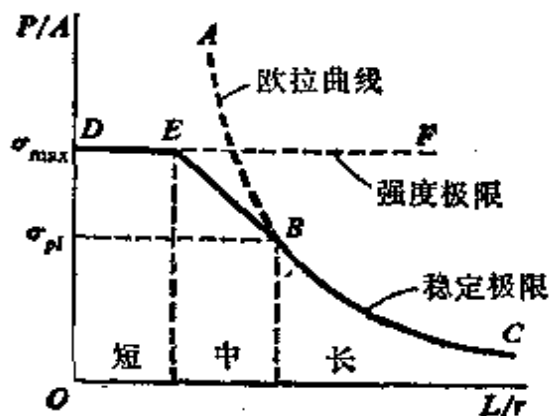


图 10-8. 轴向压应力  $P/A$  随长细比  $L/r$  变化的图线。

现在可绘出柱的压应力随长细比变化的图线(见图 10-8)。曲线  $ABC$  系根据方程(10-10)绘出，称为欧拉曲线。此曲线实际上只在  $BC$  范围内有效，在此范围内  $\sigma_{cr}$  小于比例极限  $\sigma_{pl}$ 。令方程(10-10)中的  $\sigma_{cr} = \sigma_{pl}$ ，并对  $L/r$  求解，则可求出  $L/r$  的极限值，

在它以上欧拉公式成立。以结构钢为例，假设  $\sigma_{pl} = 240 \text{ N/mm}^2$ ， $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ，我们求出相应于图 10-8 中  $B$  点的  $L/r$  值约为 91。因此，对于  $L/r < 91$ ，在屈曲发生之前，简支理想钢柱中的平均压应力将达到比例极限。于是，欧拉临界载荷公式不适用于这种情况，此式给出了过高的临界载荷值。如果  $L/r > 91$ ，柱就会由于弹性屈曲而破坏，可以使用欧拉公式。

图 10-8 中的曲线  $BC$  表明，当长细比很大时，临界应力变得很小，因此，一根很细长的柱会在低的压应力下发生屈曲。这种情况不能靠使用高强度材料来改善，而只有靠增大回转半径或使用较高弹性模量的材料才能提高临界应力。

当柱的长细比很低时，我们可以预料到柱的破坏是由于材料本身的破坏所致。这种破坏可能呈现材料压碎的形式，如材料为钢筋混凝土时所发生的那样；或者材料为屈服形式，如在结构钢情况时所发生的那样。在这些情况下，可以确定某一最大压应力  $P/A$  作为材料的强度极限，并可相应地确定其极限载荷。这个极限在图 10-8 中用通过最大应力  $\sigma_{max}$  所画的水平线  $DEF$  来表示，它

代表柱的强度极限。

在短柱和长柱之间的区域内,有一个中等长细比范围,该长细比对于以弹性稳定控制设计来说太小,而对于单独从强度考虑控制设计来说又太大。这种中等长度的柱发生非弹性屈曲,实用上有时画一条直线  $EB$ (图 10-8)已够用了,并认为它代表中等长度柱的临界应力。以此方式,我们得到折线  $DEBO$ ,它可作为设计任意长度的柱的基础。另外,也可使用连接  $D$  点和  $B$  点的一条光滑曲线(见第 10.6 节)。

根据图 10-8 所示的这类图线得到的应力  $P/A$ , 必须视为柱的最大应力  $\sigma_{\max}$ 。在此应力下,柱或因材料直接破坏而破坏,或因屈曲而破坏,这要取决于长细比。压缩的容许应力  $\sigma_w$  必须取为  $\sigma_{\max}/n$ , 此处  $n$  为安全系数。 $n$  值的选择要依载荷意外或偶然增大的概率、载荷沿中心作用的可能误差、以及柱可能发生的初曲而定。当柱较长时,柱中的缺陷容易增多,所以引进一个随长细比增大的可变安全系数是合理的。结构工作时安全系数的典型值在 1.5 至 3 的范围内。某些容许应力的特殊公式在后面第 10.6 节中给出。

**柱的有效长度** 当绘制图 10-8 所示的欧拉曲线时,我们仅考虑了屈曲的基本情况(方程 10-10)。然而,引进有效长度(或相当长度)的概念,可使该曲线适应于其它端点条件。将悬臂柱的临界载荷(见方程 10-6)与销接柱的临界载荷(方程 10-7)相比,我们看出,后者的公式也可用于悬臂柱,只要我们用等于  $2L$  的有效长度亦即悬臂柱长度的二倍去取代  $L$ 。因此,我们可以把临界应力的方程(10-10)写成一般式。

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma^2 E}{(KL/r)^2} \quad (10-11)$$

此处  $KL$  为有效长度。 $K$  这个量称为有效长度因子,对于悬臂柱它等于 2; 对于两端固支的柱它等于 0.5(见方程 10-8); 对于一端固支而另一端销接的柱它等于 0.7; 对于两端销接的柱它等于 1。一般地说,只要已知有效长度因子,方程(10-11)就可用于具有任

何端部条件的柱。

#### 10.4 柱的正割公式

当简支柱受到偏心作用的轴向力而压缩时(图 10-1), 柱中的最大压应力(见方程 10-5)为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{S} \sec \frac{kL}{2} \quad (\text{a})$$

该方程右边的首项代表直接压缩的效应, 而第二项代表柱的弯曲效应。回忆截面模量  $S = I/c$ , 此处  $c$  为中性轴距柱的凹侧最外纤维的距离, 并引进回转半径的符号  $r = \sqrt{I/A}$ , 我们可将方程(a)表示为下列形式:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{kL}{2} \right)$$

然后, 用  $\sqrt{P/EI}$  取代  $k$ , 得出

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (10-12)$$

此方程称为偏心受载柱的正割公式。它给出柱中最大应力为其平均压应力  $P/A$ , 偏心比  $ec/r^2$  及长细比  $L/r$  的函数。

如果我们规定一个最大应力  $\sigma_{\max}$  的极限, 那么由方程(10-12)就可计算相应的平均压应力  $P/A$ 。例如对结构钢, 我们可取屈服应力  $\sigma_y$  为极限应力。于是方程(10-12)可重新整理如下:

$$\frac{P_y}{A} = \frac{\sigma_y}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P_y}{EA}} \right)} \quad (10-13)$$

式中  $P_y$  为使柱中最严重的受力纤维处产生屈服所需之力。对任一选定的偏心比, 我们可用试凑法解方程(10-13), 并绘出曲线表明  $P_y/A$  为长细比的函数。图 10-9 表示  $\sigma_y = 250 \text{ N/mm}^2$  和  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$  时的若干条此类曲线。在求出  $P_y$  之后, 用安全系数去除  $P_y$ , 便可求出柱的容许载荷  $P_c$ 。

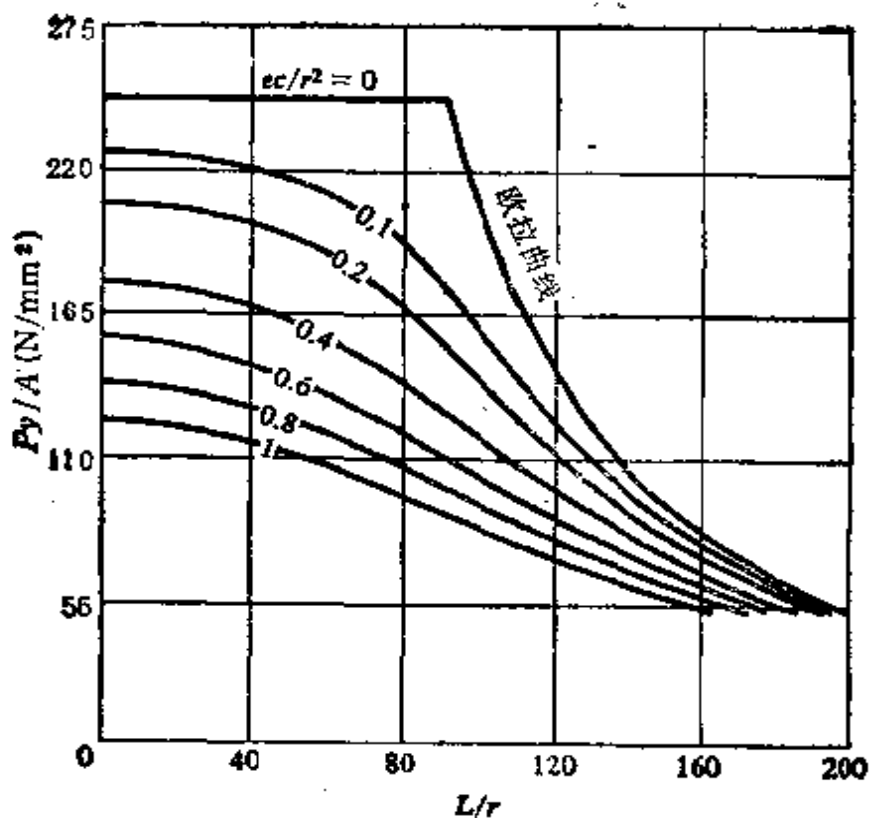


图 10-9. 对  $\sigma_y = 250 \text{ N/mm}^2$  和  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$  情况方程 (10-13) 的曲线图。

**例题** 两端铰接, 截面为  $W533 \times 167$  的钢柱 (图 10-10a), 长 8 m. 它承受沿中心作用的载荷  $P_1 = 1500 \text{ kN}$  及作用在 2-2 轴上且距 1-1 轴为 400 mm 的偏心载荷  $P_2 = 220 \text{ kN}$  (见图 10-10b). (a) 使用正割公式计算柱中的最大压应力. (b) 如果钢的屈服应力  $\sigma_y = 280 \text{ N/mm}^2$ , 试问该柱抵抗初始屈服的安全系数是多少?

(a) 如图 10-10b 所示方式作用的两个载荷  $P_1$  和  $P_2$  静力等效于作用在

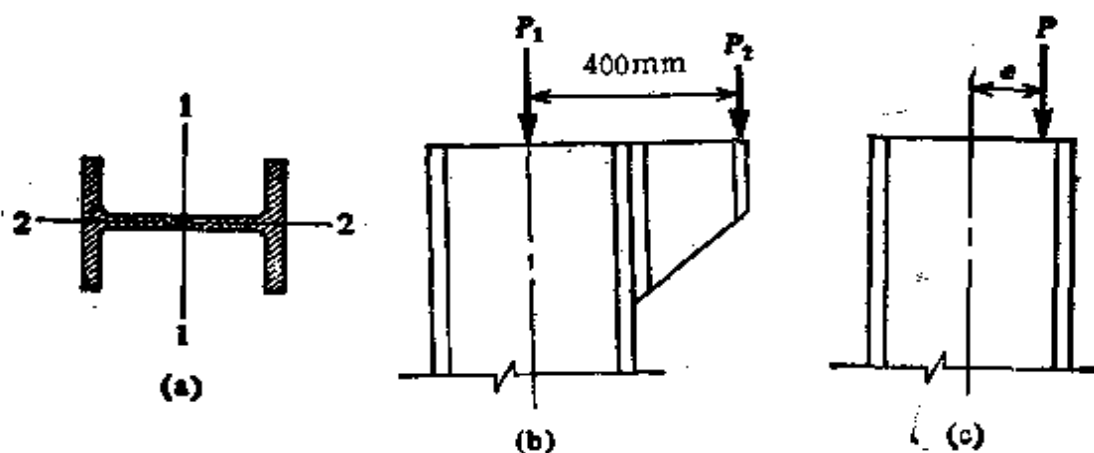


图 10-10. 例题.

偏心距  $e=50\text{ mm}$  处的单个载荷  $P=1720\text{ kN}$  (见图 10-10c)。利用附录 C 性质表, 我们求出

$$\frac{P}{A} = \frac{1720 \times 10^3}{21250} = 80.9\text{ N/mm}^2 \quad \frac{I_x}{r} = \frac{8000}{227} = 35.2$$

$$\frac{ec}{r^2} = \frac{eA}{S} = \frac{(51.2)(21250)}{4090 \times 10^3} = 0.266$$

代入方程(10-12), 并使用  $E=200\text{ kN/mm}^2$ , 我们得到

$$\sigma_{\max} = 104\text{ N/mm}^2$$

(b) 以偏心距  $e$  作用且将首先在柱内产生屈服的载荷  $P_y$ , 可根据方程(10-13)用  $280\text{ N/mm}^2$  代替  $\sigma_y$ , 然后用试凑法对  $P_y$  求解而得。其结果为  $P_y=4520\text{ kN}$ 。由此我们得出抵抗屈服的安全系数为

$$n = \frac{P_y}{P} = \frac{4520}{1720} = 2.628$$

## 10.5 柱的缺陷

柱受到沿中心线作用的压缩载荷时, 缺陷对柱的性态有严重影响, 缺陷的例子如柱的初曲, 载荷作用时不可避免的偏心、不完善的端部条件、材料的不均匀等等。这些缺陷的程度对不同的柱变化很大, 并在柱的试验结果中产生很大的分散度。一般说来, 缺陷的存在使得柱既受弯曲又受直接压缩。因此, 得出下列结论看来是合乎逻辑的: 有缺陷的中心加载柱的性态, 将类似于一根受到具有偏心距为  $e$  的力作用的理想柱。这个推理暗示, 通过选择适当的偏心比值  $ec/r^2$  以计入缺陷的影响, 使正割公式用于设计假想为笔直并沿中心受载的柱。自然,  $ec/r^2$  的值必须基于试验结果。尽管如此, 以此方式使用正割公式, 为计及缺陷影响提供了一个合理方法, 这比单靠增加安全系数来考虑缺陷要好。

对于结构钢应用中的销接柱来说, 通常采用的偏心比值为  $ec/r^2=0.25$ 。在方程(10-13)中使用此值, 并且还已知屈服应力  $\sigma_y$  和柱的尺寸, 我们就能计算出柱的最外层纤维产生初始屈服时的载荷  $P_y$ 。然后用安全系数去除  $P_y$ , 即可求出柱的容许载荷(例如, 我们不妨采用  $n=2$ )。

当以刚才叙述的方式使用正割公式时, 我们曾经假设那些不

可避免的缺陷能用载荷的偏心距来代表。另一种处理此问题的方式是假设不准确的因素等价于柱的初曲。对于两端铰接的柱，我们可以假设柱的初始挠度  $v_0$  为最大挠度等于  $\alpha$  的正弦曲线的半波，

$$v_0 = \alpha \sin \frac{\pi x}{L} \quad (a)$$

当轴向载荷  $P$  沿中心线作用时，柱中的弯矩变为

$$M = P(v_0 + v)$$

此处  $v$  为由弯曲产生的柱的附加挠度。可以将这一  $M$  表达式代入挠曲线微分方程，然后可用第 10.1 节所述的方法求解它。所得柱中点的挠度表达式为

$$\delta_{\max} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (10-14)$$

式中  $\alpha$  为柱的轴向载荷与临界载荷之比：

$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} \quad (10-15)$$

方程 (10-14) 表明，轴向载荷的效应是使柱的初始挠度按因子  $1/(1-\alpha)$  增大，因为  $\alpha$  小于 1，所以该系数总大于单位 1。

柱的最大弯矩为

$$M_{\max} = P\delta_{\max} = \frac{P\alpha}{1 - \alpha}$$

最大压应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{P\alpha c}{(1 - \alpha)I} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{\alpha c}{r^2(1 - \alpha)} \right] \quad (10-16)$$

如果我们象用正割公式那样继续进行(见第 10.4 节)，并规定最大应力  $\sigma_{\max}$  的一个极限，那么我们由方程 (10-16) 就可计算出相应的  $P/A$  值。

为了用图线表示方程 (10-16)，让我们再次假设材料为具有屈服应力  $\sigma_s$  的结构钢。此外，让我们还假设柱的横截面为绕其较强主轴弯曲的宽翼缘截面或 I 字形截面。于是对大多数实际应用场合，我们可将横截面理想化为由位于翼缘处的两个相等面积所组成。这种理想化的宽翼缘截面的惯性矩和回转半径很容易求得。

$$I = Ac^2 \quad r = c \quad (b)$$

式中  $c$  为中性轴至翼缘的距离,  $A$  为总的横截面面积. 将方程 (b) 中的  $I$  和  $r$  代入方程 (10-16), 并且令  $\sigma_{\max} = \sigma_y$ , 我们得到下列方程

$$\frac{P_y}{A} = \frac{\sigma_y \left[ \sigma_y^2 E - \frac{P_y}{A} \frac{L^2}{r^2} \right]}{\sigma_y^2 E \left( 1 + \frac{L}{r} \frac{a}{L} \right) - \frac{P_y}{A} \frac{L^2}{r^2}} \quad (10-17)$$

和前面一样, 式中  $P_y$  为使柱的最外层纤维产生屈服所需的轴向载荷值. 对于  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\sigma_y = 250 \text{ N/mm}^2$  及  $a/L$  值等于  $1/1000$ ,  $1/700$ , 和  $1/400$  的结构钢, 此方程的图线表示在图 10-11 中. 对于很短的柱, 所有三条曲线都给出  $P_y/A = 240 \text{ N/mm}^2$ . 对于很细长的柱, 这些曲线所给出之值均趋近于欧拉曲线所得之值. 用其中一条曲线, 并用适当的安全系数, 譬如说  $n = 2$ , 去除自该曲线所得的  $P_y/A$  值, 就得出平均压应力的容许值. 此法的优点是

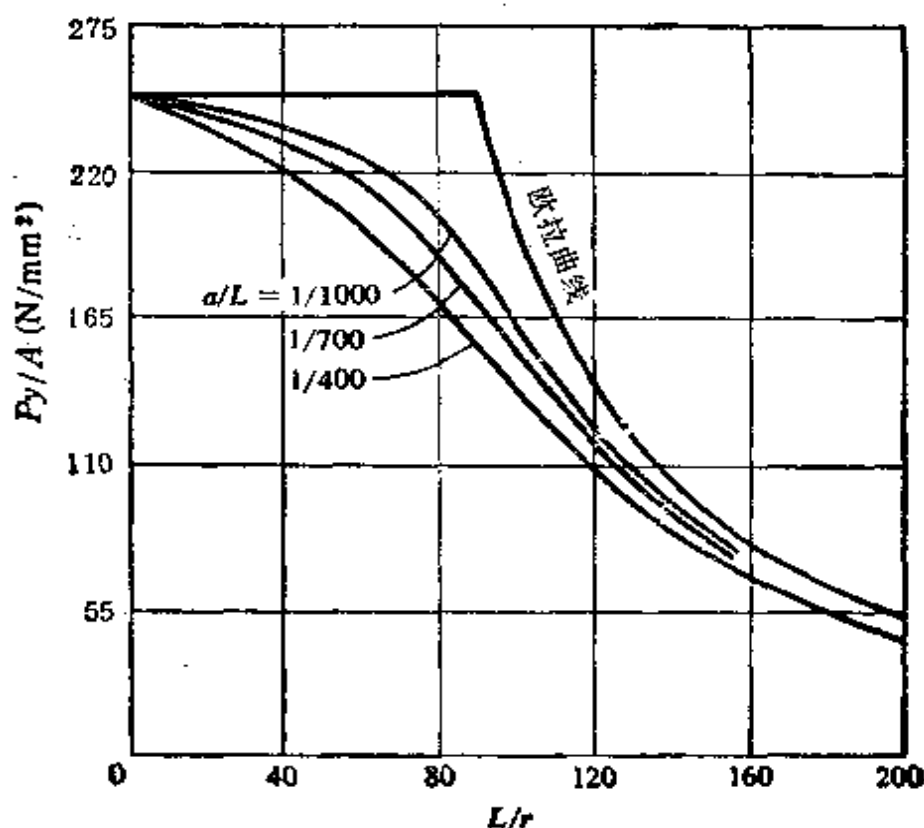


图 10-11. 对具有  $\sigma_y = 250 \text{ N/mm}^2$  及  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$  的理想宽翼缘截面, 方程 (10-17) 的图线.



可用不变的安全系数, 因为随着柱长  $L$  而增加的不准确因素已经通过假设初始挠度与长度成正比这一方法考虑在内。然而, 初始挠度的大小在一定程度上尚未确定, 它取决于实验数据。正如图中被选择的曲线所表明的那样, 通常使用的  $L/\alpha$  之值介于 400 至 1000 之间。(关于缺陷效应的进一步讨论见参考文献 10-1 和 10-7)。

## 10.6 柱的设计公式

在前几节中所述的, 关于预测柱的承载能力的方法, 均基于理论上的考虑。在应用这些方法时, 仍然存在某些不确定性, 譬如安全系数的选择(多半随  $L/r$  变化)以及对所假设的不准确因素和偏心距的适当值的选择等。只有当实际柱的试验结果可资利用时, 这些量才能被恰当地选择。根据这类试验, 我们可以选择安全系数, 从而得到柱的平均压应力的容许值。于是这些容许应力可用经验公式表达, 该式通常把  $\sigma_w$ (等于  $P_w/A$ ) 作为长细比  $L/r$  的函数。经验设计公式的应用, 若局限于建立公式所依据的限度内而且在此范围内有足够实验数据, 就是完全合理的。

对于中心受载的结构钢柱的设计, 柱研究学会 (ORC) 已经根据下述考虑提出了柱的公式(参考文献 10-8)。当  $L/r$  很大时, 其最大应力  $\sigma_{\max}$  (等于所假设的极限载荷或破坏载荷被横截面面积除) 依照欧拉临界载荷而定。所以, 我们有

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma^2 E}{(KL/r)^2} \quad (a)$$

其中, 为使该式能对各种端部条件成立, 使用了有效长度  $KL$ 。方程 (a) 仅适用于柱中的实际应力低于比例极限的情况, 对于结构钢来说, 此极限可取为屈服应力  $\sigma_y$ 。然而, 因为在结构钢截面内存在残余应力, 所以屈曲时柱中实际的压应力为

$$\sigma_o = \sigma_{\max} + \sigma_r \quad (b)$$

此处  $\sigma_r$  为柱的残余压应力, 它可能高达  $\sigma_y/2$ , 而  $\sigma_{\max}$  等于  $P/A$ 。为了确定方程 (a) 的适用限度, 我们令  $\sigma_o$  等于它的极限值  $\sigma_y$ , 并令  $\sigma_r$  等于假设的最大值  $\sigma_y/2$ , 于是由方程 (b) 我们求出  $\sigma_{\max} = \sigma_y/2$ 。

因此,我们得出结论:只要  $\sigma_{\max}$  保持小于  $\sigma_y/2$ , 方程(a)就可使用. 对应的  $KL/r$  的极限值用  $\lambda$  表示, 可通过令方程(a)中的  $\sigma_{\max}$  等于  $\sigma_y/2$ , 并对  $\lambda$  求解而得

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (10-18)$$

每当有效长细比  $KL/r$  等于或大于  $\lambda$  时, 临界应力的欧拉公式(方程 a)就可使用.

用钢的屈服应力去除方程(a), 使其化为无量纲形式是很方便的, 因此, 最大应力的方程变为

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_y} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_y (KL/r)^2} = \frac{\lambda^2}{2(KL/r)^2} \quad \text{当 } \frac{KL}{r} \geq \lambda \quad (10-19)$$

此方程绘于图 10-12 中.

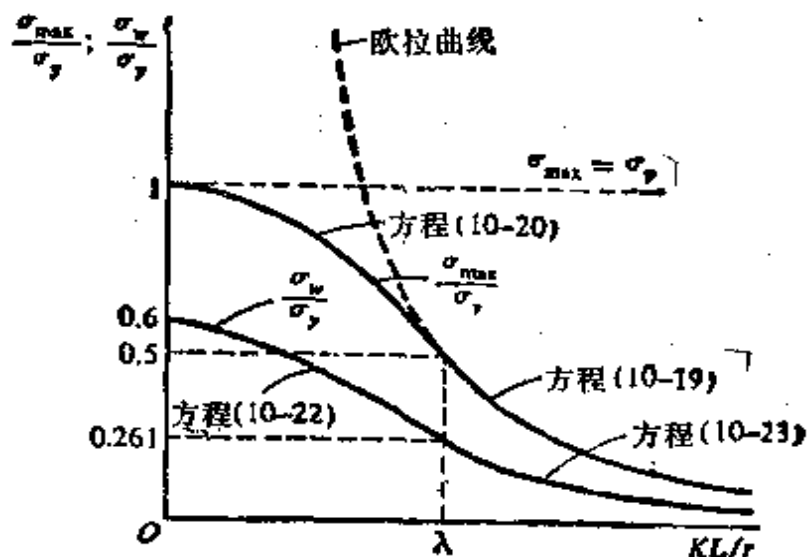


图 10-12. 用于结构钢柱设计的最大应力  $\sigma_{\max}$  和容许应力  $\sigma_w$  的曲线图.

对于非弹性屈曲的范围 ( $KL/r \leq \lambda$ ), 柱研究学会建议用下列方程表示的一条抛物线:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_y} = 1 - \frac{(KL/r)^2}{2\lambda^2} \quad \text{当 } \frac{KL}{r} \leq \lambda \quad (10-20)$$

该方程也绘在图 10-12 中, 由图我们看出, 当  $KL/r=0$  时,  $\sigma_{\max}$  的值为  $\sigma_y$ . 此曲线在  $KL/r=0$  处有一水平切线, 并在  $KL/r=\lambda$  的点处和方程(10-19)的曲线光滑地相接,

为了设计需要,必须引进适当的安全系数,以便由最大应力得到容许工作应力  $\sigma_w$  ( $\sigma_w = \sigma_{\max}/n$ )。美国钢结构协会(AISC)已经建议将下列安全系数用于柱研究学会的公式\*:

$$n_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8\lambda} - \frac{(KL/r)^3}{8\lambda^3} \quad \text{当 } \frac{KL}{r} \leq \lambda \quad (10-21a)$$

$$n_2 = \frac{23}{12} \approx 1.92 \quad \text{当 } \frac{KL}{r} \geq \lambda \quad (10-21b)$$

因而,容许应力的方程变为

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_y} = \frac{1 - (KL/r)^2(2\lambda^2)}{n_1} \quad \text{当 } \frac{KL}{r} \leq \lambda \quad (10-22)$$

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_y} = \frac{\lambda^2}{2n_2(KL/r)^2} \quad \text{当 } \frac{KL}{r} \geq \lambda \quad (10-23)$$

这些容许应力的方程也用曲线表示于图 10-12 中。它们等价于 AISC 规范中对设计中心受载结构钢柱所给出的方程。

结构铝柱是按由两条直线和欧拉曲线(图 10-8 中的 *DEBC* 线)所组成的最大应力图设计的。此曲线的纵坐标值随着所用的特定铝合金而变,并可从设计手册中查出(参考文献 10-10)。由图求得最大应力  $\sigma_{\max}$  后,引入诸如 2 或 2.5 的安全系数,以求出容许应力  $\sigma_w$ 。

由认可机构准备的许多建筑法规和规范中均给出了柱的设计公式。已建立的这些公式仅对某些材料并在规定的条件下使用。这种法规和规范被工程师们广泛地使用。

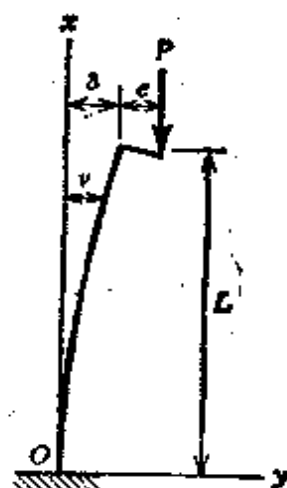
选择一个承受预定载荷的柱截面常需要某些试凑计算。知道轴向载荷之后,我们开始先估算容许应力  $\sigma_w$ , 并近似地计算所需的横截面面积。然后根据可用的尺寸表格选择截面。该截面必须借助于适当的柱设计公式加以校核,看它是否足以支持此载荷。如果不能,那么就要选择较大的截面,并重复此过程;如果看来设计过于安全,则选择较小的截面并进行校核。

\* 见参考文献 10-9, AISC 采用了与本书不同的符号,例如,  $\lambda$  用  $C_c$ ,  $\tau_w$  用  $F_c$ ,  $\sigma_y$  用  $F_y$ 。另外, AISC 规定弹性模量为  $200 \text{ kN/mm}^2$ 。

## 习 题

**10.1-1** 图 10-1 中所示柱的最大挠度为  $\delta_1 = e \left( \sec \frac{kL}{2} - 1 \right)$ , 系由方程(10-2)给出. 若挠度对于力  $P$  所产生的弯矩的影响略去不计, 则最大挠度为  $\delta_2 = PeL^3/8EI$  (见第 10.1 节方程  $f$ ). 比值  $\delta_1/\delta_2$  可视为代表挠度对弯矩影响的“放大系数”, 试求出以  $kL$  表示的  $\delta_1/\delta_2$  的表达式, 并根据此表达式作出  $\delta_1/\delta_2$  对  $kL$  的图解. (作为对图解的校核, 请注意, 当  $kL=0$  时,  $\delta_1/\delta_2$  必须等于 1; 当  $kL=\pi$  时必须成为无穷大).

**10.1-2** 图中所示的柱, 根部固支, 上端自由. 压缩载荷  $P$  以偏心距  $e$  作用柱的上端. 试导出下列公式:  
(a) 柱的最大挠度  $\delta$ . (b) 柱的最大弯矩  $M_{\max}$ .



习题 10.1-2

**10.1-3** 一方形截面杆(50 mm × 50 mm), 长度为 2 m, 被力  $P=40$  kN 偏心压缩. 其偏心距  $e$  的方向沿正方形的对角线, 且等于 25 mm. 试求杆中的最大压应力, 假设杆的两端简支,  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>.

**10.1-4** 一长度为 1.2 m, 截面为 25 mm × 50 mm 的矩形杆, 被力  $P=15$  kN 偏心压缩. 压缩载荷的作用线通过截面的一角, 试求杆中的最大压应力. 假设杆两端为简支,  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>.

**10.1-5** 一两端铰支的柱, 是由 C203 × 17 的槽型截面构成 (见附录 C). 压缩载荷  $P$  作用于槽形截面的对称面内, 其作用点在 1-1 轴与横截面背面的交点上, 即至形心的距离为 14.7 mm. 试求柱中点处的挠度以及柱的最大拉应力和最大压应力, 假设  $P=18$  kN,  $L=3$  m,  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>.

**10.1-6** 一两端铰支柱, 是由 W303 × 60 的截面构成. 压缩载荷  $P$  作用于 2-2 轴上 (见附录 C), 偏心距  $e=80$  mm. 柱的长度为  $L=5$  m,  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>. 试问  $P$  为何值时, 柱将发生屈服? 假设  $\sigma_y=250$  N/mm<sup>2</sup>.

**10.1-7** 一两端铰支柱, 是由外径为  $d=52$  mm, 壁厚  $t=2$  mm 的钢管制成, 压缩载荷  $P$  作用于环边缘的中间处, 即偏心距  $e=25$  mm. 柱的长度为  $L=2$  m,  $E=200$  kN/mm<sup>2</sup>. 试问  $P$  为何值时, 将使管产生屈服? 假设  $\sigma_y=280$  N/mm<sup>2</sup>.

**10.2-1** 从挠曲线微分方程出发, 试导出两端简支柱的临界屈曲载荷的表达式和相应的屈曲模态 (见图 10-6a).

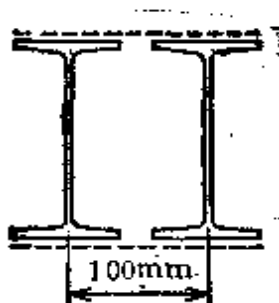
**10.2-2** 从挠曲线微分方程出发, 试导出两端固支柱的临界屈曲载荷的表达式和相应的屈曲模态 (见图 10-6b).

**10.2-3** 两根长度、截面面积和弹性模量都相同的简支柱, 其中一根柱为实心圆截面, 而另一根为实心方形截面. 试比较圆柱和方柱的临界载荷  $P_c$  和  $P_s$ .

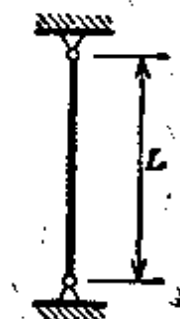
**10.2-4** 一根 W356×116 型截面的宽翼缘柱 ( $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ), 长度为 15 m. 柱的下端为固支, 上端为销支. 试计算柱的临界载荷.

**10.2-5** 试计算由 S152×19 型截面制成的柱的临界载荷. 假设柱的两端为简支, 且  $L=2 \text{ m}$ ,  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ .

**10.2-6** 一两端简支的合成柱, 由两根工字型截面按图中所示方位组成, 试求其临界载荷. 每一个元件是一 S152×19 截面, 并且它们的连接细节按排得使两个元件如同一根单柱那样工作. 假设  $L=3.6 \text{ m}$ ,  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ .



习题 10.2-6



习题 10.2-7

**10.2-7** 两端为固定铰支的细长杆(见图), 假设杆处于理想情况和弹性状态下, 试问杆的温度增量  $\Delta T$  为何值时杆将发生屈曲? (假设  $\alpha$  为热膨胀系数)

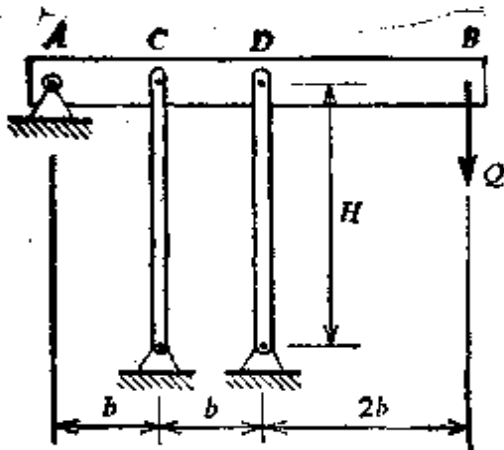
**10.2-8** 试从附录 C 的表中选择最轻的宽翼缘截面 ( $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ) 作为两端简支柱 (长度  $L=6 \text{ m}$ ), 假设压缩载荷  $P$  为 1800 kN, 抵抗弹性屈曲破坏所需要的安全系数为  $n=2.5$ .

**10.2-9** 试从附录 C 的表中选择最轻的等边角形截面, 作为两端简支的柱 (长度  $L=3 \text{ m}$ ), 假设所作用的压缩载荷  $P=90 \text{ kN}$ , 抵抗弹性屈曲破坏所需要的安全系数  $n=2.5$ . (使用  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ )

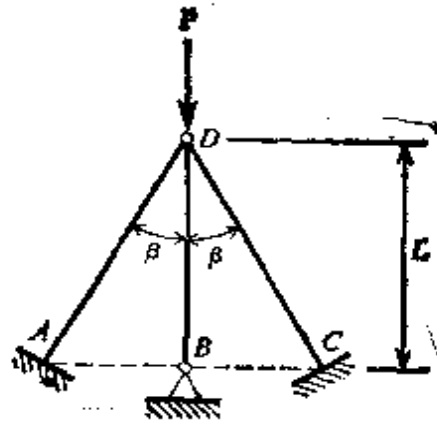
**10.2-10** 一长 2 m 的细长铝柱 ( $E=70 \text{ kN/mm}^2$ ), 由外径为 50 mm 的圆管制成. 试计算所需要的壁厚  $t$ , 假设压缩载荷  $P=14 \text{ kN}$ , 抵抗弹性屈曲所要求的安全系数  $n=2$ . (假定柱两端为简支)

**10.2-11** 一笨重的、相对刚硬的杆 AB, 在 A 端为销接, 而在 C 和 D 两处则用两根相同的端部销接的细长柱来支持, 如图所示. 每根柱的弯曲刚度为  $EI$ , 试问此系统破坏时的载荷  $Q$  为多大?

**10.2-12** 一结构 ABCD, 由三根具有相同弯曲刚度  $EI$  的细长杆组成



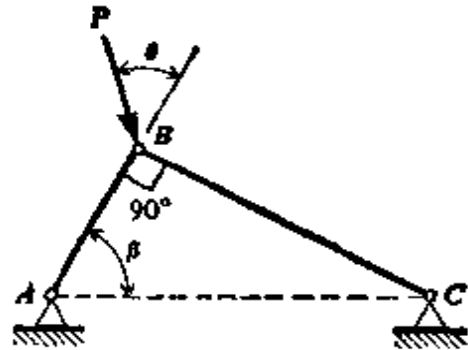
习题 10.2-11



习题 10.2-12

(见图), 节点  $B$  处和  $D$  处为铰接, 支座  $A$  和  $C$  为固定端, 角度  $\beta = 30^\circ$ . 假设结构因元件的屈曲而发生破坏, 试确定作用于节点  $D$  处的竖直载荷  $P$  的临界值.

**10.2-13** 一铰接桁架  $ABC$ , 由两根截面相同、材料相同的细长杆组成(见图). 假设桁架由于元件的屈曲而发生破坏, 试确定使载荷  $P$  有最大值的  $\theta$  角(假设  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ).



习题 10.2-13

**10.3-1** 一根  $25 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$  的矩形截面钢杆, 两端简支, 承受轴向压缩载荷, 试问应用计算临界载荷的欧拉公式时, 柱的最短长度  $L$  为多少? 假设  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\sigma_{p1} = 200 \text{ N/mm}^2$ .

**10.3-2** 试计算上题中所述柱的临界应力  $\sigma_{cr}$ , 若柱的长度  $L = 1.5 \text{ m}$ .

**10.3-3** 一实心圆截面钢杆(直径等于  $25 \text{ mm}$ ), 两端为固支, 承受一轴向压力. 试问应用计算临界载荷的欧拉公式时, 柱的最短长度  $L$  为多少? 假设  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\sigma_{p1} = 200 \text{ N/mm}^2$ .

**10.3-4** 试计算上题中所述柱的临界应力  $\sigma_{cr}$ , 假设柱的长度为  $L = 1.5 \text{ m}$ .

**10.3-5** 一根  $50 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  的矩形截面钢杆 ( $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ), 承受一轴力  $P$  而压缩. 杆可以认为两端简支. 要求抵抗屈曲破坏时的安全系数保持为  $n = 2$ . 试问柱的容许应力  $\sigma_w$  为多少? 假设长度  $L$  为: (a)  $2 \text{ m}$ , (b)  $2.5 \text{ m}$ , (c)  $3 \text{ m}$ .

**10.3-6** 试确定长度为  $L = 9 \text{ m}$ , 截面为  $W356 \times 116$  的两端铰支柱的临界压应力  $\sigma_{cr}$  (假定  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ), 试问柱上的许用压缩载荷  $P$  为多

少? 假设安全系数  $n=2.5$ 。

**10.8-7** 试问在上题所述柱中, 可应用欧拉公式计算临界载荷时柱的最短长度  $L$  为多少? 假设  $\sigma_{p1}=280 \text{ N/mm}^2$ 。

**10.4-1** 试求出习题 10.1-2 的悬臂柱中类似于正割公式(方程 10-12)的最大应力表达式。

**10.4-2** 一截面为  $W356 \times 116$  的钢柱( $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ), 其两端为销接, 长度  $L=8 \text{ m}$ 。柱承受一作用于中心的载荷  $P_1=900 \text{ kN}$  和一偏心载荷  $P_2=450 \text{ kN}$ (见图 10-10)。载荷  $P_2$  作用于 2-2 轴上, 距形心  $180 \text{ mm}$  处。(a) 试用正割公式计算柱的最大应力。(b) 试问柱抵抗初始屈服的安全系数为多少? 假设  $\sigma_y=280 \text{ N/mm}^2$ 。

**10.4-3** 一长  $2 \text{ m}$ , 两端简支的钢柱( $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ), 截面为  $102 \times 102 \times 10$  的角形截面(见附录 C)。载荷  $P$  作用于两角边相交的外侧角点处, 试问钢柱容许载荷  $P$  为多大? 要求抵抗屈服的安全系数  $n=2$ ,  $\sigma_y=280 \text{ N/mm}^2$ 。

**10.4-4** 用  $W406 \times 74$  的截面作简支柱( $L=5 \text{ m}$ ,  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ), 承受一使柱绕最小的主轴(2-2 轴)而弯曲的压缩载荷  $P$ 。偏心率  $ec/r^2=0.2$ , 试求  $P$  的许用值, 假设抵抗屈服的安全系数为  $n=2$ ,  $\sigma_y=250 \text{ N/mm}^2$ 。

**10.4-5** 一钢管柱, 根部固支, 上端简支( $L=4 \text{ m}$ ,  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ), 管子的外径和内径分别为  $90 \text{ mm}$  和  $80 \text{ mm}$ 。假设偏心率为  $ec/r^2=0.25$ ,  $\sigma_y=250 \text{ N/mm}^2$ ,  $n=2$ 。试求容许载荷  $P$ 。

**10.4-6** 一截面为  $W356 \times 116$  的两端销接钢柱( $L=3 \text{ m}$ ,  $E=200 \text{ kN/mm}^2$ )。一载荷  $P_1=450 \text{ kN}$  通过形心作用, 偏心载荷  $P_2$  作用于 1-1 轴上, 距 2-2 轴  $100 \text{ mm}$  处。假设  $\sigma_y=280 \text{ N/mm}^2$ ,  $n=2.5$ 。试求  $P_2$  的容许值。

**10.5-1** 试用求解挠曲线微分方程的方法导出具有初始挠度的柱的最大挠度方程(10-14)。

**10.5-2** 试导出方形截面柱类似于方程(10-17)的表达式。

**10.5-3** 一截面为  $W254 \times 67$ 、两端销接的钢柱( $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ), 承受轴向载荷  $P=1000 \text{ kN}$ 。柱的长度  $L=5 \text{ m}$ , 柱绕截面较弱的主轴弯曲而屈曲, 该柱具有正弦曲线之半波形的初始挠度, 在中点处的挠度等于  $5 \text{ mm}$ 。(a) 试用方程(10-16)计算柱的最大应力, (b) 试问柱抵抗屈曲的安全系数为多大? 假设  $\sigma_y=280 \text{ N/mm}^2$ 。

**10.5-4** 一两端简支钢柱( $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ), 长度为  $1.2 \text{ m}$ , 假如柱的截面为直径等于  $50 \text{ mm}$  的实心圆截面, 试问柱的容许压缩载荷  $P$  为多少? 应用方程(10-16), 并假设抵抗屈服的安全系数为  $n=2$ ,  $\sigma_y=280 \text{ N/mm}^2$ ,  $L/a=400$ 。

**10.5-5** 一两端固支钢柱, 由  $76 \times 76 \times 6$  的角形截面构成, 假如柱的长度  $L=3\text{ m}$ ,  $E=200\text{ kN/mm}^2$ ,  $n=1.5$ ,  $\sigma_y=280\text{ N/mm}^2$ ,  $a/L=1/800$ , 试求柱的容许压缩载荷  $P$ 。(应用方程(10-16)求解)。

**10.6-1** 试问截面为  $W254 \times 115$ 、长度为  $4.5\text{ m}$ 、两端铰支的钢柱的容许载荷  $P$  为多少? 应用 AISC 公式, 并假设  $E=200\text{ kN/mm}^2$ ,  $\sigma_y=345\text{ N/mm}^2$ 。

**10.6-2** 对  $W254 \times 67$  型钢柱在下列每种长度时根据 AISC 公式确定其容许载荷  $P$ (假设  $E=200\text{ kN/mm}^2$ ,  $\sigma_y=250\text{ N/mm}^2$ ):  $L=3\text{ m}$ ,  $6\text{ m}$ ,  $9\text{ m}$ 。假设端部条件为铰支。

**10.6-3** 一外径为  $90\text{ mm}$ 、内径为  $74\text{ mm}$  的钢管柱, 承受轴向载荷  $P=95\text{ kN}$ 。试问: 根据 AISC 公式, 不超过容许应力的柱的最大长度  $L$  为多少? 假设柱两端为简支,  $E=200\text{ kN/mm}^2$ ,  $\sigma_y=250\text{ N/mm}^2$ 。



# 第十一章 结构分析和能量法

## 11.1 引言

结构分析的目的在于求出各种不同类型的结构，特别是静不定结构的应力合力、位移和反力。此论题已在前面各章中介绍过，在那里我们研究了梁、受扭杆以及轴向受载元件的静不定问题。正如那些讨论所表明的，结构分析和材料力学是紧密交织的。此外，功和能的概念，包括虚功、应变能、势能和余能，在结构分析中都具有重要的作用。

在本章中，我们将先讨论虚位移原理和虚功原理，然后用虚功原理导出单位载荷法，此法对于确定结构的位移来说，是非常有用的。作为单位载荷法的一种应用，再研究梁的剪切挠度。接下去一节，提出位移互等定理和功的互等定理。然后我们介绍并说明柔度法和刚度法，它们是结构分析的基本方法。最后，本章的后半部分，专门讨论能量方法。

开始先介绍一些与应变能和余能有关的基本概念，此后将能量法用于结构分析。应变能的讨论包括卡氏第一定理、势能驻值原理、瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)法以及它们与结构分析中的位移法和刚度法之间的关系。余能的讨论包括克罗第-安格瑟(Crotti-Engesser)定理和最小余能原理，两者均与结构分析的力和柔度法有关。另外，对于呈线性性态的结构，余能原理简化为卡氏第二定理和最小应变能原理。

本章所讨论的理论和方法仅用梁、平面桁架和简单平面刚架的例子来说明。然而，所有这些概念代表了应用力学的基本原理，因此，它们可以应用于更复杂的结构类型，包括空间桁架、空间刚架、平板和壳体结构等等。

## 11.2 虚功原理

通常在研究静力学时引出虚位移和虚功的概念，在那里它们被用于求解静平衡问题。“虚”这个词意味着这些量纯属假设的，而且从真实的或物理的意义上来说它们并不存在。因此，虚位移是一种假想的任意施加到结构系上的位移；它不是真位移，譬如，它不象作用在结构上的载荷所引起的挠度。在发生虚位移的过程中，真实的力所作的功称为虚功。

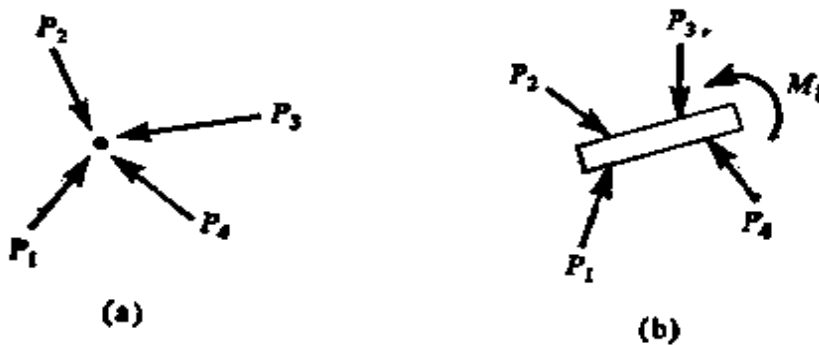


图 11-1 虚位移原理：

(a) 对一个质点；(b) 对一个刚体。

当一个单个质点在力系作用下处于静平衡时（见图 11-1a），我们可以给该质点一个沿任意方向移动的虚位移。在此虚位移的过程中，诸力所做的虚功必为零，因为这些力处于平衡状态。这个看来很简单的叙述就是虚位移原理。正如静力学的研究中所表明的那样，该原理在解题时可以取代更为熟悉的平衡方程。

虚位移原理也适用于在载荷系作用下处于平衡状态的刚体，该载荷系可以包括力、力偶和分布载荷（图 11-1b）。可以给刚体一个虚位移，此位移包括沿任意方向的移动，绕任意轴的转动，或者是转动和移动的组合。在所有情况下，如果刚体处于平衡，诸力所作的虚功将为零。通常我们必须限制虚位移为一很小的位移，以便使诸力的作用线在发生虚位移的过程中不会改变\*。

\* 虚位移原理首先是由约翰·伯努利 (John Bernoulli, 1667—1748) 提出的 (见参考文献 1-1 p. 27 及参考文献 6-1)。

为了用于结构分析，我们必须将虚位移原理推广到可变形结构的情形。对于这种结构，我们不仅必须要考虑外力的虚功，而且也要考虑与内力或应力合力相关的虚功。为了说明如何完成此过程，让我们研究图 11-2a 所示的结构。假设该结构以完全一般的方式承受力、弯曲力偶、扭矩及分布载荷。自然，该结构在各种载荷作用下处于静止和平衡状态。结构的任一横截面上可能存在轴向力  $N$ ，弯矩  $M$ ，剪力  $V$  及扭转力偶  $T$  等形式的应力合力，如同作用在从构件中切出的一个长为  $dx$  的微段的左侧面上示出的那样（图 11-2b）。在微段的另一面上，应力合力可能有微小的变化，因此将它们表示为  $N + dN$ ， $M + dM$ ， $V + dV$  和  $T + dT$ 。

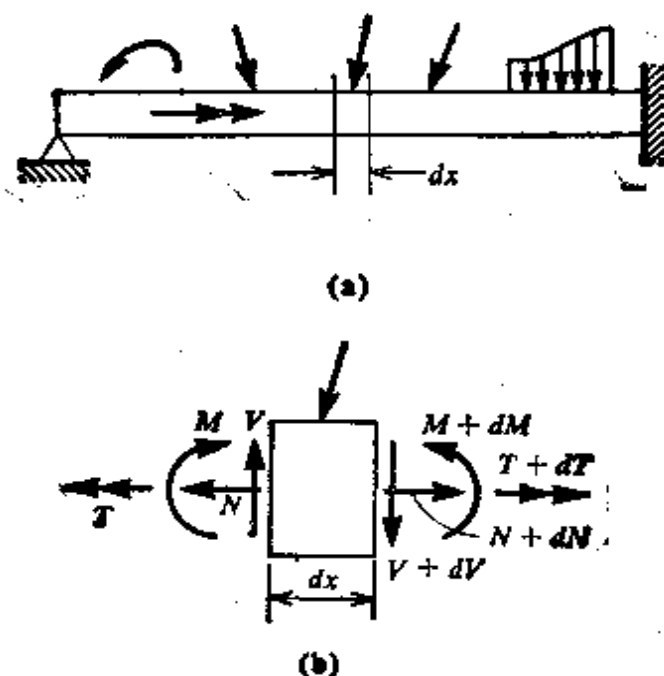


图 11-2. 虚功原理的推导

现在假设给结构（图 11-2a）一个虚变形，使已挠曲的形状有微小的改变。这个虚变形以某种并未特别指定的方式强加在结构上，并且它和已经作用在其上的载荷而产生的真实挠度完全无关。这种真实的挠度具有确定的大小，依载荷和结构两者的性质而定。然而，虚变形代表施加于原先在真实载荷作用下已处于平衡位形的结构上的附加变形。对于虚变形唯一的限制是，它必须代表在物理上实际可能发生的变形形状；换句话说，虚的形状变化必须和

结构的支持条件相协调,并且必须保持结构微段之间的连续性.由于梁发生虚变形的结果,梁轴上的诸点将产生虚位移,譬如沿竖直方向的挠度.

在发生虚变形的过程中,结构的每个微段将移动到一个新的位置,并且在形状上也发生变化.因而,作用在微段上的力(包括应力合力和外载荷,如图 11-2b 所示)要做虚功.让我们用  $dW_e$  表示此虚功的总值.这个与单个微段相关的虚功可以认为由两部分组成:(1) 由于微段作为刚体的位移(既有平移,又有转动)所做的虚功  $dW_r$ ; (2) 与微段变形相关的虚功  $dW_d$ . 因此

$$dW_e = dW_r + dW_d$$

因为微段处于平衡状态,所以当微段作为刚体时的位移过程中,诸力(外部的和内部的两者)所作的虚功  $dW_r$  必为零,因此上述方程简化为

$$dW_e = dW_d \quad (\text{a})$$

该方程说明,在微段发生虚位移的过程中,作用在其上所有的力所作的总虚功(亦即,由刚体位移产生的虚功和由微段变形产生的虚功)等于仅在微段的虚变形过程中由同样的力所作的虚功.现在如果我们将结构上所有微段表示在方程(a)中的虚功项加起来,我们就得到

$$\int dW_e = \int dW_d \quad (\text{b})$$

式中积分应理解为对整个结构进行.

可给方程(b)中的积分以简单的解释.方程左边的积分为当结构发生虚变形的过程中所有的力,包括作用在所有微段的所有面上的载荷和应力合力做的总虚功,在图 11-2b 中表示了一个典型的微段.然而,我们可以注意到,每个微段的侧边与其相邻微段侧边直接接触.所以,作用在微段上的应力合力的虚功恰与作用在相邻微段上的相等且反向的应力合力所做的虚功抵消.唯一保留的虚功为作用在微段外边界上(譬如图 11-2b 中微段的顶面和底面)的外力功.因此,我们得到结论:方程(b)左边的积分等于作

用在结构上的外力虚功。我们将称这个量为外功，并用  $W_{\text{ext}}$  表示。

方程(b)右边的项是由积分与微段变形相关的虚功而得。此功包括作用在微段上所有力的效应，既有应力合力，也有外力。然而，当微段变形时，只有应力合力做功。因此，方程(b)的第二项实际上代表应力合力单独作的虚功。此虚功等于当微段虚拟地发生变形时，作用在微段上的应力合力所作的功。对所有微段求和得到的虚功总值称为内功，并以  $W_{\text{int}}$  表示。因此，方程(b)变为

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \quad (11-1)$$

该方程代表虚功原理，它可叙述如下：如果给予在载荷系作用下处于平衡的可变形结构一个微小的虚变形，那么外力(或载荷)所作的虚功等于内力(或应力合力)所作的虚功。

虚功原理极为有力，而且在结构分析中具有许多用途。然而，在着手使用该原理之前，强调一下它的两个特点是很重要的。第一，虚变形或虚位移必须与结构的支持条件相协调，而且必须保持结构的连续性。除了这种限制之外，可以任意地在结构上施加虚的形状变化；不应当把它与由真实载荷引起的结构变形形状相混淆。第二、回顾该原理的建立过程表明，讨论中从未涉及到结构的材料特性。所以，虚功原理适用于所有结构，不论材料表现为线性的还是非线性的，弹性的还是非弹性的。

现在让我们研究在方程(11-1)中出现的外虚功项和内虚功项的计算。外功  $W_{\text{ext}}$  是在发生虚位移的过程中作用在结构上的载荷所作的功。因为当施加虚位移时，这些载荷以其终值作用，所以它们所作的虚功简单地为载荷和位移的乘积。更具体地说，集中载荷的虚功为力和力作用点处的虚位移的乘积。在此情况下，位移的正方向必须取得与力的正方向相同。如果载荷为力偶，那么虚功为力偶矩与转过的虚转角的乘积。

应力合力的内功  $W_{\text{int}}$  的计算要略微复杂些。作用在微段上的应力合力所作的虚功(图 11-2b) 取决于在虚位移过程中微段的变形。各种类型的虚变形示于图 11-3 中，在该图的(a)部分中表

示由微段均匀轴向应变组成的虚变形, 由此, 微段的长度增加了一个表示为  $d\delta$  的量. 这个虚变形产生了由轴向力所作的虚功  $(N + dN)d\delta$  (图 11-2b), 但弯矩、剪力、或扭矩并不作虚功. 我们还要注意, 这时并没有提及虚变形  $d\delta$  的起因, 显然它不是由于轴向力  $N$  本身引起的. 第二类虚位移为由微段两个侧边的相对转角  $d\theta$  组成的弯曲变形 (图 11-3b). 在发生这一虚变形的过程中, 唯一做功的应力合力为弯矩, 它的虚功为  $(M + dM)d\theta$ . 剪切虚变形和扭转虚变形分别示于图 11-3c 和 d. 前者由微段的一个侧边相对另一个侧边的横向移动  $d\lambda$  组成, 后者是由绕纵轴的相对转角  $d\phi$  组成. 与这些虚变形相关的虚功项为  $(V + dV)d\lambda$  和  $(T + dT)d\phi$ .

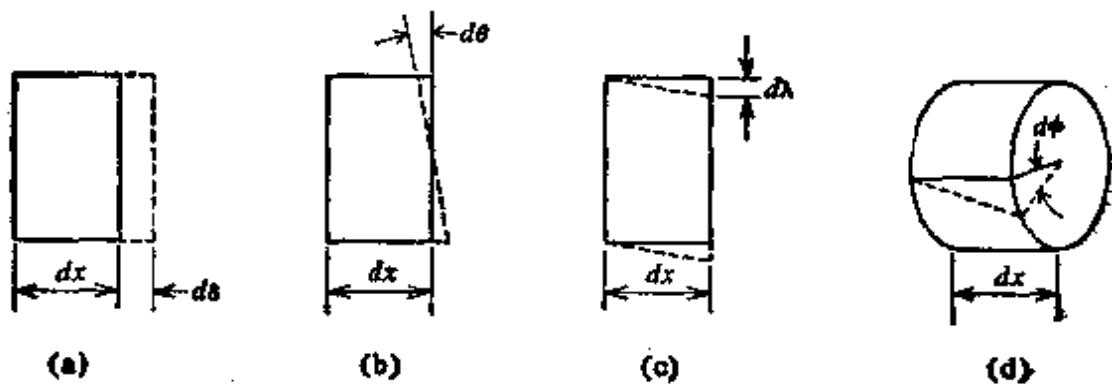


图 11-3. 结构微段的虚变形: (a) 轴向的; (b) 弯曲的;  
(c) 剪切的; (d) 扭转的.

与有限项和微分量的乘积 (譬如  $Nd\delta$ ) 相比, 略去两个微分量的乘积 (譬如  $dNd\delta$ ), 则上述四个内虚功表达式中的每一个均可简化. 因此, 作用在结构微段上的应力合力所作的内虚功表达式变为

$$N d\delta + M d\theta + V d\lambda + T d\phi$$

对结构的所有微段进行积分, 给出内虚功的完整表达式:

$$W_{int} = \int N d\delta + \int M d\theta + \int V d\lambda + \int T d\phi \quad (11-2)$$

在此表达式中, 应力合力  $N$ ,  $M$ ,  $V$  和  $T$  为真实载荷在结构中产生的实际应力合力, 而变形  $d\delta$ ,  $d\theta$ ,  $d\lambda$  和  $d\phi$  是与结构的虚位移相关的虚拟变形. 在下一节中, 我们将建立一个利用方程 (11-1) 和

## (11-2) 求结构位移的方法.

### 11.3 用以计算位移的单位载荷法

上节所述的虚功原理可用来导出单位载荷法,它是求结构位移的一个重要方法.我们已经讨论过求梁的挠度(见第6章)和简单桁架变位(见第1.5节)的方法.然而,单位载荷法不仅能用于梁、桁架及其它简单类型的结构,而且也可用于具有许多元件的非常复杂的结构.此外,单位载荷法适用于求各种类型的位移,包括结构中某点的挠度、元件轴的转角、两点之间的相对位移及其他.虽然在实用上此方法限于静定结构,因为使用它时需要知道整个结构的应力合力,但从理论上,此方法既可用于静定结构,亦可用于静不定结构.

由于单位载荷法的基本方程可从虚功原理导出,所以此法本身有时就称为虚功法.它也称为虚载荷法或麦克斯韦-莫尔法.前一名称起因于该法需用一个假想的或虚设的载荷(亦即单位载荷),而后一名称的出现是因为(J. C. 麦克斯韦 Maxwell)在1864年,(O. 莫尔 Mohr)在1874年各自独立地发展了这个方法\*.

使用单位载荷法时,必须考虑作用在结构上的两个载荷系.第一个系统所包含的结构承受了实际的载荷、温度变化或者产生与所要计算的位移有关的其他因素.第二个载荷系只包含作用在结构上的单位载荷.单位载荷是假想的或虚设的载荷,它完全是为了计算实际载荷产生的位移 $\Delta$ 而引进的.单位载荷必须与欲求的位移 $\Delta$ 相对应.相应于某一位移的载荷是指该载荷作用在结构待定位移的点处,并沿该位移的正方向作用.这里“位移”一词用作广义的概念;因而,位移 $\Delta$ 可能是平移、转动、相对位移或相对转动.如果要计算的位移是平移,那么相应的单位载荷为作用在发生平移之点的一个集中力,该力的正方向沿着平移的正方向.如果要计算的位移是转动,那么单位载荷为作用在发生转动之点的一个力偶,单位力偶的正方向必须与转动的正方向相同.如果位移为两点之间

\* 见参考文献 11-1 和 11-4.

沿其连线的相对位移，那么单位载荷将由作用在此两点上的两个共线且方向相反的力所组成。最后，如果位移为两条线之间的相对转动，那么单位载荷将由两个相等且方向相反的力偶组成。所有这些可能出现的情况都将在本节后面举例说明。

作用在结构上并构成第二个载荷系的单位载荷在支座处产生反力，而在构件内产生应力合力。让我们用符号  $N_{\sigma}$ ,  $M_{\sigma}$ ,  $V_{\sigma}$  和  $T_{\sigma}$  表示这些应力合力。这些量与单位载荷和反力一起，构成一个平衡力系。根据虚功原理，如果给结构一个微小的虚位移（或者形状改变），那么外力虚功就等于内力虚功（见方程 11-1）。现在我们进入单位载荷法推导中的关键一步：我们必须适当地选择虚位移。让我们取第一载荷系引起的结构实际变形作为施加于第二载荷系（具有单位载荷的结构）上的虚变形。在发生虚变形的过程中，唯一的外虚功为单位载荷自身所完成的功，因为它是结构上唯一的外载荷。这个虚功为单位载荷和它移动的位移  $\Delta$  的乘积，因此

$$W_{\text{ext}} = 1 \cdot \Delta \quad (\text{a})$$

此处  $\Delta$  代表由实际载荷产生的结构的待求位移（请回忆，在前面曾把单位载荷有意地选择成与  $\Delta$  相对应）。

内虚功是当结构微元发生虚变形时，应力合力（ $N_{\sigma}$ ,  $M_{\sigma}$ ,  $V_{\sigma}$  和  $T_{\sigma}$ ）完成的功。然而，所选择的虚变形与承受真实载荷的结构内发生的实际变形相同。如图 11-3 所示，用  $d\delta$ 、 $d\theta$ 、 $d\lambda$  和  $d\phi$  表示这些变形，对于内功（见方程 11-2），我们得到：

$$W_{\text{int}} = \int N_{\sigma} d\delta + \int M_{\sigma} d\theta + \int V_{\sigma} d\lambda + \int T_{\sigma} d\phi \quad (\text{b})$$

最后，使外功等于内功（见方程 a 和 b），我们得出单位载荷法的基本方程：

$$\Delta = \int N_{\sigma} d\delta + \int M_{\sigma} d\theta + \int V_{\sigma} d\lambda + \int T_{\sigma} d\phi \quad (11-3)$$

在此方程中， $\Delta$  代表要计算的位移，它可能是平移，转动，或相对位移；应力合力  $N_{\sigma}$ 、 $M_{\sigma}$ 、 $V_{\sigma}$  和  $T_{\sigma}$  代表相应于  $\Delta$  的单位载荷所引起的轴向力、弯矩、剪力和扭转力偶；而  $d\delta$ 、 $d\theta$ 、 $d\lambda$  和  $d\phi$  代表由实际



载荷引起的变形。因为方程(11-3)的左边已经除以单位载荷，只剩下  $\Delta$  项，因此必须认为  $N_U$ 、 $M_U$ 、 $V_U$  和  $T_U$  这些量的量纲是单位载荷作用下的力或力矩的量纲除以单位载荷的量纲。

单位载荷法的基本方程(方程 11-3)是相当通用的，它不受有关材料的或结构的线性性态的任何限制。换句话说，为了使用方程(11-3)，不要求叠加原理成立。然而，最常见的情况发生在结构材料服从虎克定律和结构的性态表现为线性的情况。在此情况下，我们可以很容易地求得由作用在结构上的真实载荷所引起的变形  $d\delta$ 、 $d\theta$ 、 $d\lambda$  和  $d\phi$  的表达式。如果我们把作用在结构上的真实载荷所产生的应力合力表示为  $N_L$ 、 $M_L$ 、 $V_L$  和  $T_L$ ，那么微段的变形就是

$$\begin{aligned} d\delta &= \frac{N_L dx}{EA} & d\theta &= \frac{M_L dx}{EI} \\ d\lambda &= \frac{\alpha_s V_L dx}{GA} & d\phi &= \frac{T_L dx}{GJ} \end{aligned} \quad (c)$$

这些方程中的第一个方程给出微段由于轴向力  $N_L$  产生的伸长(见图 11-3a)。类似地，其余三项给出与弯曲、剪切和扭转有关的变形(见图 11-3b, c 和 d)。所有这四个表达式均建立在先前几章所导出的方程的基础上(见方程 1-9, 6-25, 6-43 和 3-8)。将这四个表达式代入方程(11-3)，给出下列形式的单位载荷法方程：

$$\begin{aligned} \Delta &= \int \frac{N_U N_L dx}{EA} + \int \frac{M_U M_L dx}{EI} + \int \frac{\alpha_s V_U V_L dx}{GA} \\ &+ \int \frac{T_U T_L dx}{GJ} \end{aligned} \quad (11-4)$$

当材料为线弹性，并且叠加原理成立时，该方程用来求出结构任一点处的位移  $\Delta$ 。方程中每一个积分项都代表了一种变形对总位移的贡献。因此，第一个积分给出轴向变形效应对位移  $\Delta$  的贡献；第二个积分给出弯曲变形的贡献；以及其余各项等等。

对方程(11-4)中出现的应力合力必须采用一致的符号约定。因此，轴向力  $N_U$  和  $N_L$  必须按照相同的符号约定求得，还有  $M_U$  和  $M_L$ ， $V_U$  和  $V_L$ ，以及  $T_U$  和  $T_L$  都应如此。只有在这样的条件

下,位移  $\Delta$  才总是具有和单位载荷相同的正方向。

用方程(11-4)以单位载荷法计算位移的步骤可概括如下: (1) 确定由实际载荷在结构中引起的应力合力  $N_L, M_L, V_L$  和  $T_L$ ; (2) 在结构上放置一个相应于待求位移的单位载荷; (3) 确定由单位载荷所引起的应力合力  $N_U, M_U, V_U$  和  $T_U$ ; (4) 建立方程(11-4)所示的诸项,并对整个结构积分每一项; (5) 将这些结果加起来得出位移  $\Delta$ 。这些步骤将在后面所给的例题中加以说明。

根据结构的类型,我们能够预料到方程(11-4)中的某些项是不需要的。例如,如果铰接桁架仅在节点处承受载荷,那么杆件中不会有弯曲、剪切或扭转变形,只需要方程(11-4)中的第一项。此外,元件中的轴向力沿整个元件将为常数,因此,如果元件为棱柱形的,则对一根元件的积分得出  $N_U N_L L / EA$ , 此处  $L$  为元件的长度。于是对桁架的所有元件求和得出

$$\Delta = \sum \frac{N_U N_L L}{EA} \quad (11-5)$$

该方程表明,桁架任一节点处的变位  $\Delta$  可按下列步骤求出: (1) 分别确定由单位载荷和实际载荷在所有元件中产生的轴向力  $N_U$  和  $N_L$ ; (2) 对每根元件建立表达式  $N_U N_L L / EA$ ; (3) 将所有元件的这些表达式加起来,便求得其变位。

在梁或平面刚架情况下,通常只有弯曲变形是重要的。所以,单位载荷方程简化为

$$\Delta = \int \frac{M_U M_L dx}{EI} \quad (11-6)$$

可以对结构的每个元件积分该式,然后,把所得项对结构的所有元件求和。

一般来说,根据结构的类型,将方程(11-4)中的诸项进行适当的组合,就可计算出结构的位移。

**温度效应** 如果位移是由于载荷以外的其它原因所引起,譬如温度变化,那么我们就必须使用  $d\delta$ ,  $d\theta$ ,  $d\lambda$  和  $d\phi$  的适当表达式以取代方程(o)所给的只有载荷效应的表达式。例如,温度均匀

增加所产生的长度增量(见图 11-3a)按下列方程给出:

$$d\delta = \alpha(\Delta T) dx$$

式中  $\alpha$  为热膨胀系数, 而  $\Delta T$  为温度的增加量(见方程 1-10)。于是单位荷载方程(方程 11-3)取如下形式:

$$\Delta = \int N_V \alpha(\Delta T) dx \quad (11-7)$$

该方程亦也用于温度  $\Delta T$  沿元件轴线变化的情形, 只需将  $\Delta T$  表为  $x$  的函数, 然后积分之。然而, 在一般情况下, 沿每根元件的长度上温度变化为常数, 我们就可用对所有元件的总和取代方程(11-7)中的表达式:

$$\Delta = \sum N_V \alpha L(\Delta T) \quad (11-8)$$

此处  $L$  为元件的长度, 因而, 必须计算结构每根元件的  $N_V \alpha L(\Delta T)$  项, 然后求这些项的总和得出位移。

当温度从梁的一边到另一边线性地变化, 但沿元件的长度并不改变时, 其变形为图 11-3b 所绘的类型, 图中变形  $d\theta$  由方程(6-41)给出:

$$d\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1) dx}{h}$$

其中  $h$  为梁的高度,  $T_2$  为下表面的温度,  $T_1$  为上表面的温度。于是, 在这些条件下, 我们得到

$$\Delta = \int \frac{M_V \alpha(T_2 - T_1) dx}{h} \quad (11-9)$$

在此方程中, 当梁的顶部纤维缩短, 而下部纤维伸长时,  $d\theta$  设为正, 如图 11-3b 所示。因此, 在相同的情况下也需把弯矩  $M_V$  取为正; 这意味着当梁的顶部产生压缩时,  $M_V$  为正。

**乘积积分的计算** 当计算方程(11-4)中的积分时, 我们经常要处理材料性质和横截面尺寸自元件一端到另一端为常数的元件。因此, 刚度  $EA$ ,  $EI$ ,  $GA/\alpha_s$  和  $GJ$  可以提到积分号外边, 其余所有的积分均为乘积形式, 譬如:

$$\int M_V M_L dx \quad (11-10)$$

表 11-1  $\int_0^L M_U M_V dx$  之值

$M_U$	$M_V$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
		$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{L}{2} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{2} M_1 M_3$	$\frac{2L}{3} M_1 M_3$	$\frac{2L}{3} M_1 M_3$
		$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (M_1 + 2M_2) M_3$	$\frac{L}{6} (1 + \frac{a}{L}) M_1 M_3$	$\frac{L}{6} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} M_1 M_3$
		$\frac{L}{6} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (2M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{6} (1 + \frac{b}{L}) M_1 M_3$	$\frac{L}{6} M_1 M_3$	$\frac{L}{6} M_1 M_3$
		$\frac{L}{6} M_1 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} M_1 (3M_3 + M_4) + \frac{L}{6} M_2 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} (1 + \frac{b}{L}) M_1 M_3 + \frac{L}{6} (1 + \frac{a}{L}) M_1 M_4$	$\frac{L}{6} M_1 (M_3 + 2M_4)$	$\frac{L}{6} M_1 (M_3 + M_4)$
		$\frac{L}{6} (1 + \frac{C}{L}) M_1 M_3$	$\frac{L}{6} (1 + \frac{d}{L}) M_1 M_3 + \frac{L}{6} (1 + \frac{C}{L}) M_2 M_3$	对 $c \leq a$ ; $\frac{L}{3} M_1 M_3 - \frac{L(a-c)^2}{6ac} M_1 M_3$	$\frac{L}{3} (1 + \frac{cd}{L^2}) M_1 M_3$	$\frac{L}{3} (1 + \frac{cd}{L^2}) M_1 M_3$
		$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{3} (1 + \frac{ab}{L^2}) M_1 M_3$	$\frac{8L}{15} M_1 M_3$	$\frac{8L}{15} M_1 M_3$
		$\frac{L}{4} M_1 M_3$	$\frac{L}{12} (M_1 + 3M_2) M_3$	$\frac{L}{12} (1 + \frac{a}{L} + \frac{a^2}{L^2}) M_1 M_3$	$\frac{L}{5} M_1 M_3$	$\frac{L}{5} M_1 M_3$

注: 所有附图曲线均为二次抛物线, 其顶点用黑点表示之。

这些乘积积分必须就每根元件的全长计算，然后再将所有元件的计算值加起来。对于任一特定元件，乘积中的每个量（譬如  $M_G$  或  $M_L$ ）均为沿元件轴线度量的距离  $s$  的函数，具体地说，此量可能沿其长度为常数，可能沿其长度线性变化，也可能为高次函数，譬如二次或三次。当进行计算时，为了节省时间，可将这些乘积积分预先计算好，并将其结果列成表格备用。最常见的函数乘积积分摘要汇编列于表 11-1 中。该表虽然是以  $M_G$  和  $M_L$  的函数项表示的，但是它显然也可用任何其它函数来代替，譬如  $V_G$  和  $V_L$  或者  $T_G$  和  $T_L$ 。该表的使用说明将在下面某些例题中给出。

**例题 1** 图 11-4a 所示桁架在节点  $A$  承受载荷  $P$  和  $2P$ 。假设桁架所有元件均为棱柱形，并具有相同的轴向刚度  $EA$ 。试用单位载荷法计算该桁架节点  $B$  的水平变位和竖直变位。

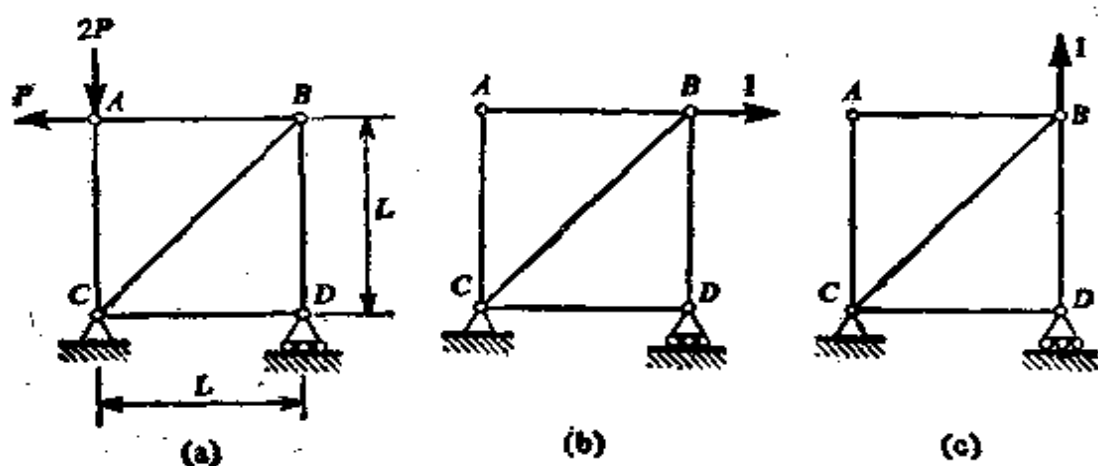


图 11-4. 例题 1. 用单位-载荷法求桁架的变位。

因为载荷仅作用在节点上，所以每根元件的轴向力沿其整个长度为常数。因此，我们可使用方程 (11-5) 确定需求的变位，其计算列入表 11-2 中，该表前两列标志桁架各元件及其长度。通过图 11-4a 所示桁架的静力平衡，分析所得的轴向力  $N_L$  列于表格第三列（拉力为正值）。

为了求出节点  $B$  的水平变位  $\delta_H$ ，我们在结构的  $B$  点处引入一个水平单位载荷（见图 11-4b）。由这个单位载荷产生的轴向力  $N_G$  列于该表的第四列。然后，计算每根元件的乘积  $N_G N_L L$  并求和（第 5 列）。用  $EA$  去除这个结果便得需求的位移：

$$\delta_H = -3.828 \frac{PL}{EA}$$

表 11-2 例题 1 的计算

(1) 杆	(2) 长度	(3) $N_L$	(4) $N_U$	(5) $N_U N_L L$	(6) $N_U$	(7) $N_U N_L L$
AB	L	P	0	0	0	0
AC	L	-2P	0	0	0	0
BD	L	P	-1	-PL	1	PL
CD	L	0	0	0	0	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$-2.828PL$	0	0
				<u><math>-3.828PL</math></u>	<u><math>PL</math></u>	

式中的负号意味着变位是沿单位载荷相反的方向, 亦即, 该变位向左。

可以使用相同的步骤来求节点 B 的垂直变位  $\delta_v$ , 其相应的单位载荷(取向上为正)绘于图 11-4c, 对此受载情况下的轴向力  $N_U$  列于该表的第 6 列。在最后一列中, 计算其乘积  $N_U N_L L$  并求和。最后, 用  $EA$  去除其和, 得

$$\delta_v = \frac{PL}{EA}$$

因为这些结果为正, 我们得知, 由载荷  $P$  和  $2P$  在节点 B 处产生的竖直变位是向上的。

在此例中, 为简单起见我们假设所有杆件均具有相同的横截面面积。如果不是这样, 就需要在表 11-2 中插入附加列, 以列出其面积。然后我们应计算  $N_U N_L L/A$  以取代第 5 和第 7 列中计算的  $N_U N_L L$ 。当各元件可能有不同的弹性模量时, 可以提供同样的方便。

**例题 2** 在本例题中, 我们再次研究图 11-14a 所示的受载桁架。然而, 我们不求节点的变位, 而将确定一根元件的转角和两个节点之间距离的变化。首先让我们假设欲求的是元件 AB 的转角。一般来说, 相应于转角的单位载荷为一个单位力偶。对于本例题, 单位力偶由作用在元件 AB 两端相等且相反的两个力组成, 如图 11-5a 所示。每个力都等于该杆的长度除此单位力偶。容易看出, 相应于该力偶的位移为杆 AB 逆时针方向的转动。我们只需注意, 在桁架发生虚变形的过程中, 由这两个力所做的外功为

$$W_{ext} = \frac{1}{L}(\delta_a) + \frac{1}{L}(\delta_b) = \frac{1}{L}(\delta_a + \delta_b) \quad (d)$$

此处  $\delta_a$  为节点 A 的向下变位, 而  $\delta_b$  为节点 B 的向上变位。方程(d)中各项的单位都是一致的, 因为每个“1”代表单位力偶并具有长度乘以力的单位。当用元件长  $L$  去除两个变位  $\delta_a$  和  $\delta_b$  之和时, 就得元件 AB 的转角:

$$\theta_{ab} = \frac{\delta_a + \delta_b}{L} \quad (e)$$

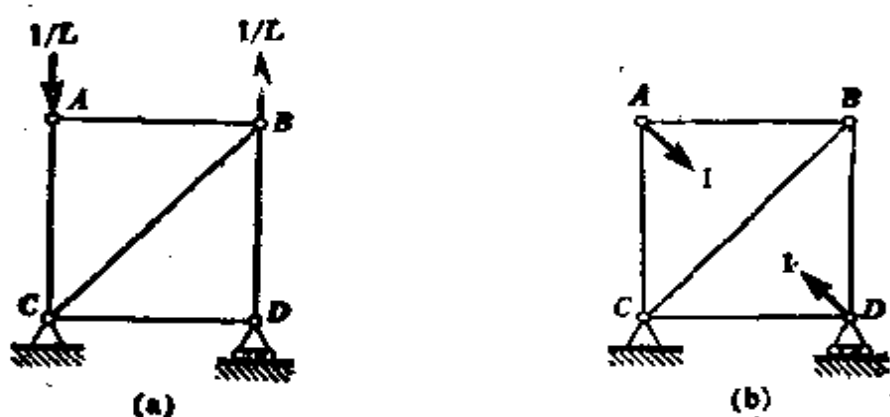


图 11-5. 例题 2.

正如所料, 根据方程(d)和(e)、我们得到

$$W_{ext} = 1 \cdot \theta_{ab} \quad (f)$$

因此, 利用以图 11-5a 所示两个力的形式的单位力偶能使我们求出转角  $\theta_{ab}$ .

表 11-3. 例题 2 的计算

(1) 元 件	(2) 长 度	(3) $N_L$	(4) $N_U$	(5) $N_U N_L L$	(6) $N_U$	(7) $N_U N_L L$
AB	L	P	0	0	$-1/\sqrt{2}$	$-0.707PL$
AC	L	$-2P$	$-1/L$	$2P$	$-1/\sqrt{2}$	$1.414PL$
BD	L	P	$1/L$	P	$-1/\sqrt{2}$	$-0.707PL$
CD	L	0	0	0	$-1/\sqrt{2}$	0
CB	$\sqrt{2} L$	$-\sqrt{2} P$	0	0	1	$-2PL$
				<u><math>3P</math></u>		
					<u><math>-2PL</math></u>	

表 11-3 给出了本例题的计算。前三列与表 11-2 的相同, 但是第 4 列包含了图 11-5a 所示载荷下的轴向力  $N_U$ 。第 5 列给出乘积  $N_U N_L L$ , 根据这些项之和我们得到

$$\theta_{ab} = \frac{3P}{EA}$$

式中正的结果意味着杆件逆时针转动。这样, 由载荷  $P$  和  $2P$  产生的欲求转角已经求出。按照类似的步骤, 可以确定其它任一元件的转角。

下一步, 我们还要研究图 11-4a 桁架另一类型的位移, 即两节点之间距离的变化。假设要确定节点  $A$  和  $D$  沿其连线的相对平移  $\delta_{ad}$ 。相应的单位

载荷为由两个相等且相反并沿  $AD$  线作用的单位力所组成(见图 11-5b), 桁架中产生的轴向力  $N_{\sigma}$  列于表 11-3 的第 6 列, 乘积  $N_{\sigma}N_{\varepsilon}L$  列于第 7 列, 因此, 节点  $A$  和  $D$  的相对平移为

$$\delta_{\sigma\varepsilon} = -\frac{2PL}{EA}$$

式中的负号表示点  $A$  和  $D$  之间距离增大(亦即, 它与单位载荷的指向相反)。

**例题 3** 在本例题中, 我们将研究图 11-4a 所示桁架的杆件之一发生均匀温度变化的效应。假设元件  $BD$  的温度均匀地增长一个量值  $\Delta T$ , 致使该元件的长度增加  $\alpha L(\Delta T)$ 。为了计算桁架节点的变位, 我们必须使用方程 (11-8)。然而, 由于只有桁架的一根杆件因温度变化而引起长度变化, 所以在方程(11-8)中给出的求和号将只有一项。

当求由于温度变化而引起节点  $B$  的水平变位时, 我们使用图 11-4b 中所示的单位载荷并从表 11-2 的第 4 列取  $N_{\sigma}$ 。于是,  $BD$  杆中的力为  $N_{\sigma} = -1$ , 而水平变位为

$$\delta_B = -\alpha L(\Delta T)$$

式中负号意味着此变位向左。用类似的步骤我们可以很容易地计算这个桁架其他任一节点的变位。

**例题 4** 在本例题中, 我们转向研究梁的位移。假设要确定在部分跨长上作用集度为  $q$  的均布载荷的棱柱形悬臂梁自由端  $B$  处的挠度  $\delta$  和转角  $\theta$ (见图 11-6a)。为此, 我们将使用仅考虑弯曲变形效应形式的单位载荷方程(见方程 11-6)。

如果我们将左端  $A$  处取为坐标原点, 并向右度量  $x$ 。那么由载荷产生的弯矩方程为

$$\begin{aligned} M_L &= -\frac{q}{2}(a-x)^2 & 0 \leq x \leq a \\ M_L &= 0 & a \leq x \leq L \end{aligned}$$

此处正弯矩使梁顶部受压。

相应于挠度  $\delta$  的单位载荷示于图 11-6b 中。此载荷引起如下的弯矩:

$$M_{\sigma} = -1(L-x) \quad 0 \leq x \leq L$$

将  $M_{\sigma}$  和  $M_L$  代入方程(11-6), 然后积分, 我们便得出  $B$  点的向下挠度:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^a (-1)(L-x) \left(-\frac{q}{2}\right) (a-x)^2 dx = \frac{qa^3}{24EI} (4L-a)$$

求转角  $\theta$  的步骤是类似的, 只是单位载荷变为一个单位力偶, 如图 11-6c 所示。由于此载荷产生的弯矩为

$$M_{\sigma} = -1 \quad 0 \leq x \leq L$$

单位载荷方程变为



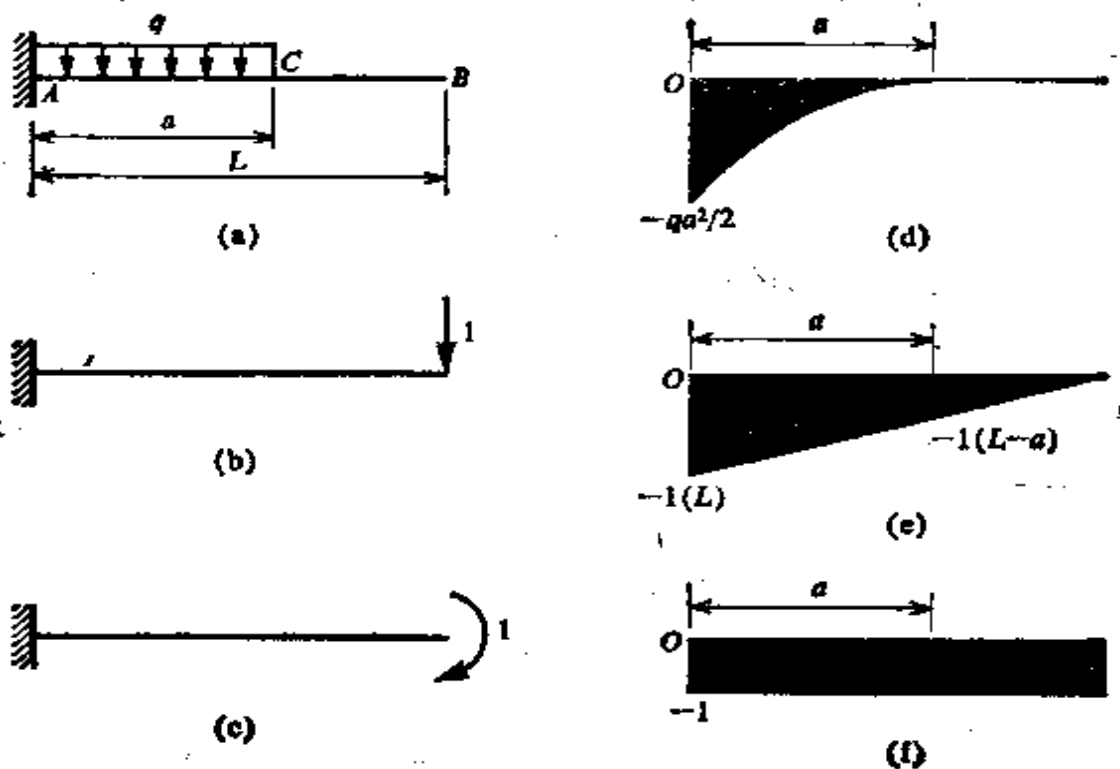


图 11-6. 例题 4. 用单位载荷法求梁的位移。

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^a (-1) \left( -\frac{q}{2} \right) (a-x)^2 dx = \frac{qa^3}{6EI}$$

此结果中的正号表明, 角  $\theta$  具有和单位载荷相同的指向(顺时针)。

求位移的另一种方法是使用乘积积分表 11-1. 载荷  $q$  的弯矩图为一沿距离  $a$  的二次抛物线, 如图 11-6d 所示. 在梁的这一相同区段内单位载荷的弯矩图分别为梯形和矩形(见图 11-6e 和 f). 根据表 11-1 引用抛物线和梯形的情况, 我们便得到其乘积积分之值:

$$\frac{a}{12} [-1(L-a) - 3(L)] \left( -\frac{qa^2}{2} \right) = \frac{qa^3}{24} (4L-a)$$

现用  $EI$  除之, 我们得出与前面相同的挠度  $\delta$  表达式. 另外, 由抛物线和矩形\*的情况得到

$$\frac{a}{12} (-4) \left( -\frac{qa^2}{2} \right) = \frac{qa^3}{6}$$

此式导致先前的转角  $\theta$  的结果. 乘积积分表与弯矩图联用, 通常比先写弯矩方程然后积分要迅速些.

**例题 5** 跨长为  $L$ 、外伸臂长度为  $b$  的梁  $ABO$  (图 11-7a) 承受温度变化, 使梁顶面温度为  $T_1$ 、而下表面温度为  $T_2$ . 试计算梁外伸臂端点的挠度  $\delta_c$ .

\* 注意, 根据表 11-1 取  $M_1 = -M_2$  的梯形, 可得出矩形的情况。

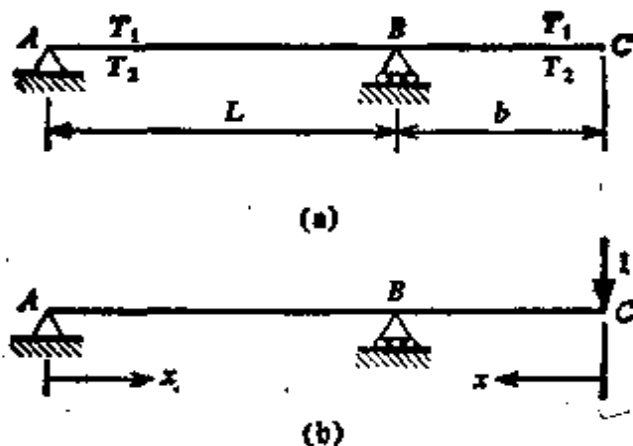


图 11-7. 例题 5. 具有温差的梁。

相应于  $\delta_c$  的单位载荷绘于图 11-7b 中。此单位载荷在 AB 区段内引起的弯矩为

$$M_G = -1\left(\frac{b}{L}\right)x \quad 0 \leq x \leq L$$

此处  $x$  为自 A 向右度量的距离。此外，在 BC 区段内的弯矩为

$$M_G = -1(x) \quad 0 \leq x \leq b$$

此处  $x$  自 C 向左度量。在该梁的两部分中，弯矩  $M_G$  均为负，因为它使梁的顶部受拉。

已知弯矩后，现在我们便可直接代入方程 (11-9) 并求得挠度：

$$\delta_c = \int_0^L -1\left(\frac{b}{L}\right)(x) \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx + \int_0^b -1(x) \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx$$

由此

$$\delta_c = \frac{\alpha b(T_1 - T_2)(L + b)}{2h}$$

此处  $h$  为梁的高度，而  $\alpha$  为温度膨胀系数。如果算出的  $\delta_c$  为负，那么其挠度实际向上。每当  $T_2$  大于  $T_1$  时，这种情况就会存在。

**例题 6** 图 11-8a 所示的平面刚架在点 A 固支，并在自由端 C 处承受竖直载荷  $P$ 。元件 AB 和 BC 在 B 处刚性连接，并且刚架的两个元件弯曲刚度为常数。试确定 C 点的水平变位  $\delta_H$ 、竖直挠度  $\delta_V$  及转角  $\theta$ 。

由载荷  $P$  产生的弯矩  $M_L$  绘于图 11-8b 中，此处的弯矩图画在元件的受拉边。相应于 C 点的水平变位、竖直挠度和转角的单位载荷示于该图的后三部分中。在每种情况下，也表示出了完整的  $M_G$  弯矩图， $M_G$  仍画在元件的受拉边。

已知弯矩后，现在我们就可通过积分（见方程 11-6）或使用列于表 11-1 中的乘积积分公式求得挠度。后一种方法对本例题似乎比较简单。例如，为求  $\delta_H$ ，我们从图 11-8c 取得  $M_G$ 、从图 11-8b 取得  $M_L$ 。然后使用表 11-1 我

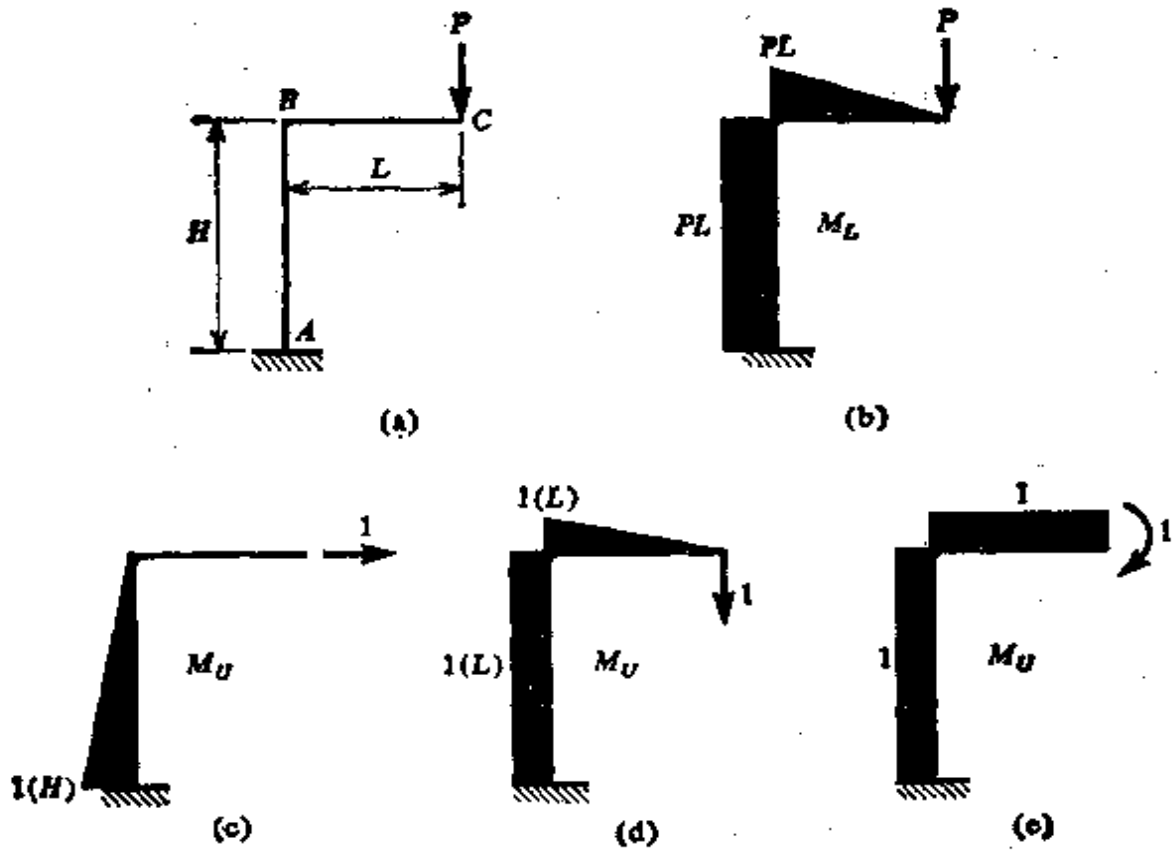


图 11-8. 例题 6 和 7. 平面刚架的位移.

们得到:

$$\frac{H}{2} (1)(H)(PL)$$

用  $EI$  去除此表达式, 得出  $O$  点的水平变位:

$$\delta_H = \frac{PLH^2}{2EI}$$

根据图 11-8b 和 d, 以类似的方式求得竖直挠度. 对于元件  $BC$ , 我们有两个三角形的情况, 而对于元件  $AB$  有两个矩形的情况, 因此, 根据表 11-1, 我们求出

$$\frac{L}{3} (1)(L)(PL) + \frac{H}{2} (2L)(PL) = \frac{PL^3}{3} + PL^2H$$

竖直挠度为

$$\delta_V = \frac{PL^2(L+3H)}{3EI}$$

最后, 使用图 11-8b 和 e 以及表 11-1, 我们求得

$$\frac{L}{2} (PL)(1) + \frac{H}{2} (1)(2PL) = \frac{PL^2}{2} + PLH$$

由此

$$\theta = \frac{PL(L+3H)}{2EI}$$

从而, 需求的刚架位移已被确定。

**例题 7** 参照在例题 6 中所述的平面刚架, 让我们确定元件中的轴向变形对位移  $\delta_H$ 、 $\delta_V$  和  $\theta$  的附加贡献。假设两个元件的轴向刚度  $EA$  为常数。

借助方程(11-5)可求出附加位移。在此方程中的轴向力  $N_L$  是由图 11-8a 所示载荷  $P$  引起的, 只在元件  $AB$  中有这种力  $N_L = -P$ 。为了求出水平变位  $\delta_H$ , 我们由图 11-8c 取轴向力  $N_U$ 。仅在元件  $BC$  中有这种力  $N_U = 1$ 。所以, 我们得出结论, 轴向变形的存在并不影响水平变位  $\delta_H$ 。

为了求得竖直挠度  $\delta_V$ , 我们由图 11-8d 观察到, 单位载荷引起的唯一轴向力为元件  $AB$  中的  $N_U = -1$ 。因此, 由于轴向变形产生的竖直挠度(根据方程 11-5)为

$$\sum \frac{N_U N_L L}{EA} = \frac{(-1)(-P)(H)}{EA} = \frac{PH}{EA}$$

可将此量值加在例题 6 已求得的结果上, 给出节点  $O$  总的竖直挠度:

$$\delta_V = \frac{PL^2(L+3H)}{3EI} + \frac{PH}{EA}$$

当把数值代入此表达式后, 通常就会发现, 表示轴向变形效应的最后一项与第一项相比是非常小的。基于这个原因, 在分析平面刚架时, 通常的作法是, 只考虑弯曲变形, 完全略去轴向变形的贡献。

为完成此例题, 现在我们转到计算转角  $\theta$  上, 并观察出, 其相应的单位载荷(图 11-8e)在元件中不产生轴向力。因此, 轴向变形的存在不影响  $\theta$ 。

**例题 8** 曲杆  $AB$  的中心线形状为半径  $R$  的四分之一圆, 如图 11-9a 所示。该杆在  $A$  处固支, 并在自由端  $B$  处承受竖直载荷  $P$ 。试求节点  $B$  的水平变位  $\delta_H$  的表达式。

求曲杆位移的单位载荷方程可写为下列一般形式

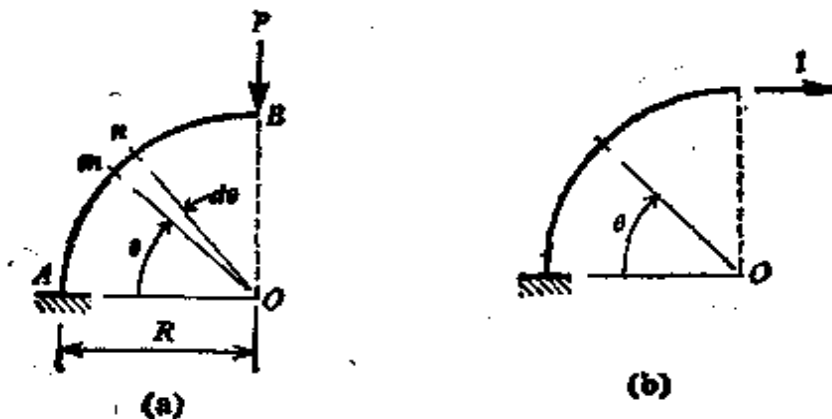


图 11-9. 例题 8. 曲杆的挠度。

$$\Delta = \int \frac{M_{\sigma} M_L ds}{EI} \quad (11-11)$$

此处  $ds$  等于  $Rd\theta$ , 是杆微段  $mn$  的长度. 假设该杆与半径相比是很薄的, 因此可以使用原先对直杆弯曲所导出的上述公式\*.

载荷  $P$  产生的弯矩  $M_L$  为  $M_L = -PR \cos \theta$ , 此处假设正弯矩使曲杆的外边缘受压. 另外, 由于水平单位载荷(图 11-9b)产生的弯矩为  $M_{\sigma} = -R(1 - \sin \theta)$ . 将  $M_{\sigma}$  和  $M_L$  代入方程(11-11)并积分, 我们得出

$$\delta_H = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (-R)(1 - \sin \theta)(-PR \cos \theta) R d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

这样,  $B$  点的水平变位就由单位载荷法求出.

#### 11.4 梁的剪切挠度

虚功原理和单位载荷法为求解由剪力效应所引起的梁挠度提供了极好的方法. 在前面第 6.11 节所述关于剪切挠度的讨论中, 我们利用了包含剪切系数  $\alpha_s$  项在内的挠曲线微分方程. 此剪切系数等于梁中性轴上的剪应力与平均剪应力之比(例如, 对于矩形梁  $\alpha_s = 3/2$ ). 这同一个剪切系数出现在单位载荷法的一般方程中(方程 11-4). 使用微分方程的方法或使用方程(11-4)求得的剪切挠度都是近似的, 这至少有两个原因: 第一, 因为挠度基于中性轴处的剪应变, 所以它们都没有计及剪应变沿整个梁高的变化; 第二, 因为挠度基于仅为纯弯情况下所导出的弯曲理论. 后一个缺陷只能用较精确的弹性理论方法来弥补, 它的一些结果已在第 6.11 节给出; 前一个缺陷可利用虚功原理(见方程 11-1)并对梁的整个体积积分求得内功来排除. 正如我们现在将要详细说明的那样, 这种方法得出一个比剪切系数  $\alpha_s$  更为精确的因子.

求梁挠度的单位载荷法建立在虚功原理基础之上, 它需要得到外功和内功两者的表达式. 因为单位载荷为结构上唯一的载荷, 所以外功的表达式如上节方程(a)给出那样为  $W_{\text{ext}} = 1 \cdot \Delta$ . 在此方程中,  $\Delta$  代表由梁上实际载荷产生的欲求挠度, 而这个 1 代表相应于该挠度的单位载荷.

\* 厚曲杆的弯曲在《高等材料力学》中叙述.

内虚功是当梁的应力(此应力是由单位载荷引起的)移过由实际载荷产生的变形时所完成的功。以前,我们考虑过四种可能的应力合力——轴向力、弯矩、剪力和扭矩。因为现在我们的注意力局限于梁的剪切变形,所以我们将省略轴向力和扭矩的影响。另外,在以前的推导中,我们取应力合力并将它们当中的每一个乘以梁微段的适当变形量以求得内虚功,以此方式,我们得到上节的方程(b)。然而,现在我们将直接讨论梁中的应力并将沿梁的整个体积积分以求得内虚功。

让我们研究从承受单位载荷的梁内切出的一个尺寸为  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  的微元(图 11-10a)。在此微元的侧面上作用着由单位载荷产生的弯矩  $M_V$  和剪力  $V_V$  而引起的正应力  $\sigma$  和剪应力  $\tau$ (图 11-10b)。这些应力可根据弯曲和剪切公式计算(方程 5-10 和 5-18):

$$\sigma = \frac{M_V y}{I} \quad \tau = \frac{V_V Q}{Ib}$$

当使用单位载荷法时,施加到微元上的虚变形选得与实际载荷引起的变形相同。这些变形包括弯矩  $M_L$  引起的伸长(图 11-10c)及剪力  $V_L$  引起的剪切畸变(图 11-10d)。与这些变形有关的拉应变  $\epsilon$  和剪应变  $\gamma$  为

$$\epsilon = \frac{M_L y}{EI} \quad \gamma = \frac{V_L Q}{GIb}$$

因此,作用在微元上的应力  $\sigma$  和  $\tau$  的内虚功为

$$\begin{aligned} dW_{\text{int}} &= (\sigma dy dz) (\epsilon dx) + (\tau dy dz) (\gamma dx) \\ &= \frac{M_V M_L y^2}{EI^2} dx dy dz + \frac{V_V V_L Q^2}{GI^2 b^2} dx dy dz \end{aligned}$$

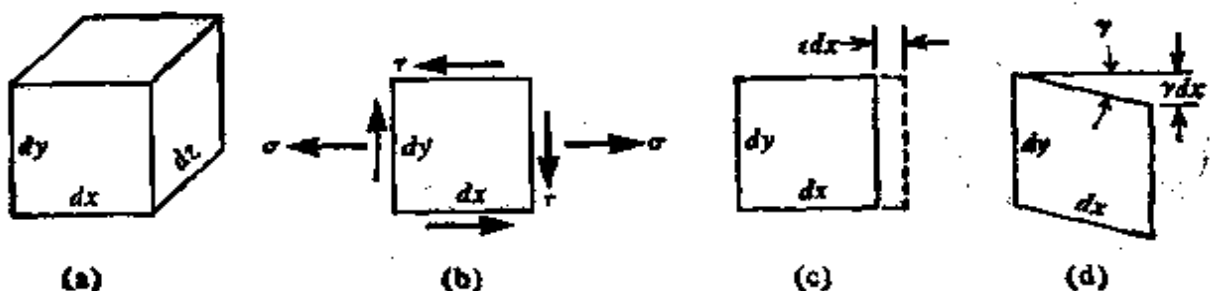


图 11-10.

沿梁整个体积积分上式,即求得总内功,因而,

$$W_{\text{int}} = \int \frac{M_U M_L y^2}{EI^2} dx dy dz + \int \frac{V_U V_L Q^2}{GI^2 b^2} dx dy dz$$

若注意到在给定横截面上的下列各量:  $M_U$ 、 $M_L$ 、 $V_U$ 、 $V_L$ 、 $E$ 、 $G$  和  $I$  均为常数,则该表达式可予以简化。因此,我们可将上面每项积分为一个对横截面的积分和一个沿梁轴的积分公式如下:

$$W_{\text{int}} = \int_L \frac{M_U M_L}{EI^2} \left[ \int_A y^2 dy dz \right] dx + \int_L \frac{V_U V_L}{GI^2} \left[ \int_A \frac{Q^2}{b^2} dy dz \right] dx \quad (a)$$

此处符号  $L$  和  $A$  分别表示该积分是沿梁的长度  $L$  和横截面  $A$  进行的。可以看出,上述方程中的第一个方括号项为惯性矩,它是横截面的特性。第二个方括号项也是只取决于梁横截面的尺寸,所以,方便的作法是,定义一个新的横截面特性  $f_s$ , 称为剪切型式因子。此量定义如下:

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \quad (11-12)$$

式中  $dA = dy dz$  表示梁横截面上的面积微元。型式因子是一个无量纲的量,可对每根梁的特定形状进行计算,后面将举例说明之。分别用  $I$  和  $f_s I^2/A$  取代方程(a)中的两个方括号项,我们得到内虚功的最终表达式:

$$W_{\text{int}} = \int \frac{M_U M_L dx}{EI} + \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA}$$

最后,使外功等于内功,便可求得挠度  $\Delta$  的单位载荷方程:

$$\Delta = \int \frac{M_U M_L dx}{EI} + \int \frac{f_s V_U V_L dx}{GA} \quad (11-13)$$

其中单位载荷已从该方程中除去(正如推导方程 11-3 时所作的那样)。方程(11-13)可用来求出既考虑弯矩又考虑剪力效应时梁的挠度。该方程右边的第一项与以前所得的弯曲项相同(见方程 11-4)。然而,第二项与以前所得的剪切项略有不同,差别在于用型式因子  $f_s$  代替剪切系数  $\alpha_s$ 。因而,梁的剪切刚度现在定义为  $GA/f_s$ 。而不是  $GA/\alpha_s$ 。

对于每种特定形状的横截面，其剪切型式因子必须用方程(11-12)计算。例如，如果横截面为宽度  $b$  和高度  $h$  的矩形(见图 5-12)，那么一次矩  $Q$  的表达式(见第 5.3 节方程 d)为：





$$Q = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

此外，对于矩形梁， $A/I^2$  这个量等于  $144/bh^5$ 。所以，型式因子为

$$f_s = \frac{144}{bh^5} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{4} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)^2 b dy_1 = \frac{6}{5}$$

用类似的方式可以计算其它截面的型式因子。例如，实心圆截面的型式因子为  $10/9$ ，而薄管截面为 2。对于 I 字梁或盒式梁，我们可以假设剪应力沿腹板高度均匀分布并近似等于腹板面积除以剪力(见第 5.3 节及图 5-14)。此假设引出如下结论：这类梁的型式因子为  $A/A_{web}$ ，其典型值在 2 至 5 范围内。表 11-4 给出了几种剪切系数  $\alpha_s$  值和型式因子  $f_s$  值的对比。

表 11-4 剪切系数  $\alpha_s$  与型式因子  $f_s$

截面	$\alpha_s$	$f_s$	
	矩 形	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
	圆 形	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$
	薄 管	2	2
	I 字或盒式截面	$\frac{A}{A_{web}}$	$\frac{A}{A_{web}}$

作为确定梁剪切挠度的一个例子，让我们用单位载荷法(方程 11-13)求承受均匀载荷的简支架的中点挠度。若从梁的左支座度量坐标距离  $x$ ，那么由于实际载荷产生的弯矩和剪力表达式为

$$M_x = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad V_x = \frac{qL}{2} - qx$$



此处  $L$  为梁的长度, 而  $q$  为均布载荷的集度, 作用在梁中点处的单位载荷产生如下的弯矩和剪力:

$$M_V = \frac{1(x)}{2} \quad V_V = \frac{1}{2} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

将以上各量代入方程(11-13), 得出梁中点挠度的下列表达式:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} \frac{x}{2} \left( \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) dx + \frac{2f_s}{GA} \int_0^{L/2} \frac{1}{2} \left( \frac{qL}{2} - qx \right) dx \\ &= \frac{5qL^4}{384EI} \left( 1 + \frac{48f_s EI}{5GAL^2} \right) \end{aligned} \quad (11-14)$$

除了用型式因子  $f_s$  代替剪切系数  $\alpha_s$  之外, 这个结果和先前用微分方程(见方程 6-46)解出的结果一致。

如果将单位载荷法用于中点处作用一集中载荷  $P$  的简支梁情形, 我们得到中点的挠度:

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \left( 1 + \frac{12f_s EI}{GAL^2} \right) \quad (11-15)$$

上式与方程(6-50)相同, 只是用  $f_s$  取代  $\alpha_s$ 。对于自由端有集中载荷  $P$  的悬臂梁, 用单位载荷法得出的自由端挠度为

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{f_s PL}{GA} \quad (11-16)$$

注意, 在用单位载荷法得出最后这一结果时, 我们并未对固定端支承的详情作任何假设。然而, 方程(11-16)右边的第二项与前面第 6.11 节中的特定情况是一致的, 那时假定固定端处的边界条件是能够自由地出现翘曲, 而位于中性轴处的微元其竖直边仍保持竖直(见第 6.11 节方程  $j$ )。对于固定端的其他情况, 先前的方法给出不同的结果。因此, 当使用单位载荷法时, 存在着有关固定端边界条件的隐含假设\*。

**剪切应变能** 在承受剪应力  $\tau$  的梁的微元内(见图 11-10b 和 d), 剪切应变能等于  $u dx dy dz$ , 此处  $u$  为单位体积的剪切应变能。单位体积的应变能为  $u = \tau^2/2G$  由方程(1-23a)给出, 因此, 我们可以用剪应力  $\tau$  表示微元的剪切应变能  $dU_s$ , 其表达式如下:

$$dU_s = \frac{\tau^2}{2G} dx dy dz$$

因为剪应力  $\tau$  等于  $VQ/Ib$ , 所以剪切应变能变为

\* 用单位载荷法得出由剪切产生的梁挠度表可在参考文献 6-18 中查到。

$$dU_s = \frac{V^2 Q^2}{2GI^2 b^2} dx dy dz$$

将此表达式对梁的整个体积进行积分, 给出总的剪切应变能,

$$U_s = \int_L \frac{V^2}{2GI^2} \left[ \int_A \frac{Q^2}{b^2} dy dz \right] dx$$

和前面一样, 此处符号  $L$  和  $A$  分别指明这些积分是沿梁的长度和对整个截面进行的. 与方程(11-12)相比表明, 方括号内之项等于  $f_s I^2 / A$ . 所以,  $U_s$  的表达式简化为

$$U_s = \int \frac{f_s V^2 dx}{2GA} \quad (11-17)$$

该方程给出了用剪力  $V$  表示的剪切应变能. 除了用  $f_s$  取代  $\alpha_s$  之外, 它与以前导出的剪切应变能方程(方程 6-54)相符.

一般来说, 在求由剪切产生的梁挠度或计算由剪切产生的应变能时, 使用型式因子  $f_s$  比使用剪切系数  $\alpha_s$  更为可取. 型式因子  $f_s$  很接近于用弹性理论方法得出的较为精确的数值(见方程 6-53).

## 11.5 互等定理

在本节中, 我们将使用应变能的概念导出位移互等定理和功的互等定理. 这些互等定理在许多情况下是有用的, 它们在结构分析中具有重要作用. 此外, 它们体现出应用于所有线弹性结构的某些基本的理论概念.

**位移互等定理** 为了说明这一定理, 让我们取自由端承受集中载荷  $P$  的悬臂梁  $AB$ (图 11-11a)为例. 我们可以很容易地由附录  $D$  的公式求出该梁中点  $O$  的挠度. 此挠度为

$$\delta_{\alpha\alpha} = \frac{5PL^2}{48EI}$$

在上述方程中用于符号  $\delta$  的下标基于如下安排, 第一个下标表示挠度发生的地点, 第二个下标表示载荷作用的地点. 因此, 符号  $\delta_{\alpha\alpha}$  标明由于作用在  $B$  点的载荷所引起的  $O$  点挠度.

现在让我们研究同一根悬臂梁, 承受作用在中点  $O$  的载荷  $P$

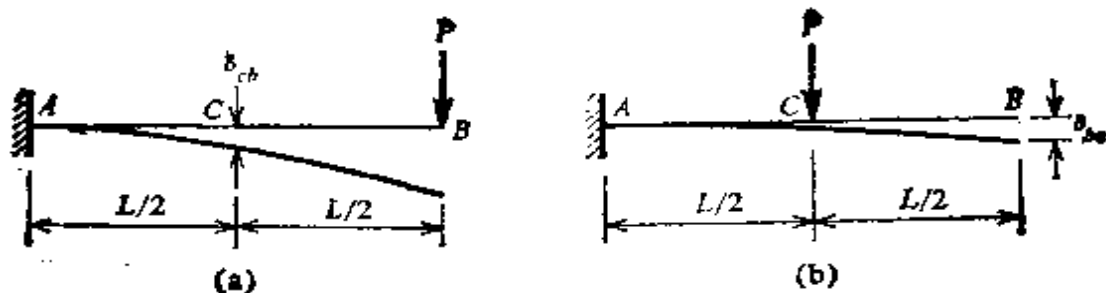


图 11-11. 位移互等定理.

(图 11-11b). 在此情况下, 我们想要求出自由端  $B$  的挠度, 它将由符号  $\delta_{bc}$  表示. 再参考附录  $D$  的公式, 我们求出

$$\delta_{bc} = \frac{5PL^3}{48EI}$$

它等于挠度  $\delta_{cb}$ . 因此, 我们观察到, 作用在  $B$  处的载荷所引起的  $C$  处挠度等于作用在  $C$  处的载荷所引起的  $B$  处挠度. 这种叙述是位移互等定理的一种特殊情况.

为了更为一般地证明此定理, 让我们考虑任一类型的结构, 并假设它承受两种载荷状态. 为方便起见, 将讨论一根简支梁 (见图 11-12), 但对任何其他线性结构也是适宜的. 在第一种加载状态下, 力  $P$  作用在结构上任一点  $A$  处 (图 11-12a), 而在第二种状态下, 同样的载荷  $P$  作用在其他任一点  $B$  处 (图 11-12b). 依据已经描述过的下标符号, 对第一种加载状态,  $A$  点和  $B$  点的挠度分

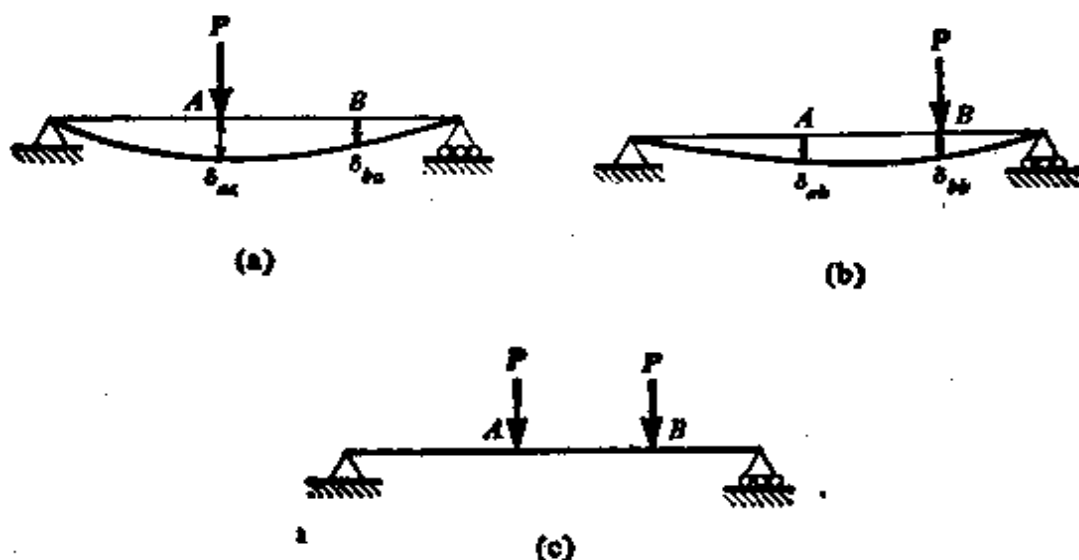


图 11-12. 位移互等定理.

别表示为  $\delta_{aa}$  和  $\delta_{ba}$ 。类似地, 第二种加载状态的挠度表示为  $\delta_{ab}$  和  $\delta_{bb}$ 。

这两根梁的挠度也可以用载荷和位移之间的对应概念来描述(见第 11.3 节)。例如, 挠度  $\delta_{aa}$  和  $\delta_{ab}$  这两者均与图 11-12a 所示的载荷  $P$  对应。为了弄清这一问题, 必须回想一下相应于集中力的位移由该力作用点处的挠度所构成; 同时, 此挠度是按该力的方向度量的。然而, 此挠度并不一定由它相应的力所引起。挠度  $\delta_{aa}$  是由第一种加载状态的力  $P$  引起的, 而  $\delta_{ab}$  是由第二种加载状态的力  $P$  引起的。虽然如此, 两个挠度都相应于图 11-12a 的载荷  $P$ 。类似地, 虽然  $\delta_{ba}$  是由第一种载荷引起的, 而  $\delta_{bb}$  是由第二种载荷引起的, 但是挠度  $\delta_{ba}$  和  $\delta_{bb}$  两者均相应于第二种加载状态的载荷  $P$ 。用来识别位移的这种相应概念在后面的讨论中是非常有用的。

现在回到位移互等定理的推导, 让我们假设两个力同时作用在梁上(图 11-12c)。如果梁的材料是线性弹性的, 而且挠度很小, 我们就可利用叠加原理求得此梁的挠度。相应于作用在  $A$  点处的载荷  $P$  的挠度为  $\delta_{aa} + \delta_{ab}$ , 而相应于作用在  $B$  点处的载荷  $P$  的挠度为  $\delta_{ba} + \delta_{bb}$ 。已知这些位移, 我们就可容易地计算这两个载荷缓慢而同时作用在梁上时所做的功。此功等于梁的总应变能, 根据方程(1-15)求得为

$$U = \frac{1}{2} P(\delta_{aa} + \delta_{ab}) + \frac{1}{2} P(\delta_{ba} + \delta_{bb}) \quad (a)$$

承受两个载荷的梁(图 11-12c)的总应变能与这两个载荷施加的次序无关。因为梁呈线性性态, 所以无论两个载荷同时作用, 或者一个载荷先作用而后再加另一个载荷, 其应变能必定相同。让我们假设首先在  $A$  处施加载荷, 随后再在  $B$  处施加载荷。于是在第一个载荷作用的过程中, 梁的应变能为

$$\frac{1}{2} P\delta_{aa} \quad (b)$$

因为此载荷引起挠度  $\delta_{aa}$ , 如图 11-12a 所示。当作用第二个载荷

时,  $B$  处将有一个等于  $\delta_{bb}$  的附加挠度, 因此, 第二个载荷作的功等于

$$\frac{1}{2} P \delta_{bb} \quad (c)$$

在梁中也聚集了这样多的附加应变能. 然而, 我们不能忽视这样一个事实: 当  $B$  处作用载荷时, 已作用在  $A$  处的载荷  $P$  将要经历一个附加挠度  $\delta_{ab}$ . 由第一个载荷所作的相应功之值为

$$P \delta_{ab} \quad (d)$$

因此也产生了这样多的应变能. 在表达式 (d) 中, 没有二分之一的因子, 因为在发生附加挠度  $\delta_{ab}$  的时间里, 力  $P$  保持常数. 将表达式 (b)、(c) 和 (d) 加起来, 给出依次施加载荷时的总应变能:

$$U = \frac{1}{2} P \delta_{aa} + \frac{1}{2} P \delta_{bb} + P \delta_{ab} \quad (e)$$

这个应变能之值必定与两个载荷同时作用时所产生的应变能之值 (见方程 a) 相同. 令这两个应变能的表达式相等, 则得下列结果:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \quad (11-18)$$

该方程代表位移互等定理, 它可用下列方式陈述:  $B$  点处作用的载荷在  $A$  点处引起的挠度等于  $A$  点处作用的相同载荷在  $B$  点处引起的挠度. 不言而喻, 挠度的正方向与相应载荷的正方向相同.

如果一个载荷是力, 而另一个是力偶, 或者两个载荷均为力偶, 亦可应用位移互等定理. 为了说明前一种可能性, 我们可以再次考虑承受两种载荷状态的简支梁, 只是现在第一种加载状态包含了作用在  $A$  点处的力偶  $M$  (图 11-13). 在第一根梁上相应于  $M$  的位移为转角  $\theta_{aa}$ , 而在第二根梁上相应于  $M$  的位移为转角  $\theta_{ab}$ . 重复与上述推导相同的步骤, 我们得到当两个载荷  $M$  和  $P$  同时作用时, 梁应变能的下列表达式:

$$U = \frac{1}{2} M (\theta_{aa} + \theta_{ab}) + \frac{1}{2} P (\delta_{ba} + \delta_{bb})$$

当先作用力偶  $M$  而后作用力  $P$  时, 应变能为

$$U = \frac{1}{2} M \theta_{aa} + \frac{1}{2} P \delta_{bb} + M \theta_{ab}$$



图 11-13. 位移互等定理.

使这两个应变能的表达式相等, 得出

$$M\theta_{ab} = P\delta_{ba} \quad (11-19)$$

如果载荷  $M$  和  $P$  数值上相等, 则  $\theta_{ab}$  和  $\delta_{ba}$  也将在数值上相等. 所以, 对此情况, 我们可将位移互等定理陈述如下:  $B$  点处作用的集中力在  $A$  点处引起的转角在数值上等于  $A$  点处作用的力偶在  $B$  点处引起的挠度, 只要该力和力偶在数值上相等.

如果作用在结构上的两个载荷均为力偶(图 11-14), 那么我们将求出

$$\theta_{ab} = \theta_{ba} \quad (11-20)$$

在此情况下, 位移互等定理陈述为:  $B$  点处作用的力偶在  $A$  点处引起的转角等于  $A$  点处作用的相同力偶在  $B$  点处引起的转角.



图 11-14. 位移互等定理.

前述位移互等定理的推导均参照一根简支梁, 已经解释过, 这纯粹是为了举例说明问题. 使用任何一种其它类型的结构, 譬如桁架, 刚架, 甚至是块体, 都是可以的, 因为此种推导仅建立在应变能的考虑和叠加原理的基础之上. 因此, 该定理是相当通用的, 它适用于需要考虑任何种类变形的结构, 不论是轴向变形、弯曲变形、剪切变形或扭转变形. 在使用这个定理时, 唯一的限制是叠加原理必须成立, 这就要求结构是线性弹性的. 如果材料服从虎克

定律, 并且变形足够小, 以致所有的计算均可按结构未变形的几何关系进行, 那么上述条件就得以满足\*。

**功的互等定理** 此定理远比位移互等定理更为普遍, 位移互等定理作为一种特殊情况包括在内。为了导出此定理, 让我们研究对于叠加原理适用的任一线性弹性体(图 11-15)。如同上段所说明的那样, 此物体可以代表梁, 桁架, 刚架或其它类型结构。必须考虑结构上的两种加载状态。在第一种状态下(图 11-15a), 有  $m$  个载荷  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , 而在第二种状态下(图 11-15b)有  $n$  个载荷  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ 。在第一种状态中, 对应于各个载荷  $P$  和  $Q$  的挠度记作  $\delta$ , 以其下标识别每个挠度所对应的特定载荷。例如,  $\delta_{Q_2}$  表示相应于力  $Q_2$  的挠度。由此可见, 该挠度必须沿着力  $Q_2$  的方向度量, 虽然这并不意味着  $Q_2$  所作用的点  $p$ (见图 11-15a)仅沿  $Q_2$  方向移动。点  $p$  也可以有垂直于  $\delta_{Q_2}$  方向的位移分量, 但这个分量不在我们讨论之列, 因为它不与  $Q_2$  对应。

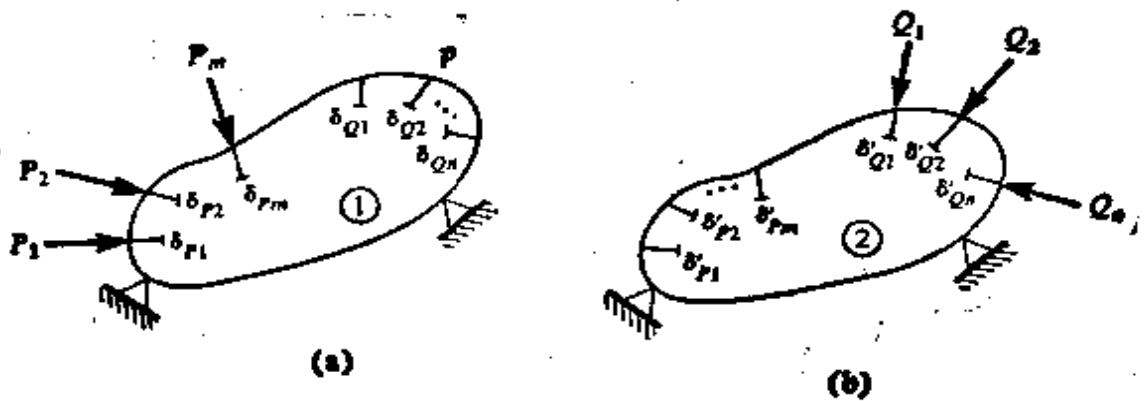


图 11-15. 功的互等定理。

在第二种加载荷状态下(图 11-15b), 情况是类似的; 载荷  $Q$  引起的位移有些相应于力  $P$ , 有些相应于力  $Q$ 。所有这些位移均用符号  $\delta'$  表示, 而其下标仍然标明相应于挠度的力。

为了导出功的互等定理, 我们将利用推导位移互等定理时所用过的有关应变能的相同概念。如果两个载荷系  $P$  和  $Q$  同时作用到物体上, 那么总应变能(等于诸力所做之功)为

$$U = \frac{1}{2} P_1(\delta_{P1} + \delta'_{P1}) + \frac{1}{2} P_2(\delta_{P2} + \delta'_{P2}) + \dots + \frac{1}{2} P_m(\delta_{Pm} + \delta'_{Pm}) \\ + \frac{1}{2} Q_1(\delta_{Q1} + \delta'_{Q1}) + \frac{1}{2} Q_2(\delta_{Q2} + \delta'_{Q2}) + \dots + \frac{1}{2} Q_n(\delta_{Qn} + \delta'_{Qn}) \quad (f)$$

\* 位移互等定理首先由麦克斯韦得出, 并发表于 1864 年(见参考文献 11-1)。通常称它为麦克斯韦互等定理。

此应变能必定和我们先加整个载荷系  $P$ , 后加整个载荷系  $Q$  所得的应变能相同。当单独作用诸载荷  $P$  时, 应变能为

$$\frac{1}{2} P_1 \delta_{p_1} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{p_2} + \cdots + \frac{1}{2} P_m \delta_{p_m} \quad (g)$$

当作用第二组载荷时, 由于各  $Q$  力所作之功, 我们得到下列数量的应变能:

$$\frac{1}{2} Q_1 \delta'_{q_1} + \frac{1}{2} Q_2 \delta'_{q_2} + \cdots + \frac{1}{2} Q_n \delta'_{q_n} \quad (h)$$

此外, 由于各  $P$  力所做之功, 我们得到下列数量的应变能:

$$P_1 \delta'_{p_1} + P_2 \delta'_{p_2} + \cdots + P_m \delta'_{p_m} \quad (i)$$

所以, 总应变能(对于先加载荷  $P$ , 而后加载荷  $Q$  的情况)为表达式 (g)、(h) 和 (i) 的总和。使这个总和等于载荷同时作用时的应变能(见方程 f), 得出

$$P_1 \delta'_{p_1} + P_2 \delta'_{p_2} + \cdots + P_m \delta'_{p_m} = Q_1 \delta_{q_1} + Q_2 \delta_{q_2} + \cdots + Q_n \delta_{q_n}$$

或 
$$\sum_{j=1}^m P_j \delta'_{p_j} = \sum_{j=1}^n Q_j \delta_{q_j} \quad (11-21)$$

该方程左边的表达式为诸力  $P$  和其相应的由各力  $Q$  引起的位移乘积之和。出现在右边的是, 诸力  $Q$  和其相应的由各力  $P$  引起的位移乘积之和。此方程代表功的互等定理, 陈述如下:

第一种加载状态下的诸力沿其在第二种加载状态下的相应位移运动时所做的功, 等于第二种加载状态下的诸力沿其在第一种加载状态下的相应位移运动时所做的功。

功的互等定理既适用于力, 也适用于力偶。例如,  $P_1$  可以代表力, 也可以代表力偶, 于是相应的位移  $\delta_{p_1}$  分别或为挠度或为转角。

虽然在功的互等定理的推导中, 我们将两组力画成作用在结构的不同点处(见图 11-15), 但并不一定要这样做。例如, 力  $Q_1$  可以作用在物体上的某一个力  $P$  的同一作用点上, 甚至可以作用在同一方向并具有相同的大小。换句话说, 对于诸力  $P$  或诸力  $Q$  的数目, 它们的作用位置或它们的方向都没有加以限制。由于这种普遍性, 功的互等定理在结构力学中是一个非常有用的原理。和位移互等定理的情形一样, 功的互等定理仅对那些可用叠加原理的结构才成立\*。

容易看出, 位移互等定理是功的互等定理的特殊情况。例如, 我们可将功的互等定理用于图 11-12a 和 b 所示的两种加载情况, 于是我们得出  $P\delta_{ab} = P\delta_{ba}$ , 它立刻给出位移互等定理的方程(11-18)。类似地, 将该定理用于图 11-13 所绘的两种加载情况, 给出  $M\theta_{ab} = P\delta_{ba}$ , 它与方程(11-19)相同。

\* 功的互等定理是由 E. 贝蒂(Betti) (参考文献 11-5) 和 L. 瑞利(Rayleigh) (参考文献 11-6 至 11-8) 提出的, 因此, 通常称它为贝蒂-瑞利互等定理。



最后，将功的互等定理用于图 11-14 所示的两种加载状态，我们可以得到方程(11-20)。

## 11.6 柔度法

在本节和下节中，介绍柔度法和刚度法的基本概念。在许多复杂结构类型的分析中，这两种方法都是基本的，但是为了用最简单的方式说明其概念，我们将仅就梁、平面刚架和平面桁架进行讨论。这两种方法均已在第 1.6 节用于简单轴向载荷问题时叙述过，而且柔度法在第 7.3 节有关静不定梁的分析中也讨论过。

用柔度法分析结构的第一步是判断结构的静不定度，它为力（反力或应力合力）的个数超过由静力平衡方程能够求出的个数。例如，一根两跨连续梁（见图 7-6a）为一度静不定，因为有一个反力超过了能单从静力学求得的反力个数。类似地，图 7-7a 所示的固定端梁为二度静不定，因为有两个反力超过了能从静力学求得的反力个数。

判断静不定度之后，我们必须选择同样数目的静余力，它们可以是反力，也可以是应力合力。这些量可视为多余（或过剩）力，在静平衡下，不需要这些力去维持一个不动的结构。再次参看图 7-6a 所示的两跨梁，我们看出，如果把中间反力作为多余力，并取掉中间支座而将该力从结构上移去，那么将仍然留下一个稳定结构，如图 7-6b 所示。或者，对图 7-7a 的梁，我们可取掉阻止转动的约束从而移去两端的力偶，该保留结构（图 7-7b）还能够承受载荷。放松多余力（通过取去适当的约束）所留下的静定结构称为放松结构\*。用柔度法分析静不定结构的关键是计算所选择的多余力，因为一旦求出它们，其他所有的力均可根据静力平衡方程求出。

为了确定多余力，需要计算放松结构由实际载荷和未知多余力两者所引起的位移。在后一种情况下，我们必须把多余力想像为作用在放松结构上的载荷，然后我们还需求出相应于多余力的

\* 放松结构亦称基本结构。

位移。通过施加单位值的多余力,会使这一步变得简便,与单位约束力对应的放松结构的位移就称为柔度。已知柔度和由实际载荷产生的位移,我们就可使用协调条件和叠加原理列出联立方程,这类方程称为协调方程或叠加方程,有多少个未知多余力,就有多少个这样的方程。因此,可通过解这些方程求出多余力,此后,所有其他反力和应力合力均可根据静力学求出。

如果我们现在举一个具体例子(见图 11-16),就能更清楚地理解上述关于柔度法的讨论。该图(a)部分所表示的梁为二度静不定,因此,放松两个多余反力就可使之成为静定梁。比如,如果将支座  $B$  和  $C$  处的竖直反力选为多余力,并移去相应的支座,那么放松结构变为图 11-16b 所示的悬臂梁。选择另外两个多余力也是可能的。假设选择支座  $A$  处的反力矩和支座  $B$  处的竖直反力,那么必须解除  $A$  处的转动约束和  $B$  处的支承,所得的放松结构则为一根简支梁,如图 11-16c 所示。其他可能的放松结构示于图 11-16d 和 e。在这两种情况中,对第一种情况是把  $A$  处的反力

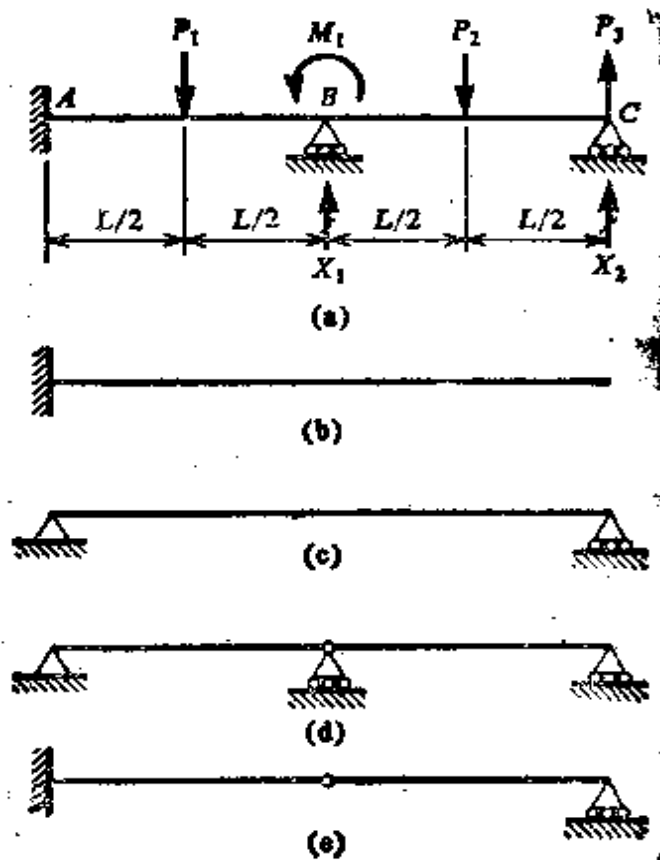


图 11-16. 柔度法的实例。

矩和  $B$  处的内弯矩选为多余力。因此,放松结构在  $A$  处无转动约束, 在  $B$  处无抵抗弯矩的约束; 其中后一种情况是通过在梁的点  $B$  处加一个铰链而得。最后一种放松结构(图 11-16e)是把  $B$  处的反力和弯矩选为多余力时得出的。在图 11-16 中绘出的所有放松结构均为静定且不可动的, 这是因为我们对多余力作了适当的选择。相反, 要注意, 我们不能选择  $B$  处的弯矩和  $C$  处的反力为多余力, 因为这样以来, 相应的放松结构就会成为可动的, 而且不能承受所有的载荷。

现在继续研究该例题, 让我们选择支座  $B$  和  $C$  的反力为多余力, 并在图 11-16a 中用符号  $X_1$  和  $X_2$  来表示。一般地说, 我们将要使用符号  $X$  作为多余力以表明它们代表的是未知量。相应于这一多余力所选择的放松结构为图 11-16b 所示的悬臂梁, 现在我们必须求出由实际载荷和多余力两者在梁中引起的一些位移。为了设法准确地判断放松结构中哪些位移是需要的, 我们注意到, 协调方程必须代表这样一种条件: 在实际的梁中没有与反力  $X_1$  和  $X_2$  相对应的位移(换句话说, 图 11-16a 所示的梁, 在点  $B$  和点  $C$  处没有竖直挠度)。因而, 我们看出, 要计算的放松结构中的位移就是对应于所选择的多余力的位移, 在目前情况下, 它们就是  $B$  和  $C$  点的竖直挠度。

图 11-16a 例题中的载荷假设为三个集中力( $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$ )和一个力偶  $M_1$ 。这些载荷作用在图 11-17 所示的放松结构上, 它们分别产生相应于多余力  $X_1$  和  $X_2$  的位移  $D_{1P}$  和  $D_{2P}$ 。这些位移的下标记号如下: 第一个下标表示与位移相应的多余力, 第二个下标指明该位移是由结构上的载荷所引起的。在图 11-17 中, 位移

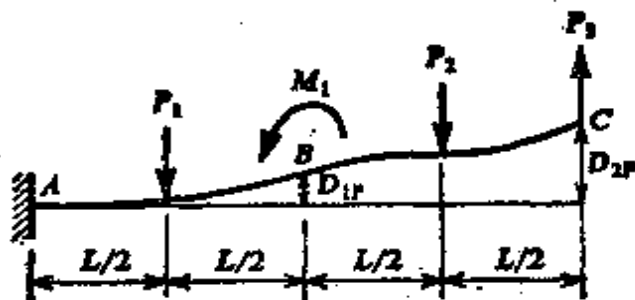


图 11-17. 由作用在放松结构上的载荷引起的位移。

$D_{1P}$  和  $D_{2P}$  以它们所假设的正方向示出，方向向上。一般地说，位移的正方向必须总是与位移相应的多余力的正方向相同。

其次，我们必须考虑在放松结构中由多余力引起的位移。为了求得这些量，分别将多余力  $X_1$  和  $X_2$  的单位值作用在放松结构上。对于图 11-18a 所示的  $X_1=1$  的情况，将有对应于  $X_1$  的挠度  $F_{11}$  和对应于  $X_2$  的挠度  $F_{21}$ 。这些挠度称为柔度影响系数，或简称柔度，因为它们表明了单位载荷值的影响。其下标依照通常的编排，第一个下标表示与挠度相应的多余力，第二个下标表示起因。因此，柔度  $F_{11}$  为由  $X_1$  的单位值引起的相应于  $X_1$  的位移，而  $F_{21}$  为由  $X_1$  的单位值引起的相应于  $X_2$  的位移。对于图 11-18b 所示的  $X_2=1$  的情况，柔度  $F_{12}$  为由  $X_2$  的单位值引起的相应于  $X_1$  的位移，而  $F_{22}$  为由  $X_2$  的单位值引起的相应于  $X_2$  的位移。所有这四个柔度系数在图中均以它们的正方向表示。因为该放松结构为一根静定梁，我们可以认为，不仅柔度，而且还有实际载荷引起的位移  $D_{1P}$  和  $D_{2P}$  均可容易地用单位载荷法算出。

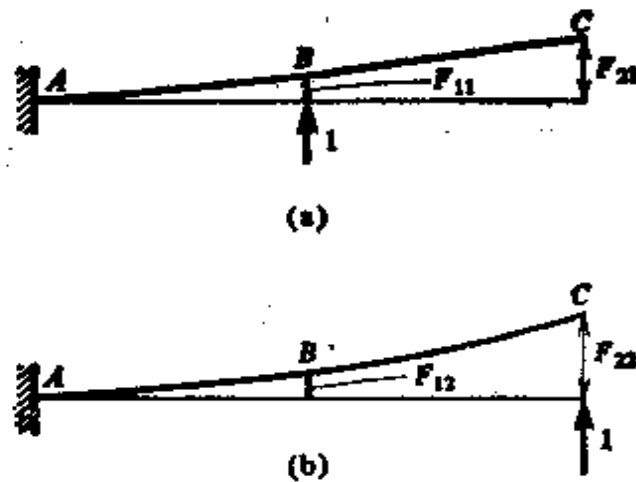


图 11-18. 柔度。

现在可以写出表示实际梁在支座  $B$  和  $C$  处的协调条件的方程。  $B$  或  $C$  的合成竖直挠度由三部分组成：由于实际载荷产生的挠度；由于  $X_1$  产生的挠度；以及由于  $X_2$  产生的挠度。所有这三个位移叠加得出总位移，其值为零。于是，我们得到下列两个协调方程：

$$D_{1P} + F_{11}X_1 + F_{12}X_2 = 0$$

$$D_{2P} + F_{21}X_1 + F_{22}X_2 = 0$$

联解这两个方程可求出多余力  $X_1$  和  $X_2$ , 因为方程中所有其他项均为已知量. 当求解这两个方程时, 由实际载荷引起的位移  $D_{1P}$  和  $D_{2P}$  将被移至右端, 因此该方程呈现下列形式:

$$F_{11}X_1 + F_{12}X_2 = -D_{1P} \quad (11-22)$$

$$F_{21}X_1 + F_{22}X_2 = -D_{2P}$$

当把方程写成这一标准形式时, 我们看出, 柔度就是未知多余力的系数, 而包含载荷的所有项均出现在其右端. 因此, 如果梁上的载荷发生改变, 只有协调方程的右边会改变. 柔度只和结构的性质有关, 而不受载荷系变化的影响, 意识到这一点是非常重要的. 另外, 注意到下面这种柔度之间的互等关系也是很重要的:

$$F_{12} = F_{21} \quad (11-23)$$

由位移互等定理(方程 11-18)立即可以得出这个方程.

为使上例有一个完整的解答, 让我们假设图 11-16a 所示的梁在其两跨上均具有不变的刚度  $EI$ , 并设梁上的载荷如下:

$$P_1 = 2P \quad M_1 = PL \quad P_2 = P \quad P_3 = P$$

于是由这些载荷产生的放松结构的挠度(见图 11-17)用单位载荷法求得:

$$D_{1P} = \frac{13PL^3}{24EI} \quad D_{2P} = \frac{97PL^3}{48EI}$$

这两个挠度均向上, 这正是两个多余力的正方向, 因此冠以正号. 图 11-18 所示的柔度具有下列数值:

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad F_{12} = F_{21} = \frac{5L^3}{6EI} \quad F_{22} = \frac{8L^3}{3EI}$$

将以上各量代入方程(11-22), 然后用  $48EI/L^3$  乘这两个方程, 给出

$$16X_1 + 40X_2 = -26P$$

$$40X_1 + 128X_2 = -97P$$

对多余力  $X_1$  和  $X_2$  求解, 得到下列结果:

$$X_1 = \frac{69P}{56} \quad X_2 = -\frac{8P}{7}$$

负的  $X_2$  意味着这个反力向下. 以上述方式求出多余力之后, 根据静力平衡方程可求得其余的反力以及所有应力合力.

柔度法可以很容易地加以扩展，为求任意多个多余力提供可能性。当有更多的未知多余力时，有关上述梁的例题中所讨论过的全部概念和步骤仍然有效。为明确起见，让我们假设结构有  $n$  个静不定度，因此要选择  $n$  个多余力  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 。于是，当实际载荷作用在放松结构上时，将产生相应于  $n$  个多余力的  $n$  个位移。这些位移记为  $D_{1p}, D_{2p}, \dots, D_{np}$ 。根据多余力的性质，此位移可为平移（如果多余力为反力），或者，它可以是转角（如果多余力为反力矩），或者它也可能为两个微元之间的相对转动（如果多余力为一个弯矩），或者它可能为两个相邻横截面之间的相对横向平移（如果多余力为梁中的剪力）。在桁架中，多余力可能为诸杆之一的轴向力，因而相应的位移为该元件相邻截面之间的相对平移（沿该杆的轴向度量）。

其次，我们把多余力的单位值当成载荷作用在放松结构上，而对每个这样的载荷我们都确定出相应于所有  $n$  个多余力的位移。例如，当结构上有一个  $X_1=1$  的载荷，我们求出相应于  $X_1$  的位移  $F_{11}$ ，相应于  $X_2$  的位移  $F_{21}$ ，相应于  $X_3$  的位移  $F_{31}$  等等。然后再将载荷  $X_2=1$  置于结构上，并求出  $F_{12}, F_{22}, F_{32}, \dots, F_{n2}$ 。对所有  $n$  个单位载荷均依此方式继续下去，我们就可得到  $n^2$  个柔度。自然，根据位移互等定理我们知道，会有许多对相等的柔度，例如  $F_{12}=F_{21}, F_{13}=F_{31}, F_{23}=F_{32}$  等等。一般说来，我们可以写出下列柔度互等关系：

$$F_{ij} = F_{ji} \quad (11-24)$$

这个方程陈述为：相应于多余力  $X_i$  而由多余力  $X_j$  的单位值所引起的位移等于相应于多余力  $X_j$  而由多余力  $X_i$  的单位值所引起的位移。

分析的下一步是列出协调方程。在原结构中，相应于每一个多余力都将有一个位移，我们用  $D_1, D_2, \dots, D_n$  表示这些位移。通常这些位移为零，如同图 11-16a 例题中的情况。然而，如果多余力为反力，并假设相应于该反力的支承约束经历一个位移，那么在此情况下，位移  $D$  将不为零。例如，在上述问题中，支座  $B$  或支座

$O$  可能会有一个已知的平移(或向上,或向下)。利用叠加原理,我们可将实际位移  $D_1, D_2, \dots, D_n$  表示为由载荷产生的位移和由多余力产生的位移之和。因此,协调方程为

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{1p} + F_{11}X_1 + F_{12}X_2 + \dots + F_{1n}X_n \\ D_2 &= D_{2p} + F_{21}X_1 + F_{22}X_2 + \dots + F_{2n}X_n \\ &\dots\dots \\ D_n &= D_{np} + F_{n1}X_1 + F_{n2}X_2 + \dots + F_{nn}X_n \end{aligned} \quad (11-25)$$

当求方程(11-25)的各个位移时,必须使用一致的符号约定;具体地说,每个位移当它具有和其相应的多余力的正方向相同的方向时必须当成正的。方程(11-25)可重新排列,将所有的  $D$  项置于右端,而将未知的多余力置于左端,于是方程变为求解多余力的标准形式。

本节我们将注意力局限于承受载荷的结构,但若要在分析中包括其他效应,如温度变化,这在概念上并没有什么困难。这些其他的效应在放松结构中产生位移,可把它们与载荷引起的诸位移加在一起并入协调方程。

由于叠加原理是柔度法以及下节所述的刚度法的基础,因此在这两节中只讨论具有线性弹性性态的结构\*。柔度法亦称力法,因将力作为方程中的未知量,由于该方程的性质,有时也称它为协调法\*\*。

**例题1** 本例题用柔度法并以内弯矩为多余力说明连续梁的分析。梁  $ABCD$  共有三跨(见图 11-19a),在  $AB$  跨上作用有集度为  $q$  的均布载荷,而在  $BC$  跨和  $CD$  跨上作用两个集中力  $P$ 。因为该结构为两度静不定,所以必须选择两个多余力。在此例中,选择了梁支座  $B$  和  $C$  处的弯矩。在  $B$  和  $C$  处插入铰链,可将这两个弯矩从梁中移去,从而产生出由三根简支梁组成的放松结构(图 11-19b)。多余弯矩以  $X_1$  和  $X_2$  表示,也示于图中。每个多余力

\* 用能量法分析非线性结构在第 11.8 至 11.13 节中讨论。

\*\* 柔度法由麦克斯韦在 1864 年和莫尔在 1874 年首先提出(见参考文献 11-1 至 11-13),因此也称它为麦克斯韦-莫尔方法。此方法已有很大的发展并得到广泛的应用。有关它的详细资料可在结构分析教科书中找到,譬如参考文献 11-14 至 11-19。

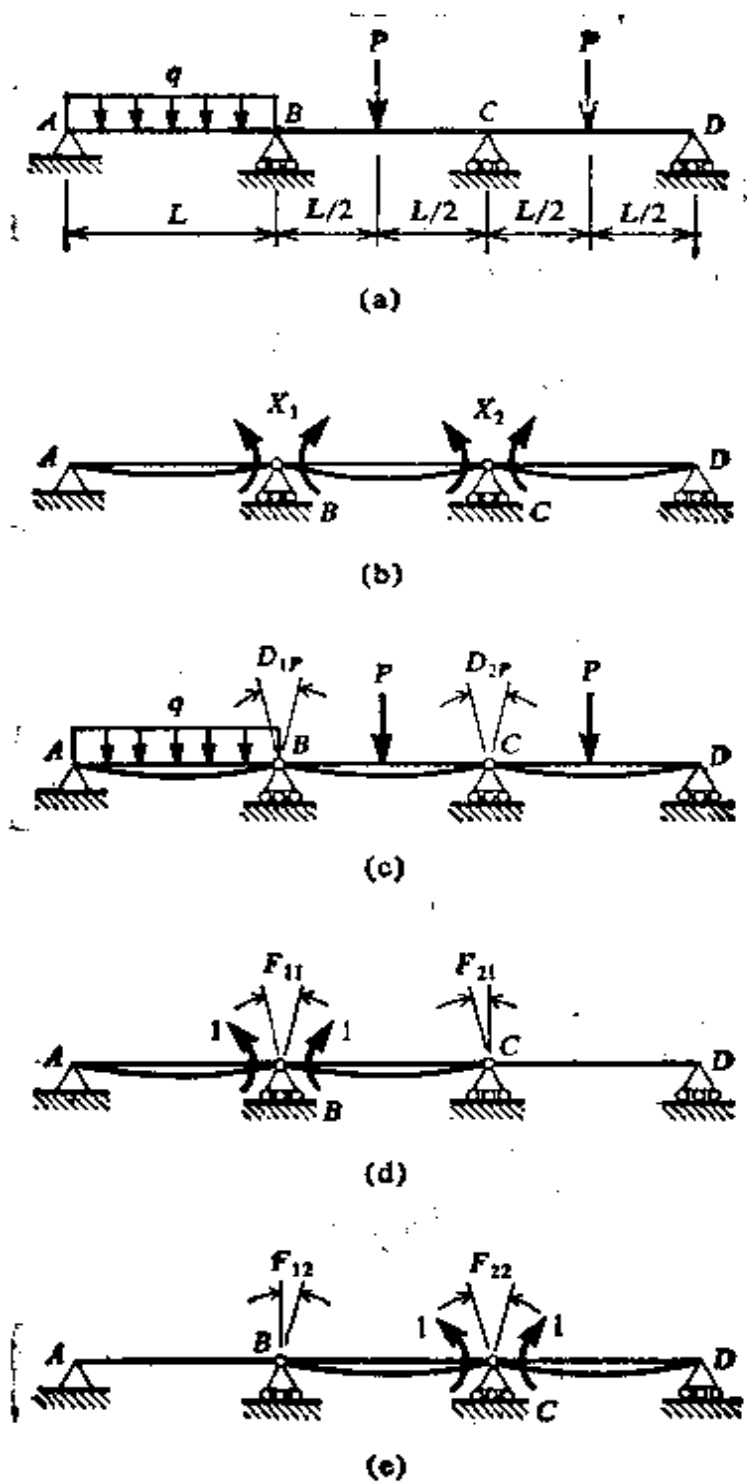


图 11-19. 例题 1. 柔度法

由两个力偶所组成，在结构的每个相连跨上作用一个力偶。例如，多余力  $X_1$  由作用在梁  $AB$  上的逆时针力偶和作用在梁  $BC$  上的顺时针力偶所组成。多余力的正方向相应与使梁的顶部产生压缩的弯矩方向。因为每个多余力由两个力偶组成，所以相应于多余力的放松结构位移由两个转角之和组成，在每个相连跨上有一个转角。例如，相应于  $X_1$  的位移由元件  $AB$  在  $B$  端



的逆时针转动加上元件  $BC$  在  $B$  端的顺时针转动所组成。

分别相应于  $X_1$  和  $X_2$  并由作用在放松结构上的载荷所引起的位移  $D_{1p}$  和  $D_{2p}$  示于图 11-19c 中。因为在元件  $AB$  的  $B$  端由均布载荷引起的逆时针转动为  $qL^3/24EI$ ，而在元件  $BC$  的  $B$  端由载荷  $P$  引起的顺时针转动为  $PL^2/16EI$ ，因此位移  $D_{1p}$  为

$$D_{1p} = \frac{qL^3}{24EI} + \frac{PL^2}{16EI}$$

以类似的方式，我们求出位移  $D_{2p}$  为

$$D_{2p} = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{PL^2}{16EI} = \frac{PL^2}{8EI}$$

其次必须求梁的柔度。为此目的，在图 11-19d 和 e 中示出作用在放松结构上的  $X_1$  和  $X_2$  的单位值。在该图中还表示了四个柔度。例如，柔度  $F_{11}$  为  $B$  点处的两个转角之和；一个是在  $AB$  跨上，另一个是在  $BC$  跨上。然而，柔度  $F_{21}$  仅等于  $BC$  跨单独的转角，因为  $CD$  跨的转角为零。类似的说明也适用于图 11-19e 所示的柔度  $F_{12}$  和  $F_{22}$ 。现在，要写出这些不同柔度系数的公式就是一件简单的事情了：

$$F_{11} = \frac{L}{3EI} + \frac{L}{3EI} = \frac{2L}{3EI} \quad F_{22} = \frac{L}{3EI} + \frac{L}{3EI} = \frac{2L}{3EI}$$

$$F_{12} = F_{21} = \frac{L}{6EI}$$

然后，我们可将位移  $D_{1p}$  和  $D_{2p}$  以及各柔度代入协调方程（方程 11-22），该方程变为

$$\frac{2L}{3EI} X_1 + \frac{L}{6EI} X_2 = -\frac{qL^3}{24EI} - \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\frac{L}{6EI} X_1 + \frac{2L}{3EI} X_2 = -\frac{PL^2}{8EI}$$

联解上式求多余弯矩  $X_1$  和  $X_2$ ，得

$$X_1 = -\frac{qL^2}{15} - \frac{PL}{20} \quad X_2 = \frac{qL^2}{60} - \frac{7PL}{40}$$

因为  $X_1$  为负值，所以我们得知，原梁中  $B$  点处的弯矩使梁的顶部产生拉伸。弯矩  $X_2$  可能为正，也可能为负，这取决于载荷的相对大小。求得中间支座处的这些弯矩之后，我们就可用静力学求出梁中其余的弯矩以及剪力和反力。

**例题 2.** 图 11-20a 所示平面桁架，在节点处用销钉连接，并承受两个竖直力  $P$  及一个水平力  $P/3$ 。桁架的竖直杆和水平杆的轴向刚度为  $EA$ ，而对角杆的刚度为  $2EA$ 。该桁架为两度静不定，这可从以下事实看出：从具备稳定又静定结构的观点来说，桁架中的两根杆，譬如对角杆  $AE$  和  $EC$  是多余

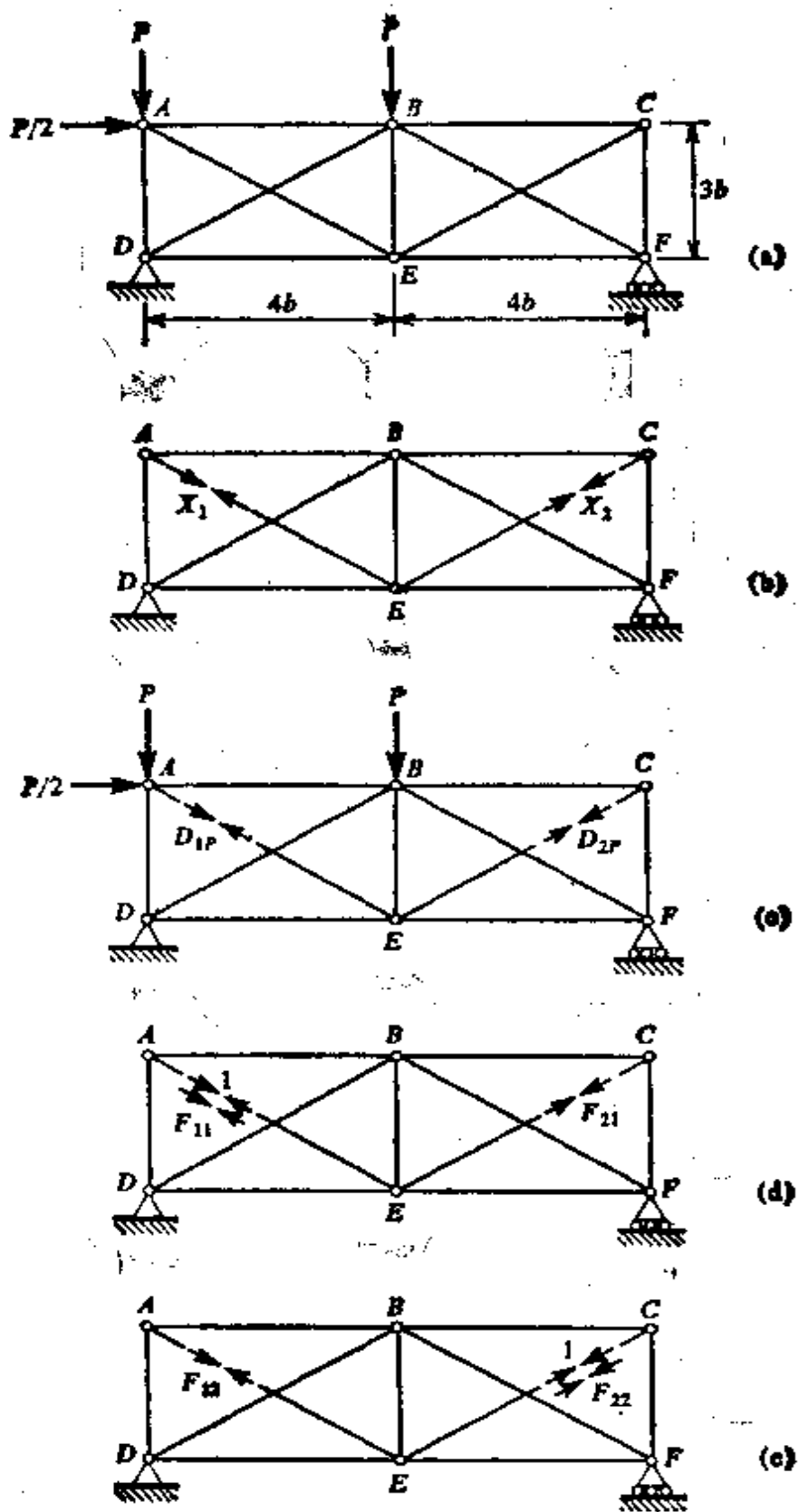


图 11-20. 例题 2. 柔度法。

的。因此可以分别选择这根杆的轴向力(以拉为正)为多余力  $X_1$  和  $X_2$ 。自然, 其他杆的力也可选为多余力, 而且每种选择都会给出一个不同的放松结构。在此情况下, 我们在杆两端之间的某处将它们切开, 以放松杆  $AE$  和杆  $EO$  中的轴向力。被切开的杆必须留作放松结构的一部分(见图 11-20b), 因为它们的变形必须包括在放松结构的位移计算之中。

每个多余力均由作用在放松结构上的一对力所组成(图 11-20b), 正好象上述例题中表示多余弯矩的一对力偶一样(见图 11-19b)。它们所假设的正方向使元件产生拉力, 如果最后的结果表明,  $X_1$  或  $X_2$  为负, 那只是意味着元件中真实的轴向力为压力。

相应于  $X_1$  或  $X_2$  的位移为杆件两个切开端的相对位移。当两个切开端彼此移近时, 位移的方向是多余力的正方向, 因此这样的位移也为正。当两个切开端彼此移开因而张开缺口时, 位移为负。

下一步分析是确定放松结构中由于实际载荷引起的相对于  $X_1$  和  $X_2$  的位移。这些位移,  $D_{1p}$  和  $D_{2p}$ , 在图 11-20c 中用成对的箭头来表示(这种表示位移的方式被用来取代画出桁架移动后位形, 那种位形会构成一幅复杂的图面)。这些位移的计算为单位载荷法的一种直接应用(见第 11.3 节), 在此仅给出最后的结果:

$$D_{1p} = -\frac{401}{480} \frac{Pb}{EA} \quad D_{2p} = -\frac{2783}{480} \frac{Pb}{EA}$$

负号意味着杆的切开端彼此移开。

在图 11-20d 和 e 中标明了桁架的柔度。在该图的部分(d)中,  $X_1$  的单位值作为载荷作用在放松结构上, 而在该图的部分(e)中,  $X_2$  的单位值作为载荷而作用。和前面一样, 柔度为放松结构上相应于  $X_1$  和  $X_2$  的位移。例如,  $F_{21}$  为相应于多余力  $X_2$  并由  $X_1$  的单位值引起的位移。当使用单位载荷法求这些柔度时, 重要的一点是要认识到切开的杆件是放松结构的一部分而不能忽略。因此, 图 11-20d 所示的杆  $AE$  中有载荷  $X_1=1$  产生的等于  $+1$  的轴向力, 当进行单位载荷计算时, 必须计及该力的存在。这些计算给出下列柔度答案:

$$F_{11} = \frac{307}{25} \frac{b}{EA} \quad F_{12} = F_{21} = \frac{27}{25} \frac{b}{EA}$$

$$F_{22} = \frac{307}{25} \frac{b}{EA}$$

协调方程(见方程 11-22)变为

$$\frac{307}{25} \frac{b}{EA} X_1 + \frac{27}{25} \frac{b}{EA} X_2 = \frac{401}{480} \frac{Pb}{EA}$$

$$\frac{27}{25} \frac{b}{EA} X_1 + \frac{307}{25} \frac{b}{EA} X_2 = \frac{2783}{480} \frac{Pb}{EA}$$

由此得

$$X_1 = 0.027 P \quad X_2 = 0.470 P$$

这些结果表明,  $X_1$  和  $X_2$  两者均为拉力。已知这些多余力后, 现在我们就可用静力学求出桁架所有其他杆的轴向力。

**例题 3** 图 11-21a 所示平面刚架在  $A$  处具有固定支承, 在  $C$  处销接支承。节头  $B$  为介于元件  $AB$  和  $BC$  之间的刚性联结, 这两个元件具有相同的弯曲刚度  $EI$  和长度  $L$ 。刚架上的载荷包括作用在元件  $BC$  上集度为  $q$  的均布载荷和作用在节头  $B$  的力偶  $M = 2qL^2$ 。试用柔度法分析此两度静不定的刚架。

在支座  $C$  处的两个反力将被选择为未知多余力  $X_1$  和  $X_2$  (见图 11-21a)。相应的承受实际载荷的放松结构示于该图部分 (b)。这些载荷在点  $C$  处分别产生对应于  $X_1$  和  $X_2$  的挠度  $D_{1p}$  和  $D_{2p}$ 。这两个挠度的正方向用箭头表示在图中, 以避免绘制挠曲后结构的形状。用单位载荷法可求出这两个挠度, 结果如下:

$$D_{1p} = -\frac{3qL^4}{4EI}$$

$$D_{2p} = \frac{11qL^4}{8EI}$$

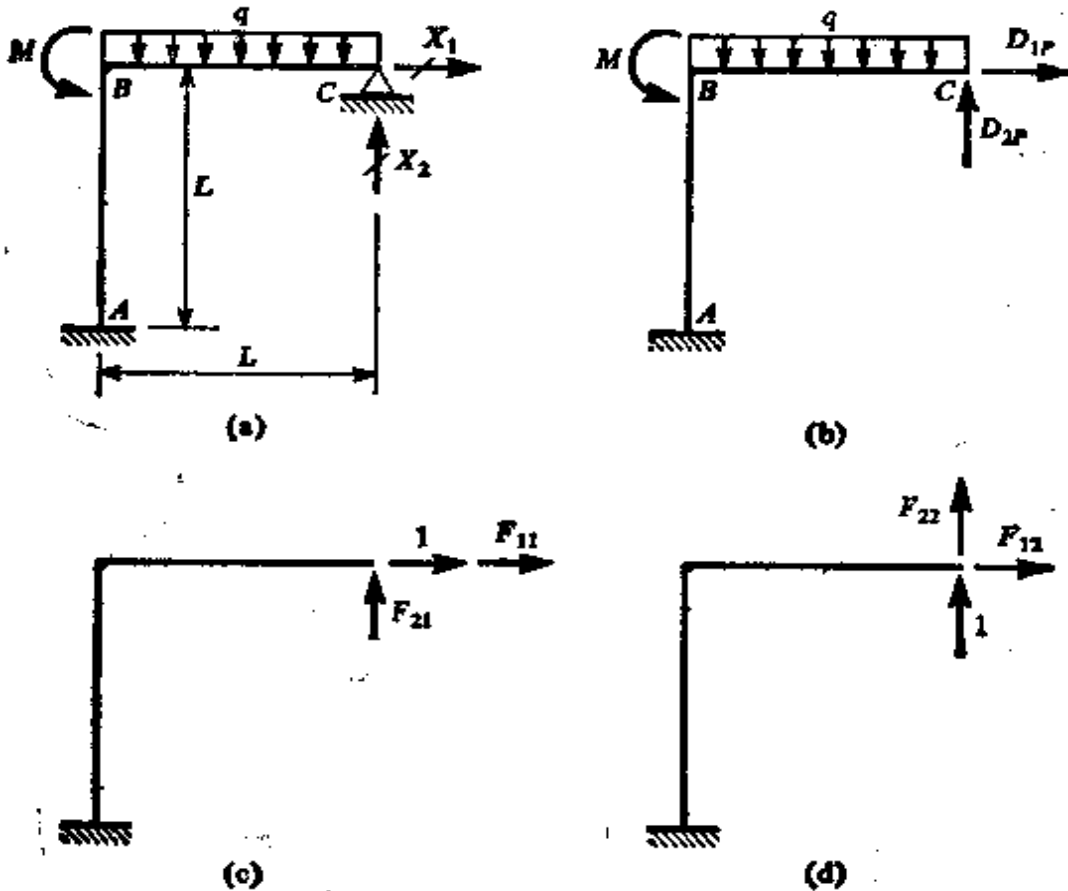


图 11-21. 例题 3. 柔度法。

这些柔度绘于图 11-21c 和 d 中,为简化起见,图中各柔度再次用箭头标明。用单位载荷法求出的这些柔度为

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad F_{12} = F_{21} = -\frac{L^3}{2EI} \quad F_{22} = \frac{4L^3}{3EI}$$

在本例中有些挠度是负的,这是经常出现的情况。作为一般规则,用两个不同的下标标识的柔度,譬如  $F_{12}$  和  $F_{21}$ ,既可能为正,也可能为负,这取决于对多余力所假设的正方向。另一方面,用两个相同的下标标识的柔度,譬如  $F_{11}$ ,总是正的,因为该位移总是与引起它的单位载荷同向。

将以上各表达式代入协调方程(方程 11-22),并用  $12EI/L^3$  乘第一个方程,用  $24EI/L^3$  乘第二个方程,我们得到

$$\begin{aligned} 4X_1 - 6X_2 &= 9qL \\ -12X_1 + 32X_2 &= -33qL \end{aligned}$$

这些方程的解答为

$$X_1 = \frac{45qL}{28} \quad X_2 = -\frac{3qL}{7}$$

所以,  $C$  处的水平反力(图 11-21a)向右,而竖直反力向上。利用  $X_1$  和  $X_2$  的结果,根据静力学我们就可求出刚架的其余反力。而且,也可求得所有应力合力。

在此分析中,只计及了弯曲变形的影响。然而,计及轴向变形和剪切变形的影响并不困难。当求放松结构的位移时,亦即,当使用单位载荷法求  $D_{12}$ 、 $D_{22}$  及柔度时,可计入这些影响,从而把它们包括在分析中。在平面刚架的情况下,通常会发现,轴向变形和剪切变形的效应与弯曲变形效应相比可以略去不计。

## 11.7 刚度法

这种分析结构的方法也许比柔度法使用得更为广泛,特别对于大型复杂结构。这种结构要求应用数字计算机以进行庞大的数值计算,而刚度法远比柔度法更适合于计算机的程序设计。理由是刚度法可被纳入标准化程序,在计算过程中,不需要任何工程决策。例如,在下列讨论中我们就会看到,在刚度法中,未知量预先就有明确的规定,而在柔度法中,对未知多余力存在着多种选择。

当用刚度法分析结构时,我们使用动不定度、固定端作用力及刚度的概念,现将说明所有这些概念。

**动不定度** 在刚度法中,分析的未知量是结构的节点位移,

而不是柔度法中所用的多余反力或应力合力。我们将把结构的节点定义为两个或多个元件的交叉点、支承点或任一根外伸元件的自由端。当结构承受载荷，所有节点或某些节点将以平移或转动的形式发生位移。自然，由于约束条件，某些节点位移将为零；例如，在固定端处将没有任何类型的位移。未知的节点位移称为动未知量，它们的个数被称为动不定度或节点位移的自由度数。

为了说明动不定度的概念，研究若干例子是有益的。让我们从图 11-16a 所示的连续梁开始。该结构的节点  $A$  是固定的，不可能产生任何一种位移，但是节点  $B$  和  $C$  可以转动。因而，当使用刚度法分析该梁时，就有两个未知的节点位移需要计算，所以，该梁为二度动不定。如果梁中除了弯曲变形之外，还有轴向变形，那么节点  $B$  和  $C$  就会发生水平移动和转动，在此情况下，就有四个动未知数。

一根静定悬臂梁(图 11-6a)是两度动不定的，因为自由端处有两个未知的节点位移(沿竖直方向的移动和转动)。如果存在轴向变形，动不定度数就增加到三度，因为自由端的水平移动变成为另一个未知数。

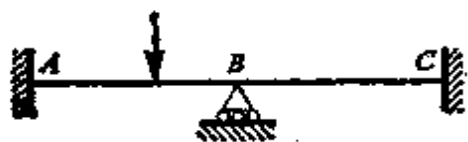


图 11-22.

另一根梁的例子示于图 11-19a 中。如果只计及弯曲变形，该三跨连续梁为四度动不定，因为在节点

处有四个未知转动。因而，当用刚度法分析该梁时，必须解四个联立方程，相比之下，使用柔度法时只需两个方程。这个例子可能会给人们这样的印象，即柔度法总是比刚度法得出的联立方程要少。但是，参考图 11-22 所示的两跨梁  $ABC$ ，此类观念即可很快消除。假设轴向变形略去不计，我们看出，此梁为一度动不定，因为未知节点位移只是  $B$  处的转动，而该梁的静不定度却为三。另一个相类似的例子是固定端梁，如果只考虑弯曲变形，该梁为两度静不定，但它却是动定的。

现在研究图 11-20a 中所绘的平面桁架。该桁架节点  $A$  可能发生两个独立的位移分量，譬如沿水平方向和竖直方向的移动，因

此它具有两个自由度。桁架节点的转动没有实际意义，<sup>①</sup>因为元件并不弯曲。节点  $B$ 、 $C$  和  $E$  中，每个都有两个自由度，而被约束住的节点  $D$  和  $F$  分别为零和一个自由度。所以，该桁架总共有九个节点移动自由度，并且是九度动不定的。这个结论意味着，用刚度法分析该桁架需要解以九个节点移动为未知量的九个联立方程。

图 11-21a 所示的平面刚架提供另一个动不定结构的例子。因为支承  $A$  是固定的，此点不可能有位移。然而，节点  $B$  和  $C$  可以转动，因此，该刚架有两个动不定度。如果在分析中包括了轴向变形的影响，那么节点  $B$  将有两个附加的未知位移（水平和竖直移动），使得总共有四度动不定\*。

**固定端作用力** 在刚度法中，我们经常遇到固定端梁，因为这个方法的第一步就是约束住所有未知的节点位移。强加这类约束使连续梁或平面刚架变为固定端梁的集合体。所以，我们需要有一批容易利用的固定端梁的反力公式。这些反力既包括力也包括力偶，统称为**固定端作用力**。图 11-23 给出了两个常见加载情况下固定端作用力之值\*\*。

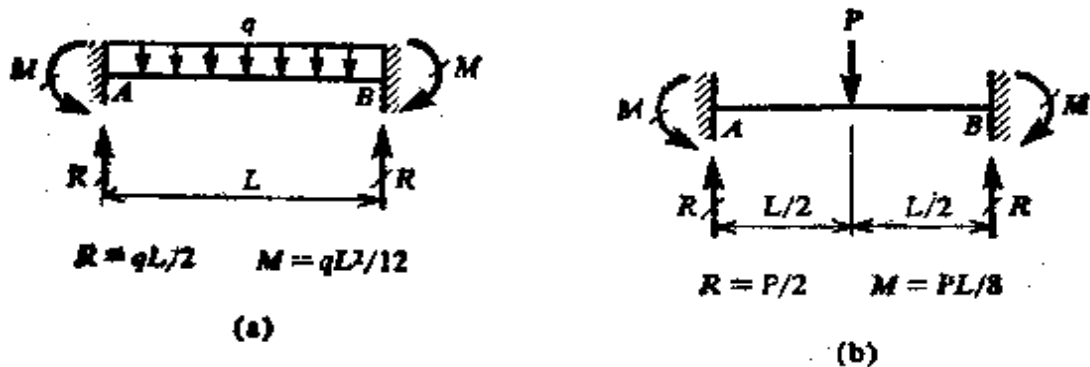


图 11-23. 固定端作用力。

**刚度** 在柔度法中，我们使用了单位作用力引起的位移，这种位移称为柔度。后面讨论将会看到，在刚度法中，我们使用单位位移引起的作用力。这些位移可以是单位移动，或是单位转动。而所得的作用力可为力或为力偶。由单位位移引起的作用力称为

\* 关于动不定的进一步讨论见参考文献 11-14。

\*\* 一个内容广泛的包括二十五种以上不同加载情况下固定端作用力的表格在参考文献 11-20p.269 中给出。

刚度影响系数，或称刚度。我们常常需要知道结构中单个元件的刚度。这些量称为元件刚度，图 11-24 中画出了两种最有用的情况。该图的(a)部分表示右端承受单位转动的固定端梁  $AB$ 。由于此单位位移的结果，在梁的两端产生反力。在  $B$  端产生的力矩为  $4EI/L$ ，而在另一端的力矩为  $2EI/L$ 。在梁两端的每个反力均等于  $6EI/L^2$ ，它们具有图中所示的方向。类似地，梁右端处的单位移动产生图中(b)部分所示的反力。所有这些反力均为元件刚度，因为它们是由于一端的单位位移而在元件两端产生的作用力\*。

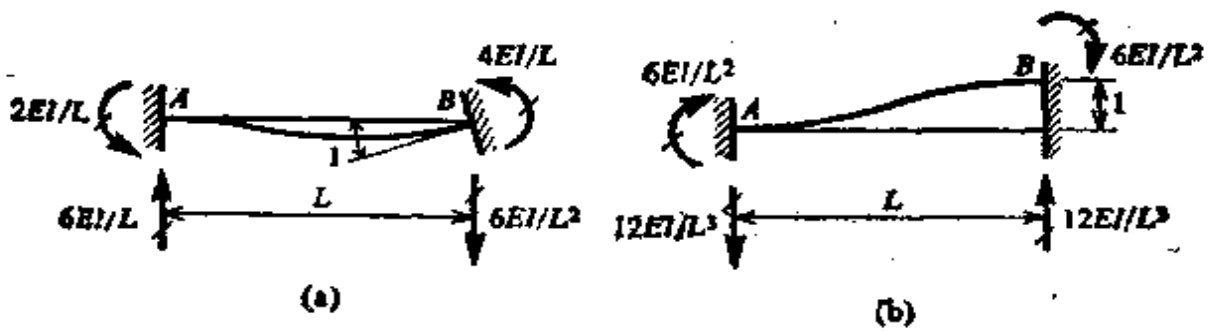


图 11-24. 元件刚度。

**刚度法** 既然已经阐明了若干预备概念和定义，我们就有条件用刚度法直接进行结构分析，就所涉及的物理概念来说，此法与柔度法不同，但是，两种方法都需要解联立方程。同时，在两种情况下，联立方程均使用叠加原理求得，所以此法限于小挠度的线弹性结构。在柔度法中，未知量为多余作用力，但在刚度法中，未知量为结构的节点位移。所以，在刚度法中要计算的未知量数目与动不定度数相同。

为了用最简便的形式说明刚度法的概念，让我们研究图 11-25a 所示梁的分析。该梁在  $A$  端固支，在  $B$  端滚动支承，并承受集度为  $g$  的均布载荷。该梁为一度动不定，因为唯一的未知节点位移为支座  $B$  处的转动，用符号  $D$  表示。

在柔度法中，以移去多余力的方式切开或用其他方法改变实际结构，从而得到一个静定放松结构。在刚度法中类似的作法是：

\* 元件刚度较完整的讨论见参考文献 11-14。



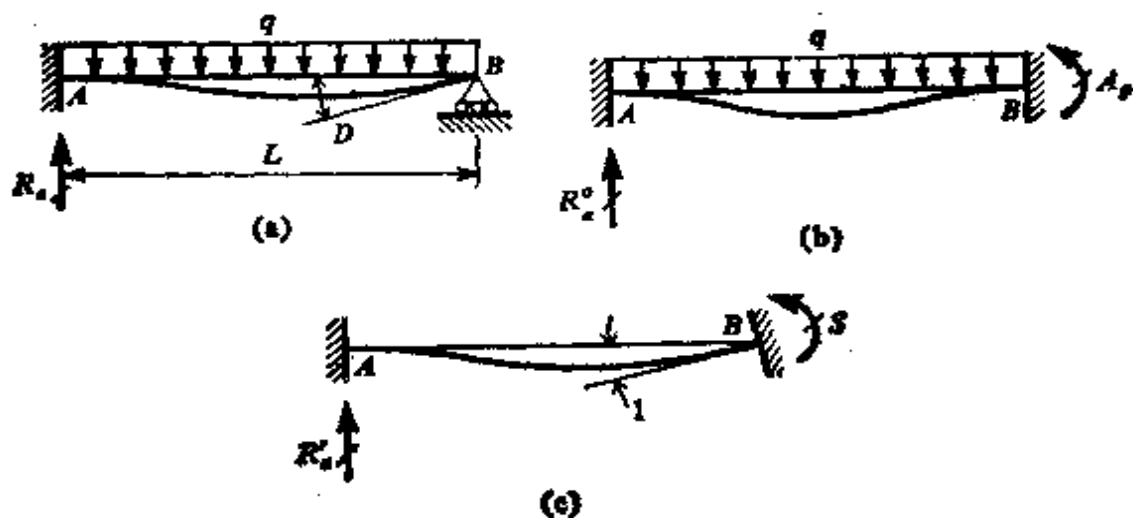


图 11-25. 刚度法的说明图.

把所有节点位移变为零的方法改变实际结构, 从而得到一个动定结构. 因为未知的位移为节点的移动和转动, 可以约束住结构的节点以阻止这种位移, 从而使这些位移等于零. 约束住所有节点而得到的结构称为约束结构. 对于图 11-25a 的梁来说, 约束住节点  $B$  以阻止转动, 从而使  $D$  等于零便得到其约束结构. 因此, 该约束结构为图 11-25b 所示的固定端梁.

当均布载荷作用在约束结构上时, 如图 11-25b 所示, 将产生各种作用力 (亦即, 力或力偶). 特别是, 在节点  $B$  处将产生一个力偶. 这个力偶为相应于未知节点位移  $D$  的作用力, 且由约束结构上的载荷所引起. 所以, 我们将用符号  $A_P$  表示这个力偶, 其中符号的含义如下: 字母  $A$  用来表示作用力, 不论它是力或是力偶, 而下标  $P$  表示作用力是由作用在约束结构上的载荷引起的. 因为此力偶相应于未知节点位移  $D$ , 当它的指向与  $D$  相同时, 亦即图中示出的逆时针方向, 它将为正. 力偶  $A_P$  是一个固定端作用力, 很容易根据图 11-23a 的公式求出:

$$A_P = -\frac{qL^3}{12} \quad (a)$$

由以上阐明的符号约定, 该负号是必须的.

因为约束梁在节点  $B$  处无转动, 所以现在我们必须叠加另一种计入实际节点转动的载荷情况. 在约束结构上施加一个单位未

知位移值,这一步就会变得很方便,这类似于在柔度法中取单位多余作用力值这一相应步骤。此单位转动( $D=1$ )示于图 11-25c 中。在  $B$  处相应于未知节点位移  $D$  的作用力为刚度系数  $S$ , 因为它是由结构的单位位移所引起的。此刚度根据图 11-24a 的公式求出为

$$S = \frac{4EI}{L} \quad (b)$$

现在我们就有条件写出一个使我们能够解出未知节点位移  $D$  的叠加方程。从图 11-25 我们可以看出与图中部分 (b) 的梁有关的作用力和位移, 当叠加上部分 (c) 中的作用力和位移乘以  $D$  时, 将给出实际梁的作用力和位移 (图 11-25a)。于是, 我们可以写出一个相应于未知位移  $D$  的作用力的叠加方程。在原梁中, 相应于  $D$  的作用力应当为节点  $B$  处逆时针方向的力偶。在本例中, 梁上没有这样的载荷, 但是为了估计到这种可能性, 我们将用符号  $A$  表示原梁上相应于  $D$  的作用力。此作用力  $A$  等于在承受载荷的约束梁上相应的作用力 (图 11-25b) 加上  $D$  乘以因单位位移在约束梁中的相应作用力 (图 11-25c)。因此, 叠加方程为

$$A = A_P + SD \quad (11-26)$$

现在可解此方程, 以求出未知位移  $D$ 。我们已观察到, 在本例中  $A=0$ ; 另外,  $A_P$  项和  $S$  项由方程 (a) 和 (b) 给出。将这些值代入方程 (11-26), 我们得到

$$0 = -\frac{qL^2}{12} + \frac{4EI}{L} D$$

由此

$$D = \frac{qL^2}{48EI}$$

从而,  $B$  处的转角已被确定。结果中的正号意味着转动方向为所假定的正指向 (逆时针)。

上述对节点位移  $D$  的求解利用了相应于  $D$  的作用力的叠加方程 (方程 11-26)。在此方程中包括了约束结构上由载荷所引起的力偶以及使约束结构的  $B$  端转动所引起的力偶。后面一项表示由于未知位移的单位值引起的力偶 (刚度系数) 与未知位移自身的乘

积。方程中的所有项使用同样的符号约定后，这两种效应可代数求和，以便得到在原结构中的合成效应。通常称此叠加方程为平衡方程，因为它代表节点处作用力的局部平衡。

由于图 11-25 所示的梁在节点  $B$  处的转动已经求得，现在就可能计算其他各量，譬如反力和应力合力。例如，假设要求出梁在支座  $A$  处的竖直反力  $R_a$  (图 11-25a)。此力即为图 11-25b 所示的约束梁的相应反力  $R_a^c$  和  $D$  乘以图 11-25c 所示的反力  $R_a^d$  之和。于是，我们可以根据下列叠加方程计算反力  $R_a$ ：

$$R_a = R_a^c + R_a^d D \quad (e)$$

约束梁的反力  $R_a^c$  和  $R_a^d$  可根据图 11-23 和 11-24 的公式求得：

$$R_a^c = \frac{qL}{2} \quad R_a^d = \frac{6EI}{L^3}$$

当把这些值以及前面求出的  $D$  值代入方程 (e) 时，结果变为

$$R_a = \frac{5qL}{8}$$

知道这个反力后，我们可用静力学求出其他反力和所有应力合力。

如果结构是一度以上动不定的，就需要附加的叠加方程。为说明这一情况下的分析步骤，现在要用刚度法分析先前曾被用作柔度法例题的同一根双跨梁 (见图 11-26a)。该梁为两度动不定，因为在节点  $B$  和节点  $C$  处存在未知转动。这些未知转动分别用  $D_1$  和  $D_2$  表示，并假设逆时针方向为正。接下去分析的目标就是求出这些量。

分析的第一步为在节点  $B$  和  $C$  处施加想像的约束以阻止转动。所得的约束结构由两根固定端梁组成，如图 11-26b 所示。然后假设约束结构承受着除相应于未知位移的载荷之外的全部载荷。因此，只有载荷  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$  示于图 11-26b 中。所有相应于未知位移的载荷，譬如本例中的力偶  $M_1$ ，将在后面计入。图中所示的力偶  $A_{1p}$  和  $A_{2p}$  为约束结构上的反力。它们分别相应于未知位移  $D_1$  和  $D_2$  并由载荷所引起\*。这些力偶可借助于固定端作用

\* 注意： $A_{1p}$  和  $A_{2p}$  类似于柔度法中的  $D_{1p}$  和  $D_{2p}$ ，后面两个量分别相应于放松结构中未知多余力  $X_1$  和  $X_2$  的位移，并由载荷所引起。

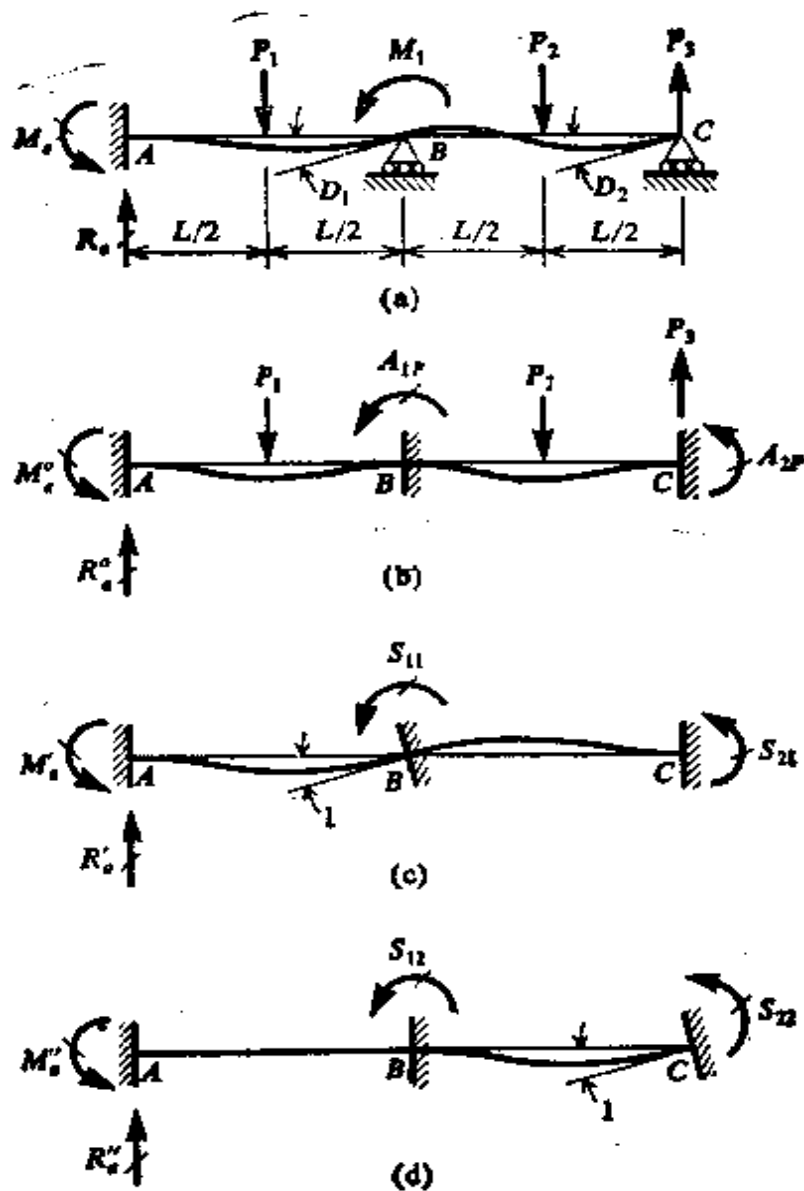


图 11-26. 刚度法的说明.

力的公式求出, 例如,  $A_{1p}$  为由于作用在元件  $AB$  上的载荷  $P_1$  在  $B$  处引起的反力矩和作用在元件  $BC$  上的载荷  $P_2$  在  $B$  处引起的反力矩的代数和. 于是, 我们得出

$$A_{1p} = -\frac{P_1 L}{8} + \frac{P_2 L}{8} \quad A_{2p} = -\frac{P_2 L}{8} \quad (d)$$

为了生成节点  $B$  和  $C$  处的刚度, 我们将未知位移  $D_1$  和  $D_2$  的单位值引入约束结构. 相应于  $D_1$  的单位位移为节点  $B$  处的单位转动, 如图 11-26c 所示. 在此情况下, 位移  $D_2$  仍等于零. 相应于  $D_1$  的刚度用  $S_{11}$  表示, 此处第一个下标表示该刚度相应的位移,

而第二个下标表示其起因(即  $D_1$  的单位值)。以类似的方式,另一个刚度表示为  $S_{21}$ , 因为它是相应于  $D_2$  的作用力并由  $D_1$  的单位值所引起。类似地,  $D_2=1$  的情况示于图 11-26d。刚度  $S_{12}$  为相应于  $D_1$  并由  $D_2$  的单位值引起的作用力, 而刚度  $S_{22}$  为相应于  $D_2$  并由  $D_2$  的单位值引起的作用力。所有这些刚度均可容易地根据图 11-24 中给出的元件刚度进行计算。因而, 当梁在节点  $B$  处转过一个单位角时, 因为元件  $AB$  的端部转动, 在  $B$  处产生一个等于  $4EI/L$  的逆时针力矩, 同时因为元件  $BC$  的端部转动, 在  $B$  处产生了另一个等于  $4EI/L$  的逆时针力矩。所以,  $B$  处的总力矩等于刚度  $S_{11}$ , 它为

$$S_{11} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{8EI}{L}$$

刚度  $S_{21}$  为当节点  $B$  转过一个单位角时在节点  $O$  处产生的力偶, 此刚度为

$$S_{21} = \frac{2EI}{L}$$

$S_{11}$  和  $S_{21}$  两者均为正值, 因为这些力偶沿着与未知转动  $D_1$  和  $D_2$  相同的正指向作用。表示在图 11-26d 中的刚度  $S_{12}$  和  $S_{22}$  如下:

$$S_{12} = \frac{2EI}{L} \quad S_{22} = \frac{4EI}{L}$$

上述四个刚度称为节点刚度, 因为它们代表了由于各未知节点位移的单位值在结构的各节点处产生的作用力。一般来说, 节点刚度通过和该节点相联结的诸元件刚度求和而得。另外, 从此例应当看出

$$S_{12} = S_{21} \quad (11-27)$$

这种刚度的互等关系普遍成立, 并与柔度的互等关系(方程 11-23)类似。

现在可以写出相应与  $D_1$  和  $D_2$  的作用力有关的两个平衡方程。令  $A_1$  和  $A_2$  分别表示原结构中相应于  $D_1$  和  $D_2$  的作用力。在此例中, 作用力  $A_1$  等于  $M_1$ , 而作用力  $A_2$  等于零, 因为在原结构的节点  $O$  处没有力偶作用。此平衡方程代表了在节点  $B$  和  $O$  处

力矩的平衡。它们是这样得到的：使用叠加原理，并注意到原结构的作用力（图 11-26a）等于约束结构中由载荷产生的相应作用力（图 11-26b）加上约束结构在单位位移下的作用力乘以位移本身。因此，平衡方程为

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{1p} + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 \\ A_2 &= A_{2p} + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 \end{aligned} \quad (11-28)$$

在这些方程中，全部采用的符号约定是，当作用力与相应的未知位移方向相同时为正。方程(11-28)可以对未知位移  $D_1$  和  $D_2$  求解。

为了以显式解出平衡方程，从而完成上述例题，让我们使用在柔度法例题中相同的载荷值，即

$$P_1=2P \quad M_1=PL \quad P_2=P \quad P_3=P$$

将这些量代入方程(d)，我们得到约束结构中相应于  $D_1$  和  $D_2$  的作用力如下：

$$A_{1p} = -\frac{PL}{8} \quad A_{2p} = -\frac{PL}{8}$$

由这些计算应当看到，载荷  $P_3$  不影响  $A_{1p}$  或  $A_{2p}$ ，因此，它不影响节点位移  $D_1$  和  $D_2$  的计算。然而，这个载荷却影响梁节点  $C$  处的反力值。

除未知量外，平衡方程(方程 11-28)中所有的项现在均已确定。代入这些项之后，方程变为

$$\begin{aligned} PL &= -\frac{PL}{8} + \frac{8EI}{L} D_1 + \frac{2EI}{L} D_2 \\ 0 &= -\frac{PL}{8} + \frac{2EI}{L} D_1 + \frac{4EI}{L} D_2 \end{aligned}$$

对未知节点位移进行求解，给出

$$D_1 = \frac{17PL^2}{112EI} \quad D_2 = -\frac{5PL^2}{112EI}$$

$D_2$  的负号表示这个转动实际上是顺时针方向。

分析的最后部分是确定反力和应力合力。在本例中，求出固支处的竖直反力  $R_c$  及反力矩  $M_c$  (图 11-26a) 是很方便的。这些反力的叠加方程为

$$M_c = M_c^0 + M_c^1 D_1 + M_c^2 D_2 \quad (e)$$

$$R_c = R_c^0 + R_c^1 D_1 + R_c^2 D_2 \quad (f)$$

根据图 11-26，式中所有各项的意义都是清楚的。这两个方程右端所有的  $M$  和  $R$  项根据图 11-23 和 11-24 给出的固定端作用力公式和刚度公式可以容易地得到，由此，我们求出

$$M_a^e = \frac{P_1 L}{8} = \frac{PL}{4} \quad M_a' = \frac{2EI}{L} \quad M_a'' = 0$$

$$R_a^e = \frac{P_1}{2} = P \quad R_a' = \frac{6EI}{L^2} \quad R_a'' = 0$$

将这些量以及  $D_1$  和  $D_2$  的表达式代入方程 (e) 和 (f), 得出

$$M_a = \frac{PL}{4} + \frac{2EI}{L} \left( \frac{17PL^2}{112EI} \right) = \frac{31PL}{56}$$

$$R_a = P + \frac{6EI}{L^2} \left( \frac{17PL^2}{112EI} \right) = \frac{107P}{56}$$

已知  $M_a$  和  $R_a$ , 现在我们就可根据静力平衡方程求出其他所有反力及所有应力合力。这个结论的根据在于该结构为两度静不定, 因此, 已知任意两个力就足以能够用静力学求出所有其他的力。于是, 我们可以认为此结构的分析已经完成。

上述例子讨论了一个两度动不定结构。然而, 我们可以很容易地把平衡方程推广到  $n$  度动不定结构的情形。在那种情况下, 平衡方程的一般形式变为

$$A_1 = A_{1p} + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + \cdots + S_{1n}D_n$$

$$A_2 = A_{2p} + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + \cdots + S_{2n}D_n \quad (11-29)$$

.....

$$A_n = A_{np} + S_{n1}D_1 + S_{n2}D_2 + \cdots + S_{nn}D_n$$

这  $n$  个方程可以对结构的  $n$  个未知节点位移求解。这些平衡方程的一般形式与柔度法中的协调方程相同(见方程 11-25), 而观察到这两个方程组之间的类似性是很有趣味的。刚度法的平衡方程代表相应于未知位移的作用力的叠加, 而柔度法的协调方程代表相应于未知作用力的位移的叠加。

在方程 (11-29) 中出现的刚度系数, 根据刚度互等定理彼此有如下关系:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (11-30)$$

刚度之间这一重要关系类似于柔度互等关系, 这将在随后的节次中用一般项建立(见方程 11-55)。

平衡方程 (11-29) 被写成一种仅计入结构上载荷影响的形式, 但是这些方程也很容易地修改为包括温度、预应变以及支座下沉

的影响, 这只需要在确定  $A_{1p}$ 、 $A_{2p}$ 、 $\dots$ 、 $A_{np}$  时将这些影响包括在内。此外, 虽然在本节我们局限于梁和平面刚架的例子, 但是, 方程(11-29)适用于许多类型的结构, 包括桁架和空间刚架。自然, 方程(11-29)是建立在叠加原理的基础之上, 因此, 如前所述, 刚度法只适用于线弹性结构\*。

刚度法的另一个名称是位移法, 因为位移是方程中的未知量; 又称为平衡法, 因为方程代表力和力矩的总和\*\*。

**例题** 用 11-27a 所示的连续梁  $ABC$ ,  $A$  处固支,  $B$  处滚动支承, 而在  $C$  处为定向支承。定向支承允许竖向移动, 但阻止元件的轴在  $C$  点处的任何转动。该梁在跨  $AB$  和  $BC$  的中点分别承受载荷  $P_1$  和  $P_2$ 。两跨长为  $L_1$  和  $L_2$ 。

仅有的未知节点位移为  $B$  处的转动和  $C$  处的竖直移动。这些位移分别表示为  $D_1$  和  $D_2$ , 如图 11-27a 所示。  $D_1$  的正指向为逆时针方向,  $D_2$  的正方向向上。除了求出这些位移之外, 我们也要计算梁端的反力偶  $M_a$  和  $M_c$ 。(图 11-27a)。

阻止住  $B$  处的转动和  $C$  处的移动, 从而获得约束结构, 由此形成了图 11-27b 所示的两个固定端梁。由于载荷  $P_1$  和  $P_2$  作用在该约束结构上, 所以相应于未知位移  $D_1$  和  $D_2$  的作用力为

$$A_{1p} = -\frac{P_1 L_1}{8} + \frac{P_2 L_2}{8} \quad A_{2p} = \frac{P_2}{2}$$

另外, 在  $A$  和  $C$  处的力偶为

$$M_a^c = \frac{P_1 L_1}{8} \quad M_c^c = \frac{P_2 L_2}{8}$$

下一步要在约束结构中引入未知位移  $D_1$  和  $D_2$  的单位值, 如图 11-27c 和 d 所示。对于这两种情况下的第一种情况, 由图 11-24 中的公式求得各作用力

\* 关于刚度法理论的进一步发展, 包括它对桁架和其它结构类型的应用, 参见结构分析方面的教科书, 例如参考文献 11-14、11-17、11-18 和 11-19。正如参考文献 11-14 至 11-24 所述, 当使用矩阵列式并在计算机上实施时, 刚度法在结构分析中的强有力性就变得十分明显了。

\*\* 也许是纳维尔在 1826 年首先使用刚度分析法, 他取节点位移为未知量, 然后写出两个平衡方程(见参考文献 1-1、7-1 和 1-14), 解出一个两度动不定的桁架。后来克莱布施(Olebsch)在 1862 年曾对刚度法用于桁架作了一般性的描述(见参考文献 1-1 和 11-22)。刚度法对平面刚架的应用在 1914 年由本迪克森(Bendixen)首创(参考文献 1-1), 而刚度法的一般列式由奥斯滕费尔德(Ostenfeld)在 1926 年作出(参考文献 11-24)。



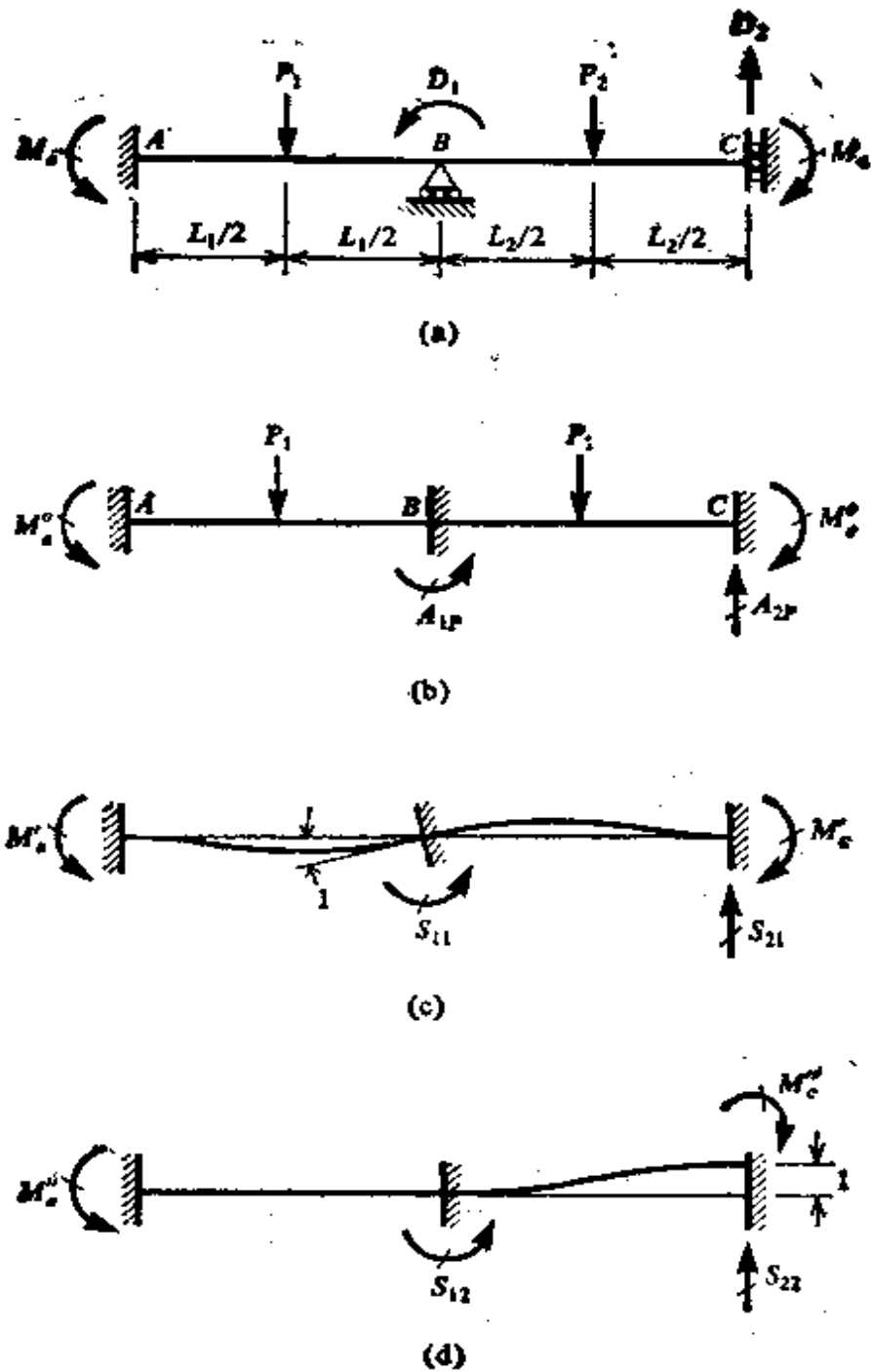


图 11-27. 例题. 刚度法.

如下:

$$S_{11} = \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} \qquad S_{21} = -\frac{6EI}{L_2^2}$$

$$M'_a = \frac{2EI}{L_1} \qquad M'_c = -\frac{2EI}{L_2}$$

类似地, 对于  $D_2=1$  的情况, 我们得到

$$S_{12} = -\frac{6EI}{L_2^2} \quad S_{22} = \frac{12EI}{L_2^3}$$

$$M'_a = 0 \quad M'_c = \frac{6EI}{L_2^2}$$

为了求出节点位移  $D_1$  和  $D_2$ , 现在必须将上述各量代入平衡方程(11-28), 然后解此方程。这些方程中的作用力  $A_1$  和  $A_2$  均为零, 因为在节点  $B$  处无作用力偶, 而在节点  $C$  处无竖直力(见图 11-27a)。解方程求出  $D_1$  和  $D_2$  之后, 我们就可根据下列叠加方程求出力偶  $M_a$  和  $M_c$ :

$$M_a = M_a^0 + M'_a D_1 + M''_a D_2 \quad (g)$$

$$M_c = M_c^0 + M'_c D_1 + M''_c D_2 \quad (h)$$

为了以显式完成本例题的求解, 让我们假设有下列关系:

$$P_1 = 2P \quad P_2 = P \quad L_1 = L_2 = L$$

于是先前所得诸项简化如下:

$$A_{1P} = -\frac{PL}{8} \quad A_{2P} = \frac{P}{2}$$

$$M_a^0 = \frac{PL}{4} \quad M_c^0 = \frac{PL}{8}$$

$$S_{11} = \frac{8EI}{L} \quad S_{12} = S_{21} = -\frac{6EI}{L^2} \quad S_{22} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$M'_a = \frac{2EI}{L} \quad M'_c = -\frac{2EI}{L}$$

$$M''_a = 0 \quad M''_c = \frac{6EI}{L^2}$$

将这些项代入方程(11-28)并整理之, 我们得到

$$4LD_1 - 3D_2 = \frac{PL^3}{16EI}$$

$$LD_1 - 2D_2 = \frac{PL^3}{12EI}$$

$$\text{由此} \quad D_1 = -\frac{PL^3}{40EI} \quad D_2 = -\frac{13PL^3}{240EI}$$

负号表示  $B$  处的转动为顺时针方向, 而  $C$  处的移动是向下的。

最后一步, 根据方程(g)和(h), 我们得到反力矩  $M_a$  和  $M_c$  如下:

$$M_a = \frac{PL}{4} + \frac{2EI}{L} \left( -\frac{PL^3}{40EI} \right) = \frac{PL}{5}$$

$$M_c = \frac{PL}{8} - \frac{2EI}{L} \left( -\frac{PL^3}{40EI} \right) + \frac{6EI}{L^2} \left( -\frac{13PL^3}{240EI} \right) = -\frac{3PL}{20}$$

因为该结构为二度静不定的, 已知这两个力矩就可用静力学确定所有其他反力和应力合力,

## 11.8 应变能和余能

应变能和余能这对概念为结构分析中的某些强有力的方法提供了基础。这些方法既可应用于线性也可用于非线性结构，虚功原理(方程 11-1)和单位载荷法的基本形式(方程 11-3)也是如此。然而，互等定理、柔度法和刚度法均建立在叠加原理的基础上，因此只能用于具有线性性态的结构。在单位载荷法中，我们开始先对非线性结构导出方程(11-3)，然后我们将线性结构作为一种特殊情况来考虑(方程 11-4)。在随后的能量法讨论中，将按照类似的步骤进行。

结构性态中的非线性主要是由于两种原因造成的。最明显的原因是材料具有非线性应力-应变曲线，在此情况下，我们称结构具有材料非线性。另一种可能性是由已挠曲的结构几何形状所产生的非线性。每当结构的挠曲改变了所加载荷或反力的作用时，就会发生这种情况。偏心加载的柱就是一个例子(见第 10.1 节)，从中我们看出，即便是柱的一个非常小的横向挠度也会对柱的弯矩有很大影响。另一个例子是第 6.12 节中所述的大挠度梁。在这两个例子中，均假设梁的材料服从虎克定律，但是因为已变形的结构的几何形状我们发现，挠度和应力合力与所作用的载荷成非线性关系。这些例子都是几何非线性的实例。

不论出现材料非线性或者几何非线性，我们总是假设结构的材料保持弹性。如果确是这样，那么在下列讨论中所导出的结果对于结构一次以上的加载循环是有效的。否则，如果材料不是弹性的，我们的结果将仅在结构的第一次加载过程中成立。

在特殊情况下，当材料服从虎克定律，而且不存在几何非线性时，结构将呈现线性性态，并可应用叠加原理。然而，对于非线性结构，我们必须经常留心这个事实，即叠加原理一般是不适用的。

为了说明能量概念，让我们研究一根承受轴向力  $P$  的棱柱形杆，此力产生均布应力  $\sigma = P/A$  (图 11-28a)。杆的应变为  $\epsilon = \delta/L$ ，此处  $\delta$  为杆的伸长， $L$  为长度。杆的材料假设为弹性的，并具有图

11-28b 所示的非线性应力-应变曲线。于是载荷-挠度关系(图 11-28c)将具有和应力-应变曲线相同的一般形状。载荷  $P$  所做的功为

$$W = \int_0^{\delta_1} P d\delta$$

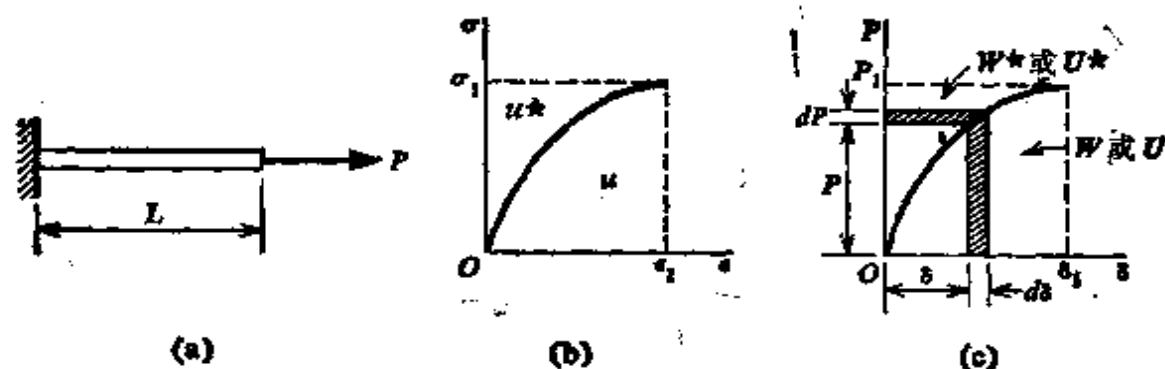


图 11-28. 应变能和余能。

此处  $\delta_1$  为挠度的最大值。功的这一表达式可以在几何上解释为图 11-28c 所示载荷-挠度曲线以下的面积。因为杆件呈弹性状态，并且略去了加载和卸载过程中的能量损失(换言之，因为我们处理的是保守系统)，由载荷所作的全部功将以弹性应变能的形式储存在杆中，在卸载的过程中，该功可以重新恢复。所以，应变能等于功  $W$ ，如下式：

$$U = W = \int_0^{\delta_1} P d\delta \quad (11-31)$$

材料单位体积内的应变能  $u$  可通过研究一个承受应力  $\sigma$  并经历应变  $\epsilon$  的单位尺寸的体积微元求得，该应变具有的最大值  $\epsilon_1 = \delta_1/L$ ，因此

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon \quad (11-32)$$

方程(11-32)中的积分代表图 11-28b 中应力-应变曲线之下的面积。将总应变能的表达式(见方程 11-31)除以杆的体积  $V$ (等于  $AL$ )，并注意到  $\sigma = P/A$  和  $d\epsilon = d\delta/L$ ，可求得  $u$  的相同表达式。相反地，总应变能可根据单位体积的应变能用积分求得如下：

$$U = \int u dV \quad (11-33)$$

此处  $dV$  为体积微元, 积分沿杆的整个体积进行。

在特殊情况下, 当应力-应变曲线服从虎克定律, 因而  $\sigma = E\epsilon$  及  $P = EA\delta/L$  时, 上述应变能的表达式则为

$$U = \frac{EA\delta_1^2}{2L} = \frac{P_1^2 L}{2EA} \quad (11-34a, b)$$

$$u = \frac{E\epsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E} \quad (11-35a, b)$$

这些表达式与先前在第 1.10 节导出的相同 (见方程 1-16 和 1-17)。

现在让我们对具有非线性载荷-挠度曲线 (见图 11-28) 的杆件定义另一种形式的功。这种功称为余功  $W^*$ , 并定义如下:

$$W^* = \int_0^{P_1} \delta \, dP$$

此余功用载荷-挠度曲线和竖直轴之间的面积表示 (图 11-28c)。不象功  $W$  那样, 它没有明显的物理含义, 但是我们能注意到

$$W + W^* = P_1 \delta_1 \quad (a)$$

因此, 就几何意义来说, 因为它完善了图 11-28c 中所示的矩形, 所以功  $W^*$  为功  $W$  的余功。杆的余能  $U^*$  等于所施加载荷的余功, 因而因

$$U^* = W^* = \int_0^{P_1} \delta \, dP \quad (11-36)$$

考虑一个受到应力  $\sigma$  和应变  $\epsilon$  的微元, 用类似于在定义杆的每单位体积应变能时所用过的方式, 可以把余能以每单位体积材料来表示, 由此,

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \epsilon \, d\sigma \quad (11-37)$$

单位体积的余能等于应力-应变曲线和应力轴之间的面积 (图 11-28b)。而结构的总余能可由  $u^*$  经积分而得:

$$U^* = \int u^* \, dV \quad (11-38)$$

有时把余能称为应力能, 以保持和应变能之间的类似性。

如果图 11-28b 所示的应力-应变曲线为线性的, 那么显然余

能和应变能变得相等。然而，这两种能量在概念上彼此是完全不同的，所以，即使是在线性情况，它们虽在数值上相等，有时仍需保持它们之间的区别。

虽然上述所有关于应变能和余能的概念是对拉杆而言，但它们很容易推广，以包含其他受载情况，譬如扭转和弯曲。因此，我们可以认为，图 11-28e 所示的载荷-挠度曲线代表了任一结构类型的载荷和其相应位移之间的关系，譬如梁、平面刚架、或桁架。在所有这样的情况下，我们均可使用方程 (11-31) 和 (11-36) 求得与载荷有关的功和余功。这些功的大小分别等于结构的应变能和余能。此外，如果载荷为具有对应于位移  $\theta$  的力偶  $M$ ，那么我们只要以  $M$  和  $\theta$  分别代替  $P$  和  $\delta$  即可。

通常作用在结构上的载荷多于一个，因此，其能量和功必须由求和得出。因而，如果非线性弹性结构承受  $n$  个同时作用且彼此之间比例保持不变的载荷，那么应变能和余能为

$$U = \int P d\delta \quad U^* = \int \delta dP \quad (11-39a, b)$$

该表达式中的总和是对作用在结构上的所有载荷而言。另外，积分是在下限为零、上限分别等于  $\delta$  和  $P$  的最大值之间进行的。

当结构呈线性性态时， $U$  和  $U^*$  的上述表达式变得相等，并具有方程 (1-15) 所给的形式：

$$U = U^* = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \delta_i}{2} = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \dots + \frac{P_n \delta_n}{2} \quad (11-40)$$

这里  $P_i$  和  $\delta_i$  均为载荷及其对应位移的最大值， $n$  为载荷的总个数。方程 (11-40) 用位移和载荷两者表达  $U$  和  $U^*$ ，但是如将一个量用另一个量代替，我们就可以很容易地仅用位移或仅用载荷来表达它们。于是，因为结构呈线性，所以载荷可用下列方程表示为位移的线性组合：

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2 + \dots + a_{1n}\delta_n \\ P_2 &= a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + \dots + a_{2n}\delta_n \\ &\dots \\ P_n &= a_{n1}\delta_1 + a_{n2}\delta_2 + \dots + a_{nn}\delta_n \end{aligned} \quad (11-41)$$

式中系数  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$  为常数, 它们取决于结构的性质. 如果将这些关系代入方程 (11-40), 那么应变能和余能将仅表为位移的函数, 并具有下列一般式:

$$\begin{aligned}
 U = U^* = & b_{11}\delta_1^2 + b_{12}\delta_1\delta_2 + \dots + b_{1n}\delta_1\delta_n \\
 & + b_{21}\delta_2\delta_1 + b_{22}\delta_2^2 + \dots + b_{2n}\delta_2\delta_n \\
 & \dots \\
 & + b_{n1}\delta_n\delta_1 + b_{n2}\delta_n\delta_2 + \dots + b_{nn}\delta_n^2
 \end{aligned} \tag{11-42}$$

式中  $b$ 's 为由  $a$ 's 求得的新常数. 这种形式的表达式称为二次函数, 因为它的所有项均为二次的. 换一种方法, 我们可以依据载荷求位移解方程 (11-41) 求出位移, 得出

$$\begin{aligned}
 \delta_1 = & c_{11}P_1 + c_{12}P_2 + \dots + c_{1n}P_n \\
 \delta_2 = & c_{21}P_1 + c_{22}P_2 + \dots + c_{2n}P_n \\
 & \dots \\
 \delta_n = & c_{n1}P_1 + c_{n2}P_2 + \dots + c_{nn}P_n
 \end{aligned} \tag{11-43}$$

式中  $c$ 's 为与  $a$ 's 有关的新常数. 当把这些方程代入方程 (11-40) 时, 我们得到  $U$  和  $U^*$  的另一个二次函数, 于是

$$\begin{aligned}
 U = U^* = & d_{11}P_1^2 + d_{12}P_1P_2 + \dots + d_{1n}P_1P_n \\
 & + d_{21}P_2P_1 + d_{22}P_2^2 + \dots + d_{2n}P_2P_n \\
 & \dots \\
 & + d_{n1}P_nP_1 + d_{n2}P_nP_2 + \dots + d_{nn}P_n^2
 \end{aligned} \tag{11-44}$$

式中的系数仍为常数, 它们取决于结构的性质. 这些结果表明, 在结构为线性的情况下, 其应变能和余能既可表示为位移的二次函数, 也可表示为载荷的二次函数.

**例题 1** 让我们假设某结构受到力  $P$  的作用, 它所产生的相应位移  $\delta$  由方程  $\delta = CP^2$  给出, 此处  $C$  为常数 (见图 11-29). 试确定该结构中的应变能和余能.

应变能系根据方程 (11-31) 代入用  $\delta$  表示的  $P$  而得, 由此

$$U = \int_0^\delta \sqrt{\frac{\delta}{C}} d\delta = \frac{2\delta^{3/2}}{3C^{1/2}} \tag{11-45}$$

根据方程 (11-36), 余能为

$$U^* = \int_0^P CP^2 dP = \frac{CP^3}{3} \quad (11-46)$$

注意，应变能以位移来表达，而余能以载荷来表达。这种表示能量的形式与  $U$  和  $U^*$  的定义在性质上是一致的；此外，在下面几节我们就会看到，在求挠度和分析结构时这种形式是最有用的。自然，在某些情况下，很可能以载荷表应变能和以位移表余能。对本例而言，通过将原始载荷-变形关系  $\delta = CP^2$  代入方程 (11-45) 和 (11-46)，便可获得这样的结果。



图 11-29. 例题 1. 非线性载荷-挠度曲线。

**例题 2** 一结构由两根水平杆  $AC$  和  $CB$  组成，每根杆长为  $L$ ，示于图 11-30a 中。两根杆件铰接并在  $O$  处连接在一起。杆的材料为线弹性的，每根杆都有不变的轴向刚度  $EA$ 。如果在  $O$  处作用一竖直载荷，那么只要杆件仍保持在原始水平位置，它们就不能承受载荷。然而，由于载荷是逐渐作用的，节点  $O$  将向下偏移，而杆中将产生拉力。因此，有了在载荷作用下产生的微小挠度  $\delta$ ，该结构就可以达到一个平衡位置（见图 11-30b）。

（此段文字已在上方段落中完整呈现，此处不再重复）

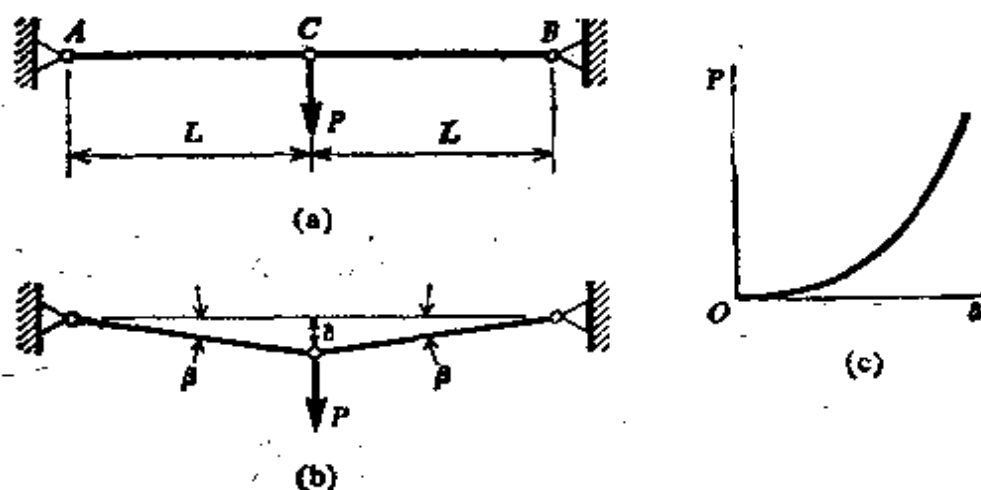


图 11-30. 例题 3. 具有几何非线性的结构。

让我们计算该结构的应变能和余能。为此，我们必须首先求得载荷  $P$  和挠度  $\delta$  之间的关系。此关系式可根据杆力和其伸长之间的表达式求出。于是，由静力学，每根杆的拉力  $N$  为

$$N = \frac{P}{2 \sin \beta}$$

式中  $\beta$  为杆的转角。然而，由于挠度  $\delta$  和转角  $\beta$  两者均假设为微小的量，因此我们可用  $\delta/L$  代替  $\beta$ ，用  $\beta$  代替  $\sin \beta$ 。所以，上述方程变为

$$N = \frac{PL}{2\delta}$$



根据虎克定律, 现在可求出每根单个杆的伸长量:

$$\Delta = \frac{NL}{EA} = \frac{PL^2}{2EA\delta} \quad (b)$$

由变位后结构的几何关系, 可以求出连系结构的  $\delta$  和杆的伸长  $\Delta$  的第二个方程。每根杆长的增量(根据图 11-30b)为

$$\Delta = \sqrt{L^2 + \delta^2} - L = L\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2} - L$$

按二项式定理将根号内的表达式展开得出

$$\Delta = L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{L}\right)^4 + \dots \right] - L$$

对小变形, 我们可以略去包含  $\delta/L$  两次幂以上的各项, 因而只保留方括号内的前两项。所以,  $\Delta$  的表达式简化为

$$\Delta = \frac{\delta^2}{2L} \quad (c)$$

现在我们可以由方程(b)和(c)消去  $\Delta$ , 从而产生所需要的该结构的载荷-挠度关系。这种关系可用下面两种形式中的任何一种来表示:

$$P = \frac{EA\delta^3}{L^3} \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{PL^3}{EA}} \quad (11-47a, b)$$

这些方程的图线示于图 11-30c 中。重要的是要注意到: 本例题所分析的结构是几何非线性的, 尽管材料本身仍服从虎克定律。

根据方程(11-31), 现在我们可以容易地求出结构的应变能:

$$U = \int_0^{\delta} P d\delta = \int_0^{\delta} \frac{EA\delta^3}{L^3} d\delta = \frac{EA\delta^4}{4L^3} \quad (11-48)$$

同样, 根据方程(11-36)求出余能:

$$U^* = \int_0^P \delta dP = \int_0^P \sqrt[3]{\frac{PL^3}{EA}} dP = \frac{3P^{4/3}L}{4\sqrt[3]{EA}} \quad (11-49)$$

再次注意: 应变能用位移表达, 而余能用载荷表达。

**例题 3** 一根长  $L$  的矩形横截面(宽为  $b$ 、高为  $h$ ) 悬臂梁在自由端承受集中载荷  $P$ (见图 11-31)。其应力-应变图由方程  $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$  表示, 此处  $B$  为一常数, 并且它对拉伸和压缩均相同。试计算该梁的余能。

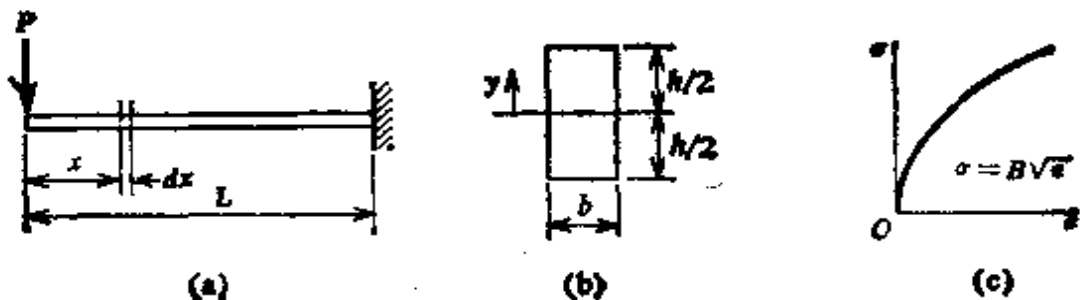


图 11-31. 具有非线性应力-应变曲线材料的悬臂梁。

本例中应力和应变从梁的一端向另一端变化, 因此需要从确定单位体积的余能  $u^*$  开始。然后, 我们可对梁的整个体积积分  $u^*$  以求得总余能  $U^*$ 。  $u^*$  这个量将为  $x$  (距梁自由端的距离) 和  $y$  (距中性轴的距离) 的函数。为了求出  $u^*$ , 我们需要知道梁中坐标为  $x$  和  $y$  处的任一点的应力  $\sigma_1$ 。如果我们已知同一点处的应变  $\epsilon_1$ , 此应力就可求出, 而如果已知曲率, 就可求出该应变。因此, 我们必须从建立梁的曲率来开始我们的分析。

用在第 9.7 节中对梁的非弹性弯曲所述的方法可容易地求出曲率。根据方程(9-22), 此曲率为

$$\kappa = \frac{\epsilon_1}{h} \quad (d)$$

式中  $\epsilon_1$  为梁顶部纤维应变的两倍(见方程 9-26)。根据方程(9-27), 我们得到任一横截面上弯矩  $M$  的下列表达式:

$$M = \frac{2bh^3}{\epsilon_1^2} \int_0^{\epsilon_1/2} \sigma \epsilon d\epsilon$$

将  $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$  代入然后进行积分, 我们求出

$$M = \frac{Bbh^3 \sqrt{\epsilon_1}}{5\sqrt{2}}$$

由此

$$\epsilon_1 = \frac{50M^2}{B^2b^3h^3} \quad (e)$$

现在, 在方程(d)和(e)之间消去  $\epsilon_1$  并以  $Px$  代替弯矩  $M$ , 即可求出曲率:

$$\kappa = \frac{50P^2x^2}{B^2b^3h^3} \quad (f)$$

此方程给出曲率为沿梁轴度量的距离  $x$  的函数。

梁的任一横截面的应变  $\epsilon_1$  由方程(9-1)给出, 它为

$$\epsilon_1 = \kappa y$$

使用应力-应变关系可从应变求出应力:

$$\sigma_1 = B\sqrt{\epsilon_1} = B\sqrt{\kappa y}$$

将方程(f)的曲率  $\kappa$  代入, 得

$$\sigma_1 = \frac{5\sqrt{2} Py^{1/2}x}{bh^{3/2}} \quad (g)$$

它是梁中任一点处应力的表达式。

现在我们就有条件计算单位体积的余能(见方程 11-37):

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \epsilon d\sigma = \int_0^{\sigma_1} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma$$

式中  $\sigma_1$  由方程(g)给出。完成上述积分得到

$$u^* = \frac{250\sqrt{2} P^2 y^{3/2} x^3}{3B^2 b^3 h^{15/2}} \quad (h)$$

此式给出了单位体积的余能为  $u^*$  和  $y$  的函数。对梁的全部体积积分  $u^*$  求出整个梁的余能  $U^*$ 。如方程(11-38)所示。在建立积分时,我们令  $x$  从 0 变到  $L$ , 令  $y$  从 0 变到  $h/2$ , 然后将结果加倍,以便计入两个半梁段。因此,余能的方程为

$$U^* = \int u^* dV = 2 \int_0^L \left[ \int_0^{h/2} u^* b dy \right] dx$$

将  $u^*$  的表达式(h)代入,给出

$$U^* = \frac{500\sqrt{2} P^3}{3B^2 b^2 h^{15/2}} \int_0^L \left[ \int_0^{h/2} y^{3/2} dy \right] x^2 dx$$

由此

$$U^* = \frac{25P^3 L^4}{6B^2 b^2 h^5} \quad (11-50)$$

不出所望,此方程给出以力  $P$  表示的余能。

## 11.9 应变能法

现在我们将着手推导若干重要的应变能定理,这些定理形成结构分析的基础。让我们假想有一结构承受  $n$  个载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , 这些载荷产生相应的位移  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ 。如同前面所讨论的那样,不言而喻,  $P$  和  $\delta$  代表广义力及其相应的广义位移,因而包括集中力和平移、力偶和转动、一对力和相对位移、或一对力偶和相对转动等可能性。另外也认为结构可能呈非线性,这意味着任何一个力  $P_i$  和其相应的位移  $\delta_i$  之间的关系以图 11-28o 的载荷-位移图为典型代表。

结构的应变能等于在施加载荷的过程中载荷所做的功。每个力  $P_i$  在理论上可通过适当的载荷-位移关系表达为其相应位移  $\delta$  的函数。将这些载荷的表达式代入方程(11-39a), 然后就可进行积分并求总和。所得出的应变能表达式将为位移  $\delta$  的函数。由于  $U$  是用这些位移表达的, 于是我们就问, 当一个位移  $\delta_i$  增加一个微量  $d\delta_i$ , 而所有其它位移均保持不变时应变能的增量如何。此应变能的增量以  $dU$  表示, 由下述表达式给出

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i$$

式中的偏导数  $\partial U / \partial \delta_i$  为应变能对  $\delta_i$  的变化率, 我们还可观察到,

当位移  $\delta_i$  增加一个微量  $d\delta_i$  时, 相应的力  $P_i$  将要做功, 但其他任何力则不做功, 因为其他的位移没有变化。此功为  $P_i d\delta_i$ , 也等于结构中所储存的应变能增量:

$$dU = P_i d\delta_i$$

令上述  $dU$  的两个表达式相等, 于是给出

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad (11-51)$$

这个方程陈述为: 只要应变能表达为位移的函数, 则应变能对任一位移  $\delta_i$  的偏导数等于其相应的力  $P_i$ 。此方程称为卡斯提利阿诺 (Castigliano) 第一定理, 以纪念这位意大利工程师, 他在 1879 年出版的著名教本中导出和应用了这一原理 (见参考文献 11-25 至 11-29)。

为了说明卡斯提利阿诺第一定理, 让我们参照上节例题 1 所述的非线性结构。结构的应变能由方程 (11-45) 给出。将卡斯提利阿诺第一定理用于该表达式, 我们得到

$$P = \frac{dU}{d\delta} = \frac{d}{d\delta} \left( \frac{2\delta^{3/2}}{30^{1/2}} \right) = \sqrt{\frac{\delta}{3}}$$

由此得  $\delta = 3P^2$ , 它是载荷和挠度之间的正确关系。

以同样的方式, 我们可将卡斯提利阿诺定理用于图 11-30a 所示并在上节例题 2 中所述的几何非线性结构。其应变能由方程 (11-48) 给出, 于是我们得到

$$P = \frac{dU}{d\delta} = \frac{d}{d\delta} \left( \frac{EA\delta^3}{4L^3} \right) = \frac{3EA\delta^2}{4L^3}$$

我们再次看到, 此结果与前面的分析一致 (见方程 11-47a)。

卡斯提利阿诺第一定理提供了一种利用应变能分析非线性结构的方法。该方法基于用节点位移作为未知量, 这与下述实际情况是一致的, 即如果我们想用卡斯提利阿诺定理, 必须把应变能表示为位移的函数。为了建立这一方法, 让我们假设有一个具有  $n$  个未知节点位移  $D_1, D_2, \dots, D_n$  的非线性结构。还假设结构上仅有的载荷是对应于这些动未知量的载荷。这些相应于  $D_1, D_2, \dots, D_n$  的载荷分别表示为  $P_1, P_2, \dots, P_n$ 。于是, 正如已经说明的那

样,结构的应变能可用未知的节点位移  $D_1, D_2, \dots, D_n$  表示. 作完这一步之后,我们便可对每一个位移应用卡斯提利阿诺第一定理,从而得出一组  $n$  个联立方程:

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial D_1} \quad P_2 = \frac{\partial U}{\partial D_2} \quad \dots \quad P_n = \frac{\partial U}{\partial D_n} \quad (11-52)$$

在这些方程中,每一个方程的一般形式均相同. 如果我们考察一个典型的方程,譬如第  $i$  个方程,我们就会发现,它是由包含  $n$  个节点位移  $D_1, D_2, \dots, D_n$  作为未知量的右端项所组成. 因为这些项加起来为载荷  $P_i$  本身,所以我们得出结论:该方程实际上代表相应于诸力  $P_i$  的平衡条件. 因此,方程(11-52)是一组平衡方程,它可根据载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$  联立求解得出节点位移. 分析的最后一步,就是根据节点位移计算其他各量,譬如反力和应力合力.

在上一段中所述的应变能法是利用节点位移作为未知量,并需解平衡方程. 所以说,它是结构分析中的位移法,对线性结构来说,此法已被阐明为刚度法(见第 11.7 节). 位移法和刚度法在原理上是相同的方法. 然而,由于刚度法的应用只限于线性分析,所以从现在起,当研究的结构可能为非线性时,我们将使用“位移法”一词,当只讨论线性结构时,就使用“刚度法”一词. 用位移法分析非线性结构的例子将在后面例题 1 中给出.

现在让我们较详细地研究线性结构这一特殊情况,亦即,可以应用叠加原理的结构. 在此情况下,如上节所述,应变能将为位移的二次函数. 所以,当有  $n$  个未知节点位移  $D_1, D_2, \dots, D_n$  以及  $n$  个相应载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$  时,其应变能的一般形式变为

$$\begin{aligned} U = & a_{11}D_1^2 + a_{12}D_1D_2 + \dots + a_{1n}D_1D_n \\ & + a_{21}D_2D_1 + a_{22}D_2^2 + \dots + a_{2n}D_2D_n \\ & \dots \\ & + a_{n1}D_nD_1 + a_{n2}D_nD_2 + \dots + a_{nn}D_n^2 \end{aligned}$$

式中系数  $a_{11}, a_{12}$  等等为常数,它们仅取决于结构的性质. 如果我们现在应用卡斯提利阿诺第一定理(见方程 11-52),我们就得出下列形式的平衡方程:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\partial U}{\partial D_1} = S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + \cdots + S_{1n}D_n \\
P_2 &= \frac{\partial U}{\partial D_2} = S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + \cdots + S_{2n}D_n \\
&\dots \\
P_n &= \frac{\partial U}{\partial D_n} = S_{n1}D_1 + S_{n2}D_2 + \cdots + S_{nn}D_n
\end{aligned}
\tag{11-53}$$

式中的系数  $S_{11}$ 、 $S_{12}$  等等均为常数，它们取决于  $\alpha$ 's，亦即，取决于结构的性质。由这些方程的形式，我们分辨出这些系数就是结构的刚度系数（见第 11.7 节和方程 11-29）。因而，方程(11-53)为结构分析中刚度法的平衡方程。

结构的应变能和刚度之间的一个重要关系可通过对方程(11-53)取偏导数，求得如下：

$$\frac{\partial P_1}{\partial D_1} = S_{11} \quad \frac{\partial P_1}{\partial D_2} = S_{12} \quad \cdots \quad \frac{\partial P_1}{\partial D_n} = S_{1n} \tag{a}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial D_1} = S_{21} \quad \frac{\partial P_2}{\partial D_2} = S_{22} \quad \cdots \quad \frac{\partial P_2}{\partial D_n} = S_{2n} \tag{b}$$

其余方程类似。因为  $P_1$  等于  $\partial U / \partial D_1$ ，方程(a)可写成

$$S_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_1^2} \quad S_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_2 \partial D_1} \quad \cdots \quad S_{1n} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_n \partial D_1}$$

以类似的方式，方程(b)变为

$$S_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_1 \partial D_2} \quad S_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_2^2} \quad \cdots \quad S_{2n} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_n \partial D_2}$$

根据这些例子中出现的导数型式，我们可以得出结论，刚度系数可与应变能有关，用下列一般式表达：

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j} \tag{11-54}$$

因此，每当应变能表达为未知位移  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $\cdots$ 、 $D_n$  的函数时，我们就可用微分方法立刻得到刚度。此外，因为  $U$  的微分次序是无关重要的，因此，可以建立刚度互等定理：

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_j \partial D_i} = S_{ji} \tag{11-55}$$

自然，上述关于刚度的讨论只适用于线弹性结构。下面的例题 2

和例题 3 就是应变能法应用于线性性态结构的实例。

**例题 1** 图 11-32a 所示的桁架  $ABC$  在节点  $B$  承受一竖直载荷  $P$ 。杆  $AB$  和  $BC$  均具有等截面面积  $A$ 。材料的应力-应变关系为  $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$  (见图 11-32b), 此处  $B$  是一常数, 而且这一关系对拉伸和压缩是相同的。我们将根据位移法使用卡斯提利阿诺第一定理分析此非线性弹性桁架。

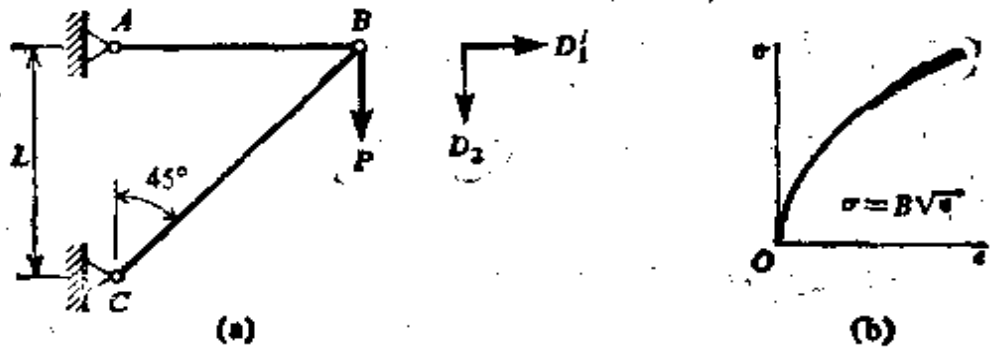


图 11-32. 例题 1. 材料具有非线性应力-应变曲线的桁架。

在此结构的节点  $B$  处有两个未知位移, 一个水平位移  $D_1$  和一个竖直位移  $D_2$ , 如图所示。为了使用卡斯提利阿诺第一定理求得平衡方程, 必须用这些位移表示结构的应变能。应变能确定如下。由于位移  $D_1$ , 杆  $AB$  将有等于  $D_1$  的伸长量, 而杆  $BC$  将有等于  $D_1/\sqrt{2}$  的伸长量。同时, 由于位移  $D_2$ , 杆  $BC$  将有等于  $D_2/\sqrt{2}$  的缩短量, 但杆  $AB$  的长度不变。因此, 杆  $AB$  的总伸长量为  $D_1$ , 而杆  $BC$  的总缩短量为  $(D_2 - D_1)/\sqrt{2}$ 。所以, 各杆的应变为

$$\epsilon_{ab} = \frac{D_1}{L} \quad (\text{伸长}) \quad (c)$$

$$\epsilon_{bc} = \frac{D_2 - D_1}{2L} \quad (\text{缩短}) \quad (d)$$

根据方程(11-32), 现在可求出每根杆单位体积的应变能:

$$u_{ab} = \int_0^{\epsilon_{ab}} \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon_{ab}} B\sqrt{\epsilon} d\epsilon = \frac{2B}{3} \left( \frac{D_1}{L} \right)^{3/2}$$

$$u_{bc} = \int_0^{\epsilon_{bc}} \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon_{bc}} B\sqrt{\epsilon} d\epsilon = \frac{2B}{3} \left( \frac{D_2 - D_1}{2L} \right)^{3/2}$$

由于每根杆整个体积中的应力和应变为常数, 所以我们将单位体积的应变能乘以杆的体积得到每根杆的总应变能。然后将这些应变能加起来得到结构的总应变能:

$$U = U_{ab} + U_{bc} = u_{ab}AL + u_{bc}AL\sqrt{2}$$

由此

$$U = \frac{AB}{3\sqrt{L}} [2D_1^{3/2} + (D_2 - D_1)^{3/2}] \quad (11-56)$$

式中  $A$  为每根杆的横截面面积。此方程给出以未知节点位移  $D_1$  和  $D_2$  表达的应变能。

现在可用卡斯提利阿诺第一定理(见方程 11-52)求得平衡方程。在这些方程中,  $P_1$  这个量代表相应于  $D_1$  的载荷并等于零, 而  $P_2$  代表相应于  $D_2$  的载荷并等于  $P$ 。于是我们得到

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial D_1} = \frac{AB}{2\sqrt{L}} [2D_1^{1/2} - (D_2 - D_1)^{1/2}] = 0$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial D_2} = \frac{AB}{2\sqrt{L}} (D_2 - D_1)^{1/2} = P$$

简化这两个方程得出

$$2D_1^{1/2} - (D_2 - D_1)^{1/2} = 0 \quad (e)$$

$$(D_2 - D_1)^{1/2} = \frac{2P\sqrt{L}}{AB} \quad (f)$$

联解以上两个方程, 我们求得节点位移:

$$D_1 = \frac{P^2 L}{A^2 B^2} \quad D_2 = \frac{5P^2 L}{A^2 B^2} \quad (11-57)$$

这一步完成了用位移法进行分析的主要部分。因为现在我们已知  $D_1$  和  $D_2$ , 我们就可容易地计算出所有杆力和反力。

为了说明最后的这些计算, 让我们确定桁架的杆力。首先将  $D_1$  和  $D_2$  (见方程 11-57) 代入方程(e)和(d), 求得杆的应变:

$$\epsilon_{ab} = \frac{D_1}{L} = \frac{P^2}{A^2 B^2} \quad (\text{伸长})$$

$$\epsilon_{bc} = \frac{D_2 - D_1}{2L} = \frac{2P^2}{A^2 B^2} \quad (\text{缩短})$$

然后, 由应力-应变定律确定应力:

$$\sigma_{ab} = B\sqrt{\epsilon_{ab}} = \frac{P}{A} \quad (\text{拉应力})$$

$$\sigma_{bc} = B\sqrt{\epsilon_{bc}} = \frac{\sqrt{2} P}{A} \quad (\text{压应力})$$

最后, 桁架的杆力为

$$N_{ab} = \sigma_{ab} A = P \quad (\text{拉力})$$

$$N_{bc} = \sigma_{bc} A = \sqrt{2} P \quad (\text{压力})$$

这些结果很容易用静力学予以验证。

在此例中, 尽管结构非常简单, 按静定结构加以分析会容易得多, 但我们却有意识地叙述了求解的所有步骤, 以便说明位移法及使用卡斯提利阿诺第



一定理的一般概念。使用位移法需要解两个联立方程，因为该桁架为两度动不定。然而，由于该结构是静定的，它也可分析如下：(1) 根据静力平衡求出杆力；(2) 用横截面面积去除杆力求出杆的应力；(3) 根据应力-应变图求得应变；(4) 由应变确定诸杆的伸长；(5) 绘制维利奥图(见第 1.5 节)，以求得节点  $B$  的位移  $D_1$  和  $D_2$ 。

**例题 2** 作为卡斯提利阿诺第一定理及刚度法分析线性结构的例子，让我们研究图 11-33a 所绘的桁架。假设该桁架的四根杆均由弹性模量  $E$  的相同线性弹性材料构成。每根杆的长度为  $L$ ，横截面面积为  $A$ ，而  $\beta$  角等于  $30^\circ$ 。载荷  $P_1$  和  $P_2$  作用在桁架的节点  $E$  处。

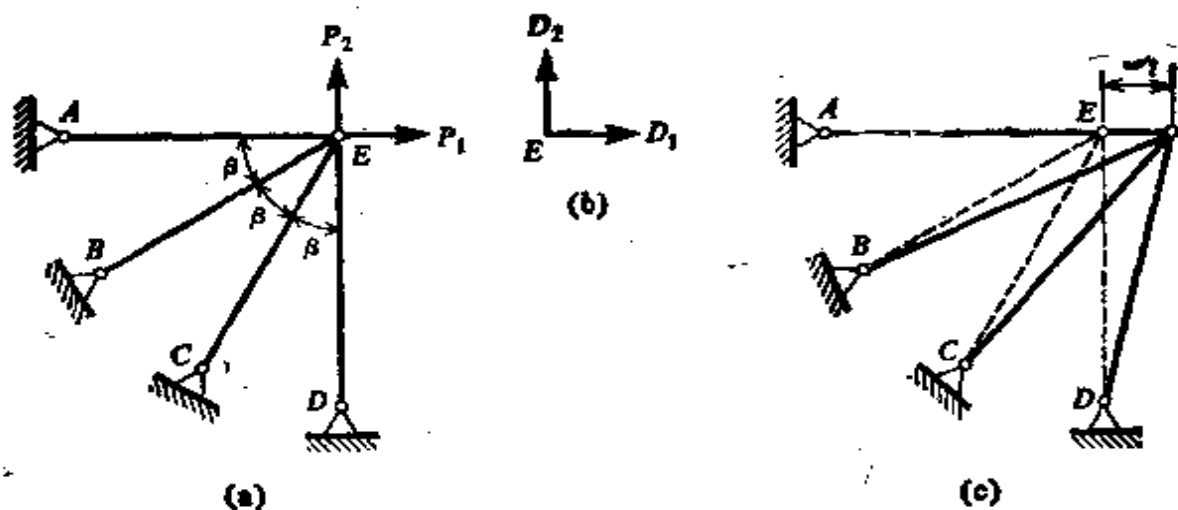


图 11-33. 例题 2. 平面桁架。

选择这个桁架为例是因为节点移动仅有两个自由度，亦即，节点  $E$  处的水平移动  $D_1$  和竖直移动  $D_2$  (图 11-33b)。为了将应变能  $U$  表达为  $D_1$  和  $D_2$  的函数，我们开始先假设  $D_1$  单独发生(图 11-33c)。在此条件下，各杆的伸长量如下：

$$\Delta_{ae} = D_1 \quad \Delta_{be} = \frac{\sqrt{3} D_1}{2} \quad \Delta_{ce} = \frac{D_1}{2} \quad \Delta_{de} = 0$$

它们很容易根据几何图形加以验证。当位移  $D_2$  单独发生时，各元件的伸长量为

$$\Delta_{ae} = 0 \quad \Delta_{be} = \frac{D_2}{2} \quad \Delta_{ce} = \frac{\sqrt{3} D_2}{2} \quad \Delta_{de} = D_2$$

所以，当  $D_1$  和  $D_2$  同时发生时，各杆的伸长量如下：

$$\Delta_{ae} = D_1 \quad \Delta_{be} = \frac{\sqrt{3} D_1 + D_2}{2} \quad \Delta_{ce} = \frac{D_1 + \sqrt{3} D_2}{2} \quad \Delta_{de} = D_2 \quad (g)$$

每根杆的应变能可根据它的伸长立刻计算出来(见方程 11-34a)，然后，将所有四根杆的能量相加，可得该桁架的总应变能  $U$ ：

$$U = \frac{EA}{2L} D_1^2 + \frac{EA}{2L} \left( \frac{\sqrt{3} D_1 + D_2}{2} \right)^2 + \frac{EA}{2L} \left( \frac{D_1 + \sqrt{3} D_2}{2} \right)^2 + \frac{EA}{2L} D_2^2$$

或

$$U = \frac{EA}{2L} (2D_1^2 + \sqrt{3} D_1 D_2 + 2D_2^2) \quad (11-58)$$

注意, 此表达式给出的应变能为位移的二次函数。

应用卡斯提利阿诺第一定理, 我们得到下列平衡方程(见方程 11-53):

$$P_1 = \frac{2EA}{L} D_1 + \frac{\sqrt{3} EA}{2L} D_2 \quad (h)$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{3} EA}{2L} D_1 + \frac{2EA}{L} D_2 \quad (i)$$

这些方程可容易地对节点位移求解, 其结果为

$$D_1 = \frac{2L}{13EA} (4P_1 - \sqrt{3} P_2) \quad D_2 = \frac{2L}{13EA} (-\sqrt{3} P_1 + 4P_2)$$

最后, 该桁架各杆的轴力均可计算出来。其步骤为: 首先将节点位移  $D_1$  和  $D_2$  代入方程(g), 以求出各杆的伸长量, 然后根据此伸长量利用方程  $N = EA\Delta/L$  求出杆力。其结果为

$$N_{ac} = \frac{8P_1}{13} - \frac{2\sqrt{3} P_2}{13} \quad N_{bc} = \frac{3\sqrt{3} P_1}{13} + \frac{P_2}{13}$$

$$N_{ab} = \frac{P_1}{13} + \frac{3\sqrt{3} P_2}{13} \quad N_{cb} = -\frac{2\sqrt{3} P_1}{13} + \frac{8P_2}{13}$$

这样就用应变能法完成了对该桁架的全部分析。

**例题 3** 作为将应变能法用于线性结构的另一个例子, 让我们研究图 11-34a 所示的平面刚架  $ABC$ 。元件  $AB$  和  $BC$  的长度均为  $L$ , 而弯曲刚度均为  $EI$ , 结构上的载荷为作用在节点  $B$  处的力偶  $M_0$ 。分析的目的在于计算节点位移  $D_1$  和  $D_2$ , 它们是节点  $B$  和  $C$  处的转角。

分析的重要一步是求以未知节点位移  $D_1$  和  $D_2$  表示的应变能, 正如对上述两个桁架例子已经说明过的那样。为了对平面刚架完成这一步骤, 这样作常常很有帮助, 即设想未知节点位移是通过增添与这些位移对应的约束而施加到结构上去的(见图 11-34b)。于是, 刚架的每根元件都处于固定端梁的情况但端部有转动。因而, 如果我们能求得储存在这种梁(见图 11-35)内的应变能公式, 那么我们就可使用这个公式求得该平面刚架的应变能。在图 11-35 所示的固定端梁的例子中, 我们可以利用早先在图 11-24a 中给出的元件刚

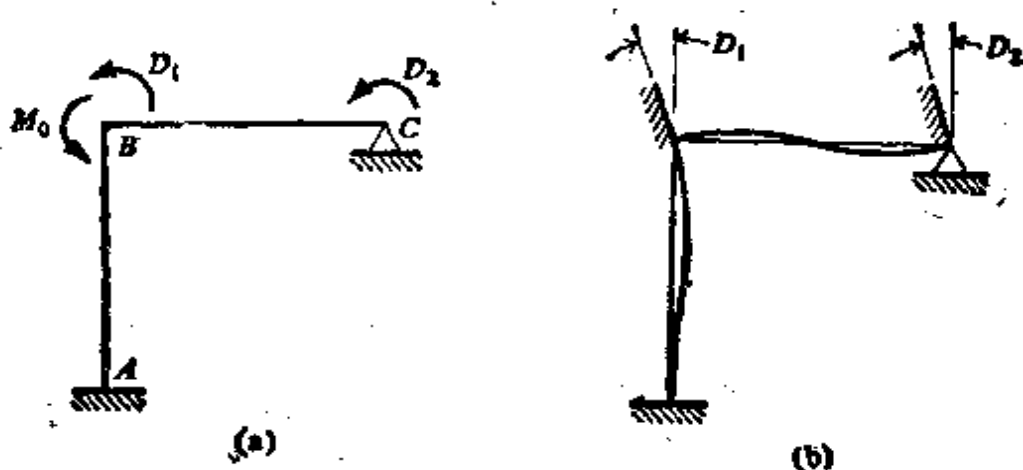


图 11-34. 例题 3. 平面刚架.

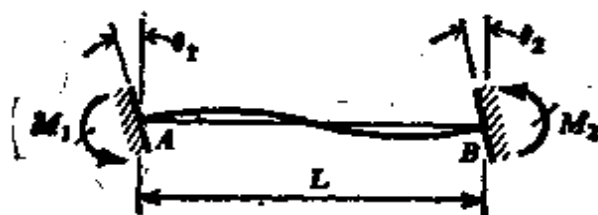


图 11-35. 端处有转角  $\theta_1$  和  $\theta_2$  时梁中的应变能.

度公式, 于是便能立刻写出梁端处以其端部转角  $\theta_1$  和  $\theta_2$  表示的弯矩  $M_1$  和  $M_2$  的表达式:

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \theta_1 + \frac{2EI}{L} \theta_2 \quad M_2 = \frac{2EI}{L} \theta_1 + \frac{4EI}{L} \theta_2 \quad (11-59a, b)$$

梁中储存的应变能(见方程 11-40)为

$$U = \frac{1}{2} M_1 \theta_1 + \frac{1}{2} M_2 \theta_2$$

或者, 代入上述  $M_1$  和  $M_2$  的表达式之后, 得

$$U = \frac{2EI}{L} (\theta_1^2 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2) \quad (11-60)$$

只要梁呈线性状态, 此方程就给出已知梁端转角时该梁的应变能(图 11-35).

现在我们就有条件回到图 11-34 的平面刚架, 并确定以位移  $D_1$  和  $D_2$  所表示的应变能. 其步骤是: 将方程(11-60)应用于每个元件, 然后将其结果相加. 对元件 AB, 我们有  $\theta_1 = 0$  及  $\theta_2 = D_1$ , 而对元件 BC, 我们有  $\theta_1 = D_1$  及  $\theta_2 = D_2$ . 于是, 应变能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{2EI}{L} (D_1^2) + \frac{2EI}{L} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) \\ &= \frac{2EI}{L} (2D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) \end{aligned}$$

根据卡斯提利阿诺第一定理, 现在我们得到下列两个方程:

$$M_0 = \frac{\partial U}{\partial D_1} = \frac{2EI}{L} (4D_1 + D_2)$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial D_2} = \frac{2EI}{L} (D_1 + 2D_2)$$

求解这些刚度法的平衡方程, 得出节点位移  $D_1$  和  $D_2$

$$D_1 = \frac{M_0 L}{7EI} \quad D_2 = -\frac{M_0 L}{14EI}$$

这样, 就求得了刚架的节点转动。作为求解的最后一步, 可以使用方程 (11-59) 确定每根元件端部的力矩。

此例非常适合于使用应变能和卡斯提利阿诺第一定理, 因为载荷  $M_0$  相应于未知位移之一。结构上唯一其他可能的载荷应当是相应于  $D_2$  的力偶, 因为这种分析方法的每一项要求每个载荷必须与一个未知的节点位移相对应。这就提出了一个问题, 当其他位置有载荷时, 譬如元件的中点处作用有集中载荷, 如何分析这一结构。一种可能是将每个加载点均作为结构的节点, 从而引进相应于这些载荷的附加未知节点位移。这个方法的缺点是, 它大大增加了待求解的平衡方程数目。大多数结构分析者宁可采用的方法是: 用作用在节点上的一组静力等效载荷取代作用在两节点之间的任何载荷。自然, 只有在叠加原理成立时才有可能使用等效载荷系。确定等效载荷的方法并不困难, 但我们不打算在此加以解释。关于进一步的细节则应求助于结构分析方面的书籍\*。

## 11.10 势能法

势能概念在结构力学中是极为重要的。在以下的讨论中, 我们将说明如何将势能用于结构分析, 以及它与应变能和位移有什么样的关系。此外, 在下节中我们将表明, 当精确的分析不可行时, 势能常可用于结构的近似分析。

任一机械或结构系统在某一实际位形中的势能定义为: 假如系统从该实际位形运动到某一参考位形, 所有作用力所作的功, 对我们来说, 总是把卸载时的结构形状取为参考位形。当然, 实际位形就是受载结构的形状。因而, 势能为结构从受载位形运动到它的卸载位置时, 所有作用力作的功。

结构的作用力包括外力和内力, 后者在梁、桁架或刚架的情况

\* 例如, 见参考文献 11-14 第 136 页和 204 页。

下就是应力合力。很清楚，内力的势能为受载结构中所储存的应变能  $U$ ，因为如果结构从它的实际位形变回到它的卸载形状时，恢复的功就等于应变能。另一方面，外力势能为负的，因为结构上每个载荷当它从最终位置“倒退”到初始位置时均作负功。因而，载荷的势能为

$$-\sum_{i=1}^n P_i \delta_i$$

此处  $P_i$  代表结构上的载荷， $\delta_i$  为相应的位移，而  $n$  为载荷的个数。应当特别注意，载荷  $P_i$  的势能与结构加载过程中  $P_i$  所作的功不同。在加载过程中，力  $P_i$  的值自零逐渐增大到终值，载荷所作的功由方程(11-31)给出。另一方面，势能为力(以其终值作用)从它的最终位置回到它的参考状态时所作的功。

以上讨论表明，结构系统的总势能由结构的应变能和载荷的势能组合得到，因而

$$PE = U - \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad (11-61)$$

这一总势能表达式适用于任一弹性结构，不论它是线性的或非线性的。

为了用势能法分析结构，我们必须从识别未知节点位移  $D_1, D_2, \dots, D_n$  开始。然后把应变能  $U$  表示为这些位移的函数，如同已在第 11.9 节对应变能法叙述过的那样。另外，也假设结构上记为  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的所有载荷与未知节点位移相对应。在这些条件下，上述总势能的表达式变为

$$PE = U - \sum_{i=1}^n P_i D_i \quad (11-62)$$

现在假设我们取势能对任一个未知位移  $D_i$  的偏导数，那么我们就得到下列方程：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_i} = \frac{\partial U}{\partial D_i} - P_i \quad (a)$$

根据卡斯提利阿诺第一定理，我们知道  $P_i = \partial U / \partial D_i$ ，因此得出结论：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_i} = 0$$

对于每一个未知的节点位移  $D_1, D_2, \dots, D_n$  均可应用此方程, 因而我们得出  $n$  个联立方程:

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1} = 0 \quad \frac{\partial PE}{\partial D_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial PE}{\partial D_n} = 0 \quad (11-63)$$

将这些方程与方程(a)和方程(11-52)比较, 我们可以看出, 这些方程就是位移法的平衡方程。因此, 利用势能导出的与用应变能法所得的方程相同。然而, 从概念来看, 方程(11-63)具有特殊的意义, 因为它们表明, 当结构的势能取驻值时, 结构的平衡条件得以满足, 此驻值可能最小, 最大或为中性值。因而, 方程(11-63)可认为是势能驻值原理的数学表达式。此原理陈述为: 如果弹性结构(线性的或非线性的)的势能表示为未知节点位移的函数, 那么当这些位移的值使总势能取驻值时, 该结构处于平衡状态。通常结构处于稳定平衡, 因而总势能为一最小值。在这些条件下, 方程(11-63)代表最小势能原理。对于不稳定结构, 其势能可能为最大值或为中性值。如果结构呈线性, 方程(11-63)就得出刚度法的平衡方程, 此法可视为位移法的特殊情况\*。

为了说明在非线性动不定结构分析中的势能法, 让我们参看第11.9节例题1中所述并绘于图11-32的桁架, 以未知节点位移  $D_1$  和  $D_2$  表示的该结构的应变能由方程(11-56)给出, 载荷  $P$  对该结构卸载位形的势能为  $-PD_2$ , 所以, 其总势能为

$$PE = \frac{AB}{3\sqrt{L}} [2D_1^{3/2} + (D_2 - D_1)^{3/2}] - PD_2$$

现在应用势能驻值原理(方程11-63), 我们得到

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1} = \frac{AB}{2\sqrt{L}} [2D_1^{1/2} - (D_2 - D_1)^{1/2}] = 0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial D_2} = \frac{AB}{2\sqrt{L}} (D_2 - D_1)^{1/2} - P = 0$$

\* 势能驻值原理是应用力学的基本原理, 除用于结构分析外, 还有许多用途。有时称它为基尔霍夫原理, 因为基尔霍夫首次使用过它(参考文献11-31和6-38)。

据这些方程, 我们立刻得出第 11.9 节例题 1 的方程(e)和(f), 因此, 分析的其余部分仍按此例中已经叙述过的那样进行。于是很显然, 势能驻值原理直接导出平衡方程以及用位移法的结构分析。

我们可用势能驻值方法求解的另一个例子是上节中的例题 2。此例为绘于图 11-33 中的四杆桁架。该桁架呈线性, 其应变能由方程(11-58)给出。因为载荷的势能为  $-P_1 D_1 - P_2 D_2$ , 我们看出, 其总势能为

$$PE = \frac{EA}{2L} (2D_1^2 + \sqrt{3} D_1 D_2 + 2D_2^2) - P_1 D_1 - P_2 D_2$$

由势能驻值原理得出

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1} = \frac{EA}{2L} (4D_1 + \sqrt{3} D_2) - P_1 = 0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial D_2} = \frac{EA}{2L} (\sqrt{3} D_1 + 4D_2) - P_2 = 0$$

这些方程为刚度法的平衡方程, 与前面第 11.9 节例题 2 所得的方程(h)和(i)相同。因此, 可按已叙述过的那样去完成该桁架的分析。

这两个实例表明了如何用势能法分析线性或非线性结构。此应变能必须以未知节点位移来表达, 然后和载荷的势能组合得出总势能。应用势能驻值原理导出了与未知节点位移一样多的联立方程, 这些方程是位移法的平衡方程(或者, 如果结构呈线性, 则为刚度法的平衡方程), 由它们可解出未知位移。

本章利用桁架结构作为例题是很方便的, 原因是桁架元件沿其全长具有常值应力和应变, 因此, 计算大大简化, 而又不致使所讨论的基本原理含糊不清。然而, 必须认识到, 势能方法在实际中可用于各种不同的复杂结构。此类结构的分析通常很复杂, 因此不适于在本书中介绍\*。

## 11.11 瑞利-里兹法

势能法的主要应用之一就是对那些不可能或非常难求到精确解的结构进行近似的结构分析。如上节所述, 当使用势能法时, 需要将应变能  $U$  表为结构节点位移的函数。对于桁架或简单的刚架来说, 其应变能的这种表达式相对容易求得, 因为未知节点位移的数目很少。然而, 如果我们遇到了自由度数目很多、甚至有可能是无

\* 势能法和应变能法的应用遍及于结构分析中, 读者会在文献中发现许多有用的资料。许多教科书都讨论到这些课题, 但是参考文献 11-32 至 11-34, 对于初学特别有价值。应变能和势能原理的历史发展已由奥拉瓦斯(Ora Vas)和麦克莱恩(McLean)在参考文献 1-13 中和奥拉瓦斯在参考文献 6-24 中全面地记载过。

限多的结构,在此情况下,我们可用假设的变形形状去逼近该结构的真实形状。此变形后的形状可用形状函数代表,它包含一个或多个待定的位移参数。于是就可以在这个假设变形形状的基础上计算势能,这意味着势能将表示为未知位移参数的函数。根据势能原理我们知道,位移的大小必须使势能得到一个驻值。因而,我们可将势能对每一个位移参数取偏导数并使这些偏导数等于零。这种作法导出一组包含位移参数作为未知量的联立方程。有多少未知参数,就会有多少个方程,因此我们可解这些方程求出这些参数。已知位移参数就意味着所假设的变形形状已经确立。除特殊情况外,这个形状将近似于真实形状。

根据这一近似形状,现在就可能求出反力和应力合力的近似值。通常这些量不会有位移本身那样精确(相对地),因为它们是由位移函数经微分而得。由于位移函数并不精确,其导数就更不精确,因为它们代表了诸近似量之差。此外,由于反力和应力合力只是些近似值,所以它们可能并不与结构上的实际载荷处于静力平衡之中。

从以上所述可以看出,适当选择形状函数对于保证最终结果的良好精度是很重要的。所以,分析者应按他自己的判断选择一个恰当地接近于真实挠曲形状的函数。形状函数选择得愈准确,计算的结果就愈好。自然,如果选择的形状函数碰巧是精确的形状函数,那么最后结果也将是精确的。作为最低要求,形状函数应当选择得使其满足结构的几何边界条件,亦即满足挠度和斜率的条件,这将在下面例题中加以说明。另外,在所定义的近似形状函数中,我们使用的位移参数愈多,在多数情况下其近似的挠曲形状就愈精确。自然,我们使用的参数愈多,所求解的联立方程就愈多,这也是事实。

上述方法称为瑞利-里兹法,因为它是由 L. 瑞利和瑞士物理学家 W. 里兹所创。瑞利于 1877 年在《声学理论》中叙述过此法(见参考文献 11-8),而里兹于 1908 年赋予此法以坚实的数学基础(参考文献 11-35)。瑞利-里兹法极为有效,不仅用于结构分



析,而且也用于振动理论、屈曲理论以及板与壳的分析。这里提到的也只是几个例子\*,它还是有限元法的基础,在有限元法中,使用假设的位移函数来表示微小的但是有限的单元的位移,结构则被细分为许多单元以便进行分析\*\*。

因为此法是建立在势能驻值原理基础上的,所以瑞利-里兹法既可用于线性也可用于非线性结构。此外,当使用此法时,不需要区分静定结构和静不定结构,这两类结构均可用相同的步骤进行分析。

**例题 1** 作为瑞利-里兹法的第一个实例,让我们分析一个承受集中载荷  $P$  的简支梁(见图 11-36),该梁为线弹性并具有弯曲刚度  $EI$ 。选择这个特例是为了以尽可能简单的方式说明瑞利-里兹法的重要特征。

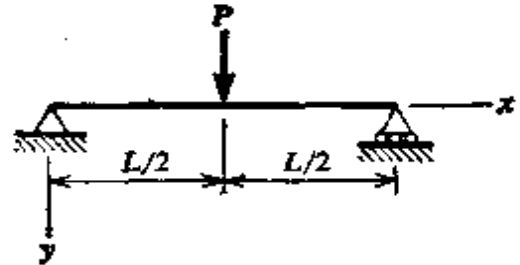


图 11-36. 例题 1 和 2. 用瑞利-里兹法求简支梁的挠度。

对于近似代表此梁挠度曲线的形状函数,有许多可能的选择。经验已经表明,三角函数和多项式函数通常最为方便。所以,让我们选择正弦项形式的形状函数:

$$v = \delta \sin \frac{\pi x}{L} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (\text{a})$$

式中  $v$  为梁的挠度,  $\delta$  为位移参数,在此情况下它等于中点挠度。方程(a)所给的正弦项特别适合于简支梁,因为它不仅满足几何边界条件(在  $x=0$  和  $x=L$  处,  $v=0$ ),而且也满足曲率的边界条件(在  $x=0$  和  $x=L$  处,  $v''=0$ )。

呈线性性态的梁,其应变能可根据下列表达式得出(见方程 6-34b):

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L (v'')^2 dx \quad (11-64)$$

如果已知挠度  $v$  的精确表达式,可将它代入此方程求得精确的应变能。然而,在瑞利-里兹法中,我们必须代入假设的变形形状并求得应变能的近似值。于是,将方程(a)的  $v$  代入方程(11-64),我们得到

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{\pi^4 \delta^2}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$$

此式积分后变为

\* 关于瑞利-里兹法更多的资料见参考文献 11-33 和 11-34。

\*\* 见参考文献 11-37。

$$U = \frac{\pi^4 EI \delta^2}{4L^3}$$

正如所料, 对于呈线性性态的结构, 应变能为位移参数的二次函数。

载荷  $P$  的势能为  $-P\delta$ , 因此该承载梁的总势能为

$$PE = U - P\delta = \frac{\pi^4 EI \delta^2}{4L^3} - P\delta$$

此表达式给出以位移参数  $\delta$  表示的势能,  $\delta$  在此分析阶段为未知量。然而, 我们由势能驻值原理得知, 结构的位移必须具有这样的值, 以使势能得一驻值。当我们对梁设了一个挠曲形状(方程 a)时, 我们只提供了一个位移参数, 因此这个参数必须具有一个使势能取得驻值的数值。于是, 应用势能原理得出

$$\frac{dPE}{d\delta} = \frac{\pi^4 EI \delta}{2L^3} - P = 0$$

由此我们可解出位移参数:

$$\delta = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} = 0.02053 \frac{PL^3}{EI} \quad (b)$$

此结果为梁中点处真实挠度的近似值。它与下面的精确表达式对比相当接近。

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} = 0.02083 \frac{PL^3}{EI} \quad (c)$$

近似结果与精确结果之差小于 2%。

挠度的近似解比精确解小, 其理由如下: 假定仅有一个待定参数的形状函数, 其效果是使一根具有无限多个自由度的梁减缩为仅具有一个自由度的系统。因而, 实际的梁要比具有假设挠曲形状的虚构梁更为柔软。或者, 从另一个不同的观点来看, 我们可以说, 为了使梁具有所假设的挠曲形状, 我们必须在梁上施加外部约束, 迫使它变成那种形状。梁上的这种附加约束只能使它变成一根较为刚硬的梁。因此, 无论从那个观点来看, 我们都可得出结论: 具有假设形状的梁要比实际的梁更为刚硬。所以, 它的挠度一般比真实挠度小些。

现在继续进行图 11-36 所示简支梁的近似分析, 下一步我们要求出梁中的弯矩。基于所假设的挠曲形状, 此弯矩为

$$M = -EIv'' = -EI \left( -\frac{\pi^2 \delta}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right)$$

将方程(b)的  $\delta$  代入, 我们得到

$$M = \frac{2PL}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

为了校核此结果的正确性, 让我们比较  $x=L/4$  和  $x=L/2$  处的近似弯矩和精确弯矩。对于  $x=L/4$ , 近似的  $M$  为  $0.143PL$ , 而精确的  $M$  为  $0.125PL$ 。

对于  $x=L/2$ , 近似的  $M$  为  $0.203PL$ , 而精确的  $M$  为  $0.250PL$ . 因此, 近似结果的误差分别为 14% 和 19%, 这表明, 与中点挠度相比, 其精确度明显降低, 因中点挠度的误差小于 2%. 注意, 近似弯矩在一种情况下太高, 而在另一种情况下又太低. 一般来说, 我们不能得出用瑞利-里兹法求出的应力合力是高于还是低于精确结果的结论.

**例题 2** 为了对上述例题中的简支梁作更精确的分析, 我们必须假设一个更为精确的形状函数, 或者采用多于一项的形状函数. 本例将说明后一种方法. 让我们用含有两个正弦项的形状函数表示其挠度如下:

$$v = \delta_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \delta_3 \sin \frac{3\pi x}{L} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (d)$$

式中  $\delta_1$  和  $\delta_3$  为未知的位移参数. 这里选用  $\delta_3 \sin \frac{3\pi x}{L}$  而不选用  $\delta_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$  为第二项, 因为后面这个函数给出的挠度对于梁的中点是不对称的, 因此我们事先已知, 根据势能驻值原理我们会得出  $\delta_2$  为零. 在方程(d)中给出的两个正弦项的组合要比两者之中的任何一项都更为接近于真实的挠度曲线.

位移参数  $\delta_1$  和  $\delta_3$  中哪一个也不代表梁中点的挠度, 事实上, 这些参数代表了各自项的幅度. 自然, 如将  $x=L/2$  代入方程(d)即可看出, 梁中点的挠度与  $\delta_1$  及  $\delta_3$  有直接关系, 于是, 我们得到

$$\delta = \delta_1 \sin \frac{\pi}{2} + \delta_3 \sin \frac{3\pi}{2} = \delta_1 - \delta_3 \quad (e)$$

势能驻值原理使我们能确定  $\delta_1$  和  $\delta_3$  之值, 然后根据方程(e), 我们就可确定中点处的近似挠度. 另外, 根据方程(d), 我们也将近似地得知整个挠曲形状.

现在继续进行其余部分的分析, 让我们将所假设的挠曲形状(方程d)代入应变能的方程(方程 11-6<sup>d</sup>), 结果如下:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{\pi^2 \delta_1}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{9\pi^2 \delta_3}{L^2} \sin \frac{3\pi x}{L} \right)^2 dx$$

或

$$U = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} \left[ \delta_1^2 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx + 18\delta_1 \delta_3 \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} dx + 81\delta_3^2 \int_0^L \sin^2 \frac{3\pi x}{L} dx \right] \quad (f)$$

不难证明下列定积分:

$$\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \quad (11-65a)$$

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \quad (11-65b)$$

式中  $m$  和  $n$  均为整数. 所以, 应变能的方程(f)简化为

$$U = \frac{\sigma^4 EI}{4L^3} (\delta_1^2 + 81\delta_3^2)$$

我们再度观察到, 应变能为位移参数的二次函数。

载荷  $P$  的势能为  $-P\delta$ , 此处  $\delta$  为梁中点的挠度。因  $\delta$  等于  $\delta_1 - \delta_3$ , 如方程(e)所示, 故其总势能变为

$$PE = \frac{\sigma^4 EI}{4L^3} (\delta_1^2 + 81\delta_3^2) - P(\delta_1 - \delta_3)$$

现在我们可应用势能驻值原理并得出两个方程:

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_1} = \frac{\sigma^4 EI \delta_1}{2L^3} - P = 0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_3} = \frac{81\sigma^4 EI \delta_3}{2L^3} + P = 0$$

求解这两个方程, 得出位移参数:

$$\delta_1 = \frac{2PL^3}{\sigma^4 EI} \quad \delta_3 = -\frac{2PL^3}{81\sigma^4 EI}$$

最后, 将这些结果代入方程(d), 得出近似的挠度曲线:

$$v = \frac{2PL^3}{81\sigma^4 EI} \left( 81 \sin \frac{\sigma x}{L} - \sin \frac{3\sigma x}{L} \right) \quad (g)$$

为了确定上述挠度表达式的精确度, 让我们研究梁的中点挠度  $\delta$ 。将  $x = L/2$  代入方程(g), 我们得到

$$\delta = \frac{2PL^3}{81\sigma^4 EI} (81 + 1) = \frac{164PL^3}{81\sigma^4 EI} = 0.02078 \frac{PLx}{EI}$$

此结果是对例题 1 选用一项求解的一种改进(见方程 b), 它非常接近于精确挠度(方程 c)。

梁中的近似弯矩为

$$M = -EIv'' = \frac{2PL}{9\sigma^2} \left( 9 \sin \frac{\sigma x}{L} - \sin \frac{3\sigma x}{L} \right)$$

在  $x = L/4$  处, 根据此方程求得的近似弯矩为  $0.127PL$ , 它与精确弯矩  $0.125PL$  相比非常接近。在  $x = L/2$  处, 近似弯矩为  $0.225PL$ , 而精确弯矩为  $0.250PL$ 。这些近似结果比根据例题 1 所给的单项求解结果要精确得多。

在所假设的挠度  $v$  的表达式中采取附加的正弦项即可求得更为精确的结果。例如, 在方程(d)给出的表达式中加上一项  $\delta_5 \sin 5\sigma x/L$ , 我们可以得到一个三项表达式。自然, 每增加一个这样的附加项, 就多引进一个位移参数, 因而也就必须多解一个联立方程。在理论上, 如果使用一个完整的无穷级数, 就会得出精确的结果\*。

**例题 3** 试确定图 11-37 所示具有固定端的非棱柱形梁中点处挠度的

\* 见参考文献 11-33。

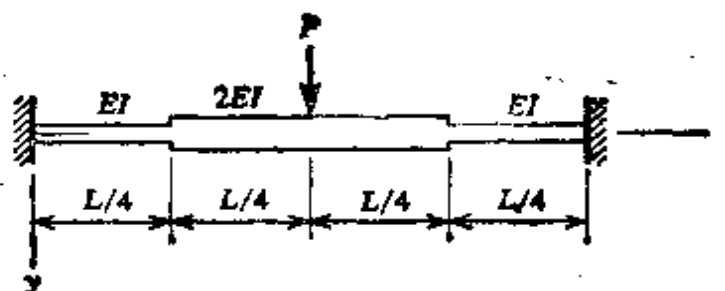


图 11-37. 例题 3. 用瑞利-里兹法求非棱柱形固定端梁的挠度。

近似值。注意，这根梁的精确分析是相当冗长的，因为此梁为两度静不定，而且还具有两个不同的惯性矩。

在此例中，我们将假设一个多项式作为形状函数，而不像我们在前面两个例子中所作的那样使用三角函数。我们可以考虑的最简单的多项式为一个具有下述一般形式的二次函数：

$$v = A_1 x^2 + A_2 x + A_3 \quad (\text{h})$$

式中  $A_1$ ,  $A_2$  和  $A_3$  为常数。然而，我们不能使用这个表达式，因为方程(h)不可能满足梁的几何边界条件(两端处的挠度和斜率均等于零)。如果我们试图确定常数  $A_1$ ,  $A_2$  和  $A_3$  之值使之满足边界条件，那么我们得出下列结果：(1) 在  $x=0$  处<sup>\*</sup>， $v=0$  的条件给出  $A_3=0$ ；(2) 在  $x=0$  处， $v'=0$  的条件给出  $A_2=0$ ；(3) 在  $x=L$  处， $v=0$  的条件给出  $A_1=0$ 。因此我们看出，二次多项式虽然对简支梁也许是令人满意的，但作为固定端梁的形状函数是不能令人满意的。

另外的可能性为具有下列一般形式的三次式：

$$v = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \quad (0 \leq x \leq L/2) \quad (\text{i})$$

对此表达式所指明的范围是必要的，因为一个三次式将给出关于梁中点为非对称的挠度曲线，因此我们不能期望用方程(i)表示整条对称的挠度曲线。然而，用一个三次多项式表示梁左半边的挠度曲线可以满足我们的需要，因为我们可以先确定梁一半的应变能，然后将其结果加倍。

为了确定方程(i)中出现的常数  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  和  $A_4$ ，我们可以使用与梁左半边挠度和斜率有关的下列条件：(1) 在  $x=0$  处， $v=0$ ；(2) 在  $x=0$  处， $v'=0$ ；(3) 在  $x=L/2$  处， $v'=0$ ；(4) 在  $x=L/2$  处， $v=\delta$ ，此处  $\delta$  为梁中点的挠度。前两个条件给出  $A_3=A_4=0$ ，第三个条件给出  $A_2=-3A_1L/4$ ，而最末一个条件给出  $A_1=-16\delta/L^3$ 。将所有这些结果代入方程(i)，最后我们得到所需的形状函数：

\* “在  $x=0$  处”为译者所加。

$$v = \frac{4\delta x^2}{L^3}(3L-4x) \quad (0 \leq x \leq L/2) \quad (j)$$

式中  $\delta$  为待定的位移参数。

现在就象上例那样进行, 我们由方程(11-64)求出应变能:

$$U = 2 \left( \frac{EI}{2} \right) \int_0^{L/4} (v'')^2 dx + 2 \left( \frac{2EI}{2} \right) \int_{L/4}^{L/2} (v'')^2 dx$$

由方程(j)所得之值代入此式然后积分, 我们求出

$$U = \frac{144EI\delta^2}{L^3}$$

于是, 势能为  $PE = U - P\delta = \frac{144EI\delta^2}{L^3} - P\delta$

利用势能驻值定理, 我们得出

$$\frac{dPE}{d\delta} = \frac{288EI\delta}{L^3} - P = 0$$

由此

$$\delta = \frac{PL^3}{288EI} = 0.00347 \frac{PL^3}{EI} \quad (k)$$

这个结果仅比精确结果低3%, 精确结果为

$$\delta = \frac{11PL^3}{3072EI} = 0.00358 \frac{PL^3}{EI} \quad (l)$$

此精确结果可用第六章和第七章所述的方法确定, 但是近似结果比较容易计算, 而且对许多实用场合来说是足够精确的。

**例题 4** 在本例中, 我们要说明如何使用瑞利-里兹法求理想柱的临界屈曲载荷. 让我们研究图 11-38a 所示具有固定基础的棱柱形柱. 该柱的屈曲形状绘于图 11-38 的(b)中, 可以方便地用三角函数或多项式函数表达. 使用适当的三角函数就会导出临界载荷的精确结果, 因为我们知道, 真实的挠度曲线为三角函数(见 10.2 节方程 d 和 f). 习题 11.11-5 说明了这种精确解.

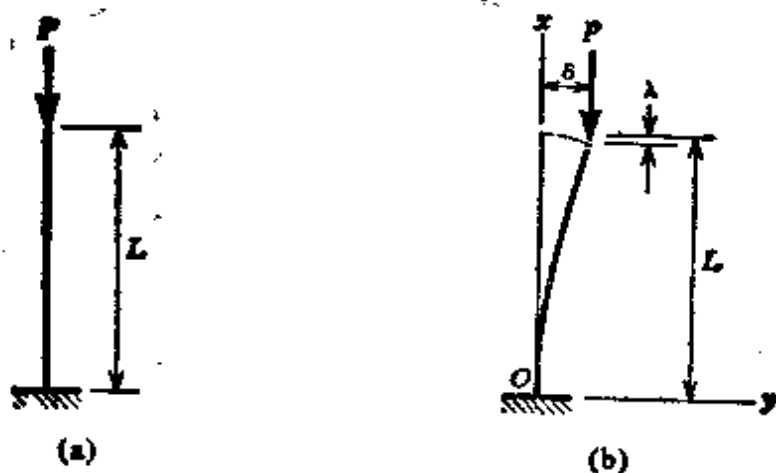


图 11-38. 例题 4. 用瑞利-里兹法求柱的临界屈曲载荷。

然而,在本例中,使用多项式形式的近似形状函数将更为有益。

最简单的多项式为方程(h)所给的二次函数。如果我们确定常数  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_3$ , 以便满足几何边界条件(在  $x=0$  处,  $v=0$ ; 在  $x=0$  处  $v'=0$ ; 及在  $x=L$  处,  $v=\delta$ ), 那么二次形状函数变为

$$v = \frac{\delta x^2}{L^2} \quad (\text{m})$$

此处  $L$  为柱长,  $\delta$  为自由端挠度。虽然此形状函数满足几何边界条件, 它却是该挠度曲线的一种粗劣的表达式, 因为它给出沿柱整个长度上不变的曲率(即  $v''$ )。实际上, 在柱的自由端处曲率为零, 而在基础处曲率最大。然而, 我们可以继续使用方程(m), 并根据方程(11-64)计算其应变能:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{2\delta}{L^2} \right)^2 dx = \frac{2EI\delta^2}{L^3}$$

载荷  $P$  的势能等于  $-P\lambda$ , 此处  $\lambda$  为在屈曲过程中由于柱的弯曲而在其顶端引起的竖直向下的位移; 亦即,  $\lambda$  为该柱从图 11-38a 所示未挠曲位置移动到图 11-38b 所示已挠曲位置时发生的竖直位移。这个位移由方程(7-34)给出, 该式重写于此:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L (v')^2 dx \quad (11-66)$$

将  $v'$  代入此方程并进行积分, 我们得到

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{2\delta x}{L^2} \right)^2 dx = \frac{2\delta^2}{3L}$$

所以, 总势能为

$$PE = U - P\lambda = \frac{2EI\delta^2}{L^3} - \frac{2P\delta^2}{3L}$$

现由势能原理给出

$$\frac{dPE}{d\delta} = \frac{4EI\delta}{L^3} - \frac{4P\delta}{3L} = 0$$

或

$$\delta \left( \frac{3EI}{L^2} - P \right) = 0$$

如果  $\delta=0$ , 则此方程虽然得以满足, 但该柱却仍保持直线而没有屈曲。为得出该方程的一个非平凡解, 括号中的项必为零, 由此得出

$$P = P_{cr} = \frac{3EI}{L^2}$$

这个近似的临界载荷答案约比精确值高 22%, 精确值为  $P_{cr} = \pi^2 EI / 4L^2$ 。近似屈曲载荷过高是预料到的, 因为我们已经说明, 近似的挠曲形状代表了一个比实际结构更为刚硬的结构。

假设一个具有三次多项式形式的形状函数, 可求得更为精确的结果:

$$v = \frac{\delta}{2L^3}(3Lx^2 - x^3) \quad (n)$$

这个形状函数不仅满足几何边界条件,而且也满足在自由端处曲率为零的条件。按前面那样进行,我们得到

$$U = \frac{3EI\delta^2}{2L^3} \quad \lambda = \frac{3\delta^2}{5L}$$

临界载荷的最后结果为

$$P_{cr} = \frac{5EI}{2L^2}$$

这个值仅比精确的临界载荷高1.3%,与使用二次形状函数所得结果相比,表现出很大的改进。

使用包含两个位移参数而非一个位移参数的形状函数,可求得更为精确的结果。例如,我们可取形状函数为二次式和三次式之和,如下:

$$v = \frac{\delta_1 x^2}{L^2} + \frac{\delta_2}{2L^3}(3Lx^2 - x^3) \quad (o)$$

式中  $\delta_1$  和  $\delta_2$  为待定参数。每一个单独的函数都满足几何边界条件(试与方程 m 和 n 对比),用势能原理加以确定从而适当地调整  $\delta_1$  和  $\delta_2$  之值,我们可求得一个组合函数,它比单独的二次函数或三次函数更为精确。再次利用标准步骤,我们得到下列结果:

$$U = \frac{EI}{2L^3}(4\delta_1^2 + 6\delta_1\delta_2 + 3\delta_2^2)$$

$$\lambda = \frac{1}{60L}(40\delta_1^2 + 75\delta_1\delta_2 + 36\delta_2^2)$$

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_1} = \frac{EI}{L^3}(4\delta_1 + 3\delta_2) - \frac{P}{12L}(16\delta_1 + 15\delta_2) = 0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_2} = \frac{3EI}{L^3}(\delta_1 + \delta_2) - \frac{P}{20L}(25\delta_1 + 24\delta_2) = 0$$

将后两个方程重新排列,得

$$\left(\frac{4EI}{L^2} - \frac{4P}{3}\right)\delta_1 + \left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{5P}{4}\right)\delta_2 = 0$$

$$\left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{5P}{4}\right)\delta_1 + \left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{6P}{5}\right)\delta_2 = 0$$

这两个方程是齐次的,仅当位移参数  $\delta_1$  和  $\delta_2$  的系数行列式等于零时才有非平凡解,所以

$$\left(\frac{4EI}{L^2} - \frac{4P}{3}\right)\left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{6P}{5}\right) - \left(\frac{3EI}{L^2} - \frac{5P}{4}\right)^2 = 0$$

或

$$3P^2 - 104\left(\frac{EI}{L^2}\right)P + 240\left(\frac{EI}{L^2}\right)^2 = 0$$



这个二次方程的较小根给出了最低临界屈曲载荷的近似值:

$$P_{cr} = 2.486 \frac{EI}{L^2}$$

它几乎就是精确值(比精确值高 0.8%)。

**例题 5** 最后一个例题是为了说明瑞利-里兹法对非线性问题的应用。该结构为一根矩形截面的悬臂梁, 在自由端承受载荷  $P$  (见图 11-31 和第 11.8 节例题 3)。梁的材料具有由方程  $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$  所定义的非线性应力-应变曲线。我们想要确定该梁自由端的挠度  $\delta$ 。

让我们取未挠曲时梁左端为坐标原点(图 11-31a)。则下列三次多项式将是挠度曲线的一个合适表达式:

$$v = \frac{\delta}{2L^3} (x^3 - 3L^2x + 2L^3) \quad (p)$$

此处  $v$  为梁的向下挠度。这个三次式满足了  $v$  和  $v'$  端点的几何条件。此外, 由它得出下列微小挠度的曲率表达式:

$$\kappa = v'' = \frac{3\delta x}{L^3}$$

根据此式, 在梁的自由端处曲率为零, 而在固定端处为一最大值, 这与梁的真实情况相符。离中性轴为  $y$  处一点的应变  $\epsilon_1$  (见图 11-31b) 近似为

$$\epsilon_1 = \kappa y = \frac{3\delta xy}{L^3}$$

使用此式我们可计算出在梁的这个位置上单位体积应变能的近似值(见方程 11-32):

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon_1} B\sqrt{\epsilon} d\epsilon = 2\sqrt{3} B \left( \frac{\delta xy}{L^3} \right)^{3/2}$$

将单位体积的应变能沿梁的上半部分( $y=0$  至  $y=h/2$ ) 积分, 然后将结果二倍, 便可求出总应变能  $U$ :

$$U = \int u dV = 2 \int_0^L \left[ \int_0^{h/2} u b dy \right] dx = \frac{2\sqrt{6} B b h^{5/2} \delta^{3/2}}{25L^2}$$

已知应变能, 我们就可由式  $PE = U - P\delta$  得到势能, 此后由势能驻值原理得出

$$\frac{dPE}{d\delta} = \frac{3\sqrt{6} B b h^{5/2} \delta^{1/2}}{25L^2} - P = 0$$

由此

$$\delta = \frac{625P^2L^4}{54B^2b^2h^5}$$

此挠度近似值比精确值约小 7%。(此非线性弹性梁的精确挠度可用下节所述的余能求得, 见方程 11-68)。

## 11.12 余能原理

在前几节中, 我们讨论了与应变能有关的几个重要原理. 现在, 在本节我们将转向研究某些与余能有关的同等重要的原理. 在先前的讨论中已经指出, 应变能通常表示为位移的函数, 而余能则通常表示为力的函数. 因而, 正如第 11.9 节论述过的那样, 应变能定理很自然地与结构分析的位移法和刚度法相关, 而余能原理则与方法和柔度法相关, 这将在本节和下节中加以讨论.

为了导出与余能有关的一个非常基本的定理, 让我们再来研究一个承受  $n$  个载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的非线性结构, 这些载荷产生相应的位移  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . 和我们先前的讨论一样,  $P$  和  $\delta$  应理解为表示广义力和相应的广义位移. 结构的余能  $U^*$  可用方程 (11-39b) 计算. 所得到的  $U^*$  的表达式将为载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的函数. 然后, 如果我们设想某一个载荷, 譬如说  $P_i$ , 有一微小增量  $dP_i$ , 而其他载荷均不变, 那么余能将增大一个微量  $dU^*$ , 它为

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i$$

此方程在数学形式上不过就是说明  $U^*$  的增量等于  $U^*$  对  $P_i$  的变化率乘以  $P_i$  的增量.

求得  $dU^*$  表达式的另一条途径是考虑当载荷  $P_i$  增加一个量  $dP_i$  时载荷的余功. 此余功与结构的余能增量  $dU^*$  相同 (见方程 11-36). 作余功的唯一载荷就是  $P_i$  本身, 因为其他诸力均无变化. 所以, 余能的增量为位移  $\delta_i$  与载荷增量  $dP_i$  的乘积:

$$dU^* = \delta_i dP_i$$

此余能增量用图 11-28c 所示的载荷-挠度图上的阴影线水平窄条面积来代表. 令上述两个  $dU^*$  的表达式相等, 我们求得

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad (11-67)$$

这个方程说明, 只要余能表示为载荷的函数, 那么余能对任一载荷  $P_i$  的偏导数等于相应的位移  $\delta_i$ . 此方程称为克罗蒂-恩格瑟

(Crotti-Engesser)定理, 它取名于意大利的工程师 F. 克罗蒂 (Crotti) 和德国的工程师恩格瑟 (Engesser), 前者于 1878 年导出这个方程 (参考文献 11-38 和 11-39), 而后者于 1889 年独自得到此式 (参考文献 11-40)。

克罗蒂-恩格瑟定理显示出与卡斯提利阿诺第一定理异常的相似性, 比较这两个定理的方程 (方程 11-67 和 11-51) 就很明显。在应用克罗蒂-恩格瑟定理时, 我们将余能表示为载荷的函数, 然后对载荷取导数求得相应的位移, 而在卡斯提利阿诺第一定理的情况下, 我们将应变能表示为位移的函数, 然后对位移取导数求得相应的载荷。这两个定理都很普遍, 并可应用于呈现非线性性态的结构\*。

**例题 1** 一根悬臂梁在自由端作用有一集中载荷  $P$ , 如在第 11.8 节例题 3 所述并绘于图 11-31 中, 其材料的应力-应变图为非线性的, 如图 11-31<sup>c</sup> 所示。试求此梁端处的挠度  $\delta$ 。

该梁的余能由方程 (11-50) 求出, 它为

$$U^* = \frac{25P^3L^4}{6B^2b^2h^5}$$

已知余能, 我们应用克罗蒂-恩格瑟定理就可容易地求出相应于载荷  $P$  的挠度  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{25P^2L^4}{2B^2b^2h^5} \quad (11-68)$$

**例题 2** 试确定图 11-32a 所示桁架节点  $B$  的竖直变位。桁架的材料具有以方程  $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$  给出的拉伸和压缩时应力-应变关系。其中  $B$  为常数 (见图 11-32b)。

利用克罗蒂-恩格瑟定理求变位的第一步是得出结构的余能。总余能为两杆能量之和, 亦即

$$U^* = U_{ab}^* + U_{bc}^* \quad (a)$$

另外, 因为在每根杆内应力和应变均保持常数, 所以每根杆的余能可用杆的体积乘以单位体积的余能而得。因此, 我们有

$$u_{ab}^* = u_{ab}^* AL \quad u_{bc}^* = u_{bc}^* AL\sqrt{2} \quad (b)$$

\* 在线性结构的特殊情况下, 余能等于应变能, 于是克罗蒂-恩格瑟定理简化为卡斯提利阿诺第二定理 (见第 11.14 节)。

式中  $A$  为每根杆的横截面面积。每根杆单位体积的余能可用方程(11-37)求得如下:

$$u_{ab}^* = \int_0^{\sigma_{ab}} \epsilon d\sigma = \int_0^{\sigma_{ab}} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma_{ab}^3}{3B^2} \quad (c)$$

$$u_{bc}^* = \int_0^{\sigma_{bc}} \sigma = \int_0^{\sigma_{bc}} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma_{bc}^3}{3B^2} \quad (d)$$

式中  $\sigma_{ab}$  和  $\sigma_{bc}$  为杆中的应力。现在我们将方程(b)、(c)和(d)代入方程(a),从而求得该桁架总余能的下述公式:

$$U^* = \frac{AL}{3B^2} (\sigma_{ab}^3 + \sqrt{2} \sigma_{bc}^3) \quad (e)$$

作用于桁架上的载荷  $P$ (图 11-32a)在杆中产生应力,它们可容易地由静力学求出:

$$\sigma_{ab} = \frac{P}{A} \quad \sigma_{bc} = \frac{\sqrt{2} P}{A}$$

式中我们只考虑应力的绝对值。于是,桁架的余能(根据方程 e)为

$$U^* = \frac{5P^3L}{3A^2B^2}$$

该方程将余能表达为载荷  $P$  的函数,因此现在可用克罗蒂-恩格瑟定理求得相应于  $P$  的位移如下:

$$\delta_v = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{5P^2L}{A^2B^2}$$

这个方程给出了桁架节点  $B$  的竖直变位  $\delta_v$ 。

如果想求节点  $B$  的水平变位  $\delta_H$ ,则需要施加一个相应于此位移的虚构载荷  $Q$ 。然后我们可重复为求  $\delta_v$  叙述过的步骤,其主要差别在于现在在桁架上有两个载荷,而不是一个。水平变位  $\delta_H$  的最后结果将为一个同时包含  $P$  和  $Q$  的表达式。在此表达式中,令  $Q$  等于零,就得出载荷  $P$  单独作用时所引起的水平变位(见习题 11.12-4)。

**单位载荷法** 如上例所述,直接使用克罗蒂-恩格瑟定理求结构的位移,要求将结构的余能确定为载荷的函数。然后,为了求得所需的位移,必须计算余能的导数。因为这个步骤可能很长,所以它不是求位移的实用方法。事实上,还有一个更为适用的方法,现将加以说明。

为了以最简单的方式导出这个方法,我们将引用应力合力仅为轴力  $N$  的桁架结构。让我们研究桁架中的某个元件,并假设

其长度为  $L$ , 横截面面积为  $A$ , 承受轴力  $N_1$ . 于是该元件的余能由方程 (11-36) 和  $\delta = \epsilon L$  求得为

$$U^* = \int_0^{N_1} \epsilon L dN \quad (f)$$

其中  $\epsilon$  为轴力在杆中引起的均匀应变. 我们可注意到, 当轴力  $N$  自初始零值增加到最大值  $N_1$  时, 应变  $\epsilon$  自零增加到最大值  $\epsilon_1$ . 类似地, 杆中的应力  $\sigma$  自零增加到最大值  $\sigma_1$ . 此外, 假设应力-应变之间的关系用图 11-28b 所示的非线性应力-应变图表示.

一种方便的作法是定义一个表示杆的单位长度余能的函数  $F$ , 因而, 用长  $L$  去除方程 (f), 我们得出

$$F = \int_0^{N_1} \epsilon dN \quad (g)$$

该方程表示, 量  $F$  为轴向力  $N_1$  的函数, 它可借助应力-应变曲线求算 (注意: 应力-应变曲线给出  $\epsilon$  和  $\sigma$  之间的关系, 但因  $N = \sigma A$ , 我们也就知道  $\epsilon$  和  $N$  之间的关系. 于是, 应变  $\epsilon$  为  $N$  的已知函数, 因此, 便可算出方程 (g) 的积分).

现在我们就可以研究由许多元件所组成并承受载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的桁架结构, 这些载荷产生相应的位移  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . 桁架各元件中的轴向力随着沿元件轴线连续度量的距离  $x$  而变. 所以, 让我们在两个横截面之间取出长为  $dx$  的典型微段 (见图 11-3a). 作用在此微段上的轴向力为  $N_1$ , 而相应的伸长为  $d\delta$  (等于  $\epsilon_1 dx$ ). 参照方程 (g), 我们看出, 该微段的余能可表示为  $dU^* = F dx$  的形式. 因此, 整个结构的余能为

$$U^* = \int F dx \quad (h)$$

不言而喻, 该积分沿结构所有元件的轴线进行.

为了求得相应于载荷  $P_i$  的位移  $\delta_i$ , 我们可将克罗第-安格瑟定理用于方程 (h), 从而求得

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left[ \int F dx \right]$$

在积分号内进行微分, 我们得到

$$\delta_i = \int \frac{\partial F}{\partial P_i} dx$$

现在研究此方程中出现的导数  $\partial F/\partial P_i$ 。正如对方程(g)已说明过的那样，量  $F$  为轴向力  $N_1$  的函数，而轴向力  $N_1$  又是作用载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的函数。所以，量  $F$  通过中间变量  $N_1$  成为  $P_i$  的函数。因此，我们可将上述方程写成下列形式：

$$\delta_i = \int \frac{\partial F}{\partial N_1} \frac{\partial N_1}{\partial P_i} dx \quad (i)$$

此式中每一个导数都具有简单的物理解释。导数  $\partial F/\partial N_1$  等于  $\epsilon_1$  (见方程 g)\*。导数  $\partial N_1/\partial P_i$  代表  $P_i$  的单位值所引起的轴向力  $N_1$  之值。因此，依单位载荷法的符号(见第 11.3 节)，这个导数等于  $N_\sigma$ ，它定义为相应于位移  $\delta_i$  的单位载荷引起的轴向力。用  $\epsilon_1$  和  $N_\sigma$  分别取代方程(i)中的两个导数，我们得出

$$\delta_i = \int \epsilon_1 N_\sigma dx = \int N_\sigma d\delta \quad (j)$$

式中  $d\delta$  等于  $\epsilon_1 dx$ ，为微段的伸长(见图 11-3a)。上述方程仅为考虑轴向变形时单位载荷法的基本方程(方程 11-3)。

如果结构承受弯曲变形(见图 11-3b)，如梁或平面刚架的情形，可作类似的推导。让我们开始先假设有一根长为  $L$  在力偶  $M$  作用下的纯弯梁。这个力偶在梁的两个端面之间引起相对转角  $\theta$ 。根据方程(11-36)，用  $M$  和  $\theta$  分别取代  $P$  和  $\delta$ ，可得出梁的余能，于是

$$U^* = \int_0^{M_1} \theta dM \quad (k)$$

式中  $M_1$  为力偶  $M$  的最大值。当所作用的力偶  $M$  从零增大到  $M_1$  时，梁端面之间的夹角  $\theta$  从零增大到  $\theta_1$ 。另外，梁的曲率  $\kappa$  等于  $\theta_1/L$ ，也从零变到最大值  $\kappa_1 = \theta_1/L$ 。以  $\kappa L$  取代方程(k)中的  $\theta$  角，我们得到

---

\* 根据微积分学，我们知道  $\frac{\partial}{\partial a} \int_0^a f(x) dx = f(a)$ 。将这个关系式用于方程(g)，我们有  $a = N_1$ ， $f(x) = \epsilon$ ， $dx = dN_1$ ，以及  $f(a) = \epsilon_1$ 。

$$U^* = \int_0^{M_1} \kappa L dM$$

现在让我们定义一个代表梁单位长度余能的新函数  $G$ 。

$$G = \int_0^{M_1} \kappa dM \quad (1)$$

这个量是弯矩  $M_1$  的函数，对任一特定梁，它可借助于其应力-应变图计算出来。

现在让我们研究承受载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的梁或平面刚架，这些载荷产生相应的位移  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ 。该结构的典型微段（见图 11-3b）承受弯矩  $M_1$ ，并经历弯曲变形  $d\theta$ （等于  $(\kappa_1 dx)$ ）。根据方程 (1)，我们求得该微段的余能为  $dU^* = G dx$ ，因此，整个结构的余能为

$$U^* = \int G dx$$

此处积分包括结构的所有元件。下一步我们根据克罗第-安格瑟定理得出结构的位移  $\delta_i$ ：

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left[ \int G dx \right] = \int \frac{\partial G}{\partial P_i} dx$$

参看此式中的最后一个导数，我们注意到，量  $G$  为弯矩  $M_1$  的函数（见方程 1），而  $M_1$  为载荷的函数。所以，上述方程可重写为下列形式：

$$\delta_i = \int \frac{\partial G}{\partial M_1} \frac{\partial M_1}{\partial P_i} dx \quad (m)$$

式中导数  $\partial G / \partial M_1$  等于曲率  $\kappa_1$ （见方程 1 及上一个脚注）；导数  $\partial M_1 / \partial P_i$  为载荷  $P_i$  的单位值在梁中引起的弯矩。于是，方程 (m) 变为

$$\delta_i = \int \kappa_1 M_U dx = \int M_U d\theta \quad (n)$$

式中我们已经使用了关系式  $d\theta = \kappa_1 dx$ ，量  $M_U$  为相应于位移  $\delta_i$  的单位载荷在结构中引起的弯矩。因此，方程 (n) 与只计入弯曲变形的单位载荷法基本方程（方程 11-3）相同。

对于考虑剪切影响和扭转影响的结构来说，可作类似的推导。

因此, 我们最后得出结论: 使用余能和克罗第-安格瑟定理可直接导出单位载荷法的基本方程. 这个方程提供了一个确定位移的非常有效的方法, 而且可用于呈现非线性性态的结构\*.

**例题 3** 试用单位载荷法确定图 11-31 所示悬臂梁自由端的挠度  $\delta$ . 材料的应力-应变曲线为非线性的, 如图 11-31c 所示.

因为该梁中只有弯曲变形是重要的, 所以我们只用单位载荷方程 (方程 11-3) 中的第二项. 弯矩  $M_U$  是由相应于挠度  $\delta$  的单位载荷引起的, 因此, 弯矩  $M_U$  等于  $1 \cdot x$ , 此处  $x$  为从梁的自由端度量的距离. 变形  $d\theta$  等于  $\kappa dx$ , 此处  $\kappa$  为曲率. 对于所讨论的梁, 该曲率由第 11.8 节的方程 (f) 给出, 因而, 变形  $d\theta$  为

$$d\theta = \frac{50P^2x^2}{B^2b^2h^5} dx$$

将它代入单位载荷方程, 我们求得下列挠度表达式:

$$\delta = \int_0^L 1(x) \left( \frac{50P^2x^2}{B^2b^2h^5} \right) dx = \frac{25P^2L^4}{2B^2b^2h^5}$$

此结果与例题 1 所得的一致 (见方程 11-68). 然而, 单位载荷法提供了一个比先前例题较为容易的解法, 因为它不需要经过计算余能的冗长过程 (见方程 11-50 的推导).

**例题 4** 本例中, 我们将用单位载荷法确定图 11-32 所示桁架节点  $B$  的竖直变位. 材料的非线性应力-应变曲线示于图 11-32b 中.

根据方程 (11-3), 只考虑其第一项即可求出变位. 相应于变位  $\delta$  的单位载荷为节点  $B$  处的竖直载荷. 桁架两根元件中相应的轴向力  $N_U$  为

$$(N_U)_{ab} = 1 \quad (N_U)_{bc} = -\sqrt{2}$$

载荷  $P$  在杆中引起的应变具有下列数值:

$$\epsilon_{ab} = \frac{\sigma_{ab}^2}{B^2} \quad \epsilon_{bc} = -\frac{\sigma_{bc}^2}{B^2}$$

式中应力为  $\sigma_{ab} = P/A$ ,  $\sigma_{bc} = -\sqrt{2} P/A$ . 将这些应力代入应变的表达式, 我们得到

$$\epsilon_{ab} = \frac{P^2}{A^2B^2} \quad \epsilon_{bc} = -\frac{2P^2}{A^2B^2}$$

最后, 我们可将  $N_U$  和  $d\delta$  (等于  $\epsilon dx$ ) 的值代入单位载荷方程并得出挠度:

$$\delta = \int N_U d\delta = \int_0^L (1) \left( \frac{P^2}{A^2B^2} \right) dx + \int_0^{\sqrt{2}L} (-\sqrt{2}) \left( -\frac{2P^2}{A^2B^2} \right) dx = \frac{5P^2L}{A^2B^2}$$

\* 线性结构的情况在第 11.14 节讨论.



此挠度与先前例题 2 所得的一致。然而，我们可再次观察到用单位载荷法求解的简便性。如果要计算的位移并不与结构上的实际载荷之一相对应（见习题 11.12-4），则单位载荷法的优越性就更为显著。

### 11.13 力法

余能原理和克罗蒂-恩格瑟定理的应用将导出分析结构的一个重要方法。这种方法是建立在静不定概念的基础上，并利用静多余力作为分析中的未知量。把力（应力合力和反力）作为未知量，这与下述要求是一致的，即为了使用克罗蒂-恩格瑟定理，必须把余能表达为力的函数。

让我们研究一个具有  $n$  度静不定的非线性结构。选择多余量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  之后，我们就在结构中按排适当的松弛形式来放松这些多余力。例如，如果多余力为一反力，就可移去一个支座；如果多余力为一弯矩，就可插入一个销子。由此所得的放松结构必须为静定的且不可动的，如以前对柔度法所说明的那样（第 11.6 节）。其次，我们假想已放松的结构不仅承受实际载荷，而且也承受多余力本身。换句话说，必须把多余力视为作用在放松结构上的载荷。这样，放松结构的余能  $U^*$  就可按通常的方式计算。唯一的新特点在于放松结构的余能为载荷和多余力二者的函数。依据克罗蒂-恩格瑟定理，我们取余能对这些多余力的偏导数，可以求得放松结构上相应于诸多余力的位移。让我们用符号  $D_1, D_2, \dots, D_n$  分别代表原结构上相应于多余力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的位移\*。于是由克罗蒂-恩格瑟定理得出如下  $n$  个联立方程：

$$D_1 = \frac{\partial U^*}{\partial X_1} \quad D_2 = \frac{\partial U^*}{\partial X_2} \quad \dots \quad D_n = \frac{\partial U^*}{\partial X_n} \quad (11-69)$$

这些方程中的每一个方程都具有相同的一般形式。如果我们考察第  $i$  个方程，我们发现，其右边同时包含静多余力和载荷的项，而多余力为未知量。这些项加起来即为原结构的实际位移  $D_i$ ，当相应的多余力  $X_i$  为一个应力合力或为一个未经历任何位移的支反力时， $D_i$  应为零。因而，我们看出，方程 (11-69) 实际上代表相应

\* 在讨论柔度法（见方程 11-25）时，早已用过相同的符号。

于多余约束的位移协调条件。这些方程可联立求解，以得出用载荷表示的多余力，然后，用静力学可以确定其余反力和应力合力。

上段所述的余能分析法利用静多余力为未知量，并要求解协调方程。所以，它是结构分析中的力法，此法已经作为线性结构的柔度法叙述过(见第 11.6 节)。力法和柔度法在原理上是相同的，但是使用柔度法限于线性分析。因此，每当研究的结构可能为非线性时，就用“力法”一词，当研究线性结构时，就用“柔度法”一词\*。

用方程(11-69)表示的力法，与用方程(11-52)表示的位移法相类似。在力法中，我们先将余能表示为静多余力的函数，然后使用克罗蒂-恩格瑟定理得出可以求解多余力的协调方程。在位移法中，我们先将应变能表示为未知节点位移的函数，然后使用卡斯提利阿诺第一定理得出可以求解位移的平衡方程。这两种方法均适用于呈现非线性性态的结构。

现在让我们研究力法的特殊情况，在此情况下，原结构中并没有相应于静多余力的位移。正如已经提到的那样，如果多余力或为应力合力或为不移动位置的反力，就会存在这种情况。在此条件下，协调方程(方程 11-69)中的位移  $D_1, D_2, \dots, D_n$  变为零。于是该方程简化为如下形式：

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial U^*}{\partial X_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial U^*}{\partial X_n} = 0 \quad (11-70)$$

这些方程代表余能的驻值条件。对于处在稳定平衡的结构，其驻值实际上为最小值，因而方程(11-70)代表最小余能原理。这个原理说明，只要在原结构中不存在相应于多余力的位移，稳定结构的静多余力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  就具有使余能为最小之值\*\*。

\* 柔度法在第 11.15 中作进一步的讨论。

\*\* 最小余能原理首先由克罗蒂(参考文献 11-38 和 11-39)而后由恩格瑟(参考文献 11-40)作了系统的阐述。如果结构呈线性性态，余能就和应变能相等，于是最小余能原理就简化为最小应变能原理(见第 11.15 节)。

余能方法为结构力学的重大发展提供了基础，有兴趣对此法作进一步研究的读者，可参阅其它资料，譬如参考文献 11-33、11-33、11-34、11-41 和 11-42，应变能原理和余能原理的当代论述，被写成矩阵形式，已在参考文献 11-43 至 11-44 介绍过。在参考文献 11-45 至 11-49 论述了其它方面。余能法的历史由奥拉瓦斯和麦克莱恩(参考文献 1-18)作过追溯，韦斯特加德(Westergaard)也在参考文献 11-41、11-50 和 11-51 中给出一些历史注释。

**例题** 图 11-39a 所示桁架, 用具有以方程  $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$  所给的应力-应变关系的材料所构成, 其中  $B$  为一常数。试用余能和力法求出所有三根杆的轴向力。

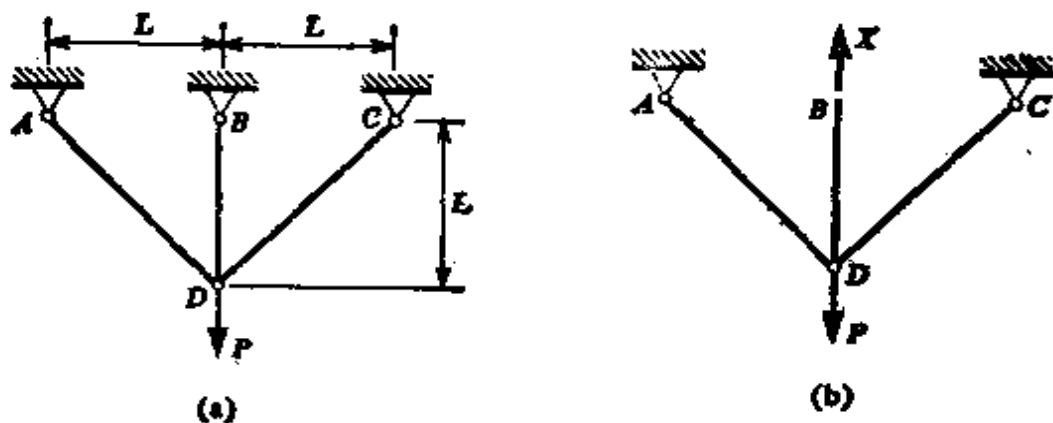


图 11-39. 例题. 力法.

假设节点  $B$  的反力为静多余力  $X$ , 我们便得出图 11-39b 所示的放松结构。根据静力学, 放松结构中各杆的轴向力如下:

$$N_{ad} = N_{cd} = \frac{P-X}{\sqrt{2}} \quad N_{bd} = X \quad (a)$$

相应的应力为

$$\sigma_{ad} = \sigma_{cd} = \frac{P-X}{\sqrt{2}A} \quad \sigma_{bd} = \frac{X}{A}$$

式中  $A$  为每根杆的横截面面积。

杆  $BD$  的单位体积余能如下(见方程 11-37):

$$u_{bd}^* = \int_0^{\sigma_{bd}} \epsilon d\sigma = \int_0^{\sigma_{bd}} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma_{bd}^3}{3B^2} = \frac{1}{3B^2} \left( \frac{X}{A} \right)^3$$

杆  $AD$  和  $CD$  的单位体积余能可用类似的方式求得, 其结果为

$$u_{ad}^* = u_{cd}^* = \frac{1}{3B^2} \left( \frac{P-X}{\sqrt{2}A} \right)^3$$

最后, 我们可将每根杆的体积乘以其单位体积余能, 然后将结果求和, 便得放松结构的总余能:

$$U^* = \frac{L}{3A^2B^2} [(P-X)^3 + X^3]$$

这个  $U^*$  的表达式为载荷  $P$  和多余力  $X$  两者的非线性函数。

原结构中相应于多余力  $X$  的位移为零, 因为支座  $B$  没有位移。所以, 当克罗蒂-恩格瑟定理应用于多余力  $X$  时, 给出如下方程(见方程 11-70):

$$\frac{dU^*}{dX} = \frac{L}{3A^2B^2} [3(P-X)^2(-1) + 3X^2] = 0$$

由此, 我们得到  $X = P/2$ . 将此  $X$  值代入方程(a), 得出

$$N_{aa} = N_{ca} = \frac{P}{2\sqrt{2}} \quad N_{ba} = \frac{P}{2}$$

这样, 此静不定非线性桁架的各杆轴向力已用力法求得。

### 11.14 卡斯提利阿诺第二定理

在以上两节中, 我们讨论了如何使用余能求位移并进行结构分析. 在那里, 我们强调过这些概念适用于呈非线性性态的结构. 本节让我们把注意力局限于呈线性性态的而且叠加原理成立的结构. 在这些条件下, 结构的余能  $U^*$  和应变能  $U$  是相等的(见方程 11-40). 此外, 这两个量均可表达为载荷的二次函数(见方程 11-44).

现在假设一线性结构承受载荷  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , 这些载荷产生的相应位移为  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . 于是我们在克罗蒂-恩格瑟定理(方程 11-67)中用  $U$  取代  $U^*$ , 并求得

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (11-71)$$

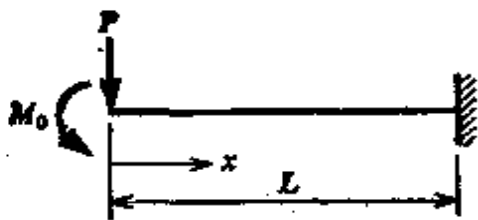


图 11-40. 卡斯提利阿诺第二定理的实例.

该方程称为卡斯提利阿诺第二定理\*, 它可叙述如下: 对于线性结构, 只要其应变能表达为载荷的函数, 则应变能对任一载荷  $P_i$  的偏导数就等于相应的位移  $\delta_i$ .

作为卡斯提利阿诺第二定理的应用, 让我们研究一根在自由端处承受载荷  $P$  和力偶  $M_0$  的悬臂梁(图 11-40). 该梁呈线性性态, 而且具有常值弯曲刚度  $EI$ . 根据方程(6-34a)可以求出其应变能, 该方程在此重复如下:

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (11-72)$$

\* 见参考文献 11-25 至 11-29.

在此方程中,  $M$  代表任一横截面的弯矩. 对于图 11-40 所示的梁, 在距自由端为  $x$  处的弯矩为  $M = -Px - M_0$ . 将此  $M$  的表达式代入方程(11-72), 我们得到

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px - M_0)^2 dx$$

$$= \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{PM_0 L^2}{2EI} + \frac{M_0^2 L}{2EI} \quad (a)$$

这个方程将应变能表示为载荷  $P$  和  $M_0$  的二次函数.

为了求得该梁自由端的竖直挠度  $\delta$ , 我们可用卡斯提利阿诺第二定理, 并取  $U$  对  $P$  的偏导数, 于是

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^2}{3EI} + \frac{M_0 L^2}{2EI}$$

用类似的方式, 取  $U$  对  $M_0$  的偏导数, 我们可求出梁自由端的转角  $\theta$ :

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_0 L}{EI}$$

这些式中的正号意味着  $\delta$  和  $\theta$  分别与载荷  $P$  和  $M_0$  的方向相同. 正如所料,  $\delta$  和  $\theta$  均为载荷的线性函数.

显然, 卡斯提利阿诺第二定理仅可用于求与作用在结构上的载荷相对应的位移, 这也是克罗蒂-恩格瑟所处理的情况. 如果要求没有载荷作用处的位移, 我们必须在结构上加一个相应于欲求位移的虚构载荷. 然后可用卡斯提利阿诺第二定理计算位移, 其结果是位移将用实际载荷和虚构载荷两者来表示. 在最后的表达式中, 令虚构载荷等于零, 就得出由实际载荷引起的欲求位移(见习题 11.14-1).

**单位载荷法** 如果有两个以上的载荷作用在结构上, 那么直接用卡斯提利阿诺第二定理求位移的过程是相当冗长的. 这个结论的理由是, 应变能的计算可能变得十分复杂. 例如, 假设作用在图 11-40 所示的悬臂梁上有四个载荷而不是两个, 于是与方程(a)类似, 应变能方程的计算就要求将一个四项式平方起来, 而  $U$  的

最后结果包括十项。

如果在对弯矩表达式进行积分之前就应用卡斯提利阿诺第二定理，则求位移的过程就可得到大大的简化。对于只有弯曲变形才属重要的梁或平面刚架，其应变能可由方程(11-72)给出。为了求得相应于载荷  $P_i$  的挠度  $\delta_i$ ，我们必须取  $U$  对  $P_i$  的偏导数，于是，在积分号内进行微分，得出

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_i} dx \quad (b)$$

偏导数  $\partial M / \partial P_i$  代表由载荷  $P_i$  的单位值所引起的弯矩  $M$  之值。因而，这个导数等于结构中相应于欲求位移的单位载荷所引起弯矩  $M_U$ 。方程(b)的积分号内出现的弯矩  $M$ ，为结构上的实际载荷所引起的弯矩，因此，这个弯矩用  $M_L$  表示。采用这个符号后，我们看出，方程(b)变为

$$\delta_i = \int \frac{M_U M_L dx}{EI}$$

这个方程代表只考虑弯曲变形时的单位载荷法(见方程 11-4)。

对于轴向变形、剪切变形和扭转变形的效应可作类似的推导。因此，我们得出结论：用于线性结构的单位载荷法(方程 11-4)可以直接根据卡斯提利阿诺第二定理导出。这个结论并不奇怪，因为我们已经表明，适用于非线性结构的单位载荷法更为普遍的方程(方程 11-3)可根据克罗蒂-恩格瑟定理导出。正如已经指出的那样，单位载荷法对于确定多种结构类型的位移来说是非常有效的手段。

### 11.15 应变能与柔度法

在第 11.13 节中，我们讨论了如何利用余能和克罗蒂-恩格瑟定理导出结构分析的方法。当结构具有线性性态时，出现了力法的一种特殊情况。在这种情况下，放松结构的应变能等于余能，可表达为载荷和静多余力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  两者的二次函数。然后应用卡斯提利阿诺第二定理导出如下联立方程：

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} \quad D_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} \quad \dots \quad D_n = \frac{\partial U}{\partial X_n} \quad (11-73)$$

式中  $D_1, D_2, \dots, D_n$  代表原结构中相应于多余力的位移。这些方程中的每一个,其一般式都是相同的。右侧由表示相应于多余力的位移的诸项组成,其中某些位移是由多余力本身所引起,而其他的则由结构上的实际载荷所引起。这些项加起来即为原结构的真实位移,当其相应的多余力为应力合力或为不经历任何位移的反力时,该位移为零。因此,我们得出结论:方程(11-73)是柔度法的协调方程(见方程 11-25)。另外,方程(11-73)亦是力法协调方程(方程 11-69)适于线性结构的一种特殊情况。

为了详尽地表明方程(11-73)的一般形式,让我们举一个具体的实例。假设某一结构为两度静不定的,并承受两个载荷  $P_1$  和  $P_2$ 。那么其放松结构的应变能为两个多余力  $X_1$  和  $X_2$  以及载荷  $P_1$  和  $P_2$  的二次函数,此应变能将具有下列一般形式(见方程 11-44):

$$\begin{aligned} U = & a_{11}X_1^2 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1P_1 + a_{14}X_1P_2 \\ & + a_{21}X_2X_1 + a_{22}X_2^2 + a_{23}X_2P_1 + a_{24}X_2P_2 \\ & + a_{31}P_1X_1 + a_{32}P_1X_2 + a_{33}P_1^2 + a_{34}P_1P_2 \\ & + a_{41}P_2X_1 + a_{42}P_2X_2 + a_{43}P_2P_1 + a_{44}P_2^2 \end{aligned}$$

式中系数  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{44}$  为常数,它们只取决于结构的性质。将卡斯提利阿诺第二定理应用于以上  $U$  的表达式,给出协调方程(见方程 11-73):

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = F_{11}X_1 + F_{12}X_2 + D_{1p}$$

$$D_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} = F_{21}X_1 + F_{22}X_2 + D_{2p}$$

式中  $F_{11}, F_{12}, F_{21}$  和  $F_{22}$  为新的常数,根据诸系数  $a$  求得,且仅取决于结构性质。此外,因为这些常数为未知多余力的系数,故我们判断它们就是放松结构的柔度系数。我们还发现,  $D_{1p}$  和  $D_{2p}$  这两项只与载荷  $P_1$  和  $P_2$  以及结构的性质有关。因此,我们看出这两项就是放松结构上由于载荷引起的相应于多余力的位移。所以,很明显,使用应变能和卡斯提利阿诺第二定理得出与柔度法的协调方程(方程 11-25)相同的方程。自然,这个结论适用于具有任意个多余力的任意类型的结构(桁架、梁或平面刚架)。

假设现在我们再取上式的某些偏导数如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial X_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = F_{11} & \quad \frac{\partial D_1}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_2 \partial X_1} = F_{12} \\ \frac{\partial D_2}{\partial X_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1 \partial X_2} = F_{21} & \quad \frac{\partial D_2}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = F_{22} \end{aligned}$$

从这些关系式我们可容易地辨明下列柔度的一般方程:

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} \quad (11-74)$$

这个方程表明, 每当应变能表达为多余力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的二次函数, 放松结构的柔度就可通过应变能的微分运算而得。另外, 由于  $U$  的微分次序无关重要, 所以我们就可写出

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_j \partial X_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} = F_{ji} \quad (11-75)$$

因此, 根据应变能就建立了柔度互等定理。

当多余力为应力合力或为不经历任何位移的反力时, 出现了一种有趣的特殊情况。在所有这类情况下, 原结构中相应于多余力的位移为零, 因而柔度法的协调方程(方程 11-73)变为

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \quad (11-76)$$

这些方程代表应变能的驻值条件, 且在结构处于稳定平衡的情况下, 该驻值实际上为最小值。因此, 我们得出最小应变能原理, 它陈述为: 对于线性结构, 只要原结构中没有与多余力相应的位移, 其多余力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  就具有使应变能为最小的值。最小应变能原理乃是更普遍的最小余能原理(见方程 11-70)对于线性结构的一种特殊情况。自然, 根据最小应变能原理求得的方程与前面用柔度法所得的相同\*。

## 11.16 结构分析的其他方法

本章已叙述了几种结构分析的基本方法, 包括柔度法、刚度法、以及建立在应变能和余能基础上的各种方法。自然, 尚有其他与结构分析有关的课题对工程师来说也是很重要的。例如, 结构分析的矩阵法正在被普遍地采用。矩阵法包括柔度法和刚度法, 其精炼之处在于所有方程均以矩阵表达, 所有推导和计算均借助于

\* 把方程(11-76)称为最小功原理亦非罕见。这个名称曾为 L. F. 梅纳布雷阿 (Ménabréa) 所采用, 他首先在 1858 年陈述了这一原理, 虽然那时没有满意的证明。到 1873 年, 卡斯提利阿诺使用了这一名称并加以证明(见参考文献 11-25 至 11-29 以及参考文献 11-52)。



矩阵代数进行。矩阵的采用使这些方法更规则化，提供了表达的紧凑性，并理想地适用于电子计算机的程序编制。矩阵方法已在结构理论方面的教科书中叙述过，譬如参考文献 11-14, 11-17 和 11-19。

有一种广泛应用于分析静不定梁和平面刚架的专用方法就是力矩分配法(见参考文献 11-20)。这个方法使得有可能分析具有多静不定度的结构而不需要求解大量的联立方程。此法包含了执行简便的逐次近似计算。其他与梁和刚架有关的方法还有斜率-挠度法、共轭梁法以及弹性中心法，这些均在许多教科书中讲述过，譬如参考文献 11-15, 11-16 和 11-18。

本章仅研究了棱柱形元件组成的结构。然而，如果柔度、刚度和固定端处的弯矩已知，处理非棱柱形元件也是不难的。处理非棱柱形元件的细节可从参考文献 11-14, 11-15 和 11-20 查到。类似地说明也适用于温度变化、支座下沉、剪切变形以及其他次要问题。

\* \* \*

本书除了介绍结构分析和能量法之外，希望还能能为读者提供关于进一步研究应用力学的足够的基础。本卷的内容将在第二卷《高等材料力学》中加以延续，第二卷中还包括了许多附加的论题。

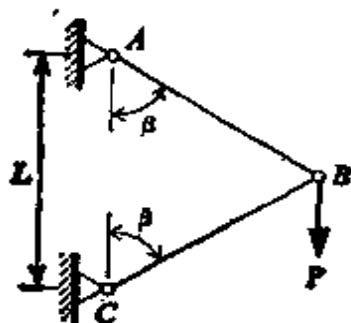
## 习 题

### 用单位载荷法求解第 11.3 节习题

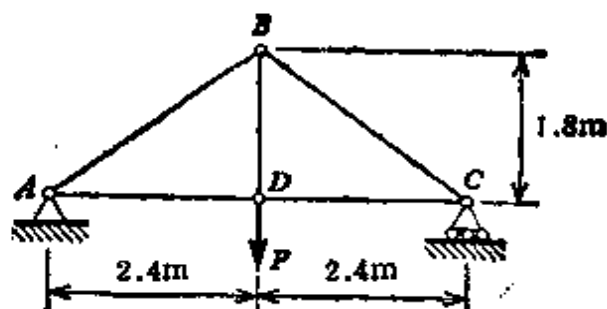
**11.3-1** 由两根杆构成的桁架  $ABC$ ，承受竖直载荷  $P$ ，如图所示。两个元件具有相同的轴向刚度  $EA$ ，假设  $\beta=60^\circ$ ，试求节点  $B$  的竖直变位  $\delta_v$ 、节点  $B$  的水平变位  $\delta_H$  以及元件  $AB$  的转角  $\theta_{\omega_0}$ 。

**11.3-2** 试再解上题，对于元件  $AB$  中温度均匀升高  $\Delta T$  的情况。(令  $\alpha$  为热膨胀系数。)

**11.3-3** 试确定图中所示桁架节点  $D$  的竖直位移  $\delta_v$  和节点  $C$  的水平位移  $\delta_H$ ，假设  $P=9\text{ kN}$ ，受压元件的截面积为  $3000\text{ mm}^2$ ，受拉元件的截面积为  $1200\text{ mm}^2$ (假设  $E=200\text{ kN/mm}^2$ )。



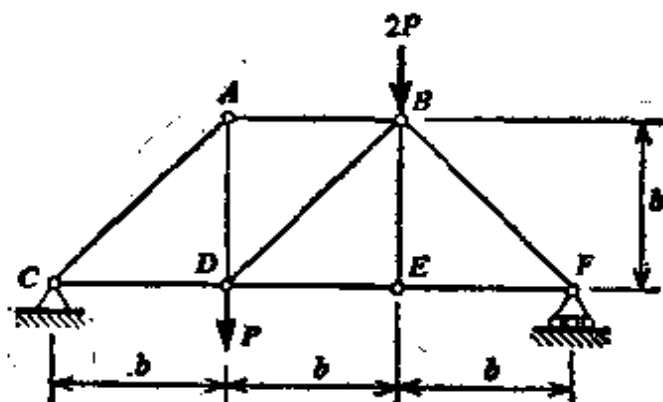
习题 11.3-1 和 11.3-2



习题 11.3-3 和 11.3-4

**11.3-4** 参见上题中所述的桁架, 假设载荷  $P=0$ , 试问为使节点  $D$  上升(反挠)12mm, 元件  $AB$  和  $BC$  的长度(与它们的理论长度相比)应增加多少?

**11.3-5** 试求图示桁架节点  $A$  处的竖直变位  $\delta_v$ . 假设所有元件的  $EA$  相同.

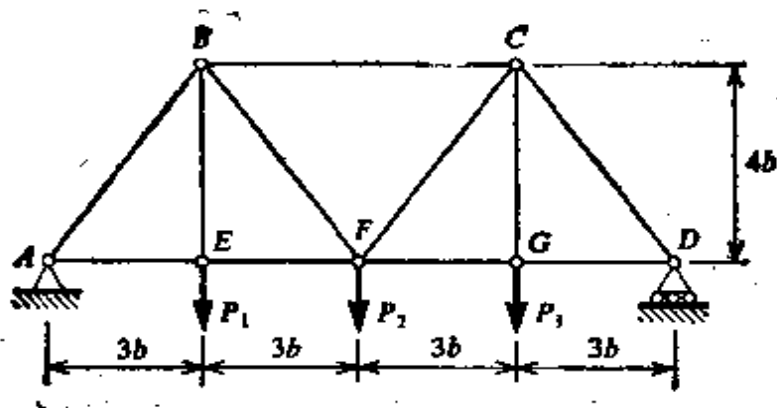


习题 11.3-5 和 11.3-6

**11.3-6** 试问当载荷作用于上题中的桁架上时, 节点  $A$  和节点  $E$  的间距增加了多少?

**11.3-7** 一销钉连接的钢桁架 ( $E=200 \text{ kN/mm}^2$ ), 承受三个载荷  $P_1$ ,  $P_2$  和  $P_3$ , 如图所示. 各元件的横截面积如下: 元件  $BE$ ,  $BF$ ,  $CF$  和  $CG$  的为  $1200 \text{ mm}^2$ , 元件  $AE$ ,  $EF$ ,  $FG$  和  $GD$  为  $1800 \text{ mm}^2$ , 元件  $BC$  的为  $2400 \text{ mm}^2$ , 元件  $AB$  和  $OD$  的则为  $3600 \text{ mm}^2$ . 假设距离  $b=1.2 \text{ m}$ ,  $P_1=P_2=36 \text{ kN}$ ,  $P_3=18 \text{ kN}$ . 试求桁架的下列位移: (a) 节点  $F$  的竖直变位  $\delta_v$ ; (b) 节点  $F$  的水平变位  $\delta_m$ ; (c) 元件  $BC$  的转角  $\theta_{\infty}$ .

**11.3-8** 参照上题中的桁架, 试计算由于载荷  $P_1$ ,  $P_2$  和  $P_3$  的作用, 节点  $B$  和  $G$  之间距离的减少量. (使用习题 11.3-7 中的全部数据.)



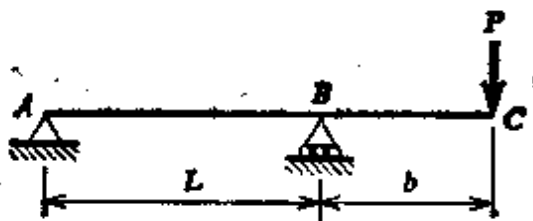
习题 11.3-7 和 11.3-8

**11.3-9** 一长为  $L$ 、弯曲刚度为  $EI$  的悬臂梁, 在其整个长度上作用有集度为  $q$  的均布载荷。试导出梁自由端处的挠度  $\delta$  和转角  $\theta$  的表达式。

**11.3-10** 一长为  $L$  的简支梁, 在中点处作用有集中载荷  $P$ , 试求在载荷作用处的挠度  $\delta$  和支座处的转角  $\theta$ 。

**11.3-11** 一悬臂梁, 承受两个集中载荷  $P$ , 如习题 6.5-3 图所示。假设这两个载荷在梁上为等间距作用 ( $a=b=c=L/3$ ), 试求梁在自由端处的挠度  $\delta$  和转角  $\theta$ 。

**11.3-12** 一带有外伸臂的简支梁(见图), 在自由端处作用有载荷  $P$ , 试确定在载荷作用处的挠度  $\delta_0$  和转角  $\theta_0$ 。



习题 11.3-12 和 11.3-13

**11.3-13** 对于上题中的梁, 试求  $AB$  跨中点处向上的挠度  $\delta$  和支座  $A$  处的转角  $\theta$ 。

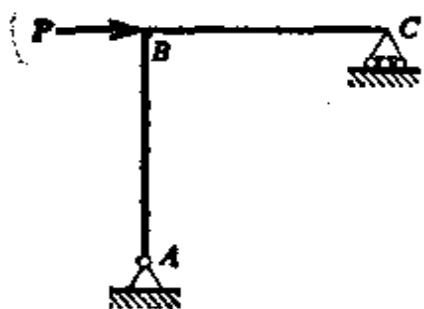
**11.3-14** 参见例 5 和图 11-7, 试求出由于温差在梁自由端处所产生的转角  $\theta$ 。

**11.3-15** 用单位载荷法解习题 6.3-6(在悬臂梁的一半长度上作用有均布载荷)。

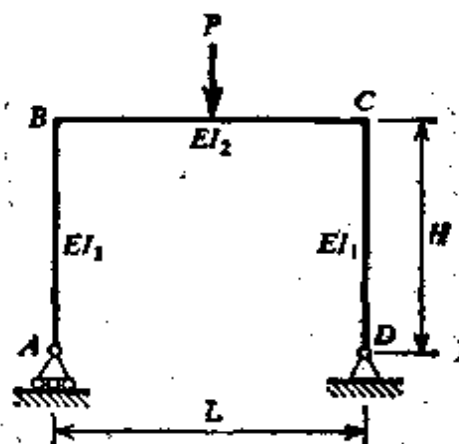
**11.3-16** 用单位载荷法解习题 6.4-6(一简支梁, 承受两个集中载荷  $P$ )。

**11.3-17** 试求承受三角形分布载荷的简支梁两端处的转角  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。(见图 6.2-9 的图)。

**11.3-18** 试求图示平面刚架在节点  $O$  处的水平挠度  $\delta$ 。假设元件  $AB$  和  $BC$  的长度均为  $L$ , 弯曲刚度为  $EI$ 。(注: 刚架  $A$  端为销接支座,  $O$  端为滚动支座。)



习题 11.3-18

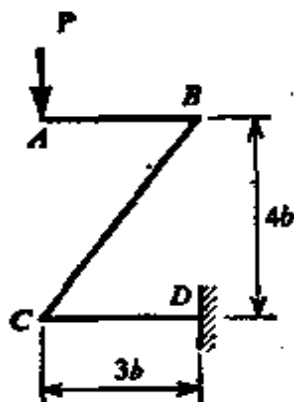


习题 11.3-19 和 11.3-20

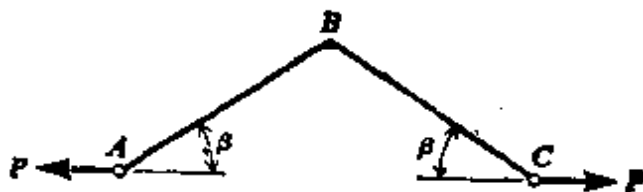
**11.3-19** 一平面刚架  $ABCD$ ,  $A$  端为滚动支座,  $D$  端为销接支座(见图)。刚架上的载荷为作用于元件  $BC$  中间处的力  $P$ 。竖直元件的弯曲刚度为  $EI_1$ , 水平元件的弯曲刚度为  $EI_2$ 。试确定  $A$  点处的水平挠度  $\delta_H$  和转角  $\theta$ 。

**11.3-20** 试求解上题, 假设不是载荷  $P$ , 而是在  $A$  点作用有水平向左的力  $Q$ 。

**11.3-21** 图中所示平面刚架  $ABCD$ ,  $D$  处固支,  $A$  处自由。试求由于竖直载荷  $P$  的作用, 在  $A$  点所产生的转角  $\theta$ 。假设所有元件具有相同的弯曲刚度  $EI$ 。



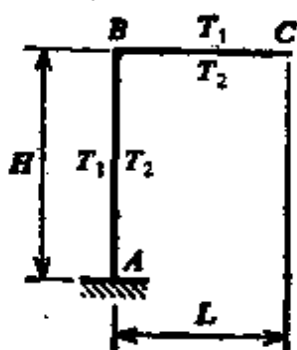
习题 11.3-21



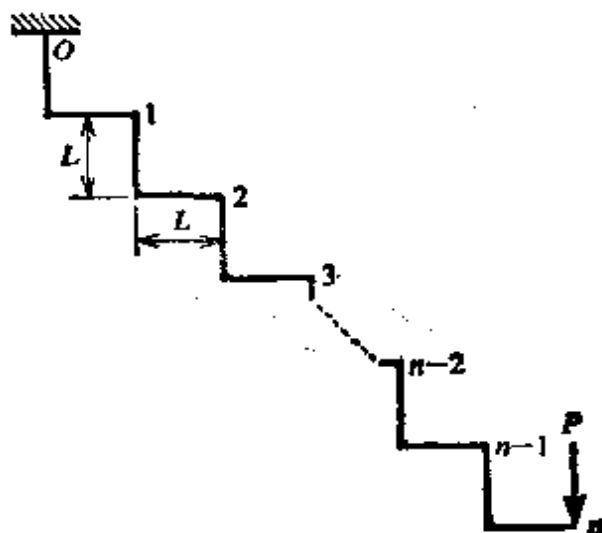
习题 11.3-22

**11.3-22** 试求平面刚架  $ABC$ (见图)在两个力  $P$  作用下  $A$  点和  $C$  点之间距离的增大值  $\Delta$ 。元件  $AB$  和  $BC$  具有相同的长度  $L$ 、弯曲刚度  $EI$  和轴向刚度  $EA$ 。(同时考虑元件的弯曲变形和轴向变形效应。)

**11.3-23** 图示平面刚架  $ABC$ ，在元件的左侧和上侧温度为  $T_1$ ，而另一侧温度为  $T_2$ 。试确定  $C$  点处的水平挠度  $\delta_H$ 、竖直挠度  $\delta_V$  和转角  $\theta$ 。假设刚架的两个元件具有相同的横截面积(截面高度等于  $h$ ) 和相同的材料(热膨胀系数等于  $\alpha$ )。



习题 11.3-23

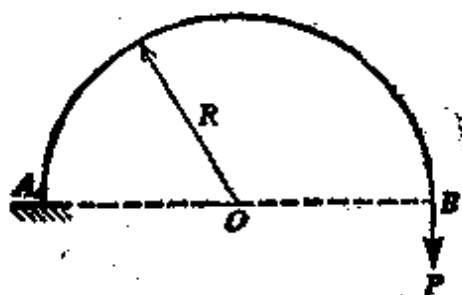


习题 11.3-24

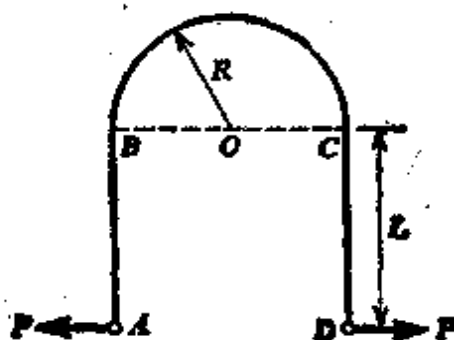
**11.3-24** 一“阶梯式”平面刚架，上端固支、下端自由(见图)。一载荷  $P$  作用于自由端处。试导出自由端处竖直挠度  $\delta$  之公式，假设有  $n$  个“阶梯”(刚架的每个元件长度均为  $L$ 、弯曲刚度均为  $EI$ )。

**11.3-25** 试求图 11-9a 所示曲杆在  $B$  点处的竖直挠度  $\delta_V$  和转角  $\theta$  的表达式。

**11.3-26** 试求中心线半径为  $R$  的半圆形细曲杆  $AB$  的  $B$  端的竖直挠度  $\delta_V$ (见图)。



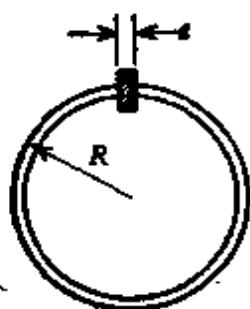
习题 11.3-26



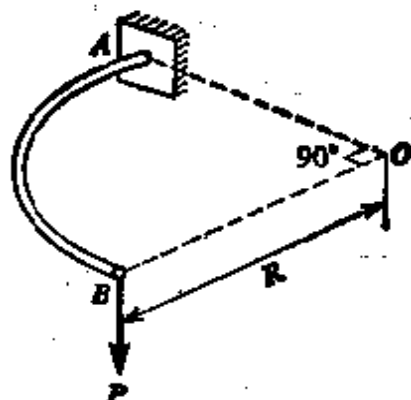
习题 11.3-27

**11.3-27** 一细杆是由半径为  $R$  的半圆部分  $BC$  和两根长为  $L$  的  $AB$  和  $CD$  直线部分组成(见图)，试求在两个载荷  $P$  作用下， $A$  点和  $D$  点间距离的增大值  $\Delta$ 。

**11.3-28** 一平均半径为  $R$  的细圆环, 于某一点处切开, 并在切开的间隙里放置一小块体, 使环张开(见图)。假设块体的宽度为  $e$ , 试求环中的最大弯矩。



习题 11.3-28

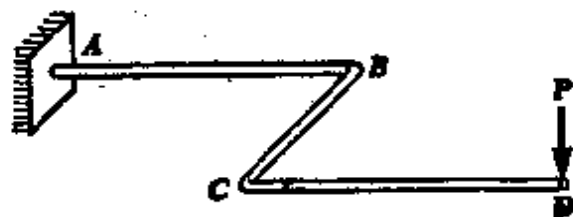


习题 11.3-29 和 11.3-30

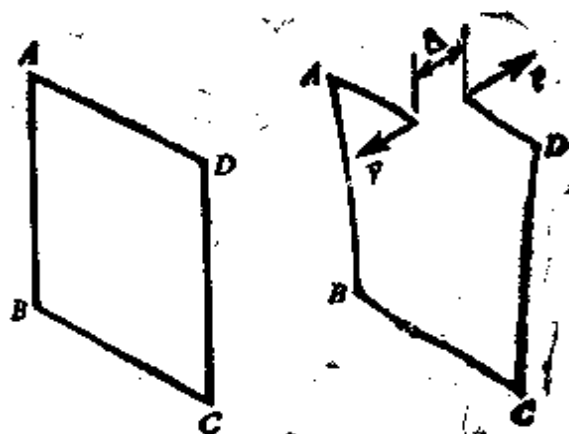
**11.3-29** 一细长曲杆  $AB$ , 置于水平面内, 其中心线为半径等于  $R$  的四分之一圆。在自由端处作用有竖直载荷  $P$ , 如图所示。试导出载荷作用处的竖直挠度  $\delta_V$  的公式。(假设杆的弯曲刚度为  $EI$ , 扭转刚度为  $GJ$ 。)

**11.3-30** 试问上题中所述曲杆  $B$  端的扭转角  $\phi$  为多少?

**11.3-31** 一水平托架  $ABCD$ (见图),  $A$  端固支,  $D$  端自由, 元件  $AB$  和  $CD$  的长度为  $1.5\text{ m}$ , 元件  $BC$  与  $AB$  和  $CD$  互成直角, 其长度为  $1.2\text{ m}$ 。托架是用直径为  $100\text{ mm}$ , 惯性矩为  $I=3 \times 10^6\text{ mm}^4$ , 极惯性矩  $J=6 \times 10^6\text{ mm}^4$  的圆管构成。试求托架在竖直载荷  $P=2\text{ kN}$  作用下自由端处的竖直挠度  $\delta$  和扭转角  $\phi$  (假设  $E=200\text{ kN/mm}^2$ ,  $G=80\text{ kN/mm}^2$ )。



习题 11.3-31



习题 11.3-32

**11.3-32** 一方形平面刚架  $ABCD$ , 在  $AD$  边的中点处有一切口(见图)。两个大小相等、方向相反的力  $P$  沿与刚架平面相垂直的方向作用于切口的两 endpoint 处。试求刚架切口两 endpoint 之间的距离  $\Delta$ 。假设所有元件的弯曲刚度皆为  $EI$ , 扭转刚度皆为  $GJ$ , 方形刚架的每边长度为  $L$ 。

**11.5-1** 试参照图 11-12a 和 b 导出位移互等定理( $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ ), 并且使用单位载荷法求出其位移。

**11.5-2** 试对于图 11-12a 和 b 所示的简支梁, 证明位移互等定理( $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ )。假设梁的长度为  $L$ ,  $A$  点位于梁中点处,  $B$  点位于距右边支座  $L/4$  处。

**11.5-3** 试证明位移互等定理适用于图 11-13 所示的简支梁。假设梁的长度为  $L$ ,  $A$  点位于距左支座  $L/3$  处,  $B$  点位于距右支座  $L/4$  处。

**11.5-4** 试证明位移互等定理( $\theta_{ab} = \theta_{ba}$ )适用于图 11-14 所示的简支梁。假设梁的长度为  $L$ ,  $A$  点位于梁中点处,  $B$  点位于距右支座  $L/3$  处。

**11.5-5** 一长为  $L$  的悬臂梁, 左端固支, 另一端自由, 承受两种加载状态。在第一种加载状态下, 梁的中点处作用向下的集中力  $P_1$ , 自由端处作用有顺时针方向的力偶  $M_1$ 。第二种加载状态下, 梁的中点处作用有向下的集中力  $P_2$ , 自由端处作用有向下的力  $P_3$ 。试由计算方程(11-21)两边的功, 对这两种加载情况证明功的互等定理。

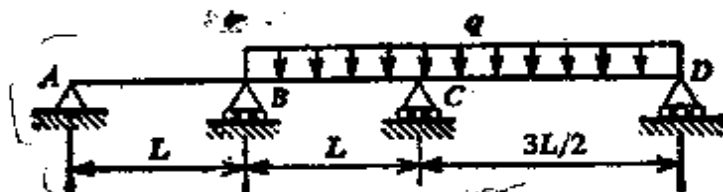
**11.5-6** 一长为  $L$  的简支梁, 承受两种加载状态, 第一种加载状态是竖直向下的集中力  $P_1$  作用于距左支座  $L/3$  处。第二种加载状态是两个大小相等的逆时针方向的力偶  $M_0$ , 一个作用于梁的左支座处, 另一个作用于梁的中点处。试由计算方程(11-21)两边的功, 对这两种加载情况证明功的互等定理。

**11.5-7** 一长为  $L$  的简支梁, 承受两种加载状态, 第一种加载状态是在整个梁上作用有集度为  $q$  的均布载荷。第二种加载状态是一集中力  $P$  作用于梁的中点处。试由计算方程(11-21)两边的功, 对这两种加载状况证明功的互等定理。(提示: 在均布载荷情况下, 将载荷元素  $qdx$  看作一集中力来处理, 然后进行积分)。

### 用柔度法求解第 11.6 节习题

**11.6-1** 试用图 11-16c 所示的放松结构求出图 11-16a 所示双跨梁的多余力。假设  $P_1 = P$ ,  $M_1 = 0$ ,  $P_2 = P$ ,  $P_3 = P$ 。取多余力  $X_1$  作为固定端  $A$  处逆时针方向的反力矩, 取  $X_2$  作为  $B$  点处向上的反力。

**11.6-2** 试确定图中所示连续梁在支座  $B$  和  $C$  处的弯矩。取这些弯

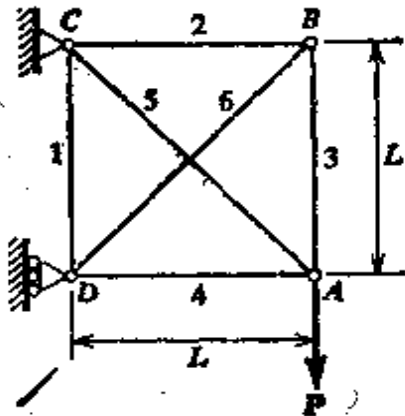


习题 11.6-2

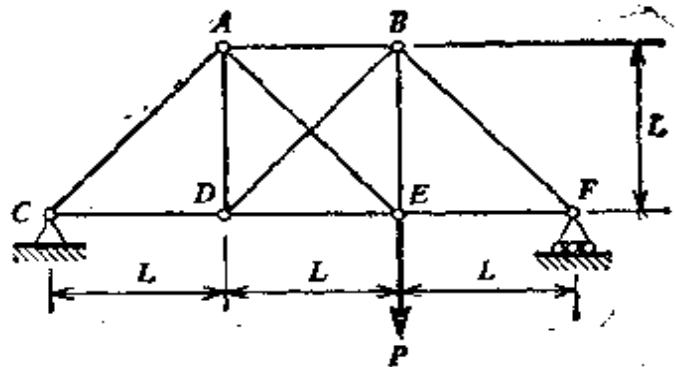
矩分别作为多余力  $X_1$  和  $X_2$ 。假设使梁的顶面产生压缩时它们为正。梁的弯曲刚度  $EI$  为常数。

**11.6-3** 试求图 11-19 所示梁的多余力  $X_1$  和  $X_2$ ，假设略去中间跨上的载荷，而右跨上的载荷  $P$  等于  $qL$ 。

**11.6-4** 图示平面桁架在节点  $A$  处承受载荷  $P$ ，所有元件的轴向刚度皆为  $EA$ ，试求诸元件的轴向力  $N_1, N_2, \dots, N_6$ 。



习题 11.6-4

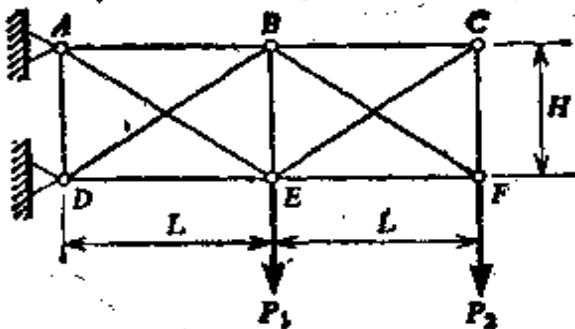


习题 11.6-5

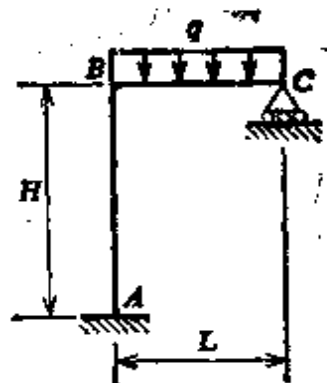
**11.6-5** 试求平面桁架中  $AB$  杆的轴向力(见图)，若  $P=150 \text{ kN}$ 。假设  $L=6 \text{ m}$ ，各元件的  $E$  均相同， $CA, AB$  和  $BF$  元件的横截面积为  $2600 \text{ mm}^2$ ，其余各元件的横截面积均为  $1300 \text{ mm}^2$ 。

**11.6-6** 参见图 11-20 所示的平面桁架并作再次求解，但此时取多余力  $X_1$  和  $X_2$  分别作为  $AB$  和  $BC$  杆中的轴向力。水平元件和竖直元件的轴向刚度为  $EA$ ，对角元件的轴向刚度则为  $2EA$ 。

**11.6-7** 试计算图示桁架中  $AB$  杆和  $BC$  杆的轴向力。分别以这两杆的轴向力作为多余力  $X_1$  和  $X_2$ 。求解时应用下列数据： $L=1 \text{ m}$ ， $H=0.75 \text{ m}$ ， $P_1=1 \text{ kN}$ ， $P_2=0.6 \text{ kN}$ ， $E=80 \text{ kN/mm}^2$ ，所有元件的横截面积皆为  $A=1000 \text{ mm}^2$ 。



习题 11.6-7

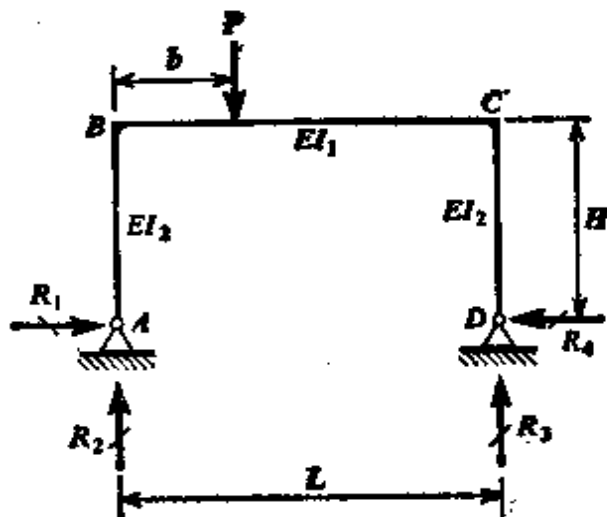


习题 11.6-8



**11.6-8** 一平面刚架  $ABC$ ,  $A$  处固支,  $C$  处为滚动支座, 如图所示. 元件  $AB$  和  $BC$  具有相同的弯曲刚度  $EI$ , 仅考虑弯曲变形的影响, 试求  $C$  点处的竖直反力.

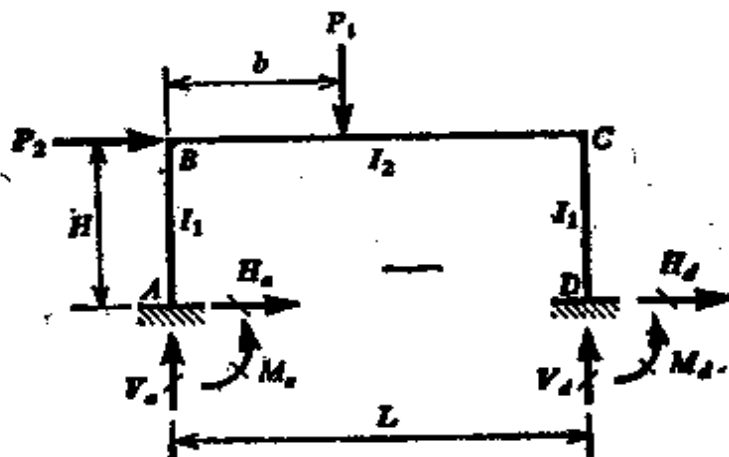
**11.6-9** 一平面刚架  $ABCD$ ,  $A$  和  $D$  处为铰接支座(见图). 水平元件的长度为  $L$ 、弯曲刚度为  $EI_1$ ; 竖直元件的长度为  $H$ , 弯曲刚度为  $EI_2$ . 试求由于载荷  $P$  而产生的刚架反力  $R_1, R_2, R_3$  和  $R_4$ . 仅考虑弯曲变形并取反力  $R_4$  作为多余力.



习题 11.6-9

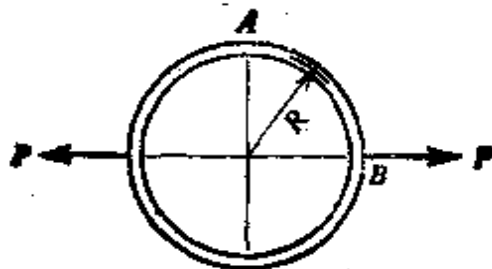
**11.6-10** 一平面刚架  $ABCD$ ,  $A$  和  $D$  处为固支, 如图所示. 试求固支处的反力, 假设  $P_1=P, P_2=0, b=L/2, H=L, I_1=I_2$ . 仅考虑弯曲变形的影响.

**11.6-11** 求解上题, 假设  $P_2=P, P_1=0, H=L/2, I_2=2I_1$ .



习题 11.6-10, 11.6-11 和 11.6-13

**11.6-12** 一半径为  $R$  的细圆环, 承受两个沿直径方向作用的大小相等、方向相反的力  $P$ , 如图所示. 试求圆环在  $A$  点和  $B$  点处的弯矩. 仅考虑弯曲变形的影响.

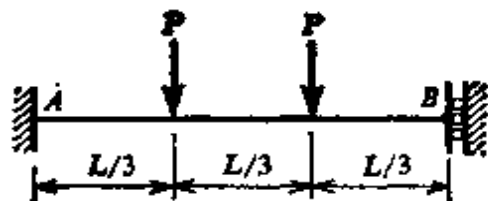


习题 11.6-13

**11.6-13** 试求出图示平面刚架在支座  $D$  处的反力, 取这些反力作为多余力. 仅考虑弯曲变形的影响, 并应用下列数据:  $P_1=72\text{kN}$ ,  $P_2=0$ ,  $b=6\text{m}$ ,  $L=18\text{m}$ ,  $H=6\text{m}$ ,  $E=200\text{kN/mm}^2$ ,  $I_1=270\times 10^6\text{mm}^4$ ,  $I_2=460\times 10^6\text{mm}^4$ .

### 用刚度法求解第 11.7 节的习题

**11.7-1** 图中所示的梁  $AB$ ,  $A$  处为固定支座,  $B$  处为定向支座. 试求支座  $B$  处的向下位移  $D$  和反力矩  $M_b$  (逆时针方向为正).



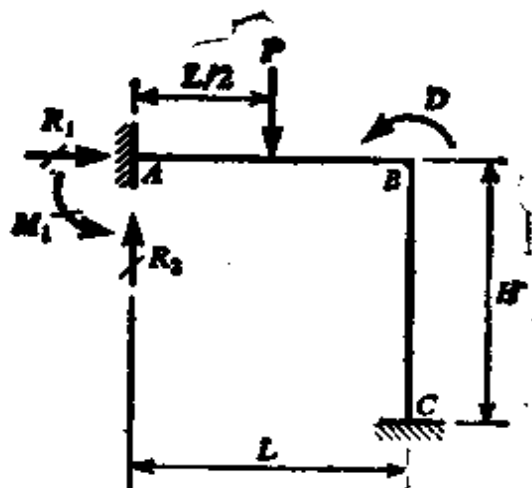
习题 11.7-1

**11.7-2** 图 11-26a 所示的两跨连续梁  $ABC$ , 在  $A$  处为固定支座,  $B$  处和  $C$  处为滚动支座. 梁上的载荷如下:  $P_1=P$ ,  $M_1=PL$ ,  $P_2=0$ ,  $P_3=0$ . 另外,  $AB$  跨的长度为  $L$ , 但  $BC$  跨的长度为  $1.5L$ . 试分别确定  $B$  点和  $C$  点处的转角  $D_1$  和  $D_2$  (逆时针方向为正), 并求出支座  $A$  处的反力  $R_a$  和  $M_a$ .

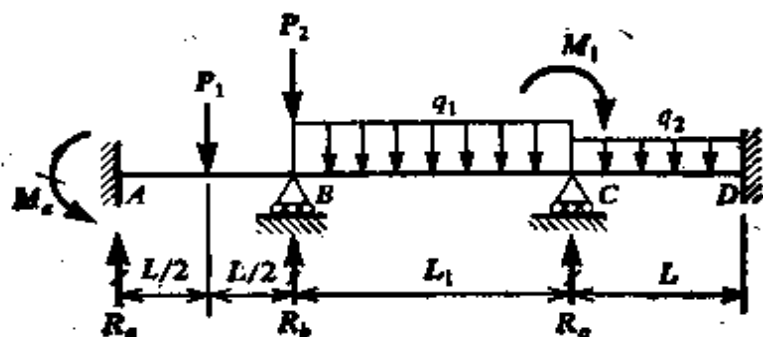
**11.7-3** 分析图 11-27a 所示的梁  $ABC$ , 假设  $P_1=P$ ,  $P_2=P/3$ ,  $L_1=L$ ,  $L_2=3L$ . 试求未知位移  $D_1$ ,  $D_2$ , 并确定两端的反力矩  $M_a$  和  $M_c$ .

**11.7-4** 图中所示的平面刚架  $ABC$ ,  $A$  处和  $C$  处为固定支座, 元件  $AB$  的长度为  $L$ , 元件  $BC$  的长度为  $H$ , 两元件有相同的弯曲刚度  $EI$ . 仅考虑弯曲变形的影响, 试求节点  $B$  处的转角  $D$  (逆时针方向为正). 另外确定支座  $A$  处的反力  $R_1$ ,  $R_2$  和  $M_1$ .

**11.7-5** 图中所示的三跨连续梁,  $A$  处和  $D$  处为固定支座,  $B$  处和  $C$  处为滚动支座, 三跨的长度相等 ( $L_1=L$ ). 梁上的载荷如下:  $P_1=P$ ,  $P_2=0$ ,  $M_1=0$ ,  $q_1=0$ ,  $q_2=P/L$ . 试确定该梁的反力  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  和  $M_a$ .



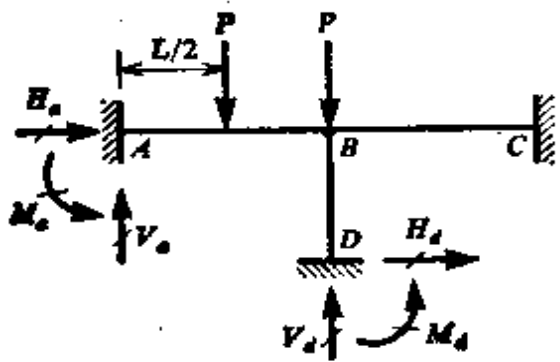
习题 11.7-4



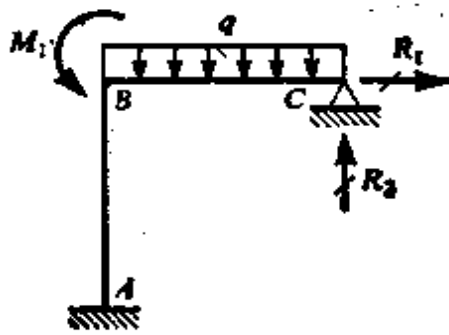
习题 11.7-5 和 11.7-6

**11.7-6** 对于下面的情况求解上题, 其中间跨的长度为两边跨长度的 1.5 倍(即  $L_1=1.5L$ ), 梁上的载荷如下:  $P_1=P_2=P$ ,  $q_1=P/L$ ,  $q_2=P/L$ ,  $M_1=PL$ .

**11.7-7** 试求图中所示平面刚架在固定支座 A 处和 D 处的反力, 仅考虑弯曲变形的影响, 所有元件具有相同的弯曲刚度, 元件 AB 和 BC 的长度为  $L$ , 元件 BD 的长度为  $2L/3$ .



习题 11.7-7



习题 11.7-8

**11.7-8** 一平面刚架  $ABC$  (见图), 其  $A$  处为固定支座,  $O$  处为销接支座. 元件  $AB$  和  $BO$  具有相同的弯曲刚度和相同的长度  $L$ . 载荷为作用在元件  $BO$  上集度为  $q$  的均布载荷和作用在节点  $B$  处的力偶  $M_1 = 2qL^2$ . 仅考虑弯曲变形的影响, 试确定支座  $O$  处的反力  $R_1$  和  $R_2$ .

**11.9-1** 图 1-14a 所示的对称桁架由三根相交于  $D$  点的杆组成, 各杆具有相同的轴向刚度  $EA$ , 中间杆的长度为  $L$ . 桁架上的唯一载荷是作用于  $D$  点处的竖重力  $P$ . (a) 试将结构的应变能  $U$  表示为节点  $D$  的竖直位移  $\delta$  的函数. (b) 用卡斯提利阿诺第一定理求出刚度法的平衡方程, 并对此方程求解变位  $\delta$ . (c) 用此  $\delta$  值求出桁架中各杆的轴向力  $N_{cd}$ ,  $N_{bd}$  和  $N_{ad}$ .

**11.9-2** 图 1-10a 所示的简单桁架, 承受载荷  $P$ . 该桁架的两根杆具有相同的轴向刚度  $EA$ , 元件  $AB$  的长度为  $L$ . 以  $D_1$  表示节点  $B$  的水平位移, 向右为正; 以  $D_2$  表示其竖直位移, 向下为正. (a) 试将结构的应变能  $U$  表示为位移  $D_1$  和  $D_2$  的函数. (b) 用卡斯提利阿诺第一定理求解  $D_1$  和  $D_2$ . (c) 用这些  $D_1$  和  $D_2$  的值求各杆的轴向力  $N_{ab}$  和  $N_{bc}$ .

**11.10-1** 试用势能法求图 11-34a 所示平面刚架节点的转角  $D_1$  和  $D_2$ . 每个元件的长度为  $L$ , 弯曲刚度为  $EI$ .

**11.10-2** 用势能法解习题 11.9-1.

**11.10-3** 用势能法解习题 11.9-2.

### 用瑞利-里兹法求解第 11.11 节习题

**11.11-1** 试求图 11-36 所示简支梁在下列情况下中点处的挠度  $\delta$  的近似值: (a) 取形状函数为带有一个位移参数的二次多项式形式. (b) 取形状函数(对梁的一半)为带有一个位移参数的三次多项式形式. 将所得结果与精确解进行比较.

**11.11-2** 试求长为  $L$  承受集度为  $q$  的均布载荷的简支梁中点处挠度  $\delta$  的近似值. 假设梁的弯曲刚度为常数  $EI$ . (a) 取形状函数为带有一个位移参数的三角函数表达式(见第 11.11 节方程 a). (b) 取形状函数为带有两个位移参数的三角函数表达式(见第 11.11 节方程 d). 将所得的结果与精确解进行比较.

**11.11-3** 试求长为  $L$ 、在中点处作用有集中力  $P$  的固定端梁中点处的挠度  $\delta$  的近似值(见图 7-3). 假设梁的弯曲刚度  $EI$  为常数. 用带有一个位移参数的三角函数表达式作为形状函数, 其形式如下:

$$v = \frac{\delta}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right)$$

将所得的答案与挠度的精确值进行比较.

**11.11-4** 图 6-15a 所示的简支梁，具有两种不同的惯性矩。试按下列情况求出梁中点处挠度  $\delta$  的近似值。(a) 取形状函数为带有一个位移参数的二次多项式形式。(b) 取形状函数(对梁的一半)为带有一个位移参数的三次多项式形式。将所得的结果与精确挠度(见第 6.6 节方程 c)进行比较。

**11.11-5** 试求具有固定基础的理想柱之临界屈曲载荷  $P_{cr}$ (见图 11-38)。假设柱的弯曲刚度  $EI$  为常数。形状函数采用带有一个位移参数的三角函数表达式，如下所示：

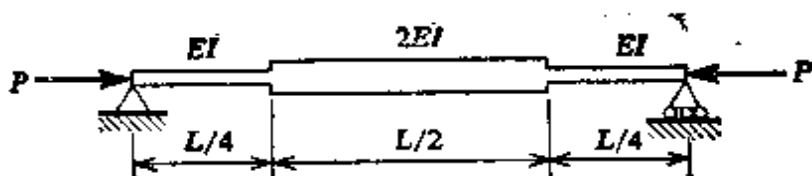
$$v = \delta \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right)$$

**11.11-6** 试确定具有简支支座条件的理想柱之临界屈曲载荷  $P_{cr}$ (见图 10-6a)。假设柱的弯曲刚度  $EI$  为常数。(a) 取带有一个位移参数的二次多项式的表达式作为假设的形状函数。(b) 取带有一个位移参数的四次多项式的表达式作为假设的形状函数。将所得的结果与精确的临界载荷进行比较。

**11.11-7** 试计算具有两种不同惯性矩(见图)的理想简支柱之临界屈曲载荷  $P_{cr}$  的近似值。用带有一个位移参数的三角函数作为形状函数如下：

$$v = \delta \sin \frac{\pi x}{L}$$

(注：精确的屈曲载荷为  $P_{cr} = 1.68\pi^2 \frac{EI}{L^2}$ )。

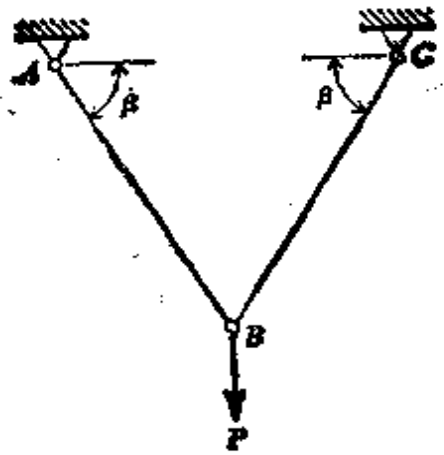


习题 11.11-7

**11.12-1** 一承受载荷  $P$  的非线性结构，其所储存的余能  $U^*$  在第 11.8 节例 1 中已给出(见方程 11-46)。试用克罗蒂-恩格瑟定理验证该结构的位移  $\delta$  的表达式。

**11.12-2** 一个由两根水平杆构成的非线性结构(见图 11-30)，已在第 11.8 节例 2 中论述过。结构的余能由方程(11-49)给出。试用克罗蒂-恩格瑟定理验证该结构的位移  $\delta$  的表达式(见方程 11-47b)。

**11.12-3** 由两根相同杆件  $AB$  和  $BC$  组成的桁架(见图)，承受竖直载荷  $P$  的作用。每根杆的横截面积为  $A$ ，长度为  $L$ 。应力-应变关系为  $\sigma^n = B\epsilon$ ，式中  $B$  和  $n$  皆为常数。(a) 试由计算结构的余能，并应用克罗蒂-恩格瑟定理，确定节点  $B$  处的变位  $\delta$ 。(b) 试用单位载荷法确定变位  $\delta$ 。



习题 11.12-8

**11.12-4** 图 11-32 所示的桁架在节点  $B$  承受竖直载荷  $P$ 。其图(b)给出了应力-应变图。试通过下列方法确定节点  $B$  的水平变位  $\delta_H$ ：(a) 计算结构的余能并应用克罗蒂-恩格瑟定理，(b) 用单位载荷法。

**11.12-5** 试求顶端悬挂着的竖直杆在其自重作用下的伸长量  $\delta$ ，假设材料的应力-应变关系为  $\sigma^n = B\epsilon$ ，式中  $B$  和  $n$  皆为常数。杆的长度为  $L$ ，杆的单位体积的重量为  $\gamma$ 。(a) 试计算杆的余能，并应用克罗蒂-恩格瑟定理求出伸长量。(b) 用单位载荷法求出其伸长量。

**11.14-1** 试确定图 11-40 所示悬臂梁中点处的挠度  $\delta$ 。(a) 在梁中点处加一虚载荷  $Q$ ，计算应变能，然后再用卡斯提利阿诺第二定理求出挠度。(b) 用单位载荷法求出挠度。

## 参考文献和历史注释

- 1-1. Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1953.
- 1-2. Todhunter, I. 和 Pearson, K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, 第 I 卷和第 II 卷, Dover Publications, Inc., New York, 1960 (原书由 Cambridge University Press 于 1886 年和 1893 年出版).
- 1-3. Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 第 4 版, Dover Publications, Inc., New York, 1944 (原书由 Cambridge University Press 于 1927 年出版); 见 "Historical Introduction", 第 1—31 页.
- 1-4. 见参考文献 1-2, 第 I 卷, 第 10, 533 页和 873 页. [注: Jacob Bernoulli (1654—1705) 还以 James, Jacques 和 Jakob 等名字而闻名; 参考文献 1-2 使用了 James 一名. 他是瑞士巴塞尔著名数学家和科学家家族的成员. 他写了梁的弹性曲线方面的重要著作, 还推导了极坐标, 并因概率理论、解析几何等方面的著作而出名. Jean Victor Poncelet (1788—1867) 是法国人, 参加过拿破仑反对俄国的战役, 误以为战死而被抛弃在战场上, 但他幸免于死, 被捉为囚犯, 后来回到法国继续从事他的数学著作. 他对数学的主要贡献是在几何方面, 然而在力学方面, 他以材料性能和动力学的著作最为著名.]
- 1-5. 见参考文献 1-1 第 90—98 页和参考文献 1-2 第 I 卷第 80—86 页. (注: Thomas Young 是一位杰出的科学家, 他在光学、声学、冲击以及其他论题方面写出了开创性的著作).
- 1-6. Young, Thomas, *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, 第 1 卷和第 2 卷, London, 1807.
- 1-7. 见参考文献 1-1 第 17—20 页和参考文献 1-2 第 I 卷第 5 页. (注: Robert Hooke 对弹性物体做了许多试验, 而后又提出了改进时计的方法. 他与牛顿是同时代的人, 没有受牛顿的影响而系统地阐述了万有引力定律. 1662 年伦敦皇家协会成立, 他被任命为该学会第一任会长.)
- 1-8. Hooke, Robert, *De Potentia restitutiva*, London, 1678.
- 1-9. 见参考文献 1-1 第 111—114 页, 参考文献 1-2 第 I 卷第 208—318 页以及参考文献 1-3 第 13 页. (注: Siméon Denis Poisson 对数学做出了许多重要贡献. 他的名字除用于泊松比外, 还以多种方式留传着. 例如, 在偏微分方程方面, 我们有“泊松方程”; 在概率方面, 有“泊松分布”. 在他自己的材料性能理论基础上, 他算出了受拉杆的横向应变, 并发现它为纵向应变的四分之一.)
- 1-10. Timoshenko, S. P. 和 Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 第 3 版, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1970, 第 110 页.
- 1-11. 见参考文献 1-1, 第 314 页.
- 1-12. 见参考文献 1-1, 第 36 页和参考文献 1-13, 第 650 页.
- 1-13. Oravas, G. A. 和 McLean, L., "Historical development of energetic principles in elastomechanics," *Applied Mechanics Review*, 第 I 部分第 19

卷,第8期,1966年8月,第647—653页和第II部分,第19卷,第11期,1966年11月,第919—933页。

- 1-14. 见参考文献1-1第75页,参考文献1-2第I卷第146页和参考文献1-13第652页。[注: Louis Marie Henri Navier (1785—1836) 是数学弹性理论创始人之一。他对梁、板和壳的理论、振动理论、粘性流体理论作出了贡献。]
- 1-15. 见参考文献1-1第88页。
- 1-16. Timoshenko, S. P. 和 Young, D. H., *Vibration Problems in Engineering*, 第3版 D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1955. (注: 杆上纵向冲击在第24—26页和312—314页中作了讨论。梁上横向冲击在第26—29页和412—413页中作了讨论。)
- 1-17. Goldsmith, W., *Impact*, Edward Arnold Ltd., London, 1960, 第379页。
- 2-1. Piobert, G., Morin, A. -J. 和 Didion, I., "Commission des Principes du Tir," *Mémorial de l'Artillerie*, 第5卷, 1842, 第501—553页。[注: 这篇论文叙述了籍射炮弹于铁板上所做的实验。在505页上有关于滑动带的条纹的描述。其描述非常简要, 没有迹象表明著者把这些条纹认为是材料固有的性能。Guillaume Piobert (1793—1871) 为法国的将军和数学家。他做了许多弹道学的研究。在此论文公布时, 他是炮兵上尉。]
- 2-2. Lüders, W., "Ueber die Äusserung der elasticität an stahlartigen Eisenstäben und stahlstäben, und über eine beim Biegen solcher stäbe beobachtete Molecularbewegung", *Dingler's Polytechnisches Journal*, 第155卷, 1860, 第18—22页。 (注: 这篇论文清晰地描述和说明了磨光钢试件表面在屈服变形时所出现的条带。自然, 这些条带仅是三维变形区域的表面征象, 因此把这些区域说成是条带倒不如称为楔形物。然而, 这些条带却通常叫做 Lüders 带, 尽管有时也叫作 Piobert 带。对于这种带的进一步讨论以及有关照片和文献可从参考文献2-3和2-4中找到。)
- 2-3. Fell, E. W., "The Piobert effect in iron and soft steel," *The Journal of the Iron and Steel Institute*, 第132卷, 第2期, 1935, 第75—91页。
- 2-4. Turner, T. H. 和 Jevons, J. D., "The detection of strain in mild steels," *The Journal of the Iron and Steel Institute*, 第111卷, 第1期, 1925, 第169—189页。
- 2-5. 见参考文献1-1第216页。
- 2-6. 见参考文献1-1第285—286页和参考文献2-7及2-8 [注 Otto Christian Mohr (1835—1918) 对结构理论做出了许多贡献。他特别由于许多图解法而出名, 在这些图解法中包括有莫尔应力圆、Williot-Mohr 图以及力矩面积法。另外, 他还发展了一种分析静不定结构的方法, 通常称为 Maxwell-Mohr 法。]
- 2-7. Mohr, O., "Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes," *Zivilingenieur*, 1882.
- 2-8. Mohr, O., *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Wilhelm Ernst and Sohn, Berlin, 1906.
- 2-9. 见参考文献1-1第109页。[注: Augustin Louis Cauchy (1789—1857) 是数学弹性理论史中的另一位卓越人物。他清晰地介绍了我们今天所理解的应力概念, 见参考文献1-1第108页和115页。在参考文献1-2中有一章专谈他的著作, 见该书第1卷第319—376页。]
- 2-10. 见参考文献1-2第II卷第1部分第86页和第296页。[注: William John



Macquorn Rankine (1820—1872) 于 1852 年推导出应力变换方程。他对弹性理论和结构理论, 包括拱和挡土墙的性能, 做出了许多其他的贡献。他还以他的有关流体、光学、声学、结晶性能等方面的著作而获盛名, 见参考文献 1-1 的第 197—202 页和参考文献 1-2 的第 II 卷第 I 部分第 287—322 页。Barré de Saint-Venant (1797—1886) 一直广泛地被认为是最出色的弹性力学家。他的一些最著名的贡献是对弹性力学基本方程之推导以及对梁的弯曲和扭转的精确理论的发展。他还发展了塑性变形和振动的理论。关于他的生平和著作的材料见参考文献 1-1 第 229—242 页和参考文献 1-2 第 I 卷的第 833—872 页以及第 II 卷第 I 部分的第 1—286 页。]

- 2-11. 见参考文献 1-10 第 219—226 页。
- 2-12. Hetényi, M., 编辑, *Handbook of Experimental stress Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.
- 2-13. Dally, J. W. 和 Riley, W. F., *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc. New York, 1965.
- 3-1. 见参考文献 1-1 第 51—53 页和 92 页以及参考文献 1-2 第 I 卷的第 69 页。[注: 圆杆情况下扭矩与扭转角之间的关系是由法国著名科学家 Charles Augustin Coulomb 于 1784 年正确地建立起来的。Coulomb 在电学以及磁学、液体的粘滞度、摩擦力、梁的弯曲、挡土墙和拱、扭转和扭转振动以及其他问题上作出了贡献, 见参考文献 1-1 第 47—54 页。Thomas Young 在他的 1807 年的书中(参考文献 1-6) 已注意到所作用的扭矩由横截面上的剪应力来平衡, 还注意到其剪应力与距轴线的距离成正比。]
- 3-2. 见参考文献 1-1 第 233—237 页和参考文献 1-2 的第 II 卷第 II 部分第 1—51 页。[注: Saint-Venant 关于扭转的划时代的研究报告出版于 1855 年, 并且在这些参考文献中作了叙述。]
- 3-3. Bredt, R., “Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität,” *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 第 40 卷, 1896, 第 813—817 页。
- 3-4. Flügge, W., 编辑, *Handbook of Engineering Mechanics*, 第 1 版, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1962, 第 36—13 页。
- 3-5. Timoshenko, S. P. 和 Gere, J. M., *Theory of Elastic stability*, 第 2 版, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1961, 第 500—509 页。
- 5-1. Fazekas, G. A., “A note on the bending of Euler beams,” *Journal of Engineering Education*, 第 57 卷第 5 期, 1967 年 1 月, 第 393—394 页。
- 5-2. 见参考文献 1-10 第 42 和 48 页。
- 5-3. 见参考文献 1-1 第 11—47、135—141 页和参考文献 1-2。
- 5-4. *Manual of Steel Construction*, 第 7 版, 由 American Institute of Steel Construction, Inc. 出版, 101 Park Avenue, New York, N. Y., 10017, 1970。
- 5-5. *Aluminum Construction Manual*, 由 Aluminum Association 出版, 420 Lexington Avenue, New York, N. Y., 1959, 389 页, 和 “Section A”, 1963, 96 页。
- 5-6. 见参考文献 3-5 的第 6 章。
- 5-7. 见参考文献 1-1 第 141—144 页和参考文献 1-2 第 II 卷第 I 部分第 641—642 页[注: D. J. Jourawski (1831—1891) 是俄国桥梁和铁路工程师, 发展了现在所广泛应用的梁中剪切应力的近似理论。尽管 Saint-Venant 已提出梁中剪应

- 力的精确理论,但是它仅用于很少几种实际情况;因此,看来 Todhunter 和 Pearson 在第 642 页中对 Jourawski 的理论所作的苛刻评语是不公平的。Jourawski 关于梁中剪切的论文列于参考文献 5-8 中。]
- 5-8. Jourawski, D. J., "Sur La résistance d'un corps prismatique...", *Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires et Documents*, 第 3 辑, 第 12 卷, 第 2 部分, 1856, 第 328—351 页。
- 5-9. 见参考文献 1-10 第 358—9 页。
- 5-10. 见参考文献 1-1 第 194—195 页。[注: Karl Culmann (1821—1881) 是德国工程师,对图解法作了许多发展工作,并出版了图解静力学方面最早的一本书。]
- 5-11. Ranov, T. 和 Wolko, H. S., "The Location of maximum principal stresses," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Structural Division*, 第 84 卷, ST3, 第 1629 号论文, 1958 年 5 月。
- 5-12. Maki, A. O. 和 Kuenzi, E. W., "Deflection and stresses of tapered wood beams," Research Paper FPL 34, U. S. Forest Service, Forest Products Laboratory, Madison, Wisconsin, 1965 年 9 月, 54 页。
- 5-13. 见参考文献 1-10 第 110—111 页。
- 5-14. Plantema, F. J., *Sandwich Construction*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1966。
- 5-15. 见参考文献 1-1 第 147 页。[注: 法国工程师 J. A. C. Bresse (1822—1883) 因其曲杆和拱的著作而闻名。]
- 6-1. 见参考文献 1-1 第 27, 30—36 页。[注: Jacob Bernoulli, Euler 以及其他许多人有关弹性曲线的著作在参考文献 1-2 中也作了讨论。关于这方面, Bernoulli 家族中的另一个成员 Daniel Bernoulli (1700—1783) 曾建议 Euler 藉使应变能成为最小而得到变位曲线的微分方程, Euler 这样做了。Daniel Bernoulli 是 Jacob Bernoulli 的侄子,他因其流体动力学、气体动力学理论、梁的振动以及其他方面的著作而著名。他的父亲 John Bernoulli (1667—1748) 是 Jacob 的弟弟,是同样著名的数学家和科学家,他最早阐述虚位移原理,解决了最速降线问题,并建立了当分子和分母均趋近于零时求分数极限值的规则。他把上面这个规则告诉 G. F. A. de L'Hôpital (1661—1704), L'Hôpital 写了微积分学的最早一本书,其中包括了上述定理,这就是今天我们所熟悉的"L'Hôpital 法则",见参考文献 6-2。Daniel 的侄子 Jacob Bernoulli (1759—1789) 也以 James 或 Jacques 的名字著名,他是板弯曲和板振动理论的先驱。关于 Bernoulli 家族中的许多杰出成员以及力学和数学方面的其他先驱的大量有趣资料可在数学史的书籍中找到,例如参见参考文献 6-3, 6-4 和 6-5。]
- 6-2. Struik, D. J., "The origin of L'Hôpital's rule," *The Mathematics Teacher*, 第 56 卷第 4 期, 第 257—260 页, 1963 年 4 月。
- 6-3. Newman, J. R., *The World of Mathematics*, 第 1—4 卷, Simon and Schuster, New York, 1956。
- 6-4. Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, 第 3 版, Dover Publications, Inc., New York, 1967。
- 6-5. Cajori, F., *A History of Mathematics*, 第 2 版; The Macmillan Co. New York, 1919。
- 6-6. 参见参考文献 1-1 第 137 页。
- 6-7. Navier 著, 而由 Barré de Saint-Venant 编写注释和附录的 *Résumé des*

*Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines.* 第3版第1部分, "De la Résistance des corps solides," Paris, 1864, 第72页。

- 6-8. 见参考文献1-1第284页。
- 6-9. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Holz-und Eisen-Constructionen," *Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 第14卷, 1868, 第19—51页。
- 6-10. Greene, Charles E., "Graphical Method for the Analysis of Bridge Trusses," D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1875. (注:力矩面积法是密歇根大学教授Greene于1873年独创的。他在这一年开始向学生讲授这种方法,这种方法以“面积力矩法”(area-moment method)的名称在该书第35—40页中进行了叙述。)
- 6-11. Hildebrand, F. B., *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956.
- 6-12. Salama, A. E. 和 Moody, M. L., "Analysis of beams and plates for ponding loads," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers Journal of the Structural Division*, 第93卷, 第ST1期, 第109—126页, 1967年2月。
- 6-13. Sawyer, D. A., "Roof-structure roof-drainage interaction," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the structural Division*, 第94卷, 第ST1号, 1968年1月, 第175—198页。
- 6-14. 见参考文献1-10第49页。
- 6-15. 见参考文献1-10第121页。
- 6-16. 见参考文献1-1第89页。
- 6-17. Cowper, G. R., "The Shear Coefficient in Timoshenko's beam theory," *Journal of Applied Mechanics*, 第33卷第2期, 1966年6月 (*Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 第88卷, E辑), 第335—340页。
- 6-18. Gere, J. M., *Moment Distribution*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, 1963年, 第212—220页。
- 6-19. 见参考文献1-1第25, 30—36, 39—40页。[注:曲率与弯矩关系的基本方程为Jacob Bernoulli所创,虽然他没有正确地求算比例常数。尽管如此,他的工作应该被认为是对求梁的大挠度问题的最早贡献。后来, Euler遵照Daniel Bernoulli的建议重新导出挠度曲线的微分方程,并进行了柔性弹性线的各种问题之求解,见参考文献1-1第27页、参考文献1-2第I卷第30页和34页以及参考文献1-3第3页。Euler关于弹性线的著名论文被列入参考文献6-20。Joseph Louis Lagrange(1736—1813)是著名的意大利数学家,他是第一个阐述虚功原理的人,而且对动力学作出了重要的贡献。显然,他是研究柔性弹性线的第二人。他考察过端头处作用有载荷的悬臂梁,见参考文献1-1的第39—40页和参考文献1-2的第I卷第58—61页。Lagrange的论文被列入参考文献6-21,他的传略载在参考文献6-4的第132页和参考文献6-5的第250页。另一位弹性理论方面的早期研究者Giovanni Antonio Amaedo Plana(1781—1864),他是Lagrange的侄子,曾校正过Lagrange在柔性弹性线研究中的一个错误,见参考文献1-2的第I卷第89—90页。Plana的论文被列入参考文献

- 献 6-22, 他的传记资料可从参考文献 6-5 中找到. Max Born 在他的学位论文中, 作过用变分法进行柔性弹性线的研究, 见参考文献 1-13 的第 927—928 页和第 932 页、参考文献 6-23 以及参考文献 6-24 的第 XXVIII 页. Max Born (1882—1970) 是一位伟大的物理学家, 他建立了近代波动力学, 并在量子力学和相对论方面作了重要的研究, 在他的学位论文中, 他建立了新的弹性力学变分原理.]
- 6-20. Euler, L., "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes...", 附录 I, "De curvis elasticis," Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744. (英译本: Oldfather, W. A., Ellis, C. A. 和 Brown, D. M., *Isis*, 第 20 卷, 1933, 第 70—160 页. 并再次发表于 *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, 第 1 辑, 第 24 卷, 1952.)
- 6-21. Lagrange, J. L., "Sur la force des ressorts pliés," *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 第 25 卷, 1771. (重印于 "Oeuvres de Lagrange," Gauthier-Villars, Paris, 第 3 卷, 1869, 第 77—110 页.)
- 6-22. Plana, G. A. A., "Équation de la courbe formée par une lame elastique," *Memories of the Royal Society of Turin*. 第 18 卷, 1809—1810, 第 123—155 页.
- 6-23. Born, M., "Untersuchungen über der Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum unter verschiedenen Grenzbedingungen," *Dissertation*. Göttingen, 1906.
- 6-24. Oravas, G. A., "Historical Review of Extremum Principles in Elastomechanics," G. A. P. Castigliano 著 *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications* 一书的介绍部分 (第 XX 页至 XLXI 页) 由 E. S. Andrews 译成英文, Dover Publications, Inc. 出版, New York, 1966 (注: Castigliano 的著作最早在 1879 年出版于 Turin, 随后在 1886 年译成德文, 1919 年译成英文. E. S. Andrews 所译的英译本以 *Elastic Stresses in Structures* 为题由 Scott, Greenwood 和 Son 于 London 出版. Dover 版本是英译本的再版, 但是里面有 Oravas 所编历史方面的新的介绍材料, 见参考文献 11-25 至 11-29.)
- 6-25. 见参考文献 1-3 第 401—412 页.
- 6-26. 见参考文献 3-5 第 76—82 页.
- 6-27. Southwell, R. V., *An Introduction to The Theory of Elasticity*, 第 2 版, Oxford University Press, London, 1941, 第 429—436 页.
- 6-28. Frisch-Fay, R., *Flexible Bars*, Butterworth and Co., Ltd., 1962, 220 页.
- 6-29. Easley, J. G., "Nonlinear deformation of elastic beams, rings, and strings," *Applied Mechanics Reviews*, 第 16 卷, 第 9 期, 1963 年 9 月, 第 677—680 页.
- 6-30. Reddick, H. W. 和 Miller, F. H., *Advanced Mathematics for Engineers*, 第 3 版, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955, 548 页.
- 6-31. Jahnke, E. 和 Emde, F., *Table of Functions*, 第 4 版, Dover Publications, New York, 1945.
- 6-32. Belyabov, V. M., Kravtsova, P. I. 和 Rappoport, M. G., *Tables of Elliptical Integrals*, 第 I 部分, 由 P. Basu 翻译, The Macmillan Co., New

- York, 1965, 647 页.
- 6-33. Fettis, H. E. 和 Caslin, J. C., *Tables of the Elliptic Integrals of the First, Second and Third Kind*. ARL 64-232, Aerospace Research Laboratories, Office of Aerospace Research, United States Air Force, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1964 年 12 月, 93 页.
- 6-34. Rojahn, C., "Large deflection of elastic beams." 工程师学位论文, Stanford University, 1968 年 6 月.
- 6-35. Bisshopp, K. E. 和 Drucker, D. C., "Large deflection of cantilever beams," *Quarterly of Applied Mathematics*, 第 3 卷, 1945, 第 272—275 页.
- 6-36. Barten, H. J., "On the deflection of a cantilever beam," *Quarterly of Applied Mathematics*, 第 2 卷, 1944, 第 168—171 页, 以及同一刊物的第 3 卷, 1945, 第 275—276 页. (注: 第二篇改正了第一篇里的一个错误.)
- 6-37. Rohde, F. V., "Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load," *Quarterly of Applied Mathematics*, 第 11 卷, 1953, 第 337—338 页.
- 6-38. Kirchhoff, G. R., "Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 第 56 卷, 1859, 第 285—313 页. [注: Gustav Robert Kirchhoff (1824—1887) 是一位著名的德国物理学家, 他以电网络和板弯曲理论的著作而出名.]
- 6-39. 见参考文献 3-5 第 77 页、参考文献 1-3 第 23—24 和 399—402 页、参考文献 1-2 第 II 卷第 II 部分第 65—66 页以及参考文献 6-27 第 431 页.
- 7-1. Navier, L. M. H., *Résumé des Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 第 1 版, 1826, 第 2 版, 1833, 第 3 版 (附有 Saint-Venant 的注释和附录) Paris, 1864. (注: Navier 编写了前两版, 第 3 版是在 Navier 死后由 Saint-Venant 编写, Saint-Venant 补充的材料为原书内容的十倍. 关于对此名著的讨论见参考文献 7-2.)
- 7-2. 见参考文献 1-1 第 73—77 和 232—233 页以及参考文献 1-2 第 J 卷, 第 144—146 页和第 II 卷, 第 I 部分第 105—135 页.
- 7-3. 见参考文献 6-18, 第 269—272 页.
- 7-4. 见参考文献 1-1 第 144—146 页. [注: B. P. E. Clapeyron (1799—1864) 是一位法国工程师, 他结合其在桥梁方面的工作导出了三弯矩方程. 他还因其功能和应变能的定理而出名. Clapeyron 叙述三弯矩方程的论文列入了参考文献 7-5 中. 另一位法国工程师 Bertot 是用今天的形式发表三弯矩方程的第一个人, 见参考文献 7-6 中所列他的论文. 虽然 Bertot 的论文发表在 Clapeyron 之前, 但是看来 Clapeyron 应用这个方法却要早好几年, 他是这个方程的真正创造者, 如参考文献 1-1 中所指出的那样.]
- 7-5. Clapeyron, B. P. E., "Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés," *Comptes Rendus*, 第 45 卷, 1857, 第 1076—1080 页.
- 7-6. Bertot, H., *Mémoires et Compte-rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils*, 第 8 卷, 1855, 第 278 页.
- 7-7. Zaslavsky, A., "Beams on immovable supports," *Publications of the*

*International Association for Bridge and Structural Engineering*, 第 35 卷, 1965, 第 353—362 页。

- 8-1. Timoshenko, S. P., "Use of stress functions to study flexure and torsion of prismatic bars," (俄文本), St. Petersburg, 1913 (在 *Memories of the Institute of Ways of Communication* 的第 82 卷中再次发表。)[注: 在这篇论文中, 找到了横截面内一点, 集中力不产生扭转时则应通过该点。所以, 看来在这一著作中第一次确定了剪切中心。所研究的特定梁为一半圆形横截面的空心梁, 见参考文献 8-2。1909 年, G. Bach 试验了槽形梁, 并观察了当梁上作用平行于腹板平面的荷载时所产生的扭转(参考文献 8-3 和 8-4)。他还观察了当荷载横向移动时旋转的变化, 但是显然他没有确定出剪切中心的位置。1917 年, A. A. Griffith 和 G. I. Taylor 应用皂膜法研究了弯曲, 他们确定了几种截面形式的剪切中心, 他们称之为弯曲中心(参考文献 8-5)。开口横截面薄壁杆的剪切中心的一般近似解由 R. Maillart 得出, 他解释了剪切中心对于结构截面形状的实际意义, 见参考文献 8-6。另外, 看来 Maillart 引进了“剪切中心”这一名词。参考文献 8-7 至 8-16 对剪切中心概念的发展作出了进一步的贡献。剪切中心的广泛讨论, 以及梁的弯曲和扭转问题的一般介绍在参考文献 8-17 中给出。有关剪切中心的一些历史注释可在参考文献 8-18 和 8-19 中找到。]
- 8-2. 见参考文献 1-10 第 371—373 页。
- 8-3. Bach, G., "Versuche über die tatsächliche Widerstands fähigkeit von Balken mit [-förmigem Querschnitt," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 第 53 卷第 44 期, 1909, 第 1790—1795 页。
- 8-4. Bach, G., "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Trägern mit[-förmigem Querschnitt," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 第 54 卷, 第 10 期, 1910, 第 382—387 页。
- 8-5. Griffith, A. A. 和 Taylor, G. I., "The Problem of flexure and its solution by the soap-film method," *Technical Report of the Advisory Committee for Aeronautics*, 1917—18. 第 3 卷, 由 His Majesty's Stationery Office 于 1921 年出版, London, (Reports and Memoranda, 第 399 期, 1917 年 11 月), 第 950—969 页。
- 8-6. Maillart, R., "Zur Frage der Biegung," *Schweizerische Bauzeitung*, 第 77 卷, 1921, 第 195—197 页; "Pemerkingen zur Frage der Biegung," 同上, 第 78 卷, 1921, 第 18—19 页; "Ueber Drehung und Biegung," 同上, 第 79 卷, 1922, 第 254—257 页; "Der Schubmittelpunkt," 同上, 第 83 卷, 1924, 第 109—111 页; "Zur Frage des Schubmittelpunktes," 同上, 第 83 卷, 1924, 第 176—177 页。
- 8-7. Weber, C., "Biegung und Schub in geraden Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 第 4 卷, 1924, 第 334—348 页。
- 8-8. Weber, C., "Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflächigem Querschnitt," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 第 6 卷, 1926, 第 85—97 页。
- 8-9. Schwalbe, W. L., "Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 第 15 卷, 1935, 第 138—143 页。
- 8-10. Treffitz, E., "Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast

- gebogenen Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 第15卷, 1935, 第220—225页。
- 8-11. Hill, H. N., "Torsion of flanged members with cross sections restrained against warping," *National Advisory Committee for Aeronautics*, Technical Note, 第888号, 1943年3月。
- 8-12. Osgood, W. R., "The center of shear again," *Journal of Applied Mechanics*, 第10卷, 第2期, 1943年6月, 第A-62至A-64页 (*Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 第65卷, 1943)。
- 8-13. Mandel, J., "Détermination du centre de torsion à l'aide du théorème de réciprocité," *Annales des ponts et Chaussées*, 第118卷, 1948, 第271—290页。
- 8-14. Jacobs, J. A., "The centre of shear of aerofoil sections," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 第57卷, 1953, 第235—237页。
- 8-15. Duncan, W. J., "The flexural centre or centre of shear," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 第57卷, 1953, 第594—597页。
- 8-16. Koiter, W. T., "The flexural centre or centre of shear," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 第58卷, 1954, 第64—65页。
- 8-17. Timoshenko, S. P., "Theory of bending, torsion, and buckling of thin-walled members of open cross section," *Journal of the Franklin Institute*, 第239卷, 第3期, 1945年3月, 第201—219页; 第4期, 1945年4月, 第249—268页以及第5期, 1945年5月, 第343—361页。
- 8-18. 见参考文献1-1第401页。
- 8-19. Nowinski, J. L., "Theory of thin-walled bars," *Applied Mechanics Surveys*, 由H. N. Abramson等编辑, Spartan Books, Washington, D. C., 1966, 第325—338页。
- 9-1. Beadle, L. S., *Plastic Design of Steel Frames*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958., 406页。
- 9-2. Massonnet, E. G. 和 Save, M. A., *Plastic Analysis and Design*, 第1卷, Blaisdell Publishing Co., New York, 1965, 379页。
- 9-3. Phillips, A., *Introduction to Plasticity*, Ronald Press Co., New York, 1956, 230页。
- 9-4. Phillips, A., "Bending of Beams," *Handbook of Engineering Mechanics* 之第47章, 由W. Flügge编辑, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1962。
- 9-5. Hodge, P. G., Jr., *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959, 364页。
- 9-6. Neal, B. G., *The Plastic Methods of Structural Analysis*, 第2版, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1963, 358页。
- 9-7. Heyman, J., *Plastic Design of Portal Frames*, Cambridge University Press, 1957, 104页。
- 9-8. Symonds, P. S., "Limit Analysis", *Handbook of Engineering Mechanics* 第49章, 由W. Flügge编, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1962。
- 9-9. Smith, J. O. 和 Sidebottom, O. M., *Inelastic Behavior of Load-Carrying Members*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965, 447页。

- 9-10. Symonds, P. S., 和 Neal, B. G., "Recent Progress in the plastic methods of structural analysis," *Journal of the Franklin Institute*, 第 352 卷, 第 5 期, 1951 年 11 月, 第 383—407 页及第 6 期, 1951 年 12 月, 第 469—492 页。
- 9-11. Beedle, L. S., 等, *Structural Steel Design*, Ronald Press Co., New York, 1964, 829 页。
- 9-12. *Plastic Design in Steel*, 出版者为 the American Institute of Steel Construction, Inc., 101 Park Avenue, New York, N. Y., 10017, 1959。
- 9-13. Nadai, A., *Theory of Flow and Fracture of Solids*, 第 1 卷, 第 2 版, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1950, 572 页。
- 9-14. *Commentary on Plastic Design in Steel, Manuals of Engineering Practice*, 第 41 期, American Society of Civil Engineers, 1961, 173 页。
- 9-15. Baker, J. F., Horne, M. R. 和 Heyman, J., *The Steel Skeleton*, 第 II 卷, "Plastic Behavior and Design," Cambridge University Press, 1956, 408 页。
- 9-16. Baker, J. F., "A review of recent investigations into the behavior of steel frames in the plastic range," *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 第 31 卷, 第 3 期, 1949 年 1 月, 第 188—224 页。
- 9-17. Baker, J. F., "The design of steel frames", *Structural Engineer*, 第 27 卷, 第 10 期, 1949 年 10 月, 第 397—431 页。
- 9-18. Greenberg, H. J. 和 Prager, W., "Limit design of beams and frames," *Transaction of the American Society of Civil Engineers*, 第 117 卷, 1952, 第 447—458 页。
- 9-19. Beedle, L. S. 和 Tall, L., "Basic column strength", *Transaction of the American Society of Civil Engineers*, 第 127 卷, 第 II 部分, 1962, 第 138—172 页。
- 9-20. Huber, A. W. 和 Beedle, L. S., "Residual stress and the compressive strength of steel," *Welding Journal*, 第 33 卷, 第 12 期, 1954 年 12 月, 第 589—614 页。
- 9-21. Yang, C. H., Beedle, L. S. 和 Johnston, B. G., "Residual stress and the yield strength of steel beams," *Welding Journal*, 第 31 卷, 第 4 期, 1952 年 4 月, 第 205—229 页。
- 9-22. Horger, O. J., "Residual Stress", *Handbook of Experimental Stress Analysis* 第 11 章, 由 M. Hetényi 编辑, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950。
- 9-23. Barrett, C. S., "A critical review of various methods of residual stress measurement," *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, 第 II 卷, 第 1 期, 1944, 第 147—156 页。
- 10-1. Timoshenko, S. P. 和 Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 第 2 版, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1961。
- 10-2. Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953。
- 10-3. Euler, L., "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes..." 附录 I, "De curvis elasticis," Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744. (英译文由 Oldfather, W. A., Ellis, C. A. 和 Brown, D. M.



翻译, *Isis*, 第20卷, 1933, 第76—160页, 还再次发表于 *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, 第I辑, 第24卷, 1952.)

注: L. 欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)对数学和力学作出了许多出色的贡献。他可能是直到目前为止著作最多的数学家(参考文献6-4, 第120页), Newman称他为“数学家之英雄”(参考文献6-3第150页)。他的名字在现代教科书中反复出现, 例如, 在力学方面, 我们读到的有 Euler 的刚体运动方程、Euler 角、Euler 的液流方程、柱屈曲时的 Euler 载荷等等; 在数学方面, 我们遇见有著名的 Euler 常数和 Euler 数、Euler 恒等式( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  等)和 Euler 公式( $e^{i\pi} + 1 = 0$ )、Euler 微分方程、变分问题的 Euler 方程, Euler 求积公式、Euler 求和公式、齐次函数的 Euler 定理、Euler 积分以及 Euler 方(具有某些性质的数的方阵列)。

在应用力学方面, Euler 第一个导出理想细长柱的临界屈曲载荷, 而且第一个求解了柔性弹性线问题。在他的大量著作中包括有天体力学、动力学和流体力学方面的论文, 他的论文还包括有梁和板振动方面的内容。

在数学领域里, Euler 对三角、代数、数论、微积分、无穷级数、解析几何、微分方程、变分计算以及其他许多方面作出了杰出的贡献。他第一个将三角值设想为数的比值, 而且第一个提出方程  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。他的数学著作在其后许多年代中被认为是经典参考书。我们从中发现变分计算的最早发展以及诸如对于  $n=3$  和  $n=4$  的 Fermat“最终定理”的证明那种引起兴趣的项目。他求解了 Königsberg 七座桥的著名问题——一个拓扑学问题, 这是他开拓的另一个领域。

Euler 出生于瑞士的巴塞尔附近, 求学于巴塞尔大学, 在 John Bernoulli (1667—1748)的指导下进行学习。从 1727 年至 1741 年, 他在圣彼得堡生活和工作, 在这里他作为一位数学家获得了很大的声誉。1741 年, 他应普鲁士国王腓特烈二世邀请移居到柏林。在柏林直到 1766 年俄国女皇叶塞林二世要求他回到圣彼得堡为止, 他一直继续他的数学研究, 他在 76 岁死于圣彼得堡之前, 不停地写作, 在他生命中这个最后一段时间内, 他写了 400 余篇论文。Euler 一生中所写的书和论文的数量总计 886 件。在他死后留下了许多手稿, 这些手稿在后来的四十七年中由圣彼得堡的俄国科学院相继出版了, 所有这一切都是他在一只眼于 1735 年失明, 另一只眼又于 1766 年失明的情况下写出的! Euler 的生平琐事在参考文献 1-1 中第 28—30 页和参考文献 6-3 中第 148—151 页作了介绍。他对力学的某些贡献在参考文献 1-1 中第 30—36 页作了叙述。

- 10-4. Euler, L., "Sur La force des colonnes," *Histoire de L'Académie Royale des Sciences et Belles Letters*, 1757, 发表于 *Memoires of the Academie*, 第 13 卷, Berlin, 1759, 第 252—282 页。(注: 见参考文献 10-5 中这篇论文的译文和讨论。)
- 10-5. Van den Broek, J. A., "Euler's classic paper 'On the strength of columns'," *American Journal of Physics*, 第 15 卷, 第 4 期, 1947 年 7—8 月, 第 309—138 页。
- 10-6. Hoff, N. J., "Buckling and Stability," The Forty-First Wilbur Wright Memorial Lecture, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 第 58 卷, 1954 年 1 月, 第 3—52 页。
- 10-7. Young, D. H., "Rational design of steel column," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 第 101 卷, 1936, 第 422—451 页。

- 10-8. Johnston, B. G., 编辑, *Guide to Design Criteria for Metal Compression Members*, 第2版, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
- 10-9. *Manual of Steel Construction*, 第7版, 由 American Institute of Steel Construction, Inc. 出版, 101 Park Avenue, New York, N. Y., 10017, 1970, 第5—16页和5—17页.
- 10-10. *ALCOA Structural Handbook*, 由 Aluminum Company of America, Pittsburgh, Pennsylvania 出版, 1960.
- 11-1. Maxwell, J. C., "On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames," *Philosophical Magazine*, 第4辑, 第27卷, 1864, 第294—299页. (再次发表于 *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge University Press, 第1卷, 1890, 第598—604页, 见参考文献11-3.) [注: James Clerk Maxwell (1831—1879) 在这篇论文中导出了求解弹性桁架挠度的单位载荷法. 它还包括位移互等定理和静不定桁架中求多余力的柔度法. 十年后, Otto Mohr 再次创出求挠度的 Maxwell 法(参考文献11-4), 以及他在静不定桁架中求多余力的方法(参考文献11-13). Maxwell 进行了结构力学中其他的重要工作, 包括应力分析的光测弹性法的发展. 他还在弹性理论方面作了许多研究. 关于这方面著作的描写和简略传记见参考文献1-1中的第202—208页和263—275页. 自然, Maxwell 以他在光学、气体分子运动论、电学以及磁学方面的科学著作最为著名. 关于这位著名数学家和物理学家的生平轶事见参考文献11-2.]
- 11-2. Campbell, L. 和 Garnett, W., *The Life of James Clerk Maxwell*, Macmillan and Co., London, 1882.
- 11-3. Maxwell, J. C., *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 第1卷和第2卷, 由 W. D. Niven 编辑, Cambridge University Press, 1890.
- 11-4. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger," *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 第20卷, 第2期, 1874, 第223—238页. (注: 这篇论文提出了求桁架位移的单位载荷法.)
- 11-5. Betti, E., "Teoria della Elasticità," *Il Nuovo Cimento*, 第2辑, 第7卷和第8卷, 1872. [注: Enrico Betti (1823—1892) 是意大利数学家和工程师.]
- 11-6. Rayleigh, Lord, "Some general theorems relating to vibrations," *Proceedings of the London Mathematical Society*, 第4卷, 1873, 第357—368页. (由 John William Strutt 再次发表于 *Scientific Papers*, 第1卷, Cambridge University Press, 1890, 第170—181页.) [注: 在这篇论文中 Lord Rayleigh 提出了在振动系统上两个不同点处作用谐和变力情况下的互等定理. 他令力的周期变成无穷大从而得出两个力情况下的静力互等定理. 在1874和1875年发表的一篇论文中(参考文献11-7), Rayleigh 得到柔度和刚度的互等定理, 虽然他没有采用这些术语. 后来, 在1877年首次出版他的《声学理论》中(见参考文献11-8), 他对两组相应力和位移的功互等定理(每一组包含任意多个力)给了明确的叙述.

Lord Rayleigh (1842—1919) 即 John William Strutt, 英国著名的物理学家. 他最著名的研究是在声学、光学和电学方面, 他的著作 *The Theory of Sound* 是一部经典书籍, 至今还被广泛应用. 他的科学论文集有六卷, 已经再版过两次(见参考文献11-9和11-10). Lord Rayleigh 曾在剑桥大学三一学院数学家 E. J. Routh 和 G. G. Stokes 指导下学习. 除了理论研究外, 他还

完成了许多实验工作.1879年,他在剑桥 *Cavendish* 实验室当上了教授,后来他担任过大不列颠皇家学院的自然科学教授.他曾帮助筹备国家物理实验室,并自1909年航空咨询委员会创始起担任该委员会主席直至去世.此外,自1905至1908年, Lord Rayleigh 为皇家学会主席.自1908年起到他去世为止他还是剑桥大学名誉校长.他曾获得不少荣誉,包括1903年的国家勋章和1904年的诺贝尔物理学奖.后者是由于他与 William Ramsay 爵士合作在1895年发现稀有气体氩.在他的许多重要发现中,或许我们应当注意到 Lord Rayleigh 是第一个解释为什么天空是蓝色的人. Rayleigh 曾两次访问美国,第二次是1884年,当时他参加了 Kelvin 公爵的著名的“Baltimore 讲演”。

Lord Rayleigh 的传记可从参考文献 1-1, 11-8, 11-11 和 11-12 中找到.]

- 11-7. Rayleigh, Lord, "Astatical theorem", *Philosophical Magazine*, 第4辑, 第48卷, 1874, 第452—456页;第4辑,第49卷, 1875, 第183—185页。(由 John William Strutt 再次发表于 *Scientific Papers*, 第1卷, Cambridge University Press, 1899, 第223—229页.)
- 11-8. Strutt, John William (Baron Rayleigh), *The Theory of Sound*, 第1卷和第2卷, 第2版, Dover Publications Inc., 1945。(注:这个再版本包括 Robert Bruce Lindsay 写的历史介绍和传记略述.第1版最初出版的时间是:第1卷于1877年,第2卷于1878年.第2版最初出版的时间是:第1卷于1894年,第2卷于1896年.这两版均由 Macmillan and Co. Ltd. 在 London 出版.)
- 11-9. Strutt, John William (Baron Rayleigh), *Scientific Papers*, Cambridge University Press, 第1卷, 1899年;第2卷, 1900;第3卷, 1902, 第4卷, 1903;第5卷, 1912;第6卷, 1920。(1964年由 Dover Publications, Inc., 再版,见参考文献 11-10.)
- 11-10. Rayleigh, Lord, *Scientific Papers*, Dover Publications, Inc., New York, 1964。(这是一个6卷集的再版本,原版于1899至1920年由 Cambridge University Press 出版,但是再版时装订成三卷.)
- 11-11. Strutt, Robert John (Fourth Baron Rayleigh), *John William strutt, Third Baron Rayleigh*, Edward Arnold and Co., London, 1924, 403页。(由 Lord Rayleigh 的长子编写的 Lord Rayleigh 传记.)
- 11-12. Strutt, Robert John (Fourth Baron Rayleigh), *Life of John William Strutt, Third Baron Rayleigh*, University of Wisconsin Press, 1968, 439页。(在这个最初由 Edward Arnold and Co. 于1924年出版的传记的再版本中,包括著者写的注释和 John N. Howard 写的前言.)
- 11-13. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie des Fachwerks," *Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover* 第20卷, 第4期, 1874, 第509—526页和第21卷, 第1期, 1875, 第17—33页。(注:这篇论文提出了用于静不定桁架的柔度法.)
- 11-14. Gere, J. M. 和 Weaver, W., Jr., *Analysis of Framed Structures*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1965, 475页。
- 11-15. Timoshenko, S. P. 和 Young, D. H., *Theory of Structures*, 第2版, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1965, 629页。
- 11-16. Norris, C. H. 和 Wilbur, J. B., *Elementary Structural Analysis*, 第2版,

- McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1960, 651 页。
- 11-17. Hall, A. S. 和 Woodhead, R. W., *Frame Analysis*, 第 2 版, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967, 329 页。
- 11-18. Borg, S. F. 和 Gennaro, J. J., *Modern Structural Analysis*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969, 455 页。
- 11-19. Martin, H. C., *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1966, 331 页。
- 11-20. Gere, J. M., *Moment Distribution*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1963, 378 页。
- 11-21. Weaver, W., Jr., *Computer Programs for Structural Analysis*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1967, 300 页。
- 11-22. Clebsch, A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, 1863, 424 页。[注: Alfred Clebsch (1833—1872) 是一位在力学方面作了许多发展的德国数学家。]
- 11-23. Bendixen, A., *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*, Berlin, 1914。(注: 在这本书中, Axel Bendixen 提出了角变位移法, 这种方法是用于平面构架的刚度法, 以节点转动作为未知量。)
- 11-24. Ostenfeld, A., *Die Deformationsmethode*, Springer, Berlin, 1926, 118 页。
- 11-25. Castigliano, A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, 由 A. F. Negro 出版, Turin, 1879, 430 页。(注: 在这本书中, Castigliano 以非常完整的形式提出了结构分析的许多概念和原理。虽然 Castigliano 是意大利人, 但是他是用法文写这本书的, 为的是要使他的著作得到较广泛的读者。它被译成了德文和英文, 见参考文献 11-26 和 11-27。英译本由 Dover Publications 再版于 1966 年, 且因 Gunhard A. Oravas 所写的介绍材料而特别有价值, 见参考文献 11-28 和 6-24。

Castigliano 的第一定理和第二定理见其著作 1966 年版本第 15—16 页。他将它们区别为“内功微分系数定理”的第 1 部分和第 2 部分。关于这个定理, 他的叙述如下:

“第 1 部分。如果构架结构的内功被表达为作用于结点处外力的相关位移之函数, 那么所得的表达式对这些位移的微分系数得出相应力之值。”

“第 2 部分。相反地, 如果构架结构的内功被表达为外力的函数, 那么所得表达式的微分系数则给出它们作用点的相关位移。”

现在, 这些叙述通常分别称为 Castigliano 第一定理和第二定理, 而不称为同一定理中的第 1 部分和第 2 部分。Castigliano 在这本书中叙述了他的定理之后, 接着进行它们的推导, 并将其用于许多情况。在这本书中, 它们以数学形式表现为:

$$F_P = \frac{dW_i}{dr_P} \quad \text{和} \quad r_P = \frac{dW_i}{dF_P}$$

式中  $W_i$  为内功(或应变能),  $F_P$  代表外力中的任意一个,  $r_P$  为  $F_P$  的作用点之位移。

虽然 Castigliano 在这本书的前言中指出他的介绍和论证比以前已经出版的任何书刊更为全面, 但他没有说第一定理是他先提出的。第二定理则是他所创, 是他 1873 年在都灵工艺学院的土木工程学位论文中的一部分, 见

参考文献 11-29.

“最小功原理”为 Castigliano 在 1873 年发表的论文中所证明,而且它也出现在这本参考书中。Castigliano 和 Ménabréa 之间对这个原理的著作权进行争论的轶事,在 Oravas 对 1966 年版本所作的引言中(参考文献 11-28)作了描述。

Carlo Alberto Pio Castigliano 于 1847 年出生在 Asti 的一个贫穷家庭里,1884 年正值他著述最多的时候因肺炎早逝。他的生平由 Oravas 在对 1966 年版本所作的引言中作了介绍,并同时介绍了 Castigliano 的著述目录以及他所获得的荣誉和各种奖。在参考文献 1-13, 1-1 和 11-30 中也记载了他的贡献。当在著作上署名时,他采用 Alberto Castigliao 这一名字。]

- 11-26. Haieff, E., *Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und deren Anwendung*, 由 Carl Gerold's Sohn 出版, Vienna, 1886. [Castigliano 书(参考文献 11-25)的译本.]
- 11-27. Andrews, E. S., *Elastic Stresses in Structures*, Scott Greenwood and Son, London, 1919. [Castigliano 书(参考文献 11-25)的译本.]
- 11-28. Castigliano, C. A. P., *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications*, 由 E. S. Andrews 翻译, 并由 G. A. Oravas 加了新的引言和传记叙述一节, Dover Publications Inc., New York, 1966. (参考文献 11-27 的再版.)
- 11-29. Castigliano, A., “Intorno ai sistemi elastici,” 1873 年为都灵工业学院土木工程学位提交的论文, 由 Vincenzo Bona 出版, Turin, 1873, 52 页。
- 11-30. Grüning, M., “Theorie der Baukonstruktionen”, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaft*, Leipzig, 第 4 卷, 第 4 部分, 1907—1914, 第 419—534 页。
- 11-31. Kirchhoff, G. R., “Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 第 40 卷, 1850, 第 51—88 页。  
[注: 在这篇论文中, Kirchhoff 应用了势能逗留值的概念导出了板弯曲时的基本微分方程。在后来一篇论文中(参考文献 6-38), 他进一步发展了势能逗留值的概念。关于这位著名科学家的传记材料见参考文献 1-1 的第 252—255 页。]
- 11-32. Au, T., *Elementary Structural Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963, 521 页。
- 11-33. Hoff, N. J., *The Analysis of Structures*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1956, 493 页。
- 11-34. Oden, J. T., *Mechanics of Elastic Structures* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1967, 381 页。
- 11-35. Ritz, W., “Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 第 185 卷, 1908, 第 1—61 页。[注: Walther Ritz (1878—1909) 是一位不幸早逝的卓越的瑞士物理学家, 他的论文已再次发表于参考文献 11-36 中, 该文献还包括有传记。]
- 11-36. Ritz, W., *Gesammelte Werke*, Gauthier-Villars, Paris, 1911, 541 页。
- 11-37. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Structural and*

- continuum Mechanics*, McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., London, 1967, 272 页。
- 11-38. Crotti, F., "Esposizione del Teorema Castigliano e suo raccordo colla teoria dell' elasticita," *Atti del collegio degli Ingegneri ed Architetti in Milano*, 第 11 卷, 第 4 辑, 第 2 部分, 1878, 第 225 页。(还发表于 *Il politecnico*, 第 27 卷, 1879, 第 45 页。)[注: Francesco Crotti(1839—1896)是一位意大利铁路工程师和 Castigliano 的朋友。在这篇论文中,他第一次推导出 Crotti-Engesser 定理,虽然他后来关于余能的研究要广泛得多。Crotti 在从 1877 年开始所写的一系列论文直到 1888 年的一篇重要论文(参考文献 11-39)中,阐述了关于余能的全部基本定理和原理。关于 Crotti 的工作在参考文献 1-13 的 922—925 页和参考文献 6-24 的 XXV—XXVII 页作了描述。关于 Crotti 的生平简介材料由 Oravas 写于参考文献 6-24 中第 XLIII 页。]
- 11-39. Crotti, F., *La Teoria dell' elasticita ne suoi Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni*, Ulrico Hoepli, Milan, 1888.
- 11-40. Engesser, F., "Ueber statisch unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungs-Gesetze und über den Satz von der Kleinster Ergänzungsarbeit," *Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 第 35 卷, 1889, 第 733—744 页。[注:在这篇论文中,Friedrich Engesser(1848—1931)介绍了“余功”一词,并导出了 Crotti-Engesser 定理。显然他不知道 Crotti 的更为一般的方法,见参考文献 1-13 的第 925—926 页和参考文献 6-24 的第 XXVII 页。Engesser 是德国铁路工程师,后来成为 Karlsruhe 工学院教授。他对结构力学作出了许多贡献,而以他对柱的非弹性屈曲方面的著作尤为著名。有关其传记材料见参考文献 1-1 的第 397—399 页。]
- 11-41. Westergaard, H. M., "On the method of complementary energy," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 第 107 卷, 1924, 第 765—793 页。
- 11-42. Langhaar, H. L., *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962, 350 页。
- 11-43. Argyris, J. H. 和 Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth and Co. Ltd., London, 1960, 85 页。
- 11-44. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1968, 468 页。
- 11-45. Charlton, T. M., "Analysis of Statically-indeterminate structures by the complementary energy method," *Engineering*, 第 174 卷, 1952, 第 389—391 页。
- 11-46. Brown, E. H., "The energy Theorems of structural analysis," *Engineering*, 第 179 卷, 1955, 第 305—308, 339—343 以及 400—403 页。
- 11-47. Libove, C., "Complementary energy method for finite deformations," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 第 90 卷, 第 EM6 期, 1964 年 12 月, 第 49—71 页。
- 11-48. Oran, C., "Complementary energy method for buckling," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, *Journal of the Engineering*

- Mechanics Division, 第93卷, 第EM1期, 1967年2月, 第57—75页.
- 11-49. Oran, C., "Complementary energy concept for Large deformations," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the structural Division, 第93卷, 第ST1期, 1967年2月, 第471—494页.
- 11-50. Westergaard, H. M., *Theory of Elasticity and plasticity*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1953, 176页.
- 11-51. Westergaard, H. M., "One hundred fifty years advance in structural analysis," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 第94页, 1930, 第226—240页.
- 11-52. Ménébréa, L. F., "Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques," *Comptes Rendus*, 第46卷, 1858, 第1056—1060页. [注: 在这篇论文中, Ménébréa 提出了这样的概念, 即桁架中诸杆的多余力具有使应变能为最小之值, 但是他没有正确地证明这个概念, 见参考文献6-24第xxii页、参考文献1-13第655页以及参考文献1-1第289页. Luigi Frederico Ménébréa (1809—1896) 是意大利的贵族、将军和工程师, 他的传记可从参考文献6-24第XL页中找到.]

## 附录 A 平面面积的性质

### A.1 面积的形心

为了确定面积形心的坐标, 让我们参看图 A-1 所示的面积  $A$  和坐标  $x, y$ . 面积微元  $dA$  的坐标为  $x$  和  $y$  亦示于图中, 通过积分求出总面积如下:

$$A = \int dA \quad (\text{A-1})$$

面积形心的距离  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  由下列方程求得:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \quad (\text{A-2a, b})$$

自然, 式中的积分必须对整个面积  $A$  进行.

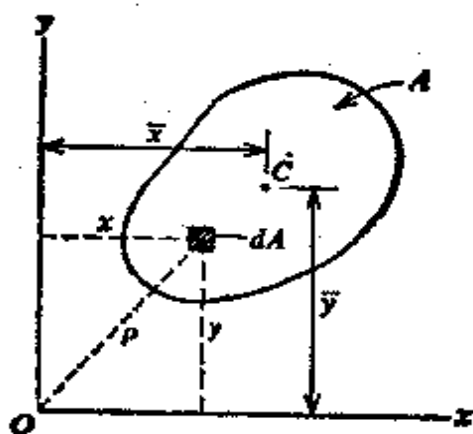


图 A-1. 形心为  $C$  的平面面积.

方程(A-2)中的分子称为面积的一次矩, 并用符号  $Q$  表示. 因而我们有

$$Q_x = \int y dA \quad Q_y = \int x dA \quad (\text{A-3a, b})$$

式中  $Q_x$  为对  $x$  轴的一次矩, 而  $Q_y$  为对  $y$  轴的一次矩. 使用这个记号, 我们可将形心坐标的方程写为

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} \quad (\text{A-4a, b})$$

只要面积的边界线可以用简单的解析表达式定义, 我们就能用闭合形式计算方程(A-1)和(A-3)中的积分, 然后使用方程(A-4)确定形心的位置.

有许多情形, 其形心的位置可通过观察看出. 例如, 如果面积具有两根对称轴(图 A-2), 则其形心位于两轴的交点. 若面积有一根对称轴(图 A-3), 则形心位于该轴的某处, 因此, 为了确定  $C$  点的位置, 只有一个坐标距离待求. 最后, 如果面积对一点对称(即使没有对称轴), 则该点就为形心(见图 A-4).

附录 B 给出了确定各种形状平面面积的形心位置的表格.

如果面积的边界为不规则的曲线, 我们就可将面积分成很小的面积微元  $\Delta A$  并用求和代替积分:

$$A = \sum \Delta A \quad Q_x = \sum y \Delta A \quad Q_y = \sum x \Delta A \quad (\text{A-5a, b, c})$$





图 A-2.

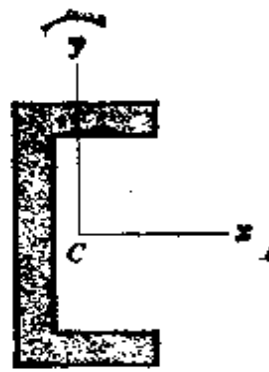


图 A-3.

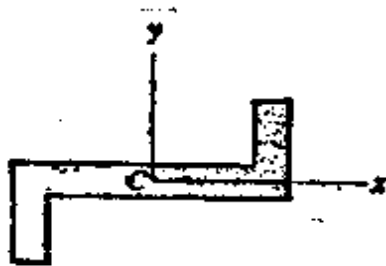


图 A-4.

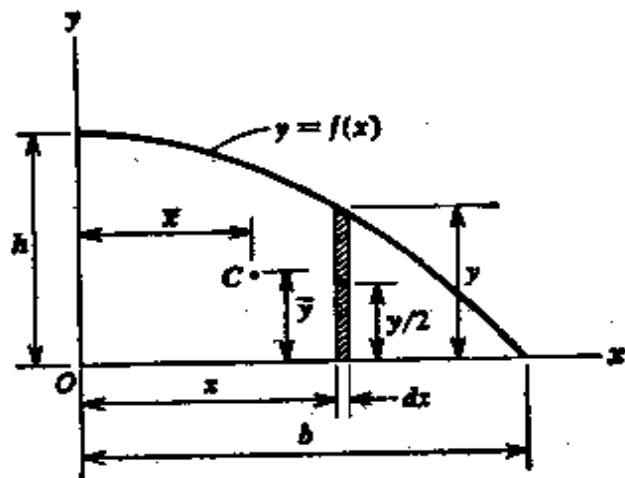


图 A-5. 例题.

然后将求和的这些量代入方程(A-4)得出  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ 。只要面积微元  $dA$  取的不大, 以此方法得出的结果就非常接近精确值。

**例题** 试确定图 A-5 所示抛物线的面积, 一次矩  $Q_x$  和  $Q_y$  及形心  $O$  的位置。抛物线的方程为

$$y=f(x)=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

图中阴影线所示的面积微元  $dA$  具有面积

$$dA=y dx=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx$$

总面积为 
$$A=\int dA=\int_0^b h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx=\frac{2bh}{3}$$

阴影面积微元形心的坐标为  $\bar{x}$  和  $y/3$ , 因此, 一次矩为

$$Q_x=\int \frac{y}{2} dA=\int_0^b \frac{h^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)^2 dx=\frac{4bh^3}{15}$$

$$Q_y=\int x dA=\int_0^b xh\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx=\frac{b^2h}{4}$$

最后, 定出形心的坐标位置如下:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{3b}{8} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{2h}{5}$$

## A.2 组合面积的形心

在工程实践中, 我们经常遇到由几个部分组成的面积, 每一部分均为常见的几何形状, 它们的面积和形心位置已知。图 A-2, A-3 和 A-4 表示这种组合面积的例子, 每块面积均由矩形组合而成。在确定这种图形的面积和形心位置时, 只须将面积划分成一些适当的部分, 然后用求和代替积分。

为了说明这种方法, 让我们研究图 A-6 所示的组合面积。该面积可以划分为具有两个面积  $A_1$  和  $A_2$  的矩形, 它们的形心为  $C_1$  和  $C_2$ , 假设这些形心的位置为已知。用坐标  $x_1, y_1$  和  $x_2, y_2$  分别代表  $C_1$  和  $C_2$  的坐标, 我们就得到该组合面积形心坐标的如下表达式:

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} \quad \bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

将此例推广, 我们看出, 可以用下列表达式求得任一组合面积的性质:

$$A = \sum A_i \quad Q_x = \sum y_i A_i \quad Q_y = \sum x_i A_i \quad (\text{A-6a, b, c})$$

式中  $A_i$  表示形心坐标为  $x_i$  和  $y_i$  的分块面积, 而求和包括在总组合面积之内的所有这样的面积。不管分块面积的数目有多少, 这些方程都是成立的。在图 A-6 中面积仅分为两部分的特殊情况下, 整个面积的形心  $C$  总是位于形心  $C_1$  和  $C_2$  的连线上。

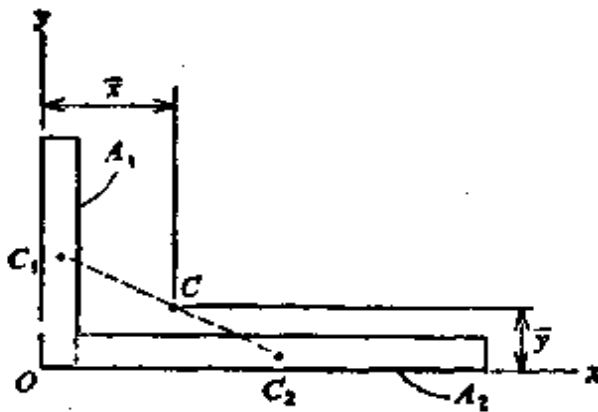


图 A-6. 组合面积的形心。

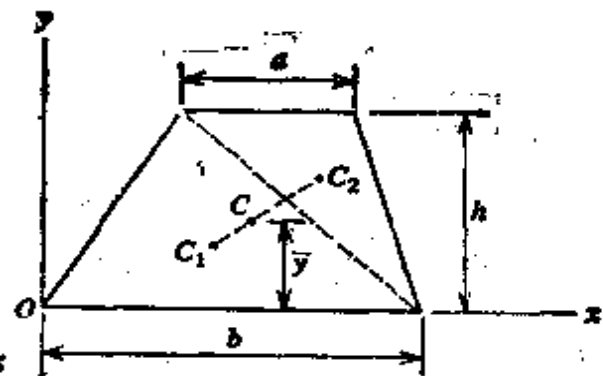


图 A-7. 例题。

**例题** 试确定底宽为  $b$  和  $a$  及高为  $h$  的梯形(图 A-7)的形心  $C$  的坐标  $\bar{y}$ 。

将该梯形分为具有形心  $C_1$  和  $C_2$  的两个三角形, 我们看出, 这些形心的坐标  $y$  分别为

$$y_1 = \frac{h}{3} \quad y_2 = \frac{2h}{3}$$

另外,两个三角形面积为

$$A_1 = \frac{bh}{2} \quad A_2 = \frac{ah}{2}$$

于是,根据方程(A-6),我们得到

$$A = \frac{h}{2}(b+a) \quad Q_x = \frac{h^2}{6}(b+2a)$$

最后得 
$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{h(b+2a)}{3(b+a)}$$

注意,如果  $a=b$ , 该图变成矩形, 上述方程给出  $\bar{y}=h/2$ . 如果  $a=0$ , 我们获得三角形的情况, 及  $\bar{y}=h/3$ .

### A.8 面积的惯性矩

平面面积(见图 A-1)对  $x$  和  $y$  轴的惯性矩分别由下列积分确定:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (\text{A-7a, b})$$

式中面积微元  $dA$  乘以距相应轴距离的平方, 并且遍及整个面积  $A$  进行积分. 惯性矩有时被称为面积的二次矩.

在某些简单的情况下, 惯性矩可用解析计算. 例如考虑矩形的情况(图 A-8). 在计算其对通过形心  $C$  的对称轴  $x$  的惯性矩时, 我们可以将矩形划分成图中用阴影面积所示的无穷小的微元. 于是我们有  $dA = b dy$ , 并且

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{A-8})$$

用同样的方法, 可求出该矩形对  $y$  轴的惯性矩为  $I_y = \frac{hb^3}{12}$ .

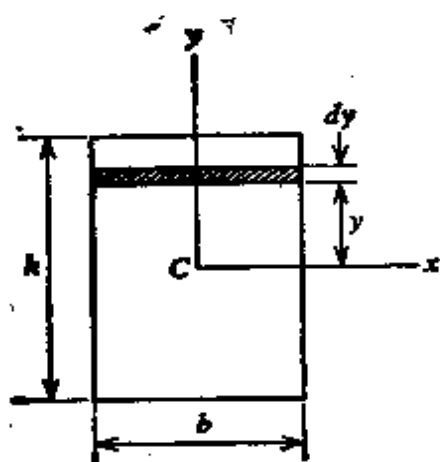


图 A-8.

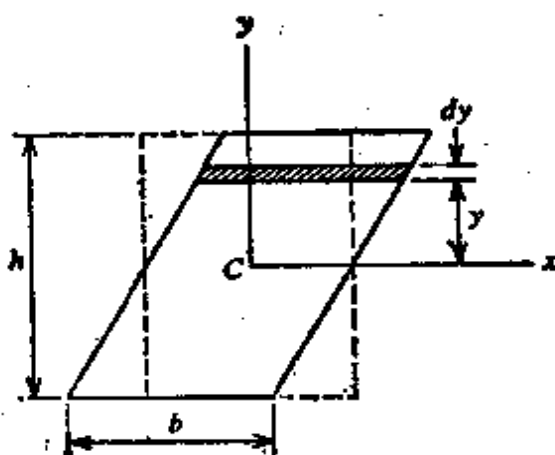


图 A-9.

方程(A-8)也可用来计算图 A-9 所示的平行四边形的  $I_x$ 。该平行四边形可通过图中阴影线所示的微元平行于  $x$  轴移动到虚线所示的矩形来求得。在移动的过程中, 该微元的面积和距  $x$  轴的距离保持不变, 因而其  $I_x$  与矩形的相同。

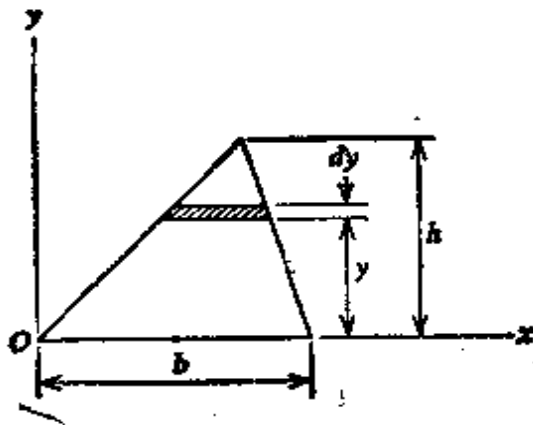


图 A-10.

在计算三角形对其底边的惯性矩时(图 A-10), 我们还是将面积分成薄的微元。微元的面积为

$$dA = \frac{b(h-y)dy}{h}$$

由方程(A-7a)给出

$$I_x = \int_0^h \frac{b(h-y)}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

(A-9)

上例所说明的计算方法理论上可用于一般情况。通过将面积分成平行于其轴的无限小窄条, 然后进行积分求得惯性矩。如果积分不容易用解析法求出, 总能把面积分成有限个窄条, 每个窄条的面积乘以它到坐标轴距离的平方, 然后将这些乘积加起来, 求出惯性矩的近似值。

通常遇到的一些面积惯性矩已列在附录 B 中, 以供参考。

如果面积可分为具有已知惯性矩的若干部分, 轴惯性矩的计算通常可以简化。例如图 A-11a 所示的槽形截面, 对通过形心  $C$  的对称轴  $x$  的惯性矩为两个矩形惯性矩之差, 因此

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}$$

同样的公式显然亦可用于图 A-11b 所示的 Z 字形截面和图 A-11c 所示的空心盒形截面。

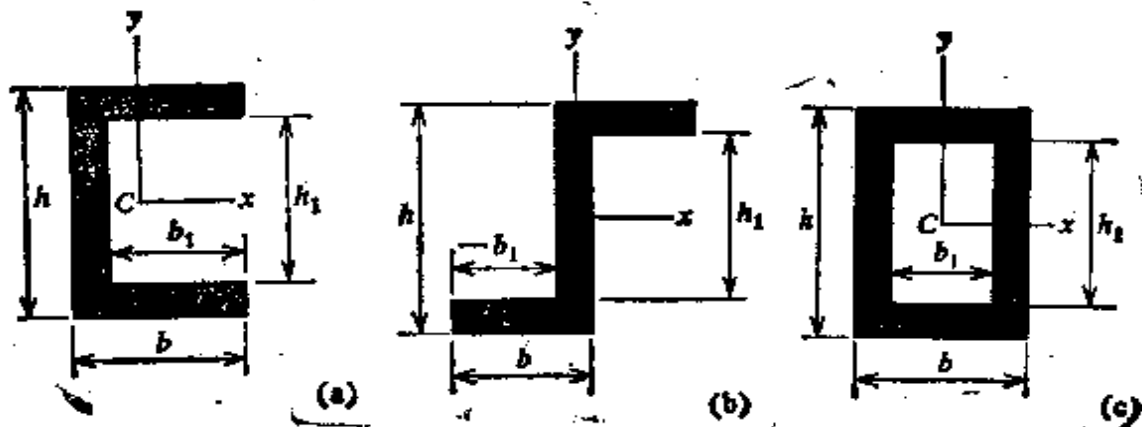


图 A-11.

由惯性矩的定义(方程 A-7)我们看出, 其量纲为长度的四次方。因此, 若面积的惯性矩被面积本身去除, 则得到量纲为长度二次方的量。这个量的平方根称为面积的迴转半径。于是, 使用符号  $r$  表迴转半径, 我们有

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (\text{A-10a, b})$$

式中  $r_x$  和  $r_y$  分别代表对  $x$  轴和  $y$  轴的迴转半径。

#### A.4 极惯性矩

平面面积对垂直于该面积平面的轴之惯性矩称为极惯性矩。定义它为下列积分:

$$J = \int \rho^2 dA \quad (\text{A-11})$$

其中每一个面积微元  $dA$  (见图 A-1) 都乘以它到  $O$  点距离  $\rho$  的平方,  $O$  点为轴线与该平面的交点。方程(A-11)的积分遍及整个横截面面积  $A$ 。

参看图 A-1, 注意:  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , 因此, 由方程(A-11)我们得到

$$J = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \quad (\text{A-12})$$

该式表明, 对任一点  $O$  的极惯性矩等于通过同一点的两根互垂轴的惯性矩之和。

现在让我们研究一个圆对其中心的极惯性矩(图 A-12)。如果我们将圆的面积分成半径为  $\rho$ , 厚度为  $d\rho$  的微元圆环, 我们看出该圆环的面积为  $dA = 2\pi\rho d\rho$ , 并根据定义, 它对中心的极惯性矩为  $2\pi\rho^3 d\rho$ 。为了求得整个圆面积的极惯性矩, 只要对整个面积进行积分即得:

$$J = \int_0^{d/2} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2} \quad (\text{A-13})$$

式中  $d$  为圆的直径, 而  $r$  为圆的半径。

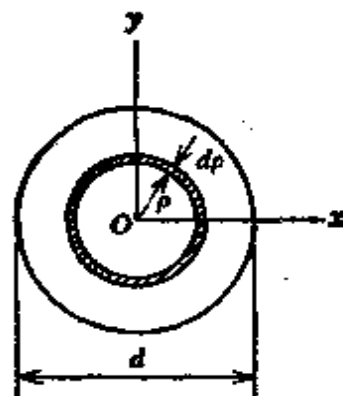
有了圆对中心的极惯性矩, 我们便可容易地求出它对直径的惯性矩。因为对所有直径的惯性矩都相同, 故从方程(A-12)看出,

$$I_x = I_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} \quad (\text{A-14})$$

四分之一圆的极惯性矩(图 A-13 的面积  $OAB$ )为整圆极惯性矩的四分之一, 即  $\pi r^4/8$ 。因此, 四分之一圆对  $x$  和  $y$  轴的惯性矩为

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$$

其次让我们研究图 A-13 阴影所示圆拱墙  $AOB$ 。它对  $x$  轴(或  $y$  轴)的惯性



图A-12.

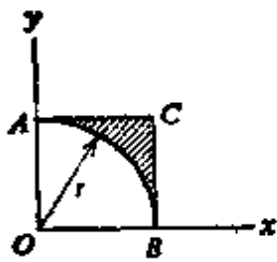


图 A-13.

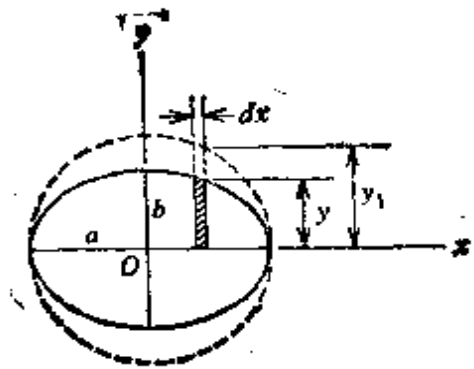


图 A-14.

矩可用正方形  $OACB$  的惯性矩减去四分之一圆的惯性矩求出。因而，

$$I_x = I_y = \frac{r^4}{3} - \frac{\pi r^4}{16} = \frac{r^4}{48}(16 - 3\pi) = 0.137r^4$$

拱墙对  $O$  点的极惯性矩将为  $I_x$  和  $I_y$  的两倍。

椭圆对形心主轴  $x$  (图 A-14) 的惯性矩可用椭圆与图中虚线所示的圆对比而得。如图中所示的阴影部分，椭圆中任一微元的高度  $y$  可用圆的相应微元的高度  $y_1$  按比值  $b/a$  折算而得，这里  $a$  和  $b$  均为椭圆的半轴长度。由方程 (A-8)，这两个微元对  $x$  轴的惯性矩之比为  $b^3/a^3$ 。椭圆的惯性矩和圆的惯性矩显然也有相同的比值。因此，椭圆的惯性矩为

$$I_x = \frac{\pi a^4}{4} \left( \frac{b^3}{a^3} \right) = \frac{\pi a b^3}{4} \quad (\text{A-15a})$$

以相同的方法，我们得到对  $y$  轴的惯性矩

$$I_y = \frac{\pi b a^3}{4} \quad (\text{A-15b})$$

最后，椭圆对其形心  $O$  的极惯性矩为

$$J = I_x + I_y = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2) \quad (\text{A-16})$$

### A.5 平行轴定理

用平行轴定理建立起面积对面积平面内某轴的惯性矩与对其相平行的形心轴的惯性矩之关系。为了得出这个定理，让我们研究图 A-15 所示的面积。假设点  $C$  为面积的形心，而且  $x_c$  轴和  $y_c$  轴通过形心。 $x$  轴和  $y$  轴平行于  $x_c$  轴和  $y_c$  轴，而它们的原点位于任意点  $O$  处。于是，根据定义，面积对  $x$  轴的惯性矩为

$$I_x = \int (y + d_1)^2 dA = \int y^2 dA + 2d_1 \int y dA + d_1^2 \int dA$$

右边的第一个积分为对  $x_c$  轴的惯性矩  $I_{x_c}$ ；第二个积分为零，因为  $x_c$  轴通过形心；第三个积分为图形的面积。所以，上述方程简化为

$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2 \quad (\text{A-17a})$$

以同样的方法,可表示出:

$$I_y = I_{y_c} + Ad_2^2 \quad (\text{A-17b})$$

方程(A-17)表示了惯性矩的平行轴定理.它们表明面积对其平面内任一轴的惯性矩等于对与其平行的形心轴的惯性矩加上面积和两轴之间距离平方的乘积.

将方程(A-17)  $I_x$  和  $I_y$  相加,并注意

$$r^2 = d_1^2 + d_2^2 \quad (\text{见图 A-15}),$$

我们得出

$$I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} + A(d_1^2 + d_2^2)$$

或

$$J_o = J_c + Ar^2 \quad (\text{A-18})$$

该方程给出了极惯性矩的平行轴定理:面积对其平面内任一点  $O$  的极惯性矩等于对形心  $C$  的极惯性矩加上面积与  $O$  和  $C$  之间距离平方的乘积.

使用平行轴定理,我们通常可以很容易地计算平面图形的惯性矩.例如,矩形(图 A-8)对其底边的惯性矩为

$$I_{base} = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}$$

类似地,圆对其切线的惯性矩为

$$I_t = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{5\pi d^4}{64}$$

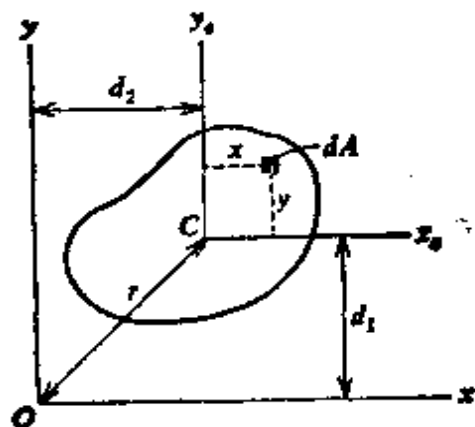
圆对其周边上一点的极惯性矩为

$$J = \frac{\pi d^4}{32} + \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3\pi d^4}{32}$$

对于三角形(图 A-10)的情况,我们已经求得其对底边的惯性矩(见方程 A-9).于是,用平行轴定理,我们可以求出对平行于底边的形心轴的惯性矩:

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

当确定如图 A-6 和 A-11 中的那些组合面积的惯性矩时,平行轴定理是特别有用的.假设图 A-11b 中面积的形心位置已确定,欲求对形心轴的惯性矩  $I_{x_c}$ . 我们可将总面积分成三个矩形.然后每个矩形的形心可由观察确定,对通过这些形心且平行于  $x$  轴的惯性矩,可使用方程(A-8)容易地求出.因此,平行轴定理可用来计算每个矩形对  $x$  轴的惯性矩.将这些惯性矩加起来即得整个面积的  $I_{x_c}$ .



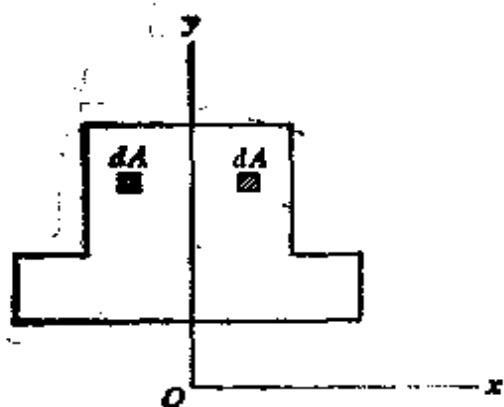
图A-15.

## A.6 惯性积

平面面积对  $x$  轴和  $y$  轴(见图 A-1)的惯性矩用下列积分定义

$$I_{xy} = \int xy \, dA \quad (\text{A-19})$$

式中每个面积微元  $dA$  与其两个坐标之乘积相乘并沿整个面积积分。虽然惯性矩总为正值,但我们由方程(A-19)看出,惯性积可能为正,也可能为负或为零,它取决于  $xy$  轴与面积的相对位置。如果面积全部位于坐标轴的第一象限内,如图 A-1 那样,惯性积就为正,因为所有面积微元  $dA$  的  $x$  和  $y$  坐标均为正。如果面积位于第二象限,则惯性积就为负,因为所有微元的  $y$  坐标为正,但  $x$  坐标为负。类似地,第三和第四象限将分别有正的和有负的惯性积。当面积位于两个以上的象限时,惯性积的符号将取决于面积相对于坐标轴的分布。



图A-16.

当坐标轴之一为面积的对称轴时,出现一种特殊情况。在图 A-16 中给以说明,其中  $y$  为对称轴。对于每一个具有确定正  $x$  坐标的面积微元  $dA$ , 存在一个相等而位于对称位置的微元  $dA$ , 它具有相同的  $y$  坐标, 但  $x$  坐标为负。因此,乘积  $xy \, dA$  彼此消去, 并且方程 A-19 的积分为零。于是,我们断定,对于坐标轴之一为对称轴的一对轴的惯性积为零。参看图 A-11a 和 C, 我们看到,这两个面积对  $xy$  轴的惯性积为零。然而,这个结论对于图 A-11b 的面积是不适用的。

现在让我们假设对一对形心轴譬如图 A-15 所示的  $x_c$  和  $y_c$  轴的惯性积  $I_{x_c y_c}$  为已知。那么对于一组平行轴  $x, y$  的惯性积可求得如下:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int (x+d_2)(y+d_1) \, dA \\ &= \int xy \, dA + d_1 \int x \, dA + d_2 \int y \, dA + d_1 d_2 \int dA \end{aligned}$$

后面式中的第一个积分为对形心轴的惯性积  $I_{x_c y_c}$ , 第二个积分和第三个积分为零。因为这两根轴通过形心, 而最后一个积分是面积。因此,上述表达式简化为

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A d_1 d_2 \quad (\text{A-20})$$

其中  $d_1$  和  $d_2$  为形心  $C$  对  $xy$  轴的坐标。方程(A-20)为惯性积的平行轴定理。



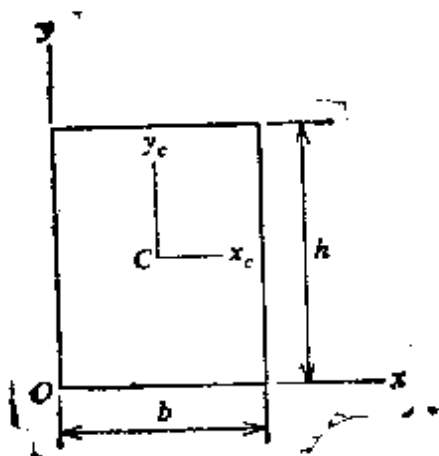


图 A-17.

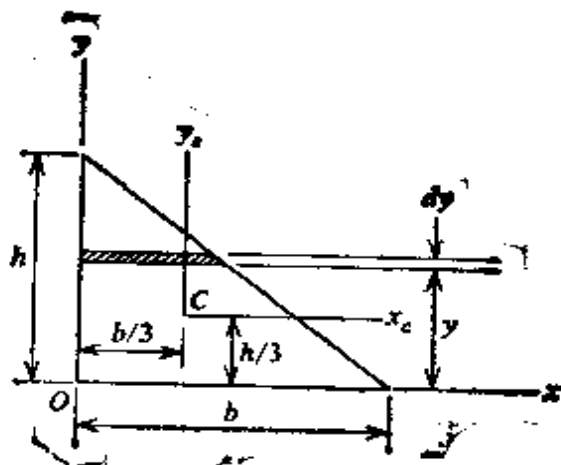


图 A-18.

让我们确定一矩形对通过一个棱角的一对轴(见图 A-17)的惯性积作为使用平行轴定理的例子. 因为对称关系, 所以得知对通过形心轴  $x_c, y_c$  的惯性积为零, 因此对  $x, y$  轴的惯性积为

$$I_{xy} = bh \left( \frac{h}{2} \right) \left( \frac{b}{2} \right) = \frac{b^2 h^2}{4} \quad (\text{A-21})$$

对底为  $b$  高为  $h$  的直角三角形(图 A-18), 我们从研究阴影微元开始. 该微元是一个厚度为  $dy$  的薄矩形, 其宽度为

$$\frac{(h-y)b}{h}$$

由于对称, 该微元对其自身形心的惯性积为零. 因此, 根据平行轴理论, 我们得到微元对  $x$  轴和  $y$  轴的惯性积为

$$\left[ \frac{(h-y)b dy}{h} \right] [y] \left[ \frac{(h-y)b}{2h} \right] = \frac{b^2}{2h^2} (h-y)^2 y dy$$

现在由积分求得整个三角形的惯性积:

$$I_{xy} = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h-y)^2 y dy = \frac{b^2 h^2}{24} \quad (\text{A-22})$$

已知对  $x, y$  轴的惯性积, 我们可以很容易确定对与其相平行的形心轴的惯性积(见图 A-18):

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - A d_1 d_2 = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{2} \left( \frac{h}{3} \right) \left( \frac{b}{3} \right) = -\frac{b^2 h^2}{72} \quad (\text{A-23})$$

### A.7 轴的旋转

假设任一平面面积(图 A-19)的惯性矩和惯性积

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_{xy} = \int xy dA \quad (\text{a})$$

为已知. 还假设对图示中旋转后的轴  $x_1, y_1$  的对应量  $I_{x_1}, I_{y_1}$  和  $I_{x_1 y_1}$  为欲求

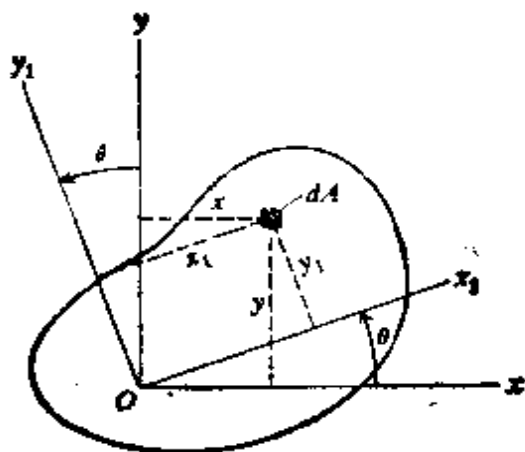


图 A-19 轴的旋转。

的诸量。对在原坐标系中的一个面积微元  $dA$  的坐标为  $x, y$ ，我们看到在旋转系统中的坐标为

$$x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y_1 = y \cos \theta - x \sin \theta$$

其中  $\theta$  为轴之间的旋转角。于是惯性矩  $I_{x_1}$  为

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int y_1^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\ &= \cos^2 \theta \int y^2 dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA \end{aligned}$$

或通过使用方程(a)，

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A-24a})$$

代入三角恒等式

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta),$$

及

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta,$$

上列方程变为

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{A-24b})$$

以相同的方法，我们可以求出惯性矩  $I_{y_1}$ ：

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A-25a})$$

或

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{A-25b})$$

方程(A-24)和(A-25)为用对原坐标轴的惯性矩和惯性积所表示的旋转后的轴的惯性矩。

取  $I_{x_1}$  和  $I_{y_1}$  之和，我们得到

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y \quad (\text{A-26})$$

该方程表明，当两根轴绕原点旋转后，对此两根轴的惯性矩之和保持常数。自然，这个和为面积对同一原点的极惯性矩。

对旋转后的两根轴的惯性积为

$$I_{x_1 y_1} = \int x_1 y_1 dA = \int (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$

或

$$I_{x_1 y_1} = I_x \sin \theta \cos \theta - I_y \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (\text{A-27a})$$

使用三角置换得

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (\text{A-27b})$$

由这一方程，我们可以计算对任意一对转动后的轴的惯性积。

观察惯性积随  $\theta$  角而变是有意义的。如果  $\theta = 0$ ，那么由方程(A-27b)我们得到  $I_{x_1 y_1} = I_{xy}$ ，这如同预料到的一样。如果  $\theta = 90^\circ$ ，该方程将给出  $I_{x_1 y_1} = -I_{xy}$ 。因而，当旋转了  $90^\circ$  时，惯性积改变了符号。由于惯性积随着  $\theta$  连续变化，必存在对某方向的一对轴的惯性积为零。这样的轴称为面积主轴。如果坐标原点位于面积的形心，那么该轴称为形心主轴。

上节已经表明，若一对轴之一为对称轴，则对它们的惯性积为零。因此可知，如果面积具有一根对称轴，该轴和同它相垂直的任一根轴，都构成一对主轴。

面积惯性矩转轴方程与平面应力转轴方程(见第 2.5 节)之间完全对应。如果在平面应力方程中，我们用  $I_x, I_y, -I_{xy}, I_{x_1}$  和  $I_{x_1 y_1}$  分别取代  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_\theta$  和  $\tau_\theta$ ，该方程将完全变为上面所给的惯性矩的方程。故在一种情况下所得的一般结论可以转换到另一种情况。例如，我们可以用莫尔圆求出对旋转后的轴的惯性矩并求出主惯性矩。

## A.8 主轴

在上节中，主轴已被定义为惯性积为零的一对轴。因此，为确定这些轴的位置，我们令方程(A-27b)的  $I_{x_1 y_1}$  等于零并对  $\theta$  求解，得

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (\text{A-28})$$

符号  $\theta_p$  用来表示确定主轴的  $\theta$  值。由方程(A-28)，我们得到  $2\theta_p$  的两个值，它们相差一个  $\pi$ 。相应的两个  $\theta_p$  值，彼此相差  $\pi/2$ ，确定了两个主轴的正交方向。

我们还可弄清使惯性矩为最大和最小时的  $\theta$  值。参看方程(A-24)，我们看出， $I_{x_1}$  的大小随着  $\theta$  角的改变而连续变化。为了求出使  $I_{x_1}$  为最大和最小

时的  $\theta$  值, 我们可将方程(A-24b)右边的表达式对  $\theta$  取导数, 并令它等于零:

$$(I_y - I_x)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

由此方程解出  $\theta$ , 得到与方程(A-28)所给的相同结果。此外, 如果我们使用方程(A-25b)并求最大和最小  $I_u$ , 仍得到同样的方程。因此, 可以断定, 主轴就是对其惯性矩为最大和最小的一对轴。

概括起来, 我们应注意下列有关主轴的结论: ① 主轴是由  $\theta_p$  角(方程A-28)确定的一对正交轴; ② 对主轴的惯性积为零; ③ 对主轴之一的惯性矩为最大, 而对另一根的惯性矩为最小; 及④ 对称轴总是一根主轴。

为了求得主惯性矩的表达式, 将方程(A-28)所给出的  $\theta_p$  值代入方程(A-24b)。由方程(A-28)注意到

$$\sin 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

和

$$\cos 2\theta_p = \frac{I_y - I_x}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

现在我们将这些表达式代入到方程(A-24b), 因而得到

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{A-29})$$

该方程中的  $I_1$  代表了两个主惯性矩中较大者, 而  $I_2$  代表了较小者。

对主轴的迴转半径(见方程A-10)称为主迴转半径。自然, 它们是迴转半径中的最大值和最小值。

现在我们将用例题来说明确定主轴和计算主惯性矩的方法。

**例题** 试确定图A-20所示Z字形截面主轴的方向和主惯性矩的大小。坐标原点取在面积的形心处。假设下列数值:

$$h = 400 \text{ mm},$$

$$b = 175 \text{ mm},$$

$$t = 30 \text{ mm}.$$

将Z字形截面分为三个矩形并

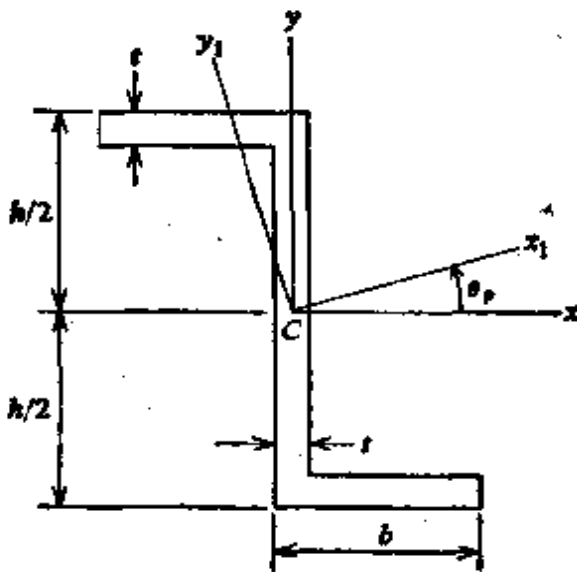


图 A-20. 例题.

利用平行轴定理，我们可容易地计算对通过形心的  $x$ 、 $y$  轴的惯性矩和惯性积：

$$I_x = 458.41 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_y = 94.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = -155.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

将这些值代入方程(A-28)，我们求出

$$\text{tg } 2\theta_p = 0.855 \quad 2\theta_p = 40^\circ 32' \text{ 和 } 220^\circ 32'$$

因此， $\theta_p$  的两个值为  $20^\circ 16'$  和  $110^\circ 16'$ ，将第一个值代入方程(A-24b)，我们得到  $I_{x_1} = 515.78 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ；将第二个值代入方程(A-24b)，我们得到  $I_{x_2} = 37.40 \times 10^6 \text{ mm}^4$ 。根据方程(A-29)，得到两个与其相同的惯性矩。因此，我们得知，主惯性矩为

$$I_1 = 515.78 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_2 = 37.40 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

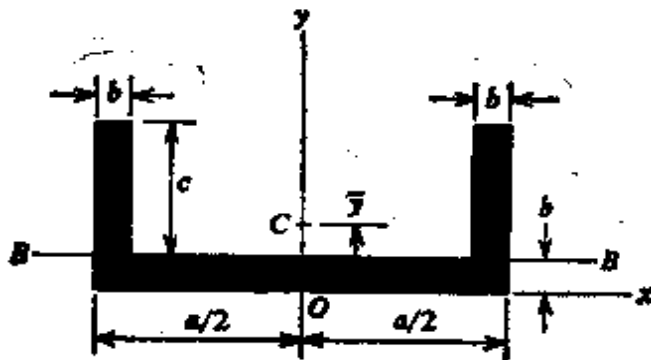
较大的惯性矩  $I_1$  为对转过  $\theta_p = 20^\circ 16'$  的轴惯性矩，而较小的惯性矩为对转过  $\theta_p = 110^\circ 16'$  的轴惯性矩。

## 习 题

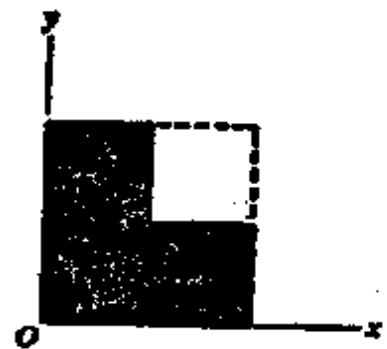
**A.1-1** 试证明附录 B 中第 8 种情况所给出的确定半圆形面积形心距离  $\bar{y}$  的公式。

**A.1-2** 试证明附录 B 中第 11 种情况所给出的确定拱墙面积  $A$  及其形心坐标  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  的公式。

**A.2-1** 试确定图中所示槽形截面形心  $C$  的位置。假设  $a = 150 \text{ mm}$ ， $b = 25 \text{ mm}$ ， $c = 50 \text{ mm}$ 。



习题 A.2-1 和 A.2-2



习题 A.2-3

**A.2-2** 试问为使图中所示槽形截面的形心  $O$  位于  $BB$  线上，那么， $a$ 、 $b$ 、 $c$  各尺寸之间的关系如何？

**A.2-3** 若边长为  $a$  的正方形的四分之一被去掉(见图)，试问剩下面积的形心坐标是多少？

**A.2-4** 图 A-6 所示角形截面的尺寸是这样的,  $A_1$  为  $100\text{ mm} \times 12\text{ mm}$ ,  $A_2$  为  $138\text{ mm} \times 12\text{ mm}$ , 试求形心  $O$  的坐标  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ .

**A.3-1** 试求图 A-8 所示矩形对其底边的惯性矩.

**A.3-2** 试求图 A-10 所示三角形对过其顶点且平行于  $x$  轴之轴的惯性矩.

**A.3-3** 试求边长为  $a$  的正方形对其对角线的惯性矩.

**A.3-4** 试求图 A-7 所示梯形对  $x$  轴的惯性矩.

**A.3-5** 试求边长为  $a$  和  $b$  的矩形对其对角线的惯性矩.

**A.3-6** 试求图 A-8 所示矩形的迴转半径  $r_x$  和  $r_y$ .

**A.4-1** 试求图 A-8 所示矩形对其形心的极惯性矩.

**A.4-2** 试求底为  $b$ 、高为  $h$  的等腰三角形对其顶点的极惯性矩.

**A.4-3** 试确定边长为  $a$  和  $b$  的矩形对其一角点的极惯性矩.

**A.5-1** 试求图 A-7 所示梯形对通过形心  $O$ 、且平行于  $x$  轴的轴之惯性矩.

**A.5-2** 参见图 A-14 中的椭圆, 试求它对主直径端点的极惯性矩.

**A.5-3** 试求图 A-11c 所示空心箱形截面对通过其底边的轴之惯性矩, 假设  $b=h$ ,  $b_1=h_1$ .

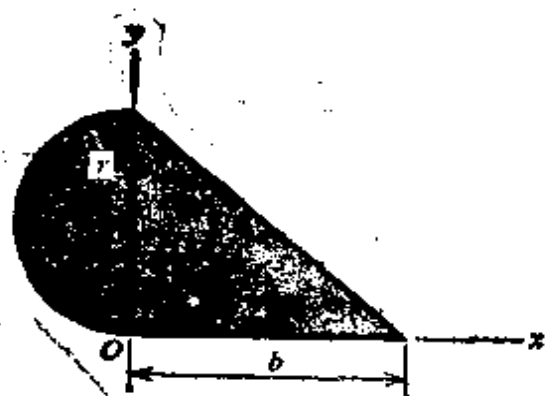
**A.5-4** 试求 W305×79 型截面(见附录 C, 表 C-1)对其底边的惯性矩.

**A.5-5** 试求  $102 \times 102 \times 19$  角形截面(见附录 C 表 C-4)对沿其一角底边的轴之惯性矩.

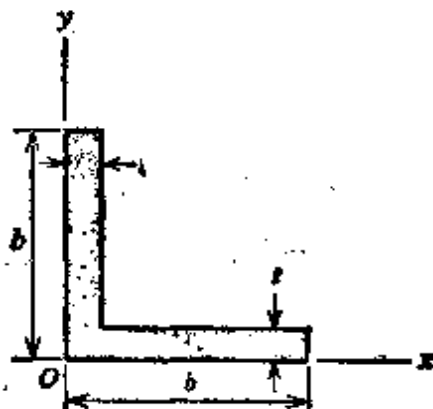
**A.6-1** 试求出图 A-13 所示四分之一圆的惯性积  $I_{xy}$  的公式.

**A.6-2** 试计算图 A-13 中所示圆以上阴影部分的惯性积  $I_{xy}$ .

**A.6-3** 为使图示组合面积的惯性积  $I_{xy}$  为零, 试求  $r$  和  $b$  之间的关系.



习题 A.6-3

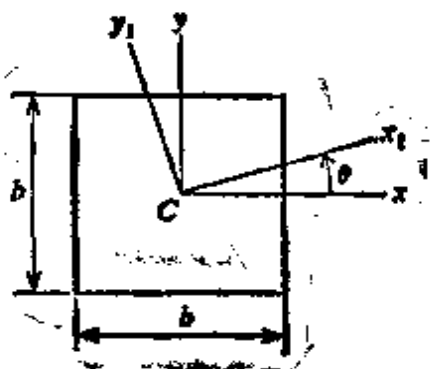


习题 A.6-4

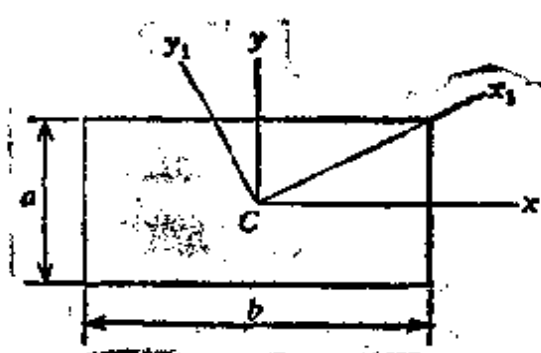
**A.6-4** 试确定图示角形截面的惯性积  $I_{xy}$ , 假设  $b=100\text{ mm}$ ,  $t=25\text{ mm}$ .

**A.6-5** 试确定 L152×152×25 角形截面(见附录 C 表 C-4) 对 1-1 和 2-2 轴的惯性积  $I_{1,2}$ .

**A.7-1** 试确定图示正方形的惯性积  $I_{x_1y_1}$  和  $I_{x_1}, I_{y_1}$ .



习题 A.7-1

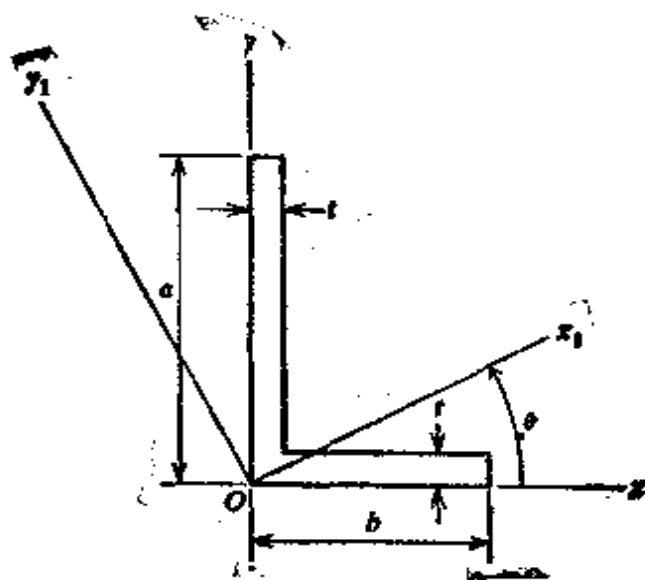


习题 A.7-2

**A.7-2** 边长为  $a$  和  $b$  的矩形, 如图所示, 试用转轴方程求其对  $x_1y_1$  轴的惯性矩和惯性积。(注:  $x_1$  轴是矩形的对角线.)

**A.8-1** 试确定图 A-18 所示直角三角形过  $O$  点的主轴位置, 并计算其相应的主惯性矩, 假设  $b=150\text{ mm}$ ,  $h=200\text{ mm}$ .

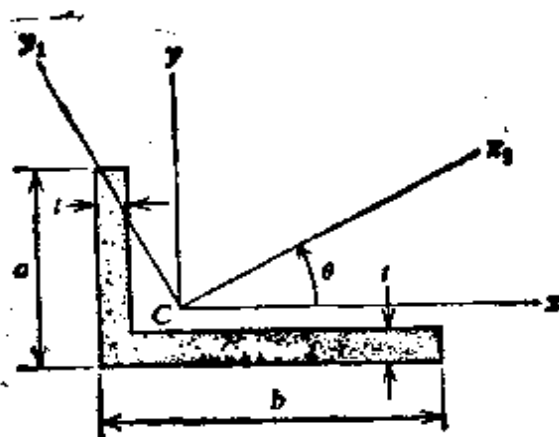
**A.8-2** 试确定角形截面(见图)过  $O$  点的主轴位置, 并确定其相应的主惯性矩, 假设  $a=100\text{ mm}$ ,  $b=150\text{ mm}$ ,  $t=25\text{ mm}$ .



习题 A.8-2

**A.8-3** 试确定角形截面(见图)通过形心  $C$  的主轴位置, 并求其相应的主惯性矩, 假设  $a=100\text{ mm}$ ,  $b=150\text{ mm}$ ,  $t=25\text{ mm}$ .

**A.8-4** 试求角形截面(见图)形心主轴的方向, 并确定其相应的惯性



习题 A.8-3 和 A.8-4

矩, 假设  $a=60\text{ mm}$ ,  $b=120\text{ mm}$ ,  $t=12\text{ mm}$ .

**A.8-5** 试求图 A-20 所示 Z 形截面形心主轴的方向, 并确定其相应的惯性矩. 假设  $h=250\text{ mm}$ ,  $b=125\text{ mm}$ ,  $t=25\text{ mm}$ .

**A.8-6** 求解上题, 假设  $h=120\text{ mm}$ ,  $b=78\text{ mm}$ ,  $t=12\text{ mm}$ .



## 附 录 B 平面面积的性质

符号:

$\bar{x}, \bar{y}$  = 至形心  $C$  的距离

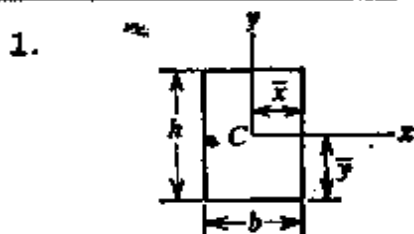
$A$  = 面积

$I_x, I_y$  = 对  $x, y$  轴的惯性矩

$I_{xy}$  = 对  $x, y$  轴的惯性积

$J = I_x + I_y$  = 极惯性矩

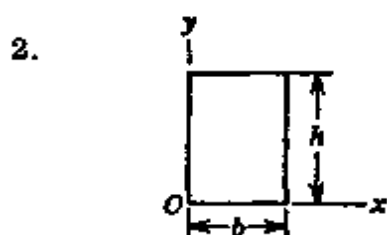
$I_{BB}$  = 对  $B-B$  轴的惯性矩



矩形。(坐标轴原点位于形心处。)

$$A = bh \quad \bar{x} = \frac{b}{2} \quad \bar{y} = \frac{h}{2} \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$$

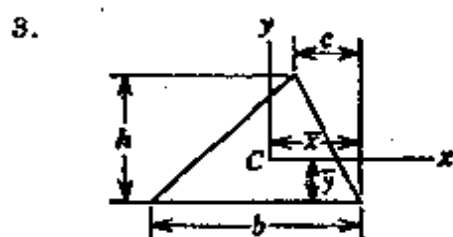
$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_{xy} = 0 \quad J = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2)$$



矩形。(坐标轴原点位于角点处。)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{hb^3}{3} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

$$J = \frac{bh}{3} (h^2 + b^2)$$

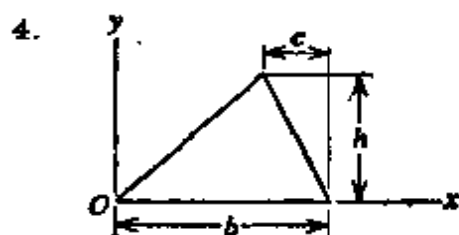


三角形。(坐标轴原点位于形心处。)

$$A = \frac{bh}{2} \quad \bar{x} = \frac{b+c}{3} \quad \bar{y} = \frac{h}{3} \quad I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{bh}{36} (b^2 - bc + c^2) \quad I_{xy} = \frac{bh^2}{72} (b - 2c)$$

$$J = \frac{bh}{36} (h^2 + b^2 - bc + c^2)$$



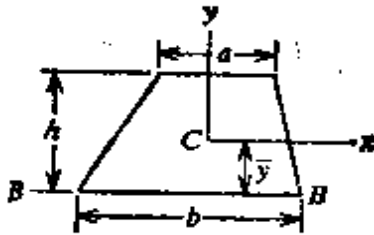
三角形。(坐标轴原点位于角点处。)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{bh}{12} (3b^2 - 3bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24} (3b - 2c)$$

$$J = \frac{bh}{12} (h^2 + 3b^2 - 3bc + c^2)$$

5.

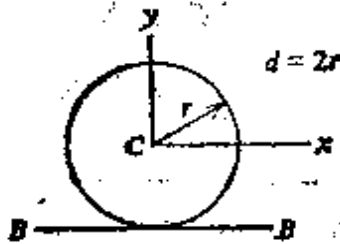


梯形。(坐标轴原点位于形心处。)

$$A = \frac{h(a+b)}{2} \quad \bar{y} = \frac{h(3a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_x = \frac{h^3(a^3 + 4ab + b^3)}{36(a+b)} \quad I_{BB} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$

6.

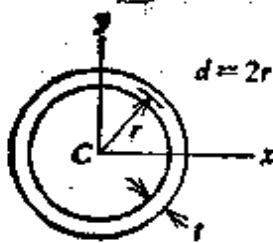


圆。(坐标轴原点位于中心处。)

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$

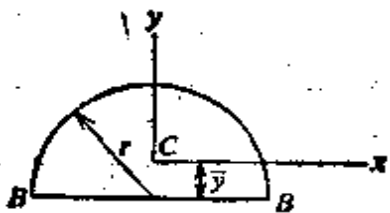
7.

圆环。(坐标轴原点位于中心处。)当  $t$  为很小情况下的近似公式。

$$A = 2\pi r t = \pi d t \quad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

8.

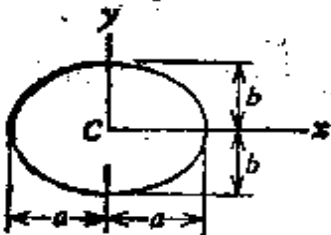


半圆。(坐标轴原点位于形心处。)

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \quad I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi}$$

$$\approx 0.1098r^4 \quad I_y = \frac{\pi r^4}{8} \quad I_{xy} = 0 \quad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

9.

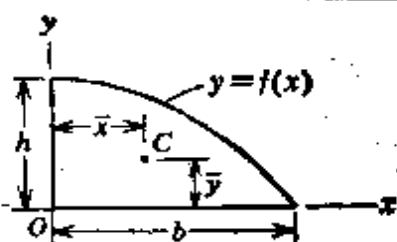


椭圆。(坐标轴原点位于形心处。)

$$A = \pi ab \quad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \quad I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{\pi ab}{4}(b^2 + a^2)$$

10.

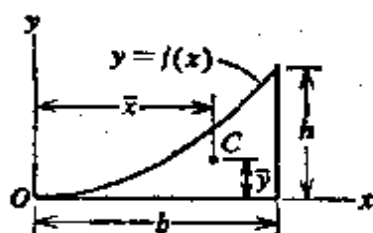


抛物线.

$$y=f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \quad A = \frac{2bh}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{3b}{8} \quad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

11.



抛物线外面积。(坐标轴原点位于顶点处。)

$$y=f(x) = \frac{hx^2}{b^2} \quad A = \frac{bh}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{3b}{4} \quad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

# 附录C 型 钢 表

在下列诸表中,提供了便于读者求解本书习题的几种结构型钢的特性.这些表经美国钢结构学会的同意,改编为标准国际单位制.

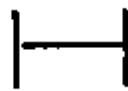
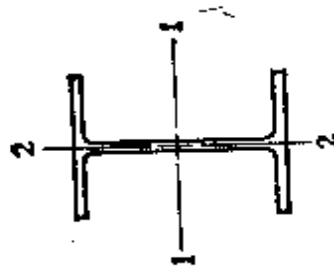
表中所用的符号:

$I$  = 惯性矩

$S$  = 截面模量

$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$  = 迴转半径.

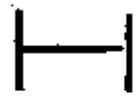
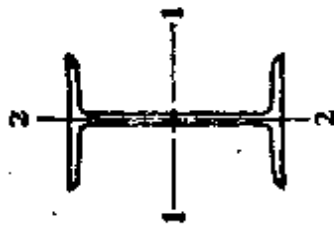
表 C-1 宽翼缘截面(W型)的特性



名 称	质 量 (kg/m)	面 积 (mm <sup>2</sup> )	高 度 (mm)	翼 缘		腹板厚度 (mm)	轴 1-1			轴 2-2		
				宽 度 (mm)	厚 度 (mm)		$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$S$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$r$ (mm)	$I$ (10 <sup>8</sup> mm <sup>4</sup> )	$S$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$r$ (mm)
W914 × 342 × 238	342.3	43700	911.4	418.5	32.0	19.4	6239	13690	978	362.5	1732	91.1
	238.1	30380	914.4	304.8	25.9	16.6	4054	8866	365	114.6	752	61.4

W838×298	37930	838.2	400.1	39.3	18.2	4599	10973	248	287.9	1439	87.1
×194	24680	840.7	292.4	21.7	14.7	2788	6630	336	83.83	573	58.3
W762×256	32680	759.0	380.6	27.1	16.6	3285	8655	317	229.0	1203	83.7
×161	20500	757.4	265.2	19.3	13.9	1857	4903	301	56.23	424	52.4
W686×216	27540	682.8	354.7	24.8	15.2	2254	6601	286	169.4	955	78.4
×140	17840	683.5	253.7	19.0	12.4	1360	3979	276	47.91	378	51.8
V610×149	18990	609.6	304.8	19.7	11.9	1243	4079	256	84.70	556	66.8
×125	15940	611.9	239.0	19.6	11.9	984.1	3217	248	36.75	321	48.0
W538×167	21250	533.4	330.2	22.0	13.4	1021	4090	227	120.6	730	75.3
×122	15550	529.8	227.6	20.2	12.7	729.4	2753	217	37.29	328	49.0
×92	11760	533.1	209.3	15.6	10.2	552.3	2072	217	22.10	211	43.4
W457×143	18210	461.3	298.5	21.1	13.0	697.0	3022	196	86.08	577	68.8
×115	14600	461.3	223.2	21.1	12.1	535.6	2322	192	36.88	390	50.3
×89	11380	463.6	192.0	17.7	10.6	409.6	1767	190	19.60	304	41.5
W406×95	18130	406.4	215.9	18.2	11.3	347.0	1708	169	28.47	264	48.4
×74	9480	412.8	179.7	16.0	9.7	272.8	1322	170	14.48	161	39.1
W356×116	14800	357.1	304.3	18.2	10.9	354.3	1984	155	86.12	565	76.3
×64	8160	347.5	203.2	13.4	7.8	178.6	1028	148	18.77	185	48.0
×45	5680	352.0	171.0	9.7	6.9	120.5	685	146	7.28	85	35.8
W305×79	10060	306.3	254.0	14.6	8.3	177.4	1158	133	40.00	315	63.1
×60	7590	303.3	203.2	13.1	7.5	129.1	851	130	18.36	181	49.2
×40	5140	303.5	165.1	10.2	6.1	84.95	560	129	6.91	84	36.7
W254×115	14630	269.7	259.0	22.0	13.6	190.3	1411	114	63.85	493	66.1
×89	11390	260.4	255.9	17.3	10.5	143.1	1099	112	48.49	379	65.2
×67	8540	257.0	203.8	15.7	8.9	103.5	805	110	22.14	217	50.9
×37	4740	256.0	146.4	10.9	6.4	55.44	433	108	6.29	72	33.4
×31	3990	251.5	146.1	8.6	6.1	44.25	352	105	4.04	55	31.8
W203×60	7590	209.6	205.2	14.2	9.3	60.89	581	89.6	20.40	199	51.8
×46	5830	203.2	203.3	11.0	7.3	45.66	449	88.1	15.40	152	51.2
×42	5310	204.7	166.1	11.8	7.2	40.71	398	87.6	8.99	108	41.1
×25	3230	203.2	133.4	7.8	5.8	23.48	231	85.3	2.79	42	29.4

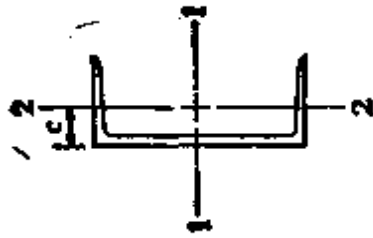
表 C-2 工字梁截面(S型)的特性



名称	质·量 (kg/m)	面·积 (mm <sup>2</sup> )	高·度 (mm)	翼·缘		腹·板·厚·度 (mm)	轴 1-1			轴 2-2		
				宽·度 (mm)	厚·度 (mm)		$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$S$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$r$ (mm)	$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$S$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$r$ (mm)
S610×179	173.6	22660	609.6	204.4	28.0	20.3	1253.0	4112	235	35.34	346	39.5
×149	148.8	18870	609.6	184.1	22.1	19.0	987.2	3239	229	20.15	219	32.7
×134	123.9	16970	609.6	180.9	22.1	15.8	928.2	3046	234	18.94	209	33.4
×119	118.9	15050	609.6	177.8	22.1	12.7	868.8	2850	240	17.86	201	34.4
S508×141	141.4	17900	508.0	182.9	23.3	20.3	665.9	2621	193	21.02	230	34.3
×126	126.5	16000	508.0	179.1	23.3	16.6	625.1	2461	198	19.56	218	35.0
×112	111.6	14130	508.0	162.3	20.0	16.3	525.9	2071	193	12.53	154	29.8
×97	97.3	12310	508.0	158.8	20.0	12.7	486.8	1916	199	11.61	146	30.7
S457×104	104.2	13400	457.2	158.8	17.6	18.1	381.9	1671	170	10.20	128	27.8
×81	81.4	10280	457.2	152.4	17.6	11.7	331.1	1443	179	8.32	116	29.3

S381 X 74	74.4	9410	381.0	143.3	15.8	14.0	200.3	1051	146	6.66	93	26.6
X 64	63.8	8060	381.0	139.7	15.8	10.4	183.9	965	151	6.08	87	27.5
S305 X 74	74.4	9400	304.8	139.1	16.7	17.4	125.5	824	116	6.66	96	26.6
X 61	60.7	7640	304.8	133.4	16.7	11.7	111.9	724	121	5.74	86	27.4
X 47	47.3	5970	304.8	127.0	13.8	8.9	89.82	589	123	3.95	62	25.7
S254 X 52	52.1	6590	254.0	125.6	12.5	15.1	60.69	478	96.0	3.54	56	23.2
X 38	37.8	4760	254.0	118.4	12.5	7.9	50.82	400	103	2.87	48	24.6
S203 X 34	34.2	4330	203.2	105.9	10.8	11.2	26.72	263	78.6	1.88	35	20.6
X 27	27.4	3450	203.2	101.6	10.8	6.9	23.68	233	82.8	1.58	31	21.4
S178 X 30	29.8	3760	177.8	98.0	10.0	11.4	17.44	196	68.1	1.29	26	18.5
X 23	22.8	2860	177.8	93.0	10.0	6.4	15.07	170	72.6	1.12	34	19.8
S152 X 26	25.7	3240	152.4	90.6	9.1	11.8	10.82	142	57.8	0.96	21	17.2
X 19	18.6	2330	152.4	84.6	9.1	5.8	9.07	119	62.4	0.75	18	17.9
S127 X 22	22.0	2770	127.0	83.4	8.3	12.5	6.24	98	47.5	0.71	17	16.0
X 15	14.9	1850	127.0	76.2	8.3	5.3	5.04	79	52.2	0.50	13.1	16.4
S102 X 14	14.1	1780	101.6	71.0	7.4	8.3	2.79	55	39.6	0.379	10.7	14.6
S76 X 11	11.2	1400	76.2	63.7	6.6	8.9	1.21	32	29.4	0.246	7.7	13.3

表 C-3 槽形截面(C型)的特性

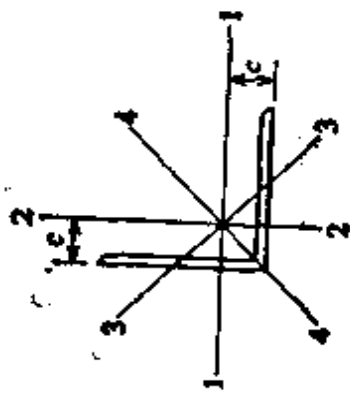


名称	质量 (kg/m)	面积 (mm <sup>2</sup> )	高度 (mm)	翼缘		腹板厚度 (mm)	轴 1-1			轴 2-2			
				宽度 (mm)	厚度 (mm)		$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$S$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$r$ (mm)	$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$S$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$r$ (mm)	$c$ (mm)
C457×86	86.3	10960	457.2	106.7	15.9	17.8	279.2	1221	160	7.70	91	26.5	22.4
	77.2	9790	457.2	104.1	15.9	15.2	258.9	1133	163	7.12	87	27.0	22.1
	68.2	8630	457.2	101.6	15.9	12.7	238.7	1044	166	6.58	83	27.6	22.6
	63.5	8050	457.2	100.3	15.9	11.4	228.6	1000	169	6.24	81	27.8	22.9
C381×74	74.4	9450	381.0	94.4	16.5	18.2	167.1	877	133	4.66	63	22.2	20.3
	59.5	7550	381.0	89.4	16.5	13.2	144.1	756	138	3.87	56	22.6	19.8
	50.5	6390	381.0	86.4	16.5	10.2	130.1	683	143	3.41	51	23.1	20.1
	44.6	5670	304.8	80.5	12.7	13.0	67.10	440	109	2.16	34	19.5	17.3
C305×45	30.8	3390	304.8	74.7	12.7	7.1	53.32	350	117	1.62	23	20.4	17.8
	44.6	5680	254.0	77.0	11.1	17.1	42.87	338	86.9	1.66	27	17.1	16.5
C254×45	37.2	4730	254.0	73.3	11.1	13.4	37.75	297	89.3	1.42	25	17.3	15.7
	22.8	2880	254.0	66.0	11.1	6.1	27.85	219	98.3	0.96	19	18.3	16.3



C229 × 30	39.8	3780	228.6	67.3	10.5	11.4	25.22	221	81.7	1.00	19	16.3	15.0
× 22	22.3	2830	228.6	63.1	10.5	7.2	21.10	185	86.3	0.79	16.4	16.7	15.0
× 20	19.9	2510	228.6	61.7	10.5	5.8	19.69	172	88.6	0.75	16.2	17.3	15.5
C203 × 28	27.9	3540	203.2	64.2	9.9	12.4	18.19	179	71.7	0.83	17	15.3	14.5
× 20	20.5	2590	203.2	59.5	9.9	7.7	14.90	147	75.8	0.62	13.7	15.5	14.2
× 17	17.1	2170	203.2	57.4	9.9	5.6	13.44	132	78.7	0.54	12.6	15.8	14.7
C173 × 22	22.0	2790	177.8	58.4	9.3	10.6	11.28	127	63.6	0.58	12.9	14.4	13.5
× 13	18.2	2310	177.8	55.7	9.3	8.0	10.03	113	65.9	0.50	11.8	14.7	13.5
× 15	14.6	1840	177.8	53.1	9.3	5.3	8.78	99	69.1	0.408	10.4	14.9	14.0
C152 × 19	19.4	2460	152.4	54.8	8.7	11.1	7.20	94	54.1	0.46	11.1	13.7	13.2
× 16	15.6	1980	152.4	51.7	8.7	8.0	6.29	83	56.4	0.362	9.3	13.5	12.7
× 12	12.2	1540	152.4	48.8	8.7	5.1	5.41	71	59.3	0.291	8.2	13.7	12.2
C127 × 13	13.4	1700	127.0	47.9	8.1	8.3	3.66	58	46.4	0.266	7.5	12.5	12.2
× 10	10.0	1260	127.0	44.5	8.1	4.8	3.08	49	49.4	0.200	6.2	12.6	12.4
C102 × 11	10.8	1370	101.6	43.7	7.5	8.1	1.87	37	36.9	0.183	5.7	11.6	11.7
× 8	8.0	1010	101.6	40.1	7.5	4.6	1.58	31	39.6	0.133	4.7	11.5	11.7
C76 × 9	8.9	1130	76.2	40.5	6.9	9.0	0.87	23	27.7	0.129	4.5	10.7	11.7
× 6	6.1	770	76.2	35.8	6.9	4.3	0.67	13	29.5	0.083	3.4	10.4	11.2

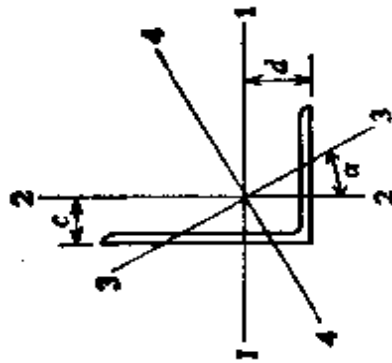
表 C-4 等边角截面(L型)的特性



名称	质量 (kg/m)	面积 (mm <sup>2</sup> )	尺寸		轴 1-1 或 2-2				轴 3-3 <i>r</i> (mm)
			长度 (mm)	厚度 (mm)	<i>I</i> (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	<i>S</i> (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	<i>r</i> (mm)	<i>c</i> (mm)	
L203 × 203 × 25 × 19 × 16 × 14 × 13	75.9	9680	203.2	25.4	37.04	259	61.9	60.2	39.6
	57.0	7380	203.2	19.1	29.01	200	62.7	57.9	39.9
	48.7	6200	203.2	15.9	24.72	169	63.1	56.6	40.1
	44.1	5600	203.2	14.3	22.52	153	63.4	56.1	40.1
	39.8	5000	203.2	12.7	20.23	137	63.6	55.6	40.4
L152 × 152 × 25 × 19 × 16 × 13 × 10	55.7	7100	152.4	25.4	14.78	140	45.6	47.2	29.7
	42.7	5450	152.4	19.1	11.74	110	46.4	45.2	29.7
	36.0	4590	152.4	15.9	10.07	93	46.8	43.9	30.0
	29.2	3710	152.4	12.7	8.28	75	47.2	42.7	30.0
	22.2	2810	152.4	9.5	6.41	58	47.8	41.7	30.2

L127x127x22	40.5	5150	127.0	22.2	7.41	85	37.9	99.9	24.6
x19	35.1	4480	127.0	19.1	6.53	74	38.2	38.6	24.6
x16	29.8	3780	127.0	15.9	5.66	63	38.7	37.6	24.9
x11	21.3	2700	127.0	11.1	4.16	46	39.3	35.8	24.9
x8	15.3	1960	127.0	7.9	3.08	33	39.6	34.8	25.1
L102x102x19	37.6	3510	101.6	19.1	3.20	46	20.2	32.3	19.8
x13	19.1	2420	101.6	12.7	2.33	38	31.0	30.0	19.8
x10	14.6	1850	101.6	9.5	1.83	25	31.5	29.0	20.1
x6	9.3	1250	101.6	6.4	1.25	17	31.6	27.7	20.3
L89x89x10	12.7	1600	88.9	9.5	1.21	19	27.5	25.7	17.5
x6	8.6	1090	88.9	6.4	0.83	12.9	27.6	24.6	17.5
L76x76x13	14.0	1770	76.2	12.7	0.92	17	22.8	23.6	14.7
x10	10.7	1360	76.2	9.5	0.75	14.0	23.5	22.6	14.7
x6	7.3	929	76.2	6.4	0.50	9.1	23.2	21.3	15.0
L64x64x13	11.5	1450	63.5	12.7	0.50	11.7	18.6	20.6	12.4
x6	6.10	768	63.5	6.4	0.291	6.4	19.5	18.3	12.4
x5	4.57	581	63.5	4.8	0.239	5.0	19.9	17.5	12.4
L51x51x6	4.75	606	50.8	6.4	0.146	4.1	15.5	15.0	9.9
x3	2.46	310	50.8	3.2	0.079	2.1	16.0	14.0	10.2
L38x38x6	3.48	445	38.1	6.4	0.058	2.2	11.4	11.9	7.4
x3	1.83	232	38.1	3.2	0.033	1.2	11.9	10.7	7.6
L25x25x6	2.22	284	25.4	6.4	0.017	1.0	7.7	8.6	5.1
x3	1.19	148	25.4	3.2	0.008	0.5	7.4	7.6	5.1

表 0-5 不等边角形截面(L型)的特性

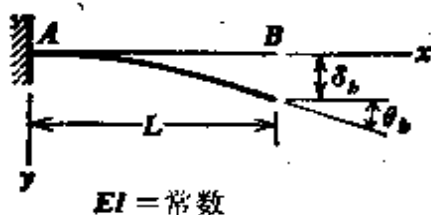


名称	质量 (kg/m)	面积 (mm <sup>2</sup> )	尺寸			轴 1-1			轴 2-2			轴 3-3			
			长度 (mm)	长度 (mm)	厚度 (mm)	$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$S$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$r$ (mm)	$d$ (mm)	$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$S$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$r$ (mm)	$c$ (mm)	$r$ (mm)	$T_{\text{max}}$
L203×152×25 ×19 ×13	65.8	8390	208.2	152.4	25.4	33.63	247	63.3	67.3	16.15	146	43.9	41.9	32.5	0.543
	50.3	6410	203.2	152.4	19.1	26.39	191	64.2	65.0	12.78	113	44.7	39.6	32.8	0.551
	34.2	4360	203.2	152.4	12.7	18.44	131	65.0	62.7	9.03	78	45.5	37.3	33.0	0.558
L203×102×25 ×19 ×13	55.7	7100	203.2	101.6	25.4	28.97	280	63.9	77.5	4.83	64	26.1	26.7	21.6	0.247
	42.7	5450	203.2	101.6	19.1	22.85	178	64.8	74.9	3.91	50	26.8	24.1	21.6	0.258
	29.2	3710	203.2	101.6	12.7	16.03	123	65.7	72.6	2.79	35	27.4	21.8	21.8	0.267
L178×102×22 ×14 ×10	44.9	5720	177.8	101.6	22.2	17.86	158	55.9	64.8	4.25	57	27.3	26.7	21.8	0.318
	29.8	3790	177.8	101.6	14.3	12.33	106	57.0	62.0	3.00	39	28.1	23.9	22.1	0.332
	20.2	2570	177.8	101.6	9.5	8.57	73	57.7	60.2	2.12	27	28.7	22.1	22.4	0.339

L152 x 102 x 23	40.5	5150	152.4	101.6	22.2	11.53	117	47.3	53.8	4.08	56	28.1	28.4	21.8	0.421
x 14	26.9	3430	152.4	101.6	14.3	8.03	79	48.4	51.1	2.87	38	28.9	25.7	22.1	0.438
x 10	18.3	2330	152.4	101.6	9.5	6.63	55	49.1	49.3	2.04	26	29.6	23.9	22.4	0.446
x 8	15.3	1960	152.4	101.6	7.9	4.75	46	49.2	48.3	1.66	21	29.1	23.4	22.4	0.449
L152 x 89 x 10	17.4	2210	152.4	88.9	9.5	5.37	53	49.3	51.8	1.37	20	24.9	20.1	19.6	0.350
L127 x 89 x 16	25.0	3170	127.0	88.9	15.9	4.99	60	39.7	43.2	2.00	31	25.1	24.1	19.1	0.472
x 13	20.2	2580	127.0	88.9	12.7	4.16	49	40.2	42.2	1.71	26	25.7	23.1	19.1	0.479
x 10	15.5	1970	127.0	88.9	9.5	3.25	38	40.6	40.9	1.33	20	26.0	21.8	19.3	0.486
x 6	10.4	1390	127.0	88.9	6.4	2.25	26	41.1	39.6	0.92	13.5	26.3	20.6	19.3	0.492
L127 x 76 x 13	19.1	2420	127.0	76.2	12.7	3.95	48	40.4	44.6	1.08	19	21.1	19.1	16.5	0.357
x 8	12.2	1550	127.0	76.2	7.9	2.62	31	41.1	42.7	0.75	12.7	22.0	17.3	16.8	0.368
x 6	9.8	1250	127.0	76.2	6.4	2.12	25	41.2	42.2	0.58	9.8	21.5	16.8	16.8	0.371
L102 x 89 x 13	17.7	2260	101.6	88.9	12.7	2.21	32	31.2	31.8	1.58	25	26.4	25.4	18.3	0.750
x 8	11.5	1450	101.6	88.9	7.9	1.50	21	32.2	30.0	1.08	16.5	27.3	23.6	18.5	0.757
x 6	9.2	1170	101.6	88.9	6.4	1.21	17	32.2	29.5	0.87	13.2	27.3	23.1	18.5	0.759
L102 x 76 x 10	12.7	1600	101.6	76.2	9.5	1.66	24	32.2	32.5	0.79	14.0	23.2	19.8	16.3	0.551
x 6	8.6	1090	101.6	76.2	6.4	1.17	17	32.3	31.5	0.58	10.1	23.1	18.8	16.5	0.558
L89 x 76 x 10	11.8	1180	88.9	76.2	9.5	1.12	18	27.5	27.4	0.79	14.3	23.1	21.1	15.7	0.721
x 6	8.0	1010	88.9	76.2	6.4	0.79	12.6	28.0	26.4	0.54	9.6	23.1	20.1	16.0	0.727
L89 x 64 x 10	10.7	1360	88.9	63.5	9.5	1.08	18	28.2	29.5	0.46	9.9	18.4	16.8	13.7	0.496
x 6	7.3	929	88.9	63.5	6.4	0.75	12.4	28.4	28.2	0.325	6.8	18.7	15.5	13.7	0.506
L76 x 64 x 8	8.8	1050	76.2	63.5	7.9	0.58	11.0	28.5	23.6	0.375	8.1	18.9	17.3	13.5	0.680
L76 x 51 x 8	7.4	948	76.2	50.8	7.9	0.54	10.7	23.9	25.9	0.196	5.2	14.4	13.2	10.9	0.435
L64 x 51 x 8	6.7	845	63.5	50.8	7.9	0.329	7.7	19.7	20.6	0.187	5.1	14.9	14.2	10.7	0.620
L64 x 38 x 6	4.75	606	63.5	38.1	6.4	0.246	6.0	20.1	22.4	0.067	2.4	10.5	9.7	8.1	0.357
L51 x 38 x 5	3.15	400	50.8	38.1	4.8	0.104	3.0	16.1	16.3	0.050	1.8	11.2	9.9	8.1	0.351

## 附录 D 梁的挠度和斜率

表 D-1 悬臂梁的挠度和斜率



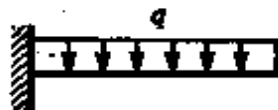
$v$ —沿  $y$  方向的挠度

$v' = \frac{dv}{dx}$ —挠曲线的斜率

$\delta_b = v(L)$ —梁右端处的挠度

$\theta_b = v'(L)$ —梁右端处的转角

1.

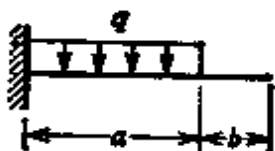


$$v = -\frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2)$$

$$v' = -\frac{qx}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_b = -\frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_b = -\frac{qL^3}{6EI}$$

2.



$$v = -\frac{qx^2}{24EI} (6a^2 - 4ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

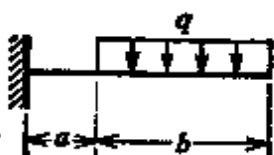
$$v' = -\frac{qx}{6EI} (3a^2 - 3ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = -\frac{qa^3}{24EI} (4x - a) \quad v' = -\frac{qa^3}{6EI} \quad a \leq x \leq L$$

在  $x=a$  处:  $v = -\frac{qa^4}{8EI} \quad v' = -\frac{qa^3}{6EI}$

$$\delta_b = -\frac{qa^3}{24EI} (4L - a) \quad \theta_b = -\frac{qa^3}{6EI}$$

3.



$$v = -\frac{qx^2}{12EI} (3bL + 3ab - 2bx) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = -\frac{qbx}{2EI} (L + a - x) \quad 0 \leq x \leq a$$

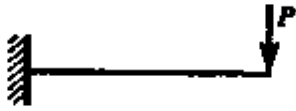
$$v = -\frac{q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \quad a \leq x \leq L$$

$$v' = -\frac{q}{6EI} (x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3) \quad a \leq x \leq L$$

在  $x=a$  处:  $v = -\frac{qa^2b}{12EI} (3L + a) \quad v' = -\frac{qabL}{2EI}$

$$\delta_b = -\frac{q}{24EI} (3L^4 - 4a^3L + a^4) \quad \theta_b = -\frac{q}{6EI} (L^3 - a^3)$$

4.

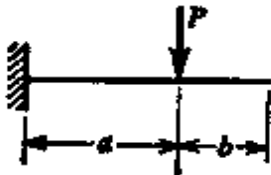


$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3L-x)$$

$$v' = \frac{Px}{2EI}(2L-x)$$

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_b = \frac{PL^2}{2EI}$$

5.



$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3a-x)$$

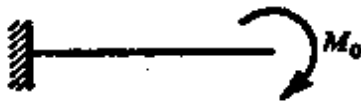
$$v' = \frac{Px}{2EI}(2a-x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a) \quad v' = \frac{Pa^2}{2EI} \quad a \leq x \leq L$$

$$\text{在 } x=a \text{ 处: } v = \frac{Pa^3}{3EI} \quad v' = \frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\delta_b = \frac{Pa^3}{6EI}(3L-a) \quad \theta_b = \frac{Pa^2}{2EI}$$

6.



$$v = \frac{M_0x^2}{2EI} \quad v' = \frac{M_0x}{EI}$$

$$\delta_b = \frac{M_0L^2}{2EI} \quad \theta_b = \frac{M_0L}{EI}$$

7.

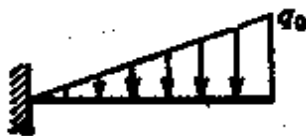


$$v = \frac{q_0x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$v' = \frac{q_0x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

$$\delta_b = \frac{q_0L^4}{30EI} \quad \theta_b = \frac{q_0L^3}{24EI}$$

8.



$$v = \frac{q_0x^2}{120LEI}(20L^3 - 10L^2x + x^3)$$

$$v' = \frac{q_0x}{24LEI}(8L^3 - 6L^2x + x^2)$$

$$\delta_b = \frac{11q_0L^4}{120EI} \quad \theta_b = \frac{q_0L^3}{8EI}$$

表 D-2 简支梁的挠度和斜率



$v$ —沿  $y$  方向的挠度

$v' = \frac{dv}{dx}$ —挠度曲线的斜率

$\delta_c = v\left(\frac{L}{2}\right)$ —梁中间处的挠度

$x_1$ —从  $A$  点至最大挠度点的距离

$\delta_{\max} = v_{\max}$ —最大的挠度

$\theta_a = v'(0)$ —梁左端处的转角

$\theta_b = -v'(L)$ —梁右端处的转角

1.

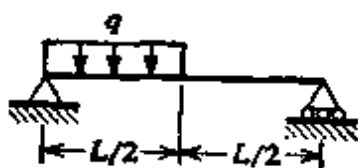


$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 3Lx^2 + x^3)$$

$$v' = \frac{q}{24EI} (L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_c = \delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad \theta_a = -\theta_b = \frac{qL^3}{24EI}$$

2.



$$v = \frac{qx}{384EI} (9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{q}{384EI} (9L^3 - 72Lx^2 + 64x^3) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

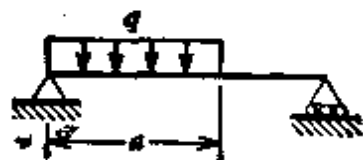
$$v = \frac{qL}{384EI} (8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$v' = \frac{qL}{384EI} (24x^2 - 48Lx + 17L^2) \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$\delta_c = \frac{5qL^4}{768EI} \quad \theta_a = -\frac{3qL^3}{128EI} \quad \theta_b = \frac{7qL^3}{384EI}$$

3.



$$v = \frac{qx}{24LEI} (a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{q}{24LEI} (a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{qa^2}{24LEI} (-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3)$$

$$a \leq x \leq L$$

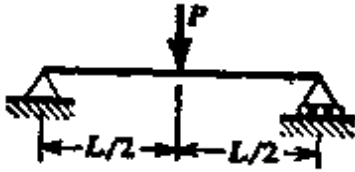
$$v' = \frac{qa^2}{24LEI} (4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \quad a \leq x \leq L$$

$$\theta_a = \frac{qa^2}{24LEI} (a^2 - 4aL + 4L^2)$$

$$\theta_b = \frac{qa^2}{24LEI} (2L^2 - a^2)$$



4.



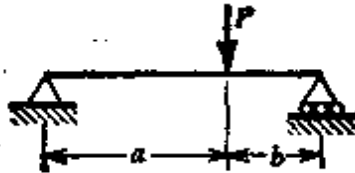
$$v = \frac{Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{P}{16EI} (L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = \delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$\theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI}$$

5.



$$v = \frac{Pbx}{6LEI} (L^2 - b^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{Pb}{6LEI} (L^2 - b^2 - 3x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

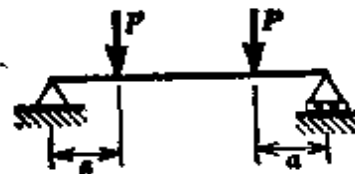
$$\theta_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad \theta_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$$\text{如果 } a \geq b, \delta_c = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$$

$$\text{如果 } a \geq b, x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

$$\text{和 } v_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$$

6.



$$v = \frac{Px}{6EI} (3aL - 3a^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{P}{2EI} (aL - a^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{Pa}{6EI} (3Lx - 3x^2 - a^2) \quad a \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{Pa}{2EI} (L - 2x) \quad a \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\theta_c = \frac{Pa(L-a)}{2EI}$$

$$\delta_c = v_{\max} = \frac{Pa}{24EI} (3L^2 - 4a^2)$$

7.



$$v = \frac{M_0 x}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2)$$

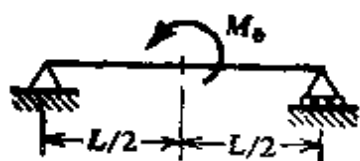
$$v' = \frac{M_0}{6LEI} (2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_c = \frac{M_0 L^2}{16EI} \quad \theta_a = \frac{M_0 L}{3EI}$$

$$\theta_b = \frac{M_0 L}{6EI}$$

$$x_1 = L \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \text{和} \quad \delta_{\max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

8.



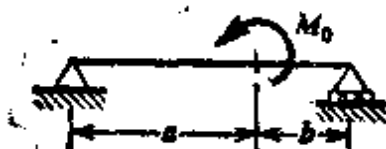
$$v = \frac{M_0 x}{24LEI} (L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{M_0}{24LEI} (L^2 - 12x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = 0 \quad \theta_a = \frac{M_0 L}{24EI}$$

$$\theta_b = -\frac{M_0 L}{24EI}$$

9.



$$v = \frac{M_0 x}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\text{在 } x=a \text{ 处: } v = \frac{M_0 a}{3LEI} (3aL - 2a^2 - L^2)$$

$$\text{在 } x=a \text{ 处: } v' = \frac{M_0}{3LEI} (3aL - 3a^2 - L^2)$$

$$\theta_a = \frac{M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2)$$

$$\theta_b = \frac{M_0}{6LEI} (3a^2 - L^2)$$

10.



$$v = \frac{q_0 x}{360LEI} (7L^4 - 10L^2 x^2 + 3x^4)$$

$$v' = \frac{q_0}{360LEI} (7L^4 - 30L^2 x^2 + 15x^4)$$

$$\delta_c = \frac{5q_0 L^4}{768EI} \quad \theta_a = \frac{7q_0 L^3}{360EI} \quad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0.5193L \quad \delta_{\max} = 0.00652 \frac{q_0 L^4}{EI}$$

## 习 题 答 案

1.2-2  $\sigma = 72.0 \text{ N/mm}^2$   $\epsilon = 0.000286$

1.3-1 (a) 25974 m (b) 12063 m

1.3-2  $d = 139.3 \text{ mm}$

1.3-3  $P = 60 \text{ kN}$

1.3-4  $\theta = \arctg \sqrt{2} = 55^\circ 4'$

1.3-5  $A = \frac{WL\omega^2}{g\sigma_w}$

1.3-6  $A = 2WL\omega^2 / (2g\sigma_w - \gamma L^2\omega^2)$

1.4-1 550.36 mm

1.4-2  $d = 10.3 \text{ mm}$

1.4-3  $P = 134 \text{ kN}$

1.4-4 (a)  $\Delta d = 0.0148 \text{ mm}$  (b)  $\Delta V = 354 \text{ mm}^3$

1.5-1  $\delta = \frac{PL}{3EA}$  (伸长)

1.5-2 (a)  $\delta = 0.656 \text{ mm}$  (b) 1.375

1.5-3 (a) 1.803 mm (b) 1.405 mm

1.5-4  $\delta = \frac{WL}{2EA}$

1.5-5 0.005 mm

1.5-6  $\Delta V = \frac{WL}{2E}(1-2\nu)$

1.5-7  $\delta = \frac{\omega^2 L^2}{3gEA}(W_1 + 3W)$

1.5-8  $\delta = \frac{PL}{Et(b_1 - b_2)} \ln \frac{b_1}{b_2}$

1.5-9  $\Delta V = \frac{PL}{E}(1-2\nu)$

1.5-10 0.688 mm

1.5-11  $r = \left( \frac{P}{\sigma\sigma_w} e^{\gamma/\sigma_w} \right)^{1/2}$   $V = \frac{P}{\gamma} (e^{\nu L/\sigma_w} - 1)$

1.5-12  $\Delta_{b_1} = 0.955 \text{ mm}$   $\Delta_{b_2} = 1.466 \text{ mm}$

1.5-13  $\text{ctg } 2\theta = -\frac{A_2\sqrt{2}}{A_1}$

1.5-14  $\theta = 55^\circ 39'$

- 1.6-2  $\frac{P}{2}$
- 1.6-3  $x = \frac{LE_2}{E_1 + E_2}$
- 1.6-4  $14 \text{ N/mm}^2$
- 1.6-5  $P = 1050 \text{ kN}$
- 1.6-6  $e = \frac{b}{2} \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$
- 1.6-7  $\sigma_{ab} = 66.7 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_{cd} = 133 \text{ N/mm}^2$
- 1.6-8  $F_{ad} = \frac{P}{2 \sin \alpha}$   $\Delta_{av} = \frac{PH}{2EA \sin^3 \alpha}$
- 1.6-10  $F_{ad} = \frac{P}{\sqrt{2}}$   $F_{bd} = P(\sqrt{2} - 1)$   $F_{cd} = -\frac{P}{2}(2 - \sqrt{2})$   
 $\Delta_{ah} = \frac{PH}{EA}(\sqrt{2} - 1)$   $\Delta_{av} = \frac{PH}{EA}$
- 1.7-1  $71^\circ\text{C}$ (铝管比钢管长 12 mm)  
 $4.3^\circ\text{C}$ (钢管比铝管长 12 mm)
- 1.7-2  $91 \text{ N/mm}^2$ (压缩)
- 1.7-3  $R = EA\Delta L/L$
- 1.7-4  $16.2^\circ\text{C}$
- 1.7-5  $\Delta T = \frac{P}{E_c A_c (\alpha_c - \alpha_s)}$
- 1.7-6  $\sigma_{ab} = 35.8 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_{cd} = 148.8 \text{ N/mm}^2$
- 1.7-7  $\sigma = 102 \text{ N/mm}^2$
- 1.7-8  $F_1 = -EA\alpha\Delta T \sin^2 \beta / (1 + 2 \cos^3 \beta)$   
 $F_2 = -2F_1 \cos \beta$
- 1.7-10  $n = \frac{\sigma_0 L}{2pE} \left( 1 + \frac{EA}{2E_c A_c} \right)$
- 1.7-11  $\sigma_s = \frac{(\alpha_c - \alpha_s) TE_c E_s}{E_s + 2E_c}$   $\sigma_c = -2\sigma_s$
- 1.7-12  $80.9 \text{ N/mm}^2$
- 1.8-1  $\delta_s = 3.0, 6.0, 9.0, 15.8, 23.3$
- 1.8-2  $\delta_s = \frac{L}{B \sin \theta} \left( \frac{P}{2A \sin \theta} \right)^n$
- 1.8-3  $\delta_H = 1.35 \text{ mm}$   $\delta_V = 2.86 \text{ mm}$
- 1.8-4  $\delta = \frac{\gamma^n L^{n+1}}{B(n+1)}$
- 1.8-5  $\delta = 409.77 \text{ mm}$
- 1.8-6  $P_s = 3.73 \sigma_y A$

- 1.8-7  $P_u = 450 \text{ kN}$
- 1.8-8  $A_{s0} = 678 \text{ mm}^2$   $A_{s0} = 783 \text{ mm}^2$
- 1.8-9  $P_v = \sigma_v A$   $P_u = 4\sigma_v A/3$
- 1.9-1  $\tau = 4.5 \text{ N/mm}^2$
- 1.9-2  $d = 15.96 \text{ mm}$
- 1.9-3  $\tau = 318 \text{ N/mm}^2$   $\sigma = 382 \text{ N/mm}^2$
- 1.9-4  $\tau = 100 \text{ N/mm}^2$
- 1.9-5  $\tau = 44.8 \text{ N/mm}^2$
- 1.10-1  $U = 162.5 \text{ N}\cdot\text{mm}$  和  $325 \text{ N}\cdot\text{mm}$
- 1.10-2  $U = \frac{P^2 L}{2EA}$
- 1.10-3  $U = \frac{\gamma^2 AL^3}{6E}$
- 1.10-4  $U = \frac{L}{6EA} (3P^2 + 3P\gamma LA + \gamma^2 L^3 A^2)$
- 1.10-5  $U = \frac{W_1^3 L^3 \omega^4}{15EA g^2}$  ( $W_1 = \gamma AL$ )
- 1.10-7  $\sigma = (2WE/A)^{1/2}$
- 1.10-8  $\sigma = 14.6 \text{ N/mm}^2$
- 1.10-9  $h = 640 \text{ mm}$
- 1.10-10  $\sigma = \frac{W}{A} \left( 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}} \right)$  其中  $\delta_{st} = \frac{WL}{EA} + \frac{W}{k}$
- 2.1-1  $\tau_{\max} = 127 \text{ N/mm}^2$
- 2.1-2  $350 \text{ kN}$
- 2.1-3  $\sigma_\theta = -126 \text{ N/mm}^2$   $\tau_\theta = -73 \text{ N/mm}^2$
- 2.1-4  $\sigma_\theta = 91.3 \text{ N/mm}^2$   $\theta = 20^\circ 34'$
- 2.1-5  $\sigma_\theta = 90 \text{ N/mm}^2$   $\tau_\theta = 51.9 \text{ N/mm}^2$
- 2.1-7  $\tau_\theta = -\tau'_\theta = 56.5 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_\theta = 120 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_{\max} = 60 \text{ N/mm}^2$
- 2.1-8  $\theta = 60^\circ$
- 2.1-9  $\theta = 26^\circ 34'$   $P = 16.8 \text{ kN}$
- 2.2-1  $\sigma_\theta = 50 \text{ N/mm}^2$   $\sigma'_\theta = -10 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_\theta = -\tau'_\theta = 52 \text{ N/mm}^2$
- 2.2-3  $\sigma_\theta = \sigma'_\theta = 20 \text{ N/mm}^2$   $\tau_\theta = -\tau'_\theta = 60 \text{ N/mm}^2$

- 2.2-3  $\sigma_x = \sigma_0$  和  $\tau_{xy} = 0$   $\frac{\Delta V}{V} = 0.0005$
- 2.2-4  $\sigma_x = 42 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_y = -14 \text{ N/mm}^2$
- 2.2-6  $\sigma_x = 174 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_y = -87.9 \text{ N/mm}^2$
- 2.2-7  $0.0015 \text{ mm}$
- 2.2-8  $\Delta V = -400 \text{ mm}^3$
- 2.2-9  $\varepsilon_x = -0.00009$
- 2.2-10  $\nu = \frac{2}{7}$
- 2.2-11  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta$
- 2.3-1  $\frac{\Delta V}{V} = 0$
- 2.3-2  $\gamma = 0.00175$
- 2.3-3  $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = 0.00125$   $\gamma = 0.0025$
- 2.4-4  $\theta = 45^\circ$   $\sigma_\theta = \sigma'_\theta = -28 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_\theta = -\tau'_\theta = -56 \text{ N/mm}^2$
- 2.4-6  $\sigma_\theta = -24.1 \text{ N/mm}^2$   $\tau_\theta = -90 \text{ N/mm}^2$
- 2.4-10  $\sigma_\theta = 24 \text{ N/mm}^2$   $\tau_\theta = -4 \text{ N/mm}^2$
- 2.5-1  $\theta_P = 157.5^\circ$  和  $\sigma_1 = 36.9 \text{ N/mm}^2$ ;  
 $\theta_P = 67.5^\circ$  和  $\sigma_2 = 17.1 \text{ N/mm}^2$
- 2.5-2  $\theta_P = 97.25^\circ$  和  $\sigma_1 = 20.89 \text{ N/mm}^2$ ;  
 $\theta_P = 7.25^\circ$  和  $\sigma_2 = -34.9 \text{ N/mm}^2$
- 2.5-3  $\theta_s = 52.25^\circ$   $\tau_\theta = -7 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_\theta = -27.9 \text{ N/mm}^2$
- 2.5-4  $\theta = 15^\circ$   $\sigma_\theta = 7 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_\theta = -12.1 \text{ N/mm}^2$
- 2.5-5 (a)  $\theta_P = 112.5^\circ$   $\sigma_1 = 15.3 \text{ N/mm}^2$   
 (b)  $\theta_s = 67.5^\circ$   $\sigma_\theta = 4 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_\theta = -11.3 \text{ N/mm}^2$
- 2.5-6 (a)  $\theta_P = 67.5^\circ$   $\sigma_1 = 33.8 \text{ N/mm}^2$   
 (b)  $\theta_s = 22.5^\circ$   $\sigma_\theta = 14 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_\theta = -19.8 \text{ N/mm}^2$
- 2.5-7  $\sigma_x = 0$   $\sigma_y = -52 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_{xy} = -15 \text{ N/mm}^2$
- 2.7-1  $\sigma_{\max} = 140 \text{ N/mm}^2$   $\tau_{\max} = 70 \text{ N/mm}^2$
- 2.7-2  $p = 1.91 \text{ N/mm}^2$

- 2.7-3  $\Delta V = 0.69 \text{ mm}^3$
- 2.8-1  $e_1 = 575 \times 10^{-6}$   $\theta_P = -22.5^\circ$
- 2.8-2  $e_1 = -65 \times 10^{-6}$   $\theta_P = -22.5^\circ$
- 2.8-3  $e_1 = 934 \times 10^{-6}$   $\theta_P = 39.6^\circ$
- 3.1-1  $L = 2.327 \text{ m}$
- 3.1-2  $\frac{L}{d} = \frac{\phi G}{2\tau} = 698$
- 3.1-3  $d = 101.2 \text{ mm}$
- 3.1-4  $T = 123 \text{ N}\cdot\text{m}$
- 3.1-5  $G = \frac{8T}{\pi d^3 \theta}$
- 3.1-6  $\frac{T_1}{8}$
- 3.1-7  $d = 144.9 \text{ mm}$
- 3.1-8  $T = \frac{fPd}{4}$
- 3.1-9  $\phi = \frac{qL^2}{2GJ}$
- 3.1-10  $\frac{d_b}{d_a} = 1.39$
- 3.1-11  $\sigma_1 = 59.14 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_2 = -19.34 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_{\max} = 39.24 \text{ N/mm}^2$
- 3.2-1 (a) 0.51 (b) 1.19
- 3.2-2 (a)  $\phi = 0.10 \text{ rad} = 5.73^\circ$   
 (b)  $d = 70.1 \text{ mm}$
- 3.2-3  $d = 446 \text{ mm}$
- 3.2-4  $\frac{a}{L} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$
- 3.3-1  $U = 615 \text{ N}\cdot\text{mm}$
- 3.3-2  $U = \frac{19T_1^2 L}{128GJ}$
- 3.3-3  $U = \frac{q^2 L^3}{6GJ}$
- 3.3-4  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{A_2^2}{A_1^2}$
- 3.3-5  $U = \frac{G\beta^2}{2} \cdot \frac{J_a J_b}{L_a J_b + L_b J_a}$
- 3.3-6  $\tau = 152 \text{ N/mm}^2$
- 3.4-1 (a)  $56.5 \text{ N/mm}^2$  (b)  $62.2 \text{ N/mm}^2$

- 3.4-2 (a)  $t=3.93\text{ mm}$  (b)  $t=4.07\text{ mm}$
- 3.4-3 2
- 3.4-4  $\tau=51.0\text{ N/mm}^2$   $\theta=10.7\times 10^{-6}\text{ rad/mm}$
- 3.4-5  $\tau\propto(\beta+1)^2/\beta$   $J\propto\beta^2/(\beta+1)^4$
- 3.4-6  $\phi=\frac{2TL}{G\pi d_a^3}\frac{d_a}{d_b}\left(\frac{d_a}{d_b}+1\right)$
- 3.5-2 (a)  $\tau_{\max}=\frac{Tr}{J}\frac{3n+1}{4n}$   
 (b)  $T_u=\frac{2n\pi r^3\tau_u}{3n+1}$
- 3.5-3  $T=\frac{T_y}{3}\left[4-\left(\frac{\gamma_y}{\gamma_{\max}}\right)^3\right]$
- 3.5-4  $\frac{T_u}{T_y}=\frac{4(1-\beta^3)}{3(1-\beta^4)}$  其中  $\beta=\frac{r_1}{r_2}$
- 4.2-1  $V=-12\text{ kN}$   $M=36\text{ kN}\cdot\text{m}$   
 $V_{\max}=24\text{ kN}$   $M_{\max}=48\text{ kN}\cdot\text{m}$
- 4.2-2  $V=q_b$   $M=-\frac{q_b^2}{2}$
- 4.2-3  $V=1.25\text{ kN}$   $M=7.5\text{ kN}\cdot\text{m}$
- 4.2-4  $V=-12.48\text{ kN}$   $M=-1.44\text{ kN}\cdot\text{m}$
- 4.2-5  $V=-15.2\text{ kN}$   $M=-46.4\text{ kN}\cdot\text{m}$
- 4.2-6  $V_b=40\text{ kN}$   $M_b=40\text{ kN}\cdot\text{m}$   
 $V_m=0$   $M_m=80\text{ kN}\cdot\text{m}$
- 4.2-7  $|M_{\max}|=Pa$
- 4.2-8  $\frac{a}{L}=\frac{1}{4}$
- 4.2-9  $N=P\sin\theta$   $V=P\cos\theta$   
 $M=Pr\sin\theta$
- 4.2-10  $V_{\max}=\frac{44wL^2\alpha}{15g}$   $M_{\max}=\frac{517wL^3\alpha}{180g}$
- 4.4-15  $a=0.586L$
- 4.4-17  $M_+=2.25\text{ kN}\cdot\text{m}$   $M_-=-2.15\text{ kN}\cdot\text{m}$
- 4.4-18  $q_a=\frac{3P}{4L}$   $q_b=\frac{9P}{4L}$   $M_{\max}=\frac{17PL}{64}$
- 4.4-19 (a)  $M_{\max}=\frac{PL(n+2)}{8(n+1)}$  对于  $n$  为偶数;  
 $M_{\max}=\frac{PL(n+1)}{8n}$  对于  $n$  为奇数



- 4.4-20  $x=6.67\text{ m}$   $M_{\max}=696\text{ kN}\cdot\text{m}$
- 5.1-1  $\sigma=320\text{ N/mm}^2$
- 5.1-2  $\sigma=419\text{ N/mm}^2$
- 5.1-3  $P=60.6\text{ kN}$   $\delta=2.80\text{ mm}$
- 5.1-4  $\sigma_{\max}=78.0\text{ N/mm}^2$   $\delta=4.62\text{ mm}$
- 5.1-5 (a)  $M_{\max}=\frac{b^3\sigma_w}{32}$  (b)  $M_{\max}=\frac{13bh^2\sigma_w}{60}$   
 (c)  $M_{\max}=\frac{15\alpha d^3\sigma_w}{64}$
- 5.1-6  $\varepsilon=\alpha(T_2-T_1)/h$   
 $\delta=\alpha L^2(T_2-T_1)/8h$
- 5.1-7  $\delta=10\text{ N/mm}^2$
- 5.1-8  $\delta=9.07\text{ N/mm}^2$
- 5.1-9  $\delta=76.6\text{ N/mm}^2$ (拉伸)
- 5.1-10  $P=278\text{ kN}$
- 5.1-11  $\sigma_{\max}=136.9\text{ N/mm}^2$
- 5.2-1  $d=217\text{ mm}$
- 5.2-2  $b=297\text{ mm}$
- 5.2-3  $h=\sqrt{2}b$   $b=d/\sqrt{3}$
- 5.2-4  $t=6\text{ mm}$
- 5.2-5 W305×40 ( $S=560\times 10^3\text{ mm}^2$ )
- 5.2-6 (a)  $S=332.5\times 10^3\text{ mm}^2$   
 (b) W254×31 ( $S=352\times 10^3\text{ mm}^2$ )
- 5.2-7 (a)  $S=63.75\times 10^3\text{ mm}^2$   
 (b) S127×15 ( $S=79\times 10^3\text{ mm}^2$ )
- 5.2-8  $\frac{S_2}{S_1}=\frac{2d_2}{d_1}-\frac{d_1}{d_2}$
- 5.2-9  $\frac{b_1}{b_2}=\frac{2\beta-1}{2-\beta}$
- 5.2-10  $\delta=0.011d$
- 5.2-11  $\beta=0.130$
- 5.3-2  $\tau=0.45\text{ N/mm}^2$
- 5.3-3  $P=43.75\text{ kN}$
- 5.3-4  $\tau_{\max}=0.588\text{ N/mm}^2$
- 5.3-5  $P=3.94\text{ kN}$   $\sigma=10.51\text{ N/mm}^2$
- 5.3-6  $\tau=42.7\text{ N/mm}^2$   $\tau_{\text{approx}}=40.1\text{ N/mm}^2$

- 5.3-7  $\tau_{\max} = 39.7 \text{ N/mm}^2$
- 5.3-8  $\tau_{\max} = 1.915 \text{ N/mm}^2$
- 5.5-1 504 N/mm
- 5.5-2 69.8 mm 34.9 mm
- 5.5-3  $s = 134.6 \text{ mm}$
- 5.5-4  $V = 14.88 \text{ kN}$
- 5.6-1  $\sigma_1 = 0.039 \text{ N/mm}^2$  ( $\theta_P = 76^\circ 39'$ )  
 $\sigma_2 = -0.687 \text{ N/mm}^2$  ( $\theta_P = -13^\circ 21'$ )
- 5.6-2  $\sigma_1 = 6.285 \text{ N/mm}^2$  ( $\theta_P = 4^\circ 16'$ )  
 $\sigma_2 = -0.035 \text{ N/mm}^2$  ( $\theta_P = -85^\circ 44'$ )
- 5.6-3 (a)  $\sigma_1 = 1.05 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_2 = -1.05 \text{ N/mm}^2$   
 $\theta_P = 45^\circ$  相应于  $\sigma_2$
- (b)  $\sigma_1 = 0.167 \text{ N/mm}^2$  ( $\theta_P = -78^\circ 1'$ )  
 $\sigma_2 = -3.711 \text{ N/mm}^2$  ( $\theta_P = 11^\circ 59'$ )
- (c)  $\sigma_1 = 0$   $\sigma_2 = -7.088 \text{ N/mm}^2$   
 $\theta_P = 0^\circ$  相应于  $\sigma_2$ .
- 5.6-4 (a)  $\sigma_1 = 145.4 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_2 = 0$   
 $\theta_P = 0^\circ$  相应于  $\sigma_2$
- (b)  $\sigma_1 = 131.7 \text{ N/mm}^2$  ( $\theta_P = -4^\circ 29'$ )  
 $\sigma_2 = -0.82 \text{ N/mm}^2$  ( $\theta_P = 85^\circ 31'$ )
- (c)  $\sigma_1 = 14.78 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_2 = -14.78 \text{ N/mm}^2$   
 $\theta_P = -45^\circ$  相应于  $\sigma_1$
- 5.7-1  $\sigma_{\max} = 2\sigma_b = \frac{64PL}{27\pi d_o^3}$  在  $x = \frac{L}{4}$  处
- 5.7-2  $\frac{d_b}{d_o} \leq 1.5$
- 5.7-3  $\sigma_{\max} = \frac{8PL}{9h^3}$  在  $x = \frac{L}{2}$  处
- 5.7-4 (a)  $\sigma_{\max} = 8.73 \text{ N/mm}^2$  在  $x = 100 \text{ mm}$  处  
(b)  $\tau_{\max} = 0.203 \text{ N/mm}^2$   $\tau_{\min} = 0.06 \text{ N/mm}^2$
- 5.7-5  $b = \frac{6Px}{h^2\sigma_w}$
- 5.7-6  $h = x\sqrt{\frac{3q}{b\sigma_w}}$
- 5.7-7  $h = \left[ \frac{3PL}{2b\sigma_w} \left( 1 - \frac{4x^2}{L^2} \right) \right]^{1/2}$
- 5.8-1  $\sigma_w = -5.22 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_s = 67.9 \text{ N/mm}^2$

- 5.8-2  $M=14.41 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- 5.8-3  $M=94.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- 5.8-4  $M=20.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- 5.8-5  $t=20 \text{ mm}$
- 5.8-6  $S=49.5 \text{ mm}^3$
- 5.9-1  $\sigma_1=50.2 \text{ N/mm}^2$   $\tau_{\max}=25.2 \text{ N/mm}^2$
- 5.9-2  $\sigma_1=106.2 \text{ N/mm}^2$   $\tau_{\max}=73.6 \text{ N/mm}^2$
- 5.9-3  $\sigma_1=12.76 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_2=-0.032 \text{ N/mm}^2$
- 5.9-4  $\sigma_1=103.9 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_2=-3.85 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_{\max}=53.85 \text{ N/mm}^2$
- 5.9-5  $\tau_a=47.85 \text{ N/mm}^2$   $\tau_b=16.16 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_c=19.38 \text{ N/mm}^2$
- 5.9-6  $\sigma_1=57.3 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_2=-31.5 \text{ N/mm}^2$
- 5.9-7  $M=qR^2(1+\cos\theta)$   $V=qR(\alpha-\theta)$   
 $T=qR^2(\alpha-\theta-\sin\theta)$
- 5.10-1  $\sigma_t=\frac{8P}{a^2}$   $\sigma_o=-\frac{4P}{a^2}$
- 5.10-2  $\sigma_t=\frac{9.11P}{a^2}$   $\sigma_o=-\frac{6.35P}{a^2}$
- 5.10-3  $\alpha=\frac{d_1^2+d_2^2}{4hd_2}$
- 5.10-4  $25.3 \text{ N/mm}^2$ ;  $-26.1 \text{ N/mm}^2$
- 5.10-5  $P=127.8 \text{ kN}$
- 5.10-6  $s=\frac{h^2}{12(L-x)}$
- 5.10-7 (a)  $0.161 \text{ N/mm}^2$ ;  $-0.216 \text{ N/mm}^2$   
 (b)  $d=0.631 \text{ m}$
- 5.10-8  $d=64.8 \text{ mm}$
- 5.10-9  $s=\frac{L}{2}+\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{8}$
- 5.10-10  $135.3 \text{ N/mm}^2$
- 5.10-11  $107.2 \text{ N/mm}^2$ ;  $-151.3 \text{ N/mm}^2$
- 5.10-14 等边三角形, 具有相同形心且边长为  $b/4$ .
- 5.10-15 截面核心是与原截面倾斜  $45^\circ$ , 且对角线长度为  $2a=\frac{2b}{3}$  的正方形.
- 5.10-16 截面核心为对角线等于  $278.8 \text{ mm}$  和  $34 \text{ mm}$  的菱形.

- 6.2-2  $\delta=7.31 \text{ mm}$
- 6.2-3  $h=102.4 \text{ mm}$
- 6.2-4  $\frac{h_2}{h_1}=2.027$
- 6.2-5  $a=\frac{5L}{7}$
- 6.2-6 1.0098
- 6.3-1  $\theta=\frac{4\beta}{3}$
- 6.3-2  $\frac{\delta}{L}=0.0035$
- 6.3-6  $\delta_o=\frac{7qL^4}{192EI}$   $\delta_s=\frac{41qL^4}{384EI}$
- 6.3-7  $y=-\frac{Px^3}{3EI}$
- 6.4-7  $\theta_a=\frac{Pa(L-a)(L-2a)}{6LEI}$   
 $\delta_1=\frac{Pa^2(L-2a)^2}{6LEI}$   $\delta_2=0$
- 6.5-1  $\delta=\frac{97qL^4}{768EI}$   $\theta=\frac{85qL^3}{192EI}$
- 6.5-2  $\theta_s=\frac{qL(L^2-2a^2)}{24EI}$
- 6.5-3  $\delta_b=\frac{2PL^3}{9EI}$
- 6.5-4  $\delta=\frac{19PL^3}{384EI}$
- 6.5-5 (a)  $M_0=\frac{PL}{2}$  (b)  $\delta=\frac{PL^3}{12EI}$
- 6.5-6  $\frac{a}{L}=\frac{2}{3}$
- 6.5-7  $\frac{\delta_2}{\delta_1}=n^2$
- 6.5-8  $\delta_{\max}=\frac{39PL^3}{1024EI}$
- 6.5-9  $\delta=\frac{3q_0L^4}{1280EI}$
- 6.5-10  $\theta_{\max}=\frac{q_0L^3}{10EI}$
- 6.5-11  $\delta_s=\frac{PaL^3}{16EI}$  (向上)  
 $\delta_d=\frac{Pa^2(L+a)}{3EI}$  (向下)

- 6.5-12  $\theta_c = \frac{PL^2}{24EI}$
- 6.5-13  $\frac{P}{Q} = \frac{3L^2}{16a(a+L)}$
- 6.5-14  $\delta_c = \frac{5PL^3}{3EI}$
- 6.5-15  $\delta_b = \frac{Pcb^2}{2EI}$      $\delta_c = \frac{Pc^2(c+3b)}{3EI}$
- 6.6-1  $v = \frac{Px}{384EI}(15L^2 - 32x^2)$      $(0 \leq x \leq \frac{L}{4})$   
 $v = \frac{P}{768EI}(L^3 + 24L^2x - 32x^3)$      $(\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2})$
- 6.6-2  $\theta = \frac{5PL^2}{16EI}$
- 6.6-3  $\delta_c = \frac{PL^3}{384EI_1} \left(1 + \frac{7I_1}{I_2}\right)$
- 6.6-4  $\delta_c = \frac{qL^4}{128EI_1} \left(1 + \frac{15I_1}{I_2}\right)$
- 6.6-5  $\delta = \frac{11PL^3}{64Ebh^3}$
- 6.6-6  $\delta_c = \frac{6.54PL^3}{Ebd_c^3}$
- 6.6-7  $\delta_c = \frac{1.39PL^3}{Etd_c^3}$
- 6.7-1  $\delta = 0.01331 \frac{qL^4}{EI}$
- 6.7-2  $\delta = 0.02344 \frac{PL^3}{EI}$
- 6.7-3  $\delta = 0.0137 \frac{PL^3}{EI}$
- 6.7-4  $\delta = 0.352 \frac{PL^3}{EI}$
- 6.7-5  $\delta = 0.1328 \frac{qL^4}{EI}$
- 6.7-6  $\delta_c = 0.0368 \frac{q_0L^4}{EI}$
- 6.7-7  $\delta_c = 0.0122 \frac{PL^3}{EI}$
- 6.7-8  $\delta_c = 0.548 \frac{PL^3}{EI_c}$
- 6.8-1  $U = \frac{bhL\sigma_{\max}^2}{6E}$

$$6.8-2 \quad U = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

$$6.8-3 \quad U = \frac{\alpha^4 EI \delta^2}{4L^3}$$

$$6.8-4 \quad U = \frac{P^2 L^3}{48EI}$$

$$6.8-5 \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{8}$$

$$6.8-6 \quad U = 9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$6.8-7 \quad \sigma_{\max} = \left( \frac{18WhE}{AL} \right)^{1/2}$$

$$6.8-8 \quad 8152 \times 19$$

$$6.9-1 \quad \delta_0 = \frac{qL^4}{8EI} \left( \frac{1}{1-\beta} \right), \text{ 这里 } \beta = \frac{kL^3}{3EI}; \text{ 当 } \beta < 1 \text{ 时是稳定的.}$$

$$6.9-2 \quad \delta = \frac{\delta_0}{1-\gamma} \text{ 这里 } \gamma = \frac{kL^3}{48EI}; \text{ 当 } \gamma < 1 \text{ 时是稳定的.}$$

$$6.9-3 \quad \text{中心的挠度 } \delta_0 = \frac{PL^3}{48EI} \psi_1, \text{ 这里 } \psi_1 = \frac{12}{\alpha^3 L^3} \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} - \operatorname{tg} h \frac{\alpha L}{2} \right);$$

$$\text{稳定条件为 } \frac{\alpha L}{\pi} < 1 \text{ 或 } \frac{\alpha \gamma L^4}{\alpha^4 EI} < 1$$

$$6.10-1 \quad v = \frac{\alpha(T_2 - T_1)(x)(L-x)}{2h}$$

$$6.10-2 \quad \delta = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2h} \quad \theta = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L}{h}$$

$$6.10-3 \quad v_{\max} = \frac{\alpha T_0 L^3}{9\sqrt{3}h}$$

$$7.2-2 \quad \delta_{\max} = 0.00542 \frac{qL^4}{EI} \quad \text{在 } x = 0.5785L \text{ 处}$$

$$7.2-5 \quad v = \frac{qx^2(L-x)^2}{24EI}$$

$$7.2-6 \quad R_a = -R_b = \frac{3M_0}{2L} \quad M_a = \frac{M_0}{2} \quad v = \frac{M_0 x^2(L-x)}{4LEI}$$

$$7.2-7 \quad v = \frac{q_0 x^2}{120LEI} (4L^3 - 8L^2 x + 5Lx^2 - x^3) \quad R_a = \frac{2q_0 L}{5}$$

$$R_b = \frac{q_0 L}{10} \quad M_a = \frac{q_0 L^2}{15}$$

$$7.2-8 \quad R_a = R_b = \frac{q_0 L}{4} \quad M_a = M_b = \frac{5q_0 L^2}{96}$$

$$v = \frac{q_0 x^2}{960LEI} (25L^3 - 40L^2 x + 16x^3) \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$$

$$7.2-9 \quad v = \frac{q_0 x^2}{120LEI} (3L^3 - 7L^2 x + 5Lx^2 - x^3) \quad R_a = \frac{7q_0 L}{20}$$

$$R_b = \frac{3q_0L}{20} \quad M_a = \frac{q_0L^2}{20} \quad M_b = \frac{q_0L^2}{30}$$

$$7.3-3 \quad R_a = \frac{9q_0L}{40} \quad R_b = \frac{11q_0L}{40} \quad M_a = \frac{7q_0L^2}{120}$$

$$7.3-4 \quad R_a = \frac{P}{16L}(11L-24a) \quad R_b = \frac{3P}{16L}(7L+8a)$$

$$M_a = \frac{P}{16}(3L-8a)$$

$$7.3-5 \quad R_a = \frac{qL}{8} \quad R_b = \frac{33qL}{16} \quad R_c = \frac{13qL}{16}$$

$$7.3-6 \quad T = \frac{3qAL^4}{8AL^3+24hI}$$

$$7.3-7 \quad F = \frac{5PI_2}{2(I_1+I_2)}$$

$$7.3-8 \quad R_a = \frac{31qL}{48} \quad R_b = \frac{17qL}{48} \quad M_a = \frac{7qL^2}{48}$$

$$7.3-9 \quad R_a = R_d = \frac{2qL}{5} \quad R_b = R_c = \frac{11qL}{10}$$

$$7.3-11 \quad R_a = \frac{13qL}{30} \quad R_b = \frac{13qL}{20} \quad R_c = -\frac{qL}{10} \quad R_d = \frac{qL}{60}$$

$$7.3-12 \quad \Delta = \frac{7qL^4}{72EI}$$

$$7.3-13 \quad H_a = qL \quad V_a = -V_b = \frac{qL}{8} \quad M_a = \frac{3qL^2}{8}$$

$$7.3-14 \quad M_a = \frac{4EI\theta}{L} \quad M_b = \frac{2EI\theta}{L} \quad R_a = -R_b = \frac{6EI\theta}{L^2}$$

$$7.3-15 \quad M_a = M_b = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad R_a = -R_b = \frac{12EI\Delta}{L^3}$$

$$7.4-4 \quad R_a = \frac{4P}{3} \quad R_b = \frac{2P}{3} \quad M_a = \frac{PL}{3}$$

$$7.4-6 \quad \delta = \frac{qL^4}{384EI}$$

$$7.4-7 \quad R_a = R_b = P \quad M_a = M_b = \frac{Pa(L-a)}{L}$$

$$7.4-8 \quad M_a = M_b = \frac{5PL}{48}$$

$$7.5-1 \quad R_b = 0.386qL$$

$$7.5-2 \quad M_a = 0.0540q_0L^2$$

$$7.5-3 \quad M_a = M_b = \frac{PL}{8}$$

$$7.5-4 \quad R_b = 1.99qL$$

$$7.6-3 \quad M = -\frac{qL^2}{8} + \frac{3EI\Delta}{L^2}$$

$$7.6-4 \quad M_2 = M_3 = -\frac{3PL}{20} \quad R_1 = R_4 = \frac{7P}{20} \quad R_2 = R_3 = \frac{23P}{20}$$

$$7.6-5 \quad M_2 = -\frac{qL^2}{15} \quad M_3 = \frac{qL^2}{60}$$

$$7.6-6 \quad M_2 = M_4 = -\frac{3qL^2}{28} \quad M_3 = -\frac{qL^2}{14}$$

$$R_1 = R_5 = \frac{11qL}{28} \quad R_2 = R_4 = \frac{8qL}{7} \quad R_3 = \frac{13qL}{14}$$

$$7.6-7 \quad M_1 = -15 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_2 = -24.9 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_3 = -38.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$7.6-8 \quad M_1 = 3M_2 = -\frac{3qL^2}{28}$$

$$7.6-9 \quad M_2 = M_7 = -\frac{qL^2}{284} \quad M_3 = M_4 = \frac{qL^2}{71}$$

$$M_1 = M_6 = -\frac{15qL^2}{284}$$

$$7.6-10 \quad M_1 = -277 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_2 = -167 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_3 = 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$7.7-1 \quad M_a = R_a L = -R_b L = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{2h}$$

$$7.7-2 \quad R_b = -2R_a = -2R_c = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{hL}$$

$$7.7-3 \quad S = \frac{48EIAH\alpha T}{AL^3 + 48IH}$$

$$7.8-1 \quad \lambda = \frac{17q^2 L^3}{40320E^2 I^2}$$

$$7.8-2 \quad H = \frac{\alpha^2 EA \delta^2}{4L^2}$$

$$8.1-2 \quad \beta = 75^\circ 58' \quad \sigma_{\max} = 11.31 \text{ N/mm}^2$$

$$8.1-3 \quad \text{长短轴分别为 } \frac{PL^3}{3EI_x} \text{ 和 } \frac{PL^3}{3EI_y} \text{ 的椭圆.}$$

$$8.1-4 \quad \sigma_{\max} = 8 \text{ N/mm}^2$$

$$8.1-5 \quad \sigma_{\max} = 5.09 \text{ N/mm}^2$$

$$8.1-6 \quad \sigma_{\max} = 119 \text{ N/mm}^2 \quad \delta = 19.11 \text{ mm}$$

$$8.1-7 \quad \sigma_{\max} = 4.624 \text{ N/mm}^2 \quad \delta_y = 3.41 \text{ mm}$$

$$8.1-8 \quad \sigma_{\max} = 7.803 \text{ N/mm}^2 \quad \delta_y = 13.47 \text{ mm} \quad \delta_H = 6.87 \text{ mm}$$

$$8.2-1 \quad M_{\max} = \frac{\pi r^3 \sigma_a}{8}$$

$$8.2-2 \quad \sigma_1 = 97 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_2 = -47.4 \text{ N/mm}^2$$

$$8.2-3 \quad \sigma_a = -\sigma_b = \frac{24M_2}{bh^2} \quad \sigma_d = 0 \quad CD \text{ 连线即为中性轴.}$$



- 8.2-4  $\sigma_{\max} = 71.1 \text{ N/mm}^2$
- 8.2-5  $\sigma_o = 160 \text{ N/mm}^2$
- 8.2-6  $M_{\max} = 4.85 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- 8.2-7  $\sigma_{\max} = 35.2 \text{ N/mm}^2$  在 B 点处
- 8.4-1 (a)  $\tau_{\max} = 1.27 \text{ N/mm}^2$  (向上)  
(b)  $\tau_b = 0.112 \text{ N/mm}^2$  (向左)
- 8.4-3  $\tau_{\max} = \frac{3P}{4bt_f}$
- 8.4-4  $\tau_{\max} = \frac{3b_1^3 P}{2(t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3)}$
- 8.4-5  $\tau_{\max} = \frac{3P}{2t_1 b_1}$
- 8.5-1  $\tau_1 = 11.7 \text{ N/mm}^2$   $\tau_2 = 20.9 \text{ N/mm}^2$   
 $\tau_{\max} = 33 \text{ N/mm}^2$   $e = 25.8 \text{ mm}$
- 8.5-3  $e = \frac{2r(\sin \beta - \beta \cos \beta)}{\beta - \sin \beta \cos \beta}$
- 8.5-4  $e = \frac{3(b_2^2 - b_1^2)}{h + 6(b_1 + b_2)}$
- 8.5-5  $e = \frac{4r^2 + 2b^2 + 2\pi br}{4b + \pi r}$
- 8.5-6  $e = \frac{3b^2(h_1^2 + h_2^2)}{h_2^2 + 6b(h_1^2 + h_2^2)}$
- 8.5-7  $e = \frac{b(2h + 3b)}{2h + 6b}$
- 8.5-8  $e = \frac{b(2h + 3b)}{8h + 6b}$
- 8.5-9  $e = \frac{b(3bh^2 + 6ah^2 - 8a^3)}{h^3 + 6bh^2 + 6ah^2 + 8a^3 - 12a^2h}$
- 8.5-10  $e = \frac{b(3bh^2 + 6ah^2 - 8a^3)}{h^3 + 6bh^2 + 6ah^2 + 8a^3 + 12a^2h}$
- 8.5-11  $\sigma_t = 52 \text{ N/mm}^2$   $\sigma_c = -67 \text{ N/mm}^2$
- 9.3-1  $M_P = 969 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- 9.3-2  $h_1 = 75 \text{ mm}$   $M_P = 289 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- 9.3-3  $Z = 616 \times 10^3 \text{ mm}^3$
- 9.3-4  $M_P = 112 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- 9.3-5  $f = \frac{16}{3\sigma} \approx 1.70$
- 9.3-6  $f = 2$

- 9.3-7 (a)  $f = \frac{16r_1}{3\pi} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^4 - r_2^4}$  (b)  $f = \frac{4}{\pi} \approx 1.27$
- 9.3-8  $f = 1.13$
- 9.3-9  $e = h\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{M}{2M_y}}$
- 9.3-10 (a)  $M = 1.737 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{mm}$   
(b)  $\kappa = 7.52 \times 10^{-2} / \text{mm}$
- 9.3-11  $\frac{M}{M_y} = 2 - 2\left(\frac{\kappa_y}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_y}{\kappa}\right)^3$
- 9.4-1  $L_p = L\sqrt{1 - 1/f}$
- 9.5-1 (a)  $P_u = \frac{M_p}{L}$  (b)  $P_u = \frac{3M_p}{L}$
- 9.5-2  $q_u = 156 \text{ kN/m}$
- 9.5-3 (a)  $\frac{d_1}{d_2} = \left(1 - \frac{b}{L}\right)^{1/3}$  (b)  $b = 0.535L$
- 9.5-4 (a)  $P_u = \frac{M_p(2L - b)}{b(L - b)}$  (b)  $b = 0.586L$
- 9.5-5 (a)  $P_u = \frac{8M_p}{L}$  (b)  $\frac{P_u}{P_y} = \frac{M_p}{M_y}$
- 9.5-6 (a)  $q_u = \frac{16M_p}{L^2}$  (b)  $\frac{q_u}{q_y} = \frac{4M_p}{3M_y}$
- 9.5-7  $P_u = \frac{4M_p}{L}$
- 9.5-8 (a) 对于  $\beta > 1/4$ ,  $P_u = \frac{2M_p}{\beta L}$ ; 对于  $\beta \leq \frac{1}{4}$ ,  $P_u = \frac{6M_p}{(1 - \beta)L}$   
(b)  $\beta = \frac{1}{4}$
- 9.5-9  $P_u = \frac{9M_p}{2L}$
- 9.5-10 (a)  $q_u = \frac{16M_p}{L^2}$  ( $\beta = \frac{2}{3}$ ) (b)  $q_u = \frac{11.66M_p}{L^2}$  ( $\beta = 1$ )
- 9.5-11  $P_u = \frac{16M_p}{3L}$
- 9.5-12  $P_u = \frac{4M_p}{R}$
- 9.7-1  $M = 2.79 \text{ kN}\cdot\text{m}$
- 9.7-2 (a)  $h_1 = 187.5 \text{ mm}$ ;  $h_2 = 112.5 \text{ mm}$   
(b)  $\sigma_1 = 6.4 \text{ N/mm}^2$ ;  $\sigma_2 = 10.67 \text{ N/mm}^2$   
(c)  $\rho = 263.7 \text{ m}$
- 9.7-3  $M_{\max} = 220 \text{ kN}\cdot\text{m}$

- 9.7-4  $M = \frac{bh^2}{6} (B_1 \epsilon_1) \left( 1 - \frac{3B_2 \epsilon_1}{4B_1} \right)$
- 9.7-6  $M = \frac{\sigma_1 bh^2}{6} \frac{3m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}$
- 9.7-7  $\theta = \frac{50P^2L^3}{3B^2b^2h^5} \quad \delta = \frac{25P^2L^4}{2B^2b^2h^6}$
- 9.8-1 (b)  $\frac{\sigma_u}{2}$  (c)  $-\sigma_u$  (d)  $M_p; 1.5$
- 9.8-2 (a)  $M = M_u(1+\beta)$  (b)  $0 \leq \beta \leq \frac{M_p}{M_u} - 1$
- 10.1-2  $\delta = e(\sec kL - 1) \quad M_{\max} = Pe \sec kL$
- 10.1-3  $\sigma_o = 99.6 \text{ N/mm}^2$
- 10.1-4  $\sigma_o = 94.9 \text{ N/mm}^2$
- 10.1-5  $\delta = 3.26 \text{ mm} \quad \sigma_t = 17.27 \text{ N/mm}^2$   
 $\sigma_o = 17.1 \text{ N/mm}^2$
- 10.1-6  $P_v = 823.2 \text{ kN}$
- 10.1-7  $P_v = 19 \text{ kN}$
- 10.2-3  $\frac{P_c}{P_s} = \frac{3}{\pi} = 0.955$
- 10.2-4  $P_{cr} = 1546 \text{ kN}$
- 10.2-5  $P_{cr} = 370 \text{ kN}$
- 10.2-6  $P_{cr} = 2003 \text{ kN}$
- 10.2-7  $\Delta T = \frac{\sigma^2 I}{\alpha AL^2}$
- 10.2-8 W356  $\times$  116
- 10.2-9 L127  $\times$  127  $\times$  8
- 10.2-10  $t = 4.3 \text{ mm}$
- 10.2-11  $Q = \frac{3\sigma^2 EI}{4H^2}$
- 10.2-12  $P_{cr} = 36.1 EI/L^2$
- 10.2-13  $\theta = \arctan(\cot^2 \beta)$
- 10.3-1  $L = 717 \text{ mm}$
- 10.3-2  $\sigma_{cr} = 45.7 \text{ N/mm}^2$
- 10.3-3  $L = 1.24 \text{ m}$
- 10.3-4  $\sigma_{cr} = 137 \text{ N/mm}^2$
- 10.3-5  $51.4 \text{ N/mm}^2, 32.9 \text{ N/mm}^2, 22.8 \text{ N/mm}^2$
- 10.3-6  $\sigma_{cr} = 141.82 \text{ N/mm}^2 \quad P = 840 \text{ kN}$
- 10.3-7  $L = 6.4 \text{ m}$

10.4-1 在方程(10-12)中用  $L$  替换  $\frac{L}{2}$

10.4-2  $\sigma_{\max} = 139 \text{ N/mm}^2$   $n = 1.90$

10.4-3  $P = 39.5 \text{ kN}$

10.4-4  $P = 477.75 \text{ kN}$

10.4-5  $P = 94.5 \text{ kN}$

10.4-6  $P_2 = 303.68 \text{ kN}$

10.5-2 在方程(10-17)中由  $\frac{a\sqrt{3}}{L}$  替换  $\frac{a}{L}$

10.5-3  $\sigma_{\max} = 170.9 \text{ N/mm}^2$   $n = 1.323$

10.5-4  $P = 125.5 \text{ kN}$

10.5-5  $P = 75.1 \text{ kN}$

10.6-1  $P = 2151 \text{ kN}$

10.6-2  $P = 1039 \text{ kN}, 625 \text{ kN}, 281 \text{ kN}$

10.6-3  $L = 4350 \text{ mm}$

11.3-1  $\delta_v = \frac{2PL}{EA}$  (向下)  $\delta_H = 0$

$$\theta_{\text{总}} = \frac{\sqrt{3}P}{EA} \text{ (顺时针方向)}$$

11.3-2  $\delta_v = \alpha L(\Delta T)$  (向下)

$$\delta_H = \frac{\alpha L(\Delta T)}{\sqrt{3}} \text{ (向右)}$$

$$\theta_{\text{总}} = \frac{\alpha(\Delta T)}{\sqrt{3}} \text{ (顺时针方向)}$$

11.3-3  $\delta_v = 0.21 \text{ mm}$  (向下)  $\delta_H = 0.12 \text{ mm}$  (向右)

11.3-4  $7.20 \text{ mm}$

11.3-5  $\delta_v = 6.22 \frac{Pb}{EA}$  (向下)

11.3-6  $1.85 \frac{Pb}{EA}$

11.3-7  $\delta_v = 2.33 \text{ mm}$  (向下)  $\delta_H = 0.742 \text{ mm}$  (朝右)

$$\theta_{\text{总}} = 3.96 \times 10^{-6} \text{ rad} \text{ (逆时针方向)}$$

11.3-8  $0.0375 \text{ mm}$

11.3-11  $\delta = \frac{2PL^2}{9EI}$   $\theta = \frac{5PL^2}{18EI}$

11.3-12  $\delta_c = \frac{Pb^2(L+b)}{3EI}$   $\theta_c = \frac{Pb(2L+3b)}{6EI}$

11.3-13  $\delta = \frac{PbL^2}{16EI}$   $\theta = \frac{PbL}{6EI}$

- 11.3-14  $\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)(L + 2b)}{2h}$  (逆时针方向)
- 11.3-18  $\delta = \frac{2PL^3}{3EI}$
- 11.3-19  $\delta_H = \frac{PHL^2}{8EI_2}$  (朝左)  $\theta = \frac{PL^2}{16EI_2}$  (顺时针方向)
- 11.3-20  $\delta_H = \frac{2QH^3}{3EI_1} + \frac{QLH^2}{EI_2}$   $\theta = \frac{QH^2}{2EI_1} + \frac{QHL}{2EI_2}$
- 11.3-21  $\theta = \frac{33Pb^2}{2EI}$
- 11.3-22  $\Delta = \frac{2PI^3 \sin^2 \beta}{3EI} + \frac{2PL \cos^2 \beta}{EA}$
- 11.3-23  $\delta_H = \frac{\alpha H^2(T_2 - T_1)}{2h}$  (朝左)  
 $\delta_V = \frac{\alpha L(L + 2H)(T_2 - T_1)}{2h}$  (向上)  
 $\theta = \frac{\alpha(H + L)(T_2 - T_1)}{h}$  (逆时针方向)
- 11.3-24  $\delta = \frac{PL^3(n)(4n^2 + 3n + 1)}{6EI}$
- 11.3-25  $\delta_V = \frac{\pi PR^3}{4EI}$   $\theta = \frac{PR^2}{EI}$
- 11.3-26  $\delta_V = \frac{3\pi PR^3}{2EI}$
- 11.3-27  $\Delta = \frac{P}{6EI} (4L^3 + 6\pi L^2 R + 24LR^2 + 3\pi R^3)$
- 11.3-28  $M_{\max} = \frac{2EIe}{3\pi R^2}$
- 11.3-29  $\delta_V = \frac{\pi PR^3}{4EI} + \frac{(3\pi - 8)PR^3}{4GJ}$
- 11.3-30  $\phi = \frac{\pi PR^2}{4EI} + \frac{(\pi - 4)PR^2}{4GJ}$
- 11.3-31  $\delta = 52.2 \text{ mm}$   $\phi = 0.0099 \text{ rad}$
- 11.3-32  $\Delta = \frac{5PL^3}{6EI} + \frac{3PL^3}{2GJ}$
- 11.6-1  $X_1 = \frac{3PL}{28}$   $X_2 = \frac{17P}{14}$
- 11.6-2  $X_1 = -\frac{5qL^2}{608}$   $X_2 = -\frac{33qL^2}{152}$
- 11.6-3  $X_2 = 2X_1 = -\frac{qL^2}{12}$
- 11.6-4  $N_1 = N_2 = N_3 = 0.396P$   $N_4 = -0.604P$

$$N_5 = 0.854P \quad N_6 = -0.561P$$

$$11.6-5 \quad N_{ac} = -95.5 \text{ kN}$$

$$11.6-6 \quad X_1 = -0.521P \quad X_2 = -0.376P$$

$$11.6-7 \quad X_1 = 1.826 \text{ kN} \quad X_2 = 0.336 \text{ kN}$$

$$11.6-8 \quad R_c = \frac{3qL}{8} \frac{L+4H}{L+3H}$$

$$11.6-9 \quad R_1 = R_4 = \frac{Pb(L-b)}{2HL} \frac{3LI_2}{3LI_2+2HI_1}$$

$$R_2 = \frac{P(L-b)}{L} \quad R_3 = \frac{Pb}{L}$$

$$11.6-10 \quad H_a = \frac{P}{8} \quad V_a = \frac{P}{2} \quad M_a = -\frac{PL}{24}$$

$$11.6-11 \quad H_a = -\frac{P}{2} \quad V_a = \frac{3P}{14} \quad M_a = \frac{PL}{7}$$

$$11.6-12 \quad M_a = \frac{PR}{2} \left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) \quad M_b = \frac{PR}{\sigma}$$

$$11.6-13 \quad H_a = 28 \text{ kN} \quad V_a = 22.8 \text{ kN} \quad M_a = 66.69 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$11.7-1 \quad D = \frac{PL^3}{12EI} \text{ (向下)} \quad M_b = \frac{5PL}{18}$$

$$11.7-2 \quad D_1 = \frac{3PL^2}{16EI} \quad D_2 = -\frac{3PL^2}{32EI} \quad R_a = \frac{13P}{8} \quad M_a = \frac{PL}{2}$$

$$11.7-3 \quad D_1 = -\frac{PL^2}{36EI} \quad D_2 = -\frac{5PL^2}{36EI}$$

$$M_a = \frac{5PL}{72} \quad M_c = -\frac{7PL}{72}$$

$$11.7-4 \quad D = \frac{PL^2H}{32EI(L+H)} \quad R_1 = \frac{3PL^2}{16H(L+H)}$$

$$R_2 = \frac{P(8L+11H)}{16(L+H)} \quad M_1 = \frac{PL(2L+3H)}{16(L+H)}$$

$$11.7-5 \quad R_a = \frac{37P}{60} \quad R_b = \frac{49P}{120} \quad R_c = \frac{23P}{60} \quad M_a = \frac{59PL}{360}$$

$$11.7-6 \quad R_a = \frac{39P}{64} \quad R_b = \frac{1049P}{576} \quad R_c = \frac{427P}{576} \quad M_a = \frac{31PL}{192}$$

$$11.7-7 \quad H_a = \frac{27P}{448} \quad V_a = \frac{31P}{56} \quad M_a = \frac{PL}{7}$$

$$H_a = -\frac{27P}{224} \quad V_a = \frac{3P}{2} \quad M_a = \frac{3PL}{112}$$

$$11.7-8 \quad R_1 = \frac{45qL}{28} \quad R_2 = -\frac{3qL}{7}$$

$$11.9-1 \quad (a) \quad U = \frac{EA\delta^2}{2L} (1+2\cos^2\beta)$$

$$(b) \delta = \frac{PL}{EA} \frac{1}{1+2\cos^3\beta}$$

$$(c) N_{aa} = N_{ca} = \frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta} \quad N_{ba} = \frac{P}{1+2\cos^3\beta}$$

$$11.11-1 \quad (a) \delta = \frac{PL^3}{64EI} \quad (b) \delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$11.11-2 \quad (a) \delta = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \quad (b) \delta = \frac{968qL^4}{243\pi^5 EI}$$

$$11.11-3 \quad \delta = \frac{PL^3}{2\pi^4 EI}$$

$$11.11-4 \quad (a) \delta = \frac{PL^3}{96EI} \quad (b) \delta = \frac{PL^3}{90EI}$$

$$11.11-6 \quad (a) P_{cr} = \frac{12EI}{L^2} \quad (b) P_{cr} = \frac{168EI}{17L^2}$$

$$11.11-7 \quad P_{cr} = 1.82 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$11.12-3 \quad \delta = \frac{L}{B\sin\beta} \left( \frac{P}{2A\sin\beta} \right)^n$$

$$11.12-6 \quad \delta = \frac{\gamma^n L^{n+1}}{B(n+1)}$$

$$A.2-1 \quad \bar{y} = 27.5 \text{ mm}$$

$$A.2-2 \quad c^2 = \frac{ab}{2}$$

$$A.2-3 \quad \bar{x} = \bar{y} = \frac{5a}{12}$$

$$A.2-4 \quad \bar{x} = 49.5 \text{ mm} \quad \bar{y} = 24.5 \text{ mm}$$

$$A.3-2 \quad I = \frac{bh^3}{4}$$

$$A.3-3 \quad I = \frac{a^4}{12}$$

$$A.3-5 \quad I = \frac{a^3 b^3}{6(a^2 + b^2)}$$

$$A.3-6 \quad r_x = \frac{h}{2\sqrt{3}} \quad r_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

$$A.4-2 \quad J = \frac{bh}{48} (b^2 + 12h^2)$$

$$A.5-2 \quad J = \frac{\pi ab}{4} (b^2 + 5a^2)$$

$$A.5-3 \quad I = (4h^4 - 3h^2 h_1^2 - h_1^4) / 12$$

$$A.5-4 \quad I = 413 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A.5-5 \quad I = 6.86 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{A. 6-1} \quad I_{xy} = \frac{r^4}{8}$$

$$\text{A. 6-2} \quad I_{xy} = \frac{r^4}{8}$$

$$\text{A. 6-3} \quad b = 2r$$

$$\text{A. 6-4} \quad I_{xy} = 3.03 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{A. 6-5} \quad I_{12} = -8.70 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{A. 7-1} \quad I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{b^4}{12} \quad I_{x_1 y_1} = 0$$

$$\text{A. 7-2} \quad I_{x_1} = \frac{a^3 b^3}{6(a^2 + b^2)} \quad I_{y_1} = \frac{ab(a^4 + b^4)}{12(a^2 + b^2)}$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{12(a^2 + b^2)}$$

$$\text{A. 8-1} \quad \theta_p = -60^\circ 08', \quad I_2 = 34.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta_p = 150^\circ 08', \quad I_1 = 121.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{A. 8-2} \quad \theta_p = 13^\circ 31', \quad I_2 = 7.78 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta_p = 103^\circ 31', \quad I_1 = 29.72 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{A. 8-3} \quad \theta_p = 67^\circ 30', \quad I_1 = 13.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta_p = 157^\circ 30', \quad I_2 = 2.58 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{A. 8-4} \quad \theta_p = 75^\circ 38', \quad I_1 = 3.65 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta_p = 165^\circ 38', \quad I_2 = 0.39 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{A. 8-5} \quad \theta_p = 22^\circ 09', \quad I_1 = 110.39 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta_p = 112^\circ 09', \quad I_2 = 9.73 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{A. 8-6} \quad \theta_p = 31^\circ 37', \quad I_1 = .92 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta_p = 121^\circ 37', \quad I_2 = 1.13 \times 10^6 \text{ mm}^4$$