譯　序

本書原著是鐵摩先可關於大學基本力學課程的著名文獻，在資本主義世界中是一本被推崇爲「經典著作」的教材。很顯然，這樣一本著作對我們學習工業科學的基本理論是有鉅大的參攷價值的。

當初譯這本書是出於教學上的需要。一九四九年秋，譯者在同濟大學機械系教「動力學」，需要一本講義，先譯了本書的下册；第二年，在原校土木系開「靜力學」課，才補譯出上册。初稿完成後，曾送請中央人民政府出版總署編譯局審查。審訂後，編譯局曾給予極大的支持，使這本書能夠出版，譯者在此謹致衷心的感謝

本書書名，就內容而論，應稱爲「工程剛體力學」。但這一叫法不通行，所以還是照原著書名直譯爲「工程力學」。工程力學這一門課程，根據一九五〇年中央頒發的「高等學校理工學院各系課程暫行規程(草案)」，應包括材料力學在內。而且，眞正要「循名責實」的話，那末「工程力學」或者以前流行的名稱——「應用力學」就幾乎應該包括工科的全部力學課程(材料力學、流體力學、熱力學……)。所以本書的書名是不夠確切的。至於目前將這門課程改稱爲「理論力學」的說法，顯然也還有可商榷的地方。如果是爲了說明這門課程的基礎性質，恐怕還是稱之爲「基本力學」相宜些。

關於本書的譯文方面有兩點需要說明：原著所用的單位系統是英美呎磅制，譯文中已全部換算成公制單位。再，原著中有一小部份習題，譯文中已做了解答，改爲例題，目的是增強本書的參攷作用，以便於自學。

本書錯誤或不妥當的地方，希望讀者多多指正。

江可宗

一九五一年八月，上海。

原　序

力學對於工科學生的重要，那是無論如何強調都不會過份的。現代工業固然需要許多受過專業訓練的人員，但是更需要大量的在基本知識方面有鞏固基礎的青年。這是一種很合理的趨勢。工業上不斷有很多新的問題發生。這種新問題當然不是應用任何固定的方法所能應付的。工程人員要能夠正確地處理這種問題，就必須對引用的基本理論有透澈的了解，通曉各種解決問題的一般方法；單單熟悉於一定方法的運用，自然是不夠的。因此，在大學課程中，像"工程力學"這樣一門基本學科的教學，就必須給學生建立一個鞏固的理論基礎；儘可能提示多種多樣的處理問題的一般方法，並且使這些方法跟實際應用密切結合；避免使學生只熟練於一些典型方法的運用。這就是本書的目的。

本書內容比兩學期三小時的教材要廣泛一些。例如，"靜力學"中有幾節研究平面和空間剛架的理論；"動力學"中有幾節討論到振動問題。目的是使學生進一步學習"結構原理"和"機械設計"時，能夠對力學理論跟應用間的聯繫有較深刻的理解。上册最後一章並且討論了虛位移原理。應用這一原理來解決靜力學中某些問題可以使手續大爲簡化，所以專設一章讓學生認識這一可能性，似乎不無必要。下册最後一章說明相對運動的理論及應用。假若教學時間不足，這些章節都可以略去不教，對全書的連貫性並無影響。即使省略不教，這些材料的存在至少可以讓初學者知道，力學內容他並不會全部學完。除此之外，還希望這些材料能夠對學習力學特別有興趣的學生有所幫助。

一般工業大學多數在二年級第二學期講授"靜力學"。這一學期中，學生還沒有學完"積分"，所以本書"靜力學"篇除掉少數可以省略的章節外，都不需"微分"以上的數學知識。但是這一範圍以內的數學方法，那就毫無限制地使用。"靜力學"可能是應用高等數學的最初一門課程，我們僅僅給學生一個練習的機會是不夠的，應該儘量鼓勵他們在學習中充分地應用已學得的數學知識。

"動力學"的情形完全不同。有些大學這門課程並不緊接着"靜力學",而是排在"材料力學"之後。學生在學習上已經成熟得多,因此我們可以儘量應用微積分,甚至一些簡單的微分方程式。對於每一微分方程式,本書都有相當詳細的解法說明,使沒有學習過的學生也不致發生理解上的困難。

下册中,運動方程式完全用微分方程式來表示。由於"動力學"是一門需要深入鑽研的學科,命題方式如果任意簡化,就容易使初學者孕育錯誤的觀念。此外,利用微分方程式還有底下幾層好處:(1)使學生一開始學習就能着重於分清動力學中已知運動和已知作用力兩類問題的基本區別。(2)使某些動力學問題(例如,振動問題)可以作比較深入的討論。不用微分方程式的話,深入討論這些問題是不可能的,至少也是繁複不堪的。(3)可以給學生建立一個良好的動力學根砥。這樣,他們如果希望進一步學習較深的力學或閱讀現代力學文獻時,就具有基礎了。

因爲要獲得力學的基礎知識非演算習題不可,所以本書對於例題和習題的選擇特別注意。所有例題都有詳細的解答。這些例題有兩個目的:第一,利用例題的解答來補充正文中一些未加討論的材料。第二,用例題來指示處理實際工程問題所應遵循的推理途徑。因此,讀者對於例題,應該跟對於習題一樣,同樣加以重視。

解決一個力學問題一般分爲三階段:(1)排除掉實際問題中存在的不需要考慮的具體條件,使問題抽象到可以純粹用算學或幾何方式來表現。(2)解答這一純粹的算學或幾何問題,得到數學上的結果。(3)把所得的數學結果引回到原來問題中去,把它解釋爲實際問題的結論。初學者解決問題往往只注意到第二階段爲止,以致看不清計算結果跟具體問題的聯繫。本書每一例題的演算都按以上三階段發展,希望能導致讀者充分認識每一個力學問題的完整意義,並鼓勵他按照類似的步驟去處理問題。

本書的例題大多數用代數式計算;最後的答案往往只是一個代數公式。假使題中給有數值,也只將數值代入答案中以計算結果。這樣做法有很多好處:首先,答案可以用可靠的複核方法來複核。最好的複

核方法中有兩種最常用：一種是"因次考核"；另一種是考察所得結果如果引用到一定的極限情形之下，是否與常理符合。假使演算問題一開始就用數值計算，而不用代數式，那末這兩種複核方法都將無法應用。其次就是代數式結果容易解釋爲實際問題的具體結論，大大增加了解題工作進入第三階段的可能。最後，就求數值結果而論，也是以應用代數式答案爲好；因爲只有在代數式中才能按照答案應達到的精確度來確定計算中各數值的有效位數。

本書的習題按難易程度排列，逐漸由淺入深。其中有些難的習題是足夠考驗讀者的思考和分析能力的。本書選擇習題注重題目的意義和趣味性，避免重複繁多。絕大多數的習題雖然都具有工程上的現實性，但是並非以此爲選題條件。一個問題是否會發生實際意義是任何人都無法預見的。

本書這次修訂的目的主要在於縮減第一版的篇幅。縮減辦法首先是把第一版中小字排印的章節删掉。其次是把一部份章節加以修改或全部重寫，使內容更簡明。最後，剔除一些冗長的學院式例題，也減少了不少篇幅。

此外，跟縮減篇幅無關的修訂，也有兩點值得注意：第一，"動力學"中第一章"質點的運動幾何"已全部删除，其中包括的材料已分別編入之後的三章內。第二，"旋轉運動"一章中關於"惰矩"部份也已完全抽出；改在書後增添兩章"附錄"來討論：(1)平面圖形的惰矩，(2)物體的質量惰矩。

編著本書時，尤其是挑選例題和習題時，曾經參考過很多教本。有不少的例題和習題採自鐵木先可參加編纂的"力學問題彙編*"一書。此外，密西根大學的舊同事和斯丹福大學各同人都對本書提供了許多寶貴的意見。作者在此一併致謝。

S. Timoshenko,
D. H. Young.

---

* 原名"Collection of Problems of Mechanics", 1913年由J. V. Mestscherski, St. Petersberg出版。

本書應用的符號

A	面積
a	加速度，半徑
a_n	法線加速度
a_r	相對加速度
a_s	補加速度
a_t	切線加速度，參考系加速度
B	彈力彎矩常數
C	積分常數
c	阻尼係數
cm	公分
a,b,c	尺度
D	直徑
d	直徑，力臂
E	彈性模數
e	偏心率，復形係數，自然對數的底
F	作用力，摩阻力
f	週率，索鍊的彎落（矢高）
G	剪力彈性模數
g	地心加速度
H	極點距離，索鍊的水平張力
h	高度，厚度
I	惰矩或惰矩積
I_x,I_y,I_z	惰矩
I_{xy},I_{xz},I_{yz}	惰矩積
i	惰矩半徑（旋轉半徑），$\sqrt{-1}$，次序指數
J	面積極惰矩
j	節點數

K	一般常數
k	彈力常數
kg	公斤
L	曲線長度
l	跨度
M	力矩
$\boldsymbol{M}$	動量矩，角動量
m	質量
m	公尺
N	法線分力
n	任意數，每分鐘轉數
P	作用力
p	週率因子
Q	作用力
q	單位長度的重量
R	合力，反作用力，半徑
r	半徑，射程
S	張力或壓力
s	距離
s	秒
T	切線分力
t	時間
U	動能
V	位能，體積
v	速度
v_r	相對速度
v_t	參考系速度
W	重量，重力
w	單位體積重量
u, v, w	正交坐標系坐標值
X, Y, Z	作用力在坐標軸方向的投影
x, y, z	正交絕對坐標系坐標值

本書應用的符號

$\dot{x},\dot{y},\dot{z}$	速度在坐標軸方向的投影
$\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$	加速度在坐標軸方向的投影
α	角加速度，相角
β	放大因數
γ	阻尼因數
α,β,γ	方向角·方向餘弦
δ	變形
δ_{st}	靜力變形
$\delta x,\delta y,\delta z$	虛位移在坐標軸方向的投影
θ	旋轉角
$\dot{\theta}$	角速度
$\ddot{\theta}$	角加速度
μ	摩阻係數
π	3.1416
ρ	曲率半徑
ρ,θ	平面極坐標
σ	應力
τ	週期
ξ,η,ζ	正交相對坐標系坐標值
φ	摩阻角
θ,ψ,φ	角
ω	角速度
$\overline{AB},\overline{v}$，等	向量

內　容

譯序

原序

本書應用的符號

上册　靜力學

第一章　靜力學原理……1

1. 導論……1
2. 力……2
3. 力的平行四邊形原理……3
4. 力的傳導性……6
5. 作用力及反作用力……8
6. 力系的分類……11

第二章　平面共點力系……14

7. 力的合成……14
8. 力的分解……16
9. 平面共點力系的平衡……18
10. 平面三力的平衡……23
11. 索鏈……28
12. 摩阻力……30
13. 投影法……35
14. 力對於一定點的力矩……41
15. 力矩的合成定理……42
16. 力矩法……43
17. 簡單桁架……47
18. 節點分析法……51
19. 綜合力圖……56

第三章　平面平行力系……61

20. 同方向平行力……61
21. 兩方向相反的不等平行力……64

22. 力偶……66
23. 一般的平面平行力系……70
24. 平行力中心……77
25. 重心及形心……79
26. 旋轉面和旋轉體的形心……84
27. 平面組合圖形和組合曲綫的形心……86
28. 應用積分求形心位置法……92
29. 平面分佈力……96

第四章 一般的平面力系……101

30. 平面力系的合成……101
31. 投影法和力矩法……102
32. 簡單框架：桿件分析法……107
33. 簡單桁架：切面分析法……111
34. 剛體在平面中的靜定式支承……114
35. 一般的平面分佈力……120
36. 索線圖……123
37. 封閉索線圖……129

第五章 空間共點力系……132

38. 空間共點力系的合成與分解……132
39. 投影法……134
40. 力對於軸線的力矩……139
41. 力矩法……141
42. 空間桁架……144
43. 節點分析法……147

第六章 空間力偶和平行力系……152

44. 平行平面上的力偶……152
45. 相交平面上的力偶……153
46. 力偶的投影法……154
47. 對一點與對通過該點一軸線的力矩間的關係……157
48. 一般的空間平行力系……158
49. 平行力中心及重心……163

第七章 一般的空間力系……168

50. 空間力系的合成……168
51. 投影法和力矩法……170
52. 剛體在空間的靜定支承……176

第八章　虛位移原理……183
53. 導論……183
54. 功……183
55. 一質點的虛位移原理……184
56. 理想系統……186
57. 理想系統的虛位移原理……189
58. 簡單機械的效率……196
59. 穩定平衡與不穩定平衡……200

靜 力 學

第一章 靜力學原理

1. 導論

靜力學研究物體在「力」作用下的平衡條件[1]。它是一門非常古老的科學；它的若干基本原理早在埃及人建金字塔和巴比倫人造神廟時代，已經被用來解決建造中的問題。阿基米得[2]發現了「槓桿原理」和一些流體靜力學的定律：他的遺著就是有關靜力學的最早期文獻之一。雖說如此，但是現代形式的靜力學，它所根據的基本原理的構成，主要還是要歸功於首先應用「力平行四邊形原理」的史狄文納[3]。關於靜力學的演進史實，讀者可參閱馬赫[4]的「力學的發展」[5]一書。

本書「靜力學」所研究的主要對象是剛性物體的平衡問題。所謂剛性指物體在任何外力作用下「各構成部份的相互距離毫不變動」的一種性質。剛性物體通常簡稱爲「剛體」。實際物體像工程設計中所處理的建築結構物、機械原件等，在外力作用下必然多少要發生一些形狀的改變；決不可能是理想的「剛體」。不過多數情形中，這種「形變」十分微小，對於「攷察物體的平衡條件」可以完全忽略不計。所以在靜力學中我們可以認爲所處理的物體就是「絕對」剛體。

必需顧慮實際物體的微小形變所生影響的問題，普通在「材料力學」及「彈性理論」中研究。非剛性物體，如液體及氣體，的平衡問題通常在「流體靜力學」及「空氣靜力學」中研究。本書均不討論。

---

(1) 「平衡」有時指物體的靜止狀態或等速直綫運動狀態（不過，在靜力學中，運動狀態沒有什麼意義）的保持。平衡條件就是物體上各力使物體平衡所必需滿足的條件，因此，「平衡」主要是用來說明平衡的物體上的力與力間的關係。

(2) Archimedes（公元前 287-212）。

(3) Stevinus (1548-1620)。

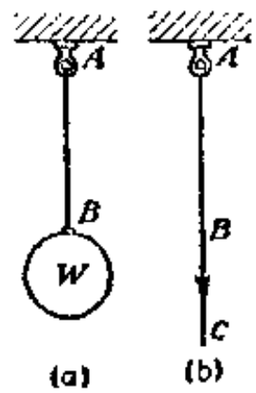
(4) Ernst Mach (1838-1916)，是奧國的物理學家，又是反動的「經驗批判論」的代表者。在自然科學著作中，他經常地反對自己的錯誤觀點；這自然是不足怪的。

(5) Die Mechanik In Ihrer Entwicklung，英譯本叫 Science of Mechanics。

2. 力

處理靜力學問題需要先有一「力」的概念。**在靜力學中,「力」的作用可以當作使所加物體改變靜止狀態的一種原因。** 力的存在形式很多:像熟知的「地心吸力」,我們手作用於物體的推力或拉力。此外,像太陽和行星間的萬有引力、機車的牽引力、磁鐵的吸力、氣缸內的氣體壓力、房屋所受的風力、大氣壓力以及接觸表面間的摩阻力等等都是力的具體形式。

地心吸力是最常見的「力」的一種(以下簡稱重力)。第1a圖中,AB繩下端懸吊一圓球體。圓球受重力作用加一拉力於AB繩。拉力的大小就是圓球的重量。此力作用在繩上B點,方向鉛垂向下。



第1圖

由此例可看出,要完全決定一個「力」,必需已知「力」的:(1)大小,(2)作用點,(3)方向。此三者完全確定一個「力」,所以稱爲「力」的三要素。

力的大小可任擇一「標準單位」來比較決定。工程問題中,「力」的單位爲「公斤」(英制爲「磅」),用保存在法國的一白金柱的重量爲單位標準。力的大小普通用各種「量力計」測量。量力計的主要部份是一螺旋彈簧。用已知重量的物體懸掛在它的彈簧下,記錄彈簧的伸長,刻度後,就可用來測量各種「力」的大小。

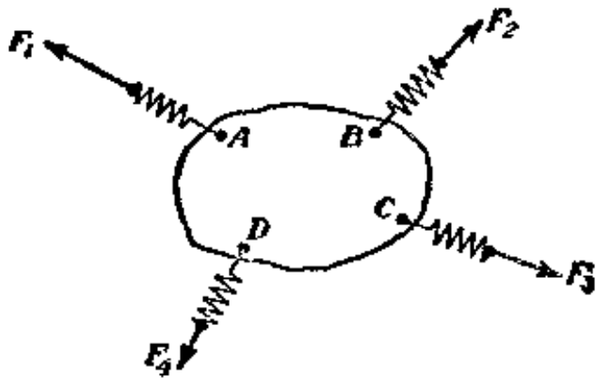
力的作用點是物體上可以想像「力」在此集中作用的一點。實際上,「力」當然不可能集中在一點作用;任何「力」都必需相當面積或體積以資分佈。上例中,作用在AB繩上的W力(第1圖),顯然也是分佈於AB繩的微小橫切面上。同樣,地球加於圓球的重力當然也是分佈於整個球的體積中;不可能集中在一點。不過,「靜力學」所處理的問題只是物體的「平衡條件」,如果我們想像這種分佈力集中在一點作用,並不會顯著地影響物體的「平衡條件」,那爲了簡便,自然就可以這樣想像。物體重力滿佈於物體的整個體積內。全部重力如果可以假定是集中在物體中某一點作用,這點就稱爲物體的「**重心**」。

力的方向指此力單獨作用時,物體因而運動的路線方向。在此方向通過作用點的直線稱爲力的「**作用線**」。物體重力的方向永遠鉛垂

向下，指向地心。一根軟索加於其他物體的「力」，它的作用線就是軟索本身所表示的直線，故第1圖中，掛鈎A所受AB繩的作用就是一鉛垂向下的「力」。

任何一種像「力」一樣的「量」，除開「大小」外還兼具「方向」性的，就稱爲**向量**。向量可以由一根直線線段表示。例如第1b圖，圓球對於AB繩的拉力就可以用BC線段代表。BC的長度按適當的比例尺繪出，代表力的大小。C點鉛垂朝下的箭頭，表示力的方向。B和C點分別稱爲向量的**起點**和**終點**。力的作用點用起點或終點表示均無不可。如以起點和終點的字母記錄向量，那就應按起終的次序寫；第1b圖中的向量應寫作$\overline{BC}$，說明作用方向是由B指向C點。

要使任何數目的已定大小和方向的「力」作用在一物體的各預定點上（不一定平衡），可如第2圖應用「量力計」來做到。這種作用於一物體上的力羣F_1, F_2, F_3, F_4……稱爲一個「**力系**」。物體受一「力系」作用時，一般的靜力學問題就在於尋求使物體平衡，這一力系所必須滿足的條件。



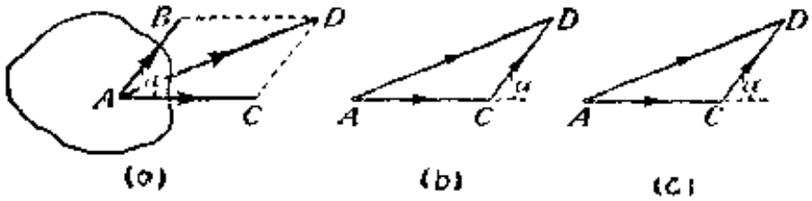
第2圖

3. 力的平行四邊形原理

全部靜力學以以下幾個公設作爲基礎。它們被稱爲靜力學的「基本原理」。不過必須注意的，這幾個公設並非靜力學的唯一可能的出發點；例如阿基米得遺留下來的力學，就是另由「槓桿原理」出發的。此處先說明史狄文納在1586年所提出的第一基本原理。這一原理通常稱爲「**力的平行四邊形原理**」。

第一原理：設有二「力」作用在物體的A點，此二力分別由向量$\overline{AB}$和$\overline{AC}$代表，$\overline{AB}$和$\overline{AC}$互成α角，以$\overline{AB}$和$\overline{AC}$爲鄰邊構成一平行四邊形ABDC，$\overline{AD}$爲此平行四邊形的過A點的對角線，那末原來二「力」的共同作用將完全跟$\overline{AD}$所代表的一個「力」的作用相同。$\overline{AD}$的作

用方向如第 3a 圖.

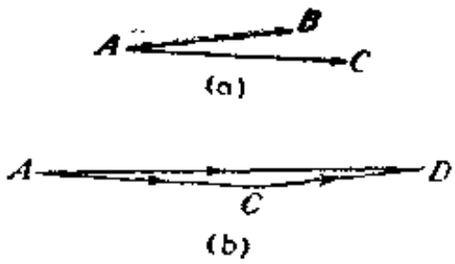


第 3 圖

第一原理中所謂「作用」,自然指各「力」單獨或共同使所加的物體變更靜止狀態的作用。 $\overline{AD}$ 所代表的力稱爲 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 兩力的**合力**; $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 兩力則稱爲 $\overline{AD}$ 力的**分力**。 第一原理說明,合力等於它的全部分力或各分力共同等於它們的合力.

按第 3b 圖應用 ΔACD 來代替平行四邊形,自然也可以決定「合力」: 先繪出 $\overline{AC}$ 力,再自 $\overline{AC}$ 終點繪 $\overline{CD}$ 跟 $\overline{AB}$ 平行並相等,卽得 $\overline{AD}$ 爲所求的合力。合力的方向爲自 $\overline{AC}$ 的起點 A 指向 $\overline{CD}$ 的終點 D。應用這一方法所得的向量 $\overline{AD}$ 稱爲向量 $\overline{AC}$ 及 $\overline{CD}$ 的「**幾何和**」。 這也就是說,作用在物體 A 點的兩力,它們合力的大小和方向還可以由兩力代表向量的「**幾何相加**」來決定。合力的作用點自然仍舊是 A 點。第 3b 圖中,各力幾何相加的「代表向量」不會表示出各力的作用點,所以跟平行四邊形中的代表向量是有所不同的。這種不表示作用點的向量通常稱爲「**分離向量**」或「自由向量」。 ACD 則稱爲「**力三角形**」。

$\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 間的交角如十分微小(如第 4a 圖),力三角形的形狀就將非常扁狹(如第 4b 圖)。 可見在極端情形下,兩力沿同一直線向同一方向作用於物體時,它們的合力也必將沿此同一方向作用,合力的大小則等於原來兩力大小之和。 同樣情形,如果兩力沿同一直線但方向相反作用於物體,那末合力的大小將等於兩力大小之差,方向則跟其中較大的一力相同。 假使命沿作用線的某一方向爲正,另一方向爲負,分別按兩力的作用方向,定出它們各自大小的正負,以上兩結論就可統一爲: 同一作用線的兩力的合力乃等於此兩力的「**代數和**」。

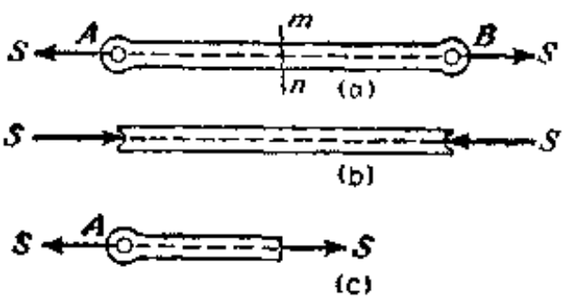


第 4 圖

根據「力的平行四邊形原理」，作用在一點的任意兩力永遠可以由它們的合力來替代。因此，共點兩力只有在合力等於零時才沒有「力」的作用；兩力才能平衡。但由以上討論又可看到：兩共點力的合力要等零，必須兩力作用線相同、大小相等、方向相反才可能。將這結論加以推廣，就可得到靜力學第二原理。

第二原理：兩「力」構成平衡，必須它們的大小相等、方向相反、作用線相同才可能。

工程中最常遇的靜力學問題是「攷察一個切面均一的桿形物體，兩端受兩力作用時的平衡」(如第 5 圖)。這種物體通常簡稱爲「桿件」。如果桿件的本身重量(以下簡稱「自重」)可以忽略不計，根據第二原理，桿件就只有在兩端外力大小相等、方向相反、作用線相同的情形下才能平衡。所謂「兩力的作用線相同」也就是說，兩力必須沿它們兩作用點的連接線作用。假使兩力作用點可以假定都是在桿件的長度方向中心軸上(大多數實際問題中都可如此假定)，那末兩力就必須沿這一長度中心軸(以下簡稱「長軸」)作用。兩力的作用方向如果像第 5a 圖所表示的情形，就稱桿件是受拉力作用；如果像第 5b 圖，則稱爲受壓力作用。



第 5 圖

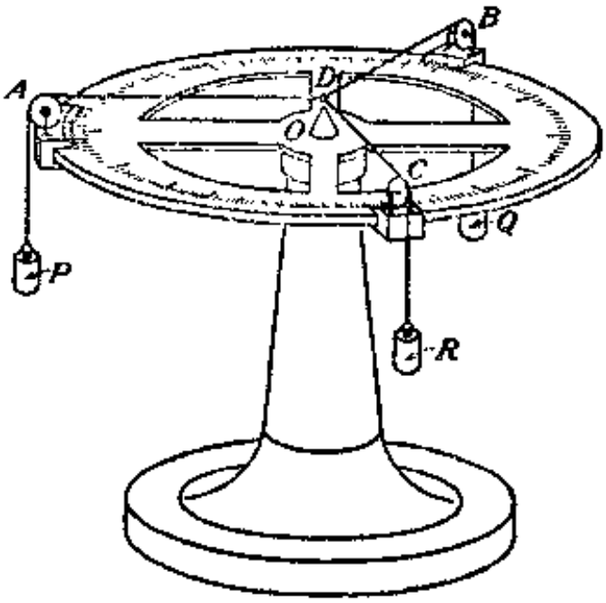
第 5a 圖中，m–n 是桿件 AB 上一個任意擇定的切面。攷察 m–n 左邊一部份桿件，就可看到，要平衡 A 端的外力，必須 m–n 切面右邊部份有一跟 A 端外力 S 相等相反、作用線相同的 S 力作用在左邊部份的切面上(第 5c 圖)；否則便不可能平衡。這種一部份作用在另一部份的內力在受拉力的桿件中稱爲「**張力**」；在受壓力的桿件，則稱爲「**壓力**」。內力分佈於切面的整個面積。單位面積上的內力，也就是內力的強度，通常稱爲「**應力**」。

現在回頭討論兩力互成 α 交角的問題(第 3a 圖)。根據第二原理，如果在 A 點另加一力，跟兩力的合力大小相等、作用線相同、但方向相反，那末這一新加的力就可跟原來兩力構成平衡。這新加的力特稱爲

原來兩力的「平衡力」。

將已知兩力和它們的平衡力一一幾何相加，得第 3c 圖的 ΔACD。此三角形跟第 3b 圖的 ΔACD 有所不同。不同處在 DA 向量的箭頭在兩三角形中恰巧相反。可見，作用在一點的三力要構成平衡，它們的代表向量就必將頭尾一一銜接，組成一個**封閉的力三角形**。

力平行四邊形原理是靜力學的最基本公設。根據它，我們已經演繹出若干從屬的結論。但是原理本身的眞確性還未討論過。現在說明一個用儀器檢驗它的眞確性的實驗方法如下：



第 6 圖

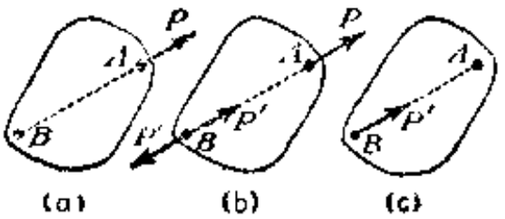
第 6 圖中，儀器上部爲一有刻度的水平圓盤；圓盤中心有一針尖 O。三個小滑輪 A，B 和 C，軸承光滑，可以安裝在盤周上任何指定角度的位置。另有三根細綫交結於 D 處，各跨過一個滑輪以懸掛三個重體 P，Q 及 R（質量等於 P，Q……的物體，簡稱爲重體 P，Q……）。實驗時，將 A，B 兩滑輪先安裝在任意選定的位置，跨過兩滑輪的細綫分別懸掛任意選定的重體 P 和 Q。至於第三個滑輪 C 的位置，應該由反復試驗，使三綫的交結點 D 恰好停在針尖 O 上來確定。因第三根綫上的 R 力必須等於 P，Q 兩力的合力並且跟合力方向相反才能構成平衡，所以由所得的 R 力大小及滑輪 C 的位置我們也就可以完全確定 P，Q 兩力的合力。實驗結果確乎跟力平行四邊形原理精密符合。但必須注意：這實驗只是表示第一原理的正確，並不曾證明這一原理。而且原理本身原屬理想情形下的結論。在理想情形中擾動因素，像摩擦力、細線非完全柔軟等等已不存在；實際實驗結果必然多少要受這些因素的影響。因此，實驗時應該十分細心來減少此等因素的影響；否則，就不能充份顯示第一原理的精確。

4. 力的傳導性

第三原理：在原來作用於物體的力系外，另外加一個或減去一個自成平衡的力系，原來力系的作用並不發生絲毫改變。

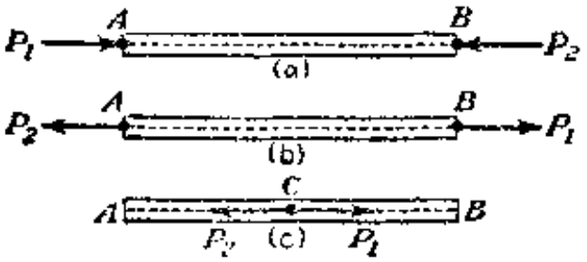
引伸本原理可證明：一剛體上 A 點的 P 力如果沿它的作用線推移到其他任何一點 B，這種作用點的推移對 P 力對於剛體的作用將毫無影響。作用點推移而不影響力的作用的這一性質稱爲力的傳導性。以上的敍述稱爲力的傳導原理。此原理的證明如下：

第 7a 圖中，P 力作用在物體的 A 點。在 P 力作用線上任意擇定一 B 點。加一對大小等於 P 力的相等相反力於 B 點(第 7b 圖)。按第三原理，所加的兩力 P' 和 P'' 自成平衡，加入後，對原來 P 力的作用並無影響。但 P 力和 P'' 力是大小相等、方向相反的同作用線兩力，也是一個平衡力系。故按第三原理，可以將這兩個力取去而無影響。因此，物體變成只受 B 點的 P' 力作用(第 7c 圖)，但是跟 A 點的 P 力作用時的情形完全相同。這就證明了「力的傳導原理」。



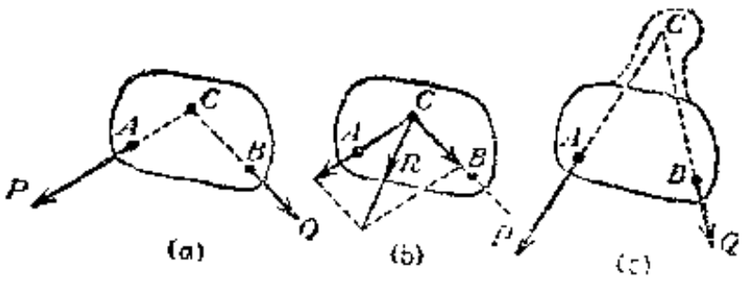
第 7 圖

再觀察一個切面均一的桿件 AB。AB 的長軸兩端有一對相等相反的 P_1 和 P_2 力作用(第 8a圖)。圖中已表明：桿件是在受壓力作用下平衡。如將 P_1 和 P_2 力的作用點分別自 A 和 B 點推移到 B 和 A 點如第 8b 圖，根據「力的傳導原理」，桿件的平衡狀態雖然仍未改變，但是原來受壓力的却變成受拉力作用。設再想像將 P_1 和 P_2 的作用點一同推移到桿軸的中點 C 處(第 8c 圖)，兩力雖仍平衡，但 AB 內已無內力存在。可見物體上力的作用點的推移雖不改變平衡狀態，從而不影響力系的平衡條件，但是就物體的內力而論，則有決定性的改變。因此，「傳導原理」的應用只限於攷察平衡而不牽涉「內力」的靜力學問題；在內力問題中，力是沒有傳導性的。



第 8 圖

第 9a 圖中 P,Q 兩力作用在物體的 A,B 兩點。兩力作用線相交於 C 點。引用傳導原理，我們可將兩力的作用點一同推移到 C 點，然



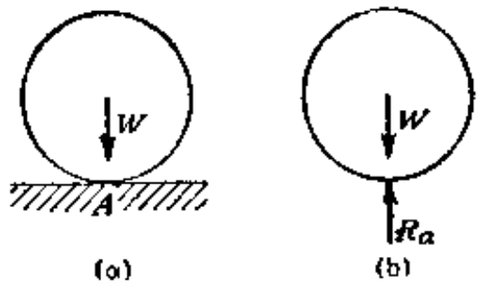
第 9 圖

後按平行四邊形原理決定它們的合力 R（第 9b 圖），由 R 來代替原來兩力。

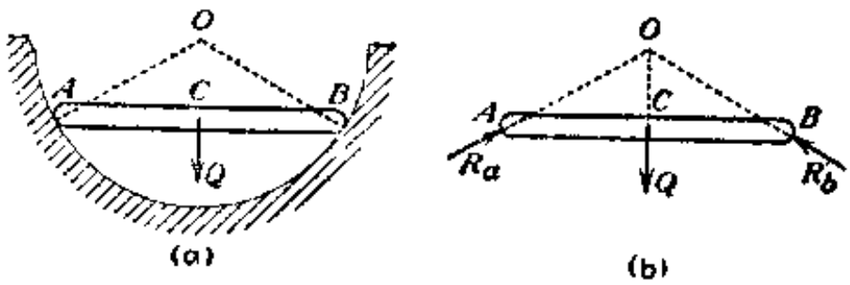
假使兩力的交點 C 在物體以外（第 9c 圖），那仍可想像 C 點是由圖中虛線所表示的物體擴大部份剛性連接在物體上的一點。因之仍可按以上方法求出兩力合力來替代原來兩力。

5. 作用力及反作用力

在很多情形中，我們所攷察的對象並不是在一切方向全有自由運動的物體。禁止物體在任何一定方向發生運動的限制物通常稱爲物體的「**運動約束**」。約束有「完全約束」和「部份約束」之分。例如第 10a 圖的圓球，它位於一水平平面上，可以沿平面上任何方向運動，但不能鉛垂向下運動。又如第 11a 圖中切面均一的桿件 AB，置於一光滑圓圈內。AB 可以以圓圈中心 O 爲軸發生任意的旋轉，但是兩端 A 和 B 點不允許離開圓圈表面。再如第 12a 圖，這是「約束」的另一種類型，槓桿 AB 可以繞支點 C 在圖平面上任意旋轉，但 C 點不能移動。這些都是「部份約束」的例子。最後，例如第 13a 圖中的 AB 梁。A 端爲一固定支點；B 端是附有滾柱裝置的滑動支點，滾柱可以沿水平平面作無摩阻滾動，但不能在鉛垂方向運動。在如此的約束下，AB 梁在任何方向都沒有運動的可能，所以這是對 AB 梁的一種「完全約束」。



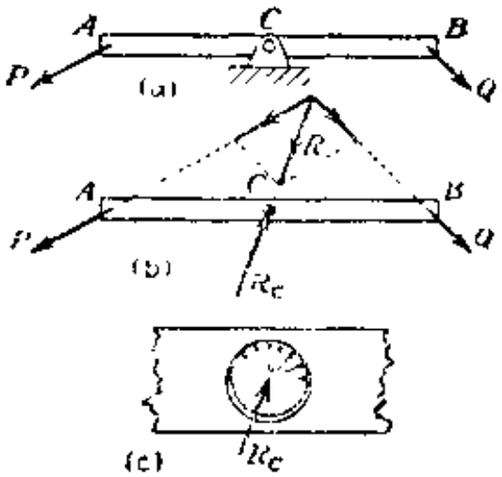
第 10 圖



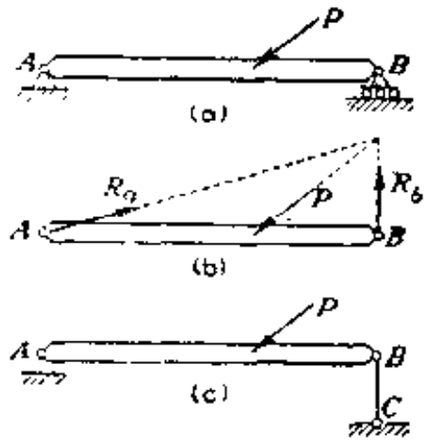
第 11 圖

不能完全自由運動的物體如果受外力作用必然將產生對約束的壓力。例如第 10a 圖中，圓球在重力 W 作用下必將於接觸處產生對水平平面的壓力；第 11a 圖，桿件 AB 受重力 Q 作用，當然要在兩端發生

對圓圈表面的壓力;再如第 12a 圖,槓桿受 P,Q 兩外力作用時,也必將產生壓力於支點 C 的鉸鏈梢子上;第 13a 圖,AB 梁在外力作用下,支點 A 和 B 自然將受到外力 P 所引起的壓力作用。



第 12 圖



第 13 圖

第四原理:物體對於支承的任何壓力必引起支承對物體的相等相反的反壓力,使作用及反作用成爲一對相等相反的「力」。

觀察受約束物體的平衡,必須設想去掉它的約束而代以約束對於物體的反作用力。例如第 10a 圖中就可在接觸點 A 處用平面對於圓球的反作用力 R_a 來代替此支承圓球的平面如第 10b 圖。

在第 11a 圖例中,也可取去支承桿件的圓圈,以反作用力 R_a 和 R_b 來替代。圓圈內表面既已假定爲絕對光滑,A,B 兩端沿圓周切線方向的運動自然不會遭遇到阻力,所以反作用力 R_a 和 R_b 只能在 A,B 兩點的圓周法線方向。在多數實際問題中,我們是可以假定接觸表面是絕對光滑的。在這一假定下,表面的反作用力則必垂直於此表面。

對於第 12a 圖的槓桿,我們可用反作用力 R_c 代替支點 C 的梢子。此處仍假定梢子的表面爲絕對光滑,使槓桿和梢子間分佈於接觸處的壓力都垂直於接觸表面如第 12c 圖。對於圓形的梢子而言,這也就是說,所有的分佈壓力全都是沿圓的半徑方向的作用線作用。反作用力 R_c 既然需要跟分佈壓力作用相同,它的作用線自然也必須通過圓心。這種光滑的圓形梢子所構成的結合稱爲理想鉸鏈,在力學中極爲常用;

它所產生的反作用力在任何情形下都將通過梢子中心。至於反作用力 R_c 的方向，因 R_c 應跟 P,Q 兩力構成平衡，故作用線必須跟 P,Q 兩力的合力作用線相同。

對於第 13a 圖的 AB 梁，可如第 13b 圖取去兩支點 A,B 而用反作用力 R_a 和 R_b 來代替。假定 A,B 兩點都是理想鉸鏈，反作用力 R_a 和 R_b 就必須通過梢子的中心。此外，再假定 B 點的滾柱裝置毫無摩阻力作用，那末，反作用力 R_b 又必須垂直於滾柱的裝置平面。這種允許梁的一端在一定方向運動的滾柱裝置，常用於巨大的橋梁結構中以防止因溫度升降，橋身發生脹縮現象而引起的損害。

如果應用一能不計自重的桿件 BC 來代替 B 處的滾柱裝置如第 13c 圖，桿件兩端各由理想鉸鏈跟其他部份連接（這種桿件以下簡稱爲鉸鏈桿），自然仍可獲得相同效果。在此情形下，因加於桿件的外力只能作用在它兩端的鉸鏈上，故按以前討論，兩力的作用線必須跟桿件的長軸相合。因此，桿件在 B 處加於梁的反作用力，根據第四原理，必將在鉛垂方向，以桿件的長軸爲作用線。

由以上的討論，可見一受約束的物體上必有兩種力同時作用：第一種是已定力，例如：地心吸力 W（第 10a 圖）和 Q（第 11a 圖）以及第 12a 圖的 P,Q 兩力，第 13a 圖中的 P 力。這種力是獨立存在不受其他力的影響的，通常特稱爲「主動作用力」或簡稱「**作用力**」。第二種是「**反作用力**」，就是用以替代「約束」的力。例如第 10b 圖中的 R_a，第 11b 圖中的 R_a 和 R_b，第 12b 圖的 R_c 以及第 13b 圖的 R_a 和 R_b 各力。這種力不是獨立存在的，它們的大小方向完全要看主動作用力的大小方向如何才能確定。

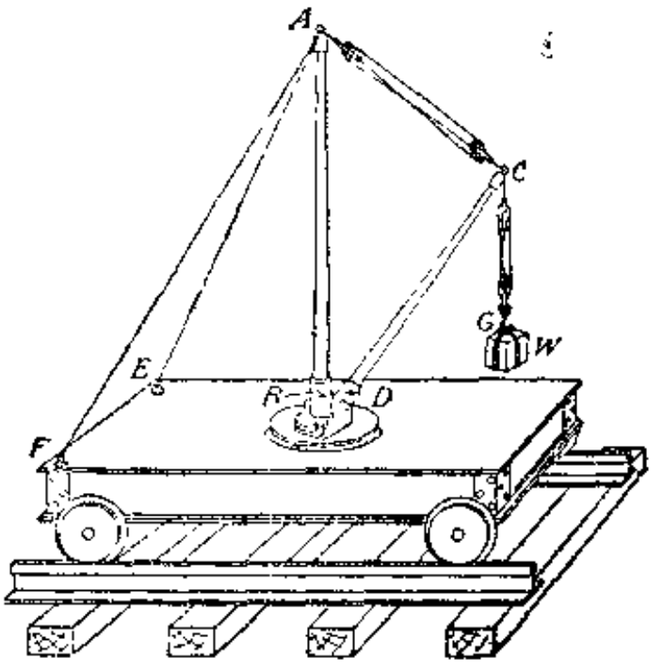
應用圖形以表示物體的受力情形，必須去掉物體的約束（或支承），以反作用力來替代。這種用反作用力代替「約束」的物體受力圖，如第 10b,11b,12b 和 13b 圖，通常稱爲分離體圖或自由體圖。

一個物體的平衡並不一定要它的全部「作用力」單獨構成平衡，而是要所有「作用力」及「反作用力」共同構成一平衡力系。所以攷察一物體的平衡，必需應用「分離體圖」來研究物體上的全部力系。繪製

「分離體圖」因而必然是分析任何靜力學問題的最先一步。此圖如有任何錯誤或遺漏，均將影響相繼的分析結果，所以要特別注意。

6. 力系的分類

第 14 圖是一小型起重機，裝置在一平車上。它的主要構件爲一直立桅 AB 和一可以自由起伏的機臂 CD。CD 位於平車轉盤上，轉盤可以旋轉，因之 CD 可以自由擺動至任何指定的位置。直立桅 AB 另由拉索 AE 和 AF 拉住，來維持它的鉛垂位置。



第 14 圖

起重機可提起的重量 W 通常要比直立桅、機臂、拉索、吊繩和滑輪等的自重大得很多。所以這些構件的自重我們可以完全忽略不計。起重機各主要構件的外力因之都只在各件的末端作用。假定所有各主要構件的連接都是應用「理想鉸鏈」，那末在重量 W 作用下，按 § 3 所述，各件都只是受單純的拉力或壓力作用而已。換句話說，每一構件對於兩端相鄰構件的反作用力必定是以構件長軸爲公共作用線的一對相等相反的力。

在 § 5 中已看到，攷察一個受約束物體的平衡，無非就是攷察它的「分離體圖」中所表明的全部力系。在分析一個工程結構的問題中，我們可以遇到各種不同類型的力系。現在以以上起重機爲例來說明這些類型。

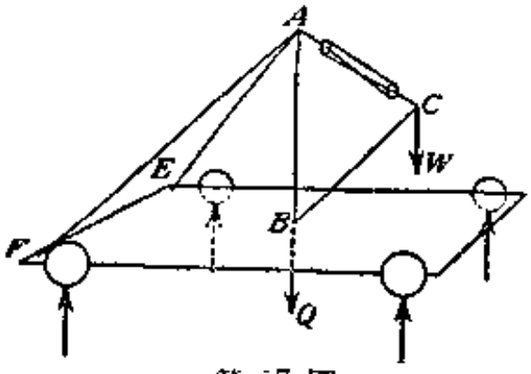
作 C 點梢子的「分離體圖」如第 15 圖。分離體上所荷的作用力是：由吊繩 CG 所傳來的重力 W，機臂 CD 和吊繩 AC 對梢子的反作用力；一共三個力，每一力均沿相應的構件長軸作用。這三個力同在一鉛垂平面 ABC 內，並且共同交於一點——梢子的中心。這是一種最簡單的「力系」，通常稱爲「平面共點力系」。

第 15 圖

以直立桅頂端的圓環 A 作爲分離體(第16圖)。圓環受四個力作用：兩拉索 AE 和 AF 對圓環的反作用力以及直立桅 AB 和吊繩 AC 對圓環的反作用力。四個力的作用線各跟它們相應構件的長軸相合，並且共同相交於一點——圓環 A 的中心，但不在同一平面。這種力系稱爲「**空間共點力系**」。

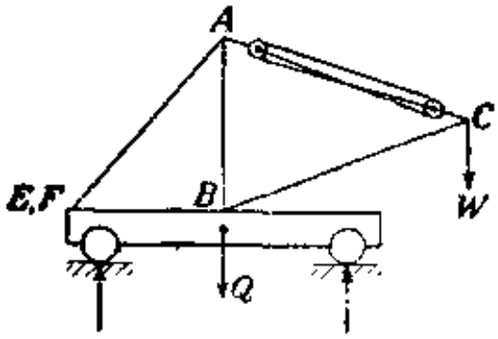
第 16 圖

假使將整個平車及起重機當作一個「分離體」來攷察，那由第17圖就可以看到：分離體上除掉 C 處的外力 W 和作用在 B 處的平車的重力 Q 外，只有平車軌道對於車輪的各反作用力需要攷慮。假使軌道面完全光滑，那軌道各反作用力就全應垂直於軌道平面。因此，分離體上所有外力都是在鉛垂方向。這種互相平行而不在同一平面的一羣力通常稱爲「**空間平行力系**」。

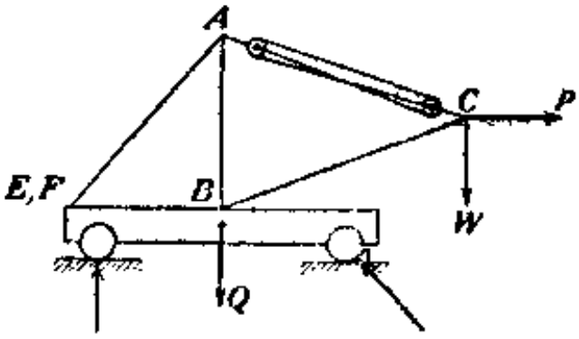


第 17 圖

現在將機臂擺動到使 ABC 平面與軌道相互平行的位置；也就是 ABC 平面在平車的長度方向等分平車，成爲平車的對稱平面。重力 W 和 Q 都作用在此平面中。此外，因兩前輪及兩後輪所受的軌道反作用力都兩兩相等，故可想像平車是平衡在上述對稱平面中的一根軌條上。在以整個平車及起重機爲分離體所得的力系中，所有各力全都相互平行並同在一平面，故這種力系可稱爲「**平面平行力系**」。



第 18 圖

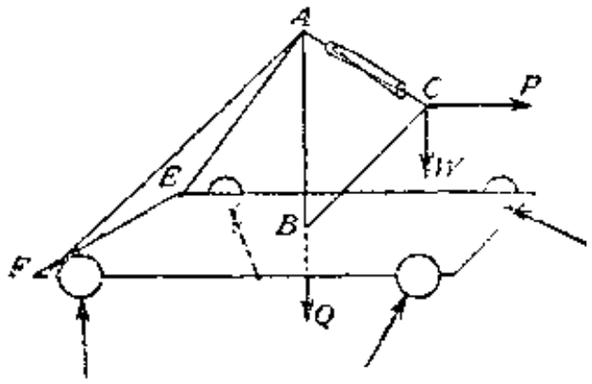


第 19 圖

設機臂繼續保持如此位置，但想像在 C 點除 W 力外，還有一水平力 P 作用。爲防止平車因而滾動起見，前輪前面應如第19圖置一阻

擋物。在此情形下，軌道的反作用力自然不再垂直於水平軌道面。故得一個所謂「一般的平面力系」。

最後，令機臂擺離這一對稱平面，但仍使水平力 P 繼續在 C 處作用（第 20 圖）。如此所得到的就是一個「一般的空間力系」。



第 20 圖

綜合以上的討論，可知，力系計可分類(1)爲：

(1) 平面共點力系，

(2) 平面平行力系，

(3) 一般的平面力系，

(4) 空間共點力系，

(5) 空間平行力系，

(6) 一般的空間力系。

以下各章將循序討論各類力系的平衡條件，並且將各種決定平衡條件的方法一一加以詳細說明。

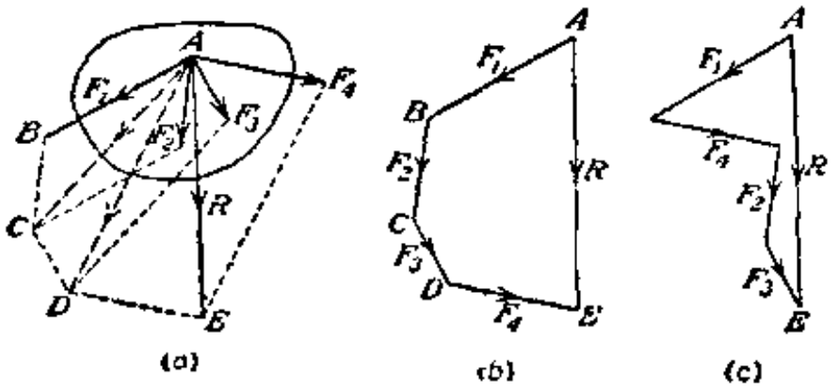
---

(1) 這裏所謂「分類」，很顯然的，並不是說各種力系都是性質上完全不同的類型。事實上，一切力系當然都包括在「一般的空間力系」之內；任何平面力系也都屬於「一般的平面力系」。這裏所謂「分類」不過是把其中有特殊規則性的力系提出來作爲一個類型而已，所以跟普通的「分類」的意義是有所不同的。

第二章　平面共點力系

7. 力的合成

將已知的一羣力化爲作用相同的最簡單力系稱爲**力的合成**。合成的結果可能是形式最簡單的一個單力，這單力稱爲原來力系的「合力」。假使若干力 F_1, F_2, F_3……都共同作用在物體的一點，各力並且同在一平面中，那這一羣力就是可以簡化成爲一個「合力」的力系。它們的合力可由連續使用力平行四邊形原理來決定。例如，第 21a 圖中 F_1, F_2,



第 21 圖

F_3 和 F_4 四力作用在一物體的 A 點。求合力時，可先按第一原理確定 F_1 和 F_2 的合力 $\overline{AC}$。又由同一原理將 $\overline{AC}$ 和 F_3 的合力 $\overline{AD}$ 求出。因 $\overline{AC}$ 可以完全代表 F_1 和 F_2，所以 $\overline{AD}$ 也就是 F_1, F_2 和 F_3 的合力。最後，合成 $\overline{AD}$ 和 F_4，就決定了原來四個力的合力 R。這種合成方法對力羣內包含的力的個數並無限制。因此，不論一個力系含有多少「力」，只要它們全通過一點，並且同在一平面內，就可應用以上方法把它簡化成爲一個「合力」。

如不用力平行四邊形，而把各力的代表向量一一幾何相加，如第 21b 圖，當然也可求到合力 R。兩種方法所得到的結果自然完全相同。幾何相加時，先以 $\overline{AB}$ 代表 F_1，自 $\overline{AB}$ 終點引 $\overline{BC}$ 代表 F_2，繼續再繪 $\overline{CD}$ 及 $\overline{DE}$ 分別代表 F_3 及 F_4。所得到的多邊形 $ABCDE$，不用說，是跟第 21a 圖的多邊形 $ABCDE$ 一式一樣的。因此，$\overline{AE}$ (以 $\overline{AB}$

的起點爲起點；以 DE 的終點爲終點）就是代表合力 R 的分離向量，R 的作用點仍是第 21a 圖中的 A 點。第 21b 圖的多邊形稱爲**力多邊形**。它的封閉邊決定所求的合力，合力方向則自第一向量的起點指向最後一向量的終點。任何平面共點力系的合力都可以由這種各力相加的「幾何和」來決定。用「力多邊形」求多數力的「合力」顯然要比連續使用「力平行四邊形」方便，故實際解決問題多用前法。此外，這一方法跟應用力平行四邊形方法相同，各力相加的先後次序對所求結果也同樣毫無影響。例如上例中，如果先繪 F_1，再繪 F_4，然後再依次加入 F_2 及 F_3，所得的「力多邊形」（第 21c 圖）雖然跟第 21b 圖多邊形 $ABCDE$ 完全不同，但它的封閉邊 $\overline{AE}$ 所決定的合力 R 是跟第 21b 圖毫無差別的。

特例情形，如已知各力都沿同一直線作用，那末「力多邊形」的各邊都將在一根直線上。各力的「幾何和」，因此，也就跟它們的「代數和」相同，故所求「合力」就等於各力的「代數和」。

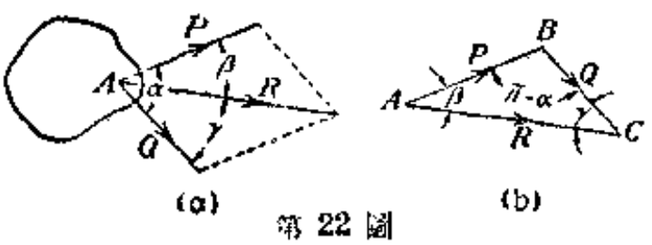
如果最後一向量的終點恰好落在第一向量的起點，合力等於零，那各力當然就是一平衡力系。

例題和習題

1. 假設兩力 P,Q 作用在物體的 A 點，兩力互成 α 交角。試求它們的合力以及合力作用綫跟它們作用綫間的交角 β 和 γ。

解：作「力平行四邊形」如第 22a 圖或將兩力幾何相加，得「力三角形」如第 22b 圖。由圖中可看到：

$$R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha} \qquad \text{(a)}$$



第 22 圖

合力 R 的大小確定後，β 及 γ 角就可用以下兩式計算：

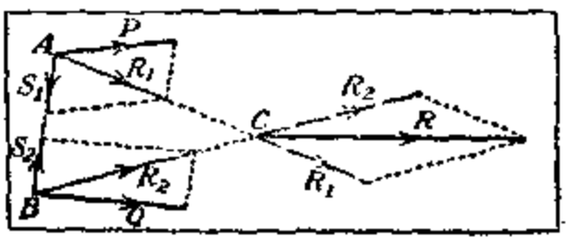
$$\left.\begin{aligned}\sin\beta&=\frac{Q}{R}\sin\alpha\\ \sin\gamma&=\frac{P}{R}\sin\alpha\end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

這種「計算方法」有時比應用比例尺精確繪圖的「圖解法」方便。

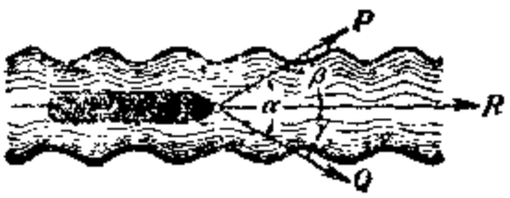
2. 應用「圖解法」求第 23 圖中 P,Q 兩力的合力，假設 P,Q 兩力作用綫的交點在圖紙之外。

解：根據第三原理，我們可以在 P,Q 兩力作用點的連線 AB 上加一對相等相反的 S_1 和 S_2 兩力（第 23圖）。應用平行四邊形原理，將 S_1 和 P，S_2 和 Q 分別合成爲合力 R_1 和

R_2。引長 R_1 和 R_2 的作用綫交於 C 點。之後，按力的傳導原理，將 R_1 及 R_2 的作用點由 A 和 B 共同推移到 C 點。再應用平行四邊形原理合成 R_1 和 R_2，得到合力 R。這 R 顯然就是所求的合力。



第 23 圖



第 24 圖

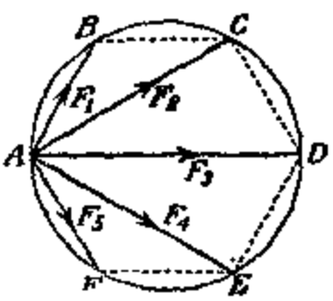
3. 一條船由兩匹馬用不變速度拖着在運河中行駛如第 24 圖。假設兩馬的牽引力是 $P=100$kg 和 $Q=120$kg。兩牽引力的夾角是 $\alpha=60°$。試求它們的合力 R 及圖中 β 及 γ 角的大小。（先用圖解法解題，然後，用第 1 題公式計算。以計算結果校核圖解結果）。

4. 一個人重 60kg，提住一根繩的一頭。繩跨過這人正上方的一個定滑輪後，在另一頭懸掛一個重量 $Q=50$kg 的物體。試求這人加在地面上的壓力等於多大？

（解：10kg）

5. 五個「力」$F_1, F_2, \cdots\cdots F_5$ 共同作用在物體的 A 點如第 25 圖。它們的代表向量的終點恰巧都在一半徑 $r=10$cm 的圓周上，並且共同構成一個正六角形。各力的「公斤」大小等於 AB，AC，AD……的「公分」長度；換句話說，各代表向量的長度，每一公分代表一公斤。試求它們的合力。

（解：60kg，沿 AD 作用）

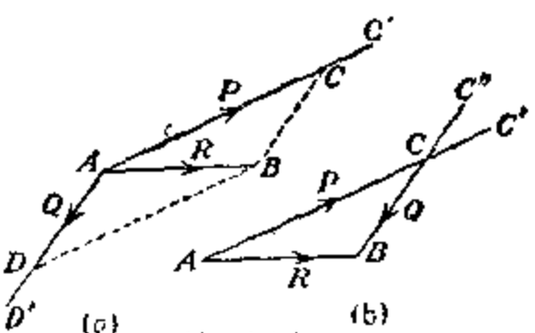


第 25 圖

6. 兩個「力」沿一任意三角形的兩邊作用，以三角形這兩邊的頂點爲共同作用點。假設兩力的大小跟各自所沿一邊的邊長成正比例，試證明兩力的合力的作用綫必然通過三角形第三邊的中點。

8. 力的分解

以「共同的作用跟一個已知力相等」的幾個「分力」去代替這一已知力就稱爲力的分解。此中以用兩個「分力」去代替一個單力的情形爲最常見。根據「力平行四邊形原理」，可知，分解一已知力 R 爲兩分力，使兩分力相交於 R 力作用線上任意一點，計有四種可能情形



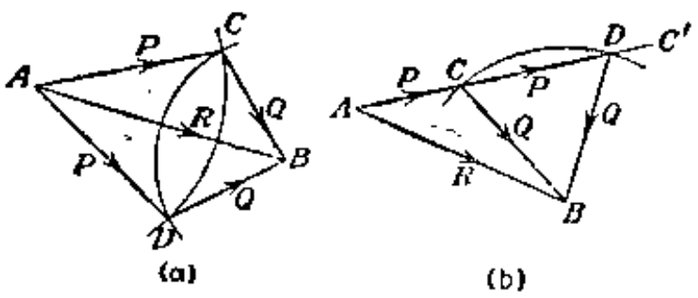
第 26 圖

(分解一已知力爲兩個平行分力的問題將在 § 20 及 § 21 中討論)：

1. 已知兩個分力的方向；求它們的大小 例如第 26a 圖中，已知的 R 力需要分解爲沿 AC' 和 AD' 兩方向作用的分力。分解時，可自 B 點引虛線 BC 和 BD 分別平行於 AD' 和 AC'，得兩個交點 C 和 D。$\overline{AC}$ 和 $\overline{AD}$ 的長度，當然，就是所求兩分力 P 和 Q 的大小。

應用「力三角形」，也可得同樣結果。第 26b 圖中，$\overline{AB}$ 爲 R 的代表向量。自 A 和 B 點分別引平行於兩已知方向的兩直線，交於 C 點。所得的 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BC}$ 顯然就是 P 和 Q 兩分力的代表向量。兩分力的共同作用點可以是 R 力作用線上任意一點；共同作用點不論取 R 作用線上那一點，兩分力都跟 R 力的作用完全相同。在兩分力互相垂直的特例中，這兩分力特稱爲「正交分力」。

2. 已知一個分力的大小和方向，求另一個分力 例如 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 分別爲已知的合力 R 和一分力 P 的代表向量(第 26a 圖)。繪出這兩個已知的代表向量如第 26b 圖。C 點和 B 點的連接線 $\overline{CB}$ 顯然就代表所求的另一個分力 Q。



第 27 圖

3. 已知兩個分力的大小，求它們的方向 這一問題也就是已知三邊邊長求三角形的問題。第 27a 圖中，令 $\overline{AB}$ 爲 R 力的代表向量，分別以 A 點和 B 點爲圓心，以兩分力 P 和 Q 的已知大小爲半徑，繪兩圓弧。由圓弧的交點 C 和 D，我們得到兩組可能的解答；$\overline{AC}$，$\overline{CB}$ 或 $\overline{AD}$，$\overline{DB}$ 都可能是所求的兩分力的代表向量。假設兩分力大小的和或差恰巧等於 R 力的大小，兩圓弧只能相切於一點，那末只有一組解答；兩分力的作用線就跟 R 力的作用線相同。假設兩分力大小的和或差分別是小於或大於 R 力的大小，那末兩圓弧不能相交，沒有解答。

4. 已知一個分力的方向和另一個分力的大小，求前一個分力的大小和後一個分力的方向 第27b圖中，令 $\overline{AB}$ 爲 R 力的代表向量，AC' 爲前一個分力 P 的作用線，以 B 點做圓心，以後一個分力 Q 的大小做半徑畫一圓弧交 AC' 於 C，D 兩點。故得到兩組解答；$\overline{AC}$，$\overline{CB}$ 或 $\overline{AD}$，$\overline{DB}$ 都可能是所求的兩分力。假設圓弧只跟 AC' 相切於一點，那末僅有一組解答。如果圓弧跟 AC' 不相交，那就根本沒有解答。

由以上討論，可見：1，2 兩類問題是有唯一的固定解答的；3，4 兩類問題，那就有時還可能有兩組解答，有時却又沒有解答。在可能有兩組解答的情形，一般問題中多半另外給有決定那組解答適用的條件。

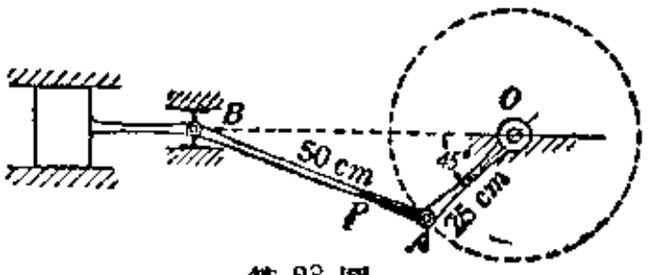
如要分解一個已知力於已定三方向以得到同平面三個分力，那我們任意選擇其中一個分力的大小，都可得到一組分力；可能的解答，因此，有無窮多。所以這種分解是一種完全不確定的問題。更一般的問題是分解一已知力爲任何數目的分力。這種分解，除非所有分力中僅有兩個分力是以上四類中的一種，其他各分力的大小方向都完全確定，才可能有一定的解答。否則也是「不定」的問題。

例題和習題

7. 一個重量 $Q=5kg$ 的物體，放在水平綫仰角 30° 的斜面上。試分解重力 Q 爲兩正交分力 Q_t 和 Q_n，使 Q_t 平行於斜面，Q_n 垂直於斜面。

(解：$Q_t=2,5kg$，$Q_n=4,33kg$)

8. 第28圖中是一往復式原動機。汽缸活塞在圖中位置時，推桿 AB 對於 A 點槓子的推力 $P=250kg$。



第 28 圖

(a) 試分解此 P 力爲水平分力 P_h 和鉛垂分力 P_v，(b) 又分解 P 力爲垂直於 OA 的分力 P_t 和沿 OA 作用的分力 P_r。

(解：$P_h=234kg$，$P_v=83,5kg$；$P_r=103kg$，$P_t=228kg$)

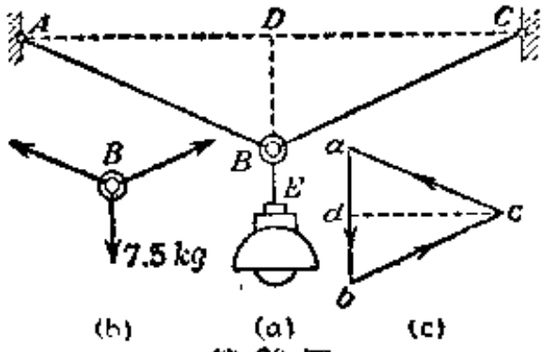
9. 平面共點力系的平衡

§7 已說明，一個平衡物體上的全部力如果是一個平面共點力系，那末各力幾何相加時，必然將得到一個封閉的「力多邊形」。因此，在平衡的 n 個平面共點力中，如果 $n-2$ 個「力」爲完全已知，那其餘 2 力的合力就必須跟這 $n-2$ 個力構成平衡；換句話說，2 力的合力就是

$n-2$ 個力的「平衡力」。這「平衡力」顯然可由「力 $n-2$ 邊形」決定。因此，按 § 8 方法分解這一「平衡力」就可得到其餘未知兩力。

例題和習題

9. 第29圖中是一盞懸掛在細繩 B 下面的街燈。B 繩由 AB 和 CB 兩綫張緊在高度相等的 A 和 C 點。假使 AB，CB 兩綫完全柔軟，並且自重極小，可以不計，它們的長度都是 4m，試求圖中 BD 長度爲 1,5m 和燈重 7,5kg 時，AB 和 CB 的張力的大小。

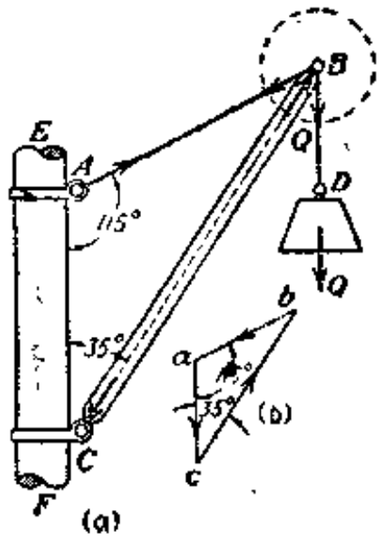


第 29 圖

解：繪出 B 環的「分離體圖」如第 29b 圖。分離體上面，三個「力」構成平衡。它們的封閉的力三角形如第 29c 圖。作力三角形時，以 $\overline{ab}$ 按一定比例代表街燈的重量。之後，畫 $\overline{bc}$ 和 $\overline{ca}$ 分別平行於 CB 和 AB。$\overline{bc}$，$\overline{ca}$ 顯然就是所求兩張力的代表向量。如果力三角形已經按比例精確繪圖，我們可逕自圖上量得兩「張力」的大小。否則，用計算方法也可以；因 ΔCDB 跟 Δcdb 相似，故 $ab:bc=2BD:BC=3:4$。但力 $\overline{ab}=7,5$kg，因此，$\overline{bc}=7,5\times\frac{4}{3}=10$kg。

10. 第 30a 圖中的起重機，$Q=500$kg，機臂、吊繩等的自重可以不計，C 處是一理想鉸鏈。求直立桅在 A，C 兩處所受到的「反作用力」。

解：先觀察 B 點梢子的平衡。它的「分離體圖」見第 30a 圖中所畫的虛綫圖。分離體上的三個力中，Q 的大小方向完全已知，其餘兩力——機臂和吊繩的反作用力——方向也已確定。故可畫「力三角形」如第 30b 圖來決定兩力的大小。此三角形當然是封閉的「力三角形」，所以兩力作用的方向也可決定如圖。由圖中可看到：機臂是受壓力作用，吊繩是受拉力作用。一般說來，未知的反作用力作用方向如果最初假定得不對，作出力多邊形後就可發現而改正。



第 30 圖

因吊繩和機臂分別受拉力和壓力作用，故它們各自對於直立桅的「反作用力」一定是分別與 $\overline{ba}$ 和 $\overline{cb}$ 方向相反、大小相等，兩力的作用方向，因之，應如第 30a 圖。至於它們的大小，我們可以由精確畫成的圖中去量出來；也可以用計算法確定爲：$\overline{ab}=574$kg，$\overline{bc}=906$kg。

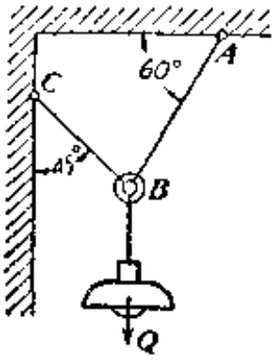
11. 假設第 31 圖中，燈的重量爲 $Q=4$kg，試求 AB 和 BC 兩綫中的張力。

(解：AB 中 2,93kg，BC 中 2,07kg)

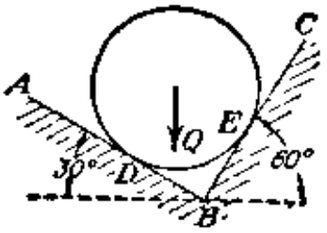
12. 試求第 32 圖中圓球對於兩光滑斜面的壓力，圓球重量 $Q=12$kg。

(解：D 處 10,4kg，E 處 6kg)

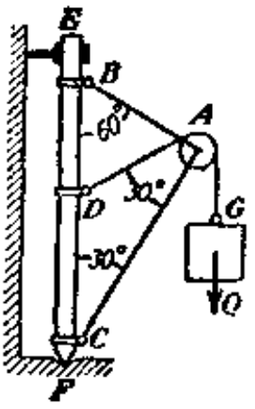
13. 第33圖中的起重裝置，$Q=2t$，滑輪摩阻可以不計。 試求 AB，AC 兩桿件的內力。
（解：AB 中無內力，AC 中壓力等3.46t）



第 31 圖

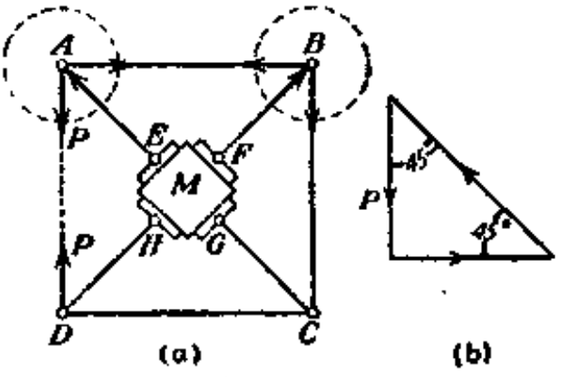


第 32 圖



第 33 圖

14. 第34圖內是一個產生相等壓力於一正方水泥塊M四週的裝置。AB，BC和CD是一正方形的三邊，AE，BF，CG 和 DH 沿正方形對角綫安裝，都是由鉸鏈桿做成的桿件。 假使在鉸鏈 A 和 D 處加一對相等相反的作用力 $P=1000kg$ 如圖。試求水泥塊各方所受到的壓力將等於多少？ 各桿件的自重全可不計。



第 34 圖

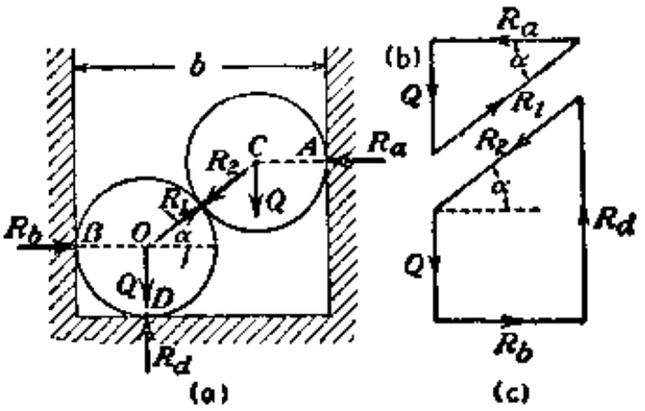
解：各桿件對於兩端鉸鏈的「反作用力」都是沿各自的長軸作用的。 如將 A 處桿子當作分離體（見第 34a 圖中虛綫畫的圓圈）。分離體上共三個力作用。 其中 P 力是已知的。 故可畫力三角形如第 34b 圖，得 AB 和 AE 兩桿件對分離體的反作用力爲分別等於 P 和 $\sqrt{2}P$ 的二力。

之後，觀察 B 處桿子的平衡。 因 AB 受等於 P 的拉力作用，故 B 處桿子所受到的 AB 反作用力也一定等於 P，方向則如第 34a 圖所示。 畫出桿子的「力三角形」，就可得到 BF 和 BC 的「反作用力」。 不過由圖上可看出，這一「力三角形」只要將第 34b 圖的「力三角形」旋轉 90° 就可得到。 同樣情形，將這一「力三角形」再相繼作適當的旋轉，又可決定 C 及 D 處兩桿子的受力情形。 因此，本裝置的四週的桿件，很顯然的，都是受$P=1000kg$ 的拉力作用；對角綫方向的桿件則全是受等於 $\sqrt{2}P=1414kg$ 的壓力作用，這一壓力也就是水泥塊每一方所受到的全部壓力。

15. 兩個完全相同的光滑圓球放在如第 35a 圖的兩壁鉛垂的平底槽內。 圓球半徑爲 r，重量爲 Q。 平槽的寬度爲 b。 試求牆面 A 和 B 處以及地面 D 處受到的壓力各等於多大？ 假設：$r=10cm$，$b=36cm$，$Q=100kg$。

解：因圓球光滑，故各接觸處的各相互作用力必定都垂直於接觸表面。 將圓球受到的反作用力 R_a，R_b 和 R_d 代替牆面和地面即得兩圓球的「分離體圖」如第 35a 圖。

如就個別圓球而論，因兩球的接觸處另有兩個相等相反的內力沿球心連接綫作用，所以上面一球共受三力作用：重力 Q 及反作用力 R_1 和 R_a。下面一球共受四力作用：R_2，Q，R_b 和 R_d。兩球上各力都各自構成「平面共點力系」。



第 35 圖

先畫上球的「力三角形」如第 35b 圖，求出 R_a 和 R_1。之後，觀察下球的平衡。它上面的四力，Q 爲已知，R_2 則爲已求得的 R_1 的相等相反力。故畫「力多邊形」如第 35c 圖可決定 R_b 和 R_d。

假使第 35a 圖已經按比例繪製，R_1 和 R_2 的方向（也就是 OC 在空間的方向）就可以由圖上確定。如果各「力多邊形」也已按比例繪製，那各力的大小和方向就可由圖上量出來。否則，由計算決定；由圖上可看到：

$$2r+2r\cos\alpha=b$$

或

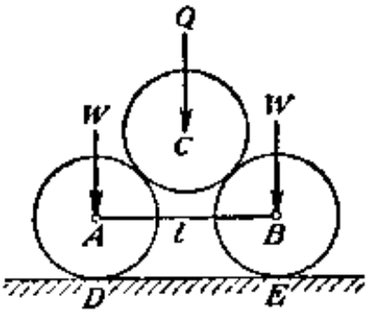
$$\cos\alpha=\left(\frac{b}{2r}-1\right) \qquad (a)$$

用 (a) 式算出 α 角後，就可求得 $R_a=R_b=1{,}33\,Q$，$R_d=2Q$。將已給數值代入，卽得：

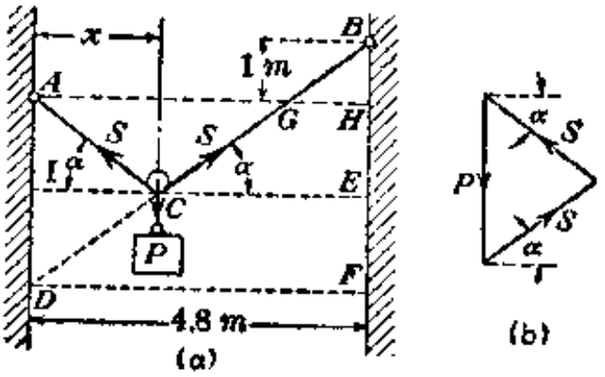
$$R_a=R_b=133\text{kg}，R_d=200\text{kg}$$

16. 第 36 圖中是三個圓柱體的疊置。A，B 兩圓柱的半徑同爲 $r=6\text{cm}$，重量同爲 $W=100\text{kg}$。兩柱體的中心連接綫 AB 的長度爲 $l=16\text{cm}$。第三個圓柱體，半徑爲 $r=6\text{cm}$，重量爲 $Q=200\text{kg}$。試求 AB 綫的張力以及地面接觸處 D，E 兩點的壓力等於多大？

（解：D，E 處壓力爲 200kg，AB 張力爲 89,4kg）



第 36 圖



第 37 圖

17. 第 37 圖中，ACB 繩長 6m，兩端掛在圖中 A，B 兩點。C 是一個極小的滑輪，下面懸掛一個重量爲 $P=18\text{kg}$ 的物體。滑輪 C 可以沿 ACB 繩作無摩阻滑動。試求平衡時，決定滑輪 C 位置的 x 值及繩內的張力等於多大？

解：滑輪既無摩阻力發生，ACB 全繩的張力自必完全相同。繩的 AC 及 BC 兩部份對於滑輪 C 的作用力，因之，必定相等而且它們的合力必然跟 P 力相等相反。根據這一條件，AC 和 BC 就非要有相等的水平綫仰角 α 不可。所以引長 BC 到圖中 D 點時，ΔACD 應該是一個等腰三角形。由此可見：ΔBFD 三邊的比值必定是

$$BF : DF : BD = \sqrt{6{,}0^2-4{,}8^2} : 4{,}8 : 6{,}0 = 3{,}6 : 4{,}8 : 6{,}0 = 3 : 4 : 5$$

不過，ΔBGH 跟 ΔBDF 相似，故 $GH : BH = DF : BF = 4 : 3$。也就是：

$$(4{,}8-2x) : 1 = 4 : 3$$

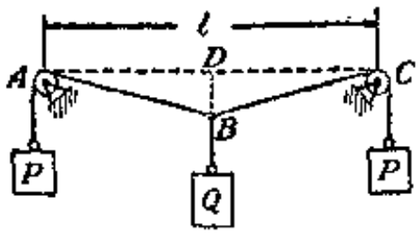
因此，$x=1\frac{1}{6}$m。此外，C 點的「力三角形」(第 37b 圖) 跟 ΔACD 相似。故 $S : P = 5 : 6$(因 ΔCDI 跟 ΔBDF 相似，它的三邊的比值也應爲 $3 : 4 : 5$)。題中 $P=18$kg，故所求張力 $S=18\times\frac{5}{6}=15$kg。

18. 第 38 圖中的滑輪裝置，兩滑輪的尺寸極小，可以不計。設圖中 $l=6$m，$P=10$kg，$Q=5$kg，試求 ABC 繩 B 點的「墜落」(1) BD 等於多少？

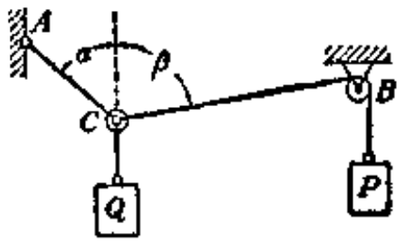
(解：$BD=77{,}5$cm)

19. 第 39 圖中的滑輪裝置，滑輪摩阻力可以不計。設 $P=Q$，$\alpha=50°$，試求 β 角。

(解：$\beta=80°$)



第 38 圖

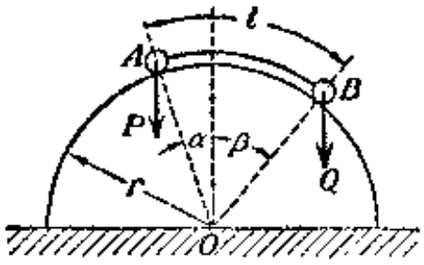


第 39 圖

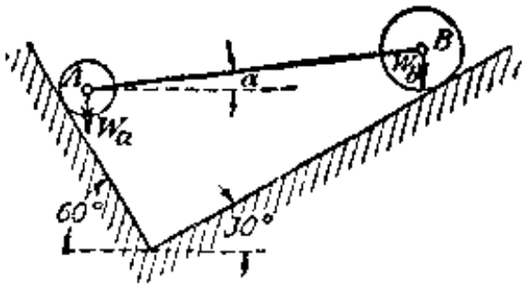
20. 第 40 圖中兩個微小物體 A，B 的重量分別爲 P，Q。兩物體的連接綫是一根完全柔軟而沒有伸縮性的細綫。圖中半圓柱的半徑爲 r。設連接綫的長度 $l=r$，此外，$P=2Q$，試求平衡時，半徑 OA 和 OB 跟鉛垂綫的交角 α 和 β 各等於多少？

(解：$\alpha=18°20'$，$\beta=39°00'$)

21. 第 41 圖中，A 和 B 兩圓柱各重 W_a 和 W_b。AB 是一根重量可以不計的鉸連桿，兩端連接在 A 和 B 的中心。設兩圓柱可以在圖中兩斜面上作無摩阻力的滾動，此外，



第 40 圖



第 41 圖

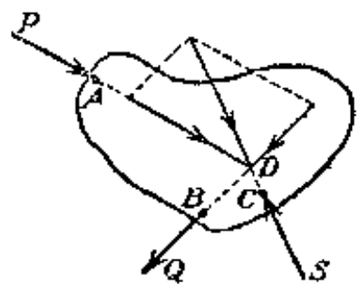
(1) 墜落原文爲 sag

$W_a=50kg$，$W_b=200kg$。問平衡時，鉸連桿的水平縱軸角牌等於多少？

（解：$\alpha=6°35'$）

22. 上題內如 $W_b=200kg$，AB 取水平位置（$\alpha=0$），試問 W_a 應等於多大，才能平衡？

（解：$W_a=66.7kg$）



第 42 圖

10. 平面三力的平衡

平面上三個不平行「力」如果構成平衡，那末三「力」的作用綫必然共同相交於一點。 證明如下：

第 42 圖中 P，Q 和 S 三個不平行「力」分別作用在物體的 A，B 和 C 三點。三「力」同在一平面內。引長其中任何兩「力」，譬如 P 和 Q，的作用線使相交於 D 點，推移兩「力」的作用點到這 D 點，並將它們的「合力」替代它們本身。因第三個「力」S 必須跟 P，Q 兩「力」的「合力」構成平衡，而兩個「力」要成平衡，必須作用線合一才可能，故第三個「力」當然非通過 D 點不可。

在工程靜力學問題中，尤其是在受「約束」物體的平衡問題中，三個平面力的平衡問題最常見。§5（第 11，12，13 圖）已討論過這一類問題。這類問題的形式通常多半是求已知作用點的支點反作用力。平衡的三個「力」，因作用線要交在一點，所以如果其中兩個「力」的作用線都已知，那末第三個「力」的作用線就可以由它的已知的作用點跟兩「力」作用線的交點來決定。例如第 11 圖中，圈內表面既已假定是絕對光滑，反作用力 R_a 和 R_b 自然必將通過圓心。根據三「力」的平衡條件，可知，只有桿件 AB 的重力 Q 也通過圓心時，它才能平衡。AB 位置決定後，由力三角形就可決定 R_a 和 R_b 的大小。再如第 12 圖中，槓桿應取水平位置平衡；P 及 Q 力的方向完全爲已知，故支點反作用力的方向可以由「三力作用線相交一點」的條件來決定。至於第13圖，圖中反作用力 R_b 已知爲鉛垂方向，故延長 P 力和 R_b 力的作用線，使它們相交，就可決定 R_a 的作用線。如再應用「力三角形」，那末所求各力的大小也可決定。

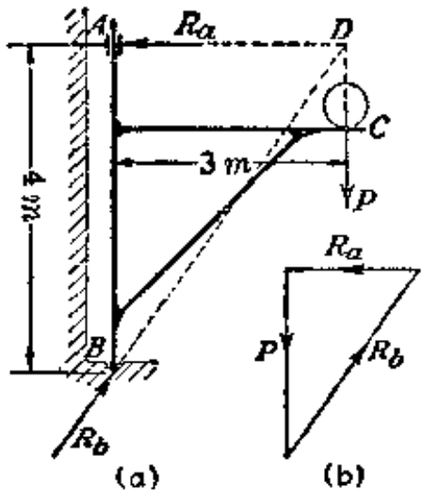
例題和習題

23. 第 43 圖中是一起重裝置。各支承處的摩阻力可以不計。設圖中 $P=4t$，試求 A 和

B 兩處的反作用力 R_a 和 R_b。

解：以整個裝置作爲「分離體」（第 43a 圖）。分離體上共有 P，R_a 和 R_b 三力，它們的作用綫共同交於一點。

嚴格說來，軸承 A 所生的反作用力應該是分佈在「軸承跟直軸的全部接觸面」上。不過因爲這一接觸面比起全部結構來實在非常微小，所以把反作用力 R_a 當作是集中在一點（譬如說，軸承長度方向的中點）也無不可。軸承無摩擦力，因之，R_a 應垂直於 AB。根據這一些適當的簡化假定，R_a 的方向和作用點乃可決定如圖。引長 R_a 作用綫跟 P 力作用綫交於 D 點。BD 顯然就是 R_b 的作用綫。



第 43 圖

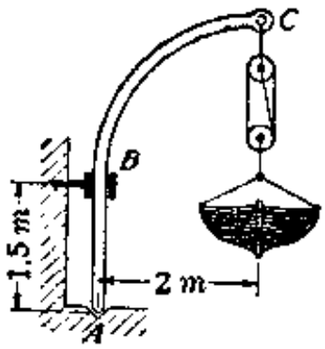
三力的作用綫確定後，畫「力三角形」如第 43b 圖。因「力三角形」跟 ΔABD 相似，故 $R_a : 3 = P : 4$；也就是 $R = \frac{3}{4}P = 3t$。同樣情形，$R_b : 5 = P : 4$；$R_b = \frac{5}{4}P = 5t$。R_a 和 R_b 的方向各如圖中所示。

24. 第 44 圖中是一懸掛救生艇的裝置。前後一式兩個，可懸掛救生艇一艘。圖中彎柱 ABC 可以繞 AB 軸旋轉，B 處爲一無摩擦的軸承。設救生艇以及滑輪等的重量爲 480kg，試求 A，B 兩處，彎柱所受的反作用力 R_a 和 R_b。

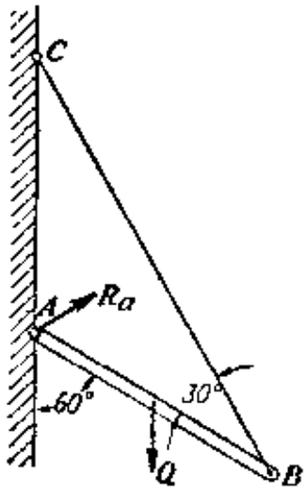
（解：$R_a = 800kg$，$R_b = 640kg$）

25. 第 45 圖中，AB 是一切面均一的鉸鏈桿，重量 $Q = 2t$；BC 是一根完全柔軟的繩索，它的自重可以不計。試求 BC 繩中的張力 S 和鉸鏈 A 處的反作用力 R_a。

（解：$R_a = 1t$，跟鉛垂綫成 60° 交角；$S = \sqrt{3}\,t$）



第 44 圖

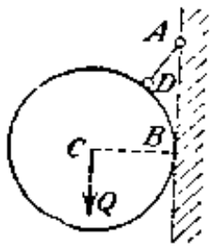


第 45 圖

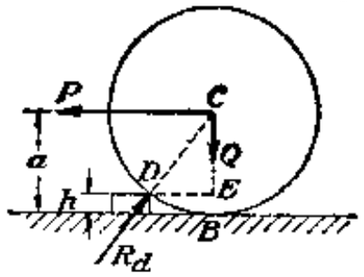
26. 第 46 圖中，圓球重 Q，半徑爲 r，由 AD 綫懸掛，靠在一鉛垂牆面上。試求 AD 綫內的

張力 S 和 B 處牆面對球的反作用力 R_b。設 $Q=4kg$, $r=3cm$, $AD=2cm$, 問 R_b 和 S 等於多少?

(解: $S=5kg$, $R_b=3kg$)



第 46 圖



第 47 圖

27. 第 47 圖是一圓柱形路滾，重量爲 Q，半徑爲 a。路滾前有一高 h 的障礙 D。試求圖中 P 最小應多大，才能將路滾拖過這障礙?

(解: 路滾開始被拖動時，它和水平地面的接觸立刻就將分開；其間的壓力，因此，應等於零。路滾上此時尚只有三個力作用: P, Q 和障礙物的反作用力 R_d。因 P, Q 兩力始終通過圓柱中心 C，故路滾將動未動尚屬平衡時，不論 D 處有無摩阻力存在，R_d 的作用綫必定也通過 C 點。這三個「力」的作用綫既決定，乃可畫「力三角形」(圖中未繪)。這「力三角形」顯然跟 ΔCED 相似，故得

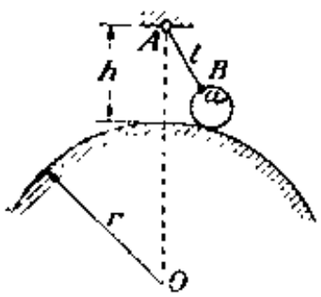
$$P:Q=\sqrt{a^2-(a-h)^2}:(a-h)$$

$$P=\frac{\sqrt{\frac{h}{a}\left(2-\frac{h}{a}\right)}}{1-\frac{h}{a}}\cdot Q$$

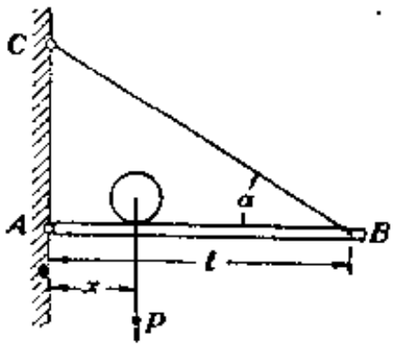
28. 一小圓球重 Q，半徑爲 a，由一 AB 綫掛在固定點 A 處，小球又另放在一半徑等於 r 的光滑圓柱的表面上(見第 48 圖)。圓柱的中心 O 恰好在 A 點的正下方。設 AB 長度爲 l，試不計摩阻力求 AB 綫內的張力 S 和小球對於圓柱的壓力 R。

(解: $S=Q\frac{l+a}{h+r}$, $R=Q\frac{r+a}{h+r}$)

29. 一個切面均一的水平桿 AB，自重甚小可以不計，長度爲 l。AB 桿 B 端由一拉桿 BC 固定在 AC 牆上鉸鏈 C 處；另一端由鉸鏈裝定在牆上 A 處。BC 的水平綫仰角爲 α。現在有一重體 P 可以放在 AB 上任何一點。假設重體離 AB 桿 A 端的距離爲 x，試



第 48 圖



第 49 圖

求拉桿內的張力 S 跟 x 的關係（第49圖）。

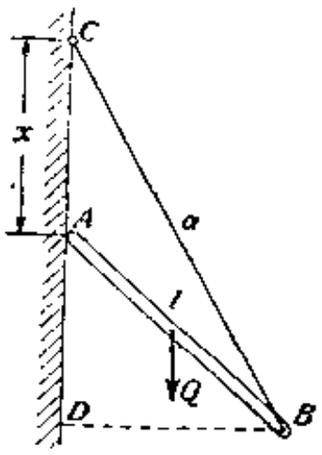
（解：$S=P\frac{x}{l}\frac{1}{\sin\alpha}$）

30. 第50圖中，AB 是一切面均一的桿件，重 Q 長 l，BC 繩的長度爲 a，牆面 CAD 完全光滑。試求平衡時，x 應等於多少？

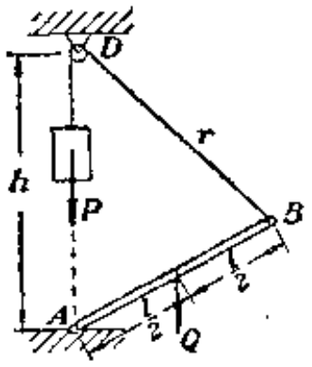
（解：$x=\sqrt{\frac{a^2-l^2}{3}}$）

31. 第51圖中，AB 爲一重 Q 長 l 的切面均一的鑄鐵桿，D 爲一尺寸極小的滑輪。設圖中 $h>l$，試不計摩擦力求 BD 的長度 r 等於多大？

（解：$r=2h\frac{P}{Q}$）

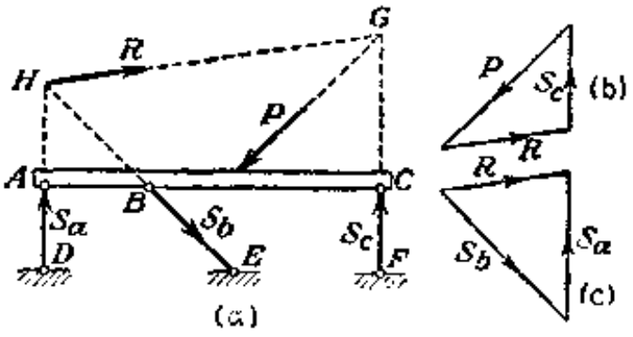


第 50 圖



第 51 圖

32. 水平梁 ABC 擱置在 AD，BE 和 CF 三鉸鏈桿上（見第52圖）。試求 ABC 梁在圖中 P 力作用下，三鉸鏈桿內的內力 S_a，S_b 和 S_c 等於多大？



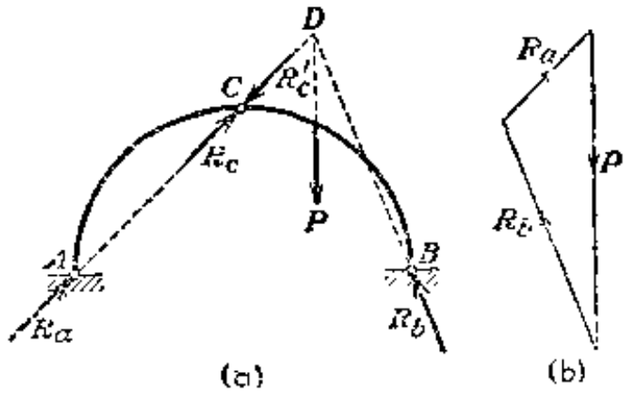
第 52 圖

解：因 S_a，S_b 和 S_c 的作用綫應與相基各桿件的長軸相合，故都是已知的。ABC 梁上共有四「力」作用：P 力和三桿件的反作用力。因此，需要先合成 S_c 和 S_b 兩反作用力使問題簡化爲「三力平衡」問題。引長 DA 和 EB，得 H 爲 S_a 和 S_b 的合力 R 線通過的一點。R 的大小方向則尚屬未知。S_c 和 P 以及 R 三力既應成平衡，它們自然必須交於一點。如命 G 爲 P 力跟 S_c 力的交點，那末 HG 顯然就是 R 力的作用綫。畫「力三角形」如第52b圖，求得 R 和 S_c 的大小。之後，再分解 R，這樣，S_a 和 S_b 的大

小也就隨而確定(第52c圖)。由第52b,c圖的兩個「力三角形」還可看出：桿件 AD 和 CF 是受壓力作用；桿件 BE 則是受拉力作用。

33. 第53a圖中的三鉸拱 ACB 上有一鉛垂力 P 作用。試不計拱的自重求 A, B 兩支點的反作用力。

解：將三鉸拱的 AC 部份當作一個「分離體」。它上面只有「支點 A 的反作用力 R_a」和「鉸鏈 C 處的桿子壓力 R'_c」兩個「力」在作用。因之，這兩個「力」的作用綫必然就是兩鉸鏈間的連接綫 AC，否則無法平衡。之後，觀察拱的 BC 部份。又可看到：這部份共有 P 力和支點 B 的反作用力 R_b 以及鉸鏈桿子的壓力 R_c 三個力在作用。R_c 自然是跟 R'_c 相等相反的力。這三「力」能夠成平衡就必須交於一點，所以 R_b 的作用綫必將通過 P 力和 R_c 的交點 D。最後把整個三鉸拱當作「分離體」，它上面三個「力」——P、R_a 和 R_b 的作用綫全屬已知。故根據 P 力的大小可畫出「力三角形」如第53b圖。R_a 和 R_b 的大小乃從而決定。



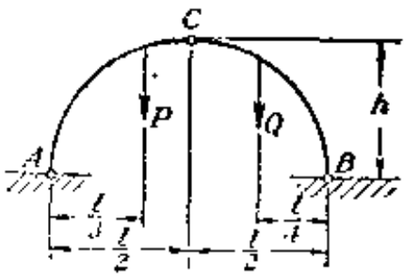
第 53 圖

34. 求第54圖中的三鉸拱在 A, B 兩處所產生的壓力，設 $l=10m$, $h=5m$, $P=4t$, $Q=3t$。

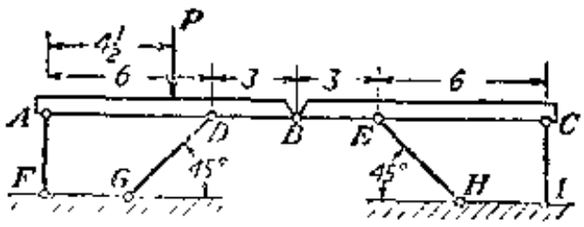
解：按上題方法先分別求出 P 和 Q 單獨作用時所產生於 A, B 兩鉸鏈的壓力。之後，將 A 和 B 處 P 和 Q 單獨產生的壓力分別用「力平行四邊形原理」求出它們的合力。這兩個合力就是 P, Q 同時作用時，A 和 B 處的壓力。至於這樣做法是否合理，我們回顧一下「疊三原理」就可肯定。本題結果：$R_a=4.01t$, $R_b=4.15t$。

35. 二水平梁由鉸鏈聯成一氣，擱置在四鉸鏈桿上(見第55圖)。圖中各長度尺寸均以公尺爲單位。設作用力 $P=500kg$，試求四桿件的內力等於多大。

(解：$S_a=188kg$ 壓力，$S_d=S_e=265kg$ 壓力，$S_c=62kg$ 張力)



第 54 圖

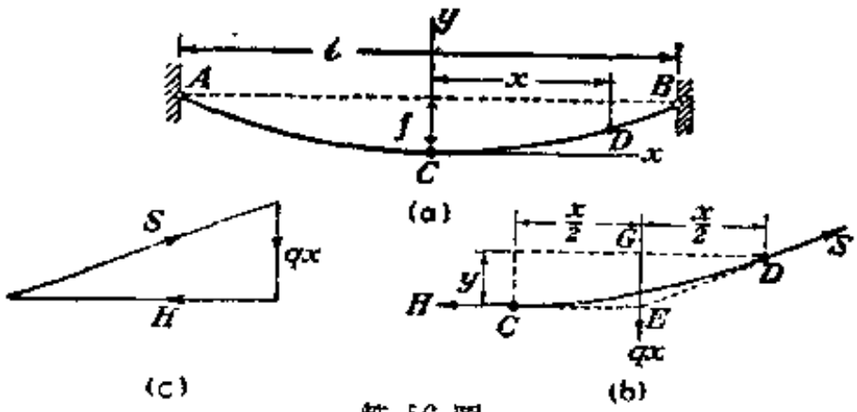


第 55 圖

11. 索鍊

工程結構中常應用柔軟的「索纜」或「鍊條」來傳導作用力。「索」或「鍊」張掛在兩個支點間，兩端固定，中間部份則因重力關係下垂如第 56a 圖。研究索鍊結構有兩個問題要解決：(1) **在平衡狀態下，索鍊的形狀是什麼樣的曲綫？** (2) **索鍊中各處的張力如何沿索鍊的長度方向變化？** 此兩問題可根據 § 10 討論的分析方法來解答。

以索鍊的最低點爲原點，定一正交坐標軸系 x, y 如第 56a 圖。任意選擇索鍊的一部份 CD 當作「分離體」(見第 56b 圖)。設想 CD 部份在割離前、全索鍊達到平衡時，已經硬化成爲一個剛體。這樣設想，



第 56 圖

因平衡後索鍊各部份的相對位置已不再變動，顯然不會影響 CD 部份的平衡條件，而可使研究對象仍然是一剛性物體，從而以前的各項平衡定理都可以引用無礙。CD部份共有三個力作用：它的自重，其餘部份對它兩端的拉力 H 和 S。命 q 爲索鍊單位長度的重量。一般情形下，索鍊的形狀都是十分扁平的曲線。因此，CD 部份的重力可以當作等於 qx，並且是作用在 C, D 兩點的水平距離的中央(如第 56b 圖)。此外，因索鍊已假定爲完全柔軟，其中的張力自然只能沿索鍊的長軸作用。最低點 C 的切線爲水平方向，因之，H 的作用線必定也是水平方向。三力中兩個力的作用線既已確定，第三力——D 處的張力 S 自然就必須通過以上兩力的交點 E。但 S 力的作用線應跟 D 點的切線相合，故 ED 同時也決定了曲線在 D 處的切線方向。作「力三角形」如第 56c 圖，這三角形應跟 ΔEDG 相似。故得

$$y : x/2 = qx : H$$

$$y = \frac{qx^2}{2H} \qquad (a)$$

(a) 式顯然就是索鍊平衡時的形狀曲線的方程式。 對於一定的索鍊，q 和 H 都是固定常數，可見 (a) 式所表示的是一鉛垂拋物線(1)。

根據力三角形，索鍊中任何一橫切面上的張力是

$$S=\sqrt{H^2+(qx)^2} \tag{b}$$

可見張力在 $x=0$，即最低點C處，它的值最小。 由最小值起，張力沿索鍊的長軸方向向兩支點逐漸增加。 等到達到支點 $x=\pm\frac{l}{2}$ 處，張力就增加到它的最大值。

假使索鍊的最大「彎落」f（見第 56a 圖）和跨度 l 是已知的，由 (a) 式就可得出

$$H=\frac{ql^2}{8f} \tag{c}$$

代入 (b) 式內，並令 $x=l/2$，即可求出支點處的「最大張力」爲

$$S_{max}=\sqrt{H^2+\left(\frac{ql}{2}\right)^2}=H\sqrt{1+\left(\frac{4f}{l}\right)^2} \tag{d}$$

因 f/l 比值一般都很小，應用「二項定理」展開上式時，其中第二項以後全可不計，故得

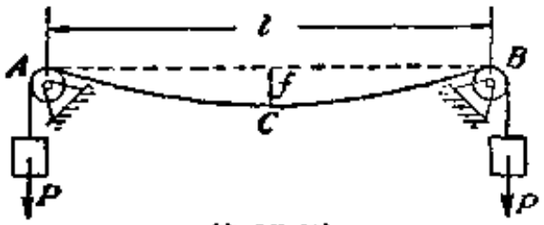
$$S_{max}=H\left[1+8\left(\frac{f}{l}\right)^2\right] \tag{e}$$

例題和習題

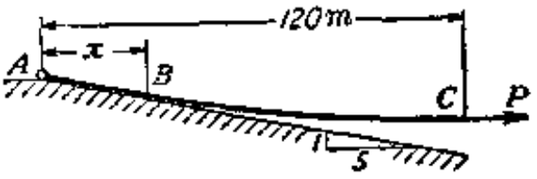
36. 第57圖中，ACB 是一根單位長度重 2kg/m 的柔軟懸索，張掛在 A，B 兩個尺寸極小的滑輪間。 它的兩端各吊一重量 $P=2t$ 的物體。 兩滑輪中心的「位置高度」相同，相互距離爲 $l=200m$。 試不計摩擦力求此索的中點的彎落 f。

（解：$f\approx5m$）

37. 第 58 圖的懸索，單位長度重 2kg/m，一端固定在一 1：5 的光滑斜面的A點，另外一端



第 57 圖



第 58 圖

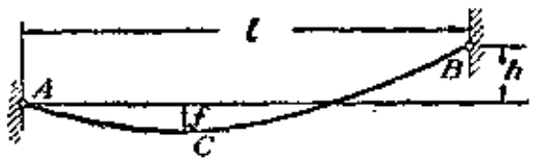
(1) 較精確的分析，此曲綫應爲一懸綫(catenary)，而非拋物綫。 但在 f/l 比率很小的情形下，這兩種曲綫實際上沒有多大差別。

C 有一水平力 $P=900$kg 作用。A，C 間的水平距離爲 120m。懸索跟斜面在圖中 B 點開始分離。試求 B 點到 A 點的水平距離 x 以及索中的最大張力 S_a。

(解：$x=30$m，$S_a=930$kg)

38. 第59圖中，AB 索的重量可看作沿水平方向均勻分佈。假設 AB 索的單位長度重量 $q=5$kg/m，圖中 $f=1$m，$h=2$m，$l=60$m，試求最低點 C 處的張力 H 等於多大？

(解：$H=1210$kg)



第 59 圖

39. 假設第59圖中懸索全部重量 $Q=100000$kg 均勻分佈在它的水平跨度 l 間，圖中 $l=100$m，$f=12$m，$h=10$m，試問索中的最大張力 S_{max} 等於多大？

(解：$S_{max}=94700$kg)

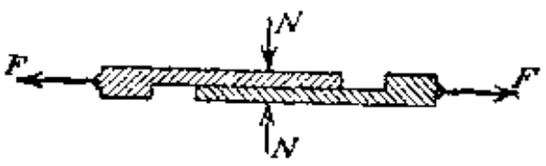
40. 第57圖中，P 力大小等於一定值時，「彎落」跟跨度的比率是 $f/l=\frac{1}{25}$。問 P 力如增大一倍，此 f/l 值應等於多少？

(解：$f/l=1/25$)

12. 摩阻力

在以前各問題中，物體和支承間的接觸表面都假定是絕對光滑的，因之支承的反作用力都只在接觸面的垂直方向作用。不過這種理想情形的假定並不是對所有問題都適合。在若干情形下，這一假定固然還切合事實；但是在其他一些情形下，就完全不眞確。尤其是對於某些問題，其中接觸面間的滑動抵抗力已經是物體平衡的決定因素，我們決不可假定接觸面絕對光滑。

兩物體間的接觸面上實際必然有一有限的抵抗相對滑動的阻力存在。這阻力稱爲**摩阻力**。例如第60圖中，兩平板由兩個垂直於接觸面的作用力 N 壓緊後，我們如果要克服接觸面間的「摩阻力」使它們發生相對滑動，就必須沿接觸面加一個適當大小的 F 力才可能。



第 60 圖

關於兩個乾燥而清潔的表面(1)間的「摩阻力」問題，庫倫氏做過無數次實驗，在 1781 年公佈所得結果。現在將這些結果綜合如下：

(1) 假使接觸面間有一層液體膜(像潤滑劑)存在，它的摩阻力定律就跟以下討論的完全不同。

1. 接觸面間可以產生的全部摩阻力完全跟接觸面的面積大小無關。

2. 可產生的全部摩阻力跟接觸面受到的垂直壓力成正比例。

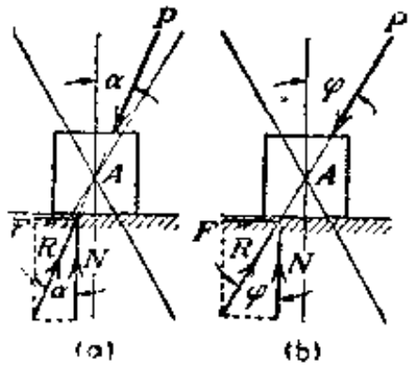
3. 試驗結果雖然表示，使接觸表面開始相對滑動所需要的作用力 F 比維持滑動所需要的要大一些。不過，在實際問題中，如果滑動速度不高，接觸面可產生的全部摩阻力就仍可當作跟速度無關。

以上各摩阻力定律用簡單的算式表示，就是

$$F = \mu N \tag{1}$$

式內 μ 稱爲摩阻係數。假使 F 等於使接觸面開始滑動所需的作用力，μ 就稱爲「靜力摩阻係數」。如果 F 等於較小的、維持滑動所需的作用力，那末 μ 應稱爲「動力摩阻係數」。各種不同的物質，它們的靜力或動力摩阻係數也各不相同。而且接觸面的表面狀況如果不同，係數值也將變化。

第 61a 圖中是一個放在水平平面上的微小長方體。它上面有一個跟鉛垂線成 α 交角的 P 力在作用。P 力比方體的自重大得多，所以方體的重力可以不計。不過我們把 P 力當作重力和其他「圖中未畫出」的外力的「合力」，自然也無不可。



第 61 圖

接觸面上，壓力的眞正分佈情形，實際上，要看 P 力的作用點和 α 角而定。不過攷察的對象如是平衡的物體，那末這些分佈壓力自然必須等於一個跟 P 力相等相反的反作用力 R。分解 R 爲接觸面的切線和法線方向的分力 F 和 N；F 和 N 分別代表摩阻力和垂直壓力。物體如果平衡，就必須

$$F/N = \operatorname{tg} \alpha \tag{a}$$

α 角假使逐漸增加到它的極限值 φ，使物體卽將開始滑動（第 61b 圖），那末平衡條件就要求

$$F/N = \operatorname{tg} \varphi \tag{b}$$

不過物體將開始滑動時，根據(1)式，應該

$$F/N = \mu \qquad (c)$$

故綜合(b)(c)兩式就可得到底下這一個重要的關係方程式：

$$\operatorname{tg}\varphi = \mu \qquad (2)$$

這一α角的極限值φ，通常稱爲**摩阻角**。 上式說明，摩阻係數乃等於摩阻角的正切。

綜合以上討論，知：物體卽將開始滑動時，接觸面所產生的全部反作用力，它的作用線跟接觸面的法線所成交角就等於摩阻角φ，它的方向則取阻止物體運動的方向（見第61b圖）。 至於將開始滑動前反作用力跟法線所成的交角，那就需要由平衡條件來決定。 換句話說，這一交角應該等於反作用力使物體平衡所需要的交角。 如假定接觸面完全光滑，$\mu=0$，摩阻角因之也等於零，全部反作用力 R 就顯然將垂直於接觸面。

以上討論雖然僅指 P 力在圖平面上作用的情形。 不過，一般說來，只要 P 力作用線在一摩阻角φ繞法線旋轉所成的圓錐內，那末，不論 P 力大小如何，物體都可以平衡。 這一圓錐（頂點在接觸面上）通常稱爲**靜力摩阻錐**。

例題和習題

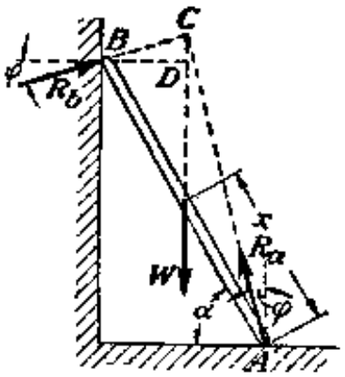
41. 一個鋼製劈木楔的尖角α必須等於多少，劈木時鋼楔才不會滑出來？

（解：$\alpha \leqq 2\varphi$）

42. 一石板放在傾斜的滑道上，滑道的水平緩仰角爲α。 假設石板和滑道間的摩阻角等於φ，試求石板的平衡條件。

（解：$\alpha \leqq \varphi$）

43. 第62圖中，AB 是一把自重可以不計的扶梯，長度等於 l。扶梯跟地面和牆面間的摩阻角全等於φ。 試求一重 W 的人可以沿梯攀登而扶梯不致滑動的最大距離 x 可以等於多大？



第 62 圖

解：扶梯將開始滑動時，A，B 兩處的反作用力都跟它們相應的法綫相交成交角φ。 人的重力必須通過這兩個反作用力 R_a 和 R_b 的交點 C，三力才能平衡。 重力既然要通過圖中 C 點，那末人的最高位置就可以在圖上確定；倘如果是按比例尺畫的，所求的 x 就可從圖上量出來。 否則，如下

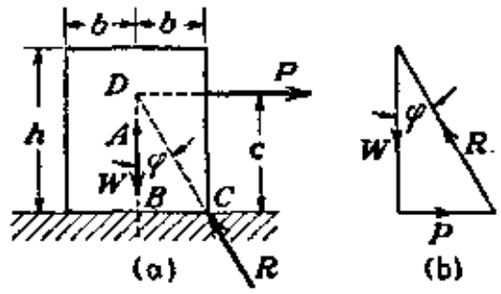
計算：

因　　$DB=l\cos(\alpha+\varphi)\cos\varphi,\qquad x=l-BD/\cos\alpha$

故　　$x=l\,[1-\cos(\alpha+\varphi)\cos\varphi/\cos\alpha]$　　(d)

可見如果沒有摩阻力，$\varphi=0$ 時，x 將變爲零；因此，A 處必須放一阻礙物來防止滑動，否則一步也不能攀登。此外，又可見：$\alpha\leqq 90^\circ-\varphi$ 時，人就攀登到梯頂也無妨礙。換句話說，如梯身跟 A 處法綫所成交角不大於摩阻角，那末扶梯毫無滑動危險。

44. 一個長方體寬 $2b$，高 h，放在一水平平面上如第 63a 圖。它的重量爲 W，接觸面間摩阻係數爲 μ。試問這長方體將開始同時滑動與滾轉時，圖中 P 力的大小及作用綫高度 c 應等於多大？



第 63 圖

解：將開始如此運動時，長方體是在三個力的作用下平衡：作用在它的中心 A 處的重力 W，作用力 P 以及水平平面的反作用力 R。以前已指出過：物體底面反作用力的眞實分佈情形要看作用力 P 的作用點而定，因之，底面上跟這些分佈力作用相等的反作用力 R 的作用點位置也要由 P 力作用點來決定。長方體將開始滾轉時，兩接觸面就將開始分開。底面的分佈力這時必須集中在 C 點作用。反過來說，分佈力集中在 C 點作用時，長方體就將開始滾轉。所以我們令 R 作用於 C 點就表示長方體即將滾轉；另外，再令 R 作用綫跟接觸面法綫成等於「靜力摩阻角」的交角，就表示長方體又將開始滑動。根據這兩個條件，同時滾轉和滑動時的 R 力作用綫乃完全決定。R 力和重力 W 的交點爲 D。三力平衡，水平力 P 自然必須通過這一 D 點。由第 63a 圖中 ΔDBC，可知，P 力作用綫的「臨界」高度應爲

$$c=b/\mu \qquad (e)$$

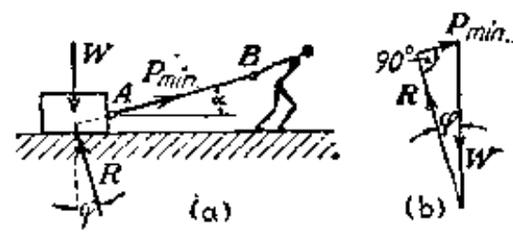
(e) 式又說明：長方體的尺寸如果是 $b/h>\mu$，那就不論 P 力作用綫的位置如何，總是滑動比滾動要先發生。

由第 63b 圖的力三角形，又可決定「引起開始滑動所必須的 P 力大小」爲

$$P=W\,\mathrm{tg}\,\varphi=\mu W \qquad (f)$$

將 (f) 跟 (1) 比較，可知，這 P 力的大小果然等於接觸面所能發生的摩阻力。此外，還可看到，只要滑動比滾轉先發生，P 力的大小顯然跟作用綫位置毫無關係。

45. 一個人用一根繩在水泥地面上拖一塊沉重的石塊（第 64 圖）。如果要使拖動時，拉力最小，問 AB 繩應該取什麼角度？設石塊和地面間的摩阻角等於 φ，問這一最小的拉力 P_{min} 應等於多大？



第 64 圖

解：石塊開始滑動時，它是在三個「力」作用下平衡：重力 W，拉力 P_{min} 和地面的反作用力 R。反作用力 R 是石塊底面的分佈壓力

的合力(第64a圖)。以上二個力要構成一個封閉的「力三角形」。這「力三角形」畫法如下：先作重力 W 的代表向量，從終點引一偏轉 φ 角的直綫以表示反作用力 R 的作用綫(第67b圖)。P_{min} 的向量，不用說，應該是從 W 力起點所引 R 力作用綫的垂綫。故可知，P 力在它跟水平綫成 φ 角時最小；也就是說，它的作用綫 AB 綫跟水平綫成等於摩阻角的交角時，拉力頂小。這時，

$$P_{min}=W\sin\varphi \qquad (g)$$

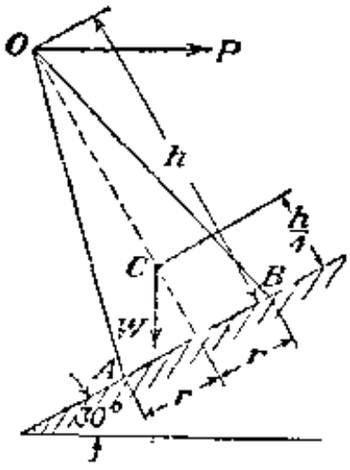
比較 (g) (f) 兩式，可見：在一塊阻係數很大的粗糙表面上拖動一個沉重的石塊，如果在水平方向去拖，那就需要非常巨大的拉力；假使將拉繩跟水平綫傾成等於摩阻角的交角，那就可省力得多。例如本題中 $\mu=0,6$ 時，由 (g) 式所得的最小拉力 P_{min} 就只等於由 (f) 式所得的水平拉力的 86% 而已。

46. 一個正圓錐體，高 12cm、重10kg、底圓半徑爲 $r=3.$ m、重心在中心軸上離底面 $h/4$ 處，放在一 30° 的斜面上(見第65圖)。錐體和斜面間的摩阻係數 $\mu=0,5$。試求平衡時，錐頂 O 處的水平力 P 最大可以等於多大？最小又應等於多大？

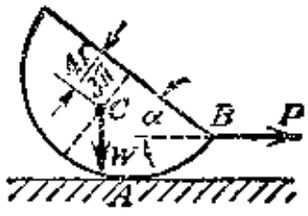
(解：$P_{max}=4,61$kg，$P_{min}=0,598$kg)

47. 一個長度不大的半圓柱體，半徑爲 r、重量爲 W，放在一水平平面上。接觸處的摩阻係數爲 μ。半圓柱的前邊中點處有一垂直於長軸的水平力 P 作用(見第66圖)。圖中 C 點是半圓柱的重心。試求這一半圓柱將開始滑動時，它上部平面跟水平面的交角 α 等於多大？

(解：$\sin\alpha=\dfrac{3\mu\pi}{4+3\mu\pi}$)



第 65 圖



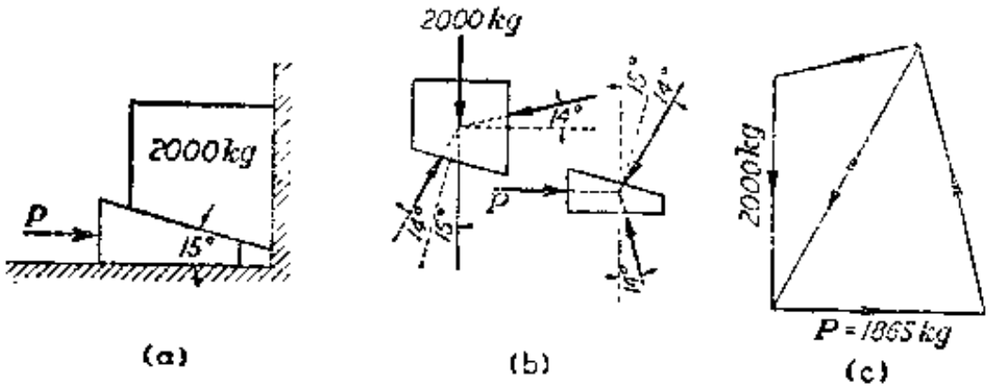
第 66 圖

48. 第67a圖中是一舉抬石塊的裝置。設各接觸面間的摩阻係爲 $\mu=0,25$，楔子(1)的自重可以不計，試求舉起圖中的重 2000 kg 的石塊所需的水平力 P 應等於多大？

解：$\mu=0,25$，摩阻角爲 $\varphi=14°$。當石塊將開始升起時，石塊和楔子的「分離體圖」各如第67b圖所示。其上每一有摩阻力的反作用力都跟相應的法綫成等於摩阻角的交角，並且取阻止運動發生的方向。石塊和楔子各在三個「力」作用平衡，它們的「力三角形」

(1) 又叫"尖劈"。

都應該是封閉三角形。我們先畫石塊上各力的「力三角形」。根據所得結果，再畫楔子的「力三角形」。第67c圖所表示的就是這兩個「力三角形」。如果圖是按比例尺畫成的，我們就可由圖上量得 $P=1865$kg。



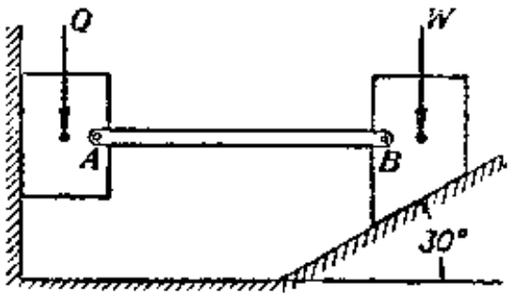
第 67 圖

49. 如第68圖中的裝置，牆面和斜面上的摩阻係數各爲0,3和0,2。設 $Q=300$kg，試求平衡時，圖中 W 力的最小值等於多大？

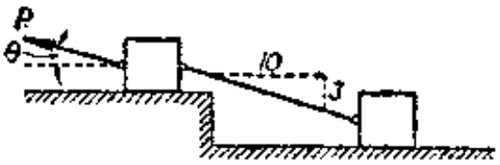
(解：$W_{min}=2950$kg)

0. 兩個各重10kg的立方體由一根軟繩相互連結住，放在如第69圖的上下平面上，各接觸面間的摩阻係數都是 $\mu=0,3$。問兩立方體將開始向左滑動時，圖中 P 力的方向(即 θ 角)及最小值各等於多大？

(解：$P_{min}=5,75$kg，$\theta=16°42'$)



第 68 圖



第 69 圖

13. 投影法

以上所討論的「力的合成和分解」以及「平面力系平衡問題」等等都是應用「分離向量」的「幾何相加」來處理。不過並不是說，這是唯一可能的方法。如果任意選擇作用平面上兩根正交直線 x, y 作爲坐標軸，將各力投影在兩軸上，應用各投影的「代數相加」，事實上，也同樣可以解決以上各問題。

第70圖中，F_1 和 F_2 是物體 A 點的兩個作用力。兩「力」跟坐標軸正方向的交角分別爲 α_1, β_1 和 α_2, β_2。由「力平四邊形」求出它們的合力 R。P 跟 x, y 軸的交角爲 α 和 β。投影各力於正 x 軸方向。

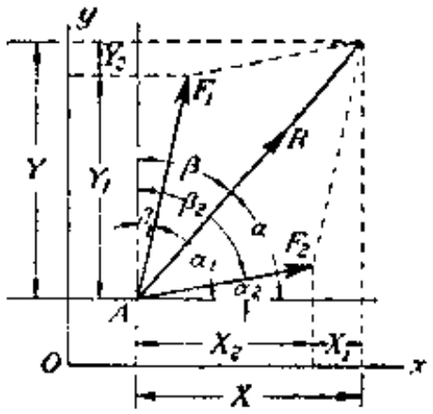
投影值爲 $F_1\cos\alpha_1$, $F_2\cos\alpha_2$ 和 $R\cos\alpha$。由圖上可以看到,

$$R\cos\alpha=F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2 \qquad (a)$$

同樣,投影各力於正 y 軸方向,又可得

$$R\cos\beta=F_1\cos\beta_1+F_2\cos\beta_2 \qquad (b)$$

由以上兩式,可以看出:**兩力的合力對於任何軸綫的投影,總等於兩力對於同軸投影的「代數和」。**



第 70 圖

只要連續應用「力平行四邊形原理」,以上結論顯然可推廣應用於任何多個數的平面共點力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$。令

$$F_1\cos\alpha_1=X_1, F_2\cos\alpha_2=X_2, \cdots\cdots F_n\cos\alpha_n=X_n$$

$$F_1\cos\beta_1=Y_1, F_2\cos\beta_2=Y_2, \cdots\cdots F_n\cos\beta_n=Y_n$$

$$R\cos\alpha=X,\ R\cos\beta=Y$$

卽得

$$\left.\begin{aligned} X&=X_1+X_2\cdots\cdots+X_n=\sum_{i=1}^{i=n}X_i \\ Y&=Y_1+Y_2\cdots\cdots+Y_n=\sum_{i=1}^{i=n}Y_i \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

此式說明:n 個平面共點力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 的合力對於任何坐標軸的投影就等於所有各力對同軸投影的「代數和」。

已知各力的大小和方向時,它們在坐標軸 x, y 上的投影可以應用表格計算。合力兩投影 X 及 Y 的大小可在表中直接算出。它本身的大小和方向,則由以下各式計算:

$$\left.\begin{aligned} R&=\sqrt{X^2+Y^2} \\ \cos\alpha&=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \cos\beta&=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

應用此式求合力的大小和方向,有時,可較 § 7 中的「幾何相加」方法方便。

如果各已知力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 是一個平衡力系,合力等於零,那末,根據(4)中第一式,可知,必須 $X=0$, $Y=0$;否則,合力就不會等於零。所以按(3)式,可得

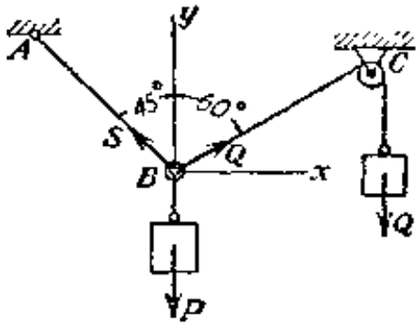
$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n} X_i=0\\ \sum_{i=1}^{i=n} Y_i=0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

這就是平面共點力系的平衡條件的代數形式，跟 § 11 所說「平衡力系的力多邊形必須封閉」的幾何形式的平衡條件，在意義上，完全相同。以下我們舉幾個例題來說明應用(5)式解決靜力學問題的方法。

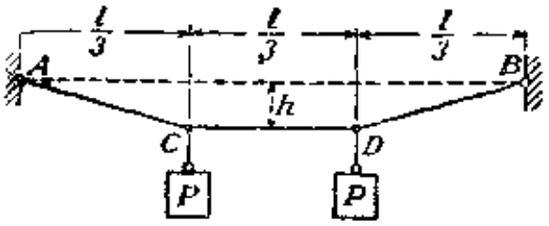
例題和習題

51. 在第 71 圖中的裝置中，$Q=10$kg。試求重力 P 的大小和 AB 繩內的張力 S 等於多大？

解：如不計滑輪 C 的摩阻力，BC 整個繩的張力顯然應等於 Q。圖中 B 環，因之，是在三個「力」作用下平衡。選定坐標軸 x，y 如圖，由(5)式，可得：



第 71 圖



第 72 圖

$$Q\cos 30^\circ - S\cos 45^\circ = 0$$

$$Q\cos 60^\circ + S\cos 45^\circ - P = 0$$

按此兩式中第一式，可求出 $S=5\sqrt{6}$ kg。代入第二式內，又可得

$$P=5(1+\sqrt{3})=13.7\text{kg}。$$

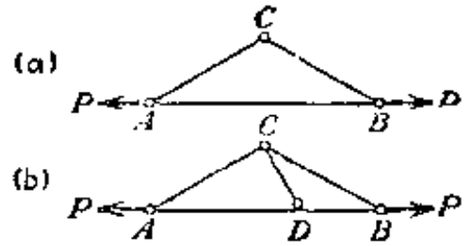
52. 第 72 圖中，跨度 $l=30$m，垂落 $h=5$m。軟索 $ACDB$ 的自重很小，可以不計。試求軟索的 AC 和 CD 部份內的張力 S_1 和 S_2 各等於多大？

(解：$S_1=\sqrt{5}P$，$S_2=2P$)

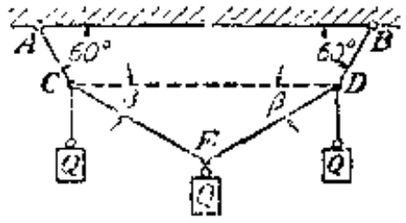
53. 第 73a 圖中，三個鉸鏈桿構成一個三角形 ABC。兩個 P 力在 A，B 兩點沿 AB 桿件的長軸方向作用。(a) 試求各桿件中的內力；(b) 另外，在 AB 桿件中間加設一個鉸鏈桿 CD 如第 73b 圖。試問各桿件中的內力將如何變化？

54. 第 74 圖中，$ACEDB$ 是一根軟索，E 點是它的中點。試求平衡時圖中 β 角應等於多大？

(解：$\beta=30^\circ$)



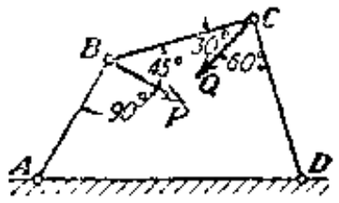
第 73 圖



第 74 圖

55. 如第 75 圖的三個鉸鏈桿的裝置，圖中作用力 $P=10$kg。試求平衡時，Q 力應等於多大？

解：先觀察 B 點的平衡。將各力投影在垂直於 AB 的坐標軸上。之後，再考察 C 點的平衡，以 BC 爲坐標軸，將各力投影在坐標軸上，就可求得 $Q=16.3$kg。



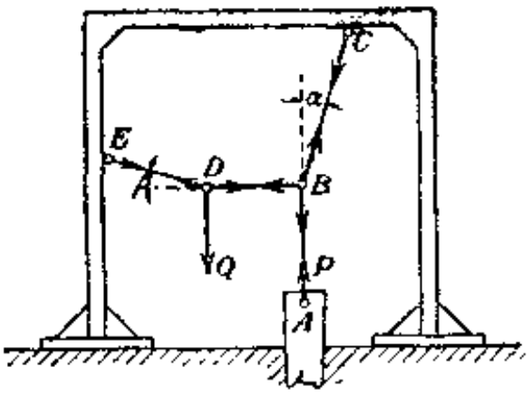
第 75 圖

56. 第 76 圖中是一個拔樁的裝置。ABC 是一根連接樁頂和拔樁架的軟索，它的 BC 部份跟鉛垂綫交成微小的 α 角。另一 BDE 繩將 ABC 索的 B 點跟拔樁架的 E 點連住。它的 BD 部份水平；DE 部份却跟水平綫成微小的 β 角。現在在 D 點加一個鉛垂向下的拉力 Q。如 $\alpha=\beta=0.1$ 弧度，試求樁子受到的拔力將等於多大？

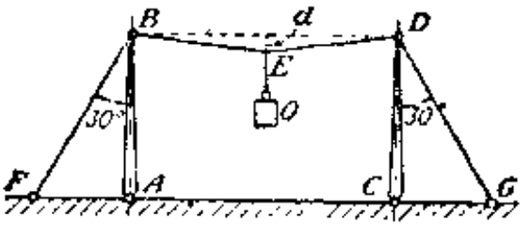
解：先觀察 D 點的平衡。投影各力於一鉛垂綫上，得 DE 部份內的張力爲 $S=\frac{Q}{\sin\beta}\approx 10Q$。之後，考察 B 點的平衡。仍用投影法，可得拔力 P 約等於 $100Q=15000$ kg。

57. 兩直立桿 AB，CD 由拉繩 BF，DG 固定在同一平面內。其間張一根長 l 的 BD 繩。BD 的中點處懸掛着一個重體 Q（第 77 圖）。設 $Q=100$kg，$l=20$m，彎落 $d=1$m，試求拉繩 BF，DG 內的張力各等於多大？

（解：$S\approx 1010$kg）



第 76 圖



第 77 圖

58. 在一個彎曲桿件 CD 上有一個細環 A 可以沿這桿件作無摩阻滑動。彎桿 CD 的彎曲半徑爲 a。P，Q 兩力作用情形見第 78 圖。滑輪的尺寸和摩阻力可忽略不計。試求平衡時 α 角的大小應等於多大？

解：滑輪摩阻力既不必考慮，AB 繩中的張力顯然就等於 Q。A 環的平衡是由於以下三個力的作用：P，張力 Q 和反作用力 R_a。R_a 的作用方向沿半徑 OA 的方向。將這三個

力投影在 A 點的圓弧切綫上，使未知的 R_a 不入算式，就可得

$$Q\cos\frac{\alpha}{2}-P\sin\alpha=0$$

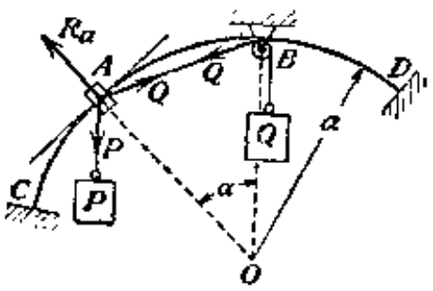
也就是
$$Q\cos\frac{\alpha}{2}-2P\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=0 \qquad (c)$$

故得
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{Q}{2P}$$

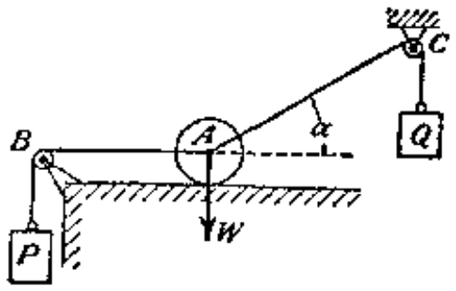
或
$$\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

也就是
$$\alpha=\pi \qquad (d)$$

(d)式表示：若是設想彎曲桿 CD 已經擴充成爲一個完全的圓周，那末 A 環恰好在 O 點的正下方處也會平衡，而且 A 環這樣的平衡跟 P，Q 兩力的大小無關。這結論顯然是合乎常理的。本題中如 $P=Q$，那 α 就將等於 60°。



第 78 圖



第 79 圖

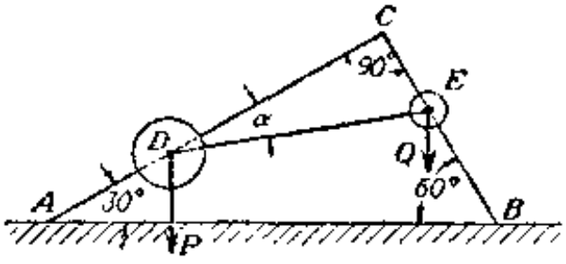
59. 第 79 圖中，A 球的重量爲 W，AB 繩取水平方向，所有各處的摩阻力都極小，可以不計。試求平衡時，圖中 AC 繩的水平綫仰角 α 和 A 球對圖中水平平面的壓力各等於多大？

(解：$\cos\alpha=P/Q$，$R=W-\sqrt{Q^2-P^2}$)

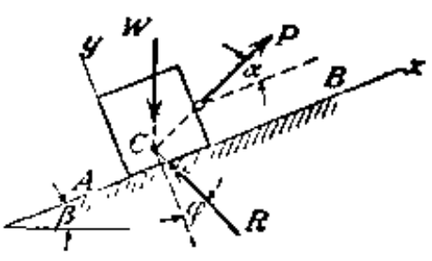
60. 第 80 圖中 D，E 兩球各重 P，Q。兩球可各自沿 AC 和 BC 繩作無摩阻滑動。兩球的中心連接綫是一根沒有伸縮性的軟綫 DE。試求平衡時，DE 跟 AC 的夾角 α 應等於多大？

(解：$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}Q}{P}$)

61. 第 81 圖中，一個重 W 的立方體放在一個傾斜 β 角的斜面上。其間靜力摩阻角爲 φ。立方體的尺寸恰巧可以使滑動比滾轉先發生。有一 P 力作用在立方體上，使它開始移動。問圖中 α 角應等於多大，P 力才最小？



第 80 圖



第 81 圖

解：P 力如果已達到使方體將開始滑動的足夠大小，方體就將在圖中 P，W 和 R 三個力作用下平衡。三力的交點爲 。選定坐標軸 x，y 如圖。由 (5) 式，可知

$$P\cos\alpha - R\sin\varphi - W\sin\beta = 0$$

$$P\sin\alpha + R\cos\varphi - W\cos\beta = 0$$

從第一式解出 R，代入第二式，即得

$$P = W\frac{\mu\cos\beta + \sin\beta}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} \qquad (e)$$

其中 $\mu = \mathrm{tg}\,\varphi$ 就是接觸處的摩阻係數。

以 α 作爲變數，微分 (e) 式，並令 $\frac{dP}{d\alpha}=0$，P 力最小的 α 值就可由下式決定：

$$u = \cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

故

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mu = \mathrm{tg}\,\varphi \qquad (f)$$

可見：作用力 P 跟斜面方向成等於摩阻角的交角時，拖動立方體所需要的拉力 P 最小。這跟第 45 題得到的結果正相符合，足見第 45 題的解答沒有錯誤。

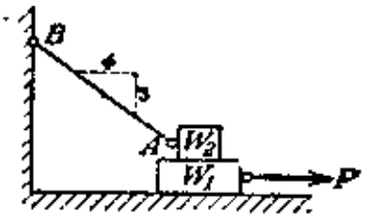
將 $\alpha=\varphi$ 代入 (e) 式中，P 力的最小值乃爲

$$P_{min} = W(\sin\varphi\cos\beta + \cos\varphi\sin\beta) = W\sin(\varphi+\beta) \qquad (g)$$

特例情形，$\beta=0$，斜面變成水平平面時，此式的 P_{min} 值就簡化爲第 45 題的 (g) 式。

62. 第 82 圖中有兩個大小不同的立方體層疊在一水平平面上。上面一方體又由一根 AB 綫連接在牆上的 B 點。各接觸面的摩阻係數都是 $\mu=0{,}3$。設圖中 $W_1=200\text{kg}$，$W_2=50\text{kg}$，問下面方體將開始滑動時，圖中水平力 P 應等於多大？

(解：$P=84{,}5\text{kg}$)



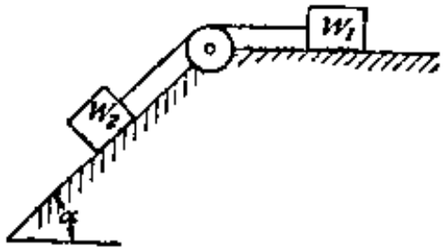
第 82 圖

63. 如第 83 圖的裝置，所有各接觸面上的摩阻係數都等於 μ，不過滑輪的摩阻力可以不計。設 $W_1=W_2$，試求斜面的水平綫仰角 α 應該等於多大，圖中兩物體才將開始滑動？

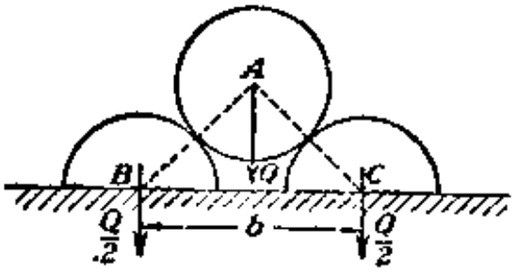
(解：$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mu$)

64. 第 84 圖中，兩半圓柱體跟水平平面間的摩阻係數爲 μ；各圓柱體間却沒有摩阻力發生。三圓柱體的半徑都等於 r。它們要在「中間圓柱不接觸水平平面」的條件下平衡。問下面兩個半圓柱體的中心距離 b 最大可以等於多大？

(解：$b=8\mu r/\sqrt{1+4\mu^2}$)



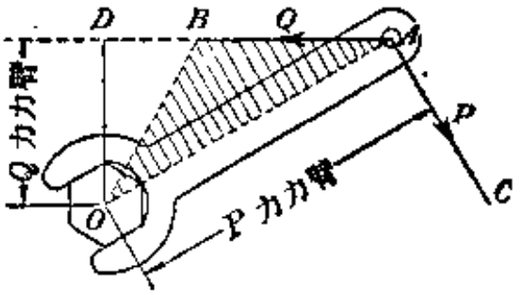
第 83 圖



第 84 圖

14. 力對於一定點的力矩

一個力使所作用的物體繞一個定點旋轉的「作用」，可以構成功一個「概念」。這一「概念」如應用來解決靜力學問題有時非常有用。譬如第 85 圖中的螺絲扳頭，它上面有如圖的 P,Q 兩個力作用。光由直覺經驗，已經可以發現：對於旋轉螺絲帽來說，即使 P,Q 兩力的大小相同，那跟扳手成直角的 P 力仍然要比 Q 力作用大。測量力的這種使所作用物體繞一個定點旋轉的「作用」的尺度就叫做力對於這一定點的力矩。力矩的大小以「作用力的大小」跟「定點到力作用線的距離」的乘積來代表。故圖中 Q 力對 O 點的力矩不但跟 Q 力的大小有關，而且要看 O 點到 Q 力作用線的距離 OD 的大小而定。O 點通常稱爲「**力矩中心**」；OD 則稱爲「力」對於 O 點的「**力臂**」。



第 85 圖

根據以上力矩的定義，Q 力對 O 點的力矩顯然就等於 ΔOAB 面積（圖中繪虛線部份）的兩倍。圖中 $\overline{AB}$ 是 Q 力的代表向量。ΔOAB 就是以力的代表向量 $\overline{AB}$ 爲底邊，力矩中心爲頂點的三角形。$\overline{AB}$ 和 OD 的長度當然應該分別按力和長度的比例尺決定。由這裏也可看到，力矩的單位應當是力的單位跟長度單位的乘積。如力的單位用 kg，長度單位用 m，那末力矩單位就是「kg-m」。工程問題中，另一力矩單位也是十分常用的，那就是「kg-cm」。（有時還用 t-m）。

假使物體上同時有若干個平面共點力作用，其中有幾個力使物體繞定點向某一方向旋轉；但其他幾個力却使物體繞同點向反方向旋轉，那末通常規定：自作用平面的同一方向觀察，那些使物體「反」時針方向旋轉的「力」的力矩爲正；「順」時針方向的爲「負」。所以上圖中，Q 力對力矩中心 O 的力矩爲正；P 力對同點的力矩爲負。

根據力矩的定義，力對於一定點的力矩，在下列各情形中，它的大小並不改變：(1) 力的作用點沿作用線任意移動，(2) 力矩中心沿平行於力作用線的直線上任意移動。此外，還可看到，「力」如果不等於零，那只有力矩中心恰好在力作用線上，力臂爲零，力矩才可能等於零。

15. 力矩合成定理

兩共點力的合力對作用平面上任何一定點的力矩就等於這兩個力對同點力矩的代數和。這就是力矩合成定理[1]。它的證明如下：

(1)「P，Q 兩力對定點 O 的力矩」方向相同的情形

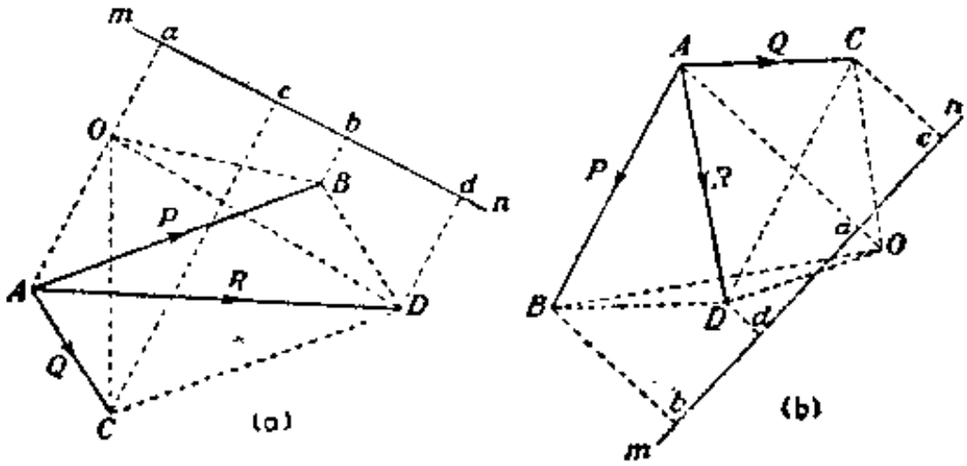
如第 86a 圖，先任意選定一直線 mn，令跟 OA 垂直。O 是力矩中心，A 就是 P，Q 兩力的交點。又引 Aa，Bb，Cc 及 Dd 垂直於 mn。就面積來說，可得

$$\Delta OAB=\tfrac{1}{2}OA\cdot ab,\ \Delta OAC=\tfrac{1}{2}OA\cdot ac,\ \Delta OAD=\tfrac{1}{2}OA\cdot ad$$

但 $ad=ab+bd=ab+ac$，故

$$\Delta OAD=\Delta OAB+\Delta OAC$$

可見在本情形下，定理是正確的。



第 86 圖

(2)「P，Q 兩力對 O 點的力矩」方向相反的情形

由第 86b 圖，可看到：$ad=ab-db=ab-ac$。故得

$$\Delta OAD=\Delta OAB-\Delta OAC$$

可見力矩合成定理對本情形也是正確的。

在 (2) 中，Q 力對 O 點的力矩原是負值，故以上兩種情形可總括爲：兩平面共點力的合力對於一定點的力矩就等於兩力對同點力矩的代數和。

如果有很多共點力 F_1，F_2……F_n 作用在同一平面，我們只要連續應用以上「兩個力的力矩合成定理」，就可得到這樣一個結論：這些力的

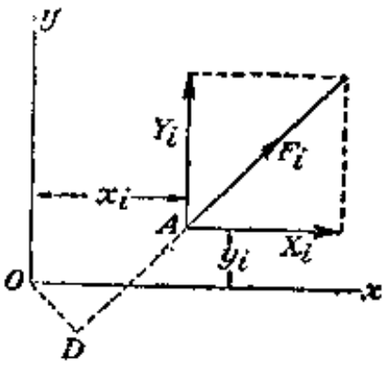
(1) 又稱凡力能 (Varignon) 定理。

合力對同平面上任何一個定點的力矩卽等於所有各力對同點的力矩的代數和。 證明這個更一般的「力矩合成定理」的步驟如下：先把 F_1 和 F_2 合成爲合力 R_1。 根據力矩合成定理，可知，F_1 和 F_2 對作用平面上任何一點的力矩都可以由 R 力對同點力矩來代表。 其次，又合成這一「部份合力」R_1 和 F_3，得到合力 R_2。 前三個力 F_1, F_2, F_3 對定點的力矩，因之，就可以由 R_2 對同點的力矩來代表。 如此繼續下去，直到包括 F_n 爲止，就可以得出以上結論。 如令 M_o 爲合力 R 對 O 點的力矩；$(M_o)_1$, $(M_o)_2$, ……$(M_o)_n$ 各爲 F_1, F_2, ……F_n 對 O 點的力矩，以上結論卽可用方程式表示如下：

$$M_o=(M_o)_1+(M_o)_2+(M_o)_3+\cdots\cdots(M_o)_n=\sum_{i=1}^{i=n}(M_o)_i \qquad (6)$$

計算式中$(M_o)_i$ 時，通常分解作用力 F_i 於兩個正交坐標軸 x, y 方向，求出它的分力 X_i 和 Y_i 對 O 點的力矩代數和來確定$(M_o)_i$。 這樣，計算可以簡便一些。如 x_i, y_i 爲 F_i 力作用點 A 的坐標值(第 87 圖)，按「力矩合成定理」，就得

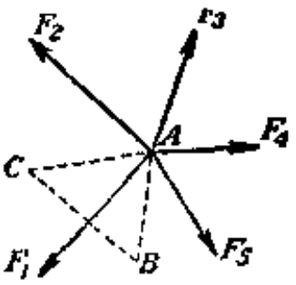
$$(M_o)_i=F_i\cdot OD=Y_ix_i-X_iy_i \qquad (7)$$



第 87 圖

16. 力矩法

根據(6)式，可推知：(1) 力矩中心如果恰巧在力系合力作用線上，或 (2) 各力如果構成平衡，合力等於零，那末這一平面共點力系中各力對力矩中心的力矩代數和就非等於零不可。 這一事實對於決定一個平面共點力系的平衡條件非常有用。 例如第 88 圖中的力系。 假使這力系對一定點 B 的力矩代數和等於零，那末不是合力等於零，就是合力是作用在 AB 線上。 若這力系對另一「不在 AB 直線上的力矩中心 C」的力矩代數和，仍等於零，那合力就非等於零不可；因爲合力不可能同時有 AC 和 AB 兩根作用線。 以上討論如果用方程式表示，就是



第 88 圖

$$\sum_{i=1}^{i=n}(M_B)_i=0, \quad \sum_{i=1}^{i=n}(M_C)_i=0 \qquad (8)$$

兩式也就是平面共點力系的平衡條件在力矩法中的表現形式。(8)式中 B,C 兩點是力系作用平面上的任意兩個力矩中心，不過它們不可以跟各力交點在同一直線上。(8)式跟 § 13 中(5)式，在意義上，自然完全相同。不過應用 (8) 式解決靜力學問題有時要簡便得多。解決平面共點力系的平衡問題而且還可以由 (5) (8) 兩式各取其中一式來應用。這樣做，有時可更方便。

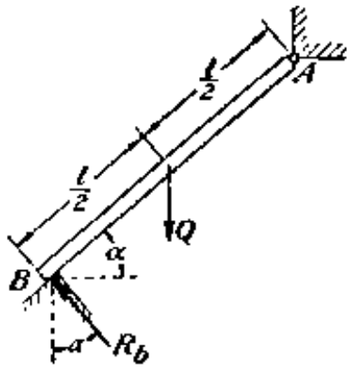
例題和習題

65. 第 89 圖中 AB 是一個切面均一，重量爲 Q 的桿件。一端由一鉸鏈固定在 A 點；另一端 B 斜擱在一個光滑的斜面上。試求 B 端受到的反作用力 R_b 等於多大？

解：因不計摩擦力，故 R_b 應垂直於桿軸。AB 桿上共有 Q，R_b 和鉸鏈 A 的反作用力三個力在作用。此三力構成平衡；它們對作用平面上任何一定點的力矩代數和，因此，必須等於零。現在取 A 爲力矩中心，使未知的 A 處反作用力可以不計，即得

$$Q\frac{l}{2}\cos\alpha-R_b l=0$$

故 $$R_b=\tfrac{1}{2}Q\cos\alpha$$



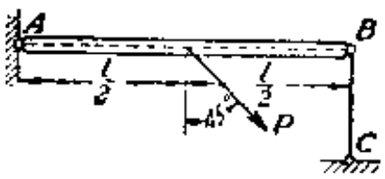
第 89 圖

66. 第 90 圖中 A,B,C 都是理想鉸鏈。水平樑 AB 的自重可以不計。試求 BC 桿件內由圖中 P 所引起的內力等於多大？

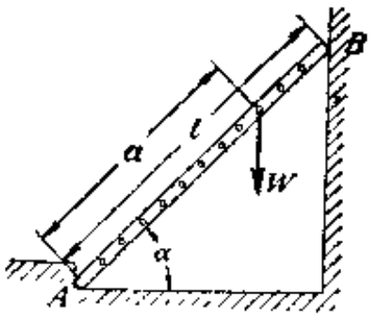
(解：$S=P/2\sqrt{2}$，壓力)

67. 第 91 圖中，AB 是一把扶梯。一重體 W 可掛在此扶梯上任何一檔的下面。重體所在一檔到梯底的距離爲 a。各接觸面的摩阻力和扶梯的自重可以不計。試求 B 處反作用力 R_b 的大小。

(解：$R_b=\dfrac{Wa}{l\,\mathrm{tg}\,\alpha}$)



第 90 圖



第 91 圖

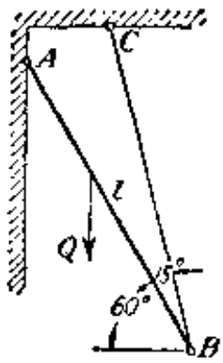
68. 鉸鏈桿 AB 長 l，一端固定在牆上 A 點，另一端由 BC 繩跟一固定點 C 連接着(第 92 圖)。AB 桿上有一重量 Q。重體可以放在 AB 桿上沿長軸方向的任何位置。AB

桿和 BC 繩的自重可以不計。試求 BC 繩中張力 S 最大時，重體的位置以及此時的張力 S_{max}。

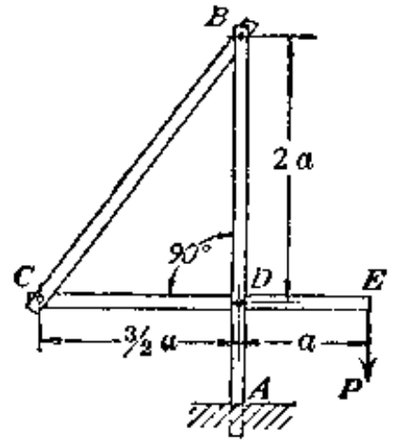
（解：$S_{max}=\frac{Q}{2\sin 15^\circ}=1,93\,Q$）

69. 第93圖中是一個十字架。E 處的 P 力是 48kg。求 BC 桿中的內力 S。

（解：$S=40$kg，壓力）



第 92 圖



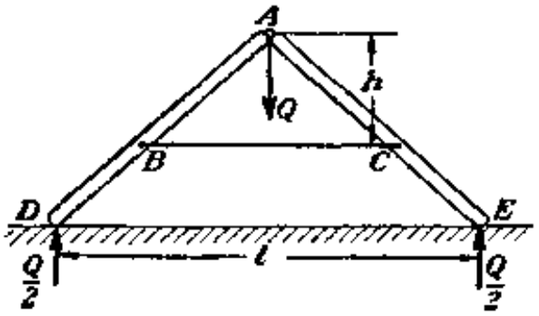
第 93 圖

70. 如第94圖的裝置。水平地面完全光滑。D、E 兩處的地面反作用力，因對稱關係，應該都等於 $\frac{Q}{2}$。問 BC 繩中的張力 S 等於多大？

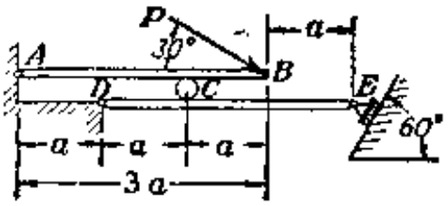
（解：$S=\frac{Ql}{4h}$）

71. 如第95圖的裝置。$P=200$kg。求 E 處的反作用力 R_e。

（解：$R_e=100$kg）



第 94 圖



第 95 圖

72. 如第96圖的裝置。AC 是一長 l 的桿件。BC 是一根拉繩。它們的自重都可以不計。一個光滑的圓球放在 AC 桿和牆面的中間。球半徑爲 a。球的重量爲 Q。如不計摩擦力，試求 BC 繩張力 S 最小時，圖中 α 角應等於多大？設 $Q=50$kg，$l=1$m，$a=20$cm，試問這最小張力 S 將等於多大？

解： 先考察圓球的平衡。圓球上共有三個力作用：重力 Q 和牆面的水平方向反作用力 R_d 以及垂直於桿軸的 AC 桿的反作用力 R_e。取 D 點作爲力矩中心，可得

$$R_e\cdot a\cdot\sin\alpha-Q\cdot a=0$$

即

$$R_e=Q/\sin\alpha \qquad (a)$$

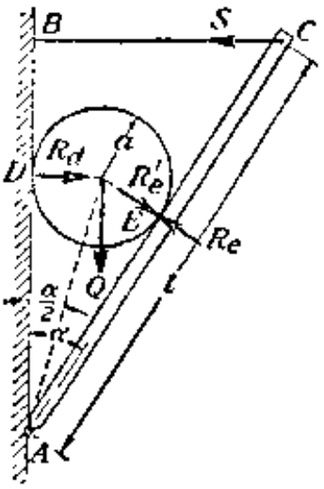
這一結果也可以由「三力在鉛垂軸上的投影代數和應等於零」的條件來求出來。

之後，考察 AC 桿的平衡。 AC 桿所受到的三個力是：BC 繩中張力在 C 處產生的反作用力 S，和 R_e 相等相反的圓球對 AC 的壓力 R'_e 以及鉸鏈銷子 A 的反作用力 R_a。 以 A 點作爲力矩中心，令各力對 A 點的力矩代數和等於零，就可得

$$Sl\cos\alpha-R_e'a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=0$$

因 $R'_e=R_e=Q/\sin\alpha$，故

$$S=\frac{Qa}{2\cdot l\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha} \qquad (b)$$



第 96 圖

仔細研究此結果，可知，當 $\alpha=0$ 及 $\alpha=\pi/2$ 時，張力 S 將變成無限大。在這兩個 α 值間，S 却都等於有限值。 可見：在 α 值在 0 到 $\pi/2$ 間，張力 S 必定有一個最小值。 以 α 作爲變數，微分 (b) 式，並令 $dS/d\alpha=0$，卽得

$$\sin\alpha\left(4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1\right)=0 \qquad (c)$$

也就是

$$\sin\alpha/2=1/2 \qquad (d)$$

將 (d) 代入 (b) 中，卽得

$$S_{min}=\frac{4Qa}{l} \qquad (e)$$

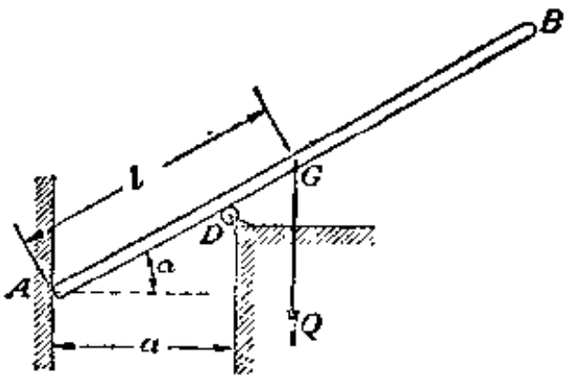
題中已知 $Q=50\text{kg}$，$l=1\text{m}$，$a=20\text{cm}$，

故 $$S_{min}=40\text{kg}$$

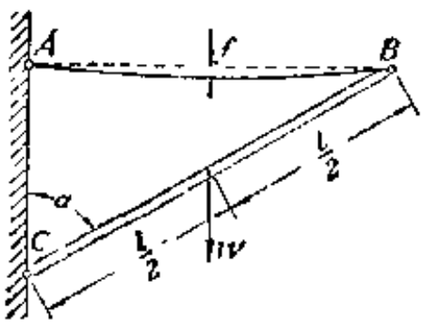
73. 第 97 圖中，AB 桿長 $2l$ 重 Q，擱置在一無摩阻力的微小滑輪 D 上。 它的一端 A 則抵在一鉛垂牆面的 A 點。 牆面光滑。 求平衡時，圖中 α 角的大小。

（解：$\cos\alpha=\sqrt[3]{a/l}$）

74. 第 98 圖中，鉸鏈桿 BC 長 l 重 W。懸索 AB 重 Q。此索的整個重量可以假定是均勻分佈在水平跨度 AB 間。A，B 兩點的高度相等。設圖中 $l=2.4\text{m}$，$\alpha=60°$，$W=10\text{kg}$，



第 97 圖



第 98 圖

$Q=2kg$，試求 AB 在中點的彎落 f 等於多大?

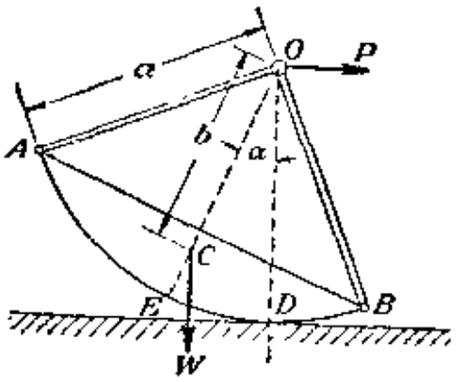
(解: $f=0{,}05m$)

75. 第 99 圖中的搖椅重 W，底面是一個半徑等於 a 的 AB 圓弧。圓弧的圓心爲 O。有一水平力 P 作用在 O 點。(a) 設搖椅的重心在圓弧 AB 的等分半徑 OE 上，距圓心 O 等於 b 處，試求平衡時，圖中 α 角的大小。(b) 設搖椅和地面間的摩阻係數等於 μ，P 力自小而大逐漸增加它的大小，問搖椅將開始滑動時，α 角應等於多大?

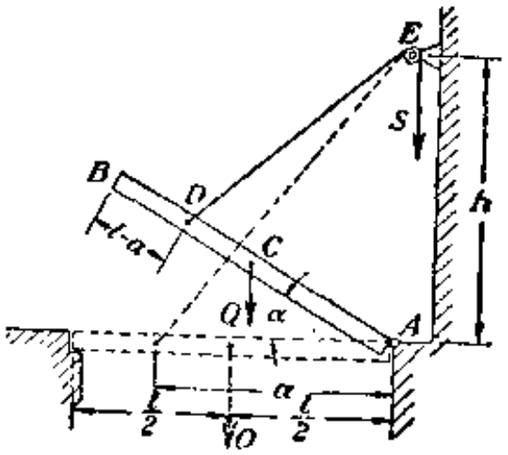
(解: (a) $\sin\alpha=\frac{Pa}{Wb}$，(b) $\sin\alpha=\frac{\mu a}{b}$)

76. 吊橋 AB 長 l 重 Q，一端裝在鉸鏈 A 上(見第 100 圖)。DE 是一根開關吊橋的拉繩。它所跨過的滑輪，尺寸極小，摩阻力也很小。滑輪到 A 點的高度爲 h。其餘尺寸見圖中所註。試求 DE 繩中張力 S 跟圖中「開啓角 α」的函數關係。

(解: $S=\frac{Ql}{2ah}\sqrt{h^2-2ah\sin\alpha+a^2}$)



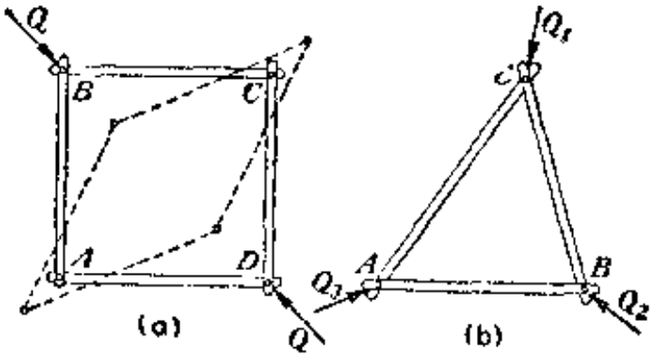
第 99 圖



第 100 圖

17. 簡單桁架

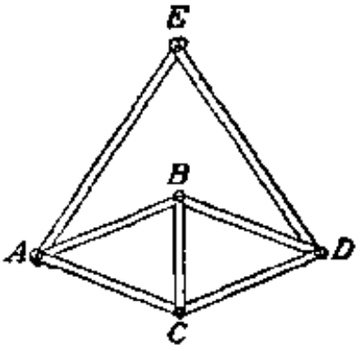
結構工程中常應用桁架代替橫梁來支承「荷重」。桁架由一系「桿件」構成。平面桁架，全部桿件的長軸都是在同一平面，桿件兩端則相互兩兩連接，組織成功一個剛性的構架。例如第 101 圖所畫的兩個構



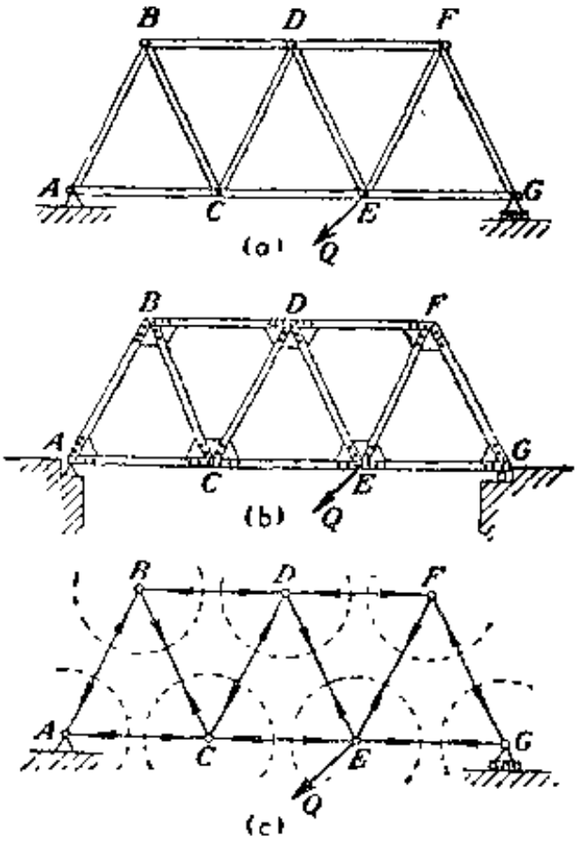
第 101 圖

架。圖 a 中 $ABCD$ 是四個桿件由梢子連接成的一個四方架。它如果受到如圖的兩個 Q 力作用，顯然立刻就會垮成圖中虛線所表示的形狀。可見四方架不是一個剛性構架。同樣，多於四的任何個數桿件，如果用梢子相互連接成爲一個多邊形形式的架子也決不會是一個剛性構架(以下簡稱剛架)。但是，一個由三個桿件用梢子連接成的三角架就完全不同。三角架(第 101b 圖)如果在各角頂受力作用，它的形狀，也就是 A,B,C 三頂點的相對位置，並不會改變(此處不攷慮桿件本身在長度方向受力作用而發生的微小變形。我們假定桿件在力作用前和作用後，長度並無變動)。因此，三角架是整個的等於一個剛體的。

把三角架 ABC (第 102 圖) 當作一個基本的剛性單位，在它上面附加上兩桿件 BD 和 CD 以組成一個新節點 D。得到的新桁架 $ABCD$ 顯然還是一個剛架。如果在 $ABCD$ 上再附加兩桿件 AE 和 DE，那末得到的仍然還是一個剛架，因爲 $ABCDE$ 剛架可以當作等於一個桿件 AD 同其他兩個新桿件 AE,DE 構成的一個剛性三角形。這種附加兩個新桿件組成新節點的方法，自然可無限制連續應用，故可得到如下一個法則：**一個剛性構架可以由一個用梢子連接的三角架開始，陸續加裝兩個又兩個新桿件在已成的剛架上，依次得各新節點來組成。**按照這一法則組成的任何「桿件系統」都稱爲簡單桁架。例如第 103 圖所畫的就是這種桁架；它的組合就是由基本單位 ΔABC 開始，按字母次序陸續加裝新桿件於已成系統而成。此一規律雖然並不是一系桿件兩端用梢子連接來組成剛性桁架的唯一方法，但是結構工程中



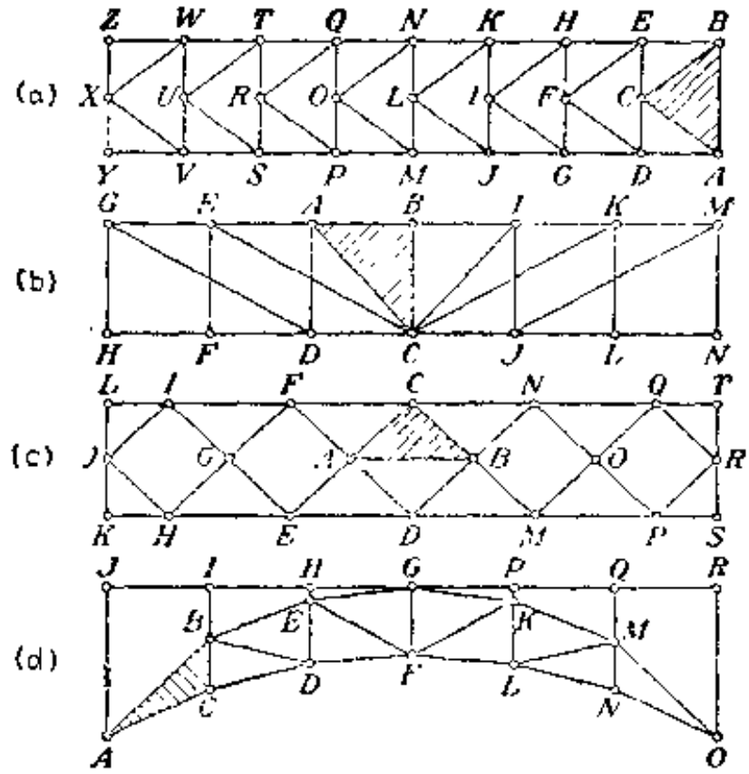
第 102 圖



第 103 圖

應用最多的桁架已均可包括。故以下只就這一類簡單桁架來討論。

第104圖中是幾種實際應用的簡單桁架。每一桁架的構成都是由繪斜線的ΔABC開始，按字母次序先後組得各新節點。圖中，爲求簡便起見，已用單線和小圓圈來分別表示桿件和節點。



第104圖

因爲任何按以上規律組織起來的簡單桁架必然整個的是一個剛體，所以我們可以用支承橫梁的方法來支承它。例如第103圖中的桁架，我們可以固定它的一個節點A，同時用滾柱裝置來支承它另外一節點G。這種支承法，在§5中已指出過，是一種使剛體在圖平面中受完全約束的支承法。第103圖中，E點的作用力Q傳導至兩支點，使它們發生反作用力的情形，因此，完全同橫梁的情形一樣，從而也可以應用§10中的方法來決定A，G兩支點的反作用力。桁架在這樣的「作用力和反作用力共同構成的外力」所成的平衡力系作用下，各桿件都將產生長軸方向的內力。決定這些內力的過程就稱爲桁架分析。

桁架各桿件的相互結合，有時，並不按上述的「用鉸鏈梢子連接兩端」的方法，而是每一個節點應用一塊鋼鈑，將桿件兩端一一由鉚釘或電銲連接在鋼鈑上。第103b圖中所畫的就是用鉚釘接合的一般形式。

不過不論桿件兩端的接合形式如何，通常可以總作出如下的假定來簡化分析手續：

(1) 所有各桿件都由它兩端的理想鉸鏈來互相連接。

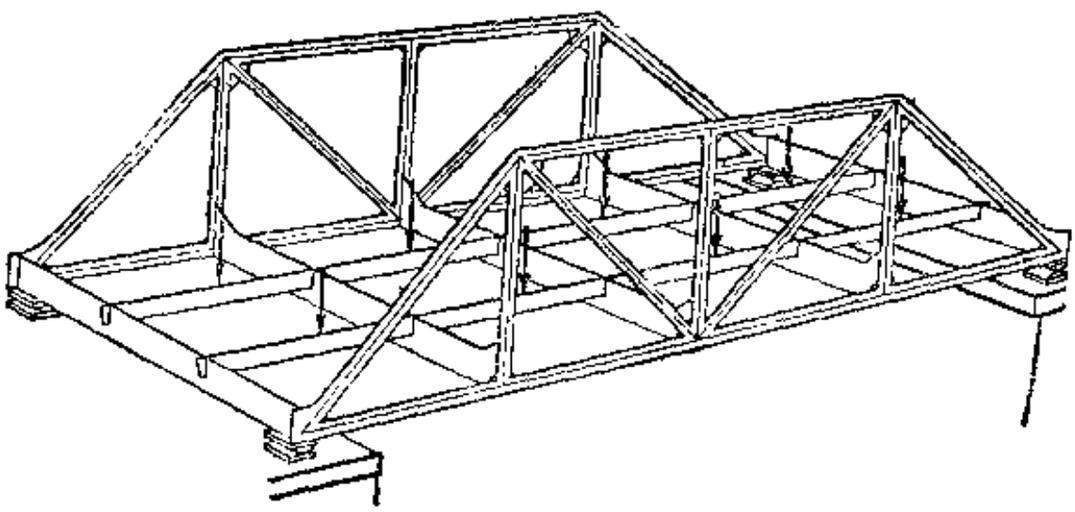
(2) 所有各桿件的長軸都在同一平面內。此平面稱爲桁架的「平面」。

(3) 所有外力都只作用在桁架的節點上，並且作用綫都在平面內。

很顯然的，鉚接節點和鉸鏈節點所構成的桁架，它們受力情形，事實上，不可能完全相同，因爲鉚接節點多少總要引起桿件的彎曲。不過根據精密觀測的結果，安裝時如果細心處理，使各桿件的長軸在每一節點都正確相交於一點，那末以上的假定 (1) 跟實際情形還是相當符合的。換句話說，鉚接所引起的彎曲對於各桿件的長軸方向內力（以下簡稱桿力）確乎不會發生過大的影響。

至於假定 (2)，如設計和安裝時加以小心，使各桿件的橫切面對於中平面對稱，那顯然也不會有什麼問題。

最後，對於假定(3)，可以說在極大多數的實際結構中都已經照到。例如橋梁結構，通常總是兩個同式桁架並行地放在橋座間。兩架間架設橋面，由橋面直接承受「荷重」。橋面結構的支點都是桁架節點，跟假定 (3) 甚爲符合。至於橋梁的實際結構可參閱第 105 圖的透視圖。橋面的橫梁一一擱在桁架底部的各節點上。橋面其他構部份全由橫梁支承。由此可見，橋面上任何一點的荷重力都只能



第 105 圖

由橫梁傳導到桁架的節點。橋面上所有的「荷重」，因此，都引導到兩桁架的各自中平面中；兩桁架可以當作是相互無關的獨立結構。

所有外力既然都在桁架的節點上，故桿件上除開自重外，並無其他發生彎曲的外力存在。自重所引起的彎曲應力，事實上，比荷重的拉應力或壓應力要小得多。所以我們可以將桿件的自重作爲均分配在兩端節點上作用，使一切外力都可以看作作用在節點上（關於自重作用下的桁架分析有時應作爲另外的專門問題處理，故在處理一般荷重的桁架分析問題中，自重可以完全不管）。

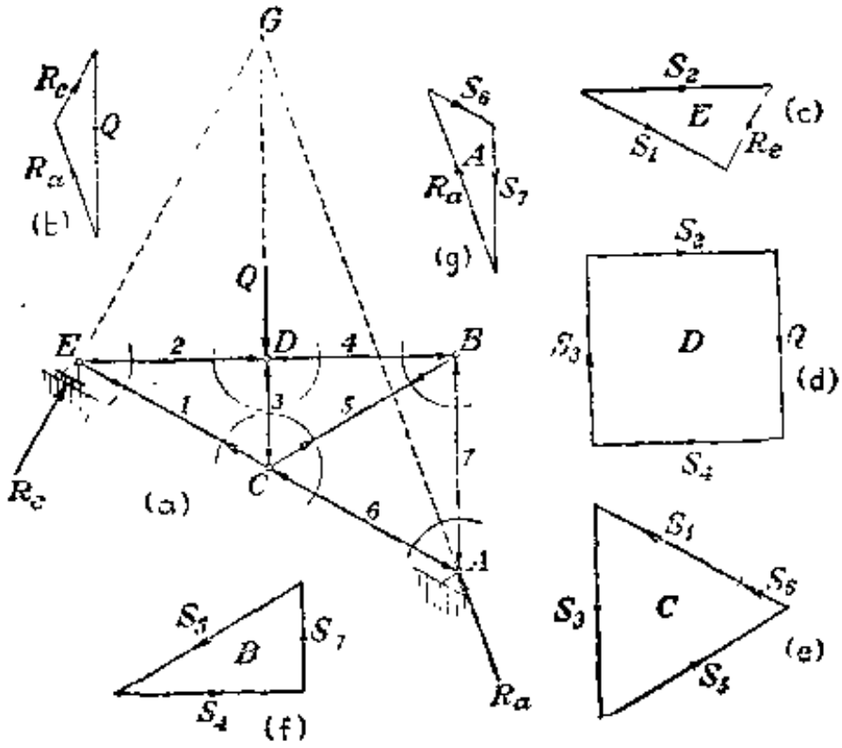
以上三個假定十分重要。通過這些假定，我們可以把一個「實際的桁架」（如第 103a 或 103b 圖）簡化爲一個「理想桁架」（如 103c 圖）。「理想桁架」是這樣一個桁架：它上面所有的外力都同在一平面內，並且都作用在它的節點上；所有它的桿件都毫無重量，都在兩端由毫無摩阻力的理想鉸鏈來相互連接。

對於這一「理想桁架」，根據 § 3 的討論，它的每一個桿件都是在「僅僅作用在兩端」的兩個力作用下平衡，因此，都是受單純的拉力或壓力作用。從而，每一桿件對於兩端的鉸鏈銷子的兩個反作用力，必然都是以桿件長軸作爲共同作用線的相等相反兩力。由此可見，桁架上每一個節點的力羣都是一個平面共點力系，而且是一個平衡的共點力系（見第 103c 圖）。所以以前所討論的各種處理「平面共點力系平衡問題」的方法，通過上面三個假定，都可以直接用來分析桁架。

8. 節點分析法

現在來詳細討論一個如第 106 圖的簡單桁架的分析方法。在 Q 力作用下，桁架的支點反作用力 R_a 和 R_e，可以按 § 10 中方法，先把整個桁架當作分離體來求得各力的作用線，然後，由力三角形來決定 R_a 和 R_e 的大小。D 點 Q 力的作用線是已知的；E 點反作用力 R_e 必垂直於滾柱的支承面，所以 R_e 作用線也是已知的。因此，A 點反作用力 R_a 的作用線必定通過 Q 和 R_e 兩作用線的交點 G。換句話說，G 就是 R_a 的作用線。作用線都求得後，畫「力三角形」如第 106b 圖，R_a 和 R_e 兩力就完全決定。§ 17 中已說過：外力引起桁架各桿件的桿力；各桿件則對兩端的鉸鏈產生一對以長軸爲共同作用線的相等

相反的反作用力。這兩反作用力中，任何一個力的大小都可以表示桿力的大小；同時，反作用力是指向或者離開節點又可以表示桿力是張力還是壓力。所以桿件的桿力可以完全根據兩端反作用力中任何一個來決定。爲便於說明起見，我們把桁架中所有桿件編號如圖，並令 S_i 代表任一桿件 i 的桿力。



第 106 圖

現在從攷察節點 E 的平衡開始分析桁架。以鉸鏈 E 作爲分離體。它的分離體圖就是第 106a 圖中圍繞 E 點的細線圓圈。它上面除開已決定的 R_e 外，還有桿件 1 和 2 的反作用力 S_1 和 S_2 在作用。後面這兩個力，當然還不知道是指向節點還是離開節點。不過它們的作用線必須各自跟「產生它們的桿件」的長軸相合則是肯定的。因此，可以畫出 E 點的「力三角形」如第 106c 圖；S_1 和 S_2 的大小就由「力三角形」的邊長決定，可以用比例尺量出來。因爲力三角形中各代表向量必須首尾銜接一一連貫，所以由圖中箭頭所指的方向，又可以發現：桿件 1 是在拉節點，因此，表示它內部是受張力作用；桿件 2 是在推節點，因此，表示它內部是受壓力作用。現在分別用箭頭把這兩個反作用力的方向標誌在 E 點如第 106a 圖。

其次，觀察 D 點鉸鏈的平衡。先用桿件 2 的反作用力 S_2 代替桿

件 2 本身。 這裏的 S_2 當然跟桿件 2 對 E 點的反作用力 S_2 相等相反。 D 點的未知力只是桿件 3 和 4 的反作用力 S_3 和 S_4 兩力。 這兩力究竟是指向還是離開節點當然還不知道。 不過我們已經曉得它們的作用線，所以可以畫「力多邊形」如第 106d 圖。 根據這「力多邊形」，S_3 和 S_4 就可按前述方法決定。 由「力多邊形」各邊的箭頭方向，可看出，兩桿件都是在推壓鉸鏈，因此，它們內部都是受壓力作用。 現在將這兩個反作用力的方向也分別在 D 點用箭頭標誌出來(見第 106a 圖)。

又進而觀察 C 點鉸鏈。 桿件 1,3 對鉸鏈 C 的反作用力都已確定。因此，只有桿件 5,6 的反作用力 S_5, S_6 兩力是未知量。 故由「力多邊形」，就可決定 S_5 和 S_6(見第 106e 圖)。 最後，可觀察鉸鏈 B。由 B 點的「力三角形」(第 106f 圖) 求得 S_7 後，所有桿件的桿力就都告決定。假使要檢驗所得結果，那還可攷察鉸鏈 A。 由 A 點的「力三角形」(第 106g 圖)，就可以判斷所得結果是否已足夠精確。

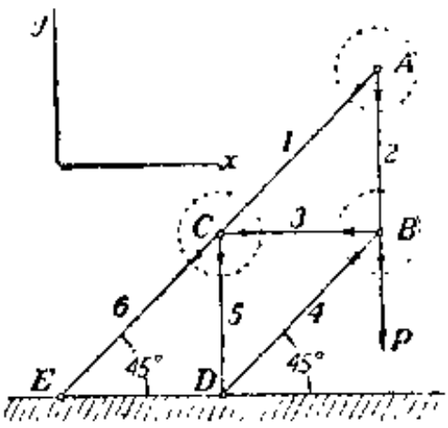
除開以上「相繼畫出各節點力多邊形」的方法外，如果希望的話，我們自然還可在每一節點應用(5)式中兩個平衡方程式來決定各桿力。不過各桿件間的夾角如果需要相當繁複的計算才能決定，那還是用圖解方法簡便得多。 若是各夾角很容易決定，那就最好用平衡方程式計算。

以上的「簡單桁架」分析方法稱爲「**節點分析法**」。任何按照第 48 頁法則構成的桁架，也就是簡單桁架，都可以用這方法來分析。 簡單桁架中至少總有一個由兩桿件組成的節點 (最後組成的節點)。 攷察這一節點的平衡，兩桿件的桿力就能完全決定。 桿力決定後，兩個桿件就可以由它們對各自另外一端鉸鏈的反作用力代替。 於是桁架上必然又會有一個節點(組合時的最後第二個節點) 是只由兩個「桿力未知」的桿件鉸合而成的。 它們的桿力，因此，也可以決定。 如此，按組合的相反次序，逐一攷察各節點的平衡，就可看到：每一節點上都只有兩個「桿力未知」的桿件出現，它們的桿力全可用「力多邊形」或(5)式的兩平衡方程式給以一一決定。

例題和習題

77. 試分析第107圖所畫的桁架。 圖中 B 點的作用力 $P=100$kg。

解：圖中的桿件 6 不過是節點 C 的支承物，顯然不是桁架本身的一個桿件。 不計這一桿件後，其餘桿件的組合即可當作是合乎規律的簡單桁架，因之，可以應用節點分析法來處理。 因各桿件間的夾角全應已知，故本題適宜於應用平衡方程式分析。



第 107 圖

首先，觀察鉸鏈 A 的平衡。由圖中虛綫圈所表示的分離體圖，可看到：A 點只有桿件 1 和 2 的兩個反作用力在作用。兩力要構成平衡必須大小相等、方向相反、作用綫相同才可能。桿件 1 和 2 的長軸既不同在一根直綫上，它們的桿力自然非等於零不可；否則，A 點就無法平衡。 因此，桿件 1,2 的存在並無作用；在想像中去掉這兩個桿件，對其餘各桿件的受力情形將毫無影響。

之後，觀察節點 B 的平衡。 B 點上的三個「力」是：P 力和桿件 3,4 的反作用力 S_3, S_4。 S_3, S_4 的作用綫固屬已知，但是方向尚未決定。 先暫時假定 S_3,S_4 都是張力。 計算後，所得的結果如果是負值，那顯然表示：假定的方向有錯誤；桿件是受壓力而不是受拉力。 所以我們可以把所有桿件都假定爲受拉力作用，再取決於計算結果的正負號；正值表示桿件確是受拉力，負值表示受壓力。 這樣可以始終一致避免混淆。現在在圖中選定兩正交坐標軸 x,y。 投影 B 點各力於這兩個坐標軸上。 由 (5) 式，可得

$$\left.\begin{aligned}-S_3-0{,}707\,S_4=0\\-P\ -0{,}707\,S_4=0\end{aligned}\right\}$$

故
$$S_3=+P,\ S_4=-\sqrt{2}P$$

之後，觀察節點 C 的平衡。 因已知，$S_1=0$, $S_3=+P$，故平衡方程式爲：

$$\left.\begin{aligned}+S_2-0{,}707\,S_6=0\\-S_5-0{,}707\,S_6=0\end{aligned}\right\}$$

可見
$$S_5=-P,\ S_6=+\sqrt{2}P$$

78. (a) 試分析第108圖中的桁架，(b) 設 P 力作用點自圖中 B 點移到 A 點，問各桿件的桿力將如何變動？

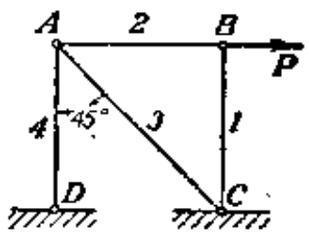
$$\left(\text{解：}\begin{aligned}&(a)\,S_1=0,\ S_2=+P,\ S_3=-\sqrt{2}P,\ S_4=+P\\&(b)\,S_1=0,\ S_2=0,\quad S_3=-\sqrt{2}P,\ S_4=+P\end{aligned}\right)$$

79. 試分析第109圖中的四方桁架。

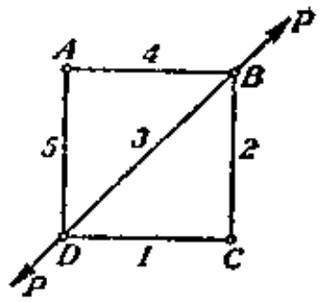
(解：$S_1=S_2=S_4=S_5=0$, $S_3=+P$)

80. 設第 109 圖中的 P 力由 B,D 兩點移到 A,C 兩點去作用，作用綫爲 AC 對角綫。試問各桿力將如何變動？

(解：$S_1=S_2=S_3=S_5=+\frac{P}{\sqrt{2}}, S_6=-P$)



第 108 圖



第 109 圖

81. 第 110 圖的四方桁架中，AB 桿件上裝有一個螺旋套管。旋緊套管，可以在 AB 中產生一等於 P 的張力。AC,BD 兩桿件叠交在 E 點，其間並無連繫。試求各桿件的桿力。

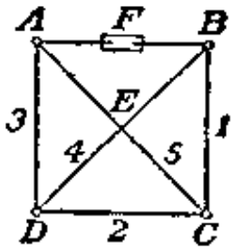
(解：$S_1=S_2=S_3=+P, S_4=S_5=-\sqrt{2}P$)

82. 一個正八邊形的桁架(第111圖)在一半徑方向的桿件中裝有一螺旋套管 A。旋緊 A，可產生一等於 P 的張力於桿件中。試求其他各桿件因而發生的桿力。

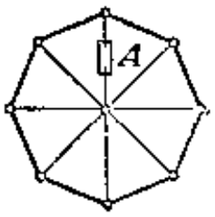
(解：所有各半徑方向桿件桿力爲 $+P$；週圍桿件的桿力爲 $-1.306P$)

83. 在第 107 圖中，設 B 點的鉛垂力 P 由 A 點的一水平向右的力 P 來代替，試求各桿力。

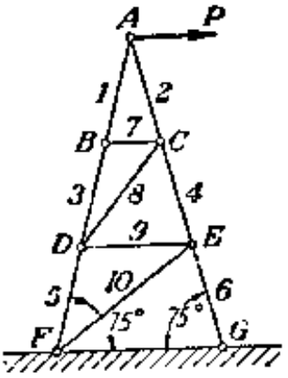
(解：$S_1=+\sqrt{2}P, S_2=-P, S_3=+P,$
$S_4=-\sqrt{2}P, S_5=-P, S_6=+2\sqrt{2}P$)



第 110 圖



第 111 圖



第 112 圖

84. 試分析第 112 圖中的桁架。

解：先用以下方法確定桿件 7,8,9 和 10 的桿力都等於零，解題手續就可簡淨很多。先觀察節點 B 的平衡。以各力投影於一垂直於 AD 的軸綫上。各投影的代數和應等於零；可見其上僅有的桿力 S_7 的投影是應該等於零的。因此，S_7 本身亦必爲零。桿件 7 既無桿力，設想自桁架中取出它來，自然也無影響。於是節點 C 的情形變成跟 B 點相同，故 S_8 也等於零。同樣方法，觀察節點 D 和 E，又可決定 S_9 和 S_{10} 也等於零。根

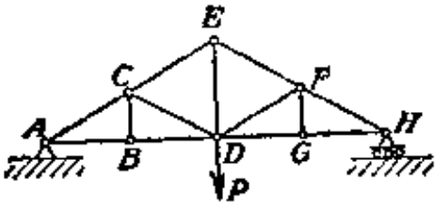
據這些討論，我們得到一個規律：任何桁架中，一個沒有外力作用的三桿件節點，如果其中兩桿件在同一直綫上，那第三個桿件就必然沒有桿力發生。

桿件 7,8,9,10 既都無桿力，其他各桿力，自然很容易求得；結果：$S_1=S_3=S_5=+1{,}93\,P$，$S_2=S_4=S_6=-1{,}93\,P$。

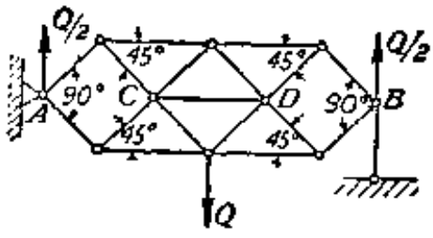
85. 證明第 113 圖中桿件 DE 的桿力是等於 P 的張力。

86. 在第 114 圖所表示的桁架中，兩支點反作用力，由於對稱關係，可肯定是等於 $Q/2$。試求桿件 CD 的桿力。

(解：$S=-Q/2$)



第 113 圖



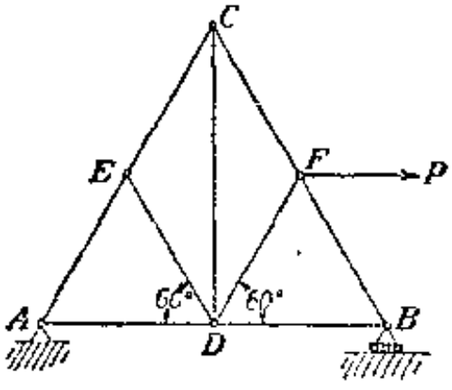
第 114 圖

87. 第 115 圖是一等邊三角形形狀的桁架。試求它在圖中 P 力作用下，桿件 CD 的桿力。

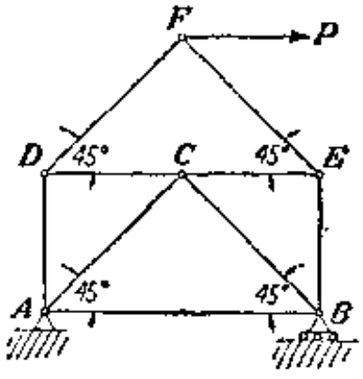
(解：$S=-0{,}866\,P$)

88. 求第 116 圖簡單桁架中，AB 桿件內的桿力。

(解：$S=+\frac{1}{2}P$)



第 115 圖



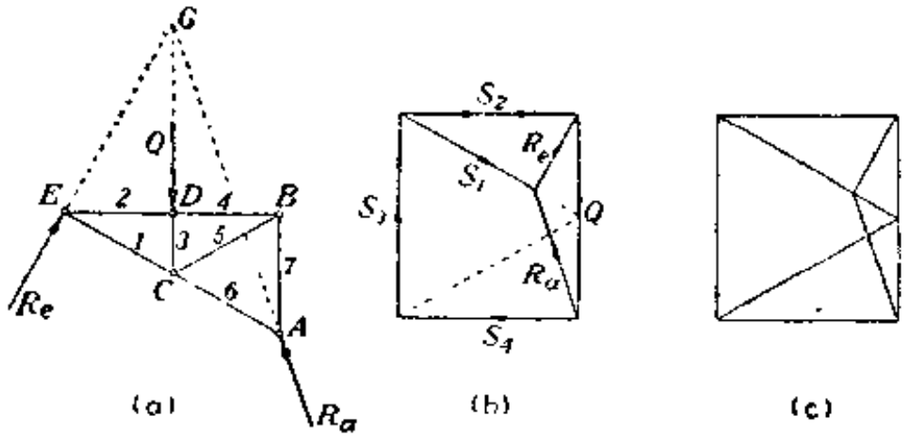
第 116 圖

19. 綜合力圖

在第 106 圖中的桁架分析方法是每一個節點都畫一個「力多邊形」來決定各桿力。仔細觀察各「力多邊形」後，可以看到：每一個桿力的代表向量都出現過兩次，每次分別代表桿件對一端和另一端鉸鏈的反作用力。兩次所畫的向量只是方向相反而已。假使在適當的條件下，能夠避免這種圖解上的重複，把各力的代表向量綜合成一個總的力多

邊形，那手續上就可簡便不少。這種綜合而成的力多邊形通常稱爲綜合力圖(1)。

現在仍把第106圖中的桁架當作例子來說明。重畫原圖如第117a圖。最初，仍以整個桁架作爲分離體，畫力三角形如第117b圖，求出 R_a 和 R_e。之後，節點 E 的「力三角形」可以附合在 R_a 和 R_e 等



第 117 圖

的「力三角形」上，使 R_c 可以不必重畫。同樣，節點 D 的「力多邊形」又可附合在已成的力圖上，使 S_2 不必重畫；不過在 S_2 代表向量上需要再畫一箭頭以表示相反方向。S_3 和 S_4 於是可直接畫上去。此處可注意的，就是原來畫就的 Q 力的代表向量恰好合適，可以不要再畫。這似乎有些巧合。

攷察節點 C 的平衡時，也可發現，其中 S_1 和 S_3 的位置也正好合適；只要將箭頭反一反就能利用。故又可畫出如圖中虛線所表示的「力多邊形」。全部綜合力圖至此卽告完成。

綜合各「力多邊形」成一個全圖，必須遵守一定的規則；否則，達不到目的。**畫每一分離體的力圖時，要想像自己在繞這一分離體行走。繞行的方向可以是順時針方向也可以是反時針方向，不過最初分離體的繞行方向一經確定，以後便不能變更；始終要採取同一的方向繞行桁架中所有節點。在畫力多邊形時，各力代表向量幾何相加的次序也就按照繞行時所遇各力的先後來決定。**違反這一規則，有些向量就不能避免重畫。這就是以上所謂 S_2 等「恰好合適，似乎巧合」的原因。

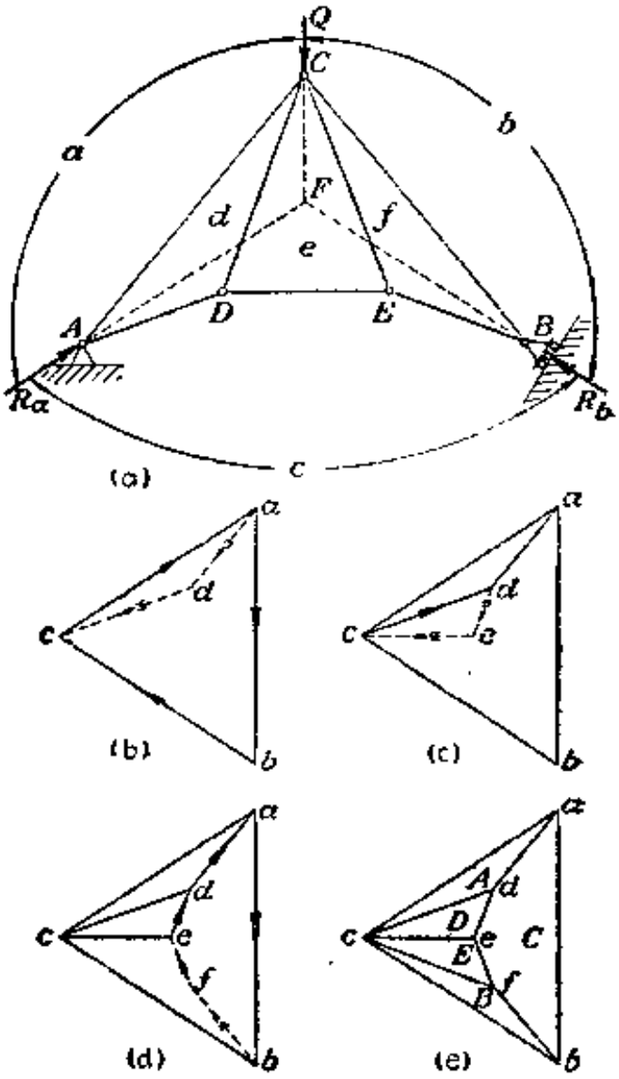
(1) 又稱爲克來摩那 (Cremona) 圖或馬克思威爾 (Maxwell) 圖。

完成的「綜合力圖」如第117c圖。讀者可將它跟第106圖中各「力多邊形」比較，分辨出其中所包含的各「力多邊形」。

應用綜合力圖分析桁架，通常採用一系特設的記號來表示各個「力」。此系記號稱爲「間隔符號」(1)。應用這種符號的辦法是：在各「力」的作用線間一一標誌出一個小寫字母。每一個「力」就由它兩旁間隔中的字母來表示。

例如第118a圖中的桁架$ADEBC$，我們在它的三個外力作用線間分別標誌a,b,c三個字母，各桿件間則分別標誌d,e,f三字母。標好後，Q力就可以稱爲ab力，R_b可以稱爲bc力，R_a可稱爲ca力。同樣，桿件AC的桿力可稱爲ad力，桿件CE的桿力稱爲ef力，……。

現在來畫這一桁架的綜合力圖：先將整個桁架作爲分離體，畫「力三角形」abc如第118b圖。其中$\overline{ab}$代表Q力；$\overline{bc}$，$\overline{ca}$分別代表R_b和R_a。



第118圖

要注意的是作「力三角形」時，畫各力代表向量的次序必須按着取一定方向（在本例中就是順時針方向）繞行分離體（此處就是整個桁架）時所遇各力的先後而定。以前說過，這一次序的保持，對於畫綜合力圖來說，非常重要，所以畫以次各節點的「力多邊形」時要不斷注意這一次序。

其次，將鉸鏈A當作分離體。從已有的$\overline{ca}$開始，自a引$\overline{ad}$平行桿件AC，自C引$\overline{dc}$平行AD得綜合力圖中一個新點d，構成節點A

(1) 又稱爲波氏（Bow）符號。

的封閉的「力三角形」。畫 $\overline{ca}$, $\overline{ad}$ 和 $\overline{dc}$ 的次序仍必須按照順時針方向繞 A 點行走所遇各力的先後次序(第 118b 圖)。

之後,觀察節點 D。從已有的 $\overline{cd}$ 開始。由 d 和 c 點分別引平行於桿件 CD 和 DE 的 $\overline{de}$ 和 $\overline{ce}$。又得到綜合力圖的一個新點 e,構成節點 D 的力三角形(第 118c 圖)。

再其次,可觀察節點 C。它上面現在只剩下桿件 CE 和 CB 的兩個反作用力是未知量。其他桿件 CD, AC 的反作用力 $\overline{ed}$, $\overline{da}$ 以及外力 Q,在綜合力圖中已經存在,它們的排列次序也完全合適。所以由 b 和 e 分別引 bf 和 fe 平行於桿件 CB 和 CE 後,節點 C 的「力多邊形」就告完成(第 118d 圖)。

之後,再觀節點 B 或節點 E 均無不可。假使觀察節點 B,我們就立刻可看到:B 點的各力中只有桿件 EB 的反作用力 $\overline{cf}$ 還未決定。但是 c 點和 f 點在圖上已經存在(第 118d 圖),只要連接起來就得到 $\overline{cf}$。因此,檢查 $\overline{cf}$ 是否跟桿件 EB 的長軸正確平行,就可以校驗綜合力圖的精確程度。

第 118e 圖已經是完整的綜合力圖。節點 E 雖然未經攷察,但是它的力三角形 cef 却也在圖中。應用這一完整的綜合力圖,桁架中任何一個桿件的桿力都可以從圖上量出來。

間隔符號在決定桿力的正負符號,也就是桿件是受拉還是受壓,的問題中特別有用,例如桿件 DE 的桿力,它的大小由綜合力圖中的代表向量 $\overline{ce}$ 的長度決定。假使我們順時針方向繞節點 D 行走,我們將先進入間隔 e,再進入間隔 c。因此,桿件 DE 對於節點 D 的反作用力,我們應該讀作 ec。在力圖中,ec 是自 e 指 c;也就是自右至左。這就表示 DE 桿件對節點 D 的反作用力是自右至左方向的壓力。所以我們可判斷 DE 是一個受壓力的桿件。再觀察 DE 對節點 E 的反作用力,我們仍舊順時針方向繞行 E 點,此反作用力將讀爲 ce 而不是 ec。在力圖中,$\overline{ce}$ 的方向是由 c 到 e。這表示 DE 對節點的反作用力的方向是由左到右指向節點。所以這桿件仍然是一個受壓桿件;判斷結果跟以上相同。

例題和習題

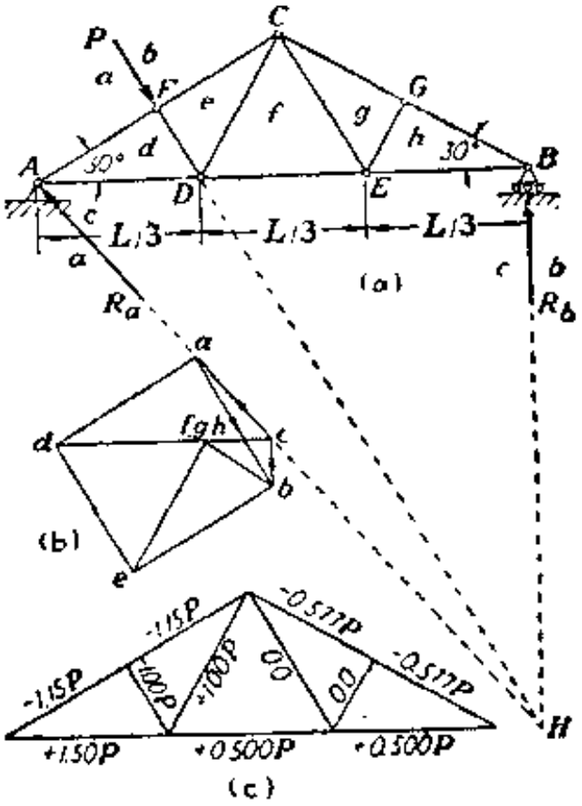
89. 試應用綜合力圖分析第 119a 圖中的桁架。

解：作綜合力圖如第 119b 圖。 桿件 GE 和 CE 在圖中的外力作用下並無作用。力圖中 f，g 和 h 三點，因此，都重合在一點。

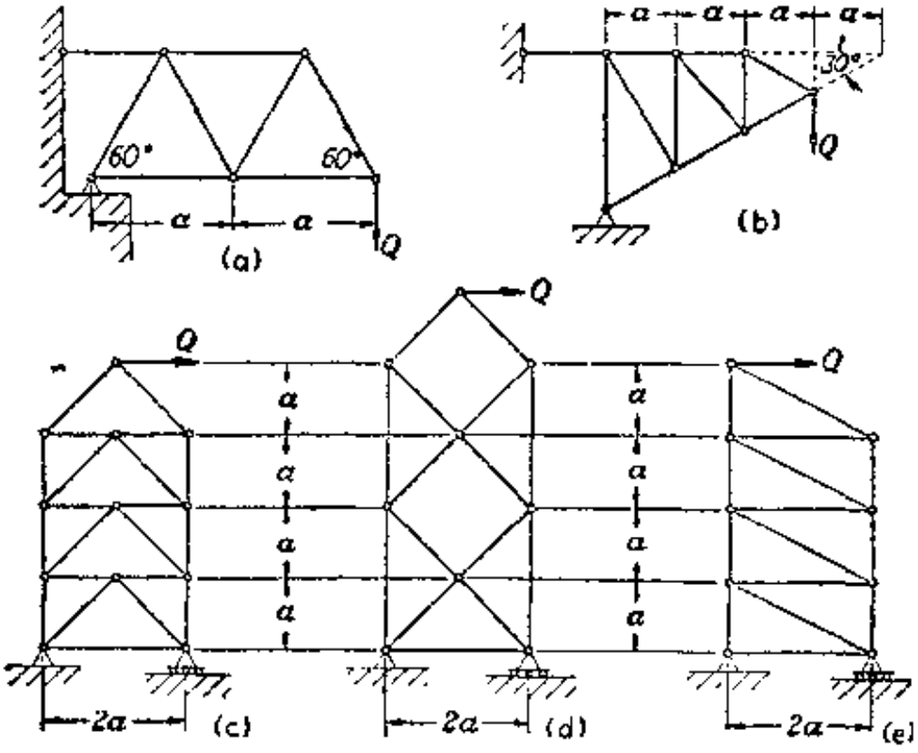
第 119c 圖中是一種表明分析結果的方法。 這種表明方法可以使所得結果一目瞭然。

90. 試應用綜合力圖分析第 120 圖中的各桁架。

（注意辨別各桿力的性質；張力還是壓力。）



第 119 圖

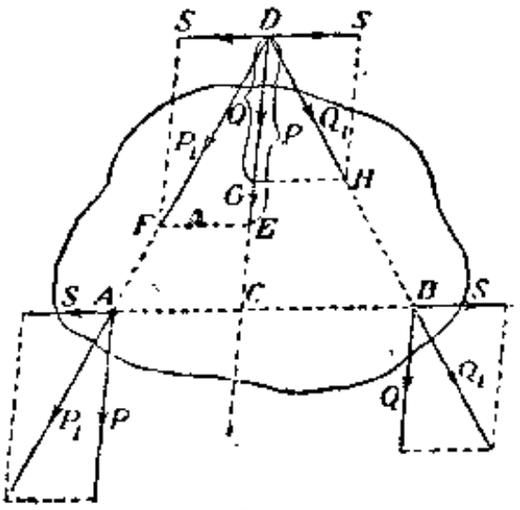


第 120 圖

第三章　平面平行力系

20. 同方向的平行力

關於平行力問題，我們從討論兩個同向平行力的情形開始。第 121 圖中是兩個同方向的平行力 P, Q 分別作用在物體的 A, B 兩點。按靜力學第三原理，我們如果在 A, B 兩點的連線上加一對相等相反的 S 力於 A, B 兩點，原來 P, Q 兩力對物體的作用是不會因而改變的。將 A 點的 P, S 兩力和 B 點的 Q, S 兩力分別合成爲合力 P_1 和 Q_1。物體上的兩個平行力於是變成了兩個不平行力，不過原來兩平行力對物體的作用並沒有改變，所以 P, Q 兩平行力的合力顯然會跟 P_1, Q_1 兩個不平行力的合力完全相同。之後，我們將 P_1, Q_1 兩力的作用點一同推移到它們作用線的交點 D 處，再將它們分別分解爲 S, P 和 S, Q 如圖。兩 S 力的作用互相抵消，故可以去掉。剩下來的就只是沿圖中 DC 線作用的 P, Q 兩力。



第 121 圖

這兩個力的合力，也就是作用在 A, B 兩點 P, Q 兩力的合力，顯然等於兩力的總和；

$$R = P + Q \tag{a}$$

合力的作用綫就是平行 P 和 Q 兩已知力作用綫的 DC。這作用綫分割「原來 P, Q 兩力作用點 A, B 間的距離」爲兩部份，兩部份的長度比例恰等於兩力大小的反比。 證明如下：因 ΔACD 跟 ΔFED 相似，故

$$\frac{AC}{CD} = \frac{S}{P} \tag{b}$$

又因 ΔBCD 跟 ΔHGD 相似，故

$$\frac{BC}{CD} = \frac{S}{Q} \tag{c}$$

由 (b) (c) 兩式，就可得到以上所說的比例關係如下：

$$AC/BC = Q/P \tag{d}$$

$(a)(d)$兩式可以分別決定 R 力的大小以及作用線的位置，因而完全決定了兩平行力 P,Q 的合力。

合成兩同向平行力的方法知道後，我們就可以解決「分解一個已知力 R 爲兩個同向平行分力 P,Q」的問題。 現在分兩種可能的情形來討論這問題：

(1) 已知兩分力中一分力，譬如 P，的作用點和它的大小（此分力自不可大於 R 力），求另一分力 Q。 因 P 力的大小是已知的，根據(a)式，可知另一分力 Q 的大小必定就等於 $R-P$。 至於 Q 力的作用線位置，我們顯然可以用 (d) 式來決定。

(2) 已知兩分力的作用點（必須分位於 R 力作用綫的兩旁），求它們的大小。 此問題中 AC, BC 和 R 爲已知。 故應用(a) (d)兩式就可決定兩分力 P,Q 的大小。

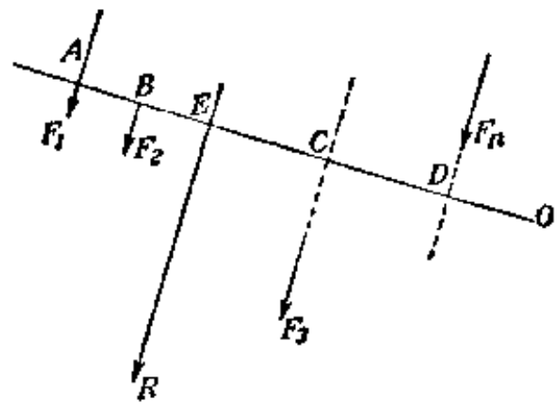
求兩個同向平行力合力的作用線位置，如果應用力矩法，那就更方便。 在第 121 圖中，曾另加一對相等相反的 S 力於原來 P,Q 兩力，得到交於 D 點的兩力 P_1 和 Q_1。 這兩個相交力 P_1 和 Q_1，按照「力矩合成定理」，對於作用平面上任何一點的力矩代數和是等於它們的合力 R 對同點的力矩的。 但是所加的兩力 S 相等相反，對於任何一點的力矩代數和永遠將等於零，可見相交兩力 P_1, Q_1 對任一定點的力矩代數和必將等於平行兩力 P,Q 對同點的力矩代數和。 因此，平行兩力對任一定點的力矩代數和也就等於它們的合力 R 對同點的力矩。 換句話說，兩個同向平行力也服從「力矩合成定理」。

若有多數同向的平行力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 作用在一平面中，那就要連續應用以上方法去決定它們的合力：先按以上方法將 F_1 和 F_2 合成爲「部份合力」R_1。 之後，合成 R_1 和 F_3，得 F_1, F_2 和 F_3 的合力 R_2。 如此，逐步把 $F_4, F_5, \cdots\cdots$，一直到 F_n，跟已得的部份合力合成起來，最後就可得到總合力 R（第 122 圖）。 R 的大小顯然是等於所有各分力的總和；

$$R = F_1 + F_2 + \cdots\cdots + F_n \qquad (e)$$

此外，因在每一合成兩個同向平行力的過程中，都可以應用一次兩個同

向平行力的「力矩合成定理」。所以最後可以得到：**所有平行力對於作用平面上任意一定點的力矩代數和就等於它們的合力對同點的力矩。**這也就是多數平行力的「力矩合成定理」。根據這一定理，我們就可以用以下方法來決定合力作用線的位置：在作用平面中，畫一垂直於各平行力作用線的直線 OA，跟各力作用線依次相交於 A，B，…點，跟合力作用線相交於 E 點（第 122 圖）。取 O 點爲力矩中心，可得



第 122 圖

$$R\cdot OE=F_1\cdot OA+F_2\cdot OB+F_3\cdot OC+\cdots\cdots+F_n\cdot OD$$

O 點到合力作用線的距離因此是

$$OE=\frac{F_1\cdot OA+F_2\cdot OB+\cdots\cdots+F_n\cdot OD}{R} \qquad (f)$$

(e) 式決定了合力的大小，這一 (f) 式又決定它作用線的位置，故合力可由 (e) (f) 兩式完全決定。

例題和習題

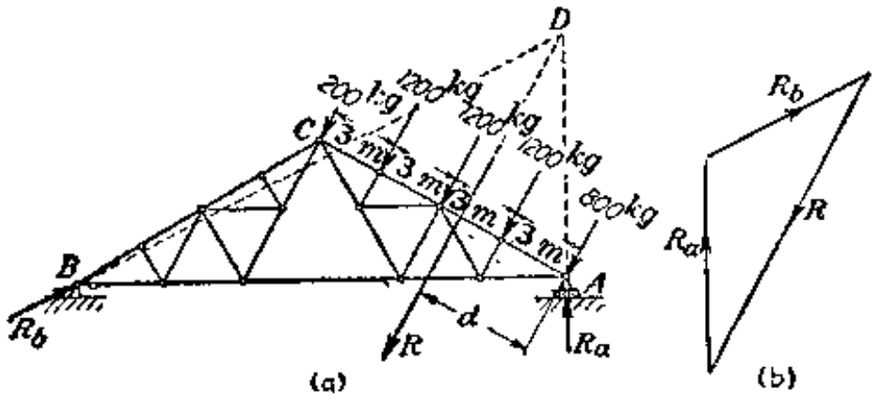
9[1]. 試求第 123a 圖所畫的屋架，在圖中風力作用下所受到的兩支點的反作用力。

解：在僅僅是求反作用力的問題中，圖中五個平行的風力是可以由它們的合力 R 來代替的。這合力的大小，根據 (e) 式是

$$R=800+3(1200)+200=4600\text{kg}$$

至於合力作用綫的位置，我們取 A 點作爲力矩中心，應用 (f) 式，就可得

$$d=\frac{1200(3+6+9)+200\cdot 12}{4600}=\frac{24000}{4600}=5{,}22\text{m}$$

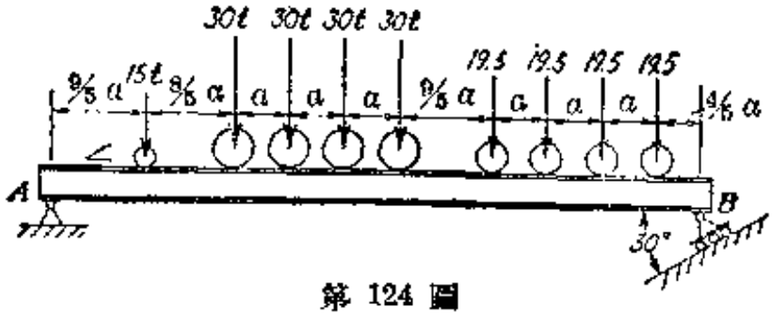


第 123 圖

合力完全決定後，屋架上三個「力」的作用線就都可確定如圖。再按§10的方法作力三角形如第123b圖，兩支點反作用力 R_a 和 R_b 就可直接由圖上量出來。

92. 第124圖中 AB 梁上的各結重力代表一個機車的車輪壓力。試求此一平行力系的合力 R，並根據合力決定 A,B 兩支點對梁的反作用力 R_a, R_b。

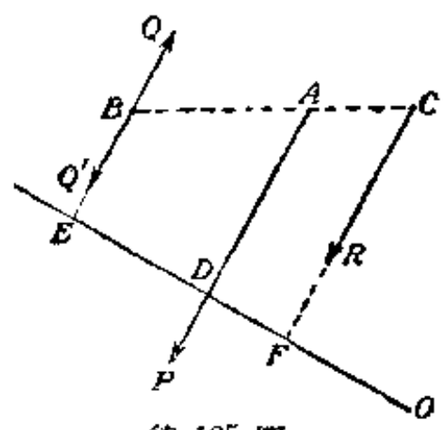
(解：$R_a=119t$, $R_b=132t$)



第 124 圖

21. 兩方向相反的不等平行力

兩個不相等的平行力 P 和 Q (第125圖)如果作用方向相反，那末它們的合力 R：大小將等於 P, Q 兩力之差，方向將跟兩力中較大的一個相同，作用線位於兩力所對的間隔以外，並且外分割兩力作用點的連線 AB 爲兩部份，兩部份的比例恰等於兩力的反比。要證明此說法，可分解較大的一力 P 爲兩個平行分力 Q' 及 R。令 Q' 的作用線跟 Q 力相合，並使它們相等相反。如此，另一分力 R 顯然將等於 $P-Q$。至於 R 力的作用點 C 如何決定，根據§20，P 力作用線應該分割「Q,Q' 兩力作用點 B 和 R 力作用點 C」的連線 BC 爲反比於 Q' 和 R 的兩部份。Q' 既等於 Q，故



第 125 圖

$$\frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB}=\frac{Q+R}{AC+AB}=\frac{P}{BC} \qquad (a)$$

分解 P 力後，原來的 P,Q 力系已經由 Q,Q' 和 R 三力所代替。但 Q,Q' 兩力相反相等，相互抵消，所以只剩下 R 力單獨來代替 P,Q 力系。這 R 力當然就是 P,Q 兩力的合力。R 力既等於 P,Q 兩力之差，(a) 式又符合以上所說的比例關係，故上述合成兩相反不等平行力的方法已完全證明。

應用 (a) 式也可以分解一個已知力爲兩個方向相反的不等平行力。

這種分解有兩種可能的情形：(1) 已知兩分力中一個分力的大小和作用點，求另外一個分力；(2) 已知兩分力的作用點（必須同在已知力作用線的一邊），求兩分力的大小。

在以上討論中，因 P 力是兩個同向平行力 Q' 和 R 的合力，故根據「力矩合成定理」可知：對作用平面上任何一定點，應該

$$P\text{ 力力矩}=(Q'\text{ 力力矩})+(R\text{ 力力矩})。$$

因此，

$$R\text{ 力力矩}=(P\text{ 力力矩})-(Q'\text{ 力力矩})。$$

但 Q 力力矩 $=-(Q'$ 力力矩$)$，故

$$R\text{ 力力矩}=(P\text{ 力力矩})+(Q\text{ 力力矩})。$$

可見兩方向相反不等平行力也是服從力矩合成定理的。

例題和習題

93. 一起重裝置 $ABCD$（第 126 圖），底部 A 端是一個蝶栓；B 端是一個滾柱。整個裝置的自重很小，可以不計。試求圖中重體 Q 所引起的支點反作用力 R_a 和 R_b。

解：整個裝置既屬平衡，兩反作用力 R_a 和 R_b 的合力 Q' 自然必須跟重力 Q 方向相反、大小相等並且作用綫相同。此外，因 B 端是一個滾柱，故 R_b 必須垂直於滾柱的支承面，取鉛垂方向。因此，R_a 也必然是一個鉛垂力；否則就不能跟 R_b 合成爲一個鉛垂的 Q' 力。如此，本題變成「分解一個已知力 Q' 爲作用於 A,B 兩點的一對相反不等平行力」的問題。故由 (a) 式，可得

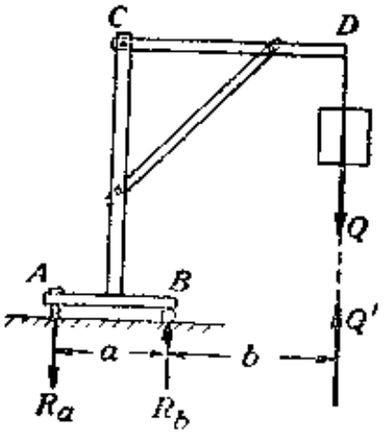
$$\frac{R_a}{b}=\frac{Q'}{a}=\frac{R_b}{a+b}$$

但是 $Q'=Q$，故

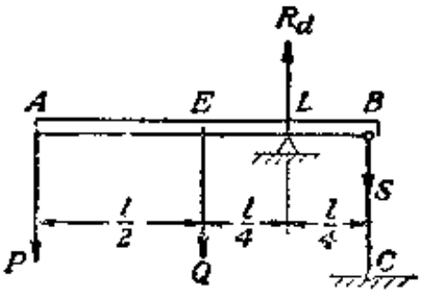
$$R_a=Q\frac{b}{a}$$

$$R_b=Q\frac{a+b}{a}$$

94. 有一個如第 127 圖的槓桿。試求支點 D 的反作用力 R_d 和 BC 鉸鏈桿的桿力 S。



第 126 圖



第 127 圖

解：圖中「P,Q 兩力」的合力必須跟「支點 D 和桿件 BC 對擋桿的兩個反作用力」的合力相等相反並且作用綫相同。故先求出 P,Q 的合力，把這合力的平衡力分解爲 D,B 兩點的兩個平行分力，就可得到 $R_d=4P+2Q$，$S=3P+Q$。

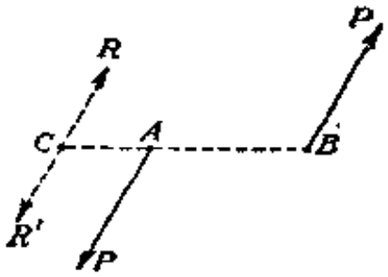
22. 力偶

兩個方向相反的相等平行力構成的力系稱爲**力偶**。這力系不能合成爲一個「單力」。證明如下：先假定第 128 圖中兩 P 力所構成的力偶，在任意一 C 點有一個如虛線所畫的平行於兩 P 力的合力 R。這假定如果正確，那末圖中跟 R 相等相反，也作用在 C 點的 R' 力就一定能夠跟兩 P 力構成平衡。這是不可能的事。R' 和 A 點 P 力的合力既不會等於 P，而且合力作用線也決不會跟 B 點 P 力作用線相重合。可是靜力學第二原理明明說：兩個力要構成平衡，它們必須大小相等、方向相反而且作用線相同。可見兩 P 力決沒有 R 這樣一個合力存在。同樣方法，我們也可以證明：兩 P 力不可能有一個跟它們不平行的合力。所以一個力偶不能夠簡化爲一個單力。

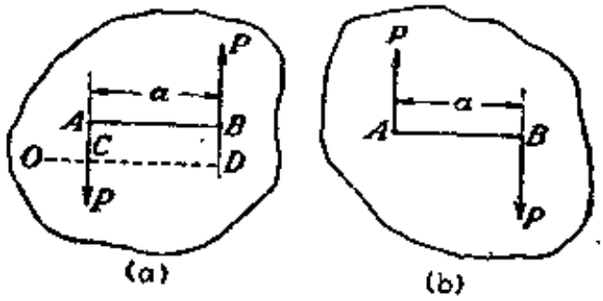
力偶作用的平面稱爲「**力偶面**」。它兩個「構成力」間的距離稱爲「**力偶力臂**」，或簡稱「**力臂**」。

任意取力偶面上一點 O 作爲力矩中心。力偶的構成力爲 P，力偶力臂爲 a（第 129a 圖）。自 O 點引 OCD 直線垂直於兩 P 力。兩 P 力對 O 點的力矩代數和顯然是

$$P\cdot OD-P\cdot OC=P(OD-OC)=P\cdot a \qquad (a)$$



第 128 圖



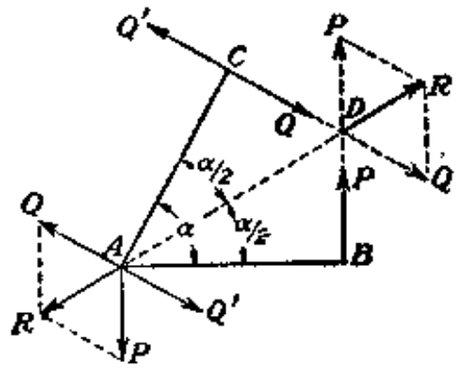
第 129 圖

以上 O 點是任意選定的力矩中心。如果 O 點在兩 P 力中間，結果當然也相同。再如第 129b 圖中的 P 力力偶。這力偶的兩構成力的作用方向跟圖 a 中兩 P 力的方向相反。不過我們仍可按照以上方法證明它們對於力偶面上任何一定點的力矩代數和都等於"$-Pa$"。由以

上討論，可得出一重要的結論如下：**構成力偶的兩力對力偶面上任何一定點的力矩代數和都將等於一個力的大小跟力偶力臂的乘積。這乘積就稱爲力偶的力矩。** 我們規定：由同一方觀察，若力偶使它所作用的物體產生反時針方向旋轉的趨向，那末它的力矩是正值（第129a圖）；否則，就是負值（第129b圖）。

力偶力臂在力偶面中繞力臂一端旋轉一個任意角度 α，力偶的作用並不會因而改變。 要證明這句話，可觀察第130圖中所表示的力臂爲 AB 的 P 力力偶。

由 A 點引一根長度等於 AB 的直線 AC。AC 跟 AB 的交角 α 可以取任意的大小。在 AC 兩端 A 點和 C 點分別各加一對垂直於 AC 的相等相反力 Q 和 Q'（見第130圖）。Q, Q' 的大小都等於 P。所加四個力自成平衡，根據第三原理，並不影響原來 P 力力偶的作用。現在將 P 和 Q 力兩兩合成爲兩個合力 R 如圖。這兩個合力的代表向量都是菱形（等邊平行四邊形）的對角線。因此，它們必然一同在 A，D 兩角的等分線上。換句話說，AD 必定是兩 R 力的公共作用線。作用線既相同，兩合力的大小又相等而且方向又相反，所以兩 R 力，也就是 P, Q 四力，將互相抵消，可以由力系中拿掉。剩下來的於是只有作用在 A, C 兩點的兩個相等相反力 Q'。這兩力構成一個力偶；構成力的大小等於 P，力臂 AC 等於 P 力力偶的力臂 AB 並且跟 AB 成等於 α 的交角。這就證明了以上說的「力偶力臂繞一端任意旋轉，並不會改變力偶對所作用物體的作用」。

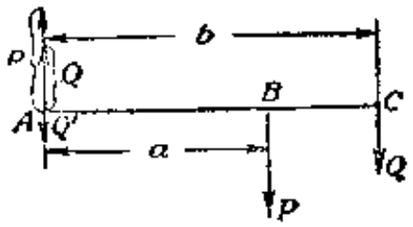


第 130 圖

因爲一個力偶，只要它的力臂先繞一端又繞另外一端連續作適當的旋轉，就可以在力偶面上被推移到任何指定的位置上去，所以，根據以上討論，我們可以把一個力偶隨意在力偶面上移動，而不影響它對所作用物體的作用。

此外，一個力偶即使它構成力的大小以及力臂都變動，只要「力矩」

保持不變，那它的作用也不會改變。 證明這句話，可觀察第 131 圖。圖中力臂 AB 的 P 力偶是一個已定的力偶。我們先分解 B 點的 P 力爲 A，C 兩點的同向平行力 Q' 和 Q。由以前所說的分解法則，可知



第 131 圖

$$Q=P\frac{a}{b},\quad Q'=P-Q \qquad (b)$$

在 A 點的 P 力中減掉這一 Q' 力，可得到一個向上作用的 Q 力如圖。此 Q 力跟 C 點 Q 力構成一個力臂等於 AC 的力偶。這個新力偶的力矩等於 $Q\cdot b$。根據 (b) 式中第一式，可知 $Q\cdot b=P\cdot a$。可見：一個力偶可以完全由另外一個構成力大小以及力臂長短都不相等的力偶來代替，只要它們的力矩相等。

綜合以上說明的力偶的各種性質，可知，**兩個同平面的力偶只要力矩相同，那它們對物體的作用就完全相同。換句話說，一個已定平面的力偶完全決定於它的力矩的大小和正負符號。**

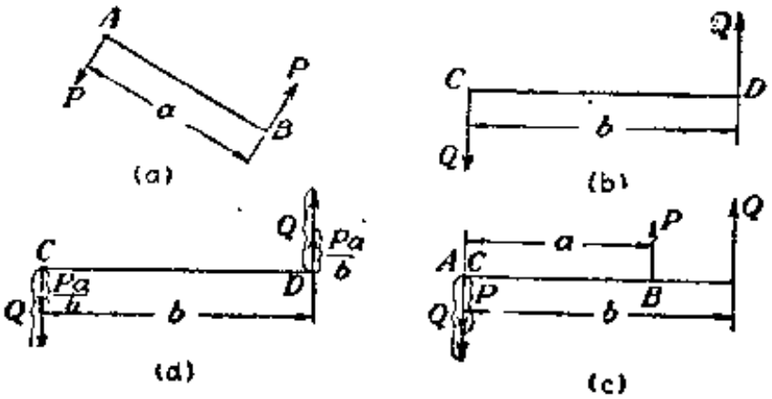
力偶在力偶面上的移動是跟力在作用線上的移動相仿的。我們說力偶這種移動不會改變它的作用，同樣是指對物體平衡的作用而言。假使考察的是物體內部的應力，那力偶在力偶面上的移動就跟力在作用線上的推移一樣，是對問題本身有決定性影響的。

兩個力偶的相加，只要把它們的力矩加成代數和就得到它們**合成力偶**(1)的力矩。要證明這一點，可觀察第 132 圖中力臂分別等於 a，b 的 P 力和 Q 力力偶。將第 132a 圖中 P 力力偶推移到第 132b 圖中 Q 力力偶處，使它們的力臂 AB 跟 CD 重合，並且使 A 點恰好落在 C 點上，如第 132c 圖。之後，又將 P 力力偶變換爲力臂等於 b 的新力偶。這新力偶構成力的大小當然是等於 $P\frac{a}{b}$（第 132d 圖）。現在把 C，D 兩點的力相加，就可得到一個力臂爲 b，構成力等於 $Q+P\cdot\frac{a}{b}$ 的「合成力偶」。這合成力偶的力矩是

$$\left(Q+P\cdot\frac{a}{b}\right)b=Q\cdot b+P\cdot a \qquad (c)$$

(1) 所謂「合成力偶」就是跟若干「力偶」作用相等的一個「力偶」，相當於「力」的「合力」。

可見：兩力偶相加，它們「合成力偶」的力矩的確就等於兩力偶的力矩的代數和。 這裏說「代數和」的意思，是因爲兩力偶卽使力矩符號相反，我們還是可得到相同結論。



第 132 圖

連續使用以上合成方法，平面上任何多的力偶就都能簡化成爲同平面的一個「合成力偶」。 合成力偶的力矩就等於各力偶的力矩代數和。

同平面的兩個力偶若是力矩值大小相等、符號相反，那它們就構成平衡。 因爲這樣兩力偶，若按照第 132 圖所說明的方法去合成它們，那合成力偶的每一個構成力都會等於零。 反過來看，這又說明：**一個力偶只可以由同平面一個力矩大小相等、符號相反的力偶來平衡。**

假設有很多力偶作用在一平面中，那連續應用兩力偶的相加方法把它們合成起來就可證明：**必須所有力偶的力矩的代數和等於零，這一系力偶才構成平衡。**

一個力偶，顯然，也可以分解成爲幾個分力偶，只要各「分力偶」力矩的代數和跟原來力偶的力矩相等就成。

例題和習題

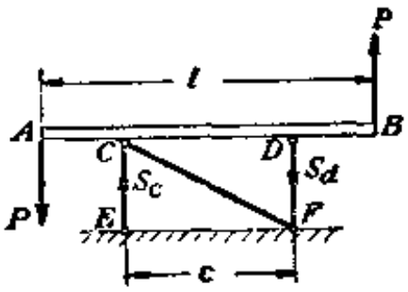
95. 如第 133 圖的水平梁 AB，兩端有一對相等相反的 P 力在作用。試不計 AB 的自重求各支承桿件的桿力。

解：作用力既然是一個力偶，C 點和 D 點的反作用力自然也必須是一個力偶。 D 點的反作用力的作用綫應該跟桿件 FD 的長軸相合。 因此，它必定是在鉛垂方向。 從而，C 點的反作用力也必須取鉛垂方向，否則不能共同構成力偶。 D 點反作用力既決定是鉛垂方向，斜桿 CF 的桿力自然非等於零不可。 至於兩鉛垂桿件的桿力，我們可根據這

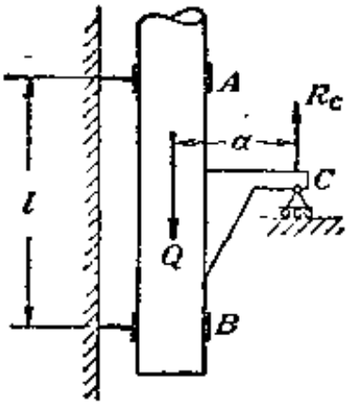
樣一事實來決定，就是兩反作用力所成的力偶必須力矩跟 P 力力偶大小相等，但符號相反。這也就是說，兩反作用力的大小應該都等於 Pl/c，方向則分別如圖。所以 CE 桿的桿力是等於 Pl/c 的壓力；DF 桿的桿力是等於 Pl/c 的張力。

96. 如第 134 圖的裝置。摩阻力可以不計。試求各支點對重程 Q 的鉛垂反作用力 R_c，水平反作用力 R_a 和 R_b。

(解：$R_c=Q$，$R_a=-R_b=Q\frac{a}{l}$)



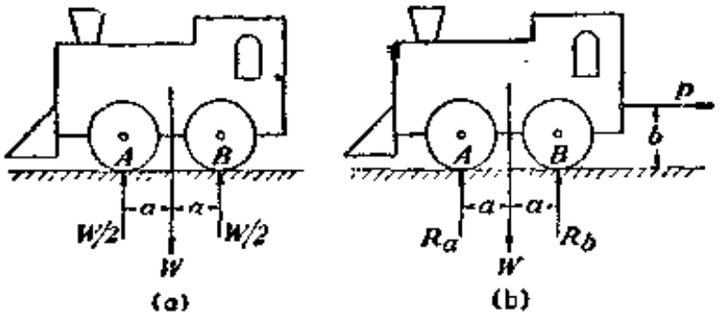
第 133 圖



第 134 圖

97. 第 135a 圖中機車的重量爲 W，機車在圖中 A，B 兩點受到的反作用力爲 $W/2$。假設機車對列車的牽引力 P 恰等於 AB 兩處的摩阻力，問機車將開始施動列車時（第135b圖）A，B 兩處的鉛垂反作用力 R_a 和 R_b 將等於多大？

(解：$R_a=\frac{W}{2}-\frac{Pb}{2a}$，$R_b=\frac{W}{2}+\frac{Pb}{2a}$)



第 135 圖

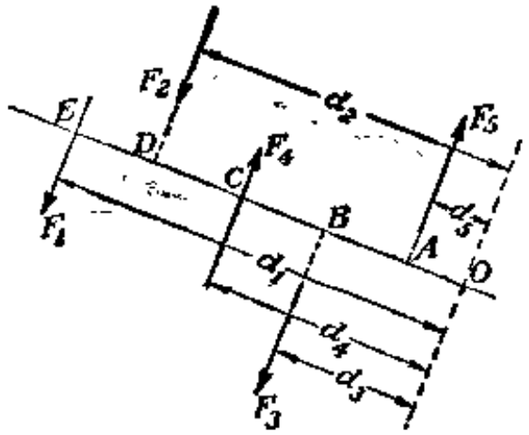
23. 一般的平面平行力系

第 136 圖中是若干方向不盡相同的平面平行力。假使將其中同一方向的 F_1，F_2，F_3 合成爲一個合力 R_1，另一方向的 F_4，F_5 合成爲另一個合力 R_2，那末可能有以下三種結果：

第一，R_1 不等於 R_2。我們得到的是兩個相反不等平行力，故可以按 § 21 方法合成爲一個 R_1 和 R_2 的合力 R。這 R 也就是原來 F_1，

F_2,……F_5 力系的合力。

第二，R_1 等於 R_2，但作用綫不相同。因 R_1，R_2 是方向相反的兩羣平行力的合力，所以它們是一對相反平行力是不用說的。現在它們的大小又相等，當然，它們就是一個不能再簡化的力偶。這就是說，原來 F_1,F_2,……F_5 力系可合成爲一個合成力偶。

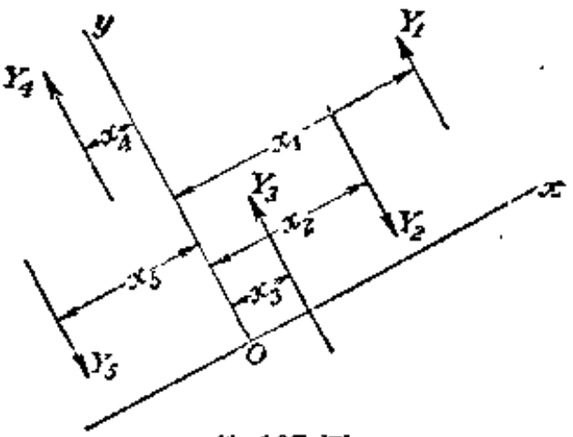


第 136 圖

第三，R_1 等於 R_2，方向相反而且作用綫相同。在這一情形下，原來力系，很顯然的，是一個平衡力系。

以上三種可能還可以從另外一個角度來辨別。如果已知各力的代數和不等於零，這一力系就可以合成爲一個合力。合力的大小和方向當然就看代數和的大小和正負而定。至於合力作用線的位置，我們可根據「合力對作用平面上任意一定點的力矩必等於各分力對同點力矩的代數和」來確定。假使已知各力的代數和恰好等於零，那末又有兩種可能性：(1) 這一力系可簡化爲一個「合成力偶」，(2) 這力系是一個平衡力系。辨別這兩種可能，必須把各力對所在平面上任意一定點的力矩計算出來。若是力矩的代數和不等於零，那這一力系就可以化成一個合成力偶，力偶的力矩就等於這代數和。假如代數和等於零，那把它們化成一個合成力偶就不可能了。因此，原來力系一定就是一個平衡力系。

應用解析方法來辨別以上三種可能時，我們可選定兩正交坐標軸 x,y 如第 137 圖，令 y 軸跟各已知力 Y_1, Y_2,……Y_n 的作用線平行。然後，以坐標原點 O 作爲力矩中心，並令 x_i 和 x 分別爲 O 點到「任一 Y_i 力作用線」和「這一力系的合力 Y 作用線」的垂直距離，那合力



第 137 圖

就可由以下兩式完全決定：

$$\left.\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \\ x &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i x_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} Y_i} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

第一式確定了合力 Y 的大小；第二式又確定了它作用線的位置（也就是合力對選定的力矩中心 O 的力臂大小）。計算第一式各力的代數和時，各力的符號要看它的方向如何而定。跟正 y 軸方向相同的力爲正；否則爲負。計算第二式各力力矩代數和時，力矩的符號以反時針方向的力矩爲正；否則爲負。

若是合成的結果是一個力偶，它的力矩爲 M，那末

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0 \\ &M = \sum_{i=1}^{i=n} (Y_i x_i) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

假如原來力系是一個平衡力系，那末

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i x_i) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

這也就是一個平面平行力系的平衡方程式。

一個力系如果已滿足 (11) 的第一式，那它化爲一個合力的可能性已不存在。假使再能滿足(11)中第二式，那合成爲一個力偶的可能性就也沒有了。因此，一個力系如果能同時滿足 (11) 的兩式，就必然是一個平衡力系。

這一平衡條件還可以由兩個力矩方程式來表示。假如力系對任一

力矩中心O的力矩的代數和等於零，它化爲一個力偶的可能雖然沒有，但還可能是它的合力恰巧通過這一O點。如果它對另外一個力矩中心O_1的力矩代數和仍然是等於零，那這一力系不是平衡力系就是它的合力又通過O_1點。所以只要連線OO_1不跟各力的作用線平行，那這力系就非自成平衡不可；否則變成一個「力」要同時有兩根作用線。以上兩條件可由以下兩式表示：

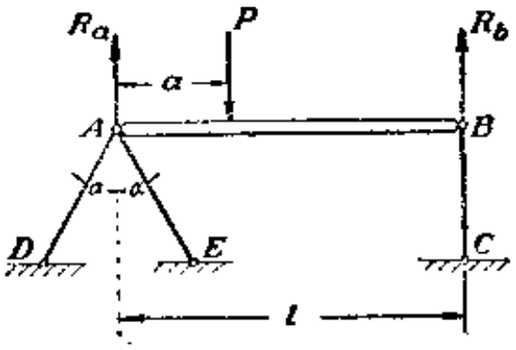
$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n}(Y_i x_i)=0\\ \sum_{i=1}^{i=n}(Y_i x_i')=0\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

其中x_i指任意一力Y_i對力矩中心O的力臂；x_i'指它對另一力矩中心O_1的力臂。

例題和習題

98. 試求第138圖中AB梁的支承鉸鏈桿AD，AE和BC的桿力。AB梁的自重可以不考慮。

解：梁上的P力必須由A，B兩支點的反作用力R_a，R_b來平衡。因BC桿對B點鉸鏈的反作用力R_b在鉛垂方向，故R_a也非在鉛垂方向不可；否則，它不能跟P力合成爲一個鉛垂合力去平衡R_b。因此，AB梁共有三個鉛垂力R_a，P和R_b在作用；這三個力要構成平衡。解決這問題以應用(12)式爲最簡單：分別以A，B兩點作爲力矩中心，就可得



第 138 圖

$$\left.\begin{aligned}R_b l-Pa=0\\ P(l-a)-R_a l=0\end{aligned}\right\}$$

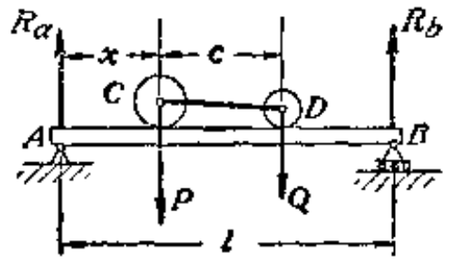
故
$$R_b=\frac{Pa}{l},\quad R_a=\frac{P(l-a)}{l}$$

這結果可用(11)中第一式校驗：

$$R_a+R_b=P$$

梁對於BC桿的作用力是R_b的相等相反力，故BC桿的桿力就是等於$\frac{Pa}{l}$的壓力。梁對於鉸鏈A的作用力是R_a的相等相反力。分解此作用力於AD桿和AE桿的長軸方向，就可以得到它們的桿力都是等於$\frac{P(l-a)}{2l\cos\alpha}$的壓力。

99. 第139圖中，$P=2t$，$Q=1t$，$l=12m$，$c=3m$，AB 梁的自重可以不計。設支點 A 的反作用力 R_a 恰等於支點 B 的反作用力 R_b 的兩倍，問 P 力到支點 A 的距離 x 應等於多大？



第 139 圖

解：將整個 AB 梁作爲一個分離體。分別取 A，B 兩點爲力矩中心，可得

$$\left.\begin{aligned} R_b l - Q(x+c) - Px = 0 \\ Q(l-c-x) + P(l-x) - R_a l = 0 \end{aligned}\right\}$$

已設 $R_a = 2R_b$

由以上三式中消去 R_a 和 R_b，就得

$$x = \frac{l}{3} - \frac{Qc}{P+Q}$$

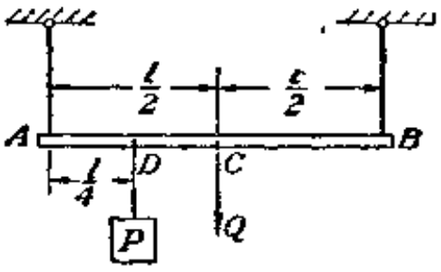
將已給各數值代入上式，可知 $x=3m$。

100. 第140圖中 AB 是一根由兩鉛垂弦綫懸掛的水平梁。梁重10kg。D 處的 P 力等於20kg。試求兩弦綫中的張力 S_a 和 S_b。

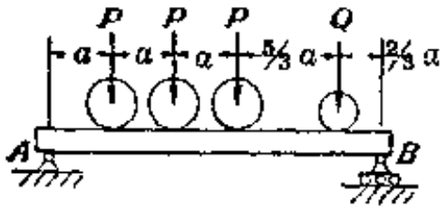
(解：$S_a=20kg$，$S_b=10kg$)

101. 第141圖中，P，Q 各力是一個機車的車輪壓力。設 $P=10t$，$Q=8t$，試求支點 A，B 對 AB 梁的反作用力 R_a 和 R_b。

(解：$R_a=19\frac{3}{4}t$，$R_b=18\frac{1}{4}t$)



第 140 圖



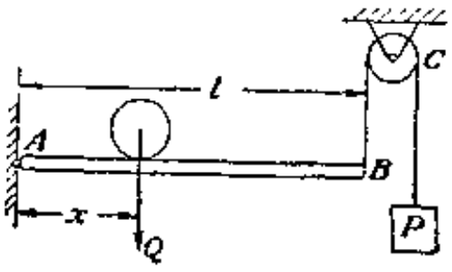
第 141 圖

102. 如第142圖的裝置。試求 AB 梁在水平位置平衡時，x 等於多大？

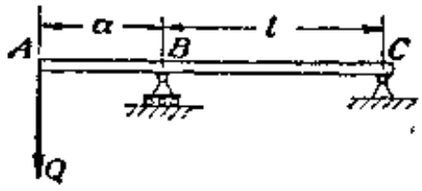
(解：$x=Pl/Q$)

103. 試求第143圖中 B，C 兩支點的反作用力 R_b 和 R_c。設 $a=\frac{1}{4}l$，$Q=1t$。

(解：$R_b=1\frac{1}{4}t$ 向上，$R_c=\frac{1}{4}t$ 向下)



第 142 圖



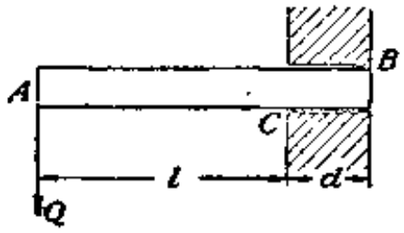
第 143 圖

104. 設第144圖中 $l=5\text{m}$, $d=0{,}6\text{m}$, $Q=1\text{t}$。試不計摩阻力影響,求圖中 B,C 兩處 AB 梁將受到的反作用力 R_b 和 R_c。

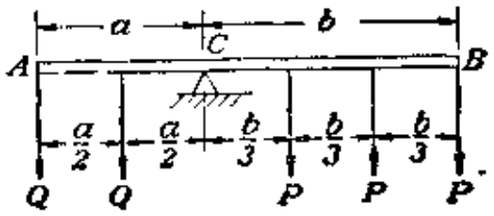
(解: $R_b=5\text{t}$, $R_c=6\text{t}$)

105. 設第145圖中 $Q=2P$。槓桿的自重可以不計。試求平衡時比值 $a:b$ 等於多大?

(解: $a:b=2:3$)



第 144 圖



第 145 圖

106. 如第146圖的起重裝置。起重機本身的重力爲 $Q=5\text{t}$,作用在圖中 G 點。重體 $P=1\text{t}$。大梁的自重可以不計。所有作用力都在同一平面。此外,$l=10\text{m}$, $x=3\text{m}$, $c=4\text{m}$。試求支點 A,B 的反作用力 R_a 和 R_b。

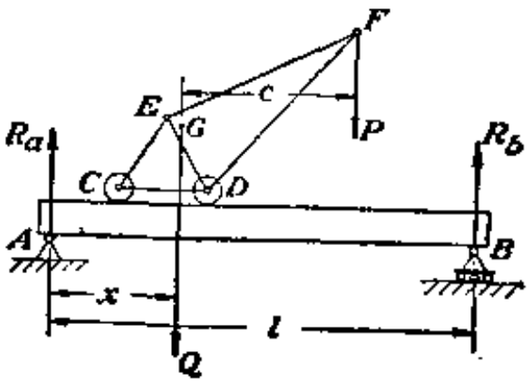
解: 大梁對於起重機的 C,D 兩處的反作用力必須跟 P,Q 兩力構成平衡。故起重機對大梁的作用力必然是一個跟 P,Q 兩力相等的力系。所以設想 P,Q 兩力是直接作用在大梁上也無不可。這就是說,我們可以把整個裝置作爲一個分離體來考察,使 C,D 兩處的作用力和反作用力自相抵消,而不必考慮。現在取 A,B 爲力矩中心,由(12)式可得

$$\left.\begin{aligned} R_b l-P(x+c)-Qx&=0\\ P(l-x-c)+Q(l-x)-R_a l&=0\end{aligned}\right\}$$

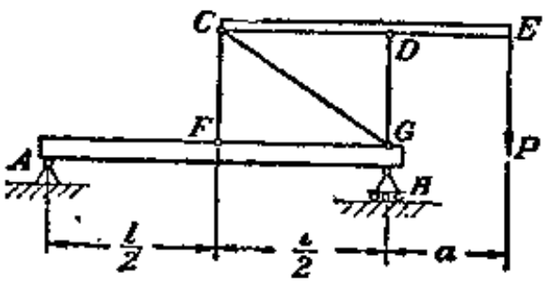
以已給各數值代入以上兩式,就可得 $R_a=3{,}8\text{t}$, $R_b=2{,}2\text{t}$。此外,還可以看到,這兩個反作用力的大小跟起重機前後輪的距離無關。

107. 試求第147圖中 A,B 兩支點對梁的反作用力 R_a 和 R_b。

(解: $R_b=P+\frac{Pa}{l}$向上, $R_a=\frac{Pa}{l}$向下。)



第 146 圖



第 147 圖

108. 第148圖中 ABC 是一個彎成折綫形狀的桿件,由一根鋼綫 DA 懸掛在圖中 D 點。

AB,BC 兩部份的長度分別爲 l 和 $2l$，重量分別爲 Q 和 $2Q$。 彎折角 ABC 固定等於 60°。 試求平衡時 圖中 α 角應等於多大。

解: 將整個桿件當作一個分離體來考察。 它上面共有 Q, $2Q$ 和 DA 綫的鉛垂反作用力等三個力在作用。 這三力是一個平衡的平行力系。 以 A 點作爲力矩中心就可得圖中

$$AF=2AE$$

由圖上的幾何關係，知

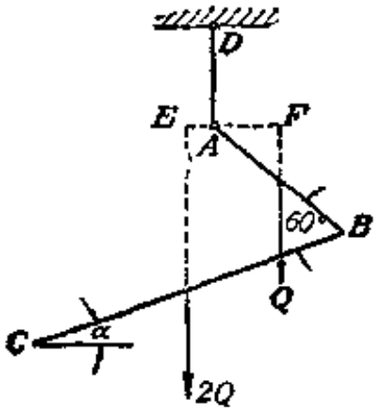
$$\frac{l}{2}\cos(60°-\alpha)=2\,[l\cos\alpha-l\cos(60°-\alpha)]$$

故 $$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}/5$$

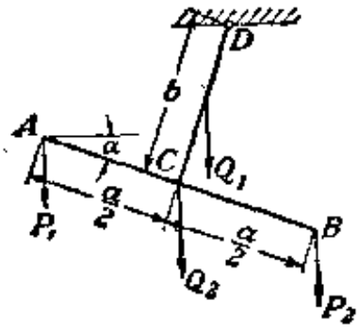
也就是 $$\alpha=19°\,06'$$

109. 第 149 圖中，AB 和 CD 是兩個相互垂直、在 C 點剛性結合的直桿，由一個鉸鏈 D 固定在圖中 D 處。 兩直桿的重量分別爲 Q_2 和 Q_1。 試求它們在圖中的 P_1, P_2 兩力作用下平衡時，α 角應等於多大? 設 $P_2>P_1$。

(解: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}\cdot\frac{P_2-P_1}{2P_1+2P_2+2Q_2+Q_1}$)

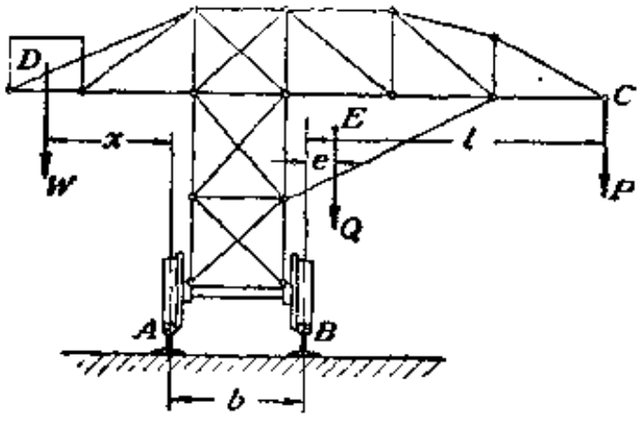


第 148 圖



第 149 圖

110. 第 150 圖中是一個重量 $Q=20t$ 的起重機。 重力 Q 作用在圖中 E 點。 D 處有一個平衡重體 W，作用是防止機身因 Q 和所舉重體 P 而發生的翻倒。 這一平衡重體要使起重機舉最大重體 P 時不至於向右翻倒；而取去 P 後又不至於向左翻倒。 設圖中 $Q=20t$, $P=20t$, $b=2m$, $e=\frac{1}{2}m$, $l=4m$，試求 W 以及 x 的極限值等於多大?



第 150 圖

解：現在分兩種極端情形來討論：

(1) P 力在 C 處作用使機身有「繞 B 點翻倒可能」的情形。在此情形下，機身將開始翻倒時，A 輪和軌條間無壓力存在。故起重機上只有 W, Q, P 及 B 處的鉛垂反作用力共四個力構成平衡。將 B 點作爲力矩中心，就可得

$$W(x+b)-Qe-Pl=0 \qquad (a)$$

(2) P 力取去後，平衡重壓使機身有「繞 A 點翻倒可能」的情形。在此情形下，B 點無壓力存在。如取 A 點爲力矩中心，就可得

$$Wx-Q(b+e)=0 \qquad (b)$$

解開以上(a)(b)兩式，得

$$W=\frac{Pl}{b}-Q, \quad x=\frac{Q(b+e)b}{Pl-Qb}$$

把已給各數值代入這一結果，可知 $W=20\text{t}$, $x=2\frac{2}{3}\text{m}$。

讀者試證明：所得到的 W 值是最小值，x 是最大值。

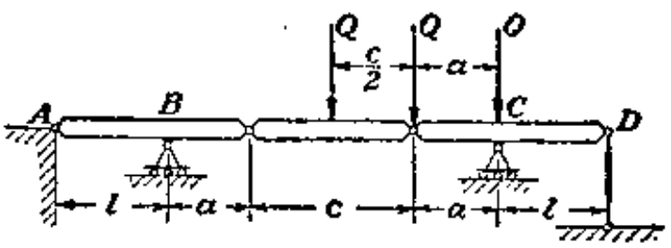
111. 試求第 151 圖中 A,B,C,D 四支點所產生的反作用力 R_a, R_b, R_c 和 R_d。

(解：$R_a=\frac{Q_a}{2l}$ 向下，$R_b=\frac{Q(a+l)}{2l}$ 向上，

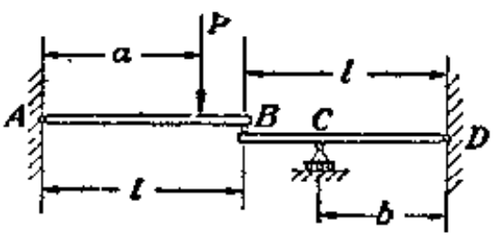
$R_c=Q+\frac{3Q(a+l)}{2l}$ 向上，$R_d=\frac{3}{2}\frac{Qa}{l}$ 向下)

112. 試求第 152 圖中支點 C 所產生的反作用力 R_c。

(解：$R_c=Pa/b$)



第 151 圖



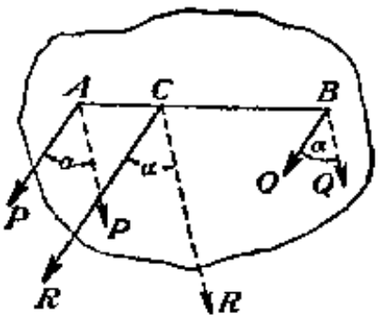
第 152 圖

24. 平行力中心

第 153 圖中，P 和 Q 是兩個分別作用在一剛體上 A 和 B 兩點的平行力。它們的合力 R，根據 § 20，應該方向跟兩力平行，大小等於兩力的代數和，作用線通過連線 AB 的 C 點使

$$BC : AC = P : Q$$

現在假定 P, Q 兩力的作用線在作用平面中同時分別繞 A, B 兩點向同一方向旋轉一個任意的角度 α。顯然，合力 R 的作用線也將向同



第 153 圖

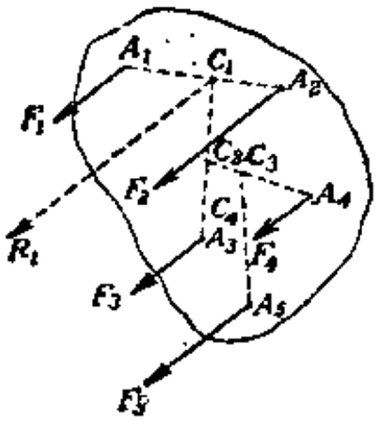
方向繞 C 點旋轉 α 角(見第 153 圖中的虛線)。不論旋轉的 α 角等於多大，此 R 力的作用線都將通過 C 點。這也就是說，不管 P,Q 兩平行力的方向如何，它們的合力 R 的作用線上總有一點 C 是不變的。這僅有的合力所必定通過的不變點 C 通常稱爲兩平行力 P,Q 作用在 A，B 兩定點的平行力中心。

現在來討論一個很多力組成的平行力系。第 154 圖中 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是某剛體上的一個點系。平行力 $F_1,F_2,\cdots F_n$ 分別作用在點系的各點。根據以上討論，其中 F_1，F_2 兩力，不論力系的作用方向如何，總可以由一個作用在 A，B 連線上 C 點的合力 R_1 來代替；C 點則分 A_1A_2 線爲 $A_1C_1:A_2C_1=F_2:F_1$。同樣，又將 A_3 點的力 F_3 和作用在 C_1 點的「部份合力」R_1 合成爲 F_1,F_2,F_3 三個力的合力 R_2，作用於圖中 C_2 點，C_2 是 C_1 和 A_3 連線上的一點，分割 C_1A_3 爲

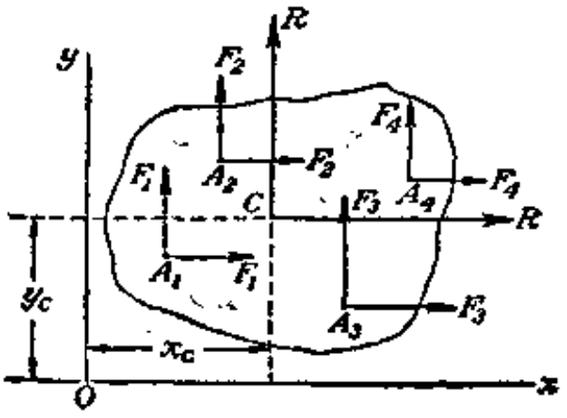
$$C_1C_2:A_3C_2=F_3:(F_1+F_2)$$

C_2 就是 F_1,F_2,F_3 三力的平行力中心。繼續用同樣方法，又可求出 A_1,A_2,A_3,A_4 四點上 F_1,F_2,F_3,F_4 四力的平行力中心 C_3。繼續應用這一方法到點系 n 個點上所有 n 個力的合力的平行力中心已決定爲止，就可看到，不管各點的平行力的作用方向如何，作用平面上總必定有一點，也僅有這一點是各力的合力作用線所必須通過的。這一點就稱爲平行力系作用在此點系的平行力中心。

特例情形，點系的所有各點都在同一平面時，我們可以由 (9) 式來決定作用在這些點上各力的「平行力中心」。例如第 155 圖中 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是剛體內某一平面中一個任意的點系。它們對於圖中正交坐標軸 x,y 的坐標值分別爲 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots y_n$。現在要決定一個



第 154 圖



第 155 圖

作用在這一點系上的力系 $F_1, F_2, \cdots F_n$ 的「平行力中心」，可先設想各平行力的方向平行於坐標軸 y。由(9)式可得到合力 R 對原點 O 的力臂是

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (F_i x_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i} \tag{13a}$$

之後，設想各平行力繞各自作用點旋轉 90° 至作用線跟 x 軸平行，又可由(9)式求得合力 R 對 O 點的力臂是

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (F_i y_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i} \tag{13b}$$

以前已說過，一個平行力系對於一個一定點系的平行力中心，跟力系的作用方向是毫無關係的。因此，(13)式已可完全決定所求的平行力中心，並不會因爲計算過程中是設想平行力系取特殊的坐標軸方向而有所影響。

計算(13)式時，對於任何一力 F_i 的正負符號可如下規定：假使 F_i 的方向跟坐標軸的正方向相同，那它就是正值；否則，就是負值。

一個「作用在點系 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 上的力系 $F_1, F_2, \cdots F_n$」的平行力中心，如果各力的大小同時乘以一個固定常數，那它的位置並不會因而變動。這事實只要研究一下(13)式便可知道。各力所乘的固定常數 n 會在兩式的分子分母中同時出現，因而將互相抵消，所以各力共同增大或縮小 n 倍，平行力中心的位置是不會改變的。這也就是說，一個作用在一定點系中的一個力系的平行力中心，只看各點的位置以及力系各力的相對大小如何而定；跟各力的眞實大小是完全無關的。

特殊情形，力系中各力的大小都相等時，平行力中心的坐標值 x_c 和 y_c，根據(13)式，直接就等於點系各點坐標值的平均值。

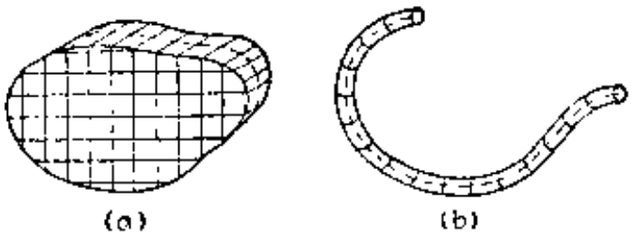
25. 重心及形心

一個物體的重心就是，不論物體在空間的位置如何，它受到的分佈重力的合力作用線始終都通過的一點。由這一定義，可見一個剛體的重心，實際上，就是作用在它各質點的重力的平行力中心；因爲重力永遠是鉛垂向下，「一個物體發生任何一個角度 α 的旋轉」顯然就跟 § 24 所指的「所有作用力繞作用點作相同角度的旋轉」情形相同。

一個只受本身的分佈重力作用的物體，若支承在它重心處，這物體，顯然，取任何位置都可以平衡；因爲不論位置如何，重力的合力總通過這樣的支點，因而永遠可以由支點的反作用力來抵消全部重力的作用。

所有的實際物體當然都是三因次的空間物體。因之，它各質點上的重力必然是一個空間的平行力系。不過在一定情形下，我們還是可以不考慮物體的厚度，甚至它的厚度和寬度，而假定構成物體的質點都在同一平面內甚或在同一根線上。以下我們就這些特殊情形來討論。

例如第 156a 圖中的一個密度均勻、厚度同一的薄片形物體，我們在想像中將這薄片分割成爲極多的微細長條(見第 156a 圖)。如果設想薄片體豎着放在一個平面上，那每一長條的重力就都在薄片體厚度方向的中平面上，構成一個平面的平行力系。力系的平行力中心(當然也在中平面上)就是薄片形物體的重心。



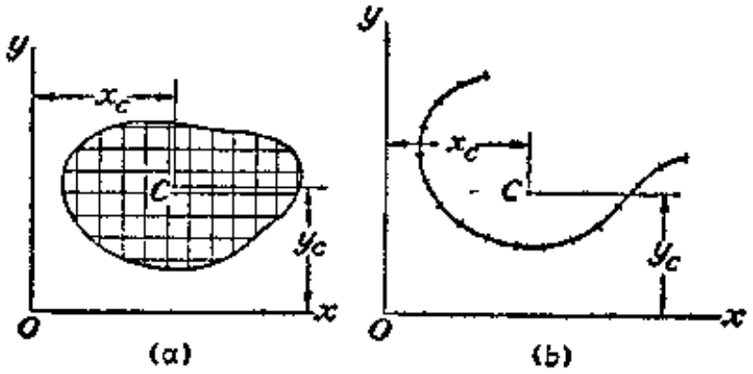
第 156 圖

對於一根密度均勻、切面不變的細線形物體，如果它的長軸全部在一個平面內，我們在想像中把它分割成很多小段(見第 156b 圖)，並且令它的長軸所在平面取鉛垂位置，那每一小段受到的重力就可構成一個長軸平面內的平行力系。這力系的平行力中心當然就是線形物體的重心。

因爲薄片體密度均勻、厚度不變，因此，分割後，每一微細長條受到的重力的大小必定跟各自的切面面積成正比。同樣，線形物體中每一

小段上的重力的大小也應該跟每一段的長度成正比。對平行力中心的位置來說，這是有重要的意義的。§24中已說明過，平行力中心的位置跟各平行力本身的絕對大小無關。現在薄片形物體或細線形物體中每一長條或每一小段的重力既然都跟切面面積或每段長度成正比，那末不論它們的比值如何，這一比值總是所有各長條或各小段所共同的一個數值。因此，作用在各長條或小段上的重力，不問物體是由什麼構成的，它們的相對大小總是一定的。這也就是說，物體重心的位置，在薄片體中只跟中平面上的圖形形狀有關；在細線體中只跟長軸的形狀有關。

由此可見，要決定一個密度均勻、厚度不變的薄片體的重心位置，只要將它中平面上的圖形在想像中分割爲無數小塊如第157a圖，並假定在每一小塊的中心有一個跟它切面積成正比的重力在作用，然後讓這些重力先後跟 x 和 y 軸平行，按照(13)式就可以決定它們平行力中心的位置。這位置也就是物體的重心位置，跟薄片體的厚度以及構成物體的物質完全無關。同樣情形，一根密度均勻、切面不變的細線，如果它的長軸全在一個平面上，那就可以按第157b圖來分割。之後，令作用在各小段中點跟各小段長度成正比的重力力系先後跟 x 和 y 軸平行，再應用(13)式就可決定它們的平行力中心（也就是細線的重心）的位置。



第157圖

在以上討論中，我們得到了「平面圖形的面積重心」和「平面曲線的長度重心」的觀念。這些觀念非但是因爲「面積重心或長度重心跟薄片體或細線體的重心相同」而可以利用來決定重心；並且它們的本身意義，對某些力學問題來說，也非常重要。不過平面圖形或平面曲線事實上，沒有什麼「重量」可言。因此，重心這一名詞，對它們來說，是

不很妥當的。爲避免誤解起見，以下改稱它們爲形心。

計算一個平面圖形(第 157a 圖)的面積形心的坐標值，根據以上討論，可以將(13)式化成如下兩式來應用：

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n}(\Delta A_i \cdot x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\Delta A_i} \\ y_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n}(\Delta A_i \cdot y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\Delta A_i} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

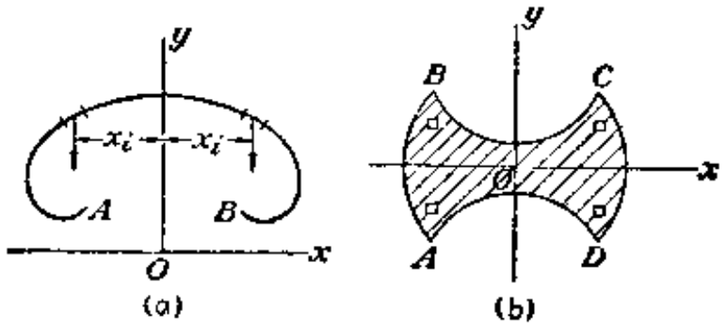
其中 ΔA_i 是圖形中任一小塊的面積；x_i, y_i 是這一小塊的中心的坐標值。

同樣，一根平面曲線的長度形心的坐標值，也可以直接由以下兩式來計算：

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n}(\Delta L_i \cdot x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\Delta L_i} \\ y_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n}(\Delta L_i \cdot y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\Delta L_i} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中ΔL_i是曲線中任一小段的長度，x_i和y_i就是這一小段中點的坐標值。

由 (14) (15) 兩式可看到，若是平面圖形或平面曲線有一個對稱軸線，那它的形心就一定在對稱軸線上。例如第 158 圖的兩個例子。圖 a 的平面曲線有一個對稱軸 Oy。現在設想分割這一曲線爲很多長度全等於 ΔL 的相等小段，令作用在每小段中點的相等重力平行於 Oy 軸。根據 § 24，這一力系平行力中心的 x 軸坐標 x_c 應該直接等於

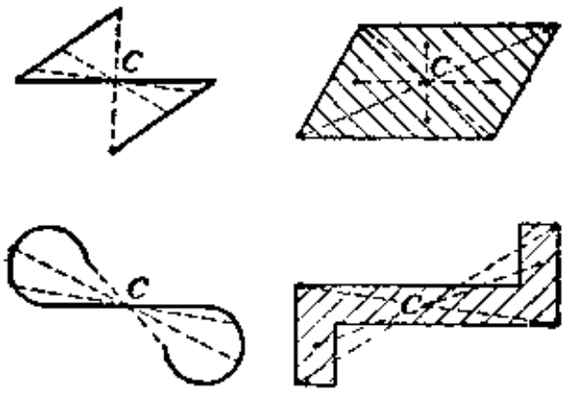


第 158 圖

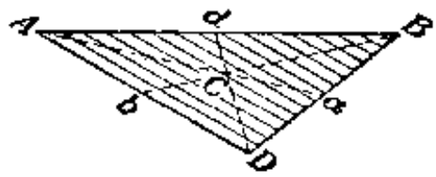
各小段中心的 x 軸坐標的平均值。這平均值當然等於零，所以 x_c 也等於零。可見長度形心 C 確是在對稱軸上。至於圖 b 中有兩個對稱軸線（x 軸和 y 軸）的平面圖形 $ABCD$，我們也可以用相同方法來證明：它的形心必須同時在兩對稱軸線上，因此，可以由兩軸線的交點完全決定。這一圖形的輪廓曲線的長度形心，根據相同理由，可以斷定也就是圖形的面積形心。所以一切有兩個對稱軸的圖形像圓、橢圓、正多邊形等等的「輪廓曲線」的長度形心以及圖形的面積形心，我們都可以一望而知，不必計算。

有時一個圖形雖然沒有一個明顯的對稱軸，但是仍舊存在着一定的對稱習性。這種圖形有一個所謂「圖形中心」。它是圖形所有可能的直徑的中點。第 159 圖中舉出幾個這種圖形的例子。這種圖形的「圖形中心」，顯然的，就是它的面積形心或它輪廓曲線的長度形心。

任何三角形的形心都是它三根中線的交點。證明如下：將第 160 圖中的任意一三角形 ABD 分割爲平行於底邊 AD 的無限多的狹條。每一狹條的形心顯然就是狹條的長度中點。這些形心的軌跡也就是三角形的 Bb 中線。可見整個三角形的面積形心必定就在這一中線



第 159 圖



第 160 圖

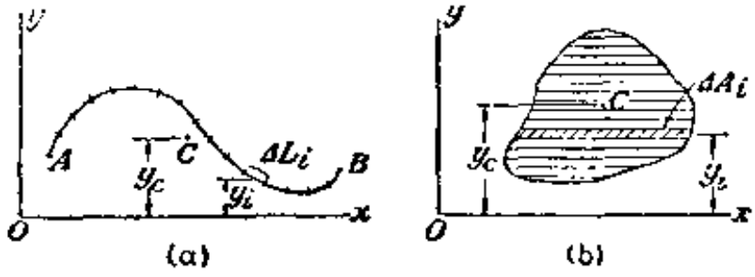
上。假使將 $\triangle ABD$ 分割成平行於 DB 邊的狹條，那根據同樣理由又可斷定三角形的形心必定又在中線 Aa 上。所以任何三角形的形心都可以由它三中線的交點決定。

26．旋轉面和旋轉體的形心

1．一個任意的平面曲綫繞一個不穿過它的同平面軸綫旋轉時，它在空間所產生的表面面積就等於這一曲綫的長度跟它長度形心在旋轉過程中所經過的路程長度的乘積。

2．一個平面圖形繞同平面一個不穿過它的軸綫旋轉時，它在空間所產生的體積就等於這一圖形的面積跟旋轉過程中面積形心所經路程的長度的乘積。

這兩個命題稱爲「旋轉體定律」(1)。現在先證明第一定律如下：第161a圖中 AB 是 xy 平面中的一根長 L 的曲線。它跟 x 軸互不相交。



第 161 圖

現在設想把它分割成很多長度極短的小段，使每一小段都可以看作是一根極短的直線線段。任一長 ΔL_i 小段的中點的 y 軸坐標是 y_i；AB 曲線的形心 C 的坐標是 y_c。假使 AB 繞 Ox 軸旋轉一個 α 角(以弧度計)，那任一小段的中點所走的路程就將等於 αy_i。因之，這一小段在空間產生的表面面積將等於 $\Delta L_i \cdot \alpha \cdot y_i$。應用(15)中第二式，可得 AB 繞 Ox 旋轉而產生的全部表面面積是

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta L_i \cdot \alpha \cdot y_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \Delta L_i \cdot y_i = \alpha y_c \sum_{i=1}^{i=n} \Delta L_i = \alpha y_c L \qquad (a)$$

其中 αy_c 就是形心 C 在旋轉過程中所走的路程。故第一定律已完全證明。至於第二定律，我們也可用同樣方法去證明：第161b圖中是一

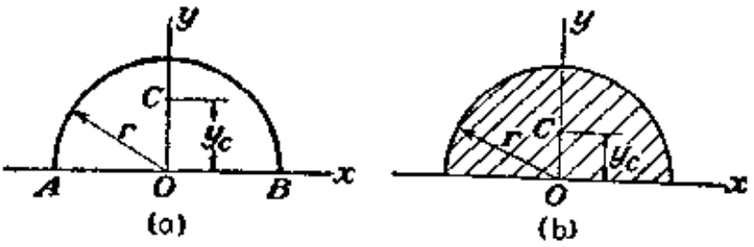
(1) 英美叫 Pappus 定律；德國叫 Guldinsche 定律。

個面積等於 A 的圖形，它的形心坐標在 y 軸方向爲 y_c。現在分割這圖形爲很多平行於 x 軸的無限狹狹條。任一狹條的面積爲 ΔA_i，中心坐標爲 y_i。圖形繞 x 軸旋轉一 α 角後，因各狹條的寬度極小，故任一狹條在空間產生的體積可當作等於 $\Delta A_i \cdot \alpha \cdot y_i$。應用(14)中第二式，可得整個圖形在空間產生的體積是

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta A_i \cdot \alpha \cdot y_i = \alpha \sum_{i=1}^{i=n} \Delta A_i \cdot y_i = \alpha y_c \sum_{i=1}^{i=n} \Delta A_i = \alpha \cdot y_c \cdot A \qquad (b)$$

故第二定律已證明。

旋轉體定律除開可以決定旋轉面或旋轉體的面積或體積外，還可以用來計算一個平面圖形的面積形心，或平面曲線的長度形心。例如第 162a 圖中的半圓圓弧 AB。它的半徑爲 r。如要求 AB 的長度形心 C，可選擇坐標軸 x, y 如圖。形心 C 自然在對稱軸 y 軸上，故 x 軸



第 162 圖

坐標應等於零；y 軸坐標則爲所求的 y_c。設想 AB 繞 x 軸旋一"2π"角產生了一個圓球表面。球表面的面積已知應等於直徑跟大圓圓周的乘積 $4\pi r^2$。故由第一定律，可得

$$\pi r \cdot 2\pi y_c = 4\pi r^2$$

$$y_c = 2r/\pi \qquad (c)$$

再如第 162b 圖的半圓形。它的半徑等於 r。如要決定它的面積形心 C 的 y 軸坐標 y_c，也可設想這半圓形面積繞 x 軸旋轉一"2π"角，產生一個圓球的體積。球的體積已知爲 $\frac{4}{3}\pi r^3$，故由第二定律可得

$$\frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi y_c = \frac{4}{3}\pi r^3$$

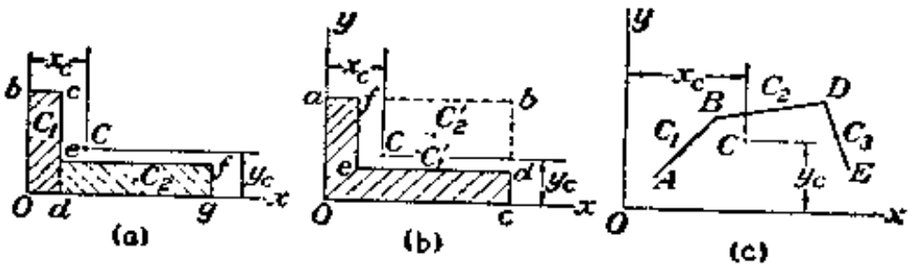
$$y_c = \frac{4r}{3\pi} \qquad (d)$$

27. 平面組合圖形和組合曲綫的形心

假使一個平面圖形的面積可以分成爲若干有限面積的部份，而這些部份的面積形心又都是已知的，那整個組合圖形的形心 C 就可以直接用 § 25 中 (14) 式來決定它的位置。

例如第 163a 圖中的平面圖形。它由 $Obcd$ 及 $defg$ 兩長方形組合而成。兩長方形的面積分別爲 A_1, A_2。它們各自的形心 C_1 和 C_2 的坐標分別爲已知的 x_1, y_1 和 x_2, y_2。由(14)式，可得這一組合圖形的形心 C 的位置爲：

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{A_1x_1+A_2x_2}{A_1+A_2} \\ y_c &= \frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$



第 163 圖

我們也可以把這一組合圖形當作由一個面積等於 A_1' 的長方形 $Oabc$ 割去另一個面積等於 A_2' 的長方形 $efbd$ 而成的(第 136b 圖)。兩長方形的形心 C_1' 和 C_2' 的位置已知爲 x_1', y_1' 和 x_2', y_2'。計算組合圖形的形心 C 的坐標時，可先設想長方形 $Oabc$ 是由長方形 $efbd$ 和組合圖形共同組成的。之後，應用(14)式確定三個形心位置間的關係，由這一關係式中就可求得

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{A_1'x_1'-A_2'x_2'}{A_1-A_2} \\ y_c &= \frac{A_1'y_1'-A_2'y_2'}{A_1-A_2} \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

此式說明，最初只要把 $efbd$ 長方形的面積 A_2' 當作負值，那就仍可直接應用(14)式求得相同結果。

應用同樣方法，也可以決定一根組合的平面曲線的形心位置。例如第 163c 圖中的折線 $ABDE$ 由三根長度分別爲 L_1, L_2 及 L_3 的直線

AB, BD 及 DE 所組成。這三直線的形心 C_1; C_2; C_3 的位置已知爲 x , y_1; x_2, y_2; x_3, y_3。應用(15)式,可得 $ABDE$ 的形心 C 的位置爲:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{L_1x_1+L_2x_2+L_3x_3}{L_1+L_2+L_3} \\ y_c &= \frac{L_1y_1+L_2y_2+L_3y_3}{L_1+L_2+L_3} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

例題和習題

113. 試求第 164 圖中繪斜綫的圖形的面積形心位置。設圖中 $a=6\text{cm}$, $b=1\text{cm}$, $c=2\text{cm}$。

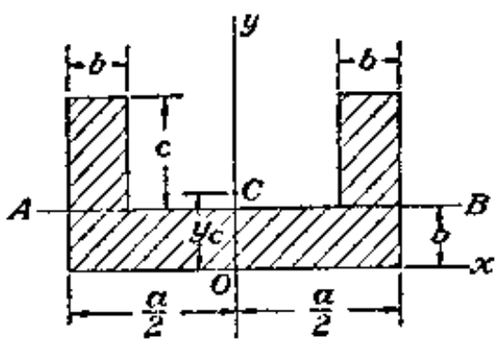
(解: $y_c=1.1\text{cm}$)

114. 設第 164 圖中 a 和 b 固定不變。問形心 C 恰在 AB 綫上時,圖中 c 應等於多大?

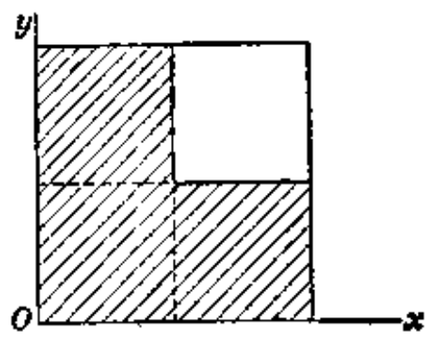
(解: $c=\sqrt{ab/2}$)

115. 第 165 圖中,正方形的邊長等於 a。試求它的四分之三部份(圖中繪斜綫部份)的面積形心位置。

(解: $x_c=y_c=\frac{5}{12}a$)



第 164 圖

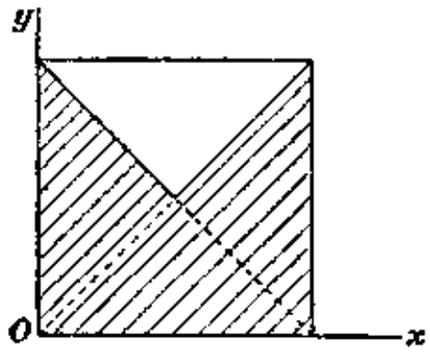


第 165 圖

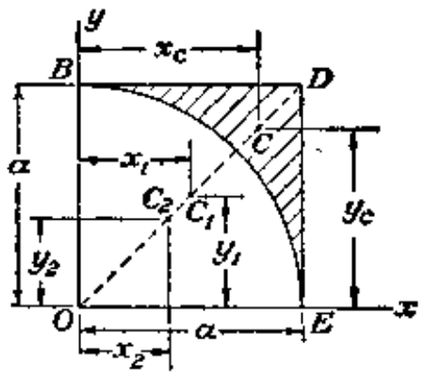
116. 求第 166 圖中繪斜綫圖形的面積形心的位置。

(解: $x_c=\frac{a}{2}$, $y_c=\frac{7}{18}a$)

117. 第 167 圖中繪斜綫的 BDE 圖形由一正方形 $OBDE$ 跟一半徑爲 a 的四分圓相減而成。試求它的形心 C 在何處?



第 166 圖



第 167 圖

解：BDE 是一個對稱圖形，故形心 C 必在對稱軸綫——$OBDE$ 正方形的對角綫上。也就是說，C 點的坐標值 $x_c=y_c$。設 $OBDE$ 和四分圓的形心 $C_1(x_1,y_1)$ 和 $C_2(x_2,y_2)$ 是已知的，那應用(14)中第一式就可得

$$x_c=\frac{A_1x_1-A_2x_2}{A_1-A_2}$$

以圖中所給各值和 §26 中(d)式代入上式，可知

$$x_c=\frac{a^2\cdot\frac{a}{2}-\frac{\pi a^2}{4}\cdot\frac{4a}{3\pi}}{a^2-\frac{\pi a^2}{4}}$$

故

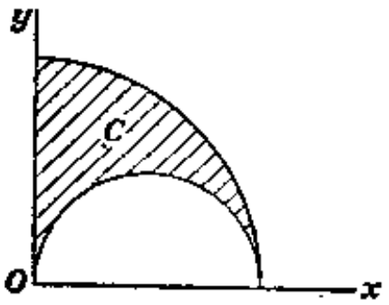
$$y_c=x_c=\frac{2a}{3(4-\pi)} \qquad (d)$$

118. 第 168 圖繪斜綫的圖形是由一半徑爲 a 的四分圓中挖掉一個半徑爲 $\frac{a}{2}$ 的半圓而成的。試求它的面積形心 C 在何處？

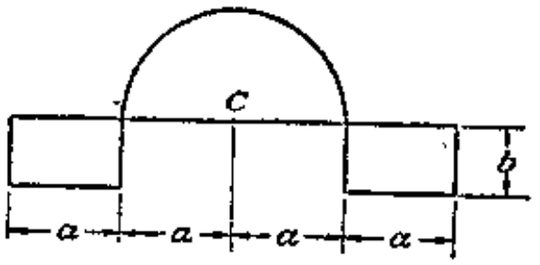
(解：$x_c=0{,}349a$，$y_c=0{,}636a$)

119. 第 169 圖中是一根切面不變的細綫彎折而成的組合曲綫。設圖中 a 固定不變，試求此組合曲綫的形心 C 恰在半圓的圓心處時，圖中 b 應等於多大？

(解：$b=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)=0{,}618a$)



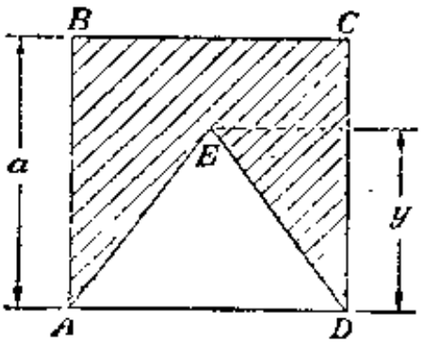
第 168 圖



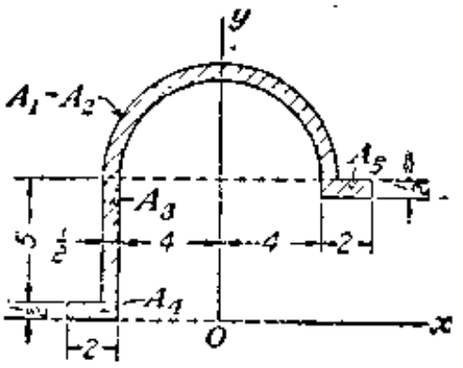
第 169 圖

120. 由正方形 $ABCD$ 中挖去一個等腰三角形 AED 得到如第 170 圖的繪斜綫部份。設這部份的面積形心恰在 ΔAED 的頂點 E 處，試求 ΔAED 的高度 y 應等於多大？

(解：$y=\frac{3-\sqrt{3}}{2}a=0{,}634a$)



第 170 圖



第 171 圖

121. 試求第171圖中繪斜綫圖形的面積形心在何處？圖中所註尺寸的單位爲 cm。

解：圖形中的半圓環可當作由大半圓的面積 A_1 減去較小半圓面積 A_2 而成的。其餘部份可看作由三個狹窄的長方形 A_3, A_4 和 A_5 三面積構成。一個組合圖形假若組合部份很多，那最好排成表格來計算(14)式；否則，很難避免錯誤。現在把本題做一個例子，介紹一種計算表的格式如下：

i	ΔA_i	x_i	y_i	$\Delta A_i x_i$	$\Delta A_i y_i$
1	31,8	0,00	7,41	0,00	235,60
2	−25,1	0,00	7.20	0,00	−180,70
3	2,5	−4,25	3,00	−10,62	7,50
4	1,0	−5,00	0,25	− 5,00	0,25
5	1,0	+5,00	5.25	+ 5,00	5,25
Σ	11,2	……	……	−10,62	67,90

按(14)式，可得：

$$x_c=\frac{-10,62}{11,2}=-0,95\text{cm}$$

$$y_c=\frac{67,90}{11,2}=+6,06\text{cm}$$

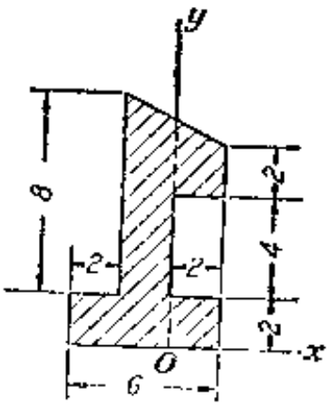
122. 試求第172圖中圖形的面積形心 C 的位置。圖中註的尺寸都以 cm 爲單位。

(解：$x_c=-0,71\text{cm}$, $y_c=+4,21\text{cm}$)

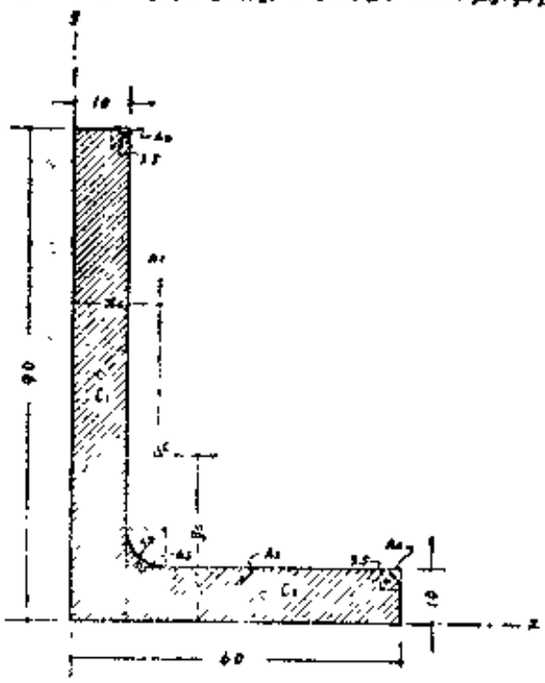
123. 試求第171圖中的馬蹄形圖形的中縫的長度形心位置。試問所得結果是不是圖形面積形心位置的一個很精確的近似值？

(解：$x_c=-0,951\text{cm}$, $y_c=+6,067\text{cm}$)

124. 第173圖中是結構工程中常用的一種角鋼的切面。圖中註的尺寸全以 mm 爲單位。



第 172 圖



第 173 圖

試根據這些尺寸，求切面的面積形心 C 的坐標 x_c 和 y_c。

解：最初，先不考慮切面的三個圓角 A_3，A_4 和 A_5，把整個切面當作由兩個長方形 A_1 和 A_2 所組成。兩長方形的形心 C_1 和 C_2 的位置當然一望而知不必計算。這樣求出來的切面形心 C_0 的位置跟眞正切面的形心 C 的位置非常接近，而且 C_0 (x_0, y_0) 的坐標計算很簡單不容易出差錯。C_0 的位置確定後，眞正形心 $C(x_c, y_c)$ 的坐標計算就變成僅僅是改正坐標 x_0，y_0 的微小誤差；整個計算過程中，計算錯誤的機會，因此，減少很多。

根據以上說法，我們先計算近似圖形的形心 C_0 的坐標 (x_0, y_0)；把圖中各尺寸填入下表第一第二兩行內，算出結果。再引用(14)式，就得到

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{22000}{1400} = 15{,}7\text{mm} \\ y_0 &= \frac{43000}{1400} = 30{,}7\text{mm} \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

之後，把角鋼的眞正的切面看做由這一已知形心位置 (x_0, y_0) 的圖形中減掉 A_3 和 A_4 兩面積，而加上 A_5 面積而成。由第 117 題的結果［見(d)式］，可算出三個微小面積的形心坐標，把它們分別填入下表中，計算後，由(14)式就可得到

i	ΔA_i	x_i	y_i	$\Delta A_i x_i$	$\Delta A y_i$
1	900	5	45	4500	40500
2	500	35	5	17500	2500
Σ	1400	15,7	30,7	22000	43000
3	−2,6	8,2	89,2	−21	−232
4	−2,6	59,2	8,2	−154	−21
5	10,5	11,6	11,6	122	122
Σ	1405,3			21947	42869

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{21947}{1405{,}3} = 15{,}6\text{mm} \\ y_c &= \frac{42869}{1405{,}3} = 30{,}5\text{mm} \end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

從這一結果，可看到：以前得到的近似值 x_0，y_0 跟正確結果，最大也僅僅相差 0,7%。因此，大多數的實用問題中，近似值已經足夠精確，可以直接引用。

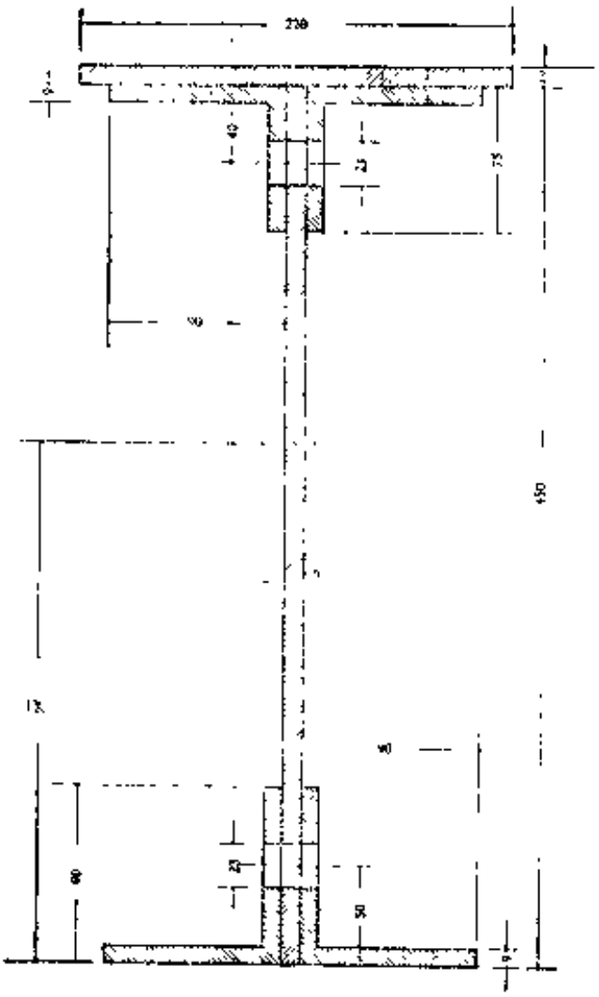
125. 第 174 圖是一個鋼鈑和角鋼鉚成的鋼鈑梁的切面。圖中註的尺寸以 mm 爲單位。試根據這些尺寸求切面面積形心 C 的坐標 y_c。鉚釘釘孔的影響要顧計在內。

解：各角鋼的面積和它們形心的位置可以由工程手册的定形鋼尺寸表中直接查出來。按照上題方法，先不考慮釘孔的影響，求得形心的近似位置。之後，根據釘孔尺寸加以

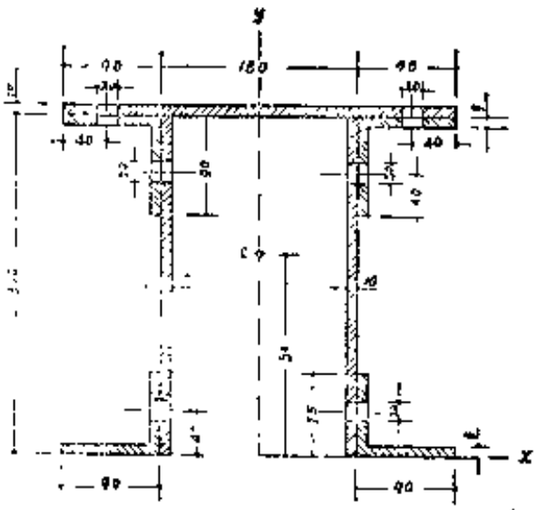
改正，就可得 C 點坐標 y_c 的正確值。 結果是：$y_0=261.9\text{mm}$，$y_c=265.5\text{mm}$。

126. 試求第 175 圖中鋼鐵梁切面的面積形心 C 的坐標 y_c（圖中註的尺寸以 mm 爲單位）。

（解：$y_c=185.4\text{mm}$）



第 174 圖

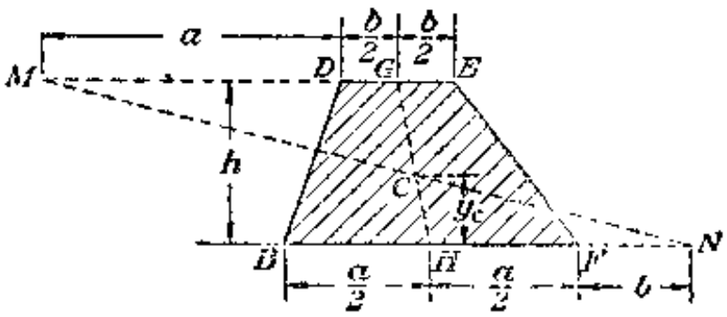


第 175 圖

127. 第 176 圖中 $BDEF$ 是一個任意的梯形。 GH 是上底 DE 跟下底 BF 的中點連綫。試證明梯形的面積形心 C 必在 GH 綫上，並且它的坐標是

$$y_c=\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{3}\,\frac{a-b}{a+b}\right) \qquad (g)$$

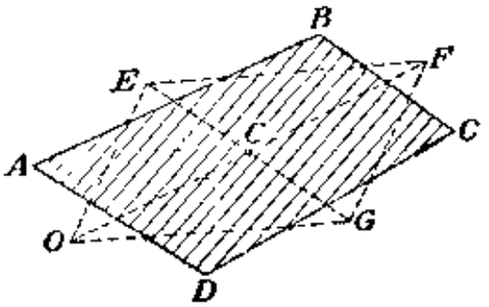
此外，再證明這一形心 C 可以用圖解法由圖中 MN 直綫跟 GH 綫的交點來決定。



第 176 圖

128. 三等分一個任意四邊形 $ABCD$ 的各邊。由各三等分點的連線，我們可得到一個平行四邊形 $OEFG$ 如第 177 圖。試證明 $ABCD$ 四邊形的面積形心 C 就是平行四邊形兩對角綫 OF 和 EG 的交點。

解：我們只要把 $ABCD$ 想像是由平行四邊形 $OEFG$ 中減去以 O,E,F,G 爲頂點的四個小三角形，之後，再加上以 A,B,C,D 爲頂點的四個小三角形，而成的一個四邊形（圖中畫斜綫部份），就可以證明本題。



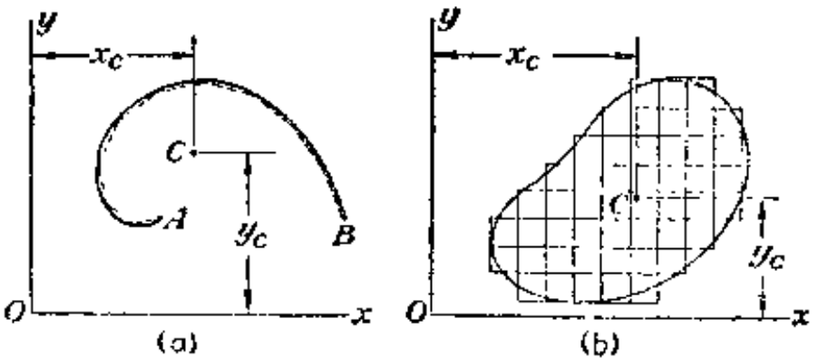
第 177 圖

28. 應用積分求形心位置法

在很多的實際問題中必須應用積分才能決定平面曲線和平面圖形的形心位置。例如，第 178 圖 xy 平面中的一根曲線 AB，假若要求它的形心位置，就必須用一羣非常短的直線線段去近似地代表它。令任一線段的長度爲 ΔL_i，形心坐標爲 x_i 和 y_i，那整個曲線的形心 C 的坐標 x_c 和 y_c 就可以根據(15)式（見第 82 頁）計算出來。這樣決定的形心，非常明顯的，不過是那些非常短的線段組成的折線的形心，並不是眞正曲線 AB 的形心。但是從另一方面看，那些線段愈短，數目愈多，它就愈近似眞正的曲線；從而由(15)式所得到的 x_c 和 y_c 值也愈眞確。曲線 AB 我們可以看作是那些長度 ΔL 無限減小的直線線段所組成的折線的極限。因此，眞正的 x_c 和 y_c 也可以看作(15)式在這樣一計算過程中的極限值。這種極限值必須應用積分來決定如下：

$$\left.\begin{aligned} x_c=\frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL}, \quad y_c=\frac{\int_L y\,dL}{\int_L dL} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

積分號右下方的 L 表示要沿曲線的整個長度去積分。



第 178 圖

同樣情形，對於任意一平面圖形(第178b圖)，我們可以用無數的面積 $\Delta A=\Delta x\cdot\Delta y$ 的小矩形去近似它。它形心 C 的坐標 x_c 和 y_c，因之，可以用(14)式(第82頁)計算。同樣，當 Δx 和 Δy 無限減小時，那些無限多小矩形的面積的總和也就逐漸接近於眞正的圖形。故眞確的 x_c 和 y_c 值可以看作是(14)式在 Δx 和 Δy 無限減小過程中的極限值，這種極限值當然必須應用積分決定：

$$\left.x_c=\frac{\int_A xdA}{\int_A dA},\quad y_c=\frac{\int_A ydA}{\int_A dA}\right\}\tag{17}$$

積分號右下方的 A 表示積分範圍應包括圖形的全部面積。

只要(16)或(17)式包含的各定積分都能夠計算，我們就可以應用它們去決定一根平面曲線或一個平面圖形的形心。一般情形下，假若曲線或圖線的形狀能夠由一個或一個以上的方程式表示，那(16)或(17)式的各積分也就可能計算。以下我們舉幾個例子來說明如何應用積分方法去決定一根平面曲線或一個平面圖形的形心位置。

例題和習題

129. 第179圖中 AB 是一個半徑等於 r 的 $\frac{1}{4}$ 圓弧。試根據圖中坐標軸綫計算它長度形心 C 的坐標值。

解：圓弧的方程式是：
$$x^2+y^2=r^2$$

分割圓弧爲無數的微分綫段，任一綫段的長度是
$$dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\frac{r}{y}dx$$

代入(16)的第二式，得
$$y_c=\frac{\int_L ydL}{\int_L dL}=\frac{\int_0^r y\frac{r}{y}dx}{\int_L dL}=\frac{r^2}{\pi r/2}=\frac{2r}{\pi}\tag{a}$$

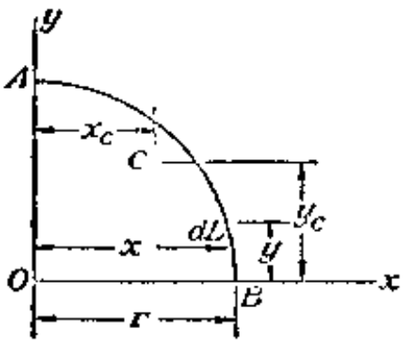
因對稱關係，$x_c=y_c$，故 C 的位置已完全決定。此結果跟§26中應用旋轉體定理得到的完全符合。

130. 第180圖中 OD 是一根以 Oy 爲鉛垂軸綫的拋物綫的一部份。試求圖中畫斜綫圖形 ODB 面積形心 C 的位置。

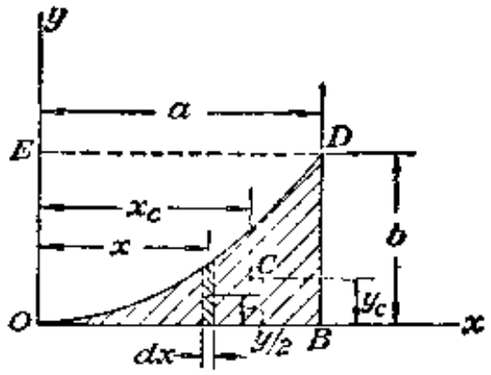
解：一個以坐標原點爲頂點的鉛垂拋物綫的方程式的一般形式是
$$x^2=4\alpha y$$

本題中 $x=a$ 處，$y=b$，故
$$\alpha=\frac{a^2}{4b}$$

也就是曲綫 OD 的方程式爲
$$y=\frac{b}{a^2}x^2$$



第 179 圖



第 180 圖

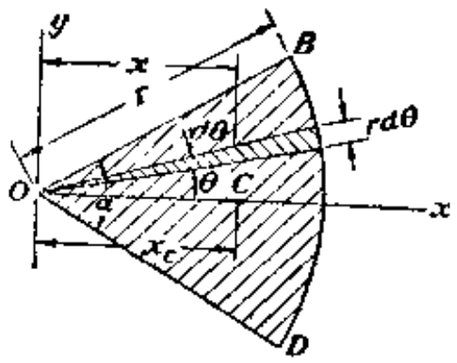
現在設想把 ODB 分割爲無數的狹條。任一狹條的寬度爲 dx，高度爲 y，面積爲 $dA=y\cdot dx$。它的形心位置是 $(x, y/2)$。由(17)式，可得：

$$x_c=\frac{\int_A xdA}{\int_A dA}=\frac{\int_0^a x\frac{b}{a^2}x^2dx}{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2dx}=\frac{\frac{a^2b}{4}}{\frac{ab}{3}}=\frac{3}{4}a \qquad (b)$$

$$y_c=\frac{\int \frac{y}{2}dA}{\int_A dA}=\frac{\int_0^a \frac{b}{2a^2}x^2\frac{b}{a^2}x^2dx}{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2dx}=\frac{\frac{ab^2}{10}}{\frac{ab}{3}}=\frac{3}{10}b \qquad (c)$$

131. 第 181 圖中 OBD 是一個半徑爲 r，中心角爲 α 的扇形。試求它的面積形心 C 的坐標 x_c 和 y_c。

解：設想這一扇形是由無數的無限小三角形所構成。任一小三角形的底寬爲 $r\cdot d\theta$，高爲 r，面積爲 $dA=r^2d\theta/2$。它形心的 x 軸坐標爲 $\frac{2}{3}r\cos\theta$。由(17)式，可得整個扇形形心 C 的 x 軸坐標爲



第 181 圖

$$x_c=\frac{\int_A xdA}{\int_A dA}=\frac{2\int_0^{\alpha/2}\frac{2}{3}r\cdot\cos\theta\cdot\frac{r^2}{2}\cdot d\theta}{2\int_0^{\alpha/2}\frac{r^2}{2}d\theta}$$

$$=\frac{\frac{r^3}{3}\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha r^2}{4}}=\frac{4}{3}\frac{r}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (d)$$

由對稱關係，又可知，$y_c=0$。假使 $\alpha=\pi$，代入(d)式就可得 $x_c=\frac{4r}{3\pi}$，跟§26中計算的結果相符。

132. 應用上述方法，求第 181 圖中 BD 弧的長度形心的位置。

(解：$x_c=\frac{2r}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$)

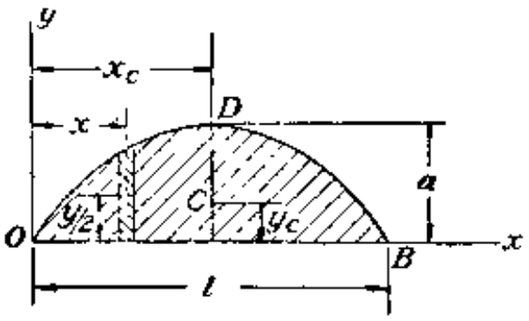
133. 第182圖中 ODB 是一根正弦曲綫的一部份。試求它跟 x 軸所圍面積的形心 C 在那裏?

(解: $x_c=\frac{l}{2}$, $y_c=\frac{\pi a}{8}$)

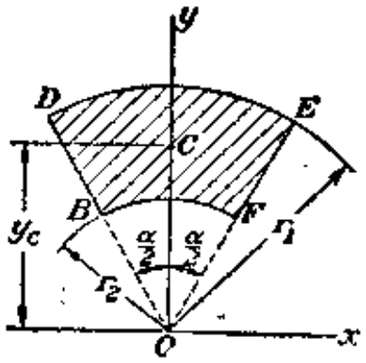
134. 試求第183圖中畫斜綫部份 $BDEF$ 的面積形心 C 在那裏?

解: 應用§27的方法,按第131題結果,就可求得

$$y_c=\frac{4}{3}\,\frac{r_1^3-r_2^3}{r_1^2-r_2^2}\cdot\frac{\sin\alpha/2}{\alpha}$$



第 182 圖



第 183 圖

135. 第184圖中 BED 是一個圓心角等於 α, 半徑等於 r 的弓形。試問它的面積形心 C 的坐標 x_c 等於多少?

(解: $x_c=\frac{4}{3}r\,\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$)

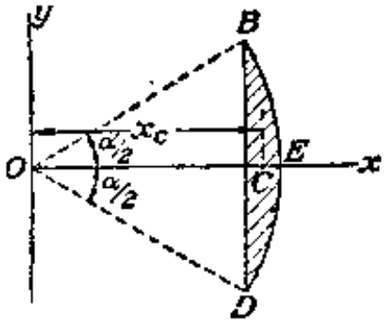
136. 試求第180圖中未畫斜綫的面積 OED 的形心 C 在那裏?

(解: $x_c=\frac{3}{8}a, y_c=\frac{3}{5}b$)

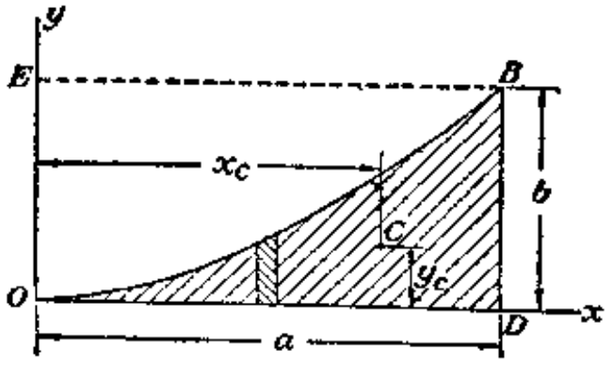
137. 設第185圖中曲綫 OB 的方程式是 $y=kx^n$, 試證明圖中畫斜綫的面積 OBD 的形心位置是:

$$x_c=\frac{n+1}{n+2}a$$

$$y_c=\frac{n+1}{4n+2}b$$



第 184 圖

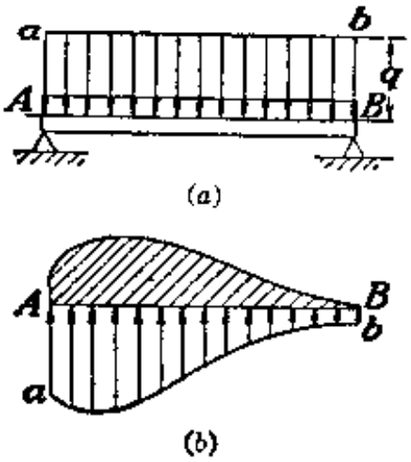


第 185 圖

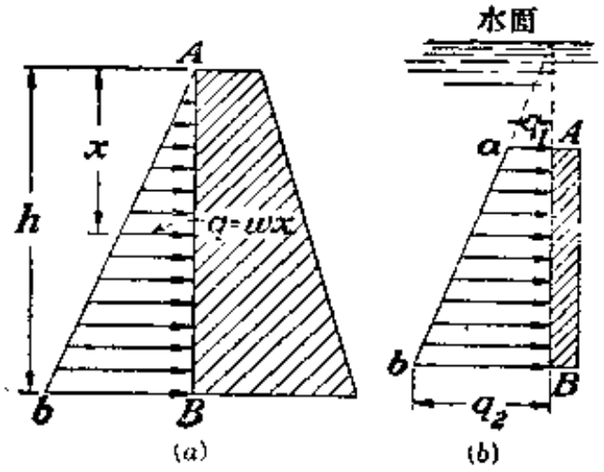
29. 平面分佈力

以前討論的問題都是指物體在集中一點作用的**集中力**作用下的平衡。以下我們再就**分佈力**，譬如堤壩上的水壓力、重力等的作用情形來研究。

這種「分佈力」常可用一種所謂**荷重圖**來表示。例如第186a圖中的 AB 桿。它上面的「沿長軸方向均勻分佈」的重力就可以由一方形「荷重圖」$AabB$ 來代表。分佈在單位長度分佈綫 AB 上的荷重通常稱爲分佈力的**强度**。「强度」由荷重圖中縱坐標的高度 q 表示。本例中，縱坐標在分佈線上各點的高度都相同，也就是說，各點的强度都相同，所以荷重是一種「均勻分佈力」。如果荷重是水產生在一個鉛垂堤面的靜水壓力（第187a圖），那它就是由一三角形荷重圖 AbB 來表



第 186 圖



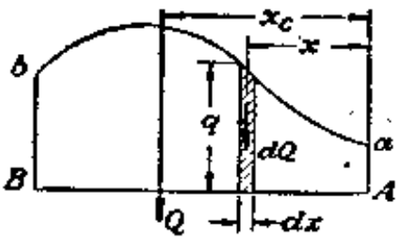
第 187 圖

示的一種不均勻分佈力。在這種情形下，因荷重圖中 AB 線上任何一點的坐標高度就代表這一點的壓力「强度」，圖中各點的坐標高度既隨着深度作直線式變化，可見壓力是跟水的深度成正比的。最一般的平面不均勻分佈力，各點强度的變化還要複雜一些，荷重圖的輪廓線變成一根曲線。例如，第186b圖中 $AabB$ 所表示的飛機機翼上面的空氣壓力就是這樣的荷重圖。第187b圖也是靜水壓力的一個例子，它的荷重圖是一個梯形。

現在觀察任意一個如第188圖的平面分佈力的荷重圖 $BbaA$。設想把「分佈線」BA 分割成爲無數的微分小段，其中任一小段的長度爲 dx；在這一小段的中點上有一個微小的作用力 dQ。在如此設想下，

可得到一個無限多的不等平行力構成的力系。既是一個平行力系，那就可以應用§23的方法來決定它的合力 Q 的大小以及合力作用線的位置。令任意一點的強度爲 q，可得

$$dQ = q\,dx \qquad (a)$$



第 188 圖

由第188圖又可看到，這(a)式同時又代表荷重圖中一個寬 dx 高 q 的狹條的微分面積。所以分佈力中的任意一個微小作用力 dQ，在荷重圖中就是跟它對應的一個狹條的面積。因此，把所有微小作用力和所有狹條的面積分別加成總和，所得到的「等於狹條總和」的整個荷重圖面積 $BbaA$ 顯然就代表「等於微小作用力總和」的合力 Q 的大小。

求到合力 Q 的大小後，Q 的作用線位置就可按「力矩法」決定。取 A 點作爲「力矩中心」。各狹條面積所代表的 dQ 力對中心的力矩爲 $x\cdot dQ$（x 是 dQ 的力臂，也就是狹條中心到 A 點的距離）。根據(a)式，此力矩應等於 $qxdx$，故力矩的總和是

$$\int_A^B qxdx \qquad (b)$$

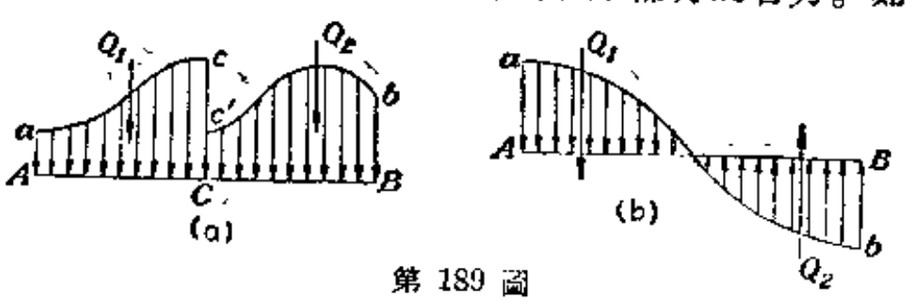
令合力 Q 對 A 點的力臂爲 x_c，因合力 Q 對 A 點的力矩等於上一總和，

故
$$Q\cdot x_c = \int_A^B qxdx \qquad (c)$$

即
$$x_c = \frac{\int_A^B qxdx}{Q} \qquad (d)$$

把(d)式跟(17)式比較，立刻可看出，合力 Q 的作用線必然將通過荷重圖的面積形心。因此，分佈力的合力可以完全由荷重圖來決定。

如果荷重圖的輪廓線不是一根連續曲線（如第 189a 圖），那我們就應該先就連續部份求出各個部份合力，例如圖中 Q_1 和 Q_2，然後再按照處理集中力辦法把各部份合力合成爲整個分佈力的合力。如果分佈力



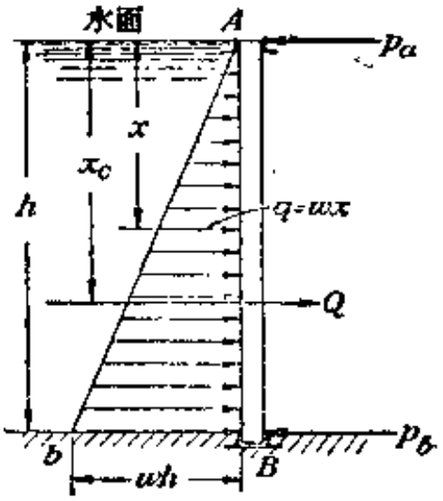
第 189 圖

在分佈線上有符號相反的兩部份（如第 188b 圖），那也可以用相同方法，先就符號相同部份求出兩個部份合力（例如 Q_1，Q_2），再按集中力的處理方法來合成。在這一情形下，兩部份合力 Q_1 和 Q_2 可能恰巧大小相等；因之，原來的分佈力也可能等於一個力偶。

處理受分佈力作用的物體，在考察它的平衡條件前，首先要決定合力或合成力偶，使這一分佈力可以由集中作用的一個合力或一個力偶來代替。

例題和習題

138. 第 190 圖中一鉛垂閘門，關閉時由上下兩水平梁 AA 和 BB（它們長軸垂直於圖平面）支承着。閘後的靜水壓力由閘門傳導到這兩個水平梁上。假設傳導的壓力是均勻分佈在 AA 和 BB 的長軸上，水的單位體積重量爲 w，試求兩水平梁對閘門的反作用力的強度等於多大？



第 190 圖

解：觀察閘門的單位寬度（垂直於圖平面）部份，可看到，這一部份上的水壓力完全對稱於它的中央鉛垂平面 ABb。所以我們可以設想全部壓力都是集中在這一中央平面上作用。AB 因而可看作是一個受平面分佈力作用的鉛垂梁。它兩端的支點反作用力 p_a 和 p_b 也就是所求的沿 AA 和 BB 作用的反作用力的強度。因爲水中任何一點的壓力跟這一點離水面的深度 x 以及水的單位體積重量 w 成正比，所以分佈力的荷重圖 ABb 必然是一個如第 190 圖的三角形。

在深 h 處的壓力強度爲 wh，故代表合力 Q 大小的荷重圖總面積應爲

$$Q=\frac{wh}{2}h=\frac{wh^2}{2} \qquad (e)$$

此外，因合力作用綫必須通過荷重圖的面積形心，故可得

$$x_c=\tfrac{2}{3}h$$

合力 Q 的大小和作用綫位置都確定後，我們分別取 A，B 作爲力矩中心，由 §23 的 (12)式就可得：

$$-p_b h+Q\cdot\tfrac{2}{3}h=0$$

$$p_a h-Q\cdot\frac{h}{3}=0$$

故 $$p_a=\tfrac{1}{3}Q,\ p_b=\tfrac{2}{3}Q$$

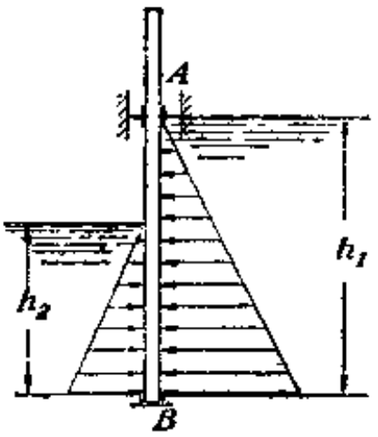
將(e)的 Q 值代入上式，即得

$$p_a=\tfrac{1}{6}wh^2,\ p_b=\tfrac{1}{3}wh^2$$

139. 第191圖中的閘門，構造跟上題中的相同，不過兩邊都有靜水壓力作用。設兩邊的水深分別爲 h_1 和 h_2，水的單位體積重量爲 w，此外，仍假定壓力是沿 AA，BB 兩綫均勻分佈，試求兩水平梁對閘門的反作用力的強度 p_a 和 p_b 各等於多大？

(解：$p_b=\frac{w}{6}\left(2h_1^2-3h_2^2+\frac{h_2^3}{h_1}\right)$，

$p_a=\frac{w}{6}\left(h_1^2-\frac{h_2^3}{h_1}\right)$)

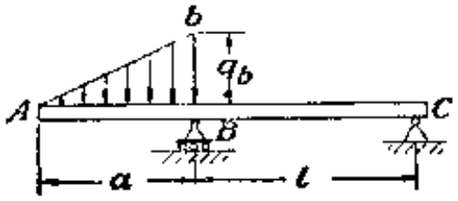


第 191 圖

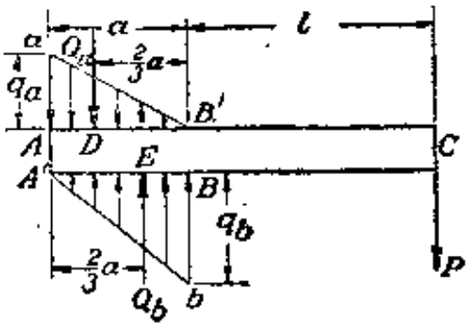
140. 第192圖中 AC 是一水平梁。它的 AB 部份受圖中荷重圖 AbB 所表示的分佈力作用。試不計梁的自重，求支點 B，C 對梁的反作用力 R_b，R_c。

(解：$R_b=\frac{q_b}{6}\left(3l+\frac{a^2}{l}\right)$，向上；$R_c=\frac{q_b a^2}{6l}$，向下)

141. 一懸臂梁 AC 嵌固在厚度等於 c 的牆內(第193圖)。它上面有一 P 力作用在 C 端，因之，使嵌固部份 AB 受到如荷重圖 AaB' 和 $A'Bb$ 所代表的分佈力作用。假設分佈力是對稱於梁的鉛垂的長軸平面，試不計梁的自重，求分佈力的最大強度 q_a 和 q_b 等於多大？



第 192 圖



第 193 圖

(解：因兩反作用力的荷重圖爲三角形，故它們合力 Q_a、Q_b 的作用綫位置可決定如圖。用 Q_a，Q_b 代替分佈的作用力，觀察 AC 梁在 P，Q_a 和 Q_b 三平行力作用下的平衡，就可決定 Q_a，Q_b 的大小。現在分別以 D，E 兩點作爲力矩中心，應用(12)式，可得：

$$Q_b\frac{a}{3}-P\left(l+\frac{2}{3}a\right)=0$$

$$Q_a\frac{a}{3}-P\left(l+\frac{1}{3}a\right)=0$$

故

$$Q_a=\frac{3P}{a}\left(l+\frac{1}{3}a\right)$$

$$Q_b=\frac{3P}{a}\left(l+\frac{2}{3}a\right)$$

因合力的大小應等於荷重圖的面積，故 $Q_a=\frac{q_a}{2}a$，$Q_b=\frac{q_b}{2}a$；也就是 $q_a=\frac{2Q_a}{a}$，$q_b=\frac{2Q_b}{a}$。把以上得到的 Q_a 和 Q_b 代入此結果，就可得：

$$q_a=\frac{2Q_a}{a}=\frac{6P}{a^2}\left(l+\frac{1}{3}a\right)$$

$$q_b=\frac{2Q_b}{a}=\frac{6P}{a^2}\left(l+\frac{2}{3}a\right)$$

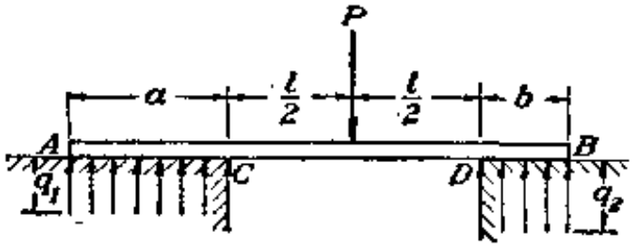
由上式，可見，反作用力的最大強度要跟牆厚 a 的平方成反比。因之，最大強度會隨着牆厚的減小而急劇增加。所以把一個梁嵌固在薄牆內，最容易使圖中 A,B 兩點的壓力強度超過牆身材料的「破壞強度」。

142. 第 194 圖中，AB 是擱置在 AC,DB 兩平面上的一水平梁，在它中點有一 P 力作用。設摩阻力可以不計，試求 AC,DB 兩支承處的均勻分佈力的強度等於多大？

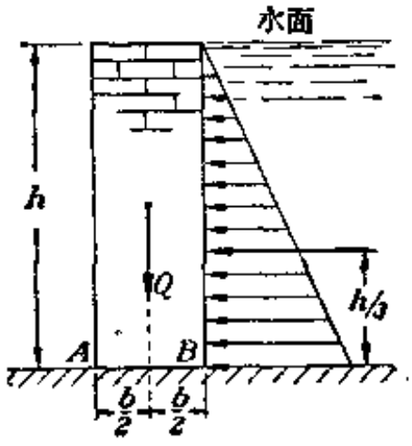
(解：$q_1=\frac{P(l+b)}{a(2l+a+b)}$，$q_2=\frac{P}{b}\cdot\frac{(l+a)}{(2l+a+b)}$)

143. 第 195 圖中是一個石砌的堤壩的橫切面。堤身築在基石上，高 h、寬 b。堤前的水深恰等於堤高 h。水和堤身的單位體積重量分別為 w 和 q。問防止堤身繞 A 點翻倒的安全因數等於 2 時，堤壩切面的寬跟高的比值 b/h 應等於多大？

(解：$b/h=\sqrt{\frac{2w}{3q}}$)



第 194 圖



第 195 圖

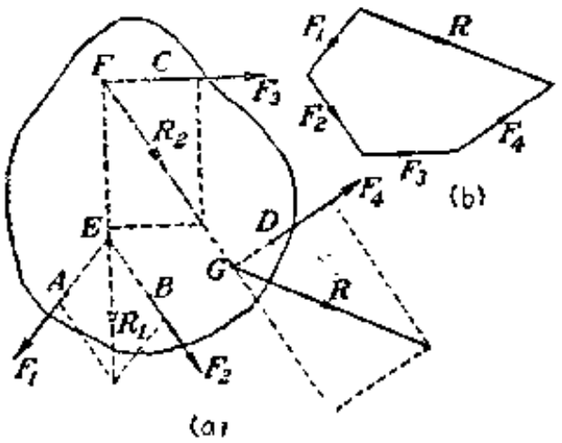
144. 如果要使第 195 圖中堤身的底面在 B 處不受張力作用，都沿 AB 綫的分佈力荷重圖是一個三角形，試問它的寬高比的最小值應等於多大？

(解：$b/h=\sqrt{\frac{w}{q}}$)

第四章　一般的平面力系

30. 平面力系的合成

假設作用在物體上的若干平面力既不完全互相平行又不共同相交在一點，那末這一最普遍形式的平面力羣就稱爲**一般的平面力系**。例如第 196a 圖中作用在一物體上 A, B, C, D 各點的 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_4$ 各力就是這種力系。要決定這一力系的合力，可先按「力平行四邊形原理」把 F_1, F_2 合成爲 R_1。之後，又合成 R_1 和 F_3 以得到合力 R_2；R_2 顯然也就是 F_1, F_2 和 F_3 三力的合力。最後，合成 R_2 和 F_4 就得到整個力系的合力 R。R 力的作用點是圖中 G 點。這一作用點當然也可以沿作用線任意移動。



第 196 圖

合力 R 的大小還可以按第 196b 圖直接由代表各力的「分離向量」的「幾何相加」來決定。這也就是說，一個平面力系的合力的大小、方向跟各力的作用點無關，完全可以由各力構成的「力多邊形」的「封閉邊」來確定。

更普遍的情形是 n 個力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 構成的平面力系。對於這種力系我們可以把各力分成兩部份，連續應用「力平行四邊形原理」先後確定兩部份的部份合力，如果第一部份 k 個力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_k$ 的合力不跟第二部份 $n-k$ 個力 $F_{k+1}, F_{k+2} \cdots\cdots F_n$ 的合力相交而是兩者互相平行，那這兩個部份合力雖然無法應用力平行四邊原理，但是可以根據 § 23 處理平行力方法把它們再合成。因此，一個「一般的平面力系」的合成只有三種可能的結果：(1)它可以合成爲一個單力，(2)它可以合成爲一個力偶，(3)它是一個平衡的力系。

要辨別這三種可能，可先作各力的「力多邊形」。假若力多邊形不

自行封閉，那這一力系就是第一種可以化爲一個單力的力系。它的合力的大小和方向由「力多邊形」的封閉邊決定。至於它合力的作用線位置，我們可以按第196a圖所用方法或按平行力相加方法來確定。如果力多角形自行封閉，那就應該先把所有的力分成兩部份，求出兩部份的合力 R_1 和 R_2。這兩個「部份合力」R_1, R_2 當然是一對相等相反的平行力。之後，再按以上方法確定它們作用線的位置，假如兩作用線位置不同，那原來力系顯然是第二種可以合成爲一個力偶的力系；設或兩作用線恰恰相合，那它就是個平衡力系。

31. 投影法和力矩法

§30所說明的平面力系的合成方法，如「力」數很多，顯然將十分繁複，所以實際上多不應用。比較好的方法是應用§13中處理平面共點力系的代數方程式。根據§30的討論，假若一個力系可以合成爲一個單力，那它的合力的大小和方向將完全跟各力作用點無關。因此，它的合力可以應用處理平面共點力系的方法來決定。令 $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots\cdots Y_n$ 分別爲 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 各力在 x 和 y 軸上的投影。應用(3)式，可得合力 R 在這兩坐標軸上的投影是：

$$X=\sum_{i=1}^{i=n} X_i,\ Y=\sum_{i=1}^{i=n} Y_i \tag{a}$$

再由(4)式，就得到合力 R 本身的大小和方向是：

$$\left.\begin{aligned} R&=\sqrt{X^2+Y^2} \\ \cos\alpha&=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \cos\beta&=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

R 力的作用線位置也可用「力矩法」決定。力矩法對於平面的共點力系和平行力系的正確性以前已有證明，然而是否可用它來處理平面的一般力系却未曾討論過。

一個一般的平面力系的合力，根據§30討論，是由連續應用「力平行四邊形」或「平行力相加」方法逐步合成各力而決定的。每一合成的步驟，顯然，都可以引用一次「力矩合成定理」。故最後可得到：「一

個一般平面力系的合力對作用平面上任意一點的力矩必等於所有各力對同點力矩的代數和」。令$(M_o)_1, (M_o)_2, \cdots\cdots (M_o)_n$爲$F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$各力對任意選定的原點O的力矩，$M_o$爲它們合力對同點的力矩，可得

$$M_o = \sum_{i=1}^{i=n} (M_o)_i \tag{c}$$

至於其中各力力矩和的計算，這裏仍以應用(7)式爲比較簡便。

力系合力對原點O的力矩確定後，它的力臂d_o就可由下式求出：

$$d_o = \frac{M_o}{R} \tag{d}$$

如果把力臂d_o畫在圖上，那就是由O點到合力作用線的垂線，垂線的垂足就在作用線上。因作用線的方向已由(b)式求得，故合力作用線的位置不難在圖上確定。因此，(a)到(d)四式可以完全決定一個一般平面力系的合力。

如果(a)式中X, Y都等於零，這一力系顯然就沒有化爲一個單力的可能；這跟§30中力多邊形自行封閉的情形完全相同。這一力系如果不自成平衡，那就一定可合成爲一個力偶。假若再由(c)式算出所有各力對原點力矩的代數和是等於M_o，那表示這一力系可以合成爲一個力矩等於M_o的力偶。如果力矩代數和也等於零，很顯然的，力系非自成平衡不可。

綜合以上各點可知，一個一般平面力系能合成爲一個力偶的條件是：

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{i=n} (M_o)_i = M_o \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

它自成平衡的條件是：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n} X_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} Y_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} (M_o)_i=0\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

(19)式通常稱爲一般平面力系的**靜力平衡方程式**。

平面的共點力系和平行力系不過是一般平面力系中的特例。故(19)式對於這兩種力系的平衡條件當然也包括在內。一個平面共點力系如滿足(19)中第一第二兩式，當然一定能滿足第三式。故第三式可以不必列出來；(19)式就變成比較簡單的(5)式(見第37頁)。至於平面平行力系，如取 y 軸平行於各力作用線，那各力在 x 軸上就沒有投影；它對(19)中第一式毫無問題的一定滿足，這式可以不需要列出來。因此，(19)式就簡化爲(11)式(見第72頁)。

爲簡便起見，有時也可以用三個力矩方程式來代替(19)式。這跟共點力系的(8)式和平行力系的(12)式，在意義上，完全相同。假使一個任意的平面力系對作用平面上任一定點 A 的力矩代數和等於零，那它就不可能合成爲一個力偶。如果它對另外任一定點 B 的力矩代數和也等於零，那它不自成平衡就必定是有一個同時通過 A，B 兩點的合力。設或再任意選定一個不在 AB 線上的 C 點作爲力矩中心，計算它的力矩代數和，發現這代數和仍舊是等於零，那就表示決不可能有一個合力，這力系非自成平衡不可。所以一個平面力系若是對作用平面上三個不在一直線上的任意點的力矩代數和都等於零，那它就必然是一個平衡力系。這結論用方程式來表示，就是：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n} (M_A)_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} (M_B)_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} (M_C)_i=0\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

例題和習題

145. 如第 197 圖的旋轉起重機。各接觸處的摩阻力可以不計。設圖中 $P=4t$, $Q=2t$, $a=5m$, $b=1m$, $c=2m$,試求 A,C 兩處的支承反作用力 R_a 和 R_c。

解: 各力的作用綫如圖。取 C 點爲原點選定坐標軸 x,y 如圖。投影各力於兩坐標軸上並以 C 點爲力矩中心,由(19)式,就可得:

$$\left.\begin{aligned} X_c-R_a&=0\\ Y_c-P-Q&=0\\ R_ac-Pa-Qb&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

因所取的力矩中心是 C 點,故未知力 R_c 不出現於力矩方程式中,我們可直接求出 R_a。如將已給各數值代入(e)式,就可得:

$$R_a=11t,\ X_c=11t,\ Y_c=6t$$

故 $$R_c=\sqrt{X_c^2+Y_c^2}=\sqrt{157}=12.53t$$

146. 如第 198 圖的起重裝置。設 $P=2t$, $Q=1t$, $a=4m$, $b=6m$, $c=7m$,試不計摩阻力求 A 和 B 兩處的反作用力 R_a 和 R_b。

(解: $R_a=2t$, $R_b=3.61t$)

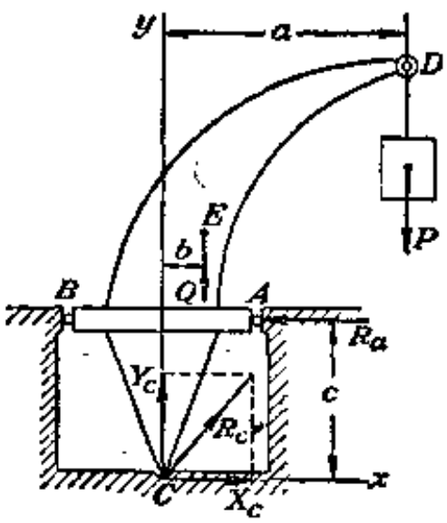
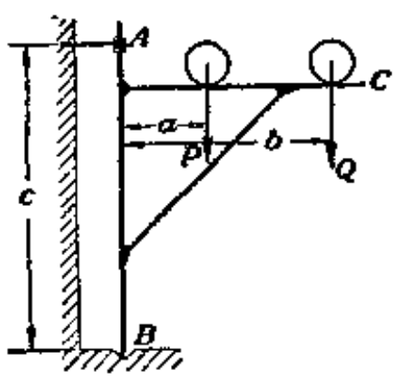


圖 197 圖



第 198 圖

147. 試求第 199 圖的 AB 梁在機車的各車輪壓力 Q 和牽引力 F 作用下的支點反作用力 R_a 和 R_b。設 $Q=20t$, $F=1t$, $a=5m$, $b=3m$, $h=2.5m$, $l=20m$。

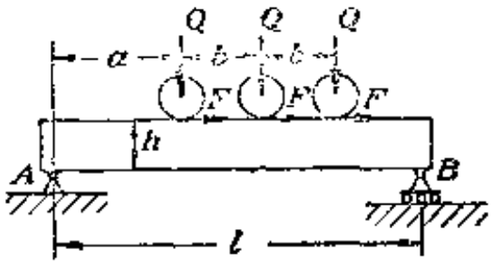
(解: $R_a=35\frac{1}{4}t$, $R_b=24\frac{3}{8}t$)

148. 如第 200 圖的起重裝置。機架的自重可以不計。A, D 和 E 是三個理想鉸鏈。設 $P=500kg$, $Q=300kg$, $a=2m$,試求 A 點的反作用力 R_a 和 DE 桿件的桿力 S。

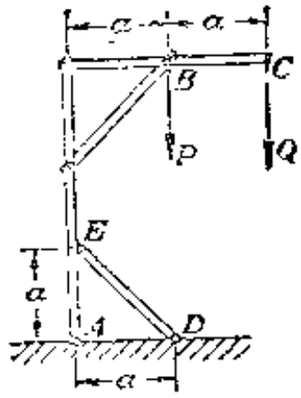
(解: $R_a=1140kg$, $S=1555kg$)

149 第 201 圖中是一個秤貨車重量的台秤。其中 BFG 是一槓桿。W 是砝碼的重量。試求圖中貨車的重量 Q 等於多少?

(解: $Q=W\frac{l_1}{l-l_1}$)



第 199 圖



第 200 圖

150. 第202圖中，A 和 C 處的摩阻力可以不計。C 處滑輪的尺寸極小也可以不計。試求桿件 AB 平衡時，圖中 α 角應等於多大?

解: A,C 兩接觸處既然沒有摩阻力，R_a 和 R_c 兩支點反作用力方向自然將如圖。它們作用綫交點 O 到 A 點的距離因之應該

$$b=a/\cos^2\alpha$$

桿件平衡時，所有各力對 O 點的力矩代數和必須等於零，故

$$Q\left(\frac{a}{\cos^2\alpha}-\frac{l}{2}\cos\alpha\right)=P\left(l\cos\alpha-\frac{a}{\cos^2\alpha}\right)$$

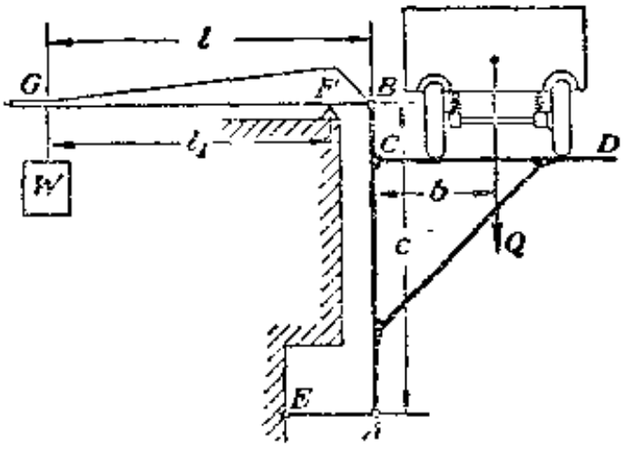
或

$$\cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{2(P+Q)a}{(2P+Q)l}} \qquad (f)$$

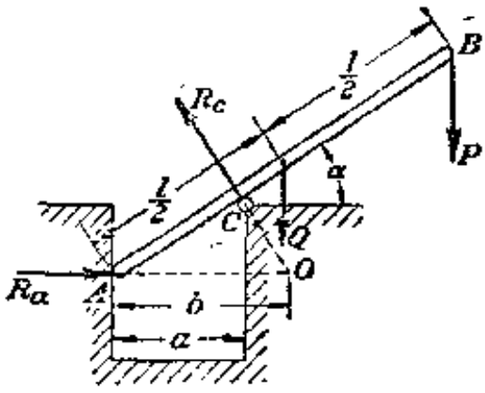
如果 $P=0$，上式就化爲

$$\cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{2a}{l}}$$

以上討論中假定了 $a<\frac{l}{2}$。



第 201 圖



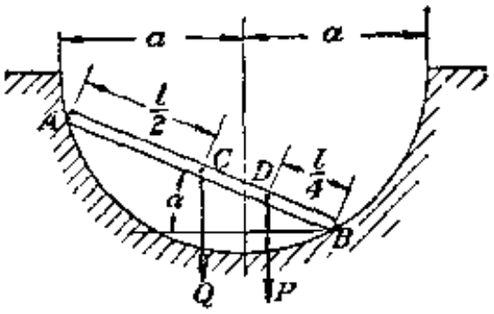
第 202 圖

151. 第203圖中，AB 桿長 l 重 Q，放在一半徑等於 a 的光滑圓槽內。有一鉛垂力 P 作用在 AB 桿的 D 點。試求 AB 桿平衡時，圖中 α 角應等於多大?

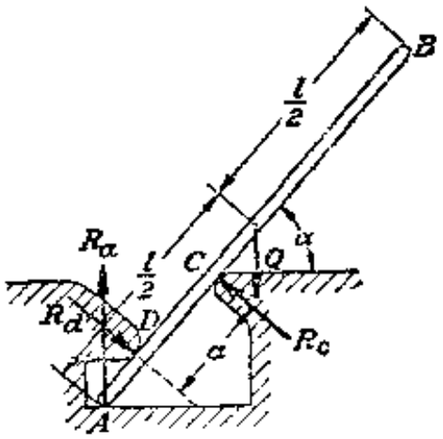
(解: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{P}{P+Q}\cdot\frac{l}{2\sqrt{4a^2-l^2}}$)

152. 不計各接觸處的摩阻力，試求第204圖中 A，C 和 D 三支點對 AB 桿的反作用力 R_a，R_c 和 R_d。

(解: $R_a=Q$, $R_c=R_d=\frac{Ql}{2r}\cos\alpha$)



第 203 圖



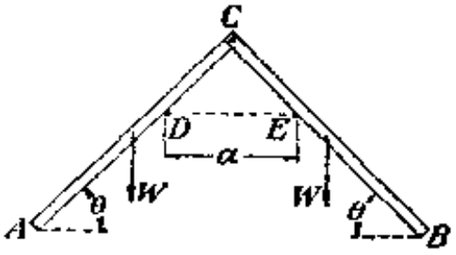
第 204 圖

153. 兩桿件 AC 和 BC 都長 l 重 Q，由一理想鉸鏈互相連結於 C 點(第205圖)，放在圖中 D，E 兩光滑的圓釘上。試求平衡時圖中 θ 角等於多大?

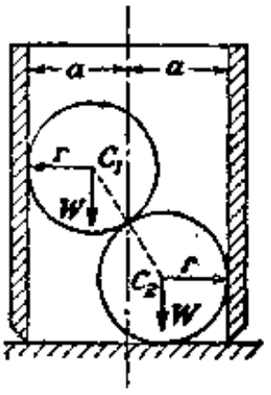
(解: $\cos\theta=\sqrt[3]{\frac{a}{l}}$)

154. 第206圖中，兩個半徑為 r、重量為 W 的光滑圓球放在一個直立的空圓筒內。圓筒的半徑是小於 $2r$ 的 a，各接觸處的摩阻力極小可以不計。試求圓筒的重量 Q 至少等於多大，才不會翻倒?

(解: $Q_{min}=2W\frac{a-r}{a}$)



第 205 圖

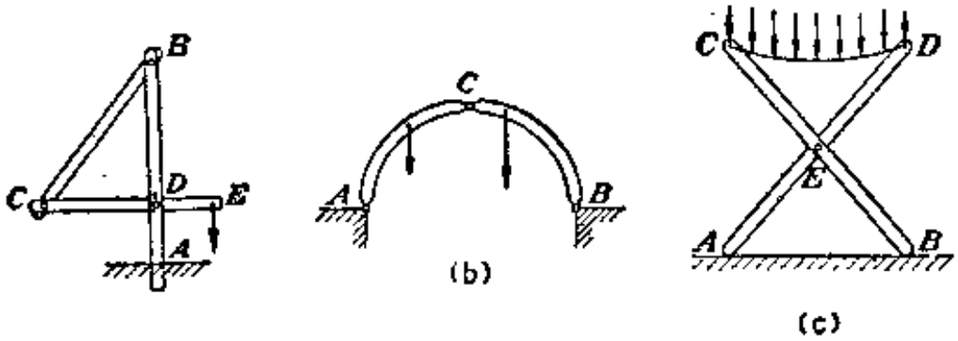


第 206 圖

32. 簡單構架——桿件分析法

結構工程中除開桁架外還有一種剛架也極常用。這種剛架跟桁架一樣，也是由若干桿件或其他構件用銷子結合互相連接而組成的剛性結構。不過這種剛架跟桁架有大不相同的地方。首先，它並不是按照

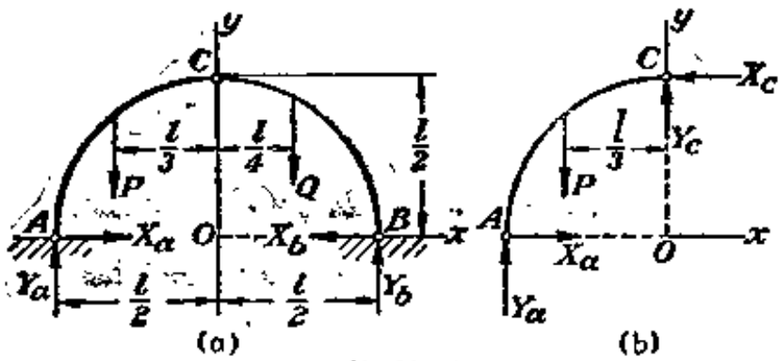
簡單桁架的組成法則(見第 48 頁)構成的。其次,更主要的就是它的各桿件不僅在兩端梢子上可能有外力作用,而且桿件本身上也可能有外力存在。因此,各桿件除掉長軸方向的單純拉力或壓力外,還會受到彎曲作用。各桿件間的作用力和反作用力的作用線因之也不一定跟相應的長軸相合。這種剛架通常稱爲**簡單框架**。第 207 圖中就是簡



第 207 圖

單框架的幾種實例。框架既然跟桁架不一樣,各桿件間的相互作用力不跟相應的長軸相合,那分析它就必須攷察各個桿件本身的平衡條件,而不是光攷察各節點所能奏效。桁架分析是攷察各節點的平衡條件以決定各桿力,故稱爲「節點分析法」;框架分析却是攷察各桿件本身,故可稱爲**桿件分析法**。

例如,第 208a 圖的一個三鉸拱 ACB 受圖中 P,Q 兩力作用。如需要確定 A,B 兩支點對拱的反作用力,可先攷察整個拱的平衡。令



第 208 圖

X_a,Y_a 和 X_b,Y_b 分別爲 A 和 B 兩支點反作用力在坐標軸 x,y 方向的各分力(見第 208a 圖)。取 B 點作爲力矩中心,使三個未知分力不入式內,得

$$P\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{3}\right)+Q\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{4}\right)-Y_a l=0$$

故 $$Y_a=\frac{5}{6}P+\frac{1}{4}Q$$

又取 A 點作爲力矩中心，令各力對中心的力矩代數和等於零，可得

$$Y_b l-P\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)-Q\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{4}\right)=0$$

故 $$Y_b=\frac{1}{6}P+\frac{3}{4}Q$$

由以上結果，可見 $Y_a+Y_b=P+Q$，確已滿足「y 軸上各力投影的代數和應等於零」的條件。之後，又令 x 軸上各力投影的代數和等於零，得

$$X_a-X_b=0$$

故 $$X_a=X_b$$

如果還需要求出 C 點梢子上的**切力**，可再攷察左半拱 AC 部份的平衡。畫分離體圖如第208b圖。令右半拱對 C 點的反作用力在兩坐標軸方向的分力爲 X_c 和 Y_c。取 O 點爲力矩中心，得

$$X_c\cdot\frac{l}{2}+P\cdot\frac{l}{3}-Y_a\cdot\frac{l}{2}=0$$

以以上決定的 Y_a 代入此式，可得

$$X_c=\frac{1}{6}P+\frac{1}{4}Q。$$

因分離體上所有各力在 x 軸方向的投影代數和應等於零，故

$$X_a-X_c=0$$

也就是 $$X_a=X_b=X_c$$

又因所有各力在 y 軸上的投影代數和也必須等於零，故

$$Y_a+Y_c-P=0$$

以以前決定的 Y_a 值代入此式，可得

$$Y_c=\frac{1}{6}P-\frac{1}{4}Q$$

A,B,C 三鉸鏈梢子上的三反作用力的坐標軸方向分力既然都已求得，所求三反作用力的本身當然很容易決定。

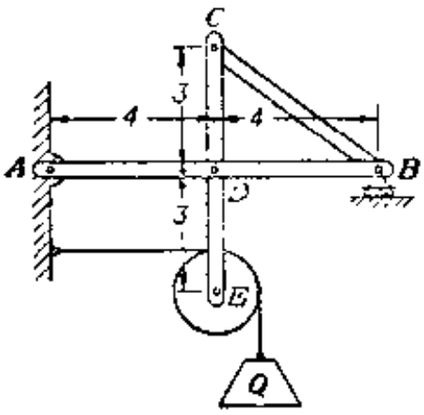
例題和習題

155. 第209圖中是一簡單框架，各節點全由理想鉸鏈構成。E 處滑輪的半徑是 $r=1$m。圖中所註各尺寸都以 m 爲單位。試求 $Q=1000$kg 時，(a) 桿件 BC 的桿力，(b) D 處梢子受到的切力 R_d。

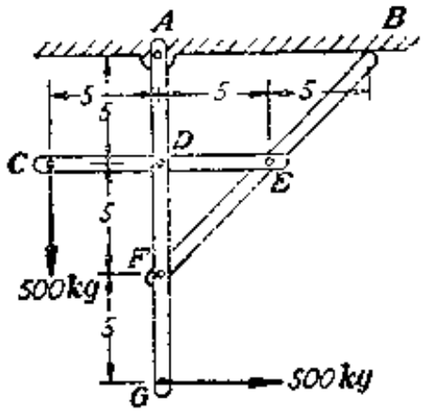
(解：$S=1250$kg，$R_d=2016$kg)

156. 如第210圖的簡單框架，圖中所註尺寸都以 m 爲單位。摩阻力可以不計。試求鉸鏈

A,D,E 和 F 各桿子所受切力的水平分力和鉛垂分力。



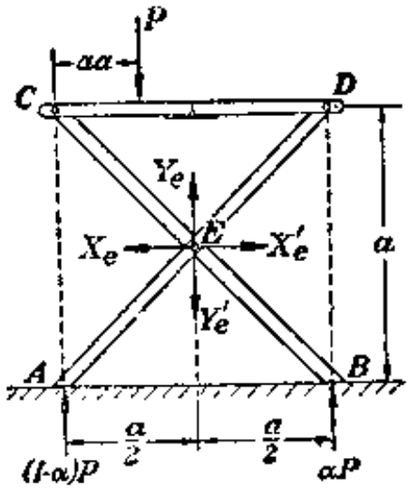
第 209 圖



第 2 0 圖

157. 第 211 圖中是一張放在光滑水平平面上的摺凳。試求:(a)鉸鏈 E 桿子所受的切力;(b) P 力使「E 處桿子切力值達到最大」的作用綫位置(卽 α 值)。

解:先以整個摺凳作爲分離體,求得 A 和 B 兩處的反作用力如圖。AD 和 BC 兩桿件間產生於 E 處桿子上的作用力及反作用力各由它們的兩正交分力表示如圖。其中 X_e' 和 Y_e' 指作用在 AD 桿上的兩分力;X_e 和 Y_e 指作用在 BC 桿上的兩分力。之後,次第將 AD 和 BC 桿當作分離體。各取 D 和 C 點作爲力矩中心,應用力矩方程式,得



第 211 圖

$$-P(1-\alpha)a+Y'_e\cdot\frac{a}{2}+X_e'\cdot\frac{a}{2}=0$$

$$\alpha\cdot P\cdot a+Y_e\cdot\frac{a}{2}-X_e\cdot\frac{a}{2}=0$$

因 $X_e'=X_e$, $Y_e'=Y_e$, 故由上式可得

$$X_e=P,\ Y_e=(1-2\alpha)P$$

E 處桿子所受的切力因之是

$$R_e=P\sqrt{1+(1-2\alpha)^2}$$

可見切力的最大值應爲

$$(R_e)_{max}=\sqrt{2}P$$

此時,$\alpha=0$ 或 $\alpha=1$,表示 P 力恰在 C 點或 D 點。

158. 試求第 55 圖(第 27 頁)中鉸鏈 B 桿子上的切力,設 $P=2000$kg。

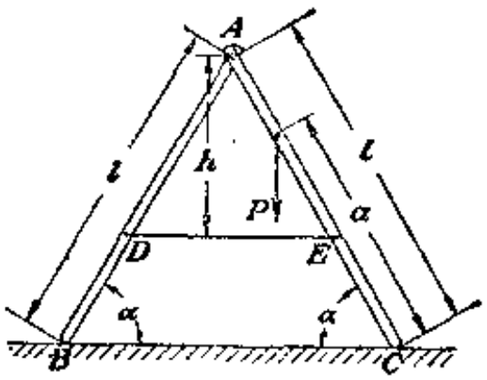
(解: $R_b=902$kg)

159. 第 212 圖中是一把放在光滑水平平面上的工作梯。試求在圖中 P 力作用下 DE 繩中的張力 S 等於多大? 又問 P 力在梯上何處,繩中張力 S 才最大?

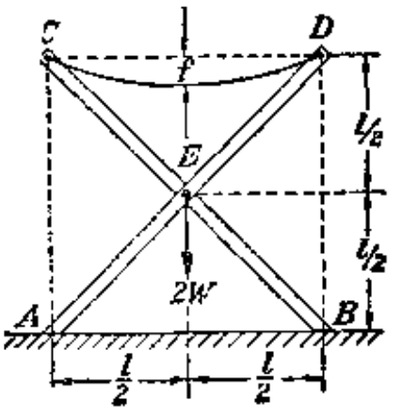
(解: $S=\dfrac{Pa\cos\alpha}{2h}$)

160. 第213圖中是一個可以摺疊的X形框架。其上張掛在C,D兩點的軟索全部重量等於Q。兩交叉桿件AD,BC的重量共等於$2W$。兩桿件中點的梢子E處以及水平平面上A,B兩處的摩擦力都可以不計。Q可以當作均勻分佈在懸索水平跨度l間。試求懸索的弯落跟跨度的比值f/l等於多大?

(解: $\frac{f}{l}=\frac{1}{8}\frac{Q}{W+Q}$)



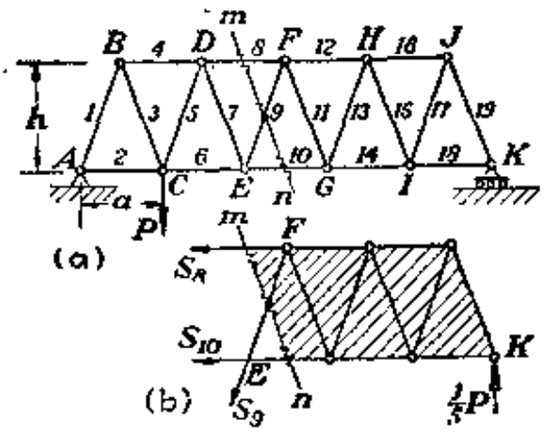
第212圖



第213圖

33. 簡單桁架:切面分析法

§18中曾研究過處理簡單桁架的節點分析法,現在再討論另外一種分析方法。應用這一種方法去計算簡單桁架中某一桿件的桿力,可以不必逐一攷察它每一個節點的平衡。例如第214a圖中的桁架,我們只需要求出它8,9和10三桿件的桿力,假如應用「節點分析法」,那就必須依次攷察A,B,C,D及E各節點的平衡;手續非常繁複。現在設想把整個桁架在切面$m\,n$處(第214a圖)切開而攷察切面右邊部份的平衡。由第214b圖可看到:這一部份上除開K點的支點反作用力外,另有切開後三桿件的桿力S_8,S_9和S_{10}三力作用。它們的作用線一一跟各自桿件的長軸相合。這樣,就得到一個平衡的一般平面力系。因此,可以引用(19)或(20)式來決定各未知力的大小和方向。取E點作爲力矩中心列立力矩方程式,使兩個未知力不入式內,就可得



第214圖

$$S_8\cdot h+\tfrac{4}{5}P\cdot 3a=0$$

故$S_8=-3Pa/5h$。前面負號表示桿件8是受壓力作用,而不是像圖

中所假定的受拉力的情形。同樣方法，取 F 點作爲力矩中心，又可求得 $S_{10}=+Pa/2h$。至於 S_9，我們只要令各力在鉛垂方向投影的代數和等於零，就可得

$$\frac{1}{5}P-\frac{S_9\cdot h}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2}}=0$$

$$S_9=+\frac{P\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2}}{5h}$$

以上的決定桿力方法稱爲**切面分析法**。它的主要關鍵在於把桁架在想像中切開，使所求桿件的桿力由內力變成作用在切開部份上的外力。因各力必須構成一個平衡的一般平面力系，故根據(19)或(20)式就可以把各未知力決定。一般情形下，切面只允許切開三個桿件，因爲平面力系的平衡方程式只有三個，只可以決定三個未知力。不過，特殊情形，我們還是可以讓切面切過三個以上的桿件。在以下例題中有幾個這種特殊情形的例子。

應用「切面分析法」時，我們仍規定：受拉桿件的桿力是正號；受壓的，桿力是負號。

例題和習題

161. 試用切面分析法決定第215a圖中桿件1,2和3因 A 處水平力 P 所引起的桿力。

(解：$S_1=+\frac{Ph}{a}$，$S_2=+\frac{P\sqrt{a^2+h^2}}{a}$，$S_3=-\frac{2Ph}{a}$)

162. 試求第216a圖中桿件1和4由 C 處水平力 P 所引起的桿力。

解：選定切面 $m-n$ 如圖，並以切面以上部份作爲分離體。它上面有三個未知力的作用線互相交於一點，故取此交點作爲力矩中心，那末即使切面 $m-n$ 通過四個桿件，我們還是可以求出第四個未知力。本題的結果是：

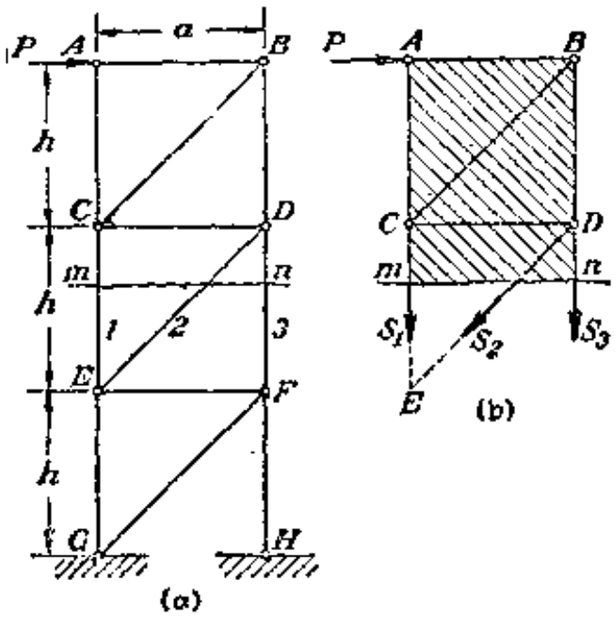
$$S_1=+\frac{2Ph}{a},\quad S_4=-\frac{2Ph}{a}$$

163. 求第217圖的桁架中桿件1,2和3的桿力。

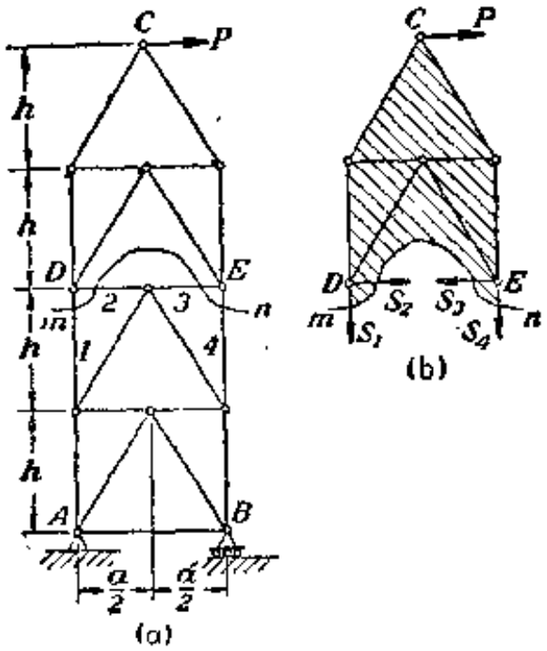
(解：$S_1=-\frac{4Pa}{h}$，$S_2=-\frac{1}{2}P$，$S_3=+\frac{4Pa}{h}$)

164. 求第218圖的桁架中桿件1,2和3的桿力。

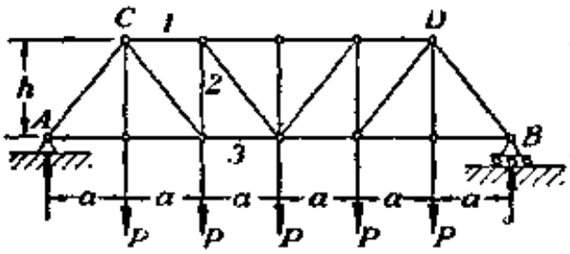
(解：$S_1=S_2=S_3=-\frac{3Qa}{2h}$)



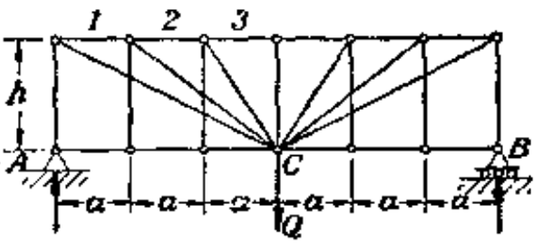
第 215 圖



第 216 圖



第 217 圖



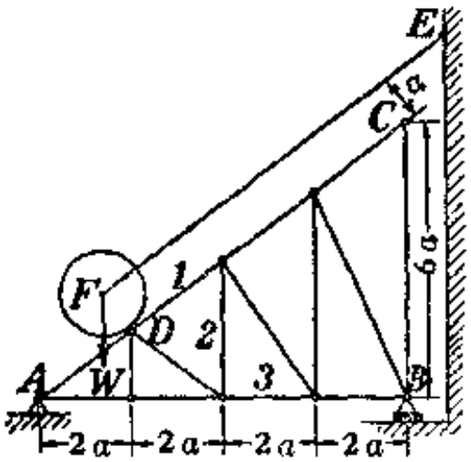
第 218 圖

165. 第219圖中的桁架，D 點有一重量 $W=1000$kg 的圓球。圓球由一根 EF 繩掛在牆上，EF 平行於 AC。試應用「切面分析法」求桿件 1,2 和 3 的桿力。

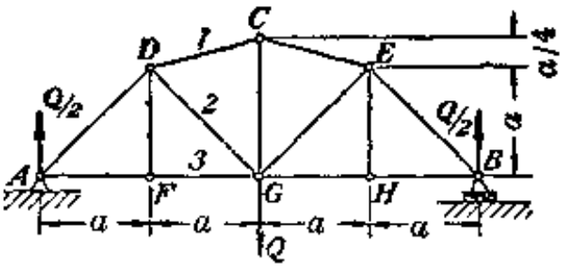
(解: $S_1=-416{,}7$kg, $S_2=+500{,}0$kg, $S_3=+833{,}3$kg)

166. 求第220圖桁架中桿件 1,2 和 3 的桿力。

(解: $S_1=-0{,}825Q$, $S_2=+0{,}424Q$, $S_3=+0{,}500Q$)



第 219 圖



第 220 圖

167. 求第221圖桁架中桿件1,2和3的桿力。

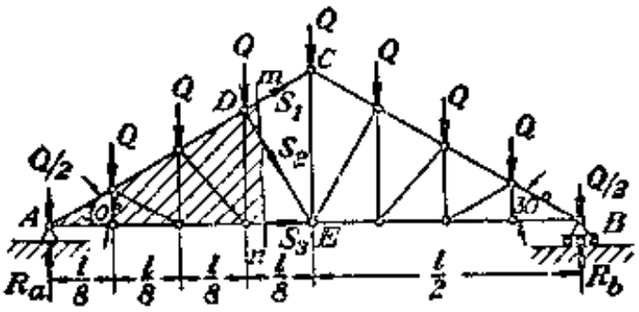
(解: $S_1=-4Q$, $S_2=-\sqrt{3}Q$, $S_3=+\frac{5\sqrt{3}}{2}Q$)

168. 求第222圖桁架中桿件1和2的桿力。

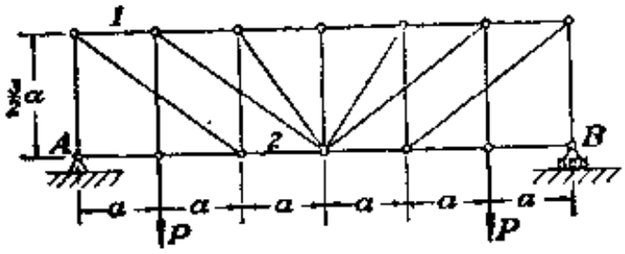
(解: $S_1=-\frac{4}{3}P$, $S_2=+\frac{4}{3}P$)

169. (a) 求第223a圖桁架中桿件1和2的桿力, (b) 求第223b圖中桁架中桿件1和2的桿力。

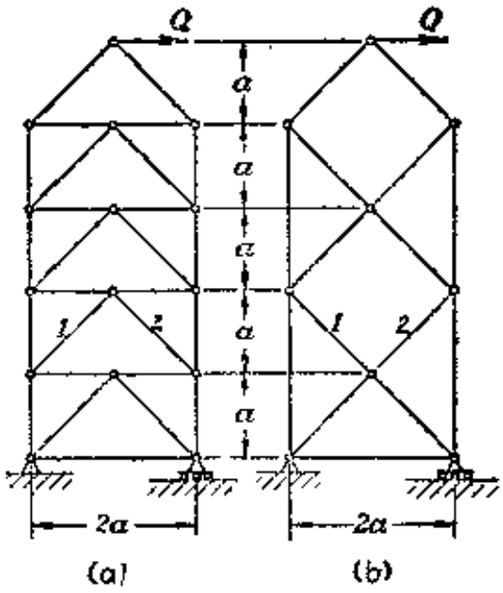
$$\left(\text{解: }\begin{cases}\text{(a) } S_1=+Q/\sqrt{2},\ S_2=-Q/\sqrt{2}\\ \text{(b) } S_1=-Q/\sqrt{2},\ S_2=+Q/\sqrt{2}\end{cases}\right)$$



第 221 圖



第 222 圖



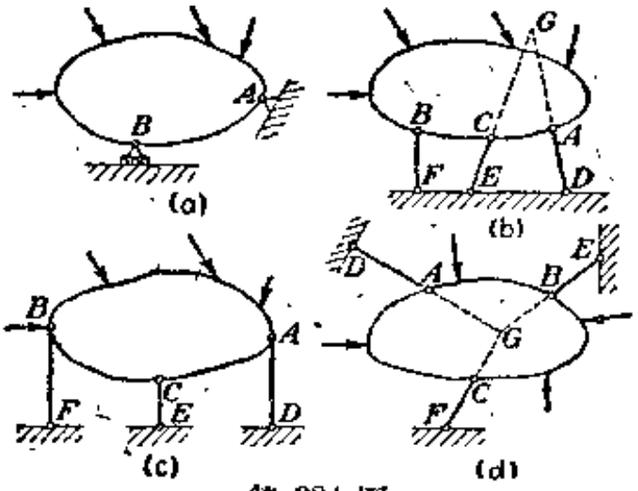
第 223 圖

170. 若干桿件 AB, BC, CD…… 兩端用鉸鏈一一銜接組成一個內接於圓的封閉多邊形。另外一系鉸鏈桿 AO, BO, CO……分別將多邊形的各角頂跟圓的圓心連接起來。現在在 AB, BC, CD……一系桿件中任意選定一個桿件, 裝一螺旋套管以產生張力 P 在此桿件內。試應用切面分析法證明這一系桿件中其他每一桿件的桿力也都等於 P。

34. 剛體在平面中的靜力定式支承

在以前各問題中常可看到如第224a圖所表示的支承剛體的方法。這種支承可以把剛體在所在平面中的運動完全約束住; 使它在這一平面中的位置完全固定。分析這種支承方法就可以看到, 剛體在 A 點由一鉸鏈固定在基礎上後, 它在圖平面中唯一可能的運動是繞 A 點的旋轉。因此, 它上面其他任意一點 B 就只可能在 AB 直線的垂直方向

發生運動。假若把 B 點這一方向的運動給約束住，那這一任意點 B 就將完全固定在圖平面中，也就是說，整個剛體在圖平面內的運動已受到完全的「約束」。



第 224 圖

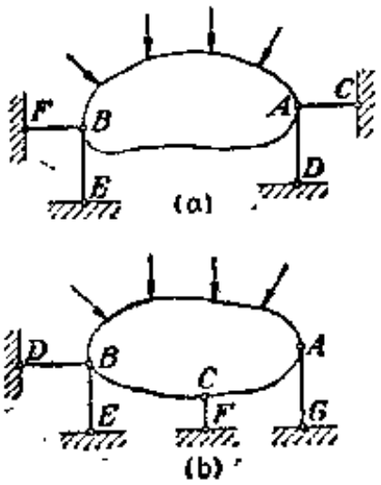
一般說來，一個物體在圖平面中的「完全約束」可以由三個長軸既不共同平行又不共同相交於一點的鉸鏈桿來實現。要證明這句話，可觀察第 224b 圖。先設想物體是由 AD，CE 兩鉸桿連接在基礎上。這時候，A 和 C 點還可以各自沿 AD 和 CE 的長軸垂直方向運動；也就是物體還可能繞兩長軸的交點 G 轉動。如果再用一 BF 桿把物體上另外一點 B 約束住，使 B 點只可以在某一方向運動，而這方向的運動不跟物體繞 G 點的轉動配合（換句話說，不讓 BF 桿的長軸通過 G 點），物體在圖平面中的運動那就將完全不可能。可見這樣三鉸鏈桿的確可構成物體在圖平面中的「完全約束」。

在三鉸鏈桿互相平行的特殊情形中（第 224c 圖），它們所支承的物體，很顯然的，還有一些沿橫方向運動的自由，並非在所在平面中受到完全約束。同樣，在三鉸鏈桿長軸相交於一點的情形中（第224d圖），它們所支承的物體也有些繞它們長軸交點旋轉的自由，而非完全受約束。

根據以上討論，**一個構成物體在圖平面中「完全約束」的支承系統必須由三個鉸鏈桿或跟它們相當的裝置，按適當的安裝方法來組成；而且如此的支承系統也足夠實現物體在圖平面中的「完全約束」。**

支承系統中任何超過這種「物體在圖平面中受完全約束的支承」所需的桿件或裝置都叫做**過剩支承**。例如，第 225a 圖中的剛體。它由如圖的四個鉸鏈桿固定在圖平面中。它們當然也構成物體的「完全

約束」；不過如果去掉其中任何一個桿件，物體的「完全約束」也並不會因而破壞，所以其中任何一個桿件都可以看作是一過剩支承。再如第 225b 圖的支承系統。其中三個鉛垂桿件中也有一過剩支承存在；如果任意去掉其中一個，物體的「完全約束」並不會破壞。但是，鉸鏈桿 BD 却不同；它不是過剩支承。如果去掉這一鉸鏈桿，物體的「完全約束」就不能實現。



第 225 圖

當一個在圖平面內受到完全約束的剛體被同平面的一個力系作用時，各支承點必然要產生對於剛體的反作用力。這些反作用力連同各作用力共同構成一個平面力系。很顯然的，這必須是一個平衡的平面力系。對於這樣一個力系，我們一共有(19)或(20)中三靜力平衡方程式所表示的三個平衡條件，因此，只能解決三個未知量。這恰好跟三鉸桿支承中的三個未知反作用力的數目相合。所以一個剛體如果按任何一種符合於完成它在圖平面中「完全約束」的必須和足夠條件的方法支承着，那末各支承點由於同平面作用力系而產生的反作用力就全部可以根據靜力平衡方程式來決定。這樣的支承系統，因此，就叫做**靜力定式支承**或簡稱**靜定支承**。

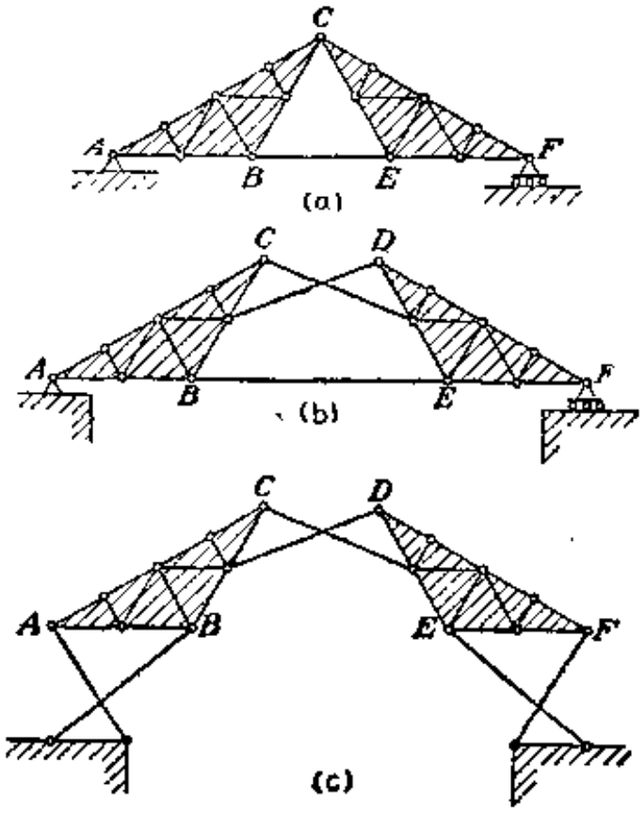
假使支承系統有過剩支承存在，以致有三個以上的未知量，像第 225 圖的情形一樣，那末物體雖然還是受到「完全約束」，但是三個靜力平衡方程式已經不夠解決問題。這樣的支承系統，因此，叫做**靜力不定式支承**或簡稱**超靜定支承**。(1)

特殊情形，像第 224c 圖和第 224d 圖中的支承系統，雖然也只產生三個未知量，但是我們仍然可證明它們是一種「超靜定支承」。我們如果設想第 224d 圖中物體上的作用力合力恰巧通過三鉸桿的交點 G，那作用在物體的全部「力」就將共同構成一個「平面共點力系」。平面共

(1) 在這種情形下，作用力經過物體傳導而散佈到各支承點的分配方式要看構成物體和各鉸鏈桿的材料的彈性性質而定。因此，只要知道材料性質，各反作用力仍可以根據材料的性質來決定。不過這一類問題必須在"結構靜力學"中才討論。

點力系的平衡條件只有兩個方程式，只能解出兩個未知量。因此，這種支承系統的全部反作用力仍然無法由靜力方程式完全決定，可見還是一種「超靜定支承」。假使作用力合力不通過 G 點，那情形又不同。我們如果以 G 點作爲力矩中心來計算力矩，就會發現：各反作用力的力臂完全都等於零；要它們產生跟作用力平衡的力矩，勢必某些桿件要能夠產生無限大的反作用力。這當然是不可能的事。所以這一情形，在理論上說，是物體不可能平衡。至於實際情形，因爲各桿件在這樣的作用力作用下必然要發生長度的伸縮，允許物體轉動一些地位使三鉸鏈桿的長軸不再相交於一點，所以物體還是可以平衡。不過物體最後的平衡位置以及三鉸鏈桿的桿力必須根據各鉸鏈桿的材料的彈性性質才能確定。因此，這種支承系統仍然是一種「超靜定支承」。關於第224c 圖的情形，我們也可以用類似的方法來說明，此處不再重複。

在結構工程中，有時用兩個或兩個以上的單元結構（通常是簡單桁架）互相連接起來，組織成功一個整個的剛性結構。例如，第 226a 圖中的剛架就是由兩個簡單桁架（圖中畫斜線的）用一個鉸鏈 C 及一個鉸鏈桿 BE 連接而成的。因爲這一結構中每一個單元結構都是剛體，它們跟其他部份的連接方法又合乎剛體在一平面中受「完全約束」的條件，所以整個結構依然是一個剛性結構。



第 226 圖

第 226b 圖中是一個由兩同式桁架用長軸既不互相平行又不共同交於一點的三鉸鏈桿連接而成的剛架。第 226c 圖中的結構，組合是比較複雜一些。其中兩個簡單桁架跟基礎共同組成一個完全剛性的系統。分析這種組合結構（像第 226 圖中所畫的各種剛架）以應用 §33 中的「切面分析法」爲最適宜。現在舉幾個實際的例子來說明如下：

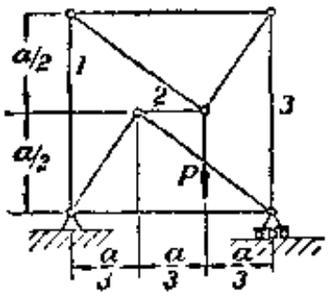
例題和習題

171. 試求第227圖組合桁架中桿件1,2和3的桿力。

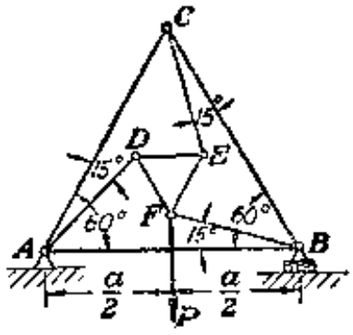
(解: $S_1=-\frac{P}{3}$, $S_2=0$, $S_3=-\frac{2}{3}P$)

172. 試求第228圖組合桁架中 AB 桿的桿力 S。

(解: $S=+0.48P$)



第 227 圖



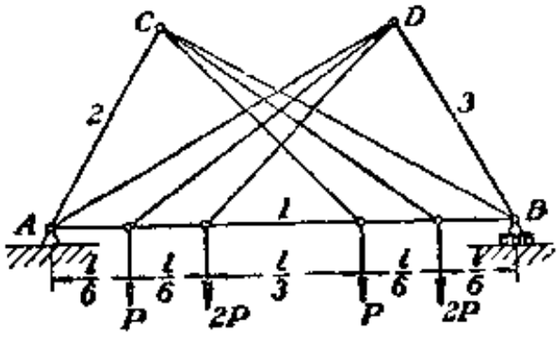
第 228 圖

173. 第229圖的組合桁架中, $\angle CAB=\angle DBA=60°$, $\angle CBA=\angle DAB=30°$。試求桿件1,2和3的桿力。

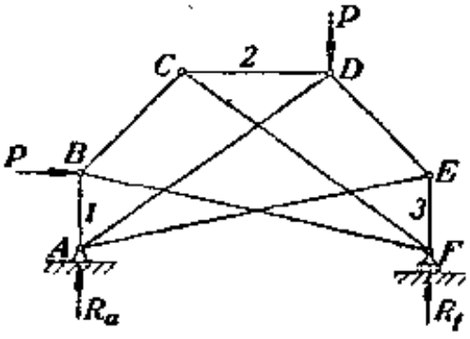
(解: $S_1=+\frac{\sqrt{3}}{2}P$, $S_2=-\frac{4}{3\sqrt{3}}P$, $S_3=-\frac{5}{3\sqrt{3}}P$)

174. 第230圖組合桁架中, $ABCDEF$ 是半個正八邊形。試求桿件1,2和3的桿力。

$$\left(\text{解: }\begin{cases}S_1=-0.293\,P\\ S_2=-P\\ S_3=-1.207\,P\end{cases}\right)$$



第 229 圖



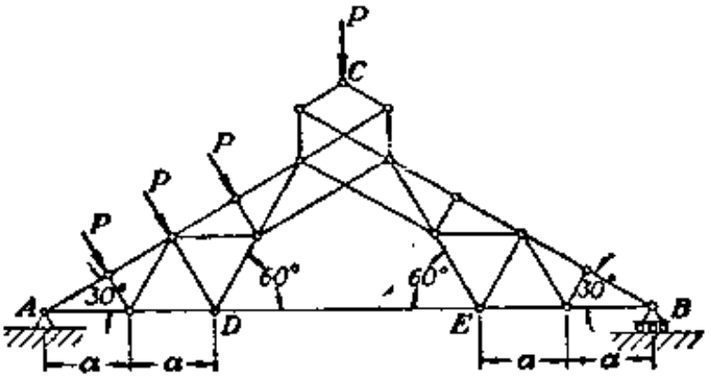
第 230 圖

175. 試求第231圖組合桁架中 DE 桿的桿力 S。

(解: $S=+2.15P$)

176. 第232圖組合桁架中, 桿件1到6的長度相同並且兩兩正交。設圖中 $P=1000$kg,試求桿件1到6的桿力。

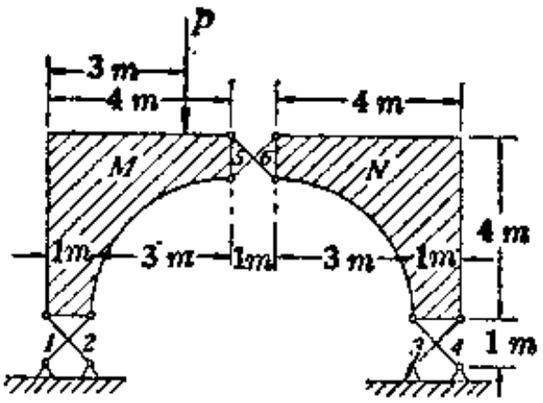
$$\left(\text{解: }\begin{cases}S_1=-707\text{kg}, & S_2=-265\text{kg}\\ S_3=0, & S_4=-442\text{kg}\\ S_5=0, & S_6=-442\text{kg}\end{cases}\right)$$



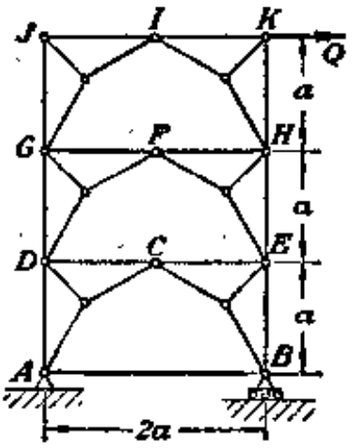
第 231 圖

177. 求第 233 圖組合桁架中 AB 桿的桿力 S。

(解: $S=+Q/2$)



第 232 圖



第 233 圖

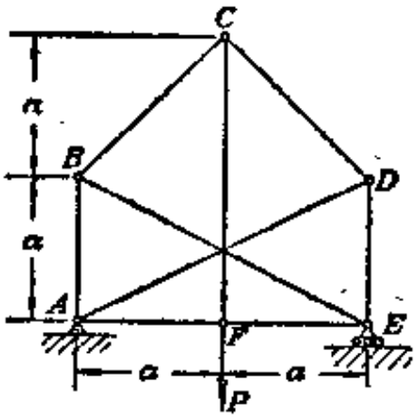
178. 求第 234 圖組合桁架中 AF 桿的桿力 S。

(解: $S=-P/2$)

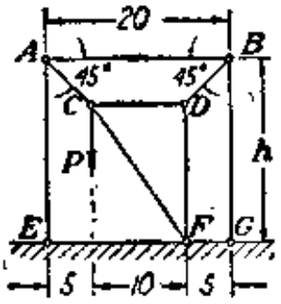
179. 第 235 圖的平面結構中有一鉛垂力 P 作用在 C 點。圖中註的尺寸都以 cm 爲單位。試證明桿件 CF 的桿力完全跟結構的高度 h 無關，始終等於零。

180. 試求第 236 圖桁架中鉛垂桿件 x 的桿力 X。

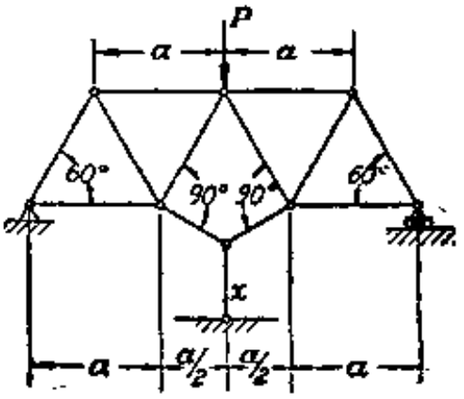
(解: $X=+3P$)



第 234 圖



第 235 圖



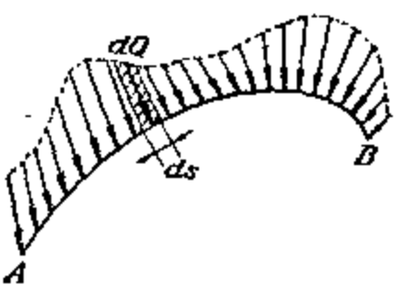
第 236 圖

35. 一般的平面分佈力

§29 中已說明過，有很多種的分佈力可以看作是完全作用在一個平面中。有時這種分佈力的方向在作用平面中逐點各不相同。例如，車輪的輪箍對車輪邊緣的分佈壓力；輪箍在受熱膨脹時套上車輪，等冷却收縮後，就產生這種方向不同的分佈壓力。此外，作用在弧形表面上的流體靜力壓力也是最普通的例子之一；像弧形水堤在上游表面上所受的水壓力，導管中的水或蒸汽壓力等等，都是這種各點方向不同的平面分佈力。

第 237 圖所表示的是平面分佈力的最一般的形式。這樣的分佈力由兩個因素決定：分佈線 AB 及線上每一點的力的「方向和強度」。分佈在分佈線的任何一段微分長度 ds 上的 dQ 力由下式決定：

$$dQ = qds \qquad (a)$$



第 237 圖

式中 q 指分佈力在 AB 線上的強度。因 dQ 力可看作集中在一點作用的集中力，故全部分佈力可化爲一個極多集中力所構成的平面力系。從而 §31 中導出的各種方程式也都可以應用。不過，因爲在分佈力問題中，我們處理的對象都是微分量，所以對於力的投影和或力矩和都必須應用微積分來計算。

例題和習題

181. 一個圓環，內半徑等於 a，受均勻強度等於 q 的流體靜力壓力作用，如第 238a 圖。設圓環厚度比半徑 a 小得很多，試求圓環環內的張力 S 等於多大？

解：先觀察「一半」圓環的平衡狀態（第 238b 圖）。圖中 A，B 兩點的 S 力顯然就是所求的張力；這張力自然在圓環週圍各切面都相等。假使要用一個單力 Q 來替代分佈的流體靜力壓力，可先觀察 AB 半圓中對稱於圖中 Oy 軸的兩小部份圓環（圖中畫斜綫的）。它們長度都是 $ds = a\,d\theta$。根據 (a) 式，這兩小部份上的「力」的大小是 $qad\theta$。分解這兩個力爲鉛垂和水平分力。其中兩水平分力將互相抵消；兩鉛垂分力則可合成爲等於

$$2qa\sin\theta\,d\theta \qquad (b)$$

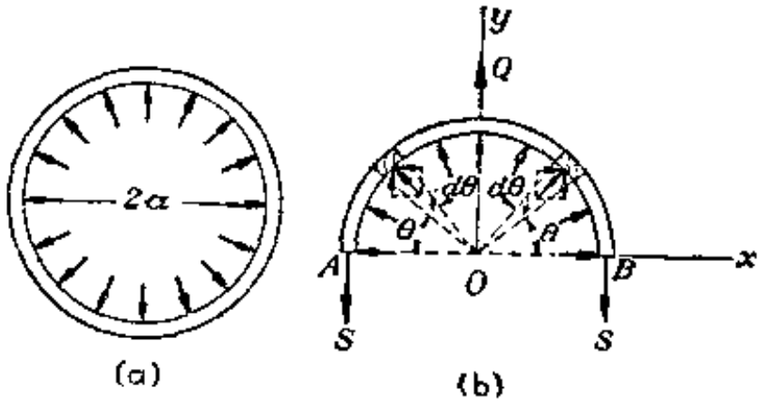
的合力。這鉛垂合力的作用綫，因對稱關係，自將通過 O 點。其他各小部份上的「力」同樣可按這方法處理。所以我們可以得到圓弧 A 到 B 間一對對鉛垂分力的總合力是

$$Q = 2qa\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta = 2qa\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2qa \qquad (c)$$

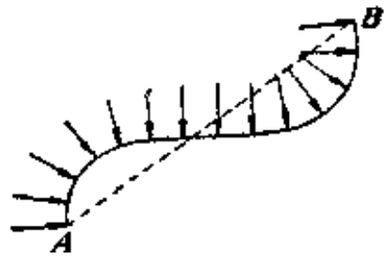
這一分佈力的合力 Q 決定後，以 A 點作爲力矩中心，計算各力力矩，就可得

$$S=\frac{1}{2}Q=qa \qquad (d)$$

由此式可見，如果圓環內的壓力固定不變，那環中的張力 S 就將正比於圓環的半徑 a。所以壓力一定的水管或油管，它的管壁厚度應該跟直徑成正比例。



第 238 圖



第 239 圖

182. 試證明作用在任意一平面曲綫 AB 上的均勻強度等於 q 的分佈壓力必等於作用在 AB 弦上強度相同的均勻分佈壓力(第 239 圖)。

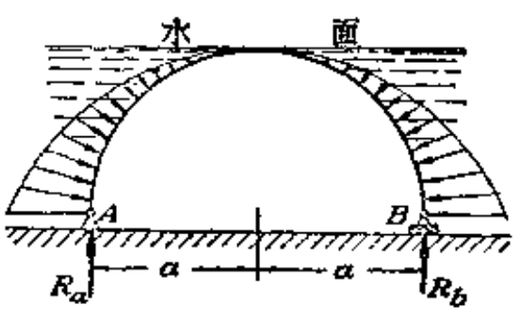
183. 第 240 圖中 AB 是一個半圓拱，半徑等於 a。拱外受水的靜力壓力作用。設圓拱在圖平面垂直方向的厚度等於單位長度，水的單位體積重量等於 w，試求支點 A 和 B 對拱的反作用力 R_a 和 R_b。

[解: $R_a=R_b=wa^2(1-\frac{\pi}{4})$]

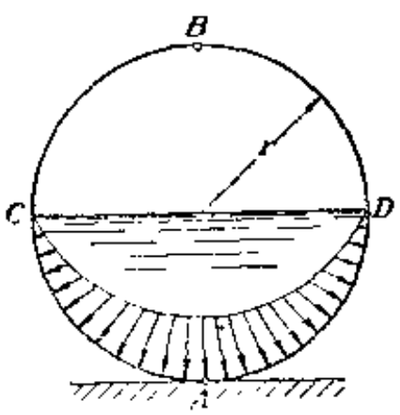
184. 一個水平的水管，由兩個半圓用鉸鏈連接而成，如第 241 圖。水管的半徑是 r。管中的水面高度恰等於鉛垂直徑 AB 的一半。設水的單位體積重量等於 w，試求單位管長上分佈壓力產生於鉸鏈 B 的分佈力的強度。

解: 我們取一段水平方向單位長度的水管來觀察 ACB 部份的平衡，就可得到所求的強度是

$$q_b=wr^2/4$$

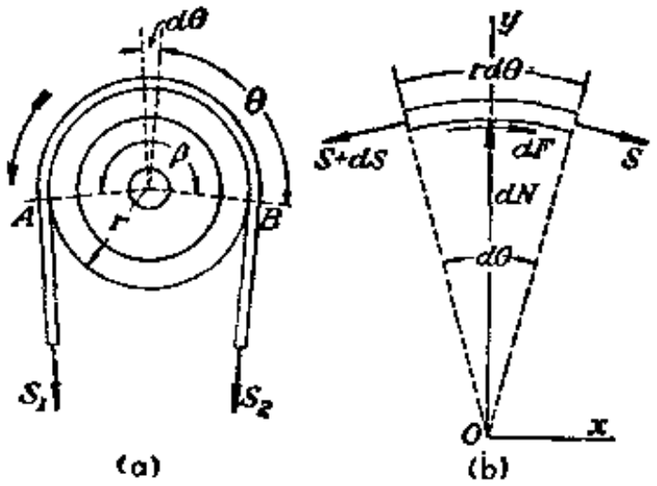


第 240 圖



第 241 圖

185. 第242a圖中是一個半徑等於 r 的皮帶輪，它由皮帶跟輪子間的摩阻力推動着向圖中所指的方向旋轉。離開輪子的皮帶部份，它的張力 S_1 顯然比接近輪子的皮帶部份中的張力 S_2 要大。它們的相差值由於摩阻力關係逐漸沿皮帶跟輪子的接觸綫而增大。設摩擦係數等於 μ，試求輪子兩邊的皮帶中，在皮帶將開始在輪子上滑動時，最大張力跟最小張力的比值 S_1/S_2 等於多大?



第 242 圖

解：在輪子上任意取一小段皮帶觀察。這小段皮帶的長度是 $ds=rd\theta$，所在位置跟接觸開始點 B 所對的圓心角等於 θ（見第242a圖）。選定坐標軸 x,y 如第242b圖，將這一小段上的各力投影於圖中 x 軸方向，因 $d\theta$ 很小，可得

$$S+dF-(S+dS)=0$$

或

$$dF=dS \tag{e}$$

再投影各力於 y 軸方向，因 $d\theta\approx\sin d\theta$，又可得

$$dN-S\frac{d\theta}{2}-(S+dS)\frac{d\theta}{2}=0$$

式中高於一次方的微分量可以不計，故任一小段皮帶加於輪子上的正交壓力是

$$dN=Sd\theta \tag{f}$$

根據§12中(1)式，

$$dF=\mu dN$$

故聯合 $(e)(f)$ 兩式可得

$$dS=\mu Sd\theta$$

或

$$\frac{dS}{S}=\mu d\theta \tag{g}$$

沿接觸綫 AB 的整個長度積分 (g) 式，就得到

$$\left.\begin{aligned}\log_e\frac{S_1}{S_2}&=\mu\beta\\ \text{或}\quad \frac{S_1}{S_2}&=e^{\mu\beta}\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

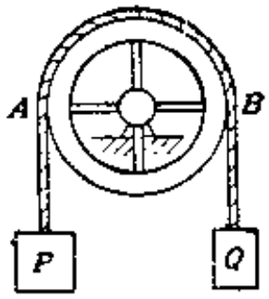
可見兩張力的比值隨着接觸綫 AB 所對圓心角 β 的增加而極急驟地變大。這就說明，爲什麼我們將一根繩子繞在柱子上一兩圈就可以抵抗住一個極大的力量。此外，由 (h) 式還可看到，比值 S_1/S_2 跟輪子的半徑完全無關。

186. 第 243 圖中是一個固定不動的輪子。設圖中索跟輪間的摩阻係數是 $\mu=0.4$，$P=2000$kg，試求平衡時的 Q 最小要等於多大?

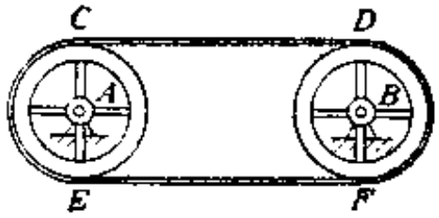
(解: $Q=569$kg)

187. 第 244 圖中，A 和 B 是兩個大小相同直徑 $d=12$cm 的皮帶輪。皮帶張緊在兩輪子之間。靜止時，皮帶的 CD 和 EF 兩邊內的張力都等於 1000kg。設皮帶輪子間的摩阻係數是 $\mu=0.5$，試求兩輪子間可以傳導的旋轉力矩最大可以達到多大? 皮帶傳動時，我們可假定一邊皮帶內張力的增加恰等於另一邊皮帶內張力的減少。

(解: $M_{max}=7872$kg cm)



第 243 圖

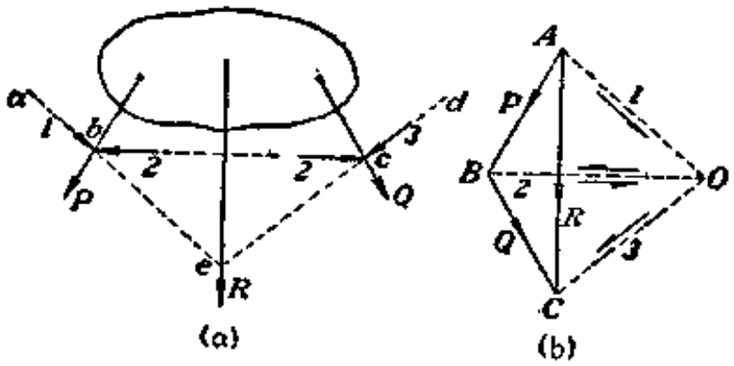


第 244 圖

36. 索線圖

§31中所討論的投影法和力矩法雖然可用來解決一切的靜力學問題；然而處理一個平面力系問題有時還是以應用圖解方法爲簡便。§30中應用力平行四邊形求合力的圖解法是不適宜於實際應用的；一則，手續十分繁複，二則，各力的作用線如果交點不在圖紙之內，合力就不容易決定，而且對於平行力系，這方法根本就不適宜。這裏介紹一種適合於一切平面力系的圖解合成法如下：

第 245a 圖中 P,Q 是作用在一物體上的任意兩力。先畫出它們的力三角形 ABC 如第 245b 圖，ΔABC 的封閉邊 $\overline{AC}$ 決定了兩力合力 R 的大小和方向。不過 R 力的作用線位置還未確定。現在在力多邊



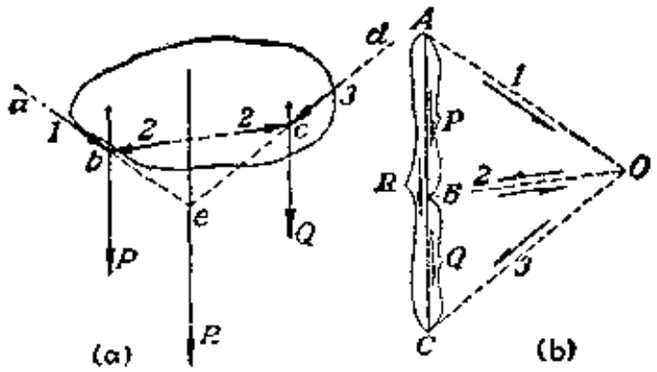
第 245 圖

形平面中任意選定一點 O，這 O 點叫做極點。 極點跟力多邊形各頂點的連線1,2,3叫做射線。 這些射線，我們可當作一些力的代表向量看待。 因此，按 ΔAOB 內所畫的箭頭來確定方向，P 就可以看作1,2所代表的兩力的合力；按 ΔBOC 內箭頭所指的方向，Q 力就可以作爲是2,3所代表的兩力的合力。 我們如果用這樣決定的各分力來替代物體上原來的 P,Q 兩力，很顯然的，並不會改變原來兩力的作用。 替代兩力的方法如下：先在第245a圖中任意選一 a 點，由 a 引射線 AO 的平行線 ab 交 P 力作用線於 b 點。 又由 b 點引射線 BO 的平行線 bc 交 Q 力作用線於 c 點。 最後，自 c 點引射線 CO 的平行線 cd。 這樣得到的多邊形 $abcd$ 就叫做 P,Q 兩力的**索線多邊形**。「索線多邊形」的所有頂點都在各力的作用線上；它所有各邊都分別平行於力多邊形的各射線。 現在設想在 b 點用1,2兩力來代替 P 力；在 c 點用2,3兩力來代替 Q 力（第245a圖）。 原來 P,Q 兩力因之就變成作用在物體 b,c 兩點的四個「力」，被這四個「力」所替代。 可是共同沿 bc 線作用的兩個2力是一對相等相反「力」，它們互相抵消。 所以物體上只剩下1,3兩力去替代原來的 P,Q 兩力。 1,3兩力的合力當然就是原來 P,Q 兩力的合力。 這合力的大小和方向已經由第245b圖中的 $\overline{AC}$ 決定。 它的作用線必須通過替代它的1,3兩力的作用線交點。 1,3兩力的作用線就是第245a圖中索線多邊形第一邊 ab 和最後一邊 cd。 所以這兩邊的交點 e 必然是合力 R 作用線上的一點。 合力 R 的大小、方向既然已由力多角形求到，現在又得到它作用線上的一點，所以合力 R 已經完全決定。

設想有一根不計重量的索線，兩端固定在第245a圖中 a,d 兩點，全線沿着多邊形的 ab, bc, cd 各邊張緊，這根線在圖中 P,Q 兩力作用下，顯然是處於平衡狀態。 線的 ab 和 bc 部份中的張力分別跟1,2兩力相同，它們跟 P 力共同構成 b 點的平衡力系。 線的 bc 和 cd 部份中的張力分別跟2,3兩力相等，它們共同跟 c 點的 Q 力構成平衡。 這種對比關係的存在，就是多邊形 $abcd$ 所以叫索線多邊形的來由。

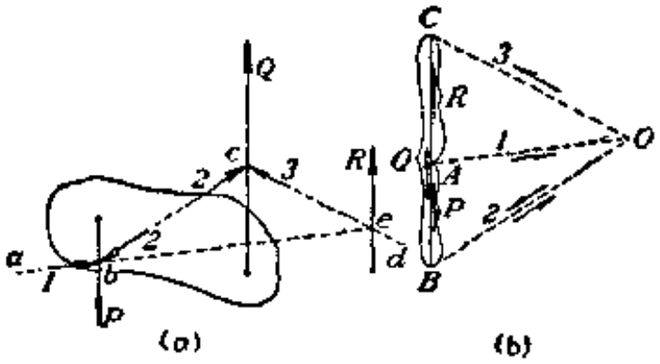
以上的圖解方法，對於一切平面力系都適用。 例如，第246a圖中一個作用在物體上的平行力系。 它由 P,Q 兩力構成。 要求出它的合力，我們仍先畫力多邊形 ABC。 這一多邊形在平行力系中已轉化爲

一根直線(第 246b 圖)。任擇一極點 O,引射線 1,2 和 3,再按以上方法,就可得到索線多邊形 $abcd$ 如第 246a 圖。P 力在 b 點由 1,2 兩力代替;Q 力在 c 點由 2,3 兩力代替。兩個 2 力的作用互相抵消,由力系中把它們拿出後,就只剩下作用完全跟 P,Q 兩力相同的 1,3 兩力。兩力合力 R 的大小和方向由第 246b 圖中力多邊形的封閉邊 $\overline{AC}$ 決定。至於它作用線位置,因索線多邊形最初一邊跟最末一邊的交點 e 是線上的一點,故也可確定如圖。



第 246 圖

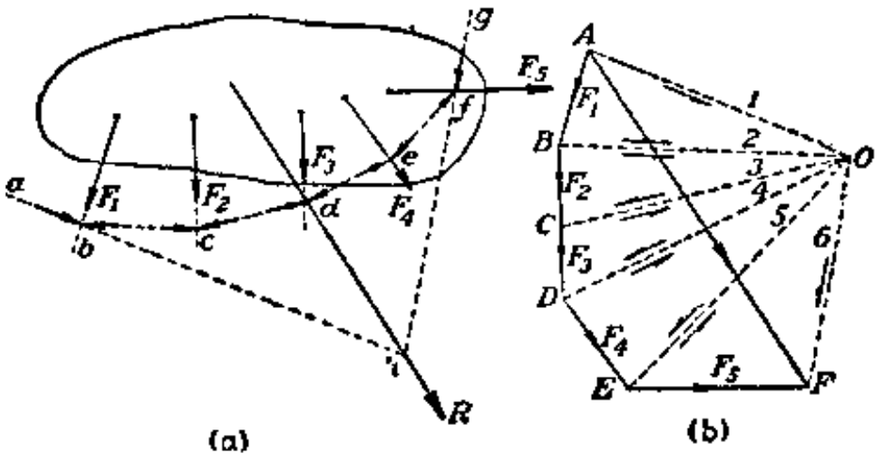
對於方向相反的兩個不等平行力,如第 247a 圖中的 P 和 Q,我們仍舊可同樣處理。先畫力多邊形 ABC 如第 247b 圖。擇定極點 O,引射線 1,2 和 3。之後,根據射線,畫出索線多邊形如第 247a 圖。索線多邊形的第一邊 ab 和最後一邊 cd 的交點 e 確定 P,Q 合力 R 作用線上的一點。合力 R 的大小和方向則由第 247b 圖中力多邊形的封閉邊 $\overline{AC}$ 決定。



第 247 圖

現在觀察一個一般的平面力系,例如,第 248a 圖中共同作用在一個物體上的 $F_1, F_2, \cdots F_5$ 各力。先畫力多角形 $ABCDEF$ 如第 248b 圖。選一極點 O,引射線 1,2,…6。再在第 248a 圖中畫出索線多邊

形 $abcdefg$。其中 bc, cd, de, ef 四邊上的「力」的作用全都兩兩抵消，可以由力系中把它們拿出去。剩下的是跟 $F_1, F_2, \cdots F_5$ 作用相等的 1,6 兩力。所以索線多邊形的第一邊 ab 和最末一邊的 fg 交點 h 就是力系合力 R 作用線上的一點。R 力的大小和方向則由第 248b 圖中力多邊形的封閉邊 $\overline{AF}$ 決定。

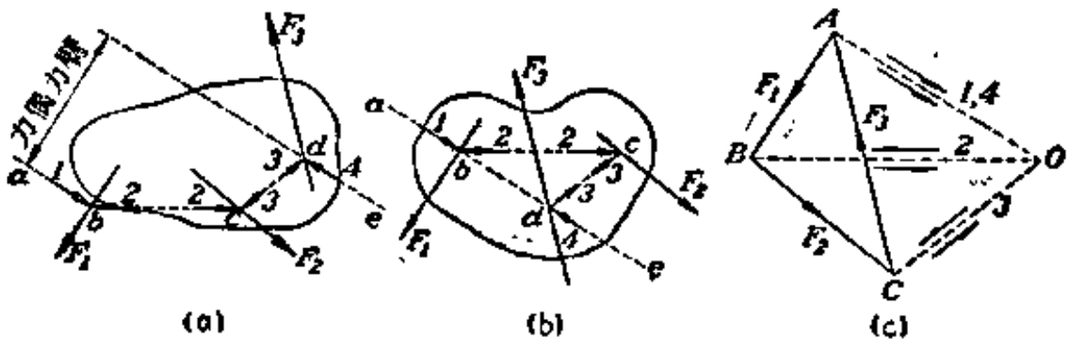


第 248 圖

根據以上討論，要合成任何一個平面力系，我們只要畫兩個多邊形：力多邊形和索線多邊形。力多邊形的封閉邊可決定所求合力的大小和方向，索線多邊形的第一邊和最後一邊的交點又可決定合力作用線上的一點。因此，兩多邊形可以完全確定力系的合力。

假使力多邊形自行封閉，沒有封閉邊，以致第一根射線跟最後一根射線疊合成爲一根線，那末索線多邊形中的第一邊和最後一邊如不互相平行就非互相重合不可。它們互相平行的話，就表示沿這兩邊作用的兩力是一個力偶；重合的話，那表示兩力互相抵消，原來各力是一個平衡力系。

第 249 圖可說明這兩種可能的情形。物體上的三已知力 F_1, F_2



第 249 圖

和 F_3 的大小和方向恰好使它們的力三角形自行封閉，以致射線 1 和 4 疊合成爲 $\overline{OA}$。假使三力的作用線位置是如圖 a 所表示的情形，那索線多邊形的第一邊 ab 跟最末一邊 de 就將平行而不重合。由原來力系簡化而得的 1,4 兩力因之是一個力偶。這力偶的力矩，我們可自圖 a 量出力臂的長度，自圖 c 量出 OA 射線的長度，算出它們的乘積，由乘積的大小來決定。

假使三力作用線位置如圖 b 情形，索線多邊形的第一邊跟最末一邊就將完全重合，1 和 4 兩力互相抵消。這表示原來各力是一個平衡力系。

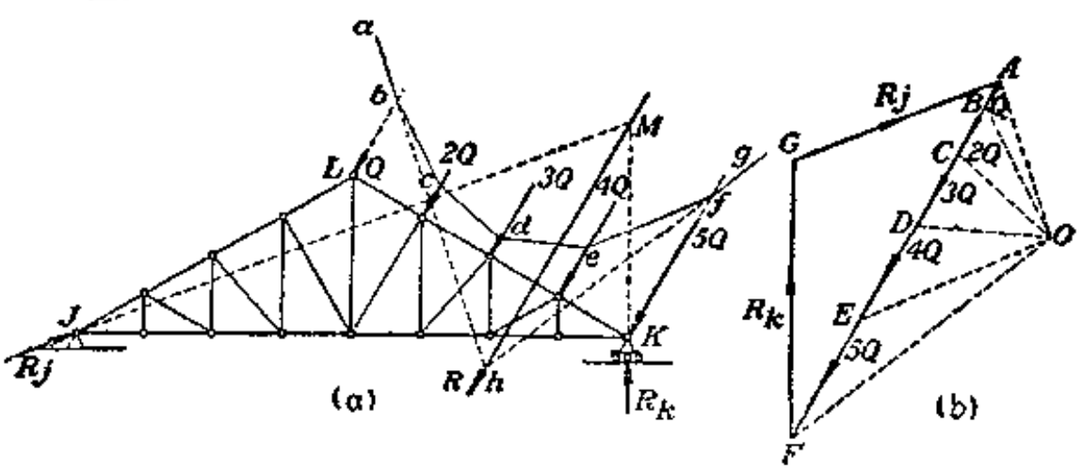
可見應用力多邊形和索線多邊形還可以完全由圖解法來辨別 § 30 中所說的合成一般平面力系的三種可能結果。假使一個力系的力多邊形不封閉，力系顯然可以化爲一個合力。如果力多邊形封閉，但是索線多邊形的第一邊跟最末一邊平行而不重合，那力系就可以化爲一個力偶。若是力多邊形自行封閉，索線多邊形也自行封閉（就是第一邊跟最末一邊重合的情形），原來各力就必然是一個平衡力系。

例題和習題

188. 用圖解法求第 250a 圖中桁架 JLK 兩支點 J 和 K 對桁架的反作用力 R_j 和 R_k。

解：畫力多邊形 $ABCDEF$ 如第 250b 圖，得作用力的合力 R 的代表向量 $\overline{AF}$。再由索綫多邊形 $abcdefg$ 的第一邊 ab 和最末一邊 fg 的交點 h 決定 R 力的作用綫位置。

作用力的合力 R 決定後，我們可以用它來代替出原來的作用力力系。因此，桁架變成是在 R 和 R_j，R_k 三個力作用下平衡，故由「三力的作用綫必須交於一點 M」，可得 R_j 的作用綫 JM。畫出這三力的力三角形，R_j 和 R_k 的大小和方向就都可確定如第 250b 圖。



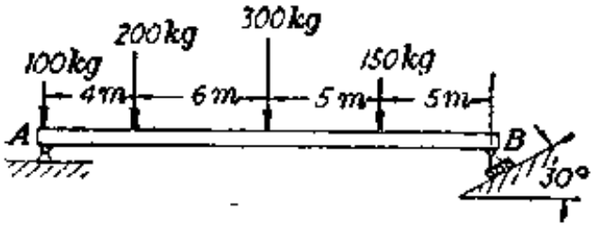
第 250 圖

189. 用圖解法求第251圖中水平梁 AB 兩支點 A,B 的反作用力 R_a,R_b。

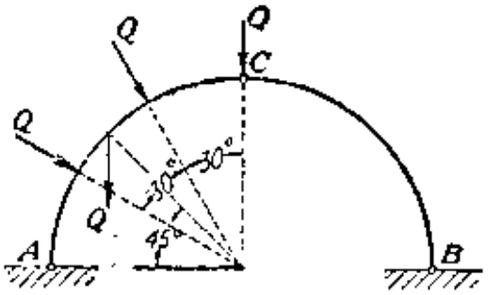
(解: $R_a=481$kg, $R_b=34$ kg)

190. 用圖解法求第252圖中半圓三鉸拱兩支點 A,B 的反作用力 R_a,R_b。

(解: $R_a=2{,}04Q$, $R_b=1{,}88Q$)



第 251 圖



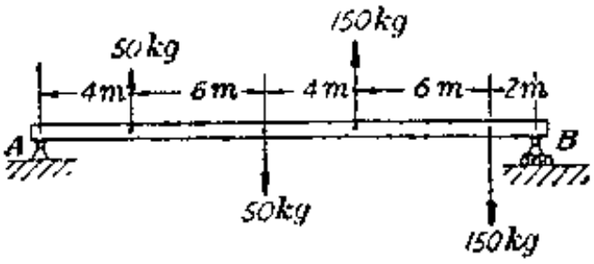
第 252 圖

191. 用索綫多邊形求第253圖中 AB 梁上四作用力的合成結果。

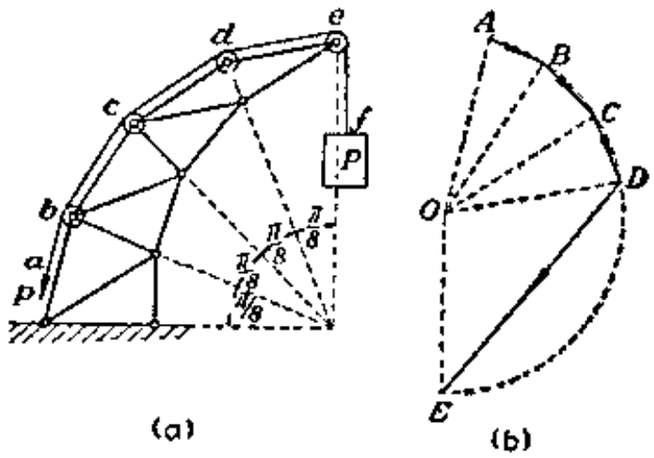
(解: $M=-1200$kg-m)

192. 第254a圖中是一連起重機。它的吊繩跨過圖中 b,c,d 和 e 四個滑輪。滑輪摩阻力可以不計,試求機架在 b,c,d 和 e 四節點所受到的作用力。

解: 把吊繩當作所求力系的索綫多邊形,那問題就十分簡單。因滑輪無摩阻力,故吊繩中的張力並不沿繩的長度方向變化,它的大小在整個繩中都等於 P。任選一極點 O 作爲圓心,把 P 力按比例換算成長度作爲半徑,畫一圓弧如第254b圖。之後,引射綫 OA,OB,OC,OD 和 OE 分別平行於吊繩的 ab,bc,cd,de 和 ef 各部份。所得的多邊形 $ABCDE$ 顯然就是所求力系的力多邊形。由這一力多邊形的 AB,……DE 各邊就可決定機架在相應各節點所受到的各力。假使要分析機架,我們只要把綜合力圖附合到力多邊形 $ABCDE$ 上去,就可得到各桿件的桿力。



第 253 圖



第 254 圖

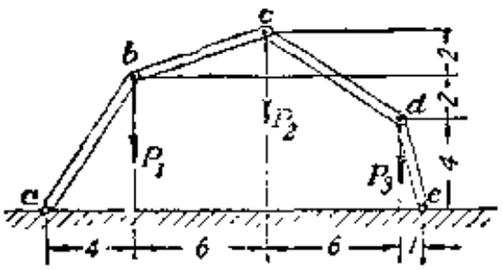
193. 第255圖中各桿件在平衡狀態。試求各作用力 P_1,P_2 和 P_3 的相對大小(也就是 $P_1:P_2:P_3$ 的比值)應等於多大? 各桿件的自重可以不計。圖中註的尺寸都以 m 爲單位。

解：任意假定一個 P 力的大小，譬如令 $P_1=1000\text{kg}$。把圖中 $abcde$ 看做是各作用力的索綫多邊形，就可求得 $P_1:P_2:P_3=100:85.7:286$。

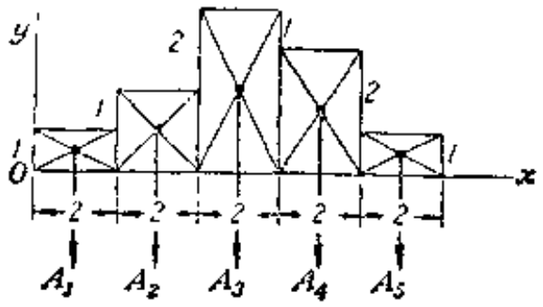
194. 應用圖解法求第 255 圖中所畫圖形的面積形心位置。圖中所註的尺寸全是以 cm 爲單位。

解：各小方塊圖形的面積是 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_6$。把 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_5$ 看作一個平行力系，畫這一力系的索綫多邊形，就可得出形心 C 的 x 軸坐標是

$$x_C=5.18\text{cm}。$$



第 255 圖



第 256 圖

37. 封閉索線圖

§36中已指出過，**一個平面力系如果構成平衡，那它的力多邊形和索線多邊形就必須同時自行封閉。**這平衡條件跟力多邊形中力的幾何相加的次序、極點 O 的位置和索線多邊形的開始一點的位置全都完全無關。這平衡條件跟 §31 中(19)或(20)兩組平衡方程式的作用完全相同，應用這條件可以圖解一切平面力系的平衡問題。

用計算方法處理靜力學問題，假使力矩中心的位置選擇得適當，運算手續就可大大簡化。同樣，在圖解法中，假使力多邊形中力的幾何相加次序、極點的位置以及索線多邊形開始一點的位置選擇得適當，那圖解手續也可以大大簡化。不過所謂「選擇得適當」並沒有一定的法則，純粹要看各問題的具體條件而定。所以我們必須對索線多邊形跟力多邊形間的基本關係有徹底的了解，否則就很難「選擇得適當」。以下我們舉些例子來說明。

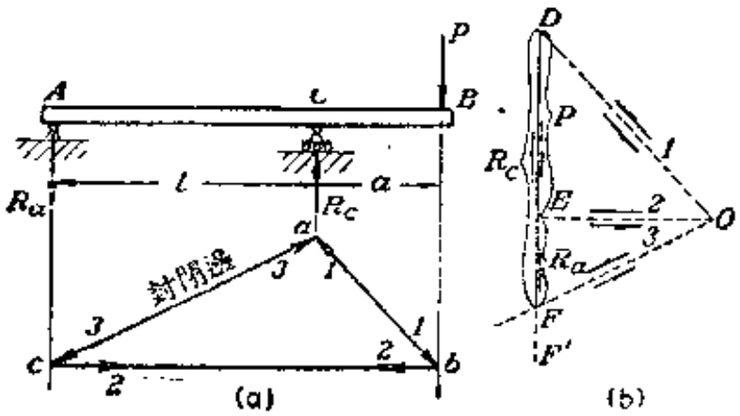
例題和習題

195. 試求第 257 圖中 AB 梁在 A，C 兩支點所受的反作用力。

解：所求的兩反作用力 R_a，R_c 顯然都在鉛垂方向。故 AB 梁是在三個平行力 P，R_a 和 R_c 的作用下平衡。這三平行力的力多邊形和索綫多邊形因之必須同時自行封閉。

先畫力多邊形如第 257b 圖。圖中以 $\overline{DE}$ 代表 P 力，$\overline{EF}$ 代表反作用力 R_a，使封

閉邊 $\overline{FD}$ 可以代表反作用力 R_c。然而 R_a, R_c 兩力的大小這時還不知道，所以除掉圖中 EF' 表示了 R_a 力的方向外，力多邊形事實上並沒有完成。現在任擇一極點 O，引射綫 1 和 2。力多邊形的頂點 F 在 EF' 上的位置這時還未確定，射綫 3 當然也還畫不出來。我們在第 257a 圖中 P 力作用綫上任定一 b 點來畫索綫多邊形中平行於射綫 1,2 的兩邊 ab,bc。延長這兩邊，得它們跟 R_c, R_a 作用綫的交點 a, c 兩點如第 257a 圖。這兩交點 a, c 就是索綫多邊形的其餘兩個頂點。所以由極點O引一平行於索綫多邊形的封閉邊 c, c 連綫的平行綫就得到未知的射綫 3。射綫 3 跟 EF' 的交點決定力多邊形最後一頂點 F。故 $\overline{EF}$ 和 $\overline{FD}$ 就代表所求的兩反作用力 R_a 和 R_c。



第 257 圖

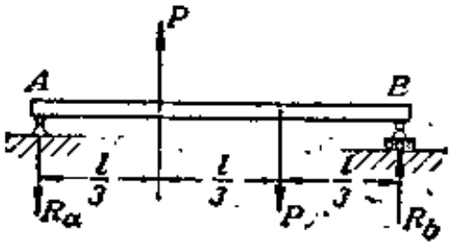
應注意的：雖然 EF' 上的任何一點都可以滿足力三角形必須封閉的條件，但是只有它上面的 F 點才能夠同時又滿足索綫多邊形也封閉的平衡條件。

196. 用圖解法求第 258 圖中 A 和 B 支點對梁 AB 的反作用力 R_a 和 R_b。

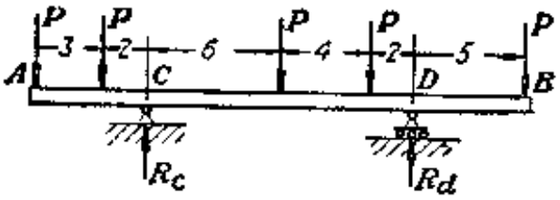
(解：$R_a=P/3$ 向下，$R_b=P/3$ 向上)

197. 第 259 圖中，$P=600$kg，圖中尺寸以 m 爲單位。試用圖解法求反作用力 R_c 和 R_d。

(解：$R_d=1300$kg，$R_c=1700$kg)



第 258 圖



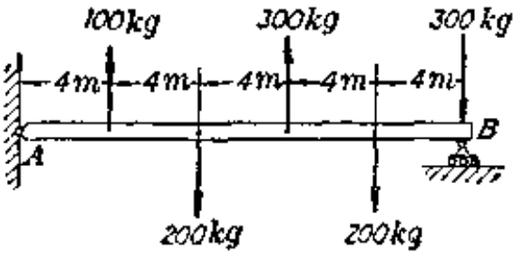
第 259 圖

198. 用圖解法求第 260 圖中 A, B 兩點對 AB 梁的反作用力 R_a, R_b

(解：$R_a=40$kg 向下，$R_b=340$kg 向上)

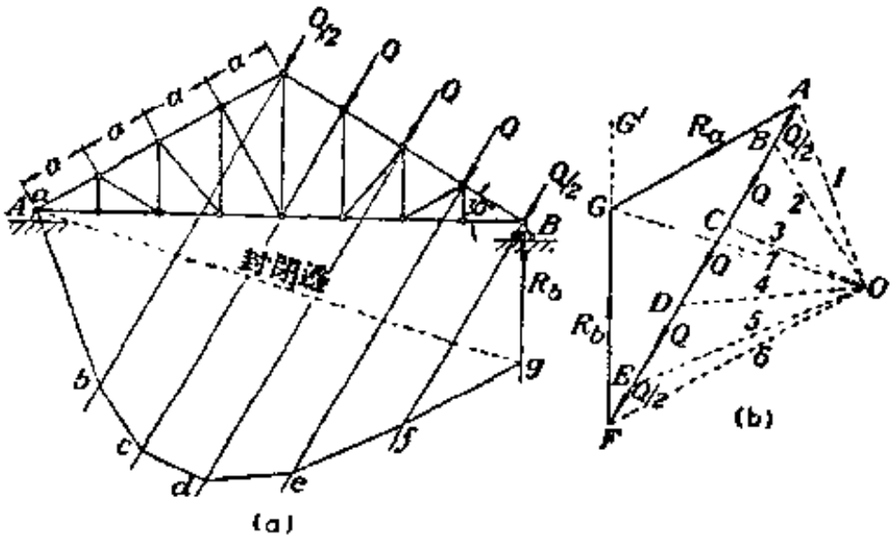
199. 用圖解法求第 261a 圖中 A, B 兩支點對桁架的反作用力 R_a, R_b。

解：所有各作用力 Q 等跟反作用力 R_a, R_b 共同構成平衡，故它們的力多邊形及索綫多邊形都必須自行封閉。先作力多邊形如第 261b 圖。自圖中 F 點引鉛垂直綫 FG' 代表



第 260 圖

反作用力 R_b 的方向。 這時，R_a 力的大小和方向尚未決定，所以力多邊形還不能完成。 任擇一極點 O，引射綫 1,2,3,4,5 和 6 如圖， 索綫多邊形的所有頂點都在各力的作用綫上。 現在由 R_a 作用綫上的一點 A 開始畫索綫多邊形，先後得 ab, bc, cd, de, ef 和 fg 各邊，最後可得到封閉邊 ag。 自極點 O 引射綫 7 平行於 ag。 這射綫 7 跟 $F'G$ 的交點 G 顯然是力多邊形的所求的頂點。 所以可得 R_a 和 R_b 的代表向量 $\overline{FG}$ 和 $\overline{GA}$ 如第 261b 圖。



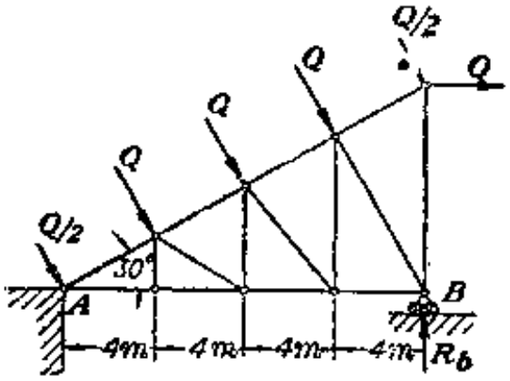
第 261 圖

200. 用圖解法求第 262 圖中兩支點 A，B 對桁架的反作用力 R_a，R_b。 設圖中 Q=100kg。

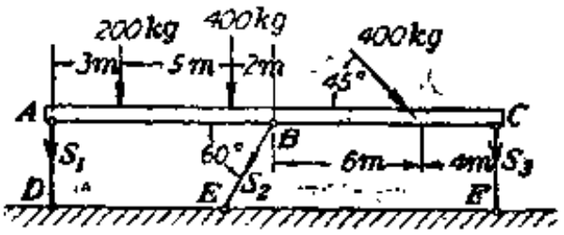
(解: R_a=305kg, R_b=28.kg)

201. 用圖解法求第 263 圖中 AD，BE 和 CF 三鉸鏈桿的桿力 S_1，S_2 和 S_3。

(解: S_1=−712kg, S_2=+566kg S_3=−661kg)



第 262 圖



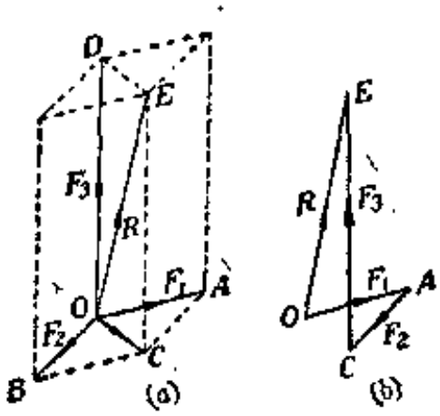
第 263 圖

第五章　空間共點力系

38. 空間共點力系的合成與分解

一羣空間共點力也可以連續應用力平行四邊形來合成。例如，第264a圖中 F_1，F_2 和 F_3 三力共同作用在物體的 O 點，三力代表向量是 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$ 和 $\overline{OD}$。我們用力平行四邊形合成 F_1 和 F_2 得合力 $\overline{OC}$ 作用在兩力的作用平面 AOB 中。以 OC 代替 F_1 和 F_2，再用力平行四邊形求出 F_3 和 OC，也就是原來三力的合力 R。R 力的代表向量就是圖中 $ODEC$ 平行四邊形的對角線 OE。可見三個空間共點力的合力，可以完全由三力代表向量 OA，OB 和 OD 所成平行六面體的對角線決定。

如果應用力多邊形自然也可得到同樣結果。我們先畫出 F_1 的「分離向量」OA(第264b圖)，由 $\overline{OA}$ 終點引分離向量 AC 代表 F_2 力，再自 $\overline{AC}$ 終點引分離向量 CE 代表 F_3。比較第264a圖和第264b圖，就可知這樣幾何相加而得的分離向量 OE 也就代表 F_1，F_2 和 F_3 三力的合力 R。



第 264 圖

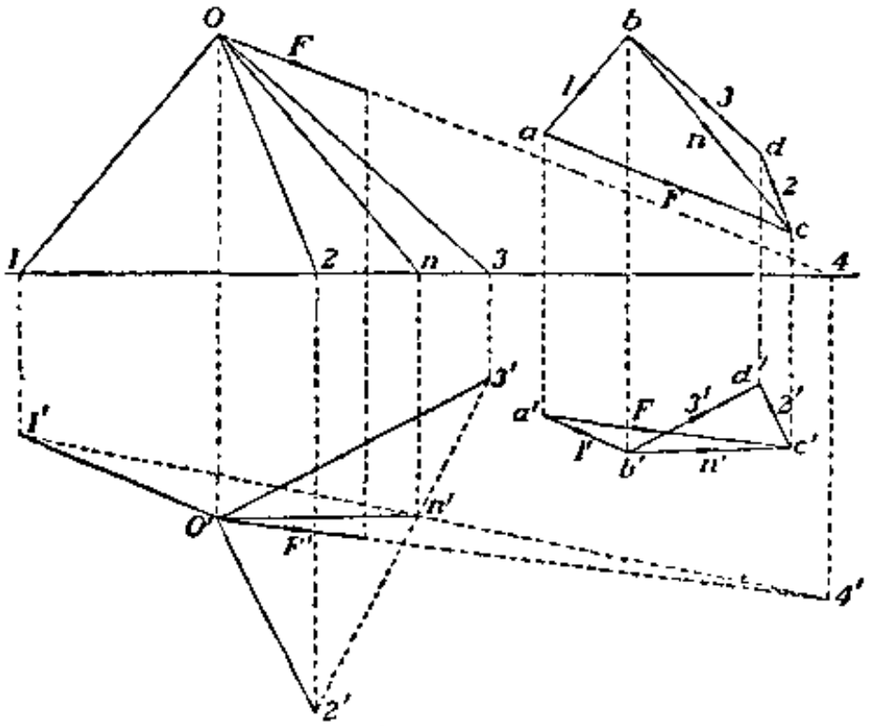
第264圖中雖然僅合成了三個力，但是這兩種合成方法對「力」的數目並沒有任何限制；它們可以用來合成任何多個數的空間共點力。因此，可以做出這樣一個結論：一個空間共點力系，不論其中包含多少個「力」，它的合力就等於各力的幾何和；合力作用線通過各力的共同交點。

空間力系的力多邊形自然不是各邊都在同一平面中。因此，應用圖解法求它合力的大小和方向就必須攷察各力在兩個正交平面上的投影才能解決。一個空間共點力系的力多邊形在任何一個平面上的正投影是一個平面的多邊形。這個多形邊的各邊當然就是各空間力在

這一平面上的正投影。可見空間力系的合力在這一平面上的正投影也就是各空間力在同平面上的各正投影所合成的合力。因此，我們可以由空間力系在兩個正交平面上的正投影來決定力系合力在這兩個平面上的正投影。合力在兩個正交平面上的正投影求到後，合力本身的大小、方向當然就可以根據這兩個投影來確定。

要分解一個已知力於已知不同平面的三直線方向，如果這三直線共同相交在已知力作用線上一點，那就可用第264a圖的畫平行四邊形方法來分解。例如，我們要分解 $\overline{OE}$ 所代表的已知力 R 爲三個分力，三「分力」的方向指定爲 OA，OB 和 OD，我們可通過 E 點作三個平面平行於 DOB，DOA 和 AOB 三平面（第264a圖）。這三平面分別跟 OA，OB 和 OD 相交於 A，B 和 D 三點。這樣得到的 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$ 和 $\overline{OD}$ 顯然就是所求三分力的代表向量。應該注意的，第264a圖不過是說明分解的過程，眞正要由圖解法來決定分力的大小、方向還是非要利用已知力和三分力作用線在兩個正交平面上的正投影來解決不可。

例如第265圖中，F 和 F' 代表一個已知力在一鉛垂平面和一水平平面上的正投影；O'，$O2$，$O3$ 和 $O'1'$，$O'2'$，$O'3'$ 分別代表所求三分力的作用綫在這兩平面上的正投影。第一步，我們要求出「已知力的作用綫跟任意一個分力作用綫所成的平面」和「其餘兩分力作用綫所成平面」的相交綫。現在令已知力跟「作用綫投影是 $O1$ 及 $O'1'$ 的分力」所成的平面代表前一平面；「作用綫投影是 $O2$，$O'2'$ 和 $O3$，$O'3'$ 的兩分力」所決定的平面代表後一



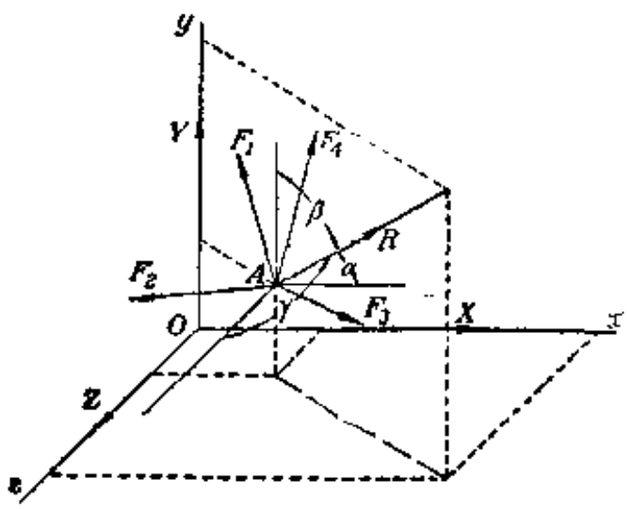
第265圖

平面。(O, O′)點(指在圖中鉛垂和水平平面的投影是 O 和 O′ 的空間一點)顯然是這兩個平面相交綫上的一點。此外,圖中 1′ 4′ 和 2′ 3′ 兩綫的交點 n′ 所指的一 (n, n′) 點也必定在這一交綫上。綫上的兩點既經確定,相交綫本身自然就可以由它的投影 on 和 o′n′ 完全決定。第二步,我們把已知力分解於 (O1, O′1′) 和 (On, O′n′)所指兩直綫的方向。所得兩分力的投影就是圖中力多邊形內的 1, 1′ 和 n, n′。這就是說,△abc 和 △a′b′c′ 是「分解已知力所用的空間力三角形」在兩投影平面上的投影,所以 $\overline{ab}$ 邊和 $\overline{a'b'}$ 邊是(O1, O′1′)直綫方向分力的投影,$\overline{bc}$ 邊和 $\overline{b'c'}$ 邊是已知力在(On, O′n′) 直綫方向分力的投影。最後,我們把這一(On, O′n′)直綫方向的分力再分解於 ($\overline{bd}$, $\overline{b'd'}$) 和 (dc, d′c′) 直綫所定的兩方向得 2, 2′ 和 3, 3′ 所指的兩分力。所求的三分力在鉛垂平面上的投影 $\overline{ab}$, $\overline{bd}$, $\overline{dc}$ 和在水平平面上的投影 $\overline{a'b'}$, $\overline{b'd'}$, $\overline{d'c'}$ 到現在已經完全畫出來了。各分力的本身自然不難由這些投影來推算。

39. 投影法

由 § 38 的討論,可知:如果用圖解法來處理空間力系,就必須應用兩個正交平面的正投影,因此,手續十分麻煩。對於一個空間共點力系,其實我們還可以用 § 13 中平面共點力系的「投影法」來處理,而且這方法對於此類問題特別適合。

按照 § 13中處理平面共點力系的推理方法,我們同樣可證明:若干空間共點力的合力在任意一坐標軸的投影就等於各力在同軸投影的代數和。例如,第 266 圖中 X, Y 和 Z 是一共點力系 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 的合力 R 對於三個正交坐標軸 x, y 和 z 上的投影;X_i, Y_i 和 Z_i 是力系中任一 F_i 力在以上三坐標軸上的投影。根據以上論斷,可得:



第 266 圖

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i \\ Y &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \\ Z &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

計算任一 F_i 力在 x, y 和 z 軸上的投影，可用以下三式：

$$X_i = F_i \cos \alpha_i, \quad Y_i = F_i \cos \beta_i, \quad Z_i = F_i \cos \gamma_i$$

其中 α_i, β_i 和 γ_i 分別指 F_i 力作用線跟正方向 x, y 和 z 軸的交角。合力 R 的大小是

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{b}$$

如 α, β, γ 是合力 R 作用線跟正方向 x, y, z 軸的交角，就可得：

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R} \tag{c}$$

(a), (b), (c) 三式顯然已經完全決定了所求的空間共點力系的合力。

假若這一共點力系自成平衡，那它的平衡條件，按 (a), (b), (c) 三式，就是：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=n} Z_i = 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

應用 (21) 於任何一個平衡的空間共點力系，我們都一定能夠決定三個未知量。例如，一個平衡的空間共點力系中，如果其中所有各力除掉三個力的大小外，全部都知道，那應用(21)式就可以確定這三個力的未知的大小。再如一個平衡的空間共點力系中，有一個「力」完全未知，那我們應用 (21) 式把這「力」在三坐標軸的投影求出來，也就可以完全決定這一個「力」。

根據(21)式，還可以推論出：(1)三個空間共點力構成平衡，這三力的作用線若不共同在一個平面內，那三力就非都等於零不可；(2)四個不共同在一個平面內的共點力，其中若有兩個力作用線相同，那其他兩個力必定都等於零，而且同作用線的兩力必定是相等相反兩力；(3)共點力系中，若是除掉一個力外，其餘各力全部都在同一平面內，那就只有不在同一平面的一個力等於零，這力系才可能平衡；(4)在一個共點力系中，所有各力的作用線都已經知道，而且除兩個力的作用線外，

所有其他各力的作用線都在同一平面內。在這樣情形下，假使不在同一平面的兩力中，有一個力的大小也已知道，那末其餘一個力的大小就也可以決定。這些推論現在留給讀者自己去證明。

例題和習題

202. 兩個相等的水平力 F，互相正交，作用在一桅杆 AB 的頂點 A 處（第 267 圖）。桅杆 AB 由拉繩 AC 拉着，防止兩 F 力的彎曲作用。AC 繩內有一螺旋套管 D 調節繩中的張力。設 $F=100$kg，試求 AC 繩中適當的張力 S_1 以及桅杆 AB 因此而引起的桿力 S_2 各等於多大？

解：觀察桅杆頂點 A 處各力的平衡。因桅杆完全不發生彎曲，故它對 A 點的反作用力 S_2（也就是它的壓力）必定是在它的長軸 AB 方向。各力作用綫決定後，可得 A 點的分離體圖如第 267 圖。

定坐標軸 x，y 和 z 如圖。xy 平面跟 ACB 平面相合，z 軸垂直於 ACB 平面。根據(21)式，可知，ABC 平面必須等分兩 F 力作用綫所成的 90° 角，AB 才沒有彎曲發生。投影分離體上各力於 x 軸方向，可得

$$-S_1\cos 60^\circ+2F\cos 45^\circ=0$$

故 $S_1=2\sqrt{2}F=283$kg。再投影各力於 y 軸方向，又可得

$$S_2-S_1\cos 30^\circ=0$$

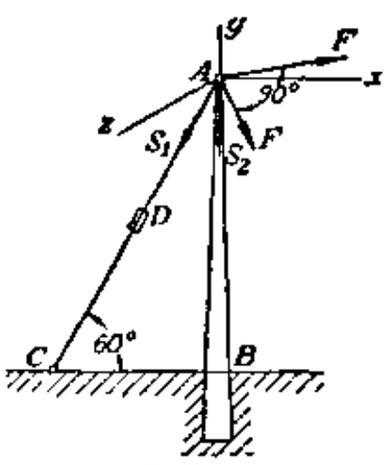
故 $S_2=S_1\cos 30^\circ=245$kg。

203. 假設第 202 題中的兩水平力，一個力是 $F_1=100$kg，另一個力是 $F_2=80$kg。試求 S_1 和 S_2 又應該等於多大？

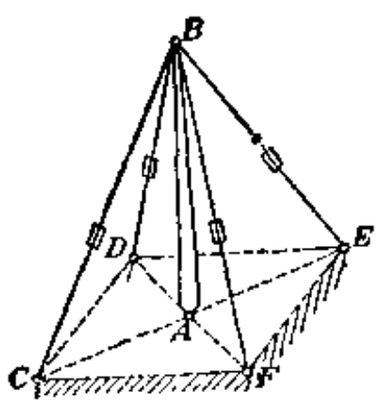
解：因爲拉繩 AC 必須放在這樣一個鉛垂平面中，要使它能夠完全防止桅杆發生彎曲，故可得 $S_1=255$kg 張力，$S_2=222$kg 壓力。

204. 一長 l 的桅杆 AB 由四根長 l_1 的拉繩 BC，BD，BE 和 BF 拉住如第 268 圖。C，D，E，F 四點構成一個正方形。四拉繩中的張力都是 1 t。設 $l=16$m，$l_1=20$m，試求桅杆 AB 內的壓力 S 等於多大？

(解：$S=3\frac{1}{3}t$)



第 267 圖



第 268 圖

205. 鉸鏈桿 AB，一端固定在牆上 B 點，另一端 A 由兩根水平的拉繩 AC 和 AD 拉住。兩繩的另外兩端 C，D 也固定在牆上（第 269 圖）。設圖中掛在 A 點的物體重量是 $P=1t$。試求拉繩中的張力 S 和 AB 桿的壓力 S_1 各等於多大？

（解：$S=0,707t$，$S_1=1,41t$）

206. 第 270a 圖中是一個三脚架。三脚 OA，OB，OC 的長度都等於 l。地面上三支點 A，B，C 的位置恰好成功一個每邊等於 $\frac{\sqrt{3}l}{2}$ 的等邊三角形。有一重體 P 掛在三脚架的頂點 O 處。地面摩阻力足夠防止三脚的滑動。試求 OA，OB，OC 三脚內的壓力等於多大？

解： 觀察 O 點各力的平衡。O 點共有 S_1，S_2，S_3 和 P 四個力作用。定 O 爲坐標原點，鉛垂綫爲 z 軸。投影各力於 z 軸方向，可得

$$(S_1+S_2+S_3)\cos\gamma-P=0 \qquad (d)$$

其中 γ 是三脚各自跟 z 軸所成的交角。

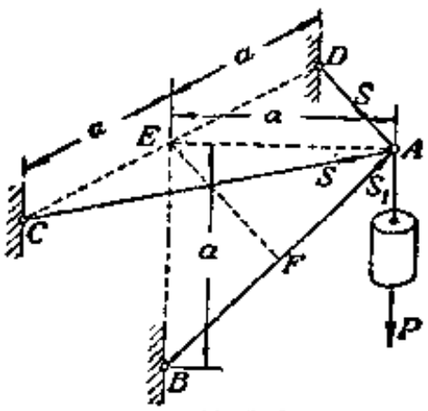
因三脚的長度相同，三支點又構成等邊三角形，故 z 軸一定通過 $\triangle ABC$ 三中綫的交點。根據題中已給各值，可算出 $\gamma=60°$。

之後，把各力投影在過 O 點的水平平面上，得一如第 270b 圖的平面力系。根據 §38 中的討論，可知一個平衡的空間力系在任何平面上的投影也必將構成一個平衡的平面力系。因此，應該 $S_1'=S_2'=S_3'$，否則第 270b 圖的平面力系就不能平衡。由這三投影的大小相等，我又可推斷出 $S_1=S_2=S_3=S$，故按 (d) 式，可得

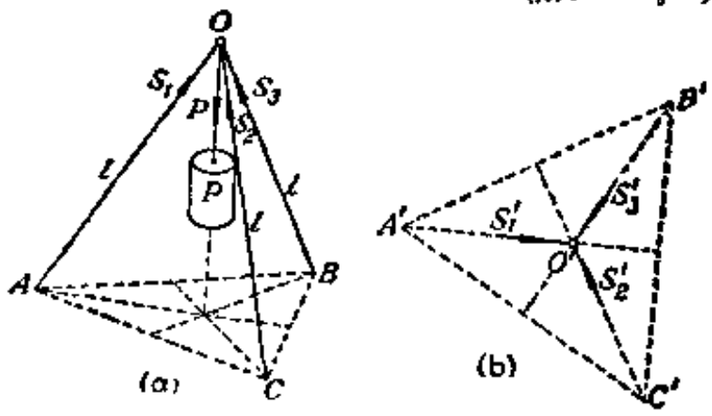
$$S=\frac{P}{3\cos 30°}=\frac{2P}{3\sqrt{3}}$$

207. 設想第 206 題中，地面完全光滑，爲了防止滑動，沿 AB，BC 和 AC 方向用三根繩子把三個支點的相對位置固定起來。試求這三根繩子中的張力 S 等於多大？

（解：$S=\frac{1}{3}P$）



第 269 圖

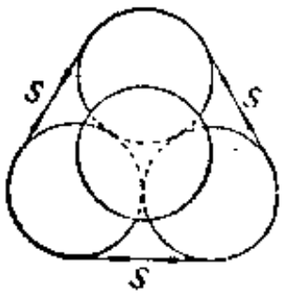


第 270 圖

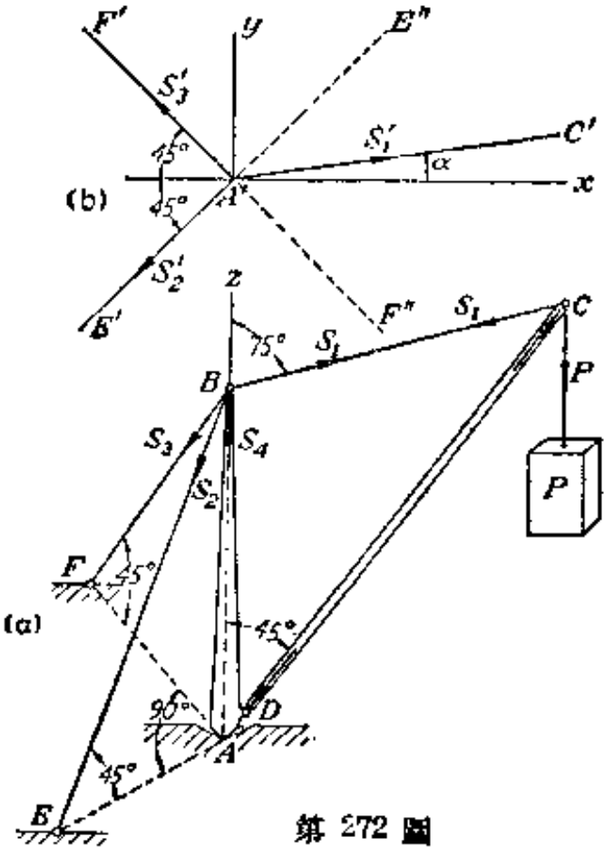
208. 第 271 圖中是四個叠成三角錐形狀的光滑圓球。圓球半徑都是 r。底層三球由一根繩子圍繞住，使它們不會散開。這根繩子在上面一個球還未放上去的時候恰好張力等於零。設四球的重量全等於 Q，試求叠起後繩子內的張力 S 等於多大？

（解：$S=\frac{Q}{3\sqrt{6}}$）

209. 第272圖中是一起重裝置。 桅杆 AB 豎着放在 A 座內，由拉繩 BE，BF 拉住。 兩拉繩的水平綫仰角都等於 45°。 它們所在的鉛垂平面 ABE 和 ABF 互相垂直。 整個裝置的水平面投影見第272b圖。 機臂 CD 所在的鉛垂平面 ABC 可以在 $F''A'E''$ 角所指的範圍內繞 AB 綫自由旋轉。 設 CD 取第274b圖中位置提起重體 P，試求平衡時 BE，BF 兩拉繩內的張力 S_1，S_2 以及桅杆 AB 中的壓力 S_3 各等於多大？



第 271 圖



第 272 圖

解： 因機臂 CD 加於桅杆 AB 的「力」通過 A 點，故 AB 中只有它長軸方向的單純壓力存在，不另外受彎曲作用。 因此，AB 對 B 點的反作用力 S_4 將如第272a圖所表示的情形，取鉛垂方向。 故考察 B 點平衡，可得

$$S_2=1{,}366\,P(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$S_3=1{,}366\,P(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$$S_4=P(-0{,}866+1{,}890\cos\alpha)$$

210. 第273a圖中，一個重 W 的立方體放在斜面上；斜面角是 α。 立方體的尺寸足夠使它的滑動先於翻倒。 接觸面間的摩阻角 φ 比斜面角 α 大。 假使在立方體的中心加一如第273a圖所畫的水平力 P，使立方體在斜面橫方向將開始滑動，試求 P 力的大小應等於多大？

解： 立方體將開始沿水平方向滑動時，它是在重力 W，作用力 P 和斜面的反作用力 R 三個力作用下平衡。 三力要成爲平衡，它們的作用綫自然必須在同一平面內並且相交於一點。 此外，斜面反作用力 R，因立方體即將開始滑動，故必定是跟斜面法綫構成等於摩阻角 φ 的交角。 這樣，三個力的作用綫便完全確定。

定立方體中心爲原點，斜面法綫爲 z 軸，平行斜面的水平綫爲 y 軸。 投影各力於 z 軸方向，可得

$$R\cos\varphi = W\cos\alpha \qquad (e)$$

再投影各力於斜面平面上，得到各力投影在這一平面上構成的平衡力系如第 273b 圖。我們考察這一平面力系，就知道：

$$R^2\sin^2\varphi = P^2 + W^2\sin^2\alpha \qquad (f)$$

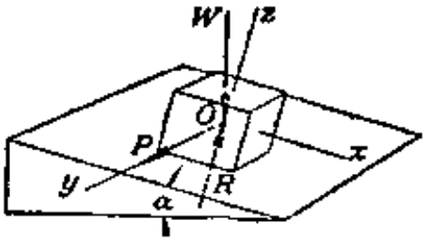
消去 (e)，(f) 兩式中的 R，得

$$P = W\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \qquad (g)$$

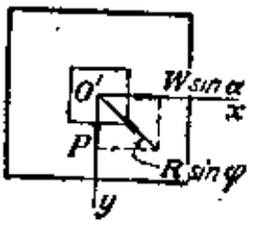
其中 $\mu = \mathrm{tg}\,\varphi$ 就是立方體和斜面間的摩擦係數。 假使 $\alpha=\varphi$，由 (g) 式可知 $P=0$。假使 $\alpha=0$，斜面變成一個水平平面，那按 (g) 式就得到 $P=\mu W$。

211. 設想第 271 圖中，底層是三個「半球體」；它們半徑都是 r，重量都等於 $Q/2$。 這三個「半球」伏在水平平面上，靠水平平面上的摩擦力維持它們互相接觸的位置，不需要再用繩子圍繞住。 上層仍舊是一個重 Q 的光滑圓球；圓球半徑是 r。 試問三個「半球」和水平平面間的摩擦係數 μ 至少要等於多大，才能平衡？

(解：$\mu \geqq \frac{\sqrt{2}}{5}$)

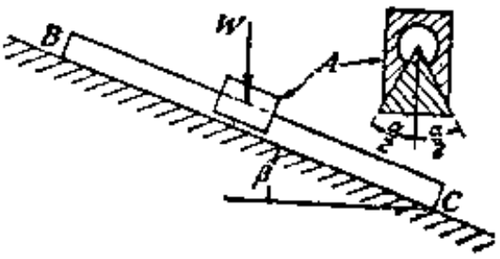


(a)



(b)

第 273 圖



第 274 圖

212. 一個微小的方塊 A 重 W，跨在一根三角形切面的 BC 桿上如第 274 圖。設 BC 桿的水平綫仰角等於 β 時，方塊 A 就將開始滑動，試求方塊 A 和 BC 桿間的摩擦係數 μ 等於多大？

(解：$\mu = \mathrm{tg}\,\beta\sin\frac{\alpha}{2}$)

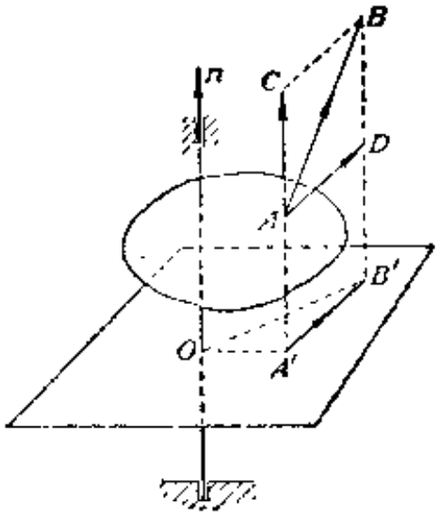
40. 力對於軸綫的力矩

一個力有使它作用的物體發生繞某一「軸線」旋轉的傾向的「作用」。 測量「力」的這種作用的尺度就叫做這「力」對於「軸線」的**力矩**。 例如，第 275 圖中一個可以繞 On 軸線自由旋轉的物體上有一 $\overline{AB}$ 所代表的「力」作用在 A 點。 假使把這個「力」分解成爲平行和垂直於 On 軸的分力 $\overline{AC}$ 和 $\overline{AD}$，我們就很顯然的可以看到，兩分力中只 $\overline{AD}$ 分力才有使物體繞 On 軸發生旋轉的「作用」。 因此，我們規定：

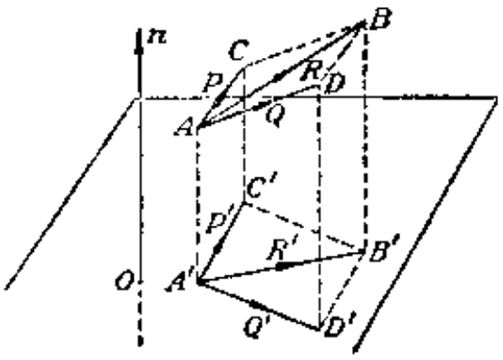
「一個力對於一軸線的力矩」就等於「這力在垂直於軸線的平面上的投影」對於「軸線跟此平面的交點」的力矩。故第 275 圖中 $\overline{AB}$ 對於 On 軸的力矩也就完全跟 $\overline{AB}$ 在 $OA'B'$ 平面中的投影 $\overline{A'B'}$ 對於 O 點的力矩相同，同樣等於圖中 $\Delta A'B'O$ 面積的兩倍。

關於力矩的正負，我們先規定 On 軸沿箭頭所指的方向爲正，然後，按照右旋螺絲法則來判斷；假若一個「力」所要產生的旋轉會使右旋螺絲沿 On 軸的正方向前進，那它對 On 軸的力矩是正的；否則，就是負的。按照這一法則，可知第 275 圖中 $\overline{AB}$ 對 On 軸的力矩是正的。

根據以上力對於軸線的力矩的定義，我們知道，一個力的作用線假使跟軸線平行或通過軸線，那它對軸線的力矩就必定等於零。此外，還知道，一個力對於一定點的力矩實際上跟這個力對於「過定點而垂直於定點和力作用線所決定一平面的軸線」的力矩完全是一回事。



第 275 圖



第 276 圖

力矩合成定理的引伸 假使如第 276 圖把 P，Q 兩力和它們合力 R 所構成的力平行四邊形 $ACBD$ 投影到一個垂直於 On 軸的平面上去，我們就又會得到一個新平行四邊形 $A'C'B'D'$。可見，P 和 Q 在一平面上的投影的合力也就等於它們合力在同平面的投影。根據以前的力矩合成定理和以上力對於軸線力矩的定義，我們馬上可以推斷出來：兩個共點力 P，Q 對於任意一根軸線的力矩代數和必等於它們合力對同軸的力矩。在 § 38 中我們已經知道，隨便多少個的空間共點力都可以連續應用力平行四邊形一步一步把它們合成爲一個合力。因

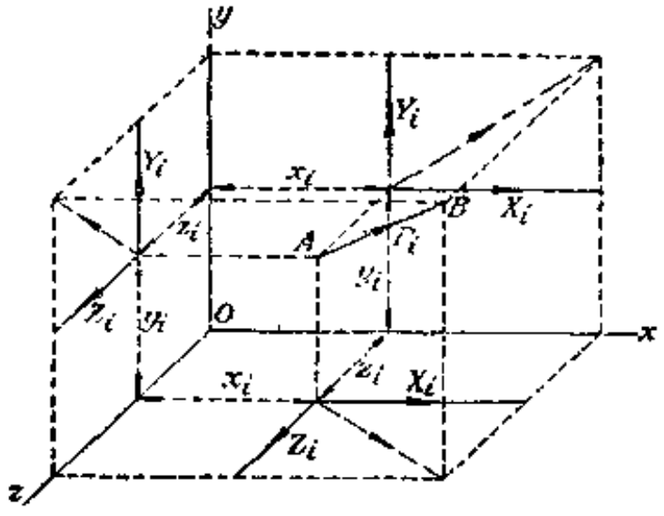
此，我們可以在每一合成步驟引用一次兩個力的力矩合成定理，最後，就可得到這樣一個最普遍的力矩合成定理：**任何一個空間共點力系對於一根軸綫的力矩代數和必定等於這力系的合力對同軸的力矩**；假設 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 各力是一個空間的共點力系，$(M_n)_i$ 是力系中任一 F_i 力對 On 軸的力矩，M_n 是這力系的合力對同軸的力矩，就可得

$$M_n = \sum_{i=1}^{i=n} (M_n)_i \tag{a}$$

計算一個靜力學問題，通常總選三個正交坐標軸 x, y 和 z 作爲「力矩軸線」。因此，任何一力 F_i 對三個坐標軸的力矩最好能應用固定公式來計算。第 277 圖中，我們選定各坐標軸 x, y, z；令 $\overline{AB}$ 代表的 F_i 力在這三坐標軸上的投影分別是 X_i, Y_i, Z_i，作用點 A 的坐標是 x_i, y_i, z_i；這樣，F_i 力對 x, y 和 z 三軸的力矩公式顯然就是：

$$\left.\begin{aligned} (M_x)_i &= Z_i y_i - Y_i z_i \\ (M_y)_i &= X_i z_i - Z_i x_i \\ (M_z)_i &= Y_i x_i - X_i y_i \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

其中各力矩值的正負號自然仍按「右旋螺絲法則」決定。

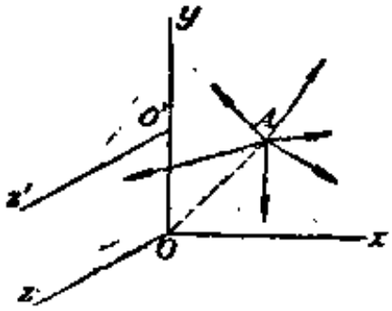


第 277 圖

41. 力矩法

我們由 § 40 中的 (a) 式可以推斷：在以下三種情形下一個空間共點力系對於力矩軸線的力矩代數和必然將等於零。這三種情形是：(1)這一力系的合力作用線恰好通過力矩軸線。(2)這一力系的合力作用線恰好跟力矩軸線平行。(3)這一力系的合力等於零；它是一平衡的

力系。對於決定一個空間共點力系是否平衡的問題，我們攷察這三種可能的情形顯然非常有用。例如第278圖中的一個作用在A點的空間力系。我們假使任意選定一個坐標原點O，取Ox，Oy和Oz作爲三個正交坐標軸，使A點不在三軸所成的三坐標平面的任何一平面中，那就可以應用§40的(b)式來計算力系對於x軸和y軸的力矩代數和。如果這兩個代數和完全都等於零，很顯然的，這一力系的合力如不等於零就必定是作用線恰巧在OA直線上；因爲合力作用線決不能同時跟x，y兩根軸線平行，它的合力如不等於零自然非通過兩軸的交點O不可。之後，我們再任意選定一根既不跟OA平行又不跟OA相交的直線$O'z'$作爲力矩軸線，計算力系對$O'z'$的力矩代數和。假使這代數和仍然是等於零，當然，力系合力就非等於零不可。因此，可得：



第278圖

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n}(M_x)_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n}(M_y)_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n}(M_z')_i=0\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

這三方程式就是一個空間共點力系的平衡條件，它們跟§40的(21)式中三方程式作用完全相同。以下我們舉幾個例子說明它們的用途。

例題和習題

213. 試求以前第269圖中支桿AB的桿力。

解：A處梢子是在S，S，S_1和P四個力作用下平衡。取CD作爲力矩軸線，使兩未知的S力可以不考慮，可得

$$-P\cdot AE+S_1\cdot EF=0$$

故
$$S_1=P\frac{AE}{EF}=\sqrt{2}P$$

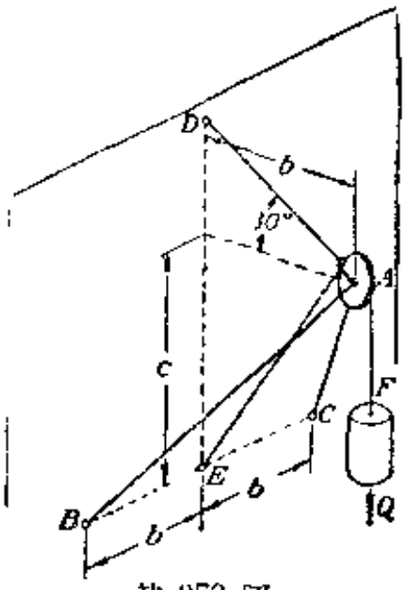
214. 第279圖中，滑輪A，半徑等於a，由二支桿AB和AC及一拉桿AD連接在牆面上的B，C，D三點。EAF是一根跨過滑輪A的軟繩，一頭固定在牆上E點，另一頭掛一重體Q。設$Q=100$kg，$a=6$cm，$b=48$cm，$c=90$cm，試求拉桿AD中的張力S。

(解：$S=53$kg)

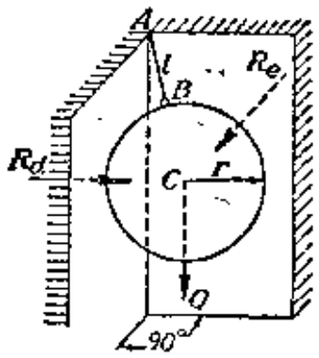
215. 一個半徑等於 r 的圓球由長 l 的 AB 繩掛在牆角上如第280圖。不計摩擦力，試求 AB 繩中的張力 S。

解：因不計摩擦力，故兩牆面對圓球的反作用力都是通過球心的水平力。圓球上一共有四個力，三個力既然都通過球心，第四個力自然一定也要通過球心，否則它會產生對過球心軸綫的力矩使圓球不能平衡。所以 AB 繩的長軸是通過球心的直綫。由此，可得

$$S=Q\frac{l+r}{\sqrt{l^2+2rl-r^2}}$$



第 279 圖



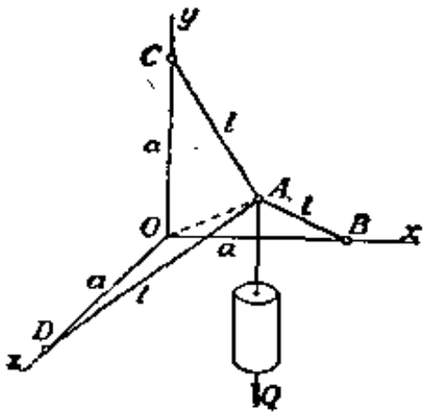
第 280 圖

216. 第281圖中 AB, AC 和 AD 三桿件的長度都等於 l。A 點和坐標原點 O 各在平面 BCD 的一方。A 處所掛的物體重 Q。設 $l>\sqrt{\frac{2}{3}}a$，試求 AC 桿的張力 S 等於多大？

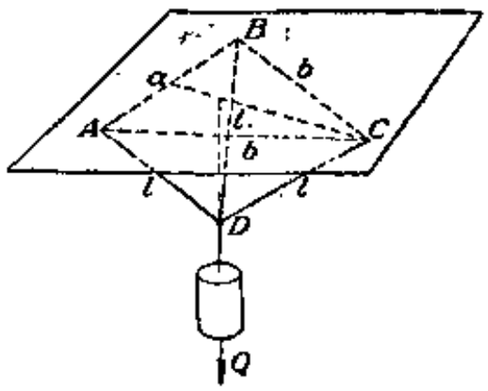
$$\left(\text{解：}S=+\frac{Ql}{3a}\cdot\frac{2\sqrt{3l^2-2a^2}-a}{\sqrt{3l^2-2a^2}}\right)$$

217. 第282圖中 AD, BD 和 CD 是長度都等於 l 的軟綫。它們的一端 A, B 和 C 都固定在一水平平面的下面。A, B 和 C 三點的位置恰好在水平平面上構成一個等腰三角形；BC, AC 兩邊的長度等於 b，AB 邊的長度等於 a。三根綫的另外一端 D 結成一點，掛一個重量等於 Q 的物體。設 $Q=10$kg，$l=20$cm，$a=10$cm，$b=15$cm，試求 CD 綫內的張力 S 等於多大？

(解：$S=4{,}76$kg)



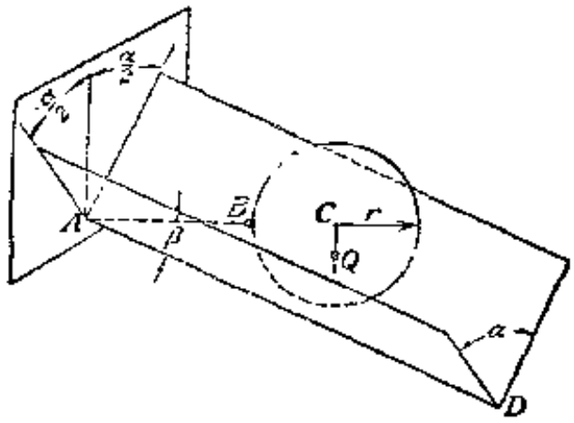
第 281 圖



第 282 圖

218. 第283圖中是一個半徑等於 r 的圓球 C 放在一個 V 形槽內。槽軸與水平線間的夾角是 β，圓球由一根水平方向的 AB 繩連接在槽底 A 處。摩阻力可以不計。試求 AB 繩內的張力 S 等於多大?

(解: $S=Q\,tg\,\beta$)



第 283 圖

42. 空間桁架

一系桿件由它們各自兩端的互相連接，組合成功一個剛架，就叫做空間桁架。空間桁架在結構工程中應用範圍極廣，像鋼架建築，輸電塔，起重機等等都是屬於這種結構形式。

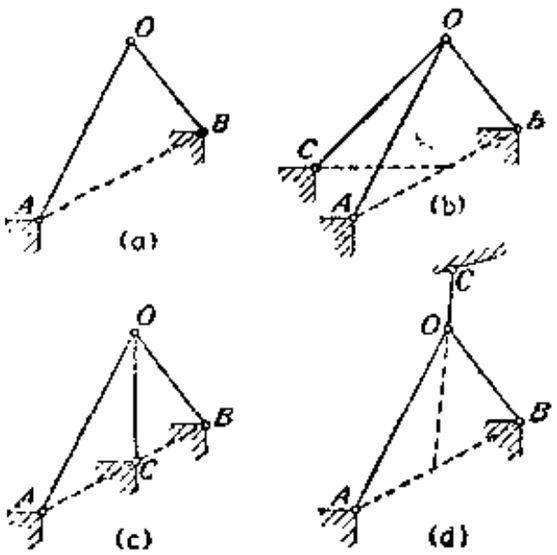
對於用鉸鏈梢子連接而成的桁架，我們需要有一個鑑定它「剛性」的標準。建立這一標準應先研究一下空間一點的「完全約束」問題。第284圖中，圖 a 的 O 點由兩個鉸鏈桿 OA, OB 連接在基礎上。這樣，O 點除開在 AOB 平面中受到「完全約束」外，它還可能在空間繞 AB 軸線旋轉。要限制住這一旋轉的可能，必須再加裝一個不在 AOB 平面內的鉸鏈桿 OC 如圖 b。

假使把 O 點連接在基礎上的三桿件，是共同在一個平面內，那 O 點的「完全約束」還是不能實現的。例如，圖 c 中的情形；三桿件的 A, C 和 B 端都同在一根直線上，因此，跟圖 a 的情形一樣，O 點還可以毫無限制地繞這直線旋轉。假使三桿件的一端並不同在一直線上，但是它們的長軸仍然同在一平面中，像圖 d 的情形一樣，顯然，O 點還可能因三桿件長度的微小變化而發生顯著的垂直於 ABC 平面的運動。因此，也不能構成 O 點的「完全約束」。

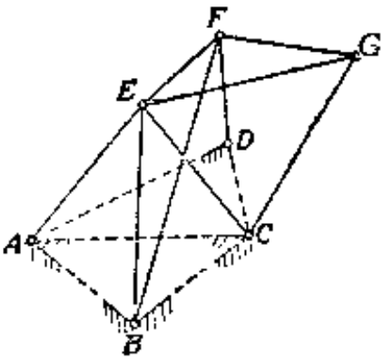
可見一個空間點的「完全約束」必須由長軸不在同一平面的三桿件把這點連接在基礎上才能實現，而且這樣三桿件也足夠使「完全約束」

實現。

空間一點的「完全約束」方法找到後，我們就可以有一個簡單的辦法把一系桿件組合成功一個剛性結構。第 285 圖中，我們先用 AE、BE 和 CE 三鉸連桿把鉸鏈 E 完全約束起來。E點固定後，鉸鏈 F 的完全約束又可以由 BF，EF 和 DF 三鉸鏈桿來完成。E，F 現在已經跟 A，B，C，D 各點一樣，同樣是空間的固定點。所以由 EG，FG 和 CG 三鉸鏈桿組成的鉸鏈 G 也一定是受完全約束的一個固定點。這樣



第 284 圖

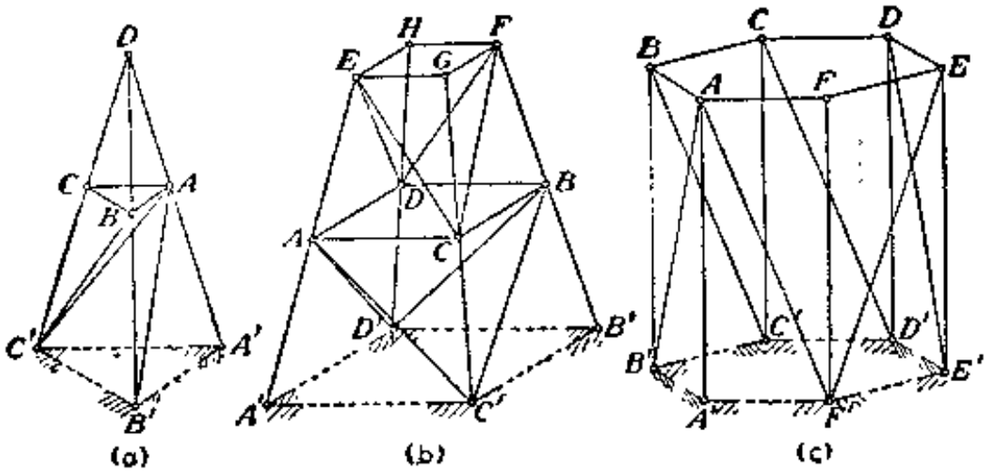


第 285 圖

的構成過程，當然可以無限制地繼續下去。因此，我們可得到如下的法則：**一個剛性的空間桁架的構成，必然可以由三個不同在一平面的鉸鏈桿跟基礎連接以構成第一個節點。之後，繼續加裝三個又三個不同平面的鉸鏈桿於已得的節點或其他固定點上，就可相繼組成一個個的新節點。**第 286 圖中各桁架，它們的結構都是符合這一法則的。

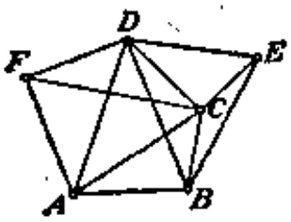
一般說來，這樣的空間桁架的剛性是跟桁架與基礎間的連接情形不無關係的。例如第 286c 圖的桁架，它內中的六邊形 $ABCDEF$ 就並不是一個平面剛架。整個系統之所以能成爲剛性結構完全靠這一六邊形跟基礎上 A'，B'，C'，D'，E'，F' 六點的連接。圖 b 桁架中的 $ABCDEFGH$ 部份也是這個情形，不過不及圖 c 明顯。

現在再討論跟基礎連接無關的剛性空間桁架要如何組成。根據以

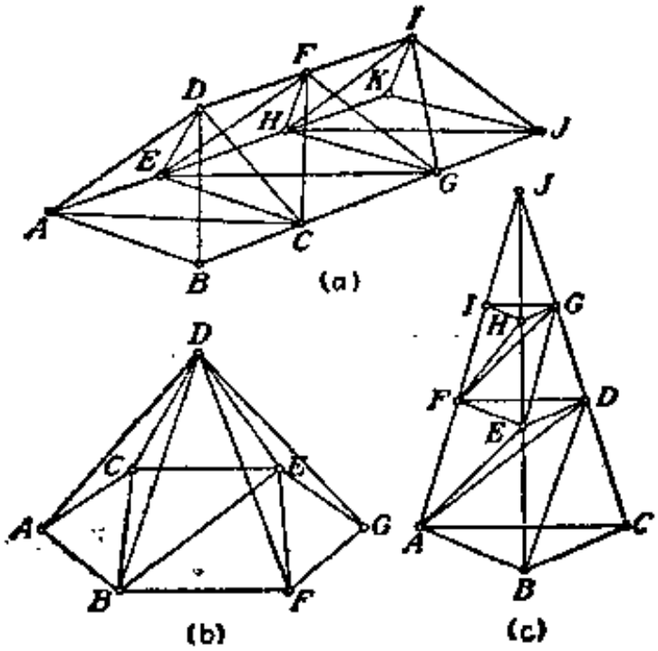


第 286 圖

上討論，如果先由三個鉸鏈桿構成一個三角形 ABC（第287圖）開始，之後，加裝 AD，BD 和 CD 三桿件以建立第四個節點，那所成的四面體 $ABCD$ 顯然是一個剛性的空間桁架。在 $ABCD$ 四面體上面，我們若另外加裝 BE，CE 和 DE 三桿件組成新節點 E，又可以得到一個剛性的空間桁架 $ABCDE$。在這一桁架上再加裝 AF，CF 和 DF 三桿件，又可得一個剛性空間桁架 $ABCDEF$。這種加裝方法當然可以無限制地繼續使用，所以我們得到這樣一個法則：**一個剛性的空間桁架的構成必然可以由三個鉸鏈桿組成的三角形開始，然後，繼續加裝三個又三個的不同平面的鉸鏈桿於已成的節點上以構成一個個的新節點。**第288圖內的各桁架就是結構情形符合於這一法則的幾個例子。每一桁架的構



第 287 圖



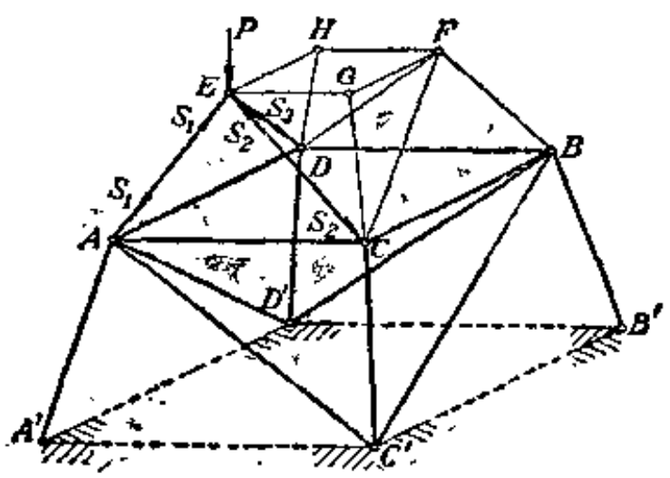
第 288 圖

成都是由圖中ΔABC開始，然後按照字母次序依次組成它們的各節點。這類桁架的剛性完全跟它與基礎間的聯系無關。

任何屬於受「完全約束」的剛性結構的空間桁架，如果在各節點受「力」的作用，它的各桿件中就會產生長軸方向的內力（簡稱桿力）。桿力的決定就叫做**桁架分析**。對於空間桁架的分析，我們，像處理平面桁架一樣，也做出以下幾個理想情形的假定：(1) 桁架中所有桿件的本身重量都可以完全不計，(2) 所有桿件都是由兩端的鉸鏈相互連接起來，鉸鏈的摩阻力可以完全不致慮，(3) 桁架上的所有外力都只作用在各節點上。根據這些假定，桁架在作用力作用下，它各桿件就只會受到拉或壓的作用；不會受到彎曲作用。因此，各桿件對兩端鉸鏈的反作用力一定是作用線跟各自的長軸相合，從而每一個節點上的「力」都是一個空間共點力系，所以我們可以直接應用§39和§41所討論的共點力系的平衡條件來分析這種桁架。

43. 節點分析法

致察第289圖中的桁架，其中各桿件的組合是符合§42中第一個法則的。以A，B兩節點開始，該兩節點各以三個鉸鏈桿相團結於基礎上。至於其他各節點構成的先後完全按字母的次序。每一個節點都是由三個不在同一平面的鉸鏈桿連接在三個固定點上，故構成的是一個剛性的空間桁架。假使有一鉛垂力P作用在鉸鏈E上，那有些桿件就必然會有桿力發生。現在我們來分析這一桁架如下：



第 289 圖

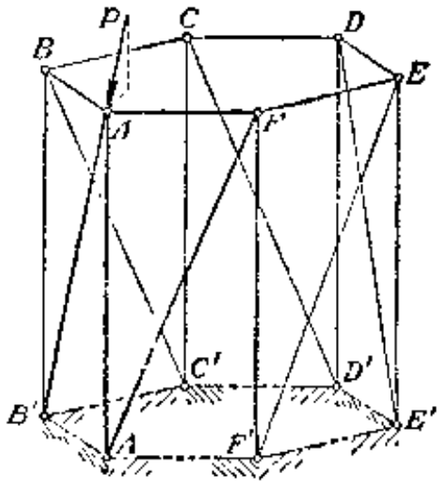
首先，最好把桿力等於零的桿件標誌出來，使得問題簡單一些。這一步工作根據§39中最後幾個結論去做，是很容易的。例如，致察節

點 G，我們就發現：交會在這一節點只有三個不在同一平面的桿件，而且節點上又沒有外力作用，因此三桿件的桿力都非等於零不可。同樣情形的還有節點 H 以及去掉沒有桿力各桿件後的節點 F。所以交會在這些節點上的各桿件都是桿力等於零。這些無桿力的桿件當然可以在想像中把它們去掉，圖中因此已用細線把它們標誌出來，剩下來用粗線所畫的各桿件還需要加以分析。

現在先觀察鉸鏈 E 的平衡。令 S_1，S_2 和 S_3 分別代表桿件 EA，EC 和 ED 的桿力。這些桿力只要桁架的尺寸確定，可以很容易的由(21)或(22)式或用圖解法決定。此後，我們應用(21)或(22)式依次攷察 C，B 和 A 各鉸鏈，就可完全求出其餘各桿件的桿力。

以上的桁架分析方法叫做**節點分析法**。一般說來，應用這一方法來分析桁架，必須開始時就至少能找到這樣一個節點，它上面只有三個「未知桿力」的桿件；在這三個未知桿力決定後，又至少能發現同樣的一個節點，它上面也只有三個「未知桿力」的桿件；並且，以後繼續不斷有這樣一個情形存在。這是很明顯的，任何一桁架如果它的結構是符合§42中的第一法則的，那就不成問題可以完全應用節點分析法來分析。同樣，任何一空間桁架如果它是按照§42中的第二法則構成，它上面的一切外力包括支點反作用力在內，在分析之前又都已知道，那末也可以完全應用節點分析法來分析。至於它的支點反作用力的一般的決定方法，我們在以後§51和§52中再討論。

開始分析時，如果三桿件所成的節點一個都找不到，照理是無法應用節點分析法的。不過，在特殊情下，有時還是可以應用。例如第290圖的桁架。這桁架跟第286c圖所畫的不同的地方只是一根 AF' 桿換成了 $A'F$ 桿。這桁架中雖然沒有由三個桿件鉸結而成節點，但是我們可以先觀察鉸鏈 B 的平衡。它上面有四個桿件的反作用力在作用，其中三個力在同一平面（就是 CBB' 平面），可見第四個力，也就是 AB 桿的桿力必定等於零。同樣理由，依次攷察 C，D，E 和



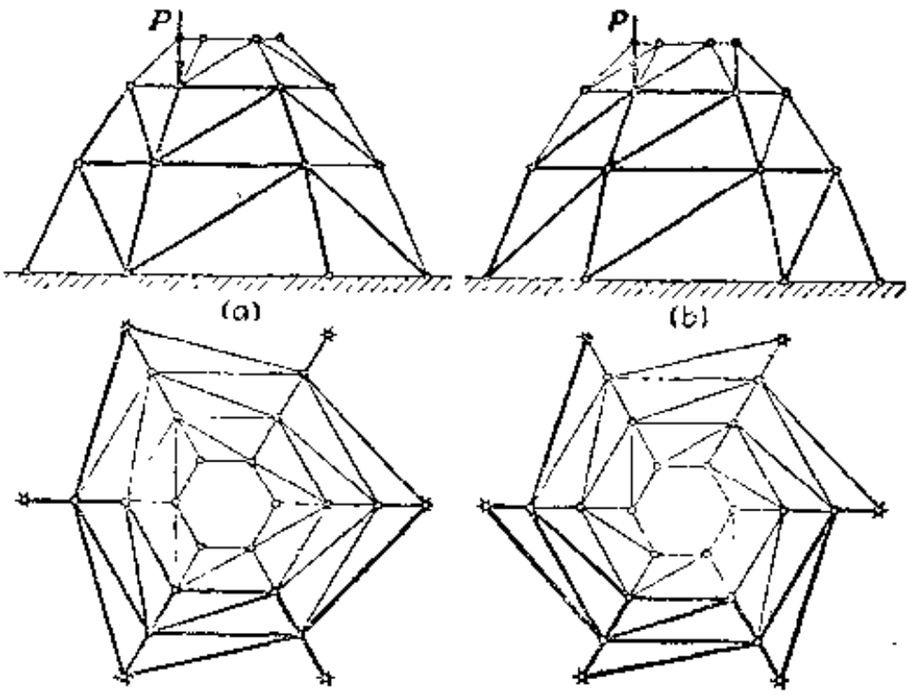
第 290 圖

F 各節點後，又可發現桿件 BC, CD, DE 和 EF 都沒有桿力。設想把這些沒有桿力的桿件由桁架中拿掉，我們就將看到，在節點 B, C, D 和 E 上都只有長軸不相重合的兩個桿件，因此，它們的桿力也都非等於零不可。這樣，整個結構中就只剩下粗線所畫的幾個桿件桿力還沒有決定。對於這些桿力，我們只要依次攷察鉸鏈 A 和 F 的平衡，就可以很容易地確定。

例題和習題

219. 試研究一下第 291 圖中的兩桁架，把它們中沒有桿力的桿件都標誌出來。

解： 圖中細綫畫的桿件都沒有桿力。



第 291 圖

220. 第 292a 圖中，一個空間桁架受如圖的三個鉛垂力 P 作用。圖中 ABC 是一個等邊三角形，邊長等於 a。此外，$A'B'C'$ 是一個邊長等於 $2a$ 的等邊三角形。兩水平平面 ABC 和 $A'B'C'$ 間的鉛垂距離是 $2a$。試求桁架中各桿件的桿力。

解： 先觀察節點 C。它上面有 1，2 和 3 三個桿件。假定它們都是受拉桿件，畫出節點 C 受到的反作用力 S_1, S_2 和 S_3 如圖。定 C 點爲坐標原點，令 y 軸取鉛垂方向，x 軸等分 $\angle ACB$。投影各力於 y 軸方向，得

$$-P-S_1\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=0$$

故 $S_1=-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}P=-1{,}04\,P$，負號表示桿件 1 不是受拉而是受壓，$S_1$ 的眞正方向恰巧跟圖上畫的相反。再投影各力於 z 軸方向，可得

$$S_2\sin30^\circ - S_3\sin30^\circ = 0$$

故 $S_2 = S_3$。 最後，投影各力於 x 軸方向，又可得

$$-S_1\frac{1}{\sqrt{13}} + S_2\frac{\sqrt{3}}{2} + S_3\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

故

$$S_2 = S_3 = -\frac{P}{6}$$

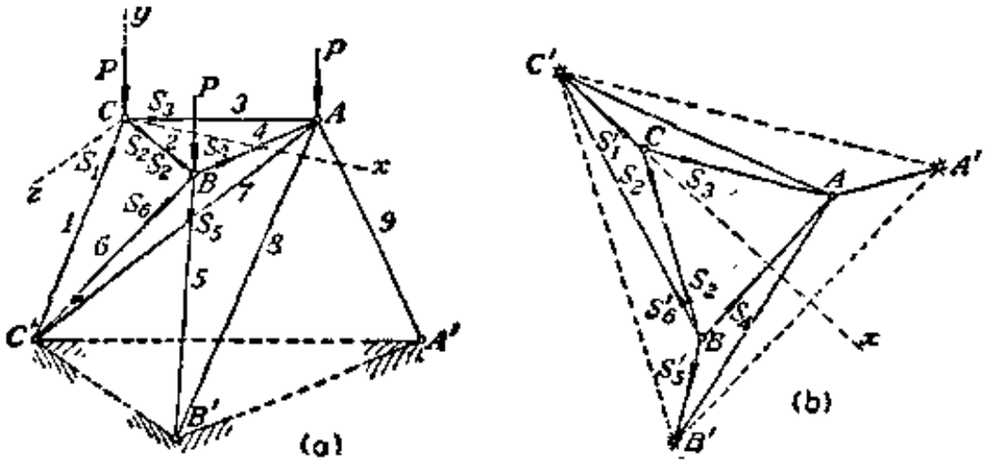
負號表示 2 和 3 是兩個受壓桿件。

S_2 決定後，我們就可觀察節點 B。 它上面只有三個「桿力未知」的桿件。 把各桿件對節點 B 的反作用力替代出各桿件後，我們得到一個平衡的空間共點力系。 各力對於任意一軸綫的力矩代數和都應該等於零，取 $C'D'$ 作爲「力矩軸綫」，使通過軸綫的 S_5 和 S_6 以及在 B 點平行於這軸綫的 S_2 各未知力可以不考慮，就可得到

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_4 \cdot 2a + P \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = 0$$

故 $S_4 = -\frac{P}{6}$，是壓力。 因 $S_2 = S_4$，故它們在 B 點的合力必定在包含 B 點外力 P 和桿件 5 的鉛垂平面內。 這樣，節點 B 就變成只受四個力作用，而且其中三個力同在一個平面中，可見 $S_6 = 0$。 想像把桿件 6 由桁架中拿掉，我們立刻就看到，節點 B 的受力情形完全跟節點 C 相同。 因此，$S_5 = S_1 = -1{,}04\,P$。

至於桿件 7,8 和 9 的桿力，考察節點 A 的平衡後，就可得 $S_7 = S_8 = 0$ 和 $S_9 = -1{,}04\,P$。



第 292 圖

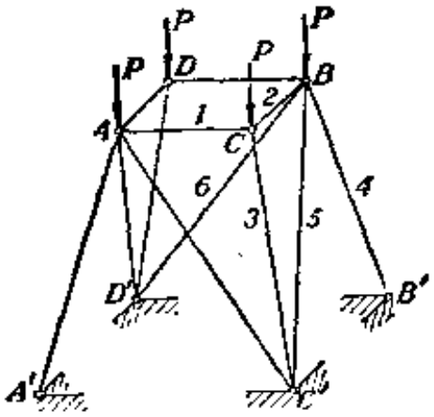
221. 第 293 圖中 $ACBD$ 和 $A'C'B'D'$ 是各邊互相平行的兩個水平正方形，邊長分別是 a 和 $2a$。 它們相互的鉛垂距離等於 $2a$。 假設有四個鉛垂力 P 作用在這樣一個桁架上如圖，試求桿件 1,2,3,4,5 和 6 的桿力。

(解: $S_1 = S_2 = -0{,}25P$, $S_3 = S_4 = -1{,}06P$, $S_5 = S_6 = 0$)

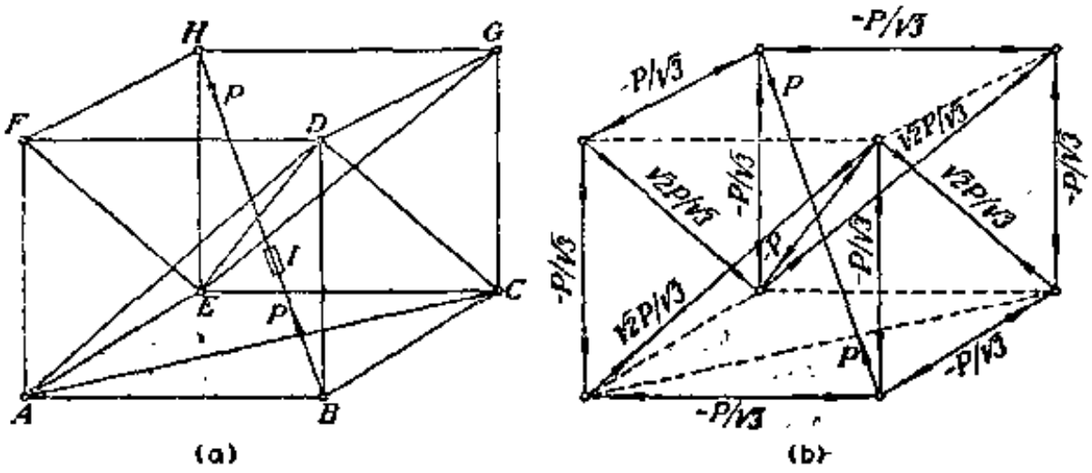
222. 第 294a 圖中是一個正方體形狀的桁架。 在它的一根對角綫方向的桿件 HB 內有一個螺旋套管。 假使旋緊這一套管使桿件 HB 中產生一等於 P 的張力，試求其他各桿

件內的桿力。

(解：見第29:b圖)



第 293 圖



第 294 圖

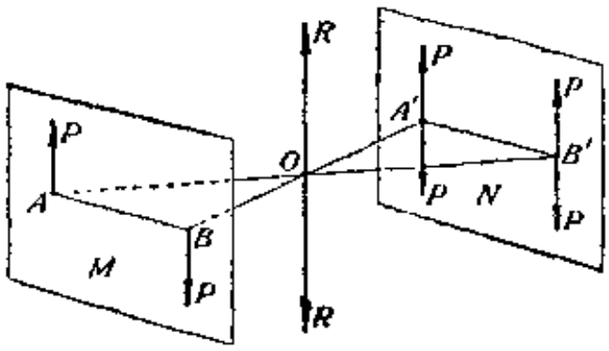
223. 假使在第286a圖的桁架上有一水平力 $P=1000$kg 任意取一個方向作用在鉸鏈 D 上，試決定這桁架中有那些桿件，桿力不等於零？

(解：$AD, BD, CD, AA', BB', CC'$)

第六章　空間力偶和平行力系

44. 平行平面上的力偶

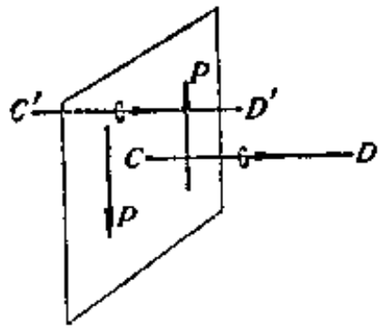
在以前§22中討論一平面上的力偶時，我們已經證明：只要力偶的力矩保持不變，那這一力偶在作用平面中的變換或移動就絲毫都不會改變力偶對所加物體的靜力作用。現在要進一步證明：**一個力偶，即使作用平面發生平行於本身的移動，它對於所作用剛體的靜力作用也毫不改變。**例如，第295圖中一個作用在平面 M 上的 P 力力偶，我們即使把它移到平行於 M 的平面 N 上，它的作用也不會受到影響。



第 295 圖

這一論斷的證明如下：我們在平面 N 上取一直線 $A'B'$ 平行於原來力臂 AB，並且跟它相等。在 A'，B' 兩點各加一對跟 P 力平行而相等的相等相反力 P。這兩對力自成平衡，加入後並不影響原來力偶的作用。現在把 A 和 B' 點兩個向上的 P 力合成爲作用在 A，B' 連線中點 O 的向上 R 力；把 B 和 A' 點兩個向下的 P 力合成爲作用在 B，A' 連線中點 O 的向下 R 力。AB' 和 BA' 自然是相交於中點 O 處，所以 O 點的兩 R 力的作用將互相抵消，可以由力系中拿出來。剩下來的就只是 A' 點的向上 P 力和 B' 點的向下 P 力。這兩個 P 力構成一個平面 N 上的力偶。這力偶等於原來平面 M 上的 P 力力偶；它們的作用（靜力作用）完全相同。因此，證明了：一個作用在剛體上的力偶對於剛體的作用，即使是力偶的作用平面發生平行於本身的移動，也不會改變。關於「力偶」的這一論斷，很顯然，是跟力的傳導定理（§4）相像的。

根據以上討論，**一個「力偶」完全決定於以下三因素：(1)力偶的力矩大小。(2)力偶平面在空間的方向(這方向可由平面的法線方向來表示)。(3)力矩在力偶平面上所指的旋轉方向，也就是力偶的方向。**這三因素可完全由一向量來表示。假使已知一 P 力力偶(第 296 圖)，我們就可以在力偶平面上任意選定一 C 點，引這一平面的法線 CD，並按比例尺量出一段 CD，令這長度等於力偶的力矩，然後，按右旋螺絲法則畫一箭頭來表示力矩的方向。這樣得到的向量 CD 就完全決定了已知的「力偶」。因爲力偶作用平面可以作平行於本身的推移，所以任何平行於 $\overline{CD}$ 的向量 $C'D'$，如果長度相等，就代表同一「力偶」。



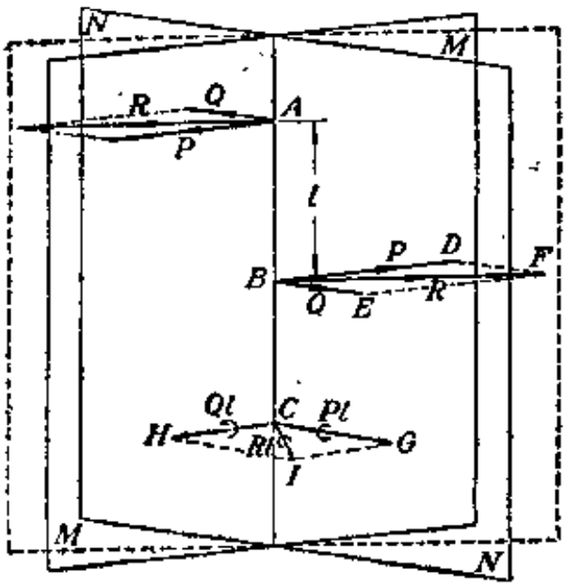
第 296 圖

這種用向量表示力偶的方法在研究方向不同的空間力偶的問題中非常有用。以下討論中，像 $\overline{CD}$ 或 $\overline{C'D'}$ 這樣的向量我們都叫做**力矩向量**來跟力向量區別。

兩平行平面上的相等力偶可以由同樣的力矩向量來代表。若干個作用在平行平面上的力偶也可以由它們的合成力偶來代表；合成力偶的力矩就等於各力偶的力矩代數和。這是因爲各力偶可以一起推移到同一平面上，從而可以應用 § 22中方法把它們合成爲一個合成力偶。

45. 相交平面上的力偶

現在觀察兩個分別作用在平面 M 和 N 中的力偶 Pl 和 Ql (第297圖)。因爲一個力偶，只要力矩不變，就非但可以在作用平面上任意移動，而且力臂的長短也可以任意改變，所以我們在任何情況下都可以把 Pl, Ql 兩力偶的力臂共同移動到平面 M, N 的交線上，並且令它們的長度一起都等於 l；這就是說，使兩力偶共同以圖中的 AB 作爲力臂。根據力平行四邊形原理，A 和 B 點上的 P, Q 力可以合成爲兩個大小相等、方向相反的合力



第 297 圖

R。這兩個 R 力構成的力矩等於 Rl 的力偶，就是原來兩力偶合成的結果。

Pl 及 Ql 兩力偶這樣的合成結果，還可以用 § 44 中的力偶的向量表示法來求到。我們在平面 M,N 的交線上任意選定一個 C 點，從 C 點依次引長度等於 Pl 及 Ql 的 $\overline{CG}$ 和 $\overline{CH}$ 垂直於平面 M,N 分別代表這兩力偶。把 $\overline{CG}$ 和 $\overline{GH}$ 合成爲合成向量 CI。所應用的平行四邊形 $CGIH$ 跟力平行四邊形 $BDFE$ 相似，因此，可以看作是由 $BDFE$ 繞 AC 線旋轉 90°，並且各邊放大了 l 倍而成。這也就是說，CI 等於 Rl 並垂直於力偶 Rl 所在的平面，亦即代表 R 力力偶的「力矩向量」。可見：要合成兩個力偶，只要把它們的「力矩向量」幾何相加，就可以得到合成力偶的「力矩向量」。

假使力偶的數目很多，我們應用以上向量相加方法先求出其中兩個的合成力偶，然後，又把第三個力偶加入進去，這樣連續舉行向量相加就可以把它們全部合成爲一個合成力偶。在如此合成過程中，我們會看到：代表合成力偶的力矩向量實際上也就是所有各力偶的力矩向量的幾何和。這些向量構成一個空間的力矩多邊形；多邊形的封閉邊代表合成力偶。

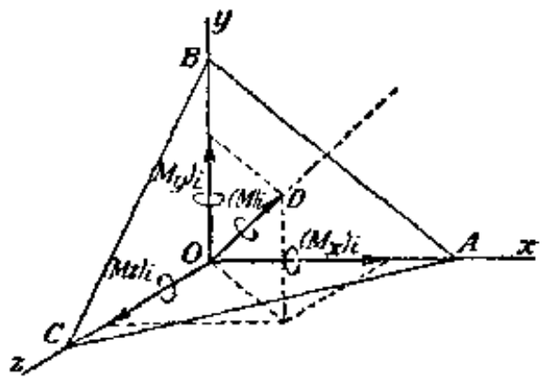
假使若干個力偶共同構成平衡，那它們力矩向量的「幾何和」自然必須等於零；否則它們就能夠化爲一個合成力偶而不可能平衡。因此，**一個平衡的「力偶」系，它們力矩向量幾何相加必須共同構成一個封閉的空間多邊形。**

一個已知力偶自然也可以由力矩向量的分解來分解爲幾個分力偶。分解的各種情形完全跟 § 38 中所討論的力的分解相同。這裏不再重複討論。

46. 力偶的投影法

應用 § 45的力矩向量幾何相加方法來決定力偶系的合成力偶並不簡便。因爲應用這種方法，需要像空間共點力的情形一樣，處理力矩向量所構成的空間力矩多邊形在兩個正交平面上的投影。不過，也正因爲力矩和力在向量表示法方面的完全相像，所以 § 39 中討論的投影法對於處理力偶問題也同樣是非常有用的。

例如，平面 ABC 中有一力矩等於 M_i 的力偶(第298圖)；它的力矩向量是圖中垂直於平面 ABC 的 $\overline{OD}$。以 $\overline{OD}$ 的起點作爲原點，定坐標軸 x, y 和 z 如圖。OD 跟三坐標軸的交角是 α_i, β_i 和 γ_i。力矩向量 M_i 在三坐標軸上的投影是 $(M_x)_i$, $(M_y)_i$, $(M_z)_i$。故 $(M_x)_i = M_i \cos\alpha_i$, $(M_y)_i = M_i \cos\beta_i$, $(M_z)_i = M_i \cos\gamma_i$。這三個投影，代表力偶 M_i 在三個坐標平面上的分力偶。



第 298 圖

因爲力偶不但本身可以沿作用平面任意推移而且作用平面還可以任意作平行於本身的推移，所以任何一個空間力偶系統經常可以由一羣交會在一點的力矩向量來代表。這也就是說，我們可以完全按照空間共點力系的方法來處理任何一個力偶系。因此，一個力偶系 M_1, M_2, ……M_n 的合成力偶 M 可以由下式決定：

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^{i=n} (M_x)_i \\ M_y &= \sum_{i=1}^{i=n} (M_y)_i \\ M_z &= \sum_{i=1}^{i=n} (M_z)_i \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

合成力偶的大小是

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \qquad (b)$$

設合成力偶 M 所在平面的法線跟 x, y 和 z 三坐標軸的交角是 α, β 和 γ，那末

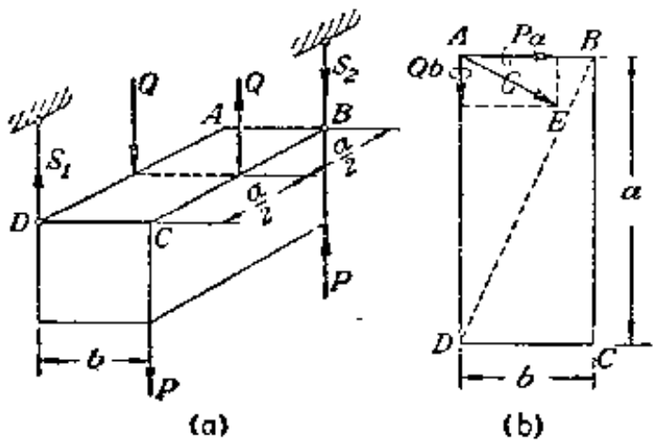
$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{M_x}{M} \\ \cos\beta &= \frac{M_y}{M} \\ \cos\gamma &= \frac{M_z}{M} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

假使一空間力偶系自己構成平衡，那根據(b)式就知道它的平衡條件是：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n}(M_x)_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n}(M_y)_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n}(M_z)_i=0\end{aligned}\right\}$$

例題和習題

224. 第299圖中 $ABCD$ 是一個密度均勻的長方體。有如圖的 Pa 和 Qb 兩力偶作用在它上面。試求長方體平衡時，圖中 P，Q 兩力大小的比值等於多少？



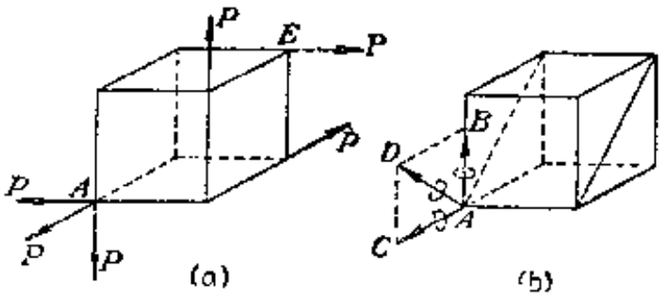
第 299 圖

解：因長方體上 B，D 兩點所受到的反作用力 S_2 和 S_1 應該構成一個作用在包含對角綫 BD 的鉛垂平面上的力偶，所以兩作用力力偶 Pa 和 Qb 所成合成力偶的力矩向量應該垂直於 BD，否則長方體不可能平衡。根據這一條件，可見

$$Pa:Qb=a:b$$

故 $P=Q$。

225. 第300圖中一個正方體上有五個相等的作用力 P 在各角點作用。試證明如果在角點



第 300 圖

E 處加一如圖中虛綫所畫的 P 力，這正方體就可以平衡。

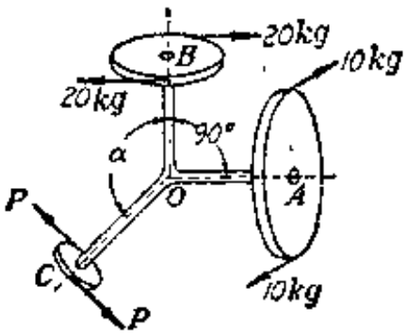
解：令 $\overline{AB}$ 代表正方體底平面上的 P 力力偶，$\overline{AC}$ 代表前平面上的 P 力力偶(第 300b 圖)。合成這兩個力矩向量得 $\overline{AD}$ 代表圖中正方體對角斜平面上的一個力偶。這力偶自然應該由 A，E 兩點的作用力 P 構成一個力偶來平衡。故證明了本題的說法。

226. 第 301 圖中 A，B 和 C 是半徑爲 $r_a=15\text{cm}$，$r_b=10\text{cm}$ 和 $r_c=5\text{cm}$ 的三個圓盤；它們各固定在垂直於盤面的三個盤軸上，(第301圖)。三盤軸同在一平面內，試根據圖中所給的作用力偶，求平衡時 C 盤力偶的 P 力以及 C 盤盤軸 OC 跟 B 盤盤軸 OB 間的交角 α。

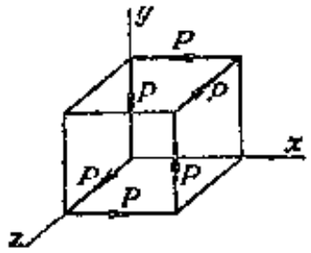
(解：$P=50\text{kg}$，$\alpha=143°08'$)

227. 六個相等的作用力 P 分別沿一個邊長 $a=5\text{cm}$ 的正方體各邊作用，如第 302 圖。設 $P=5\text{kg}$，試求這一力系的合成結果。

(解：$M=50\sqrt{3}\,\text{kg}\cdot\text{cm}$，$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$)



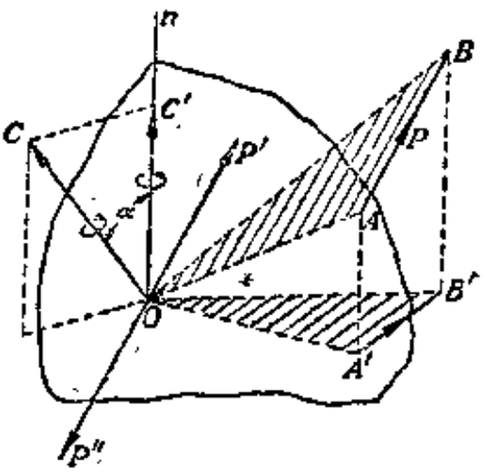
第 301 圖



第 302 圖

47. 對一點與對通過該點一軸線的力矩間的關係

現在在一個已經有一個 P 力在 A 點作用的物體上任意找一個 O 點，在這 O 點對物體加一對相等相反的力—P' 及 P''。它們的大小各與 P 力相等，作用線與 P 力平行(第 303 圖)；這兩力互相抵消，因此，毫不影響原來 P 力對物體的作用。這樣，我們便得到跟原來 P 力作用完全相同的一個三個力所成的力系。這力系，從另一方面看，我們又可以把它當作是由 O 點的單力 P' 以及一個 P 和 P'' 組成的力偶所構成的。可見：物體上的一個力在任何情形下總可以由物體上任意一點的一個單力連同一個力偶來代替。其中單力是一跟原來力平



第 303 圖

行且相等的力；力偶是由原來力和「以上所選一點上一個跟原來力相等相反的力」所構成的。

這一變換方法(指以一個力及一個力偶代替一個力的方法)對於攷察支承於一點的物體的受力情形最有用。我們可以把這種物體上所有各力一起移到支點上，整個由支點的反作用力來平衡。之後，決定物體的平衡，就只要攷察按以上變換所得到的各力偶對於物體的作用便夠了。

由第303圖可以看到，P 力對 O 點的力矩完全跟 P 和 P'' 兩力所成力偶的力矩相同。這一力矩的大小等於圖中 ΔOAB 面積的兩倍(見§14)。圖中我們用力矩向量 OC 來代表這力偶；$\overline{OC}$ 的長度等於它力矩的大小，方向按右旋螺絲法則確定。

P 力對於 O 點的力矩跟它對於過 O 點任意一軸線的力矩間的關係很簡單。根據§40，P 力對圖中 On 軸的力矩實際上也就是 P 力在 On 軸垂直平面中的投影 $\overline{A'B'}$ 對 O 點的力矩。這一力矩的大小等於圖中 $\Delta OA'B'$ 的兩倍面積。但這一 $\Delta OA'B'$ 其實就是 ΔOAB 在 On 軸垂直平面中的投影，它的面積實際上等於 ΔOAB 的面積乘上 OAB 與 $OA'B'$ 平面間夾角 α 的餘弦。α 角自然也是這兩個平面在 O 點所引法線 OC' 跟 OC 的交角。所以一個力對於任意一軸線 On 的力矩，就力矩向量來說，就等於這力對軸線上 O 點的力矩在這軸線上的投影。

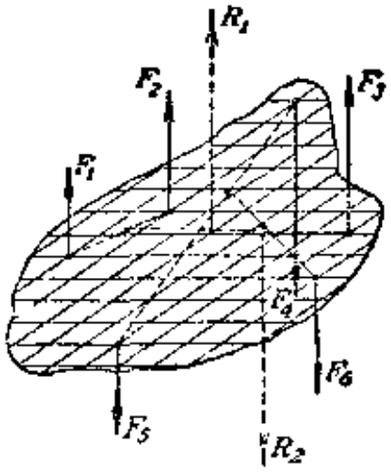
§20中說明過，兩個平行力的合力對兩力所在平面上任意一點的力矩就等於原來兩平行力對同點的力矩代數和。根據這一事實連同以上的討論，可知：**任意兩個平行力的合力對空間任意一根軸線的力矩必然等於這兩個平行力對同軸線的力矩代數和。**

48. 一般的空間平行力系

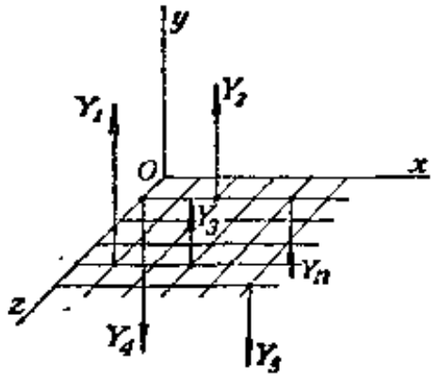
我們來觀察一個像第304圖的若干力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_6$ 所組成的一般平行力系。這些力共同作用在一個物體上；有的作用方向向上，有的作用方向向下。我們如果連續應用§20的平行力相加方法，自然很容易把其中向上各力 F_1, F_2 和 F_3 的合力 R_1 以及向下各力 F_4, F_5 和 F_6 的合力 R_2 分別決定如圖。

一般說來，這樣做下來的結果有三種不同的可能：(1)得到的 R_1, R_2 兩力是一對相反的不等平行力。因之，我們可以把這兩力按 § 21 方法合成爲一個合力 R。也就是說，原來力系可以簡化成一個單力 R。(2)得到的 R_1, R_2 兩力相等相反，但作用線不同。它們所成的力偶就是原來力系的合成結果。(3)得到的相反兩力 R_1, R_2 非但大小相等而且作用線相同。這表示原來各力是一個平衡力系。

對於任意一 n 個平行力組成的空間力系，要辨別以上三種可能，可隨便定一個原點 O，樹立三個坐標軸，令其中 y 軸跟各力的作用線平行，以 $Y_1, Y_2, \cdots\cdots Y_n$ 分別代表各力（第 305 圖）。按第 304 圖的說



第 304 圖



第 305 圖

明，假使這力系可以化爲一個合力，那合力的大小自然必等於各力大小的代數和。至於合力的作用線位置，§ 47 已說明過「兩平行力對任意一軸線的力矩代數和等於它們合力對同軸的力矩」，如果連續應用這一論斷於每一合成兩平行力的過程中，顯然可以證明：無論多少個平行力對於一根軸線的全部力矩都等於它們的合力對同軸的力矩；所以一個平行力系的合力位置可以根據這一事實來決定。如令 x_i, z_i 代表力系中任意一力 Y_i 的坐標；x, z 代表力系合力 Y 的坐標，就可得：

$$\left.\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \\ x &= \sum_{i=1}^{i=n} (Y_i \cdot x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \\ z &= \sum_{i=1}^{i=n} (Y_i \cdot z_i) \Big/ \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

設或所有各力的代數和等於零，那這一力系化爲一個合力的可能性就沒有了，只可能(1)化爲一個力偶，或(2)自成平衡。再要辨別這兩種可能，便需要把各力對 x 和 z 軸的力矩代數和計算出來。假使對兩軸的力矩代數和完全或有一個不等於零，就表示這力系可化爲一個力偶；所得到的力矩代數和就是合成力偶在 yz 平面和 xy 平面的分力偶的力矩。令 M_x 和 M_z 分別代表這兩個分力偶的力矩，可得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n} Y_i=0\\ M_x&=\sum_{i=1}^{i=n}-(Y_i z_i)\\ M_z&=\sum_{i=1}^{i=n}(Y_i x_i)\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

分力偶的力矩確定後，合成力偶的力矩 M 的大小以及所在平面的方位可由 §46 中(b)，(c)兩式去決定。假使兩分力偶有一個力矩等於零，那就表示合成力偶恰巧作用在一個坐標平面中。

以上算出來的兩分力偶的力矩若是完全都等於零，原來力系那就連化爲一個合成力偶的可能也沒有了，非自成平衡不可。所以一個空間的平行力系的平衡條件是：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n} Y_i=0\\ &\sum_{i=1}^{i=n}(Y_i z_i)=0\\ &\sum_{i=1}^{i=n}(Y_i x_i)=0\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

例題和習題

228. 第306圖中 AB 是一根水平支承在 A，B 兩軸承間的旋軸，C 是一個半徑 $r=20\text{cm}$ 的圓盤，掛在它邊上的重體 $Q=25\text{ kg}$，DE 是一根固定在軸上的橫桿，長 $l=10\text{cm}$，裝在它下端的重體 $P=100\text{ kg}$。C 盤的盤平面和 DE 桿長軸都垂直於旋轉軸 AB。試求平衡時，DE 跟鉛垂線的交角 α 以及兩軸承 A 和 B 對 AB 的反作用力 R_a 和 R_b。摩阻力和圓盤旋轉軸等的自重都可以不計。圖中計的尺寸以 cm 爲單位。

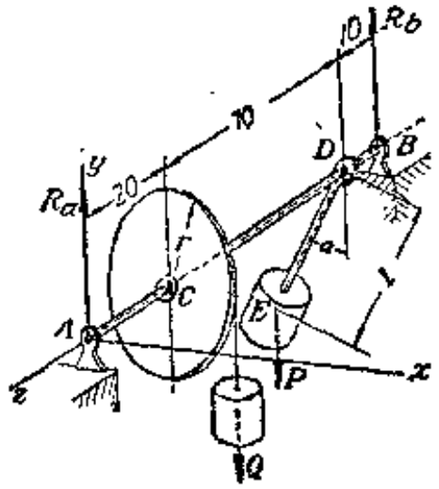
解：把整個裝置作爲分離體，因不計摩阻力，故軸承反作用力 R_a 和 R_b 必定是兩個鉛垂

力；它們連同 P,Q 兩重力共同構成分離體上的空間平行力系。因此，可以由 (23) 式決定 α 和 R_a,R_b。以 A 作爲原點，選定坐標軸 x,y 和 z 如圖，可得：

$$\left.\begin{aligned} R_a+R_b-P-Q&=0\\ R_a\cdot 100-P\cdot 90-Q\cdot 20&=0\\ Pl\sin\alpha-Qr&=0\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

把題中所給各值代進(a)式，就能得到：

$\alpha=\arcsin\frac{1}{2}=30°$, $R_a=30$ kg, $R_b=95$ kg。



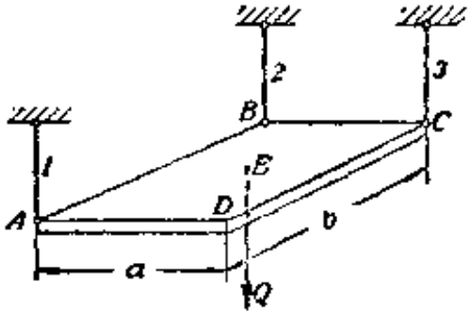
第 306 圖

229. 第 307 圖中長方板 $ABCD$ 的寬度是 a，長度是 b，重量是 Q。求圖中三個鉸鏈桿 1,2 和 3 的桿力 S_1,S_2 和 S_3。

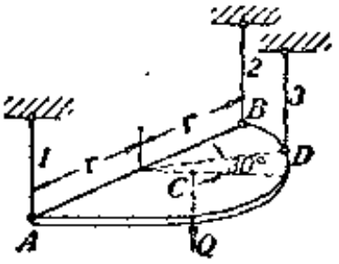
(解：$S_1=S_3=+\frac{Q}{2}$, $S_2=0$)

230. 第 308 圖中半圓板的半徑是 r，重量是 Q。求圖中三鉸鏈桿 1,2 和 3 的桿力 S_1,S_2 和 S_3。

(解：$S_1=0{,}38\,Q$, $S_2=0{,}18\,Q$, $S_3=0{,}4\,Q$)



第 307 圖



第 308 圖

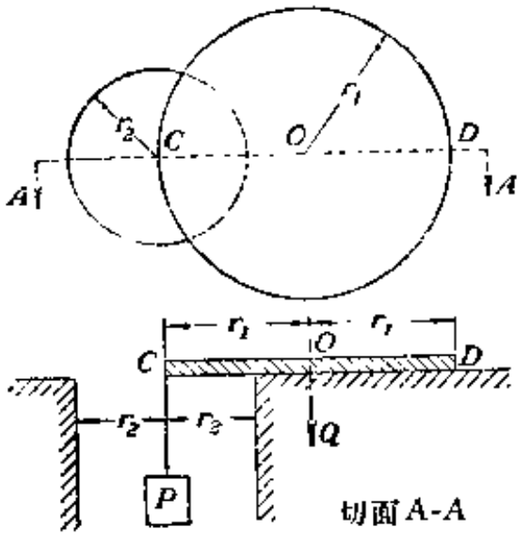
231. 第 309 圖中 O 是一塊密度均勻、重量是 Q、半徑是 r_1 的圓板，搭着放在一個半徑等於 r_2 的圓洞上。試求圓板在 C 點承受的重量 P 最大可以等於多大，圓板還不至於翻轉？

$\left[\text{解：}P_{max}=Q\left(\frac{2r_1^2}{r_2^2}-1\right)\right]$

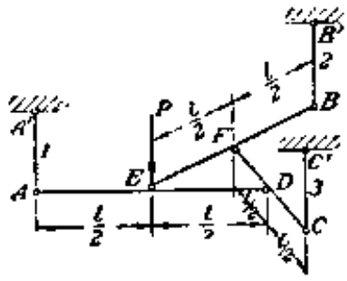
232. 三根完全相同的鉸鏈桿 AD,BE 和 CF 組成一個像第 310 圖所畫的三角形。它們的 A,B 和 C 三端由鉛垂的三根長度相等的綫 1,2 和 3 掛在水平的天花板下面。現在在 E 點加一鉛垂力 P，試求三根綫內的張力 S_1,S_2 和 S_3 以及鉸鏈 D,E 和 F 的桿子反作用力 R_d,R_e 和 R_f，設三桿的長度是 l。

(解：$S_1=\frac{4}{7}P$, $S_2=\frac{1}{7}P$, $S_3=\frac{2}{7}P$; $R_d=\frac{4}{7}P$, $R_e=\frac{8}{7}P$, $R_f=\frac{2}{7}P$)

233. 第 311 圖中是一個三輪起重機。三個輪子的軸承，就它們在水平平面的位置說，恰好構成一個邊長是 a 的等邊三角形 ABC。起重機的重心 E 又恰好在 $\triangle ABC$ 形心的正



第 309 圖

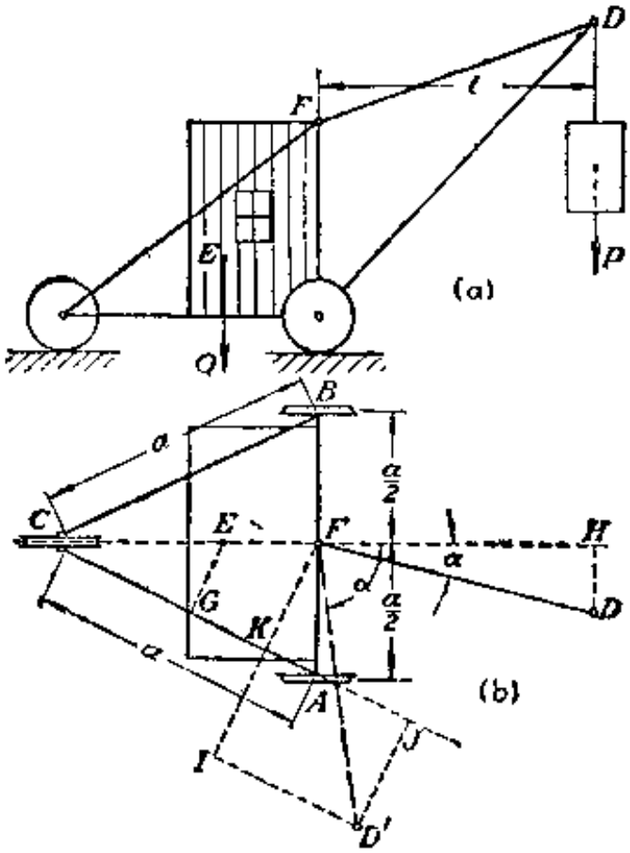


第 310 圖

上方。 機臂 DF 可以繞鉛垂軸桿 F 旋轉。 α 代表 DF 所在鉛垂面跟機身鉛垂中平面 CH 間的交角(第 311b 圖)。起重機所能夠提起的重量 P 應該是無論機臂 DF 在什麼位置都不至於使機身翻倒。 試求 P 最大可以等於多大?

解: 在 α 很小、機臂 DF 在圖中 FD 位置的時候,機身因 P 力過大而發生的翻倒是繞 AB 軸舉起 C 輪的旋轉;如果 α 很大,機臂在圖中 FD' 位置,那就是繞 AC 軸把 B 輪翻起的旋轉。 這兩種情形應該分開來討論。

起重機如繞 AB 軸旋轉,那在將開始旋轉時,C 輪和地面間就不會有壓力存在。



第 311 圖

故取 AB 作爲力矩軸綫，引用平衡條件就可得

$$P_{cr}\cdot FH-Q\cdot FE=0$$

把已知各值代入上式；

$$P_{cr}\cdot l\cos\alpha-Q\frac{a}{2\sqrt{3}}=0$$

故

$$P_{cr}=\frac{Qa}{2\sqrt{3}\,l\cos\alpha} \qquad (b)$$

由(b)可看到：使機身將開始翻倒的臨界 P 值 P_{cr} 將隨着 α 變化；從 $\alpha=0$ 時的最小值 $Qa/2\sqrt{3}\,l$ 變到 $\alpha=\pi/2$ 時的無限大。不過事實上在 α 快達到等於 $\pi/2$ 之前，機身繞 AB 軸綫翻倒的可能已經不能作爲標準，我們需要考察（α 相當大時）機身繞 AC 軸綫的翻倒。這時候機臂 FD 在圖中 FD' 位置。機身將開始翻倒時，B 輪跟地面間已沒有壓力存在。故按以上方法，可得

$$P_{cr}\cdot D'J-Q\cdot EG=0$$

或

$$P_{cr}(FI-FK)-Q\cdot EG=0$$

把已知各值代入上式，可得

$$P_{cr}\left[l\cos(120^\circ-\alpha)-\frac{\sqrt{3}\,a}{4}\right]-\frac{Qa}{2\sqrt{3}}=0$$

故

$$P_{cr}=\frac{Qa}{3l\sin\alpha-\sqrt{3}\,l\cos\alpha-\frac{3}{2}a} \qquad (c)$$

至於 (b)，(c) 兩式的適用範圍（指 α 的臨界值。在這值以上應該以機身繞 AC 綫的翻倒爲標準，需要應用 (c) 式；在這值以下應該以機身繞 AB 綫的翻倒爲標準，需要應用 (b) 式。），我們可以令 (b)，(c) 兩式相等來決定。如此，就得到

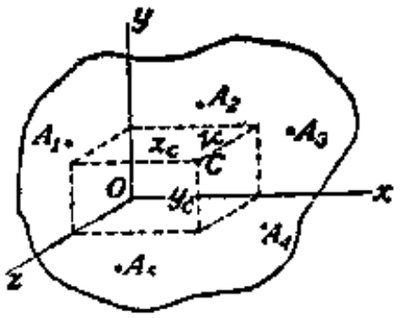
$$\sin\alpha=\frac{a\pm\sqrt{48l^2-3a^2}}{8l} \qquad (d)$$

特殊情形，$a=l$ 時，(d) 式就化爲 $\sin\alpha=\frac{l+\sqrt{45}}{8}=+0{,}964$，或 $\alpha=74^\circ30'$。

(d)式中的負號是沒有實際意義的，因爲 α 角受起重機構造上的限制，不可能大於 90°。對在 $a=l$ 的特殊情形下，機身在 $\alpha=0$ 時最容易翻倒。因之，最大的 P 值，按(b)式，應該是 $Q/2\sqrt{3}$。

49. 平行力中心及重心

我們在 §24 中已經知道：假使有一個已知的平行力系作用在一個剛體內的一定的點系上，那剛體中就必定有一點可叫做「平行力中心」；無論平行力系的作用方向如何，它的合力必然通過這一中心。



第 312 圖

因爲合力對任一軸線的力矩就等於力

系中各力對同軸的力矩代數和，所以力系的平行力中心可以很簡便地由這一條件來確定。合剛體內某一點系 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 的任一點 A_i 的坐標爲 x_i, y_i 和 z_i。一已知平行力系 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 各力分別作用在這點系的各點上。因爲力系可以取任何方向作用，故可先設想它們的作用線跟 yz 坐標平面平行。在 yz 平面內任意選定一垂直於力系方向的直線作爲力矩軸線，計算後，可得力系合力作用線到 yz 平面的距離（也就是平行力中心 C 到平面的距離）是

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (F_i x_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i} \tag{27a}$$

之後，設想力系取平行於 xz 坐標平面的方向作用，又可得合力作用線或平行力中心 C 到 xz 平面的距離是

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (F_i y_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i} \tag{27b}$$

最後，設想力系跟 xy 平面平行，又得到

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (F_i z_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i} \tag{27c}$$

因爲我們已經知道，平行力中心的位置完全跟力系所取的方向無關，所以(27)式以坐標方位確定的力系的中心位置，對於任何方向的力系均可適用。

§ 25 中已說明過，一個物體的「重心」就是其中各質點所受重力的平行力中心。所以重心的位置也可以用(27)式來決定。物體的密度如果完全均勻，各部份的重力就跟各部份的體積成正比。因此，它的重心位置只跟它的整個的體積形狀有關，密度如何是沒有影響的；這就是說，一個密度均勻的物體，它的重心跟它的體積的形心是一回事。

一個密度均勻的物體如果它的體積形狀有一對稱平面，那根據

(27)式就可推知，它的重心一定是在這對稱平面上。如果它有兩個對稱平面，那重心就在這兩平面的交線上。假使有三個對稱平面，自然，重心就是這三平面的交點。因此，密度均勻的球，它的重心就是球心；密度均勻的圓柱體，它的重心就是它中心軸的中點；密度均勻的圓錐體，它的重心就在它中心軸上等等。

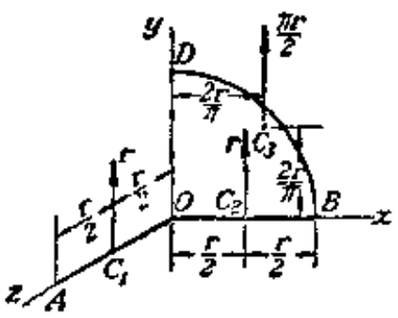
一個物體如果各部份的重心已經知道，那這一組合體的重心位置就可以由作用在已知各重心點的各部份的重力的平行力中心來決定。

一個物體的表面形狀，假若能用方程式表示，並且其中每一點的密度都已經曉得，那我們設想把物體分割成無限多的微分部份，應用積分法去求出(27)式的各「總和值」，就能確定它的重心位置。

以下我們用幾個例子來說明各種求重心位置的方法。

例題和習題

234. 第 313 圖中細綫 $AOBD$ 由三部份組成；兩直綫部份 AO，OB 分別與正交坐標系的 z，x 軸相合，而綫部份 BD 是 xy 平面內一根半徑等於 r 的四分之一圓弧。設細綫密度均勻、切面一律，兩直綫部份都長 r，試求整個細綫的重心位置。



第 313 圖

解：因爲細綫既切面一律，切面直徑又很微小，所以它的重心可以當作就是組合綫 $AOBD$ 的長度形心。現在合三個平行力，大小分別等於 AO，OB 和 BD 的重量，作用在三部份的形心 C_1，C_2 和 C_3 處。先設想三平行力平行於 y 軸，由(27a)和(27c)，可得

$$x_c=\frac{\frac{\pi r}{2}\cdot\frac{2r}{\pi}+r\cdot\frac{r}{2}}{2r+\frac{\pi r}{2}}=\frac{3r}{4+\pi}$$

$$z_c=\frac{r\cdot\frac{r}{2}}{2r+\frac{\pi r}{2}}=\frac{r}{4+\pi}$$

之後，合三力平行於 z 軸，由(27)式，又可得：

$$y_c=\frac{\frac{\pi r}{2}\cdot\frac{2r}{\pi}}{2r+\frac{\pi r}{2}}=\frac{2r}{4+\pi}$$

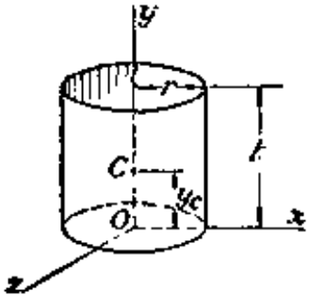
235. 第 314 圖中是一個密度均勻、厚薄一律的薄圓筒；上端開口，下端封閉。設圓筒的半

徑等於 r，高度等於 h，試求它重心 C 的坐標 x_c，y_c（坐標軸見圖）。

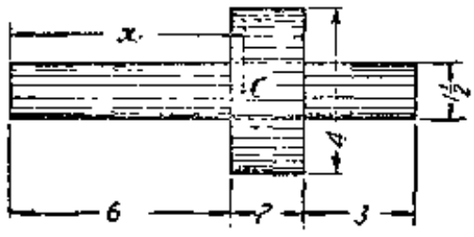
（解：$x_c=z_c=0$，$y_c=\frac{h^2}{2h+r}$）

236. 第 315 圖中是一根直徑等於 1½cm 的鋼軸。它上面裝一個直徑爲 4cm 的鋼套。圖中所有尺寸都以 cm 爲單位。試求整個物體的重心 C 離開一端的距離 x_c 等於多大？

（解：$x_c=6{,}28$cm）



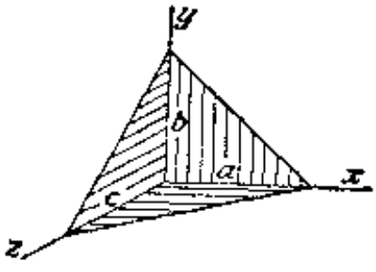
第 314 圖



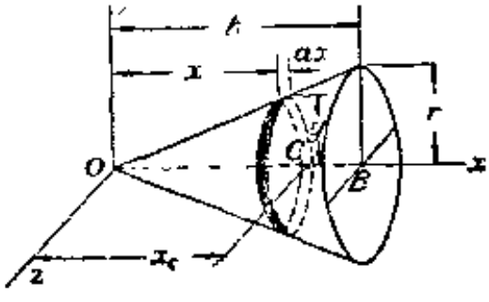
第 315 圖

237. 第 317 圖中是一塊包在箱子角上的薄銅皮，密度均勻，厚薄一律。試按圖中尺寸，求它的重心 C 的坐標 x_c、y_c 和 z_c（坐標軸見圖）。

（解：$x_c=\frac{a^2(b+c)}{3(ab+bc+ac)}$，$y_c=\frac{b^2(a+c)}{3(ab+bc+ac)}$，$z_c=\frac{c^2(a+b)}{3(ab+bc+ac)}$）



第 316 圖



第 317 圖

238. 第 318 圖中的正圓錐體，密度均勻，高 h，底圓半徑是 r。試求它重心 C 的位置。

解：因密度均勻，故所求重心也就是圓錐體的體積形心 C。又因中心軸 OB 是圓錐體的對稱軸，故形心 C 一定在這一軸綫上。因此，只要求出形心 C 的坐標 x_c 後，重心位置就完全決定。選定坐標軸如圖。我們把圓錐體沿長軸分割爲無限小的薄片。坐標等於 x 的一薄片：厚度是 dx，半徑是 y，體積是 $dV=\pi y^2dx$。因 $y:x=r:h$，故 $dV=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2dx$。應用(27)式，積分後就得到

$$x_c=\frac{\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^3dx}{\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2dx}=\frac{\int_0^h x^3dx}{\int_0^h x^2dx}=\frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}}=\frac{3}{4}h$$

這就是說，一個密度均勻的正圓錐體的重心是在它中心軸上離底面的距離等於圓錐高度四分之一處。

239. 任意一個密度均勻的金字塔形物體，底面面積等於 A，高度等於 h。試證明它的重心在頂點和底面面積形心的連綫上，離底面的鉛垂距離等於 $h/4$ 處。

240. 假設第 317 圖的正圓錐體中，各部分密度恰跟這部份離底面的距離成正比。試求它重心 C 的坐標 x_c。

(解: $x_c=\frac{3}{5}h$)

241. 試求一個半徑等於 r 的半圓球的重心與半圓球底平面的垂直距離 x_c。

(解: $x_c=\frac{3}{8}r$)

242. 設一密度均勻的正圓錐台，高度是 h，底面圓半徑是 r_1，頂面圓半徑是 r_2，試求它重心距離底面的垂直距離 x_c。

(解: $x_c=\frac{h}{4}\cdot\frac{r_1^2+2r_1r_2+3r_2^2}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}$)

243. 第 318 圖中是一個長圓體，底部是一個半徑等於 r 的半圓球，上部是一個高 h、半徑也等於 r 的圓柱體。現在要使這一個組合體的重心恰好在半球球心處，問高度 h 應該等於多大？

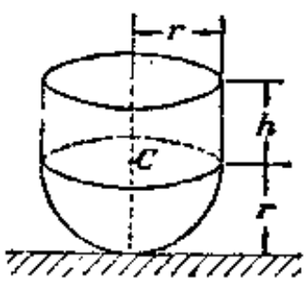
(解: $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$)

244. 第 319 圖中的組合體，上部是一個高 h、底圓半徑等於 r 的正圓錐體，底部是一個半徑等於 r 的半圓球。假設這一組合體的重心恰巧在半圓球球心處，試求圓錐部份的高度 h 等於多大？

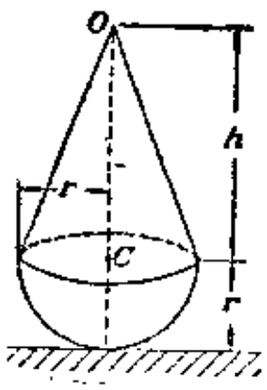
(解: $h=\sqrt{3}r$)

245. 第 320 圖中是一個平頭鉚釘的切面，圖中尺寸全以 mm 爲單位。鉚釘上端的圓釘頭是一個半圓球。試求鉚釘重心的坐標值 y_c。

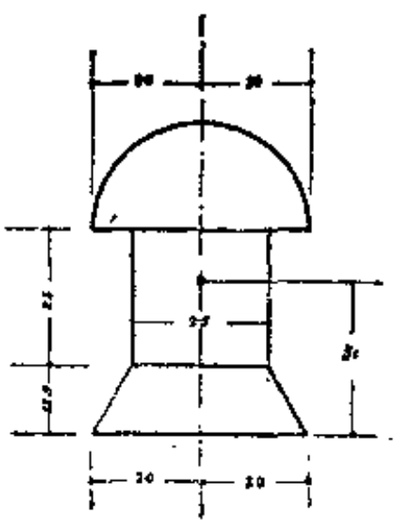
(解: $y_c=28{,}3$ mm)。



第 318 圖



第 319 圖



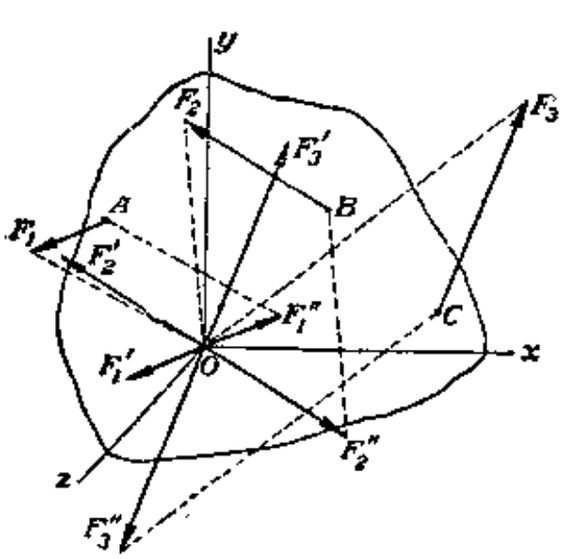
第 320 圖

第七章　一般的空間力系

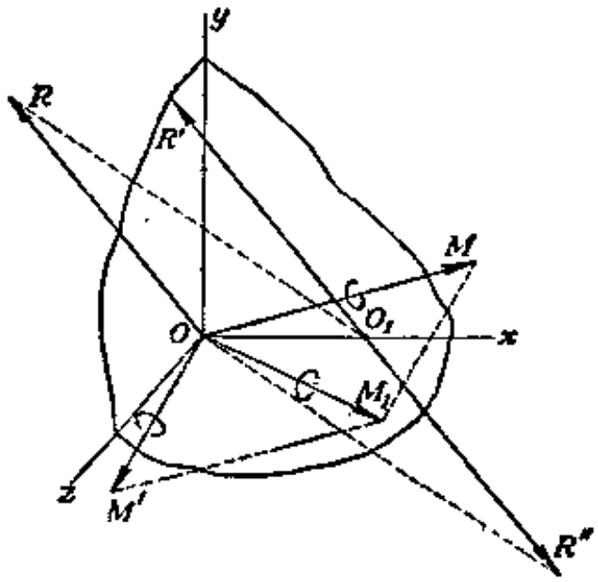
50. 空間力系的合成

任何一個作用在一物體上的空間力系都可以簡化爲作用在任意一點的一個合力和另外一個合成力偶。 例如第 321 圖中作用在物體 A，B 和 C 三點的 F_1，F_2 和 F_3 三力。我們隨意擇一點 O，在這點加一對相等相反、且平行而等於 F_1 的 F_1' 和 F_1'' 兩力。這樣，原來 A 點的 F_1 力就變成 O 點的 F_1' 力和一個 F_1，F_1'' 所成的力偶，作用完全跟 F_1 相同。同樣辦法，B 點 F_2 力也可以由 O 點 F_2' 力和一個 F_2，F_2'' 構成的力偶來代替；C 點 F_3 力又可以由 O 點 F_3' 力和一個 F_3，F_3'' 構成的力偶來代替。O 點的 F_1'，F_2' 和 F_3' 三力當然可按 § 38 中的方法合成爲作用在 O 點的合力 R。其餘三個力偶又可按 § 45 中的方法合成爲一個合成力偶 M。可見原來作用在 A，B，C 三點的 F_1，F_2，F_3 三力的確能化爲靜力作用完全相同的「一個合力 R 和一個合成力偶 M」，合力 R 的作用點 O 而且可以隨意選定。

合力 R 的大小、方向是由所給各力的幾何和來決定的，完全跟所選 O 點的位置無關。不過所得的合成力偶的力矩 M 以及它的作用平面却要看 O 點的位置如何而定。例如第 322 圖中，力向量 R 和力矩向量 M 代表第 321 圖中力系的合力和合成力偶。現在另選定一 O_1 點，



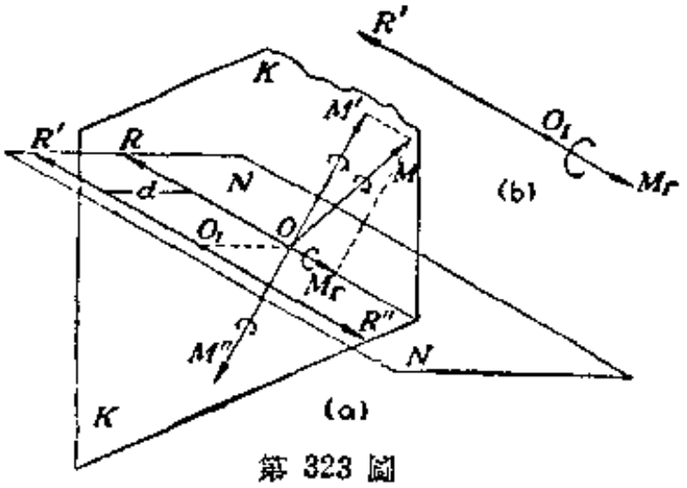
第 321 圖



第 322 圖

加一對相等相反並且跟 R 平行而相等的 R' 及 R'' 兩力。原來力系因之又轉化爲一個 O_1 點的 R' 力和另外一個合成力偶 M_1。這一力偶 M_1 是由原來力偶 M 加上 O 點 R 力和 O_1 點 R'' 力所成力偶而成的。可見，我們把合力的作用點由 O 點移到 O_1 點只是合成力偶的大小和作用平面會因而變化，合力的大小和方向是毫不改動的。合成力偶的變化等於 O 點 R 力對 O_1 點的力矩，它的力矩向量 M' 垂直於 R 和 R'' 所決定的平面。因此，對於平行於合力作用線的直線上的一切點，一個空間力系的力矩值是保持不變的。

此外，如果把力矩向量 M 分解爲平行和垂直於 R 力作用線的兩個分向量，那其中就只有垂直於 R 力方向的分向量才會因合力作用點從 O 變換到 O_1 而變化，平行於 R 力方向的分向量是始終固定不變的。因此，O_1 點假使選擇得適當，就可能使垂直 R 力的這一分向量等於零。這也就是說，我們可以找到一個使合成力偶恰好在合力作用線的垂直平面中的合力作用點。例如第 323a 圖中，我們設想 KK 是 O 點合力



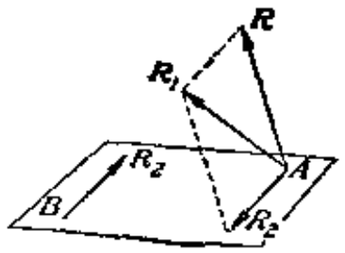
第 323 圖

R 的作用線和合成力偶的力矩向量 M 所決定的平面。在這一平面中，我們把向量 M 分解爲 R 力方向和 R 力垂直方向的分向量 M_r 和 M'。之後，過 R 力作用線作一垂直於向量 M' 的平面 NN，在這一平面上，選擇一 O_1 點，使 O_1 點跟 R 力作用線的垂直距離 $d=M'/R$。因此，R 力對於 O_1 點的力矩 Rd 恰等於 M'，但方向跟 M' 相反。現在在 O_1 點加一對相等相反並且平行而等於 R 的 R' 和 R'' 力，使原來的力偶 M' 由 R、R'' 兩力所成力偶抵消。剩下來的就只是一個作用在 O_1 點的合力 R' 和一個在垂直於 R' 力作用線平面中的合成力偶 M_r（見第 323 圖），這就是一個空間力系所可能簡化的最簡單形式。

特例情形，一個已定空間力系的各力幾何和等於零時，那這一力系就將化爲一個合成力偶。 這力偶的力矩是跟任意選定的 O 點位置完全無關的。

如果合力不等於零而力偶的力矩 M 等於零，那這一已定力系就可以簡化成爲一個合力。 此外，如果合成力偶的力矩向量 M 不等於零，但是它的方向垂直於合力 R，那這一力系也可以化爲一個合力；因爲合力 R 和合成力偶 M 既然在同一平面，我們自然可以按處理平面力系的方法把它們合成一個合力。這些事實說明了：任何一個的空間力系，只有簡化後它的合力及合成力偶同時都等於零時，它才會平衡。

任何一個空間力系除掉可以化爲一個合力及一合成力偶外，還可以把它簡化爲「作用線互不相交」的兩個力。 例如第 324 圖中，A 點的 R 力和圖中 R_3 力力偶是一個按照以上方法簡化而成的空間力系，而且 R_3 力力偶已經推移到使其中一力 R_2 也作用在 A 點。現在把 A 點的 R 和 R_3 兩力合成一個合力 R_1。 這樣，原來的空間力系就轉化爲 A，B 兩點的 R_1 和 R_2 兩個力構成的力系，它的作用完全跟原來力系相同；而且由以上的合成過程可知，這兩力的作用線必然互不相交。 把一個空間力系簡化爲兩個力，有時是比化爲一個合力和一合成力偶要適用一些。



第 324 圖

51. 投影法和力矩法

§ 50 中已說明，任何一個空間力系都可以簡化爲作用在任選一點的合力 R 和一個合成力偶 M。 簡化的方法是把所有各力都推移到任選的 O 點，求出它們的幾何和就得到力系的合力。 至於合成力偶的力矩，我們可以由所有各力對 O 點力矩的力矩向量的幾何和來決定。

關於合力和合成力偶的計算，我們可以以任擇的 O 點作爲原點，選定正交坐標軸 x，y 和 z。 根據以上的討論，O 點的合力就可以由 § 39 中 (a)，(b) 和 (c) 三式來決定；合成力偶可以由 § 46 中 (a)，(b) 和 (c) 三式來決定。

§ 50 中也說過：一個空間力系必須含力 R 和合成力偶的力矩 M

同時都等於零才能平衡。所以按§39和§46中討論的結果，可得一般的空間力系的平衡條件如下：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=n} X_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} Y_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} Z_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} (M_x)_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} (M_y)_i=0\\&\sum_{i=1}^{i=n} (M_z)_i=0\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

這六個方程式是對於任何力系都適用的平衡條件；以前所討論過的各種平衡條件沒有一種不可以由這最普遍的條件歸納出來。

假使一個力系中所有各力都互相平行，那我們可選定一個 y 軸跟各力平行的正交坐標軸系來計算。在這種情形下，力系對(28)式中第一，第三，第五各式在任何條件下都一定會滿足，所以我們得到§48中(26)式所表示的平衡條件。

若是一個力系中所有各力都相交於一點，那我們可以選這點作爲原點，定一正交坐標軸系，這一力系對(28)式中第四，第五，第六各式就無論如何都能滿足，故得到共點力系的平衡條件如§39中的(21)式。

如果一個力系中所有各力都在同一平面，我們可選取這平面作爲 x 和 y 軸所成的坐標平面，那力系永遠會滿足(28)式中第三，第四，第五各式，可不必列出來，所以這種力系的平衡條件如§31中(19)式。同樣，一個平面的平行力系和共點力系的平衡條件§23中(11)式和§13中(5)式，又可由這樣得到的(19)式簡化出來。

根據§50中的一般性的討論，任何一個力系要成爲平衡，就必須合

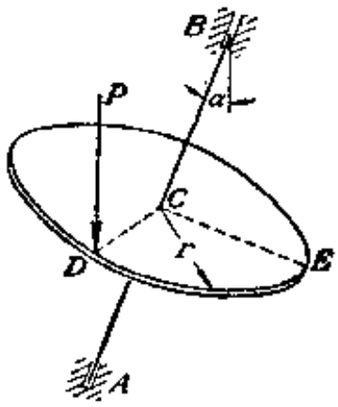
力和合成力偶同時都等於零，從而，這一力系對於空間任何一軸線的力矩代數和以及各力在空間任何一軸線的投影代數和都必定是等於零。因此，處理一個已知是平衡的力系就不必一定應用正交坐標軸系來考察各力的力矩及投影；任何其他軸線也無不可以選用。

例題和習題

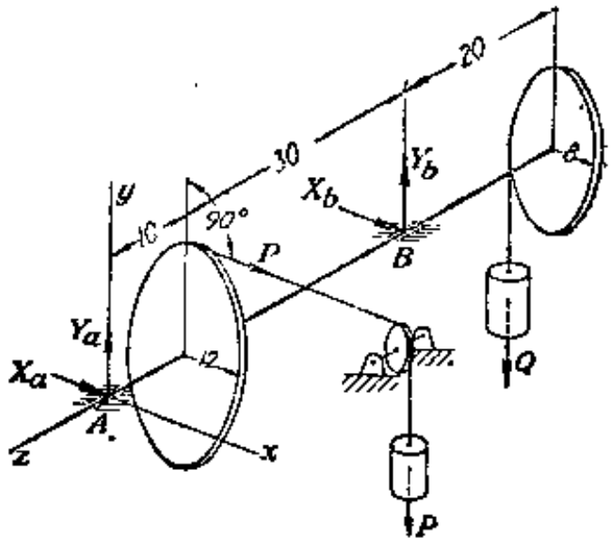
246. 第325圖中，一個半徑 $r=3$ cm 的圓盤安裝在一根垂直於盤面的中心軸 AB 上；AB 軸跟鉛垂綫成 $\alpha=20°$ 的交角，兩端固定在 A，B 兩軸承內不能旋轉。設圖中 CD 是一條水平半徑，D 點鉛垂力是 $P=40$kg，試求 P 力對於 AB 軸的力矩 M 等於多大。

(解：$M=4$ kg cm)

247. 第326圖中一水平旋軸擱支在 A，B 兩軸承內，它上面安裝兩個滑輪，各受外力 P，Q 作用如圖。設圖中尺寸完全用 cm 作爲單位，$Q=600$kg，試不計摩阻力求平衡時 P 力的大小，以及軸承 A 和 B 對水平旋軸反作用力的水平和鉛垂分力 X_a，Y_a 和 X_b，Y_b 各等於多大？



第 325 圖



第 326 圖

解：先以水平軸和兩滑輪當作一個「分離體」。因軸承的摩阻力可以不計，故 A，B 兩軸承的反作用力在軸的長度方向沒有分力存在。現在選定坐標軸系如圖，應用(28)式，可得：

$$\left.\begin{aligned} X_a+X_b+P&=0\\ Y_a+Y_b-Q&=0\\ &\cdots\cdots\\ 40Y_b-60Q&=0\\ -10P-40X_b&=0\\ 8Q-12P&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

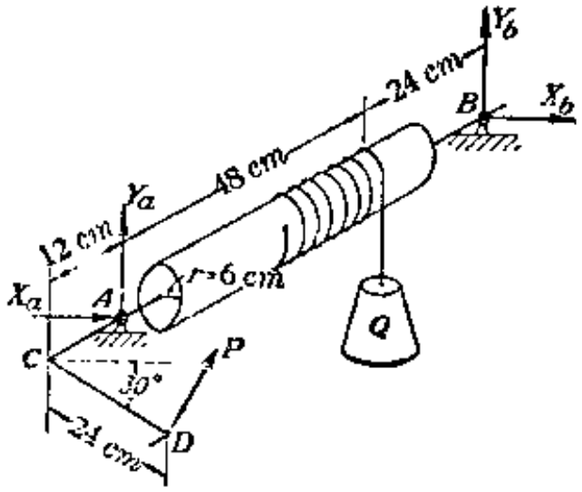
令$Q=600$kg，解開(a)式，可得：$P=400$kg；$X_b=-100$kg，$X_a=-300$kg；$Y_b=900$ g，$Y_a=-200$kg。所得各值前面的負號指作用方向跟起初假定的相反。

248. 第327圖中是一絞車，所舉的重量是Q。設作用力P垂直於搖柄CD，CD和P力所決定的平面又垂直於絞車的長軸AB，試不計摩阻力，求平衡時，P力的大小以及A，B兩軸承反作用力在圖中各坐標軸方向的分力。

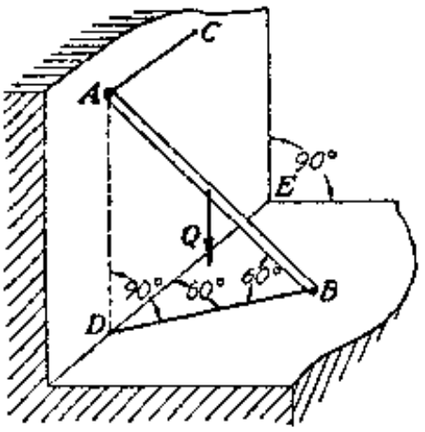
(解：$P=0,250Q$；$X_b=0,021Q$，$Y_b=0,703Q$；$X_a=-0.146Q$，$X_a=0,031Q$)

249. AB桿重Q長l，斜靠在光滑的鉛垂牆面和水平地面間，兩端由兩根水平的軟綫AC，BD連接在牆上C，D兩點(第328圖)。試求平衡時牆面和地面對AB桿的反作用力R_a和R_b以及AC，BD兩綫內的張力S_a和S_b。

(解：$R_b=\frac{Q}{4}$；$R_b=Q$；$S_a=\frac{Q}{4\sqrt{3}}$；$S_b=\frac{Q}{2\sqrt{3}}$)



第 327 圖

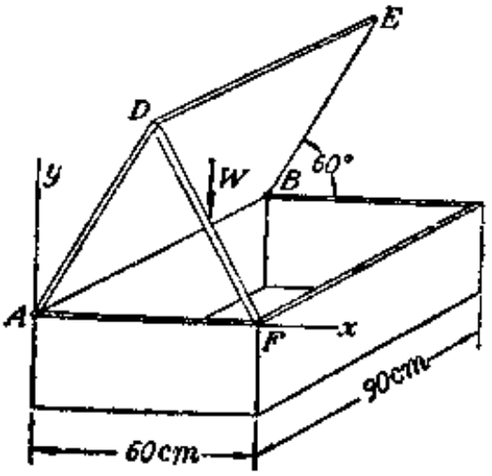


第 328 圖

250. 第329圖中方箱的箱蓋ADEB的重量是$W=48$kg，由一根DF桿支撐如圖。鉸鏈A，B的摩阻力可以不計，箱蓋可以在圖中AB綫方向自由滑動。試求DF桿的壓力S以及A，B兩鉸鏈的反作用力的各分力。

(解：$S=13\ 86$kg；$X_a=6,93$kg，$X_b=0$；$Y_a=12,00$kg，$Y_b=24,00$kg)

251. 第330圖中AB桿長$2r$重Q，由兩根長e的鉛垂綫AC和BD掛在天花板下面。在AB所在的水平面中，有一個P力力偶作用在AB桿上。力偶的力矩是M。AB桿在力偶作用下旋轉一α角如圖。假設已知α角的大小，試求平衡時力矩M和兩綫內的張力各等於多大？



第 329 圖

解：將AB桿當作「分離體」。這分離體在重力Q、水平P力力偶和傾斜方向的綫綫張力

S 作用下平衡。 令 β 代表該繩與鉛垂線所成的交角，分解 S 力爲水平及鉛垂方向分力：

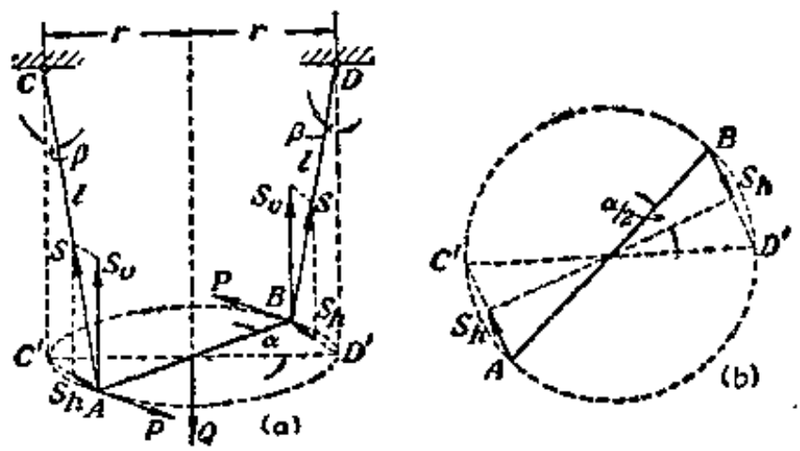
$$S_h=S\sin\beta,\ S_v=S\cos\beta$$

投影所有各力於鉛垂綫上，可得

$$2S\cos\beta-Q=0 \tag{b}$$

因爲張力的兩水平分力 S_h 共同構成一個水平平面 $AC'BD'$ 中的力偶，力偶力臂是 $2r\cos\frac{\alpha}{2}$（第 330b 圖），故選 Q 力作用綫作爲力矩軸綫計算各力的力矩，可得

$$M-S\sin\beta\cdot 2r\cos\frac{\alpha}{2}=0 \tag{c}$$



第 330 圖

但由圖上可以看到

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta&=\frac{2r}{l}\sin\frac{\alpha}{2}\\ \text{或}\qquad \cos\beta&=\sqrt{1-\frac{4r^2}{l^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

故把 (d) 式代入 (b)，(c) 兩式中，解出 S 及 M，就可得：

$$\left.\begin{aligned}S&=\frac{Ql}{2\sqrt{l^2-4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\\ M&=\frac{Qr^2\sin\alpha}{\sqrt{l^2-4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

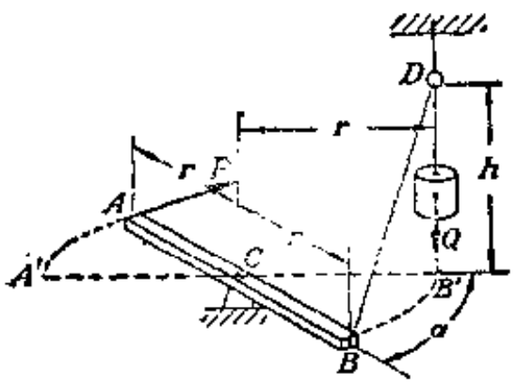
校核所得到的結果，除應用「因次校核法」看 S 和 M 的因次是否跟力和力矩的因次符合外，還可以由極限情形下的實際現象來考驗。 假使 $\alpha=0$，那由 (e) 式可得 $S=\frac{Q}{2}$，$M=0$。 這顯然合乎常理，應該如此。 如果 $\alpha=\pi=180°$，那就 $M=0$，但 $S=\frac{Ql}{2\sqrt{l^2-4r^2}}$；這時候，兩根繩綫交叉在一鉛垂平面中，我們如應用處理平面力系的方法就也會得到同樣的結果。

252. 第331圖中 AB 桿長 $2r$，可以在水平平面中繞它中點處的支點 C 自由旋轉。它的 B 端由一根跨過 D 環的絃繩吊着一個重體 Q 如圖。假使在 AB 桿的 A 端加一個垂直於桿軸的水平力 P，使 AB 所定的鉛垂平面旋轉一水平角 α，試不計摩阻力，求平衡時，P 力的大小應等於多大？

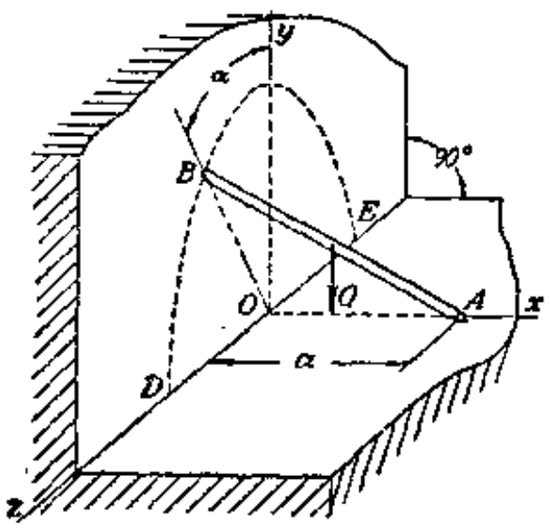
$$\left(\text{解: } P=\frac{Qr\sin\alpha}{\sqrt{h^2+4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

253. 第332圖中 AB 桿長 l 重 Q；A 端由一個球形鉸鏈固定在地面上，B 端自由地靠在一個鉛垂牆面上。牆面和鉸鏈 A 的水平距離等於 a。圖中 AOB 平面跟鉛垂的 xy 平面的交角是 α。AB 桿與牆面間的摩阻係數是 μ，鉸鏈的摩阻力則可不計。試求 AB 桿將開始沿牆面滑動時，α 角應等於多大？

解：AB 桿將開始滑動時，B 處的反作用力必須在垂直於牆面的圓弧 DBE 的 B 點切面中。故可得 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\mu a}{\sqrt{l^2-a^2}}$。



第 331 圖



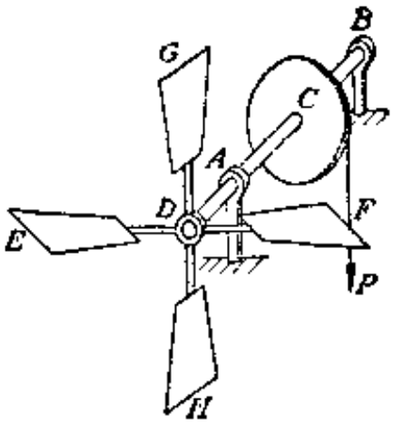
第 332 圖

254. 第333圖中是一個風車。它的水平軸 DAB 由 A，B 兩軸承支承着。軸上面裝有一個轉輪 C，半徑是 $r=12$cm。風車葉子所受到的風壓相當於作用在離開旋轉軸線30cm處的一個大小等於100kg的作用力。風車葉子跟圖中 $EGFH$ 平面所成的交角是30°，$EGFH$ 是垂直於 DAB 軸的鉛垂平面。試求圖中作用在轉輪 C 邊上的 P 力應等於多大，才能平衡？

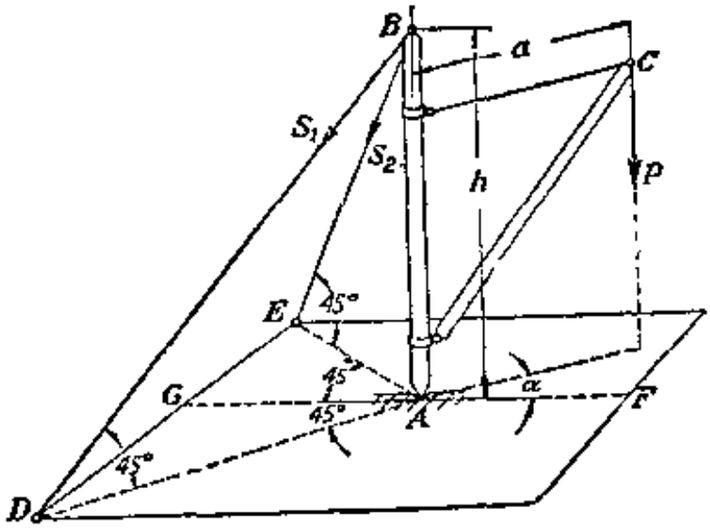
(解：$P=500$kg)

255. 第334圖的起重裝置中，設兩鉛垂平面 ABC 和 BGF 間的夾角是 α，試求圖中 DB，EB 兩拉繩中的張力 S_1 和 S_2 應等於若干？

$$\left(\text{解: } \begin{array}{l} S_1=\frac{Pa}{h}(\cos\alpha+\sin\alpha) \\ S_2=\frac{Pa}{h}(\cos\alpha-\sin\alpha) \end{array}\right)$$



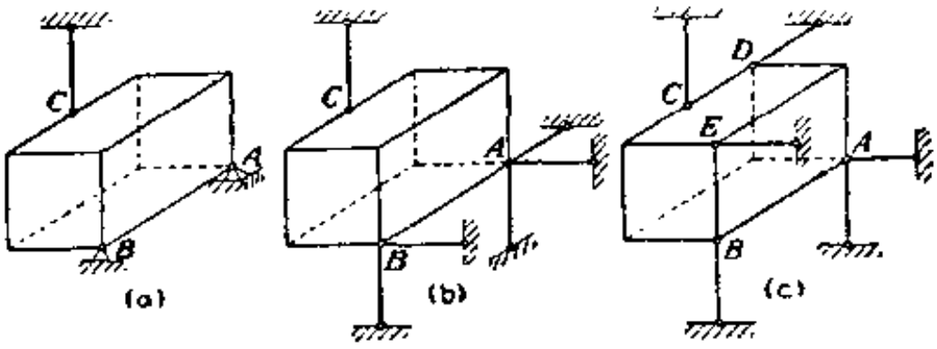
第 333 圖



第 334 圖

52. 剛體在空間的靜定支承

現在要討論如何把一個剛體固定在基礎上使它在空間的運動自由受到完全約束的一般性問題。例如，第 335 圖中的一長方體，我們可以用一個球形鉸鏈把它上面任意一點 A 完全固定在基礎上。這樣，物體就只能繞 A 點旋轉；換句話說，它上面任何一點只可能在以 A 點爲球心、以這一點跟 A 點的距離爲半徑的一個圓球表面上運動。假使還要進一步約束物體的運動自由，我們可再把它上面另外一個任意的 B 點用環形鉸鏈連接在基礎上，令環鉸鏈的平面垂直於 A,B 的聯線。這樣，物體的運動自由又將進一步受到約束，只可以作繞 AB 軸線的旋轉；這也就是說，它上面任何一點只可能在垂直於 AB 線的平面中一個圓心在 AB 線上的圓周上運動。因此，我們如果再把物體上另外一個 C 點用一鉸鏈桿連接在基礎，此桿件的長軸不跟 AB 線相交，使物體繞 AB 線旋轉的可能性完全消失，那這一物體在空間的運動自由就可以完全約束住。以上的討論雖然用長方體做例子，但是任何其他形狀的物體也無不如此，因此，是普遍性的討論；這兒所以用長方體做例子不過

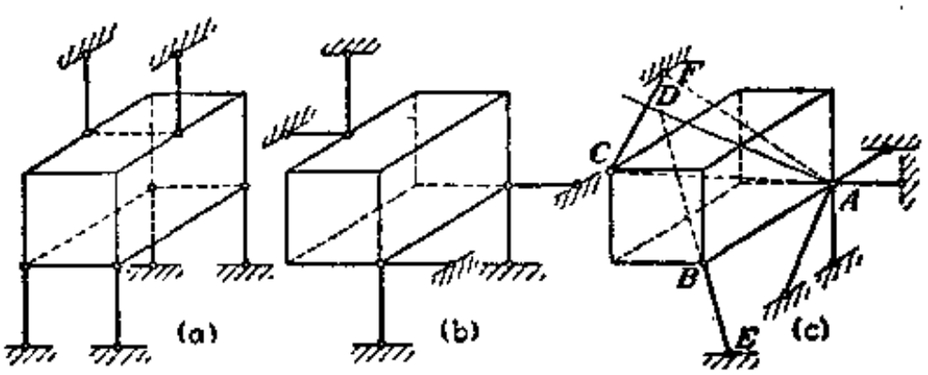


第 335 圖

是強調物體的空間三度性而已。由這個例子，可以看到：要完全約束一個剛體在空間的運動自由，只要由(1)一個球形鉸鏈，(2)一個環形鉸鏈，(3)一個鉸鏈桿，把剛體連接在基礎上就能實現。

剛體運動自由的完全約束也可以完全應用鉸鏈桿來完成。例如，第335b圖中完全用鉸鏈桿的支承系統就顯然跟第335a圖的裝置效用相同。A點的三個不同在一平面中的桿件相當於一個球形鉸鏈，這在§42中已指出過。B點兩桿件把B點約束在一平面中，相當於一個環形鉸鏈，可見，如果要完全用桿件來完成物體運動自由的「完全約束」，那就至少要有六個鉸鏈桿。

這六桿件當然不一定要按照相當於球形鉸鏈和環形鉸鏈的方式(第335b圖)安裝。換一種安裝方法，同樣也可以實現物體運動自由的完全約束。例如，A點的一個桿件(第335b圖)就可以由跟它平行但是裝在D點的桿件來代替(第335c圖)，B點的一桿件也可以由跟它平行的E點的桿件來代替。這樣的「替換」並不會破壞物體的「完全約束」。因此，我們有很多的安裝六桿件的方法，都可以實現物體運動自由的「完全約束」。不過，我們也不能由此推論，認爲六桿件無論怎樣安裝都成。這是不對的，例如，第336a圖中的六桿件所成的支承系統，它的六個桿件全部相互平行。物體在這種方式支承下，顯然在垂直於各桿件的平面中還有一些運動的自由。這也就是說，因爲所有桿件都跟任何一根平行於各桿件的直線在無限遠相交，所以物體有一些繞這些直線旋轉的自由。因此，這樣安裝起來的支承系統就不能完成物體的「完全約束」。再如第336b圖中的支承系統，它的所有桿件都在相互



第336圖

平行的各平面中，因此，也不能實現物體的「完全約束」。因爲三個平

行平面將在無限遠處共同相交於一根直線，以致所有桿件的長軸都共同跟這一直線相交，所以物體仍然有一些繞這根交線旋轉的自由；也就是說，物體在垂直於桿件長軸的平面中仍舊有運動的可能，從而這樣六桿件不可能是一個使物體運動自由受完全約束的支承系統。

一般說來，如果支承系統中所有桿件的長軸都跟某一直線相交，那物體就有這樣的可能性，就是它至少可以繞這根線發生一定限度的旋轉。支承系統的六桿件中，如果有四個桿件，它們長軸共同交於一點，那其餘兩桿件無論如何安裝都會共同跟一根過四桿件長軸交點的直線相交。例如，第336c圖中的支承系統。其中有四個桿件的長軸共同相交在 A 點。這一 A 點跟另一 CF 桿的長軸可以決定一個平面 ACF，桿件 BE 又將跟這一平面交於 D 點。因此，AD 直線就必然會跟所有六桿件的長軸相交，這樣決不可能構成一個使物體運動自由受「完全約束」的支承系統。當然，桿件 BE 也可能不跟 ACF 平面相交。不過即使它們不相交而互相平行，那 ACF 平面中也一定有一根跟 BE 平行的直線 AD 可以作爲跟六桿件長軸相交的直線，只是 BE 跟它相交在無限遠而已。這種構成空間「完全約束」的六桿件支承系統是跟平面的三桿件支承系統相仿的。六桿件的長軸不能共同跟一根直線相交正和平面支承系統中三桿件不能共同在一點相交的情形相同（見§34）。

由以上的例子說明中，我們可看到，一個長軸不共同跟一根直線相交的六鉸鏈桿（或相當於六桿件的裝置）所構成的支承系統足夠使支承的物體在空間的運動自由受到完全約束。同時，也必須有如此六個桿件才能完成物體的「完全約束」。桿件的數目如果超過六個，那多餘的桿件就叫做**過剩支承**。

任何一個受「完全約束」的物體，例如第335圖中的各物體，如果受到一個作用力力系的作用，那它的支承系統的各桿件就必然將產生一羣反作用力來跟作用力共同構成平衡。這也就是說，在物體受作用力作用時，每一個支承桿件內部都會產生長軸方向的桿力，同時每一個桿件都會對物體產生一個跟桿力相同的反作用力，使物體上所有作用力和反作用力共同構成一個平衡的一般空間力系。這種力系的平衡條件(28)一共有六個方程式，可以解決六個未知數。在以上討論中，我們

已經知道，一個對物體運動自由有完全約束的支承系統，它內中「必須和足夠」的桿件數目恰巧也是六個。因此，六個桿件對物體的反作用力，也就是它們的桿力，恰好可以完全由六個靜力平衡方程式來給以決定。正因爲這一緣故，這種由不共同跟一直線相交的六鉸鏈桿組成的支承系統就叫做**靜定支承**。

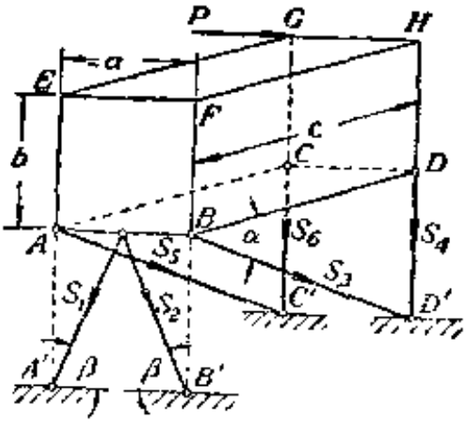
假使支承系統中桿件多於六個，有過剩支承存在，那六個靜力平衡方程式就不夠決定所有桿件的桿力。因此，這種支承系統我們特稱爲**超靜定支承**。

在六個桿件的長軸都共同跟一根直線相交的特例情形中，它們構成的支承系統還是屬於「超靜定支承」。這跟平面支承中三桿件的長軸共同交於一點的情形是一樣的。

分析任何一個六桿件構成的支承系統，首先總是畫剛體受力作用的「分離體圖」，把支承系統中的各桿件本身用它們各自對剛體的反作用力替代出來。這些反作用力的作用線是跟各桿件的長軸相合的，所以只有它們的大小和正反方向要決定。決定各反作用力的大小，也就是各桿件的桿力大小，我們可以不成問題地應用(28)式來計算。不過，一個平衡的力系對任何一根軸線的力矩代數和以及投影代數和都是等於零的。因此，我們不必一定要拘泥於應用(28)式中各式。假使能夠選擇幾根適當的軸線來列立六個獨立的平衡方程式，使每一個方程式裏面只包含一個或兩個未知量，那就比單純用(28)式容易解決得多。底下我們舉些例子來說明這類問題的解決方法。

例題和習題

256. 第337圖中 $ABCDEFGH$ 是一個寬、高、長各等於 a,b,c 的長方體，由圖中六桿件支承在水平位置。假設有一水平力 P 沿圖中 GH 方向在長方體的 G 點作用，試求支承系統中各桿件的桿力。



第 337 圖

解：將長方體當作分離體。先假定各桿件中都是張力；如果某些桿力計算出來的結果是負的，那就表示它們跟假定相反，是壓力。

第一步，我們列立以 BF 作爲力矩軸綫的

力矩方程式。因爲所有各桿件中除開 AC' 桿外，不是跟 BF 相交就是跟它平行，故得

$$-(S_5\cos\alpha)a-Pc=0$$

或 $S_5=-\frac{Pc}{a\cos\alpha}$，可見桿力 S_5 是壓力。同樣方法，列立以 AE 作爲力矩軸綫的力矩方程式，又可得 $S_3=+\frac{Pc}{a\cos\alpha}$，是張力。這一結果，在已知 S_5 的條件下，也可以由「各力在 AC 軸綫上的投影等於零」來決定。

之後，我們分別以 AB 和 $C'D'$ 作爲力矩軸綫，列立力矩方程式，就可得：

$$S_4=-S_6,\quad S_1=-S_2$$

又由「各力對 AB 軸綫的投影代數和等於零」的條件，可得

$$-S_1\cos\beta+S_2\cos\beta+P=0$$

故

$$S_1=-S_2=+\frac{P}{2\cos\beta}$$

最後，我們令各力在 AC 軸綫上的投影代數和等於零，得到

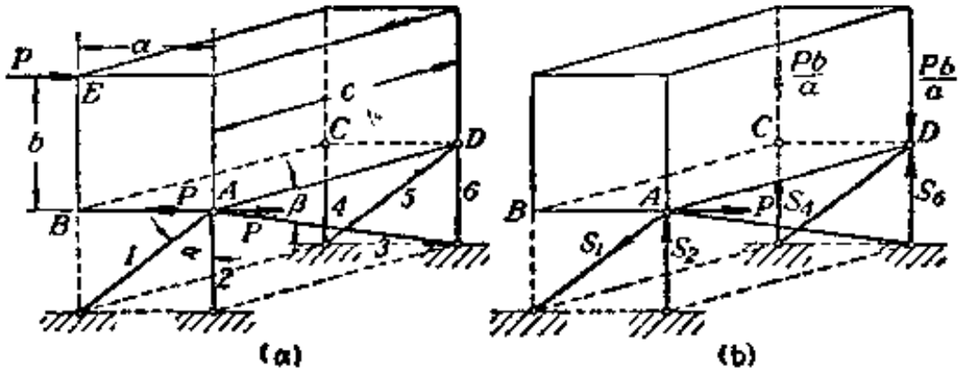
$$(S_1\sin\beta)\frac{a}{2}+(S_2\sin\beta)\frac{a}{2}+(S_3\sin\alpha)a+S_4a+Pb=0$$

把已知的 S_1，S_2 和 S_3 代入上式，就能求出 $S_6=-S_4=P\left(\frac{b+c\,\mathrm{tg}\,\alpha}{a}\right)$

綜合以上得到的結果如下：

$$S_3=-S_5=\frac{Pc}{a\cos\alpha},\quad S_1=-S_2=\frac{P}{2\cos\beta},\quad S_6=-S_4=P\left(\frac{b+c\,\mathrm{tg}\,\alpha}{a}\right)$$

257. 第 338a 圖中是一個由六桿件支承在水平位置的長方體。它的六個支承桿件排列如圖。假定長方體的一端平面 ABE 中有一個水平力 P 作用在 E 點，試求六桿件的桿力各等於多大？



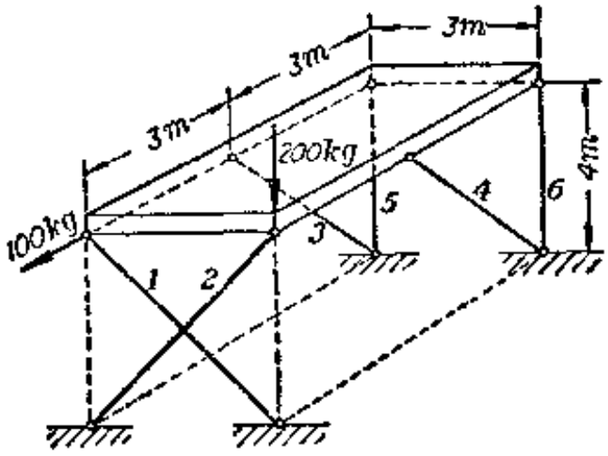
第 338 圖

解：解決本題如應用底下的方法就很簡單：先在 ABE 平面中 A 點加一對相等相反並且跟 E 點 P 力平行而相等的水平力 P，(第 338a 圖)。長方體上的作用力因之由一個 E 點的單力 P 變成 A 點的單力 P 連同一個力偶 Pb。其中的力偶 Pb，按照 §44，又

可以由長方體另一端平面中作用在 CD 兩點的 $\frac{P\cdot b}{a}$ 力構成的力偶來替代（第 338b 圖）。這樣，所有的作用力便都移到 A，C 和 D 三個鉸鏈上來了。我們只要依次考察這三個鉸鏈的平衡，就可得以下的結果：$S_3=S_5=0$，$S_4=S_6=\frac{Pb}{a}$，$S_1=\frac{P}{\sin\alpha}$，$S_2=\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$。至於各反作用力的方向，可參看第 338b 圖。

258. 試求第 339 圖的支承系統中六桿件 1，2，……6 的桿力。

（解：$S_1=S_2=-167\text{kg}$，$S_3=+167\text{kg}$，$S_4=S_5=0$，$S_6=-67\text{kg}$）



第 339 圖

259. 第 340a 圖中 ABC 是一個正三角形形狀的桌面。它由六個等長的桿件支承着，成爲一個水平桌面。正三角形的邊長是 a。在桌面上有一個力矩等於 M 的水平力偶在作用。試求各支承桿件的桿力。

解：把 ABC 當作「分離體」，取 AB 作爲力矩軸綫。分離體上除開桿件的反作用力 S_3 和 S_4 兩力外，所有其他各力對這軸綫的力矩都等於零。又因 S_3 和 S_4 兩力跟鉛垂綫所成的交角相同，因之這兩個反作用力（也就是桿件的桿力）S_3 和 S_4 必然彼此大小相等，方向如圖；這就是說，S_3 是壓力，S_4 是張力，兩者大小相同。同樣，如依次取 AC 和 BC 作爲力矩軸綫列立力矩方程式，又可知：S_5，S_6 兩內力大小相等，前一個是張力，後一個是壓力；S_1 和 S_2 兩內力大小也相等，前一個是張力，後一個是壓力。之後，如觀察分離體上所有各力在 AD 和 BE 兩軸綫的投影，又可發現，所有這些反作用力（也就是各桿件的桿力）都是大小相等的。

最後，我們取過桌面三角形形心的鉛垂綫作爲力矩軸綫，列立力矩方程式，就可得任何一桿件的桿力是

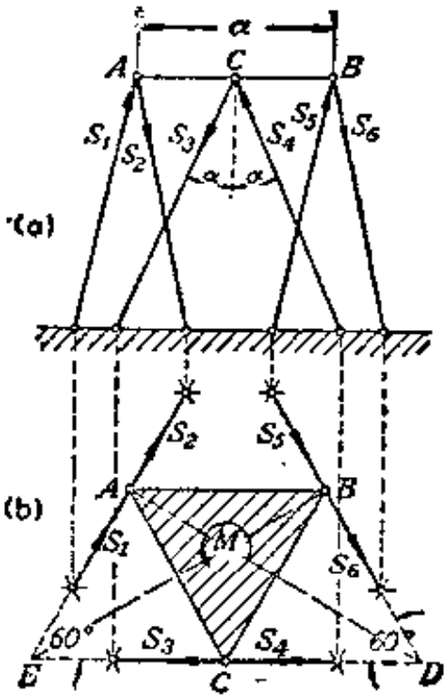
$$S_i=\frac{\sqrt{3}M}{6a\sin\alpha}$$

它們各自的內力性質（張力或壓力）各如圖中所示。

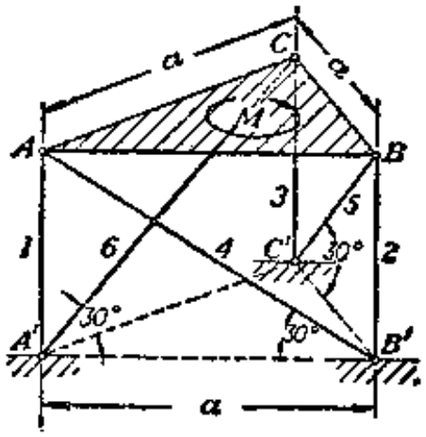
260. 第 341 圖中 ABC 是一個正三角形形狀的桌面，由三個鉛垂桿件跟三個傾斜桿件支承於水平位置。正三角形的邊長是 a。各傾斜桿件的水平綫仰角等於 30°。桌面上有

一個力矩等於 M 的水平力偶在作用。試求支承系統各桿件的桿力。

$$\left(\text{解: } S_1=S_2=S_3=+\frac{2M}{3a},\ S_4=S_5=S_6=-\frac{4M}{3a}\right)$$



第 340 圖



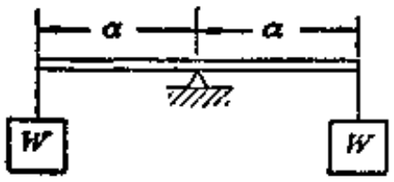
第 341 圖

第八章　虛位移原理

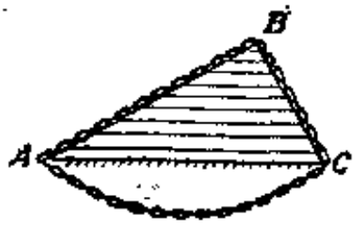
53. 導論

在以上各章中，所有的靜力學問題都是由「力平行四邊形原理」出發來討論的。事實上，還有幾種別的理論也可以作爲出發點。例如，最早期的靜力學就是阿基米得（公元前 287–212）根據「槓桿原理」而構成的。所謂「槓桿原理」是阿基米得提出的一個公設：「等重量物體懸掛在跟支點距離相等的槓桿兩旁處，槓桿必定平衡」（第 342 圖）。很久之後，史狄文納（1548–1620）提出所謂「斜面原理」。這原理是根據「鍊條掛在等高兩斜面上必成平衡」（第 343 圖）一事實引伸出來的。史狄文納完全由這一原理出發，也完整地演繹出全部靜力學。

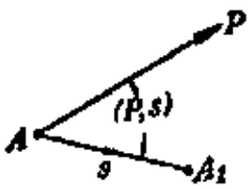
虛位移原理是在史狄文納和其他各家的著作中逐漸形成的。最後由白路里[1]於 1717 年總結成目前形式的論斷。以下各節中，我們先討論這原理本身如何形成，然後，再研究如何應用它來解決某一些靜力學問題；對於解決這些問題，應用「虛位移原理」是特殊的好方法。



第 342 圖



第 343 圖



第 344 圖

54. 功

要把握「虛位移原理」，必須先研究力的作用點發生位置移動（以下簡稱位移）時，力所做的功的意義。譬如，第 344 圖中，P 力作用在一個質點（微小的物體）上。設質點由 A 移動到 A_1 位置，那末向量 AA_1 就稱爲質點的「位移」，並且稱 P 力對這一「位移」做「功」。「功」的大小，我們規定，等於「質點位移 S」跟「P 力在 $\overline{AA_1}$ 上的正投影」的

(1) John Bernoulli.

乘積。所以第344圖中 P 力的功就是

$$Ps\cos(P,s) \tag{a}$$

其中(P,s)指力作用線跟位移間的交角；這是處理「功」的問題中常用的一種表示交角的記號。「功」的單位是力的單位跟長度單位的乘積，通常用m-kg或cm-kg。「功」值的正負要看力投影的方向跟位移方向相同或相反而定；相同時是正的，否則，就是負的。假若力本身的方向跟位移的相同，那$\cos(P,s)$將等於1，「功」就直接等於$P\cdot s$。假若力跟位移正交，$\cos(P,s)$將等於零，這就表示無功發生。例如，一個在光滑表面上運動的質點，表面對它的反作用力將始終垂直於它可能發生的任何位移，所以反作用力做不出「功」來。再如，一個光滑曲線上的質點，像光滑串線上的珠粒，假若因外力的作用發生沿曲線的運動，那曲線對它的反作用力也是始終垂直於位移，不能產生「功」的。

如果第344圖中，質點 A 並不沿直線運動，交角(P,s)在運動過程中不斷變化，那計算「功」值時，就必須將全部運動路線分割成無數的無限小線段 ds，使每一線段跟力作用線的交角(P,ds)可以看做是在這一無限小線段內保持不變。這樣，P 力對任一無限小線段所代表的位移 ds 做的功就將等於 $P\cdot ds\cdot\cos(P,ds)$。把所有各線段上 P 力所做的功加起來，就得到 P 力對於整個路線的全部功。

假使有很多力共同作用在一質點上，那它們對質點任何位移 ds 做的全部功，根據「功」的定義，應等於所有各力在位移方向正投影的代數和跟位移 ds 的乘積。但是各力投影的代數和等於它們的合力在位移方向的投影，所以這一羣力對位移 ds 做的功也就等於它們合力對這位移的「功」。

計算一個力 F_i 對作用點無限小位移 ds 的功時，通常把 F_i 分解爲三正交坐標軸方向的三個分力 X_i，Y_i 和 Z_i。令 α,β,γ 依次爲位移 ds 跟三坐標軸 x,y,z 間的交角，就可得

$$\begin{aligned} F_i ds\cos(F_i,ds) &= X_i\,ds\cos\alpha+Y_i\,ds\cos\beta+Z_i\,ds\cos\gamma \\ &= X_i\,dx+Y_i\,dy+Z_i\,dz \end{aligned} \tag{b}$$

其中 dx，dy 和 dz 分別是位移 ds 在三坐標軸x，y 和 z 上的投影。

55. 一質點的虛位移原理

現在觀察一個在所有方向都可以自由運動的質點受一力系作用的

情形。力系的合力在三正交坐標軸方向的分力是 X, Y, Z。設想這一質點發生一任意的位移 δs。這種想像出來的、可以無限微小的並且可能發生的任意位移通常就叫做質點的**虛位移**。力系合力 R 對虛位移做的功，因此，叫做**虛功**。此虛功顯然跟 § 54(b)式相似，應該是

$$R\delta s\cos(R,\delta s)=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z \qquad (a)$$

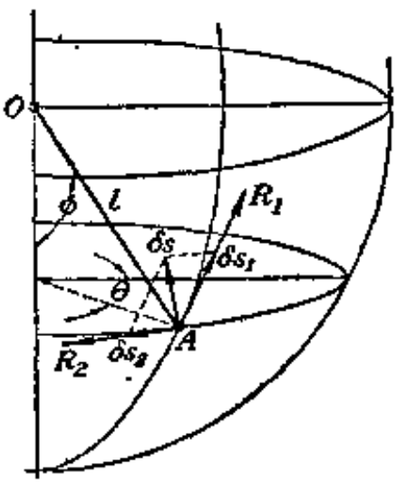
假使力系已經自成平衡；$X=0, Y=0, Z=0$；那由 (a) 式可知它的虛功也必定將等於零。這就是說，

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=0 \qquad (b)$$

反過來說，**假使作用在一質點上的一個力系，所有各力對質點每一虛位移所做功的代數和都等於零，那它就一定是一個平衡力系。**這一論斷稱爲「**一質點的虛位移原理**」。它的證明如下：

因爲虛位移 δs 可以任意選定並沒有固定方向，所以 δs 在三坐標軸方向的分位移 δx, δy 及 δz 可以是任意擇定的無限小量。現在令 $\delta y=0, \delta z=0$，但 δx 不等於零，由(b)式可看到，X 就必須等於零。同樣理由，也可證明：Y 和 Z 都必須等於零。故根據 (21) 式，可知力系是一平衡力系。

現在再觀察一個受有「部份約束」的質點，例如，第 345 圖中的質點 A。此質點由一重量可以不計的剛性鉸鏈桿連接在一固定點 O 上。A 點因之只可以沿一球面自由運動。球面的半徑就是 OA 桿的長度 l。球心就是固定點 O。如果 A 點受一力系作用而平衡，那顯然只有這一力系的合力在垂直於 OA 的平面上沒有投影才可能。



第 345 圖

設想 A 發生一虛位移 δs。虛位移可以是任意的無限小位移，但是也必須是可能發生的，決不跟「約束」矛盾的；故 δs 必定是在垂直於 OA 的過 A 點平面中[1]。分解 δs 爲兩個分位移 δs_1 及 δs_2；令 δs_1 取球面經圈的 A 點切

(1) 因爲高於一次方的無限小量，對於微小量本身來說，是可以忽略不計的，所以 A 點週圍的無限小球面可以看作就是 A 點的球面切平面。

線方向，δs_2取球面緯圈的 A 點切線方向。 又令 R_1 和 R_2 分別爲力系合力在這兩方向的分力，便可得力系對虛位移 δs 做的全部功是

$$R_1\delta s_1+R_2\delta s_2$$

至於力系合力在垂直於 R_1 和 R_2 方向的分力以及 OA 桿對質點的反作用力，因爲它們都垂直於虛位移，無功發生，所以我們可以不去考慮。假若質點是處於平衡狀態，

$$R_1=0,\quad R_2=0$$

那就可得

$$R_1\delta s_1+R_2\delta s_2=0 \tag{c}$$

可見：一個受有「部份約束」的質點，如果平衡的話，它上面所有主動作用力對任一虛位移的全部虛功就非等於零不可。 反過來說，若是這樣一質點上的所有主動作用力對任一虛位移的全部虛功都等於零，那質點就必定是處於平衡狀態。這一反論斷我們可以按以上處理完全自由的質點的方法同樣給以證明，此處不再重複。

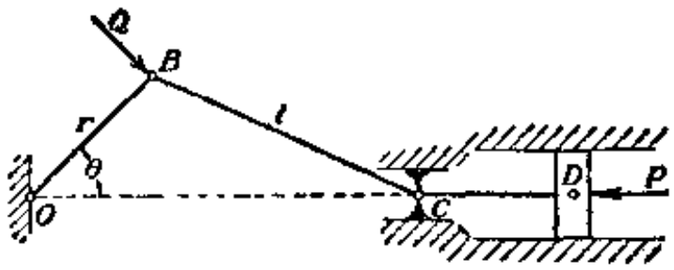
同樣，對於一個被約束在任意的光滑表面或光滑曲線上的質點，我們也可以應用以上方法來獲得相同結論；就是：這樣一個質點要平衡的話，一定要它上面的主動作用力對任何虛位移所做的全部功都等於零。這是質點平衡的必要條件，同時也是充分條件。 條件中所指的虛位移當然必須是可能發生的，以光滑表面的約束情形來說，虛位移只可能在過質點位置而跟表面相切的平面中發生；以約束是光滑曲線的情形來說，它就只可能在曲線的質點處切線方向發生。

應該仔細注意的，所有以上討論，我們對於摩阻力的影響都不曾考慮，「約束」對質點的反作用力在質點虛位移上完全無功發生，從而反作用力決不會在我們的虛功方程式內出現。所以對於反作用力可以不管的問題，也就是只要決定使質點平衡主動作用力必須滿足什麼條件的問題，虛位移原理特別適用。

56. 理想系統

假使有若干點互相連接起來，使它們相互間的相對運動受到一定的牽制，那我們就得到一個點系。 很多靜力學問題都可以簡化爲「點系」平衡的一般性問題。例如第 346 圖中的傳動機構，假如要決定圖中 P；Q 兩力使機構保持平衡所應滿足的條件，那我們就可以把整個機構看做是由四個點組成的點系。 這點系計包括：曲軸中心 O，曲拐梢子

B，十字頭 C 和活塞 D 所代表的四點。四點由剛桿 OB, BC, CD 連接如圖。這些剛桿只當作點與點彼此間互相約束的東西。除此之外，點系中還有一個完全固定的 O 點以及只可以沿 OD 線運動的 C 和 D 點也都代表點系的運動自由的約束。



第 346 圖

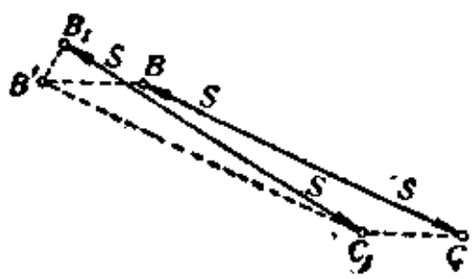
跟以前一樣，仍假定機構內摩阻力可以不計。各剛桿對於兩端梢子的反作用力，因之，都垂直於各自的接觸面，從而，各剛桿繞梢子轉動時，這些反作用力都無「功」發生。此外，十字頭和活塞的滑動也已假定爲摩阻力極小，故它們受到的反作用力全部垂直於各作用點由滑動而引起的位移，因之，也無功發生。

各點間的相對距離由各剛桿保持，故始終不變。此外，又因各外力只作用於各連接桿的交點上，故任何一剛桿加於兩端兩「點」的兩反作用力 S 必定相等相反，對作用點的任何虛位移都無功發生；更精確一點說，就是兩 S 對任何虛位移做的功都必定是總和等於零。這論斷的證明見第 347 圖。點系發生任意一無限小位移後，其中 B 和 C 兩點分別由圖中原來位置運動到新位置 B_1 和 C_1。這種位移的發生，我們可想像是 BC 桿先作平行於本身的推移達到圖中 $B'C_1$ 位置，然後，以 C_1 爲中心旋轉到新位置 B_1C_1。首先，在平行推移過程中，兩端的位移 $\overline{BB'}$ 和 $\overline{CC_1}$ 完全相同，所以 BC 桿對兩端兩「點」的兩相等相反反作用力 S 在位移 $\overline{BB'}$ 和 $\overline{CC_1}$ 上做的功必然將互相抵消。其次，在旋轉過程中，因 C_1 點固定不動，B 端的位移又始終跟此端的反作用力 S 垂直，故兩 S 做的功都等於零。可見在 B, C 兩「點」發生位移的整個過程中，這兩 S 力的確無功發生。

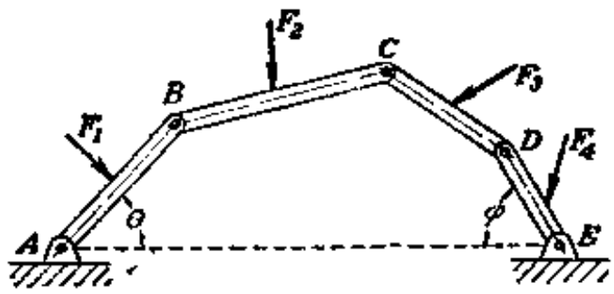
綜合以上討論各點，可知：任何一個用剛桿連接的、摩阻力可以不計的、像第 346 圖所畫的點系，它內中的反作用力以及各種內力對於點系的任何虛位移都無功發生；所能做功的只有主動作用力（如第 346 圖

的 P,Q 力)。

現在再觀察一種很多剛體組成的剛體系統。這種系統中,各剛體相互間以及剛體跟基礎間全都由理想鉸鏈連接,像第 348 圖一樣。如果整個系統的確都是絕對的剛體,並且所有的摩阻力都可以不計,那末同樣可以推知,其中一切反作用力和內力都不能對整個系統的任何虛位移做功;可以產生「功」的,只有作用在各剛體上的主動作用力。



第 347 圖



第 348 圖

像第 346 圖的點系以及像第348圖的剛體系統,我們一總叫做理想系統。這種系統中,一切由於「運動約束」而引起的「力」,對於全系統可能的虛位移完全沒有「功」產生;也就是說,這些力的虛功永遠是總和等於零。

就理想系統可能發生的虛位移而論,第 346 圖的點系中它所有各點的位置都可以完全由曲拐 OB 跟定軸 OC 所成的交角 θ 來決定。因此,θ 可以看做是一種坐標值,由它可以完全決定整個系統的形狀(也就是各點的位置)。這種由一個坐標值就可以完全決定形狀的「理想系統」通常稱爲**一次自由度系統**。很多的機器和器械都是一次自由度系統。它的可能的虛位移只有一種。第 346 圖中,如果令 θ 角發生一無限小的變化 $\delta\theta$ 時,全系統所有各點的虛位移也就由之完全決定。

第 345 圖的單一質點就不同。A 點的位置必須已知 θ 和 φ 兩個角才能確定,所以是一個**二次自由度系統**。如果令 φ 角發生一無限小的變化 $\delta\varphi$,我們將得到 A 點沿經圈方向的虛位移 δs_1;假使又讓 θ 角發生一無限小變化 $\delta\theta$,同樣又可得 A 點沿緯圈方向的虛位移 δs_2。A 點任何可能的虛位移都能由這兩種位移 δs_1 和 δs_2 聯合決定。

第 348 圖的剛體系統顯然也是個「二次自由度系統」。整個系統

的形狀必須已知兩個坐標值，例如 AB 桿和 DE 桿的水平線仰角 θ 和 φ，才能確定。

57. 理想系統的虛位移原理

像第 346 圖和第 348 圖的理想系統，我們如果要決定它們主動作用力的平衡條件，當然也可以應用每一「點」或每一「剛體」的平衡方程式。不過這些平衡方程式中非但包含有主動作用力而且支承的反作用力以及相互間的內力也將同在其內，所以有時非常繁複不容易解開。如果問題只在決定作用力的平衡條件，並不需要求出各反作用力和內力的大小，那應用虛位移原理就可以大大簡化解題的手續。關於 § 56 所討論的各種理想系統，虛位移原理說明了：如果整個系統中所有主動作用力對每一可能的虛位移做的全部功始終等於零，那這一理想系統就必然自成平衡。

例如，令第 346 圖中 θ 角增加一個無限小的角度 $\delta\theta$，全系統中各點的虛位移隨而確定，可得 B 點的虛位移是一個長 $\delta s_1 = r\delta\theta$ 的圓弧。至於 C 和 D 點相應的虛位移 δs_2，自然也可以根據圖中幾何關係來決定。D 點的 P 力跟這一位移 δs_2 方向相同，如假定 B 點的 Q 力垂直於 OB，按虛位移原理就可得

$$+P\delta s_2 - Q\delta s_1 = 0$$

故全系統的平衡條件就是

$$\frac{P}{Q} = \frac{\delta s_1}{\delta s_2} \tag{a}$$

可見平衡時的作用力間的相互關係，只要求出位移 δs_1 跟 δs_2 的比值就可以完全確定；各桿件中的內力以及支承的反作用力都不會在式中出現。

要證明理想系統的「虛位移原理」，可觀察一個 n 個點構成的一般點系。假使這一系統已經平衡，那其中每一點自然也一定平衡。因此，所有作用在任意一點上的「力」必須滿足「虛功總和等於零」的條件。如果令 R_i 代表任意一點 i 上面所有「作用力」的合力，N_i 代表同點上一切「反作用力」的合力，δs_i 代表這一點的虛位移，那末這一 i 點的平衡方程式就是

$$R_i\,\delta s_i \cos(R_i, \delta s_i) + N_i\,\delta s_i \cos(N_i, \delta s_i) = 0$$

整個點系中，每一點都有這樣一個平衡方程式，故加攏各式，就可得

$$\sum_{i=1}^{i=n} R_i\,\delta s_i\cos(R_i,\delta s_i)+\sum_{i=1}^{i=n} N_i\,\delta s_i\cos(N_i,\delta s_i)=0 \qquad (b)$$

其中第一項是所有「作用力」對各自作用點的虛位移所做的全部功；第二項是所有「反作用力」對相應各點的虛位移所做的全部功。§56中已說過，一個理想系統的，各反作用力是無功發生的（或者說，它們的功是互相抵消掉的），因此，(b)式第二項對於全系統任何跟「約束」符合的虛位移都將等於零，全式因之化爲

$$\sum_{i=1}^{i=n} R_i\,\delta s_i\cos(R_i,\delta s_i)=0 \qquad (29)$$

此式說明：**任何點羣構成的理想系統，如果已成平衡的話，那末所有作用力對於全系統任何跟「約束」符合的虛位移所做的全部功必定都等於零；所有由「約束」而引起的反作用力完全無功發生，不在平衡方程式中出現。**

以上說法的反論斷可證明如下：先假定整個系統並不平衡。既不平衡，那末其中各點就要向所受到的全部力（作用力和反作用力）的合力方向作「約束」所允許的運動。也就是說，各點的合力都將跟各點的位移方向相同，故所產生的完全都是正功。可是反作用力所產生的全部功總是等於零的，所以作用力的全部功那就不能等於零。這當然跟這一反論斷的前提(29)式直接矛盾。可見理想系統中，**如果全部作用力對於任何「約束」所允許的虛位移無功發生，那這一系統就非平衡不可。**這是虛位移原理的更普遍的形式，以下我們舉些例子來說明它的應用。

例題和習題

261. 第349圖中是一個螺旋壓床。螺旋間的摩阻力可以不計。試求旋轉壓床所用的一對相等相反力 P 跟壓床壓力 Q 的關係。

解：壓床的螺桿和機架可看做都是絕對剛體。壓床壓力 Q 可看做是作用在螺桿和機架上的兩個「力」。在這樣一個理想系統中，「約束」所允許的虛位移只是螺桿的無限小旋轉角 $\delta\theta$。因此，力偶 P 所做的虛功應等於 $2Pa\,\delta\theta$。令 h 代表螺桿的螺距，可得螺桿下端的虛位移爲 $h\cdot\delta\theta/2\pi$。作用在螺桿下端的 Q 力對這一虛位移所做的功，因此，於等 $-Qh\delta\theta/2\pi$。機架上的 Q 力無功產生。故按虛位移原理得

$$2Pa\,\delta\theta-Q\frac{h\delta\theta}{2\pi}=0$$

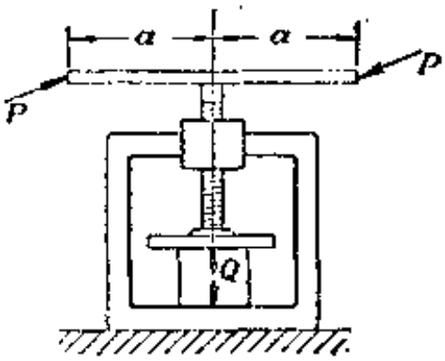
也就是 $$P=\frac{Qh}{4\pi a} \tag{c}$$

262. 試求第350圖中差動滑輪平衡時，P 力跟 Q 力的關係。

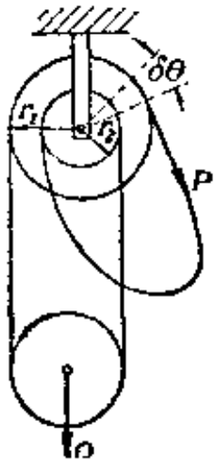
解：令定滑輪旋轉一無限小角度 $\delta\theta$，可得 P 和 Q 力的虛功分別爲 $Pr_1\delta\theta$ 和 $Q\frac{(r_1-r_2)}{2}\delta\theta$。由虛位移原理，知

$$Pr_1\,\delta\theta-Q\frac{(r_1-r_2)}{2}\delta\theta=0$$

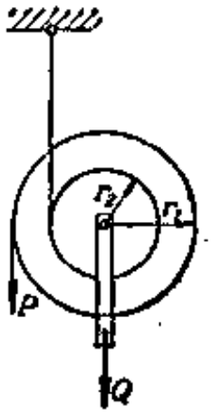
故 $$P=\frac{r_1-r_2}{2r_1}Q \tag{d}$$



第 349 圖



第 350 圖



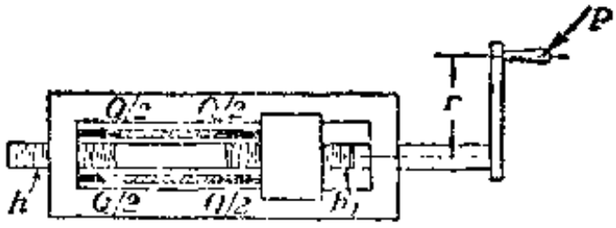
第 351 圖

263. 如第351圖的滑輪裝置。不計摩阻力，試求平衡時，P 力跟 Q 力的關係。

(解：$P=Q\frac{r_2}{r_1-r_2}$)

264. 第352圖中是一個差動螺旋的加壓裝置。兩螺旋的螺距分別是 h 及 h_1。圖中畫斜綫部份代表一個圓管的切面。不計摩阻力，試問圓管受到的壓力 Q 跟加於搖柄上的 P 力有何關係？

(解：$\frac{P}{Q}=\frac{h-h_1}{2\pi r}$)



第 352 圖

265. 第353圖中是一個由八根剛桿組成的機構。八剛桿用理想鉸鏈互相連接，構成三個菱形。試求平衡時，圖中 P，Q 兩力的比值。

(解：$\frac{P}{Q}=\frac{1}{3}$)

266. 長 l 重 W 的 AB 桿斜靠在一光滑的牆面上，跟水平線構成交角 θ，由一作用在它 A 端的水平力 P 推住(第 354 圖)。地面摩阻力可以不計，試求平衡時，P 力應等於多大?

解：令 AB 桿沿地面及牆面旋轉一無限小角度 $\delta\theta$，可得 A 端的虛位移爲

$$|l\cos(\theta+\delta\theta)-l\cos\theta|=l\,\delta\theta\sin\theta$$

AB 桿重心 C 相應的虛位移爲

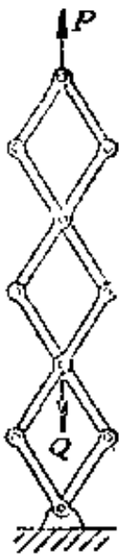
$$\left|\frac{l}{2}\sin(\theta+\delta\theta)-\frac{l}{2}\sin\theta\right|=\frac{l}{2}\delta\theta\cos\theta$$

按虛位移原理，得

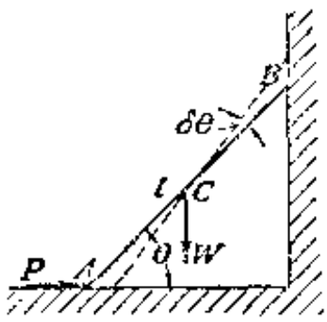
$$Pl\,\delta\theta\sin\theta-W\frac{l}{2}\delta\theta\cos\theta=0$$

故

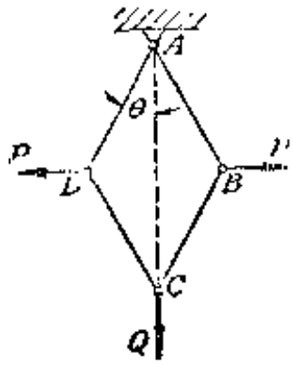
$$P=\frac{W}{2}\operatorname{ctg}\theta \qquad (e$$



第 353 圖



第 354 圖



第 355 圖

267. 四鉸鏈桿組成如第 355 圖的菱形 $ABCD$。A 點固定，B，C 和 D 三點各受圖中 P，Q 和 P 各力作用。試求平衡時，圖中 θ 角等於多大?

(解：$\operatorname{tg}\theta=\frac{P}{Q}$)

268. 第 356 圖中 AB 桿長 $2l$，重 Q，穿過一光滑圓環 D，一端抵在一光滑的鉛垂牆面的 A 處。試求平衡時，AB 和牆面所成的交角 θ。

解：因爲 AB 桿上的「作用力」只是 C 點的重力 Q，其他全部是「約束」的反作用力，故 AB 桿 A 端發生一「約束」所允許的虛位移 δs_a (見第 356 圖) 時，重心 C 的相應位移必須在水平方向；否則作用力的虛功不能等於零。A 端的鉛垂位移 δs_a 可分解爲兩個「分位移」$\delta s_a\sin\theta$ 和 $\delta s_a\cos\theta$ 分別垂直和平行於桿軸。其中 $\delta s_a\sin\theta$ 可看作是 AB 桿繞 D 點旋轉出來的，$\delta s_a\cos\theta$ 可看作是 AB 桿沿桿軸方向滑動而生的。跟這兩個「分位移」相應的重心 C 的分位移分別是 $\frac{l-c}{c}\delta s_a\sin\theta$ 和 $\delta s_a\cos\theta$。

根據以上討論各點，C 點兩「分位移」在鉛垂方向的投影代數和應等於零。

故 $$\frac{l-c}{c}\sin^2\theta-\cos^2\theta=0$$

因之，可得 $$\frac{l}{c}\sin^2\theta=1 \text{ 或 } \sin^3\theta=\frac{c}{l}$$

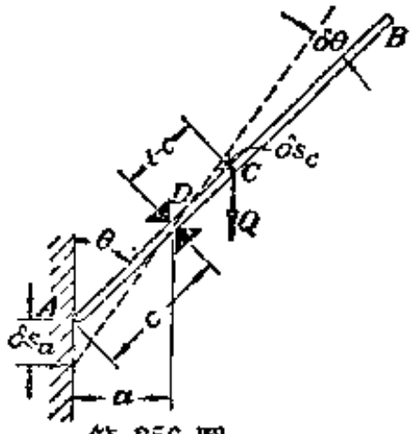
以 $a/\sin\theta$ 代替 c，得

$$\sin^3\theta=\frac{a}{l} \text{ 或 } \sin\theta=\sqrt[3]{\frac{a}{l}}$$

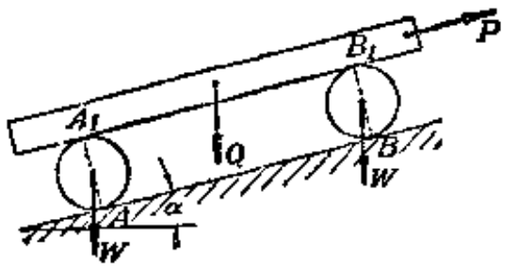
由此式可見，$a\geqq l$ 時，AB 桿才能平衡。

269. 第 357 圖中，A_1B_1 梁放在兩個半徑等於 r 的滾柱上，由一跟斜面平行的 P 力推它沿斜面上行。設滾柱和梁的自重各爲 W 和 Q，斜面的水平傾仰角是 α，各接觸點完全無滑動發生，試求平衡時，P 力將等於多大？

解： 因各接觸處沒有滑動發生，各反作用力因而都不做功，故整個裝置是一理想系統。如令兩滾柱繞 A，B 兩定點旋轉一無限小角度 $\delta\theta$，就可得到各力作用點的虛位移。應用虛位移方程式即知 $P=(Q+W)\sin\alpha$。



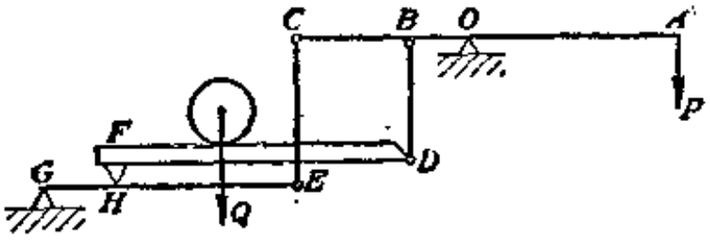
第 356 圖



第 357 圖

270. 第 358 圖是一台秤結構。槓桿 COA 取水平位置時，P 力與 Q 力間的關係完全跟重體 Q 在秤台 DF 上的位置無關。設 $GE:GH=3$，試求 $(a)OC:OB$，$(b)P:Q$。

(解：$(a)OC:OB=3$，$(b)P:Q=OB:OA$)



第 358 圖

271. 第 359 圖中是一座壓床，由一業桿件 EF，FG，KF 及槓桿 HKL 構成。圖中 AB，CD 爲直接加壓力於圓球的平板。設所有桿件都是絕對剛體，HKL 槓桿 L 端的正交作用力等於 P，圓球受到的壓力等於 Q，試求 P，Q 兩力的比值以及圖中各交角 θ，φ

和 ψ。

解：令圖中 θ 角發生一無限小變化 $\delta\theta$，可得 E 和 L 兩點的虛位移依次爲 δs_e 和 δs_l。因此，

$$P : Q = \delta s_c : \delta s_l \qquad (f)$$

至於 $\delta s_e : \delta s_l$ 的決定，可投影 F 和 E 的虛位移於桿件 EF 方向。因 EF 桿的長度固定不變，故這兩投影應相等；

$$\delta s_f \sin(\theta+\varphi) = \delta s_e \cos\varphi \qquad (g)$$

同樣，投影 δs_f 及 δs_k 於 FK 桿的水平方向，可得

$$\delta s_f \cos\theta = \delta s_k \cos\psi \qquad (h)$$

但 K，L 兩點的位移 δs_k 及 δs_l 間的關係是

$$\delta s_l = \frac{l}{a}\delta s_k \qquad (i)$$

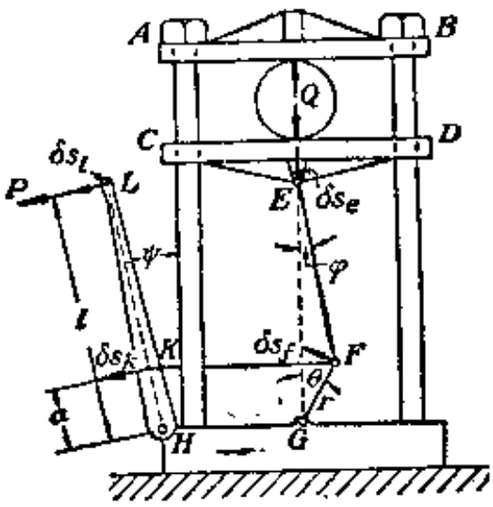
故自 (g)，(h) 和 (i) 三式中消去 δs_k 和 δs_f，就得

$$\frac{\delta s_e}{\delta s_l} = \frac{a}{l}\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}$$

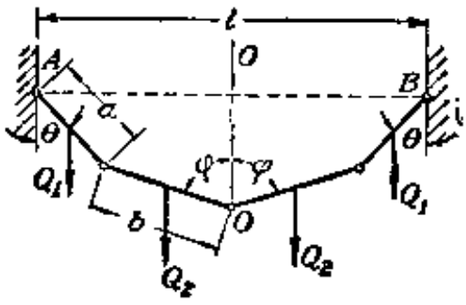
代入 (f) 式中，得

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{l}\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{a}{l}\cos\psi(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi)$$

272. 第 360 圖中四鉸鏈桿的重量分別是 Q_1 和 Q_2。試求平衡時，圖中 θ 和 φ 角各等於多大？



第 359 圖



第 360 圖

解：因形狀的對稱，故知整個桿件系統的重心必在鉛垂軸 OO 上。重心跟 AB 水平線的距離，根據重心計算方法，是

$$y_c = \frac{Q_1\frac{a}{2}\cos\theta + Q_2\left(a\cos\theta + \frac{b}{2}\cos\varphi\right)}{Q_1+Q_2} \qquad (j)$$

對於整個系統的虛位移，全部力中只有重力才做功，此功自應等於整個系統重心的高度變化跟全部桿件重量的乘積。如全系統已平衡，此功就必須等於零。可見全系統的重心應該取最低的位置，全系統才能平衡。因之，(j) 式應該取最大值。求 y_c 的最大

值，可令 (l) 式對 θ 和 φ 角的微分等於零：

$$(Q_1+2Q_2)\,a\sin\theta\,d\theta+Q_2\,b\sin\varphi\,d\varphi=0 \qquad (k)$$

此外，所有桿件在水平方向的投影代數和等於 A，B 兩支點間的距離 l：

$$2a\sin\theta+2b\sin\varphi=l \qquad (l)$$

對 θ 及 φ 角微分 (j) 式，得

$$a\cos\theta\,d\theta+b\cos\varphi\,d\varphi=0 \qquad (m)$$

如果各值必須同時滿足 (k) (m) 兩式，那惟有 $d\theta$ 和 $d\varphi$ 前的係數的比例相等才可能，即惟有

$$\frac{(Q_1+2Q_2)a\sin\theta}{a\cos\theta}=\frac{Q_2b\sin\varphi}{b\cos\varphi}$$

$$(Q_1+2Q_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha=Q_2\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad (n)$$

由 (n) (l) 兩式，就可決定 θ 和 φ。

2.3. 第 361 圖中，AB 和 BC 是長度各等於 l_1 和 l_2、重量各等於 Q_1 和 Q_2 的兩個鉸鏈桿。設有一水平力 P 作用在 BC 桿的 C 端，試求平衡時，圖中 θ 和 φ 等於多大？

解： 因全系統的形狀必須由兩個坐標值決定，故是一個二次自由度系統。虛位移從而也有兩種成份。先令圖中 φ 角發生一無限小的變化 $\delta\varphi$，由虛位移原理，可得

$$Pl_2\,\delta\varphi\cos\varphi-Q_2\frac{l_2}{2}\,\delta\varphi\sin\varphi=0 \qquad (o)$$

故

$$\mathrm{tg}\,\varphi=2P/Q_2 \qquad (p)$$

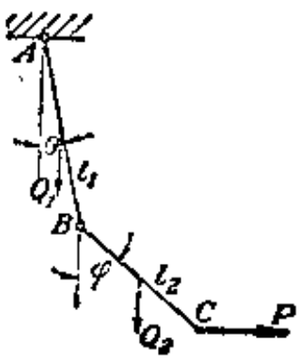
之後，令 φ 角保持不變，θ 角增加一無限小角度 $\delta\theta$，又可得

$$P\,(l_1\cos\theta+l_2\cos\varphi)\,\delta\theta-Q_1\frac{l_1}{2}\delta\theta\sin\theta-Q_2\left(l_1\sin\theta+\frac{l_2}{2}\sin\varphi\right)\delta\theta=0$$

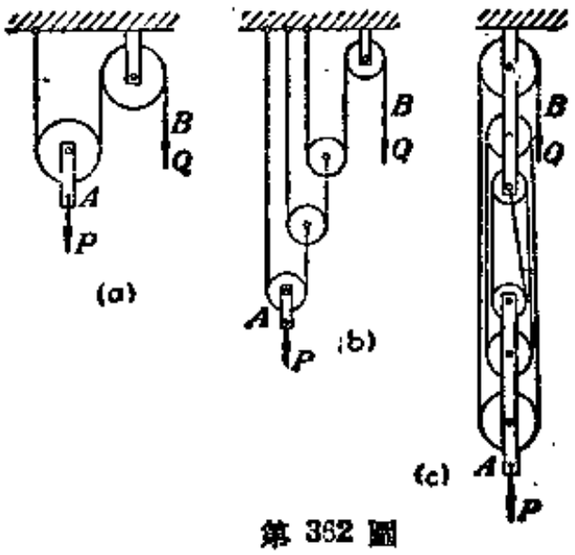
應用 (o) 式消去上式中包含 φ 的各項，得

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{P}{Q_1/2+Q_2} \qquad (q)$$

故整個系統的形狀可由 (p) 和 (q) 兩式完全決定。



第 361 圖



第 362 圖

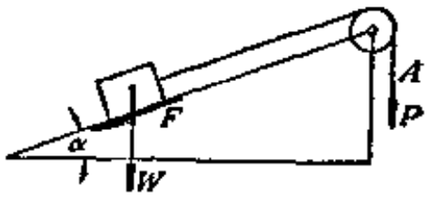
274. 試求第 362 圖中各式滑輪在平衡時的 Q/P 比值。摩阻力及滑輪、繩索的重量都可以不計。

$$\left(\text{解:}\begin{cases}(a)Q/P=1/2\\(b)Q/P=1/8\\(c)Q/P=1/6\end{cases}\right)$$

58. 簡單機械的效率

以上的討論都僅指虛位移原理在不計摩阻力的理想系統中的應用。多數的機械中，機件間的摩阻力很小，的確可以不計。但是，此外也有摩阻力非計不可的情形。在這種情形下，應用虛位移原理時，那我們除開全系統的所有「作用力」的虛功外，還必須攷慮摩阻力做的功。

例如，第 363 圖中用來舉起重體 W 的斜面裝置。如果斜面並不光滑，那計算足夠使重體將開始滑動的 P 力大小，就必須顧及重體跟斜面間摩阻力的影響。故虛位移方程式應該是



第 363 圖

$$P\delta s-W\delta s\sin\alpha-F\,\delta s=0 \qquad (a)$$

其中 δs 指拉繩 A 端的鉛垂方向位移，F 指物體跟斜面間的摩阻力。至於滑輪的摩阻力，因極小，此處仍不考慮。令 μ 代表物體、斜面間的摩阻係數。它們間的正壓力是 $W\cos\alpha$，故 (a) 式可化爲

$$P\delta s-W\delta s\sin\alpha-\mu W\delta s\cos\alpha=0$$

或

$$P=W(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) \qquad (b)$$

我們由 (a) 式可看到：作用力 P 所做的功 $P\delta s$ 非但是消耗在將重體 W 舉起 $\delta s\sin\alpha$ 高度，而且也消耗在克服摩阻力上。舉起重體的功 $W\delta s\sin\alpha$ 通常叫**有用功**，它跟**加入的功** $P\delta s$ 的比值稱爲**機械效率**。本例中，斜面的機械效率就是

$$\frac{\text{有用功}}{\text{加入的功}}=\frac{\sin\alpha}{(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} \qquad (c)$$

可見 $\mu=0$ 時，效率將等於一。這是不計摩阻力的理想情形。除此之外，機械效率就隨 μ 的增加而遞減。

假使現在不舉起重體 W，反而由 P 力自反方向將重體沿斜面推下，那末重體將開始下滑時，P 力的大小就可由下式決定：

$$P\delta s+W\delta s\sin\alpha-F\delta s=0$$

以 $F=\mu W\cos\alpha$ 代入上式，可得

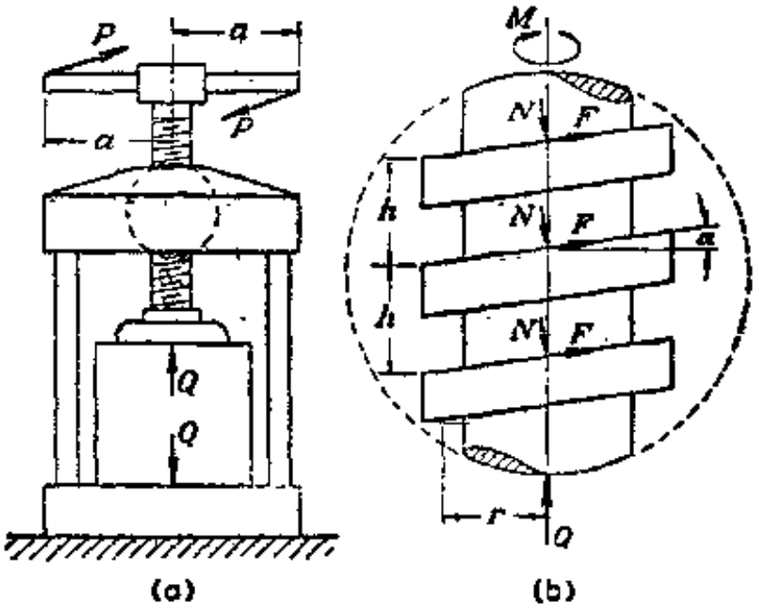
$$P=\mu W\cos\alpha-W\sin\alpha$$

如 $\mu\cos\alpha-\sin\alpha=0$，也就是 $\operatorname{tg}\alpha=\mu$，斜面的水平線仰角恰等於摩阻角時（見 § 12），那所需的 P 力大小就將等於零。假若 α 角大於摩阻角 φ，那重體就不需任何推力也可自行滑下。

在 $\alpha=\varphi$ 的特殊情形下，第 363 圖中斜面的機械效率可由 $\mu=\operatorname{tg}\alpha$ 代入(a)式去決定，故得

$$\frac{\text{有用功}}{\text{加入的功}}=\frac{\sin\alpha}{(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)}=\frac{1}{2}$$

以上處理斜面問題的方法也可以同樣應用來處理第 364a 圖的螺桿壓床。螺桿的螺紋我們可以當作是圍繞在一個圓柱上的斜面。螺桿發生一無限小的旋轉角 $\delta\theta$ 後，作用力偶 $M=Pa$ 所做的功將等於 $2Pa\,\delta\theta$，壓床壓力 Q 所做的功將等於 $-\frac{Qh\,\delta\theta}{2\pi}$。至於計算機架對於螺桿螺紋的摩阻力 F（第 364b 圖），我們可假定螺紋切面是長方形，



第 364 圖

螺紋的平均半徑是 r。各摩阻力 F 的作用點的虛位移故等於 $\delta s=\frac{r\,\delta\theta}{\cos\alpha}$。應用虛位移原理，可得

$$2Pa\,\delta\theta-\frac{Qh\,\delta\theta}{2\pi}-\Sigma F\,\frac{r\,d\theta}{\cos\alpha}=0 \qquad (d)$$

其中F指一小部份接觸面間的摩阻力，它的總和才是全部摩阻力，故上式最末一項代表全部摩阻力的虛功。至於接觸面間的正交壓力，因爲它們都垂直於作用點的位移，故不做功。螺桿下端跟加壓平板間的摩阻力此處仍不考慮。現在令μ代表螺紋間的摩阻係數，可知

$$\Sigma F=\mu\Sigma N$$

又因各力在鉛垂方向的投影代數和要等於零，故

$$\Sigma F\sin\alpha-\Sigma N\cos\alpha+Q=0$$

由以上兩式中消去ΣN，就得到

$$\Sigma F=\frac{\mu Q}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}$$

把這個ΣF值和螺距$h=2\pi r\,\mathrm{tg}\,\alpha$代入$(d)$式，可得

$$2Pa-Qr\,\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{\mu Qr}{\cos^2\alpha-\mu\sin\alpha\cos\alpha}=0$$

故

$$M=Qr\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}$$

但是$\mu=\mathrm{tg}\,\varphi$（或$\varphi=\mathrm{arc}\,tg\mu$），因此，

$$M=Qr\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varphi) \qquad (e)$$

在不計摩阻力的理想情形下，$\varphi=0$，就可得到

$$M=Qr\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

在這理想情形下，全部「加入的功」都將化爲「有用功」；在(e)式所表示的情形下，加入的功却有一部份要消耗在克服摩阻力。故根據定義，可知一般螺旋的機械效率是

$$\frac{\text{有用功}}{\text{加入的功}}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}(\alpha+\varphi)} \qquad (f)$$

如果螺距角很大而摩阻角φ很小，那作用力偶M取去後，螺桿也可能因壓力Q而上行。要防止這種螺桿倒行現象發生，需要在力偶M取消後保持一個作用力偶。這力偶的大小也可以用虛位移原理來確定。列立計算式時，只要把摩阻力的方向反過來，就可得相當於(d)的下式：

$$2Pa\,\delta\theta-\frac{Qh}{2\pi}\,\delta\theta+\Sigma F\,\frac{r\,\delta\theta}{\cos\alpha}=0 \qquad (g)$$

再按以前方法，又可得

$$\Sigma F=\frac{\mu Q}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$$

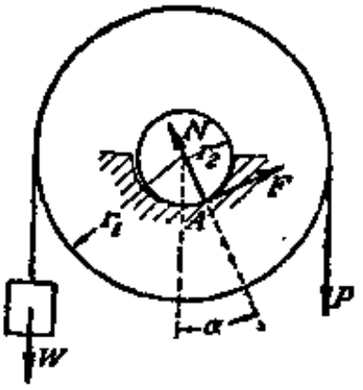
代入(g)中，就得到防止螺桿倒行的力偶，它的力矩值是

$$M=2Pa=Qr\,\mathrm{tg}\,(\alpha-\varphi)$$

如 $\alpha=\varphi$，螺距角跟摩阻角恰巧相等，那末 $M=0$。可見在 $\alpha\leqq\varphi$ 時，螺桿可自行制止它的倒行，不需要另加力偶。$\alpha=\varphi$ 的情形下，由 (f) 式可得螺旋的效率是 $\mathrm{tg}\,\alpha/\mathrm{tg}\,2\alpha$。

如果 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$，(e)中的 M 值將變成無限大，根據(f)式機械效率將等於零。這表示 F 和 N 的合力是作用在摩阻錐以內(見 § 12)，作用力偶無論如何巨大不過徒然增加機架跟螺桿螺紋間的壓力，毫不產生「有用功」。

另外一個例子是第 365 圖中的滑輪裝置。在決定使圖中重體 W 將開始滑動的作用力 P 的大小時，我們假定作用在滑輪上的所有各力都是同在滑輪厚度方向的中平面內。先觀察滑輪軸和軸承的接觸情形。它們的接觸點 A 的位置由圖中 α 角的大小來表示。分解這一點的反作用力爲滑輪半徑方向的正交壓力 N 及切線方向的摩阻力 F。令滑輪發生一無限小的旋轉角 $\delta\theta$ (順時針方向的旋轉)，可得虛功方程式：



第 365 圖

$$(P-W)r_1\delta\theta-Fr_2\delta\theta=0 \qquad (h)$$

式中 r_1 及 r_2 分別指滑輪和滑輪軸的半徑。投影各力於鉛垂和水平方向，令它們的代數和分別等於零，又可得：

$$N\cos\alpha+F\sin\alpha-P-W=0$$

$$F\cos\alpha-N\sin\alpha=0$$

將 $N=F/\mu$ 代入以上兩式，就得到

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\mu$$

$$F=\frac{\mu(P+W)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$$

把以上各結果分別代入(h)中，可知

$$P=W\left(\frac{1+\dfrac{\mu r_2}{r_1\sqrt{1+\mu^2}}}{1-\dfrac{\mu r_2}{r_1\sqrt{1+\mu^2}}}\right) \tag{i}$$

故滑輪的機械效率是

$$\frac{1-\dfrac{\mu r_2}{r_1\sqrt{1+\mu^2}}}{1+\dfrac{\mu r_2}{r_1\sqrt{1+\mu^2}}} \tag{j}$$

假若 μ 值很小，我們可以不計它的高次方，那 (j) 式就可按以下近似式計算：

$$1-\frac{2\mu r_2}{r_1} \tag{j'}$$

在以上要顧慮摩阻力的每一個例子中，我們都可以看到：計算時除掉虛位移方程式外，每次都必須引用其他的靜力方程式，從而要解出跟這些方程式個數相同的若干個未知數，手續十分繁複。因此，對於摩阻力很小的東西像軸承，鉸鏈等等，通常都暫時忽略掉它們的摩阻力，先按照理想系統處理，列立各虛位移方程式。解出這些方程式後，就可初步決定全系統中各「作用力」間的近似關係。根據此關係，求出各接觸處正交壓力的近似值。用摩阻係數 μ 乘各近似的正交壓力，確定各摩阻力的近似值。之後，把這些近似摩阻力作爲主動作用力加入到整個系統中去。再應用虛位移方程式進一步確定各作用力間較精確的關係。如此重複幾次，到所需要的精確度已經達到爲止。這樣做要比解聯立方程式簡便得多。

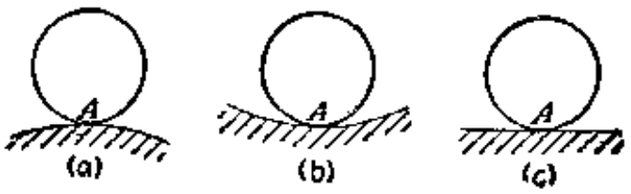
59. 穩定平衡與不穩定平衡

以上關於虛位移原理的討論，僅限於如何應用這一原理來確立一物體或一系物體在作用力作用下的平衡條件。實際上，這一原理對於進一步考察一個理想系統的平衡是否穩定也非常有用。所謂「平衡狀態是否穩定」，在任何情形下，概指：如果有一偶然的外力以爲時極短極短的時間作用於一平衡的系統中，使它的平衡狀況發生極小極小的變動，但是這偶然的外力一經消失，這系統就立刻能回復原來平衡形狀，這樣的平衡狀態就叫做**穩定平衡**；反過來說，如果偶然外力一瞬間的作用會將全系統原來的平衡狀況完全破壞，或者說外力消失後全系統仍繼續有離開原來狀況的趨向存在，那這一系統原來的平衡就是**不穩定平衡**。在一定情況下，一個平衡系統也可能在偶然外力消失後既

無恢復原來狀況的趨向，也無繼續遠離原來狀況的趨向，這種平衡就叫做隨遇平衡。

例如，第 366 圖中。圖 a 表示一個圓球放在一個光滑凸曲面的頂點 A 處。因 A 點的垂直於曲面的反作用力在鉛垂方向，故跟圓球的重力恰好互相抵消，使圓球處於平衡狀態。不過這種狀態是一種不穩定平衡。如果圓球受到偶然外力的輕微作用使它位置有一點點改變，它立刻就會沿曲面滾下來，決不會因外力消失而回復原來位置的平衡。圖 b 所表示的是一個放在光滑凹曲面的最低點 A 處的圓球。如果有一偶然外力使它改變一點點圖中的平衡位置，外力消失後，它仍會立刻滾回原處恢復原來的平衡。所以這一圓球是處於穩定平衡狀態。至於圖 c 的圓球，它是在一水平平面上平衡。它在平面上任何一位置都可以保持平衡，所以這是一種「隨遇平衡」。

假使由虛位移原理來決定第 366 圖中三球是否平衡，那只要令它們各發生一「約束」所允許的虛位移（也就是無限小的、圓球跟各自支承



第 366 圖

第 367 圖

面始終保持接觸的位移）。此位移顯然在各接觸點的水平切平面中，圓球重心的相應位移也只可以取水平方向，重力因而無功發生，故可知三個球都是在平衡狀態。

假使要進一步決定它們的平衡是否穩定，那就必須把「作用力」對以上虛位移做的功加以更精密的計算。例如，第 366a 圖的圓球。它如果發生一無限小的位移 $\overline{AA'}=\delta s=r\,d\varphi$（見第 367 圖），它的重心顯然就將降低一如下的距離：

$$\overline{AB}=r\left[1-\cos(\delta\varphi)\right]\approx\frac{r}{2}(\delta\varphi)^2$$

這是一個比虛位移更高一級的無限小量。決定平衡狀態是否存在的問

題中，這種高級無限小量雖然可以不計；但是在討論平衡屬於那一種狀態的問題中，却不可忽略。 根據以上的討論，可知：對於不穩定平衡狀態，像第 366a 圖所表示的情形，重力對圓球任何虛位移所做的功都將是正值，並且發生無限小位移後有一個跟運動方向相同的反作用力出現，使圓球有繼續離開它原來平衡位置的傾向。同樣理由，對於穩定平衡，像第 366b 圖所表示的情形，重力將對圓球的任何虛位移做負的功。因此，圓球受到偶然的外力作用而發生無限小的位移時，會有一個位移反方向的反作用力出現，從而使圓球有回到原來平衡位置的傾向。

計算重力做的功，以應用「位能」一觀念爲最方便。 我們要從一固定的基準水平平面舉起一個重 W 的物體至高度等於 h 處，需要做等於 Wh 的功以克服重力。 這「功」就叫做物體在新位置對於基準水平平面的位能。 假若令物體自由落回原來基準平面，重力 W 可以做出來的功就是這「位能」。 根據「位能」定義，可知：在不穩定平衡情形下，像第 366a 圖中的圓球，它的位能必將因任何虛位移的發生而減少。 反過來說，在穩定平衡的情形下，例如第 366b 圖的圓球，它的「位能」必將因任何虛位移的發生而增加。 換句話說，圓球在不穩定平衡的狀態下，「位能」將取最大值；在穩定平衡狀態下，將取最小值。

對於理想系統的一般情形，如果其中作用力的大小只跟這一系統的形狀有關[1]，那我們就也可以應用以上方法來處理。 不過考察這種系統的任何平衡狀態時，所有「約束允許的」虛位移都必須考慮在內。假使對於所有虛位移，作用力所做的功都是負值，那就表示整個系統跟第 366b 圖中情形相同，是處於穩定平衡狀態。 反過來說，只要有一種「約束」所可能允許的虛位移會使作用力做的功變成正值，那情形就跟第 366a 圖中相同，表示整個系統原來是處於不穩定平衡狀態（以上所說的「作用力」的「功」，當然必須把高級的微小量計算在內）。

考察一個理想系統的平衡狀態是否穩定，也可應用「位能」觀念。取這一系統的某一形態作爲**基本形態**。要使這一系統由基本形態變化成另一形態，那克服作用力所必需的「功」就代表它新的形態對於基本

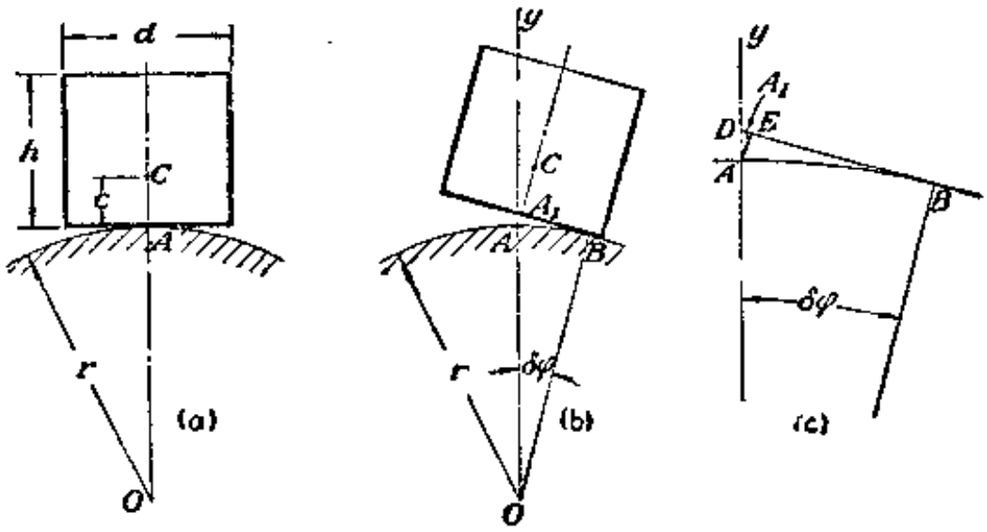
(1) 像察阻力之類的「力」，它的大小不僅跟全系統的形狀有關，而且要由運動的方向決定，是不包括在內的。

形態的「位能」。 如果全系取某一一定形態平衡時的位能小於它取相近的任何形態時的位能，那就表示整個系統原來是處於穩定平衡狀態。如果有一相近的形態會使全系統的「位能」比原來形態時的「位能」小，那就表示整個系統原來是處於不穩定平衡狀態。

例題和習題

2·5. 第 368a 圖中一個高度爲 h、直徑爲 d 的圓筒，一端開口，放在一個半徑等於 r 的圓球上。 圓筒在圓球上可以自由滾轉，但是接觸處毫無滑動發生。 試求圓筒穩定平衡時，圓球半徑 r 最小要等於多大?

解: 如第 368b 圖令圓筒發生一微小的旋轉角 $\delta\varphi$。 圓筒重心 C 對圓中 A 點水平平面為



第 368 圖

高度原來是 c，圓筒旋轉後，這一高度可由 A 點位移 $AA_1=\delta s_a$ 和距離 $A_1C=c$ 在圓中鉛垂 y 軸上的投影代數和決定(第 368b 圖)。 故在旋轉過程中，重心 C 的降低是

$$c-c\cos(\delta\varphi)-\delta s_a\cos(\delta s_a, y) \qquad (a)$$

$\delta\varphi$ 極微小，可令 $\cos(\delta\varphi)\approx 1-\frac{1}{2}(\delta\varphi)^2$

因圓筒、圓球間無滑動發生，故位移 $AA_1=\delta s_a$ 的位置必定是在 AD 和平行於 OB 的 AE 綫的中間(第 368c 圖)，否則 A_1B 綫與 AB 弧不可能相等。 由此可見，

$$AE\cos(\delta\varphi)<\delta s_a\cos(\delta s_a, y)<AD$$

以已知數值代入其中 得

$$r[1-\cos(\delta\varphi)]\cos(\delta\varphi)<\delta s_a\cos(\delta_a, y)<r[\sec(\delta\varphi)-1]$$

其中首末兩項的相差只是含有$(\delta\varphi)$四次方及更高次方的無限小量，故可令

$$\delta s_a\cos(\delta s_a, y)\approx\frac{1}{2}r(\delta\varphi)^2$$

將此式代入(a)中，可得重心 C 的「降低」爲

$$\frac{c}{2}(\delta\varphi)^2-\frac{r}{2}(\delta\varphi)^2 \qquad (b)$$

假使此量註正值，重力做的「功」就是正的，表示圓筒是處於不穩定平衡狀態。否則，表示圓筒處於穩定平衡狀態。這也就是說，圓球如處於穩定平衡狀態，那重心 C 的降低就一定要是「負值」。因此，必須

$$c<r$$

圓筒如果是由厚薄均勻的薄片做成，那末

$$c=\frac{\pi d h^2}{2\left(\pi d h+\frac{\pi d^2}{4}\right)}$$

穩定平衡的條件就成爲

$$\frac{h^2}{2\left(h+\frac{d}{4}\right)}<r \qquad (c)$$

273. 第 369 圖中 AB 桿長 $a+b$，重 W，重心是圖中 C 點，放在圖中兩光滑的斜面上。試證明 AB 桿在圖中位置是處於不穩定平衡狀態。

解：選定坐標軸 x,y 如圖。重心 C 的坐標是：

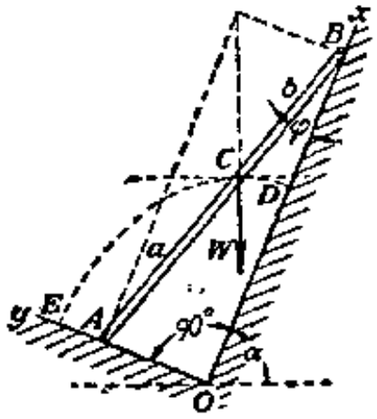
$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi$$

故

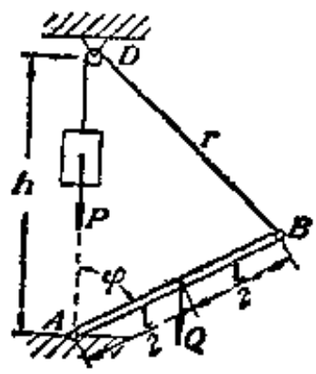
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

此式說明，重心 C 的軌跡是一個四分之一的橢圓 ED。AB 桿在圖中位置時，C 點的橢圓切綫是在水平方向。橢圓彎曲形狀原是凸形向上的，故 AB 桿的任何位移都會使重心 C 的位置降低，跟第 336a 圖的情形一樣，因此，AB 是處於不穩定的平衡狀態。

277. 第 370 圖中，AB 桿長 l 重 Q，A 端由一鉸鏈連接在固定點上，B 端由一軟繩吊住。軟繩跨過一個滑輪 D，在另外一端懸掛一重體 P。滑輪 D 跟鉸鏈 A 的鉛垂距離 h 比桿件長度 l 大。試求所有可能的平衡位置及平衡的穩定狀況。滑輪的大小可以不計。



第 369 圖



第 370 圖

解：以 AB 桿件取鉛垂位置作爲整個系統的基本形態。令 r 代表軟繩 BD 部份的長度，可得 AB 桿跟鉛垂方向成 φ 交角時全系統的位能等於

$$P[r-(h-l)]-Q\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) \qquad (d)$$

此外 $$r=\sqrt{l^2+h^2+2lh\cos\varphi}$$

代入(d)式,再令位能對於 φ 角的微分等於零,可得

$$P\frac{h}{r}\sin\varphi-\frac{Q}{2}\sin\varphi=0 \tag{e}$$

故 $$\varphi=0,\ \varphi=\pi \text{ 或 } \frac{Ph}{r}-\frac{Q}{2}=0$$

這說明可能的平衡位置是: (1) AB 桿取 B 端向上的鉛垂位置, (2) AB 桿取 B 端向下的鉛垂位置, (3) AB 桿取

$$\frac{2h}{r}=\frac{Q}{P} \tag{f}$$

的傾斜位置。

要決定以上各位置的平衡狀態是否穩定,我們必須對(d)式的位能作更進一步的考察。在(f)式所指的平衡位置, r 的最大值是 $r_{max}=h+l$, 最小值是 $r_{min}=h-l$; 故

$$\frac{2h}{l+h}<\frac{Q}{P}<\frac{2h}{h-l} \tag{g}$$

現在要決定此位置的平衡是否穩定,可將(d)式位能對 φ 二次微分,求出爲

$$\frac{Ph}{r}\cos\varphi-\frac{Plh^2}{r^3}\sin^2\varphi-\frac{Q}{2}\cos\varphi \tag{h}$$

如(g)式的平衡條件已滿足,那(h)中首末兩項就將抵消,只剩中間一項。這一項本身是負值,可見這位置全系統的位能是一個最大值。因此,這種平衡是在不穩定狀態。

至於其他兩種可能的平衡狀態,它們的穩定狀況讀者可自行決定。兩情形中,如 $\frac{Q}{P}$ 可以滿足(g)式,那末都是穩定平衡。假使 $\frac{Q}{P}$ 大於(g)式所規定的大小,那就只有 AB 桿取 B 端向下的鉛垂位置才是全系統的穩定平衡位置。假定 $\frac{Q}{P}$ 小於(g)式規定的大小,那就只有 AB 桿取 B 端向上的鉛垂位置才是穩定平衡位置。

278. 第371圖中是一個觀察船身振動的「擺」[1]。OC 桿可以在 O 點軸承中滑長度方向作無摩阻滑動,O 點軸承又可繞 O 點垂直於圖平面的軸綫自由旋轉。OC 上的 A 點由一鉸鏈桿 O_1A 連接於定點 O_1 上。各桿件的自重都可不計。問 O_1A 桿在鉛垂位置時,全系統的平衡狀態是否穩定?

解: 令整個系統離開它的鉛垂位置發生一微小位移。此位移由圖中極微小的 φ, ψ 兩角表示。以 O_1 點的水平面爲基準平面,可得擺球的重心 C 的高度等於

$$r\cos\varphi-l\cos\psi$$

因原來高度是 $r-l$, 故重心的高度變化等於

$$r(1-\cos\varphi)-l(1-\cos\psi) \tag{i}$$

如果此位移是正值,就表示擺球有向下的移動,全系統的位能在減少。故 O_1A 桿取鉛垂位置的全系統平衡是不穩定的。反過來說,如果這一位移是負值,就表示擺球有向

(1) 姆許力克(schlick)擺。

上的移動，全系統原來處於穩定平衡狀態。因 φ 和 ψ 角極小，可令 $\cos\varphi\approx1-\frac{\varphi^2}{2}$ 及 $\cos\psi\approx1-\frac{\psi^2}{2}$，故(i)可化爲

$$\frac{r\varphi^2}{2}-\frac{l\psi^2}{2} \tag{j}$$

不過本系統只有一個自由度，φ 和 ψ 並非獨立無關的兩個角。由圖 I 幾何關係，可得

$$AB=r\sin\varphi=(h-r\cos\varphi)\operatorname{tg}\psi$$

或
$$r(\sin\varphi+\cos\varphi\operatorname{tg}\psi)=h\operatorname{tg}\psi$$

因之
$$r\sin(\varphi+\psi)=h\sin\psi$$

但 φ 及 ψ 是極小的角度，故上式也可寫成

$$r(\varphi+\psi)\approx h\psi$$

或
$$\frac{r}{h-r}\approx\frac{\psi}{\varphi}$$

將上式代入(j)中，得擺球的向下位移爲

$$\frac{\varphi^2}{2}\left[r-\frac{lr^2}{(h-r)^2}\right] \tag{k}$$

根據以上討論，知(k)式等於負值時，也就是

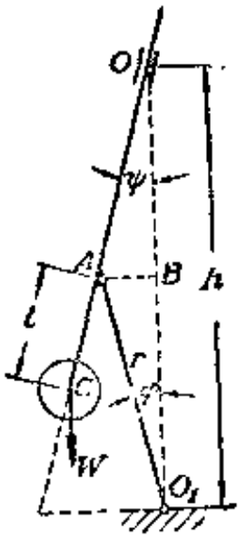
$$rl>(h-r)^2$$

時，O_1A 取鉛垂位置就是全系統的穩定平衡位置；假使(k)式值是正的，也就是

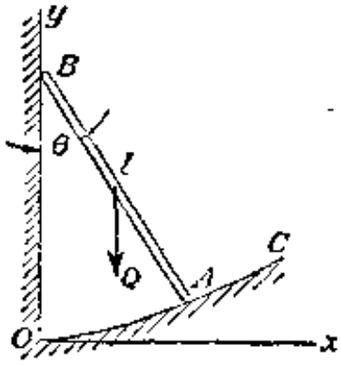
$$rl<(h-r)^2$$

的情形下，那就表示平衡狀態不穩定。

279. 第 372 圖中，AB 桿長 l 重 Q，B 端斜靠在一光滑的鉛垂牆面上，A 端的支承面是一個光滑的曲綫表面 OC。設 AB 桿取任何位置(也就是圖中的 θ 角不論等於多大)都可以保持平衡，試求曲綫 OC 以圖中 x,y 作爲坐標軸的形狀方程式。



第 371 圖



第 372 圖

解：AB 桿既然在任何位置都可以平衡，顯然它是處於隨遇平衡狀態。因此，它的位能必須

始終保持固定不變。 A,B 兩處的反作用力是不能做功的。 可見 OC 曲綫的形狀必須使 AB 桿的重心對於 x 軸始終保持固定的高度 $l/2$。 這就是說,應該是

$$\frac{l}{2}\cos\theta+y=\frac{1}{2}l \tag{l}$$

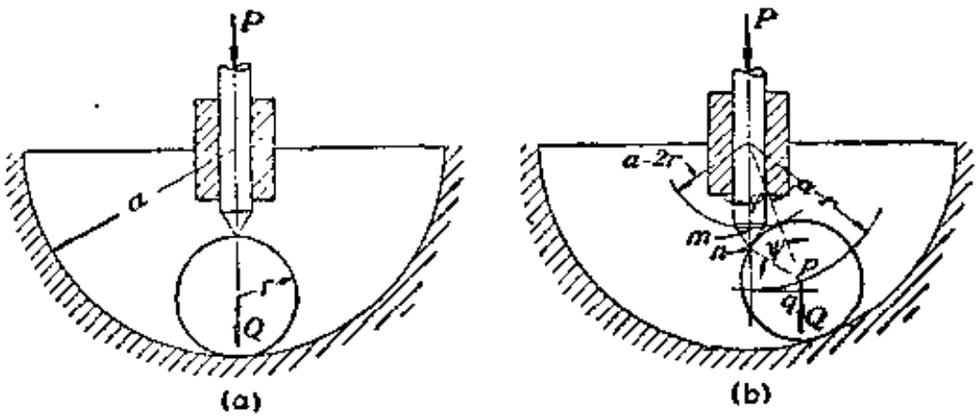
但

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{l}$$

故所求的方程式是

$$y=\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{l^2-x^2} \tag{m}$$

230。第 373 圖中,一個半徑等於 r 的圓球放在一個半徑等於 a 的圓球內表面的最低處。作用力 P 經過一個桿子傳導到小圓球上。 桿子的長軸恰在大圓球的鉛垂直徑上(第 373a 圖)。 設所有物體都是絕對的剛體,試求小圓球穩定平衡的條件。



第 373 圖

解:令小圓球發生一橫方向的位移。這一位移由圖中 φ 角來表示(第 373b 圖)。 圓球移動後,重心的「升高」是 pq,P 力作用點的「降低」是 mn。 所以圓球在最低位置的平衡,如

$$Q\cdot pq>P\cdot mn \tag{n}$$

就是穩定的平衡;假如

$$Q\cdot pq<P\cdot mn \tag{o}$$

那就是不穩定的平衡。 至於式中兩個位移,因 pq 是半徑等於 $a-r$ 的圓弧上的一點與它的水平切綫間的鉛垂距離,故對於 φ 角很小的情形,就可得

$$pq=\frac{\varphi^2}{2}(a-r) \tag{p}$$

mn 是一個半徑等於 $a-2r$ 的圓弧到桿子跟圓球接觸點間的鉛垂距離;如 φ 角很小,就可得

$$mn=\frac{\varphi^2}{2}(a-2r)+\frac{\psi^2}{2}r=\frac{\varphi^2}{2}(a-2r)+\frac{\varphi^2}{2}\frac{(a-2r)^2}{r}=\frac{\varphi^2}{2r}(a-2r)(a-r) \tag{q}$$

將(p),(q)兩式代入(n)中,就得到所求的穩定平衡條件是

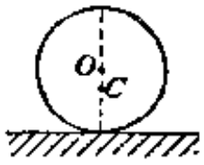
$$P<\frac{Qr}{a-2r} \tag{r}$$

281. 第 374 圖是一個放在水平平面上的圓柱體切面。圓柱的密度不均勻，以致它的重心 C 跟圓柱中心 O 不相電合。試證明 C 點在 O 點的正下方時，圓柱在穩定的平衡位置。

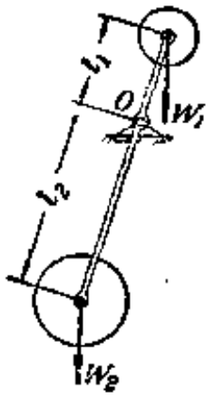
282. 第 375 圖中是一可以繞支點 O 自由旋轉的複擺。圖中兩擺球各重 W_1 和 W_2，桿件的重量却可不計，摩阻力也可不計。試求擺身在鉛垂位置穩定平衡的條件。

(解：$W_2l_2>W_1l_1$)

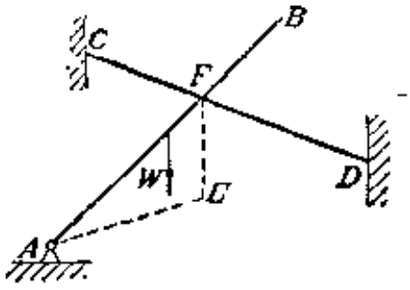
283. 第 376 圖中，AB 桿一端由一球形鉸鏈固定在一 A 點，另外一端擱在一根光滑的水平桿 CD 上，CD 桿的長軸垂直於圖中鉛垂平面 AEF。試證明 AB 桿在這一位置的平衡是不穩定的。



第 374 圖



第 375 圖



第 376 圖

284. 第 377 圖中，AB 桿一端由一球形鉸鏈固定在一 A 點，另外一端擱在一個光滑的水平圓環 CD 上，CD 環的半徑是 r。試根據圖中尺寸求 AB 桿在圖中位置穩定平衡的條件。

(解：$a>r$)

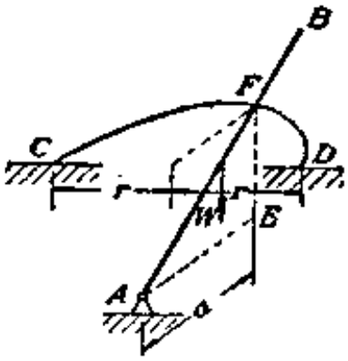
285. 第 378 圖的尖錐體，密度均勻，底部是一個半徑等於 r 的半圓球，上部是一個底圓半徑也等於 r 的正圓錐。試求尖錐體取鉛垂位置穩定平衡，圓錐的最大高度 h 可以等於多大？

(解：$h_{max}=\sqrt{3}r$)

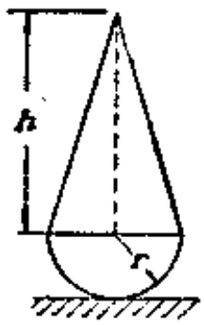
286. 一個密度均勻的正方體邊長等於 a，平衡在一個半徑等於 r 的圓柱體外表面上如第 379 圖。設接觸面間摩阻力很大，足夠阻止相對滑動發生，試求這正方體穩定平衡的條件。

(解：$r>a/2$)

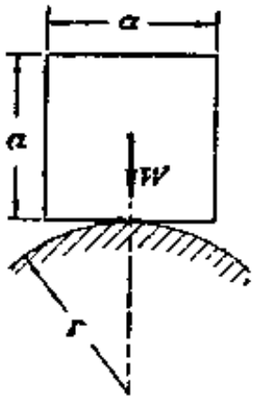
287. 試求第 80 圖（第 39 頁）中兩圓球的位能方程式；根據這一位能方程式，把決定平衡形態的 α 角求出來，並證明這種形態的平衡是不穩定的。



第 377 圖



第 378 圖



第 379 圖

[General Information]
书名=铁氏工程力学　（上册）
作者=S.Timoshenko著　江可宗译
页数=209
SS号=11040221
出版日期=1953年04月第1版

前言
目录
内容

译序
原序
本书应用的符号
上册　静力学
第一章　静力学原理
１．导论
２．力
３．力的平行四边形原理
４．力的等导性
５．作用力及反作用力
６．力系的分类
第二章　平面共点力系
７．力的合成
８．力的分解
９．平面共点力系的平衡
１０．平面三力的平衡
１１．索炼
１２．摩阻力
１３．投影法
１４．力对于一定点的力矩
１５．力矩的合成定理
１６．力矩法
１７．简单桁架
１８．节点分析法
１９．综合力图
第三章　平面平行力系
２０．同方向平行力
２１．两方向相反的不等平行力
２２．力偶
２３．一般的平面平行力系
２４．平行力中心
２５．重心及形心
２６．旋转面和旋转体的形心
２７．平面组合图形和组合曲线的形心
２８．应用积分求形心位置法
２９．平面分布力
第四章　一般的平面力系
３０．平面力系的合成
３１．投影法和力矩法
３２．简单框架：杆件分析法
３３．简单桁架：切面分析法
３４．刚体在平面中的静定式支承
３５．一般的平面分布力
３６．索线图

３７．封闭索线图
第五章　空间共点力系
８８．空间共点力系的合成与分解
３９．投影法
４０．力对于轴线的力矩
４１．力矩法
４２．空间桁架
４３．节点分析法
第六章　空间力偶和平行力系
４４．平行平面上的力偶
４５．相交平面上的力偶
４６．力偶的投影法
４７．对一点与对通过该点一轴线的力矩间的关系
４８．一般的空间平行力系
４９．平行力中心及重心
第七章　一般的空间力系
５０．空间力系的合成
５１．投影法和力矩法
５２．刚体在空间的静定支承
第八章　　虚位移原理
５３．导论
５４．功
５５．一质点的虚位移原理
５６．理想系统
５７．理想系统的虚位移原理
５８．简单机械的效率
５９．稳定平衡与不稳定平衡

譯　序

本書原著是鐵摩先可關於大學基本力學課程的著名文獻，在資本主義世界中是一本被推崇爲「經典著作」的教材。很顯然，這樣一本著作對我們學習工業科學的基本理論是有鉅大的參攷價值的。

當初譯這本書是出於教學上的需要。一九四九年秋，譯者在同濟大學機械系教「動力學」，需要一本講義，先譯了本書的下册；第二年，在原校土木系開「靜力學」課，才補譯出上册。初稿完成後，曾送請中央人民政府出版總署編譯局審查。審訂後，編譯局曾給予極大的支持，使這本書能夠出版。譯者在此謹致衷心的感謝

本書書名，就內容而論，應稱爲「工程剛體力學」。但這一叫法不通行，所以還是照原著書名直譯爲「工程力學」。工程力學這一門課程，根據一九五〇年中央頒發的「高等學校理工學院各系課程暫行規程(草案)」，應包括材料力學在內。而且，眞正要「循名責實」的話，那末「工程力學」或者以前流行的名稱——「應用力學」就幾乎應該包括工科的全部力學課程(材料力學、流體力學、熱力學……)。所以本書的書名是不夠確切的。至於目前將這門課程改稱爲「理論力學」的說法，顯然也還有可商榷的地方。如果是爲了說明這門課程的基礎性質，恐怕還是稱之爲「基本力學」相宜些。

關於本書的譯文方面有兩點需要說明：原著所用的單位系統是英美呎磅制，譯文中已全部換算成公制單位。再，原著中有一小部份習題，譯文中已做了解答，改爲例題，目的是增強本書的參攷作用，以便於自學。

本書錯誤或不妥當的地方，希望讀者多多指正。

江可宗

一九五一年八月，上海。

本書應用的符號

A	面積
a	加速度，半徑
a_n	法線加速度
a_r	相對加速度
a_s	補加速度
a_t	切線加速度，參考系加速度
B	彈力彎矩常數
C	積分常數
c	阻尼係數
cm	公分
a,b,c	尺度
D	直徑
d	直徑，力臂
E	彈性模數
e	偏心率，復形係數，自然對數的底
F	作用力，摩阻力
f	週率，索鍊的彎落（矢高）
G	剪力彈性模數
g	地心加速度
H	極點距離，索鍊的水平張力
h	高度，厚度
I	惰矩或惰矩積
I_x,I_y,I_z	惰矩
I_{xy},I_{xz},I_{yz}	惰矩積
i	惰矩半徑（旋轉半徑），$\sqrt{-1}$，次序指數
J	面積極惰矩
j	節點數

K	一般常數
k	彈力常數
kg	公斤
L	曲線長度
l	跨度
M	力矩
$\mathbf{M}$	動量矩，角動量
m	質量
m	公尺
N	法線分力
n	任意數，每分鐘轉數
P	作用力
p	週率因力
Q	作用力
q	單位長度的重量
R	合力，反作用力，半徑
r	半徑，射程
S	張力或壓力
s	距離
s	秒
T	切線分力
t	時間
U	動能
V	位能，體積
v	速度
v_r	相對速度
v_t	參考系速度
W	重量，重力
w	單位體積重量
u, v, w	正交坐標系坐標值
X, Y, Z	作用力在坐標軸方向的投影
x, y, z	正交絕對坐標系坐標值

$\dot{x},\dot{y},\dot{z}$	速度在坐標軸方向的投影
$\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$	加速度在坐標軸方向的投影
α	角加速度，相角
β	放大因數
γ	阻尼因數
α,β,γ	方向角、方向餘弦
δ	變形
δ_{st}	靜力變形
$\delta x,\delta y,\delta z$	虛位移在坐標軸方向的投影
θ	旋轉角
$\dot{\theta}$	角速度
$\ddot{\theta}$	角加速度
μ	摩阻係數
π	3.1416
ρ	曲率半徑
ρ,θ	平面極坐標
σ	應力
τ	週期
ξ,η,ζ	正交相對坐標系坐標值
φ	摩阻角
θ,ψ,φ	角
ω	角速度
$\overline{AB},\overline{v}$，等	向量

內　容

下册　動力學

第九章　動力學原理……1

60. 導論……1
61. 質點的運動……2
62. 牛頓定律……4
63. 質點運動的一般方程式……7
64. 重力單位和絕對單位……8
65. 剛體運動的分類……9

第十章　直線移動……11

66. 剛體直綫移動的運動幾何……11
67. 運動方程式……19
68. 在常力作用下的質點運動……23
69. 作用力是時間函數的質點運動……27
70. 正比於位移的作用力 — 自由振動(一)……29
71. 自由振動(二)……36
72. 強迫振動……40
73. 強迫振動的應用……45
74. 慣性力 — 慣性力原理……48
75. 動量和衝量……54
76. 功和能……58
77. 能量不滅定理……63
78. 碰撞……68

第十一章　曲線移動……74

79. 剛體曲綫移動的運動幾何……74
80. 法綫加速度和切綫加速度……79
81. 質點的曲綫運動方程式……83
82. 拋射體的運動……86
83. 曲綫運動中的慣性力 — 慣性力原理……90
84. 動量矩……95

85. 曲綫運動的能量方程式……100

第十二章 剛體的定軸旋轉……108

86. 旋轉的運動幾何……108
87. 剛體定軸旋轉的運動方程式……111
88. 不變力矩作用下的旋轉運動……115
89. 扭轉振動……118
90. 一般的力矩作用於旋轉角的旋轉運動……123
91. 複擺……127
92. 旋轉運動的慣性力……132
93. 旋轉機件的內應力……135
94. 固定旋軸上的反作用力……139
95. 旋轉剛體的均衡……143
96. 角動量定理……148
97. 角動量的向量表示……153
98. 迴轉儀……154
99. 旋轉體的能量方程式……158

第十三章 剛體的平面運動……164

100. 剛體平面運動的運動幾何……164
101. 瞬時中心……167
102. 平面運動中移動和轉動的相互獨立性……171
103. 剛體平面運動的運動方程式……175
104. 剛體平面運動的能量方程式……184
105. 碰撞及碰撞中心……188

第十四章 相對運動……192

106. 相對運動的運動幾何……192
107. 相對運動的運動方程式……196
108. 相對運動中的慣性力……204

附錄 I 平面圖形的面積惰矩……207

附錄 II 物體的質量惰矩……219

動 力 學

第九章 動力學基本原理

60. 導論

靜力學以靜止的剛體作爲研究對象，動力學以運動的剛體作爲研究對象。動力學成功一門學科遠在靜力學之後。它的歷史一般認爲從加利略(1564-1642)時代才開始。動力學基本理論的形成必須依靠實驗，它的遲遲發展主要就是由於實驗上的困難。在靜力學中我們只要處理兩種「量」：第一，物體本身或物體與物體間的空間關係——長度；第二，物體與物體間的相互作用——力。精密測量「長度」和「力」的儀器，構造比較簡單，發展也較早。在動力學中，除此之外，還要測量「時間」這一個「量」。可是夠得上稱爲準確的計時儀器，像有鐘擺的鐘、有擺輪的錶都是比較近代的東西，在加利略時代是完全沒有的。精密測量「時間」的困難延緩了動力學的發展，這當然是很自然的事。

爲了研究上的方便，通常把動力學分爲兩大部門：**運動幾何**和**動力學**。運動幾何只研究「一個運動」的空間－時間關係，而不問產生這一運動的原因。譬如，一個車輪沿水平直線軌道等速滾動，運動幾何就只問車輪邊緣某一點的運動軌跡是什麼形狀；或者問某一時刻這一點在軌跡上將取什麼位置。至於產生這一運動的原因，是不加過問的。

動力學研究：一個物體或一系物體在一定外力作用下將產生怎樣的運動；或者要產生一種預定的運動必須用什麼樣的力來作用。譬如，有一個物體在光滑的水平平面上受到一個一定的水平力作用，要預測它如何運動就是動力學的問題。再如，在一定時間內，要使一個旋轉物體達到已定的轉速，必須在它旋軸上加一個多大的扭力力矩來作用，也是動力學的問題。

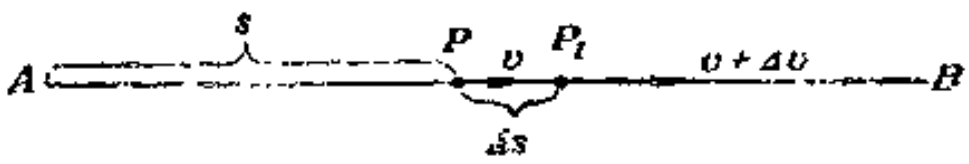
整個動力學建築在幾條關於**質點**運動的自然規律上。所謂質點是指祇計位置而不計大小的定量物質。事實上，任何量的物質都有大小，都佔有空間；質點只是一個抽象概念。概念的構成無非是要排除一些

不必要的因素，使得問題中的決定因素能夠顯露出來。在力學中，這就是說，只要物體的大小不影響它的運動或雖有影響但影響極小，就可以把物體看成一個「質點」。譬如行星運動，星體的直徑都有千萬公里，不能不算體積龐大，但是它的體積比起它的運動軌跡來，那仍然是渺乎其小的，所以還是可當作一個「質點」。同樣，一個槍彈，因爲本身尺寸比起彈道來也小得很多，所以也可以當作一個質點。質點旣不計大小，本身自然沒有旋轉可言。電子之微小在我們心目中已經無法想像，似乎一定可以把它看作一個質點。實際上並不如此，討論電子的「角動量」時，我們必須顧到它的體積，決不可當它是一個質點；否則，就否定了它的旋轉，無所謂角動量。所以，總括起來說，「質點」只是一個抽象概念，並非具體的東西。

61. 質點的運動

質點在空間的運動軌跡稱爲**運動路線**。路線佔三度空間稱爲**空間路線**；佔兩度空間，稱爲**平面路線**，最簡單的情形，運動路線是一根直線；質點在這種路線上的運動，稱爲質點的**直線運動**。

第380圖表示一個質點的直線運動。質點在任一時刻 t 所在的位置可以由這一位置到某一定點 A 的距離 $\overline{AP}=s$ 決定。s 稱爲質點的**位移**。質點運動時，位移隨時變化。若每一時刻的 s 值都知道，那質



第 380 圖

點的運動情形就完全決定。假使在任何相等的一段時間 Δt 內，不管 Δt 的長短如何，質點移動的距離 Δs 都相等，那這一特殊情形就稱爲質點的**均勻直線運動**。作這種運動的質點，它位移對時間的變化率 $\Delta s/\Delta t$ 稱爲質點的**速度**，通常用 v 表示；

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

在均勻直線運動中，質點的速度當然是固定不變的。

比較一般的情形，質點在兩段連續的相等時間 Δt 內運動的距離並不相等，那就是質點的**不均勻直線運動**。假若質點在 t 及 $t+\Delta t$ 時刻

的位置分別是 P 及 P_1 (第 380 圖)，那末

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

就稱爲質點在 t 到 $t+\Delta t$ 一段時間內的**平均速度**。 v_m 值隨時間 Δt 的長短而變化。 運動變化當然不會取跳躍方式，所以時間 Δt 選擇愈小，質點在這一段時間內的運動就愈近乎均勻直線運動，比率 $\Delta s/\Delta t$ 也愈接近運動的眞實情形。 若 Δt 無限變小，$\Delta s/\Delta t$ 也無限趨近一個一定值，這一極限值就稱爲質點在 t 時刻和 P 點的**點速度**(1) (又稱瞬時速度)；

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| \tag{30}$$

在不均勻直線運動中，質點的速度隨時變化。 速度變化對於時間的比率稱爲**加速度**。 例如第 380 圖中，若質點在 t 時刻和 P 位置的速度是 v；在 $t+\Delta t$ 時刻和 P_1 位置是 $v+\Delta v$，那末

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

就是質點在 Δt 一段時間內的**平均加速度**。 當 Δt 這段時間向無限小減少時，那末平均加速度的極限值

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| \tag{31}$$

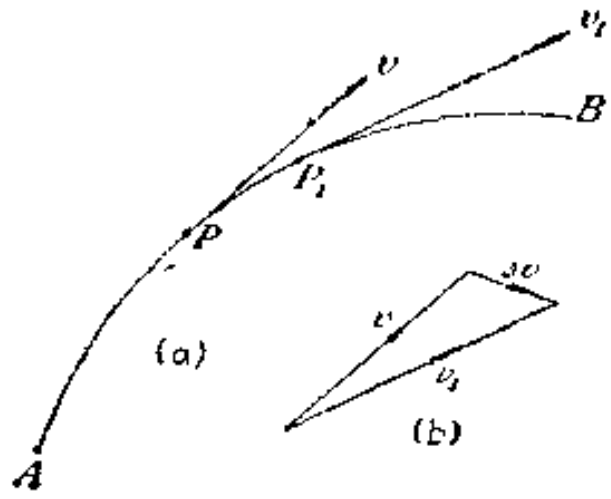
就稱爲質點在 t 時刻和 P 位置的**點加速度**。

速度通常用一根線段來表示。這種幾何表示方法對於解決曲線運動問題特別有用。 在質點的曲線運動中(第 381 圖)，我們把(30)式所規定的「速度」看成路線各點的切線上的一個個向量。質點在 t 及 $t+\Delta t$ 時刻的位置分別是 P 及 P_1(第 381a 圖)；v 和 v_1 分別代表質點在這兩位置的速度。 v 和 v_1 分別在路線 P 和 P_1 點的切線方向。 從分離向量圖(第 381b 圖)，我們看得出，速度的變化是一個方向跟路線斜交的向量 Δv，所以質點在 Δt 這段時間內的**平均加速度**就是一個大小等

(1) 速度本來指位移對時間的比值，實際上，質點在一點不可能擁有所謂「速度」，而且我們直接量得出來的也只有「平均速度」。這說明，「點速度」只是一個抽象概念。它的形成是因爲要排除不需要考慮的因素。 如果不構成這樣一個概念，讓「平均速度」來直接參與力學問題的運算，那就必須顧到兩個「位置」和兩個「時刻」。 這樣，稍微繁複一點的問題就會不可能計算。

於 $\Delta v/\Delta t$、方向跟 Δv 相同的向量。這向量，當 Δt 無限趨近於零的極限，就代表質點在 t 時刻的**點加速度**。

在曲線運動中，質點加速度的大小非但要看速度大小的增減而定，而且跟運動的方向也有關。因此，只有在速度的大小和方向都不變的質點均勻直線運動中，加速度才會等於零。



第 381 圖

62、牛頓定律

在前一節的討論中，我們沒有追問過產生質點運動的原因。現在要進一步攷察作用在質點上的「力」對於質點的運動有什麼影響。這需要有幾條公理來做基礎。這些公理稱爲**動力學的基本原理**。原理的正確性無法直接證明，不過由它們推出來的結論是跟一般的自然現象精密符合的；尤其在天文方面，根據這些原理推算出來的星體運動幾乎完全跟實際觀察相符合。

在動力學實驗方面，加利略是第一個得到成功的人。基本原理中，第一、第二兩定律都是他發現的。不過基本原理的最後形成還是要歸功於牛頓，所以這些原理又稱爲**牛頓定律**。以下我們將詳細討論這些定律的內容。

第一定律：任何質點不受外力作用時，原來靜止的，繼續保持靜止；原來運動的，保持着均勻直線運動狀態。

第一定律又稱**慣性定律**。古時學者錯認爲：要維持一個質點的均勻直線運動，必須要有一個跟運動方向相同的力，作用在質點上。這樣一個錯覺跟日常生活經驗也似乎符合，如在水平平面上射出一個物體，它速度必然要漸漸減少，最後歸於靜止。但是加利略已觀察到，在這種情形下，速度的減少是由於接觸而摩阻力和空氣阻力的存在；如果減少這些阻力，物體就會接近於作均勻直線運動；阻力減少得愈小，愈接近；在理想情形下，完全沒有阻力，物體自然將作均勻直線運動。在特殊情形下，當速度爲零時，物體就處於靜止的狀態，好像沒有任何力加在它

上面一樣。第一定律假定了絕對靜止的存在，這是不對的，實際上靜止只能有相對的意義。大多數的工程力學問題中，我們都假定地球不動；質點的運動都是相對於地球而言。在一般情形下，由這假定推出來的結論跟實驗或觀察的結果相當符合。不過，在某些問題內，地球本身的運動却不能不攷慮；否則，結果達不到所需要的精確度。在這種情形下，我們需要把恆星當作固定的坐標軸系來先確定地球的運動。

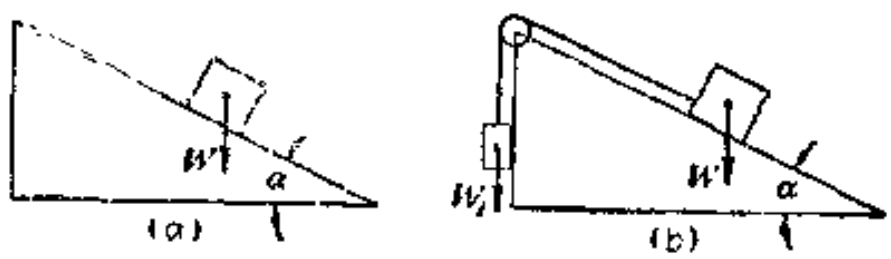
慣性定律說明物體有保持它原來運動狀態的特性。這特性稱爲物體的**慣性**或惰性。慣性定律也可以當作是「力」的定義。若問什麼是「力」，有了這定律，我們就可回答說，力，它的作用是物體改變運動速度的原因；或者說，力的作用是產生加速度的原因。

第二定律：一個質點的加速度，大小跟作用在它上面的力的大小成正比，方向跟力的方向相同。

第一定律只對慣性和力作定性說明；僅僅說明了，力跟速度變化是互相關聯着而已。第二定律則進一步作定量說明，說明力跟加速度有什麼樣的關係。

第二定律也是加利略發現的。在他有名的落體實驗中，他已發現落體加速度的固定不變性，加速度的大小完全跟物體構成的物質無關。他這個結論後來由牛頓用無數次的精密實驗給以證實。牛頓觀察過各種物質做成的擺的振動，根據測出的振動週期，算出落體加速度等於 980cm/s²，跟加利略測出的相同。以下我們一概用 g 代表這一加速度。

落體下降很快，因之，時間不容易測得準確，爲了消除這一困難，加利略另行觀察物體沿斜面的降落（第 382a 圖）。他發現：物體沿斜



第 382 圖

面下降的加速度也是一個不變常數（實驗中已經儘可能減少了摩阻力的影響）。觀察過各種不同傾斜角 α 的斜面運動後，他發現：物體沿斜

面下降的加速度 a 跟自由落體加速度 g 間有如下的關係：

$$a = g \sin \alpha \qquad (a)$$

$\alpha = \pi/2$ 時，加速度 a 跟自由落體加速度 g 相同；$\alpha = 0$ 時，加速度等於零，質點作等速運動。

質點作斜面運動時，它上面作用各力，加利略已發現，不等於質點的重力 W（第 382a 圖），而等於維持質點在斜面上平衡的重量 W_1（第 382b 圖）。W_1 比 W 要小一些，在不計摩阻力的情形下，是

$$W_1 = W \sin \alpha \qquad (b)$$

比較一下 (a) (b) 兩式，立刻知道：當斜面角 α 變化時，加速度和力按同一比例變化。加利略根據這一實驗結果，得到力的大小跟加速度大小成正比的結論。換句話說，質點上力的大小若增減多少倍，加速度的大小就也增減多少倍。

加利略的實驗結果由牛頓加以推廣，列爲動力學第二定律。本定律對於質點在受力作用以前的運動狀況未加任何限制。力產生的加速度跟質點原來的運動完全沒有關係。換句話說，一個已知力作用於質點，不管質點原來是在靜止狀態或運動狀態，也不管原來運動的方向如何、速度如何，所產生的加速度總是相同的。

同樣，對於作用在質點上的力的個數，本定律也未加任何限制。不論有多少個力同時作用在一個質點上，各個力所引起的加速度跟各自單獨作用時完全相同；力的效應絲毫不會受同時存在的其他的力的影響。因此，一個質點的合成加速度，完全像力一樣，也可以由所有各力所產生的加速度的幾何相加來決定。各力所生的加速度都各自跟各力的大小成正比，方向各自跟相應各力相同，所以合成加速度跟合力，也是大小成正比、方向相同。

有了以上兩定律，我們已經可以研究一個單一質點在力作用下的運動狀況。不過，這是不夠的。實際問題中需要處理的對象常常是一系質點（或一個剛體）或一系剛體。這就需要底下的第三定律來決定它們相互間的作用力及反作用力：

第三定律：每一個作用力必定有一個大小相等、方向相反的反作用

力相伴存在。換句話說，任何兩物體間的相互作用力必然是大小相等、方向相反的兩力。

一個物體加一個壓力於另一物體，那後一物體就必然有一個同樣大的壓力加於前一物體。兩個互相遠隔的物體，若一個吸引另外一個，那後一個也必定用同樣大小的相反力吸引前一個。不僅「萬有引力」如此，其他各種形式的力，像磁力、靜電力、兩接觸物體間的壓力（靜力學中討論過的）等也無不如此。磁鐵吸引鐵塊的吸力，大小跟鐵塊吸引磁鐵的力完全相等。

關於第三定律，最容易發生的誤解是誤認作用力及反作用力都集中作用在一個物體上，以致會得到任何力都不能使物體運動的荒謬結論。很多教科書上把旋轉物體上的「離心力」看成「向心力」的反作用力，是不對的。離心力是一種作用在旋轉物體上的「慣性力」（它的意義以後將討論），大小、方向都跟向心力的反作用力相同，可是後者並不作用在旋轉物體上。

關於物體的「重量」，通常也有一些誤解。「重量」指物體對支承物的作用力。它的大小、方向普通都跟地球加於物體的重力相同。認爲重量就是重力，或者認爲是支承物對物體的反作用力，是不夠精確的。因爲物體和支承物如果同時有鉛垂方向的加速度，那末，重力在一定範圍內仍固定不變，而重量却會有顯著的增減。

63. 質點運動的一般方程式

質點的運動方程式根據第二定律而來。我們在落體實驗中已經看到，質點單獨受重力 W 作用時，產生的加速度是 g。現在改用 F 力作用，這一質點如果產生的加速度是 a，那末按第二定律，a 跟 g 的比率就應該等於作用力 F 跟重力 W 的比率，這就是說，

$$\frac{a}{g}=\frac{W}{F}$$

因此，得

$$F=\frac{W}{g}a \tag{32}$$

(32)就是質點運動的一般方程式。只要知道作用力 F，任何時刻的質

點加速度 a 都可以用(32)式來計算。

(32)式說明，如果作用力 F 的大小一定，它產生的質點加速度就跟因子 W/g 成反比。W/g 因子的大小跟作用力的大小完全無關，純粹是質點本身具有的性質。所以，可以用來測量質點慣性的大小。這因子稱爲質點的**質量**，通常用字母 m 代表，

$$m=\frac{W}{g} \tag{a}$$

或

$$ma=F \tag{32'}$$

由(a)式看得出，質量 m 的因次是作用力除加速度；若力的單位用 kg(公斤)，長度單位用 m(公尺)，時間單位用 s(秒)，質量單位顯然就是 $kg\cdot s^2/m$。質量的單位在工程科學內是一種導出單位。力學中有四種基本量是相互獨立、不能彼此解釋的：(1)長度，(2)時間，(3)質量，(4)力。應用了以上運動方程式，在這四種基本量的單位中，只要任意選定三種，便能導出第四種的單位。

64. 重力單位和絕對單位

以上討論中，我們始終假定地心加速度 g 是一個不變常數，可是在精密測量下，g 值實際上是隨運動的所在地而變化的。緯度愈高，海拔愈低的地點，g 值也愈大。精確的 g 值公式是

$$g=980{,}62(1-0{,}00264\cos^2\varphi-0{,}0000003\,h)\ \mathrm{cm/s^2} \tag{a}$$

式中 φ 指運動所在地的緯度；h 指所在地離開中等海水面的高度，以 m 爲單位。緯度 φ 最大的變化是 90°，影響 g 值不過 0,5%；h 值如果發生 8000m 變化，影響 g 值也不過 0,25%，所以在工程力學問題中可以假定 g 是一個固定值。在以後計算中，我們一概規定 $g=980\mathrm{cm/s^2}$。

假使需要的精確度很高，g 值要按(a)式計算，那(32)式中重力 W 的大小自然也隨物體所在地點的不同而略有差別。這種差別可以由量力計中彈簧的伸長來測量(量力計，構造跟普通應用的彈簧秤一樣，用來測量作用力的大小)。如果需要更精確測量重力，那還可以用以下 § 9 所討論的方法，觀察物體的擺動週期。擺動週期跟物體所受重力的平方根成反比例，所以間接推算得出重力的大小。我們由加利略實

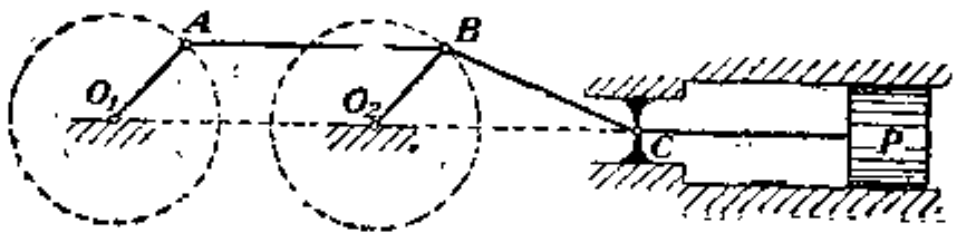
驗中已經知道，質點的加速度跟作用力成正比。這說明，(32)式中 W 和 g 應該按同樣的比例隨所在地不同而變化；而兩者的比例——也就是質點的質量——是跟所在地無關而保持固定不變的。

上一節已說過，力學中四基本量的單位中有三種可以隨意選定，再由四量的關係方程式(32)或(32′)就可導出第四種單位。為方便計，工程力學中選定長度、時間和力的單位作為基本單位，而以質量的單位作為導出單位。這樣，有時候就可以消除 g 值變化所引起的計算上的不方便。這種單位系統稱為重力單位系統。

物理和天文學中以長度、時間和質量作為基本單位，定4°C的 $1cm^3$ 水所據有的慣性為1克質量，力的單位由這三種基本單位導出來。由(31′)式可以看出，一個單位力就等於使一克質量物體產生 $1cm/s^2$ 加速度的作用力，這單位稱為「達因」或 $gm\text{-}cm/s^2$。如此的單位系統通常叫做絕對單位系統。

65. 剛體運動的分類

以上討論的基本原理都是就單一質點的運動而言。以下我們需要詳細討論如何把這些原理應用於剛體(或質點系)運動；否則，不能解決實際工程問題。實際應用中所遇到的剛體運動可分為以下幾類。例如第383圖中的原動機，P 是活塞，OA 和 O_2B 是兩個曲軸，AB 是聯桿，BC 是推桿。假定機架靜止不動，原動機開動後，立刻可以看到，活塞 P 上面所有各質點的運動都完全相同。這種所有各組成質點都



第 383 圖

作完全相同運動的剛體，它的運動就稱為移動。聯桿 AB 的各質點的運動也都相同，運動路線全是等半徑的圓周，使聯桿本身在運動中永遠保持自身的相互平行。因此，它的運動也是一種移動。可見剛體移動又可分為兩類：如果剛體每一質點的運動路線是一根直線，像活塞 P 一樣，那末這剛體就是作直綫移動。直線移動是剛體可能的運動中一種最簡單的類型。如果剛體每一質點的運動路線都是一根相同的曲

線，像聯桿AB一樣，那末這剛體就是作**曲綫移動**。路線可能是一根平面曲線也可能是一根空間曲線，所以曲線移動既可能是**平面運動**也可能是**空間運動**。

曲軸O_1A和O_2B繞固定軸線旋轉，軸線位置由O_1和O_2兩軸承決定。一個剛體繞一固定軸線旋轉，像O_1A和O_2B一樣，那就稱爲**旋轉運動**。在這種運動中，物體上兩已知點的連接直線，運動時並不保持自身的相互平行，所以我們需要攷慮，「連線」因不同位置而發生的角度變化。

圖中推桿BC的運動是複雜的，它B端沿一個以O_2B爲半徑的圓周運動，C端沿直線O_2C運動，中間各點又各作不同的曲線運動：所有各點的運動都互不相同；不過運動時，所有各質點的運動路線全都平行於一個平面（圖平面），所以通常稱爲剛體的**平面運動**。平面運動的意義當然更廣泛。以上，活塞P的直線運動，聯桿AB的曲線移動以及曲軸O_1A，O_2B的旋轉，都不過是平面運動中的各種特例而已。

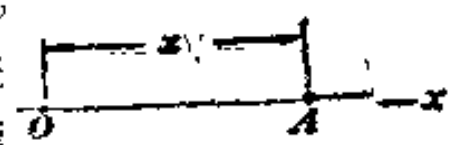
以下各章將按以上分類的次序從最簡單的直線移動開始，分別對各種剛體運動加以詳細的探討。

第十章　直線移動

66. 剛體直綫移動的運動幾何

第九章已指出，剛體發生直線移動時，它所有各質點的運動情形完全相同，所以我們只要觀察剛體上任何一點，例如重心的運動就可以完全決定整個剛體的運動。換句話說，在這樣的運動中，我們可以把整個剛體當作全部質量縮結在重心一點的質點看待。

關於質點在直線運動中的位移，我們可以取它的運動路線作爲 x 軸，在 x 軸上選定一個固定點 O 作爲原點。這樣，質點的 x 軸坐標（質點離開原點的距離）就是它的位移（第 384 圖）。我們規定：質點在原點 O 右邊的位移爲正；左邊的爲負。測量位移所用的長度單位一般應用 cm 或 m。



第 384 圖

質點運動時，位移隨時間變化。假使質點在每一時刻 t 的位移都知道，那質點的運動就完全決定。表示位移時間關係的算式，就是**質點的位移方程式：**

$$x=f(t) \tag{33}$$

$f(t)$ 的具體內容，看質點如何沿 x 軸運動而定。它可以是各種形式的時間函數。

例如，某一質點的位移方程式是

$$x=c+bt \tag{33a}$$

式中常數項 c 代表最初 $t=0$ 時質點的位移。這位移稱爲質點的**最初位移**。式中另一常數 b 表示位移對於時間的變化率。這一方程式所表示的運動，稱爲均勻直線運動。這雖然是一種最簡單的運動，不過在工程問題中却常碰到。

再如底下這一位移方程式：

$$x=ct^2 \tag{33b}$$

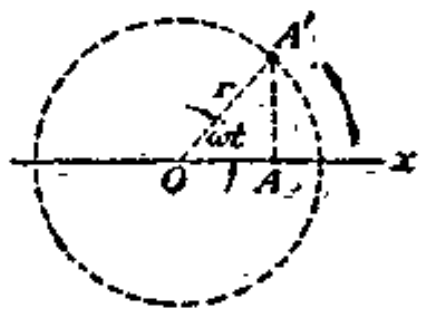
它所表示的質點運動也是直線移動，其中質點位移跟時間的平方成正

比。 我們在普通物理學中已經知道，這是一個自由落體的位移方程式。

另外一個例子是工程問題中常常遇見的簡諧運動。這種運動的位移方程式形式如下：

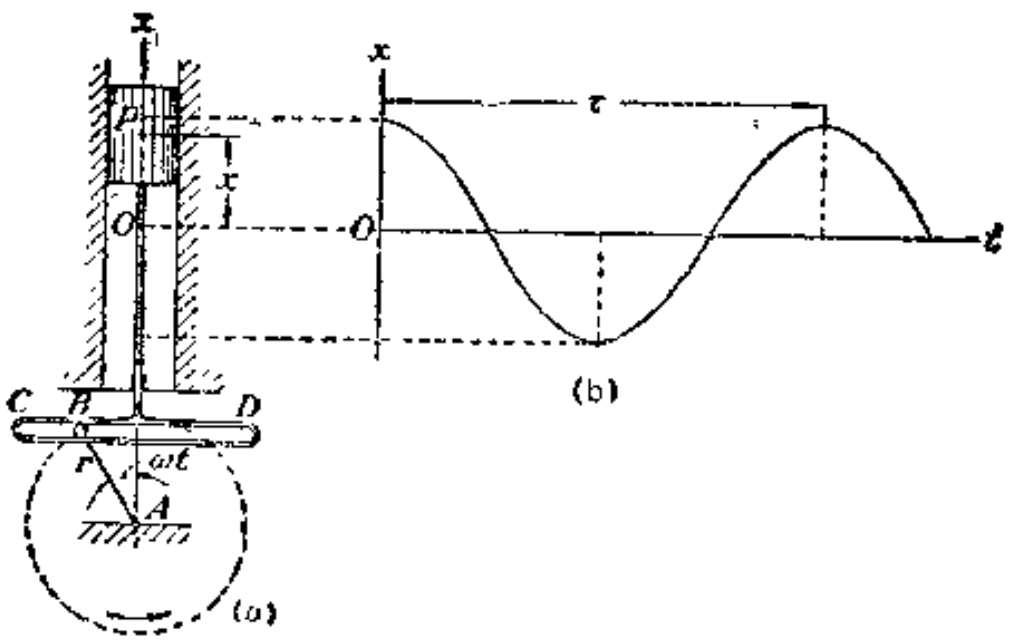
$$x = r\cos\omega t \tag{33c}$$

關於簡諧運動，我們可以用第 385 圖來幫助了解。 設想有一 A' 點沿一半徑等於 r 的圓周以相等的速率（速度值）運動。 ω 表示半徑 OA' 在單位時間內掃過的弧度角，A 點表示 A' 點在一水平軸線 x 上的投影。我們從半徑 OA' 跟正 x 軸相合時起算時間，很顯然的，(33c) 式代表 A 點在 x 軸上的運動，OA 等於 $r\cos\omega t$。 簡諧運動在工程應用中有特殊的重要性，我們必須詳細研究。 現在另外舉一例如第 386a 圖的實例來說明。 圖中是一部原動機。 我們以汽缸中心線作爲 x 軸，以活塞 P 所走路線的中點 O 作爲原點，從活塞在最高位置時起算時間。 曲軸 AB 一發生旋轉，梢子 B 就在水平導槽 CD 中來回滑動，活塞的垂直位移 x 等於曲軸 AB 在 x 軸上的投影。 若 r 代表曲軸 AB 的長度，ω 代表 AB 在單位時間內所掃過的弧度角，活塞 P 的位移 x 就恰好可由 (33c) 式表示。 活塞來回一次所需要的時間跟曲軸等速旋轉一周的時間相同。這一段時間等於 $2\pi/\omega$，稱爲簡諧運動的週期。



第 385 圖

應用曲線來說明位移跟時間的關係有時候比應用算式好。我們只



第 386 圖

要用橫坐標表示時間 t，縱坐標表示位移 x，任何具體問題的(33)式就可畫得出一根曲線。這種曲線圖就稱爲**位移時間圖**。(33a)和(33b)兩式的位移時間圖見第 387 圖；(33c) 式簡諧運動的位移時間圖見第 386b 圖。這些曲線的效能跟方程式完全相同，它們也能告訴我們同樣多的東西。畫位移時間圖所用的位移單位和時間單位應該長度相同，使比例尺的大小可以不必攷慮。

關於質點在直線運動中的速度，我們可以從第 387 圖表示的均勻直線運動來開始討論。在圖上看得出，質點在任何相等的時間 Δt 內所增加的位移 Δx 始終相等。因此，均勻直線運動的速度 v 可以由以下一式決定：

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (a)$$

至於速度的正負，我們規定：如果質點的位移隨着時間的增加而增加，那就是正的；否則，就是負的。速度的因次是「長度÷時間」，通常用 cm/s 或 m/s 做單位。

(33b)式是比較普遍的不均勻運動。它的圖象見第 387 圖中的曲線。在圖上看得出，質點在兩段相等的時間 Δt 內所增加的位移 Δx_1 和 Δx_2 並不相等。圖中位移的增加量隨着時間的增加而變大，所以這是一種**加速運動**。若命 Δx 表示質點在 Δt 時間內增加的位移，質點在這段時間內的平均速度是

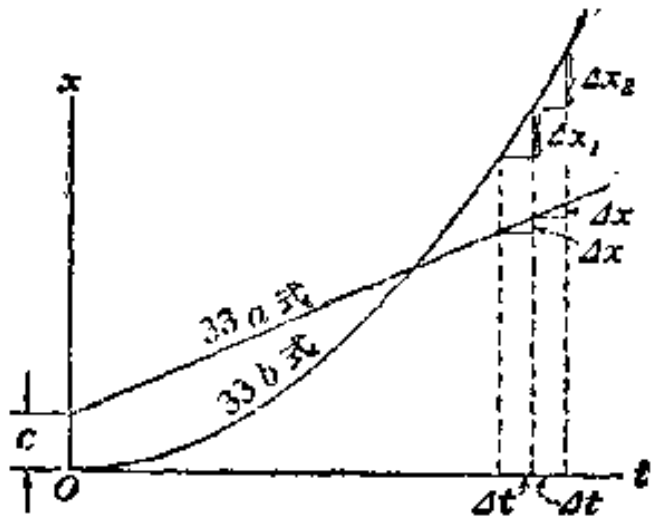
$$v_m=\Delta x/\Delta t \qquad (b)$$

以前(30)式所表示的質點在 t 時刻的點速度(以下簡稱速度)因之是

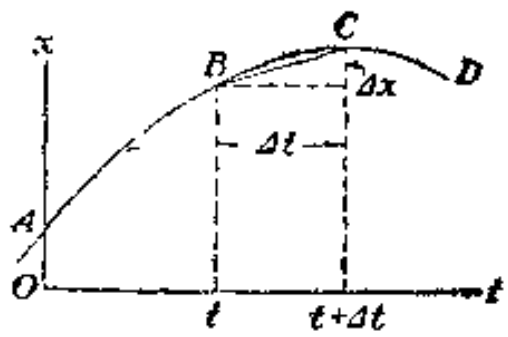
$$v=\lim_{x\to 0}\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|=\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad (34)$$

式中用 $\dot{x}$ 表示位移對時間的導函數，是牛頓所引用的，底下 dx/dt 一概用這符號來代表。

以上討論的各點，也可以圖解如下：第 388 圖中曲線 AD 代表任意一質點運動的位移時間圖。質點自 t 時刻到 $t+\Delta t$ 時刻中的所謂平均速度，就相當於用圖中的 BC 直線表示的均勻運動來代替眞實運動。BC 直線的傾斜度表示(b)式的平均速度。若 Δt 漸漸減小，表示眞實運動的 BC 曲線跟 BC 直線的相差也逐漸減少。在 $\Delta t=0$ 的極限情



第 387 圖



第 388 圖

形下，BC 直線變成位移時間曲線在 B 處的切線，切線的傾斜角就代表質點在 t 時刻的速度 v。所以，位移時間曲線上各點切線的傾斜角變化，可以表示不均勻直線運動質點的速度的變化。

由(34)式，可見只要微分位移-時間方程式，就可求得到運動中質點的速度跟時間的關係方程式，速度的大小和方向也就隨之決定。若(33)式的導函數等於正值，表示位移隨時間增加而增加，那速度就也是正的；否則，就是負的。正的速度表示它的方向跟正 x 軸方向相同。(33a)(33b)和(33c)三式所表示的直線運動，質點的速度分別是：

$$v=\dot{x}=\frac{d}{dt}(c+bt)=b \tag{34a}$$

$$v=\dot{x}=\frac{d}{dt}ct^2=2ct \tag{34b}$$

$$v=\dot{x}=\frac{d}{dt}(r\cos\omega t)=-r\omega\sin\omega t \tag{34c}$$

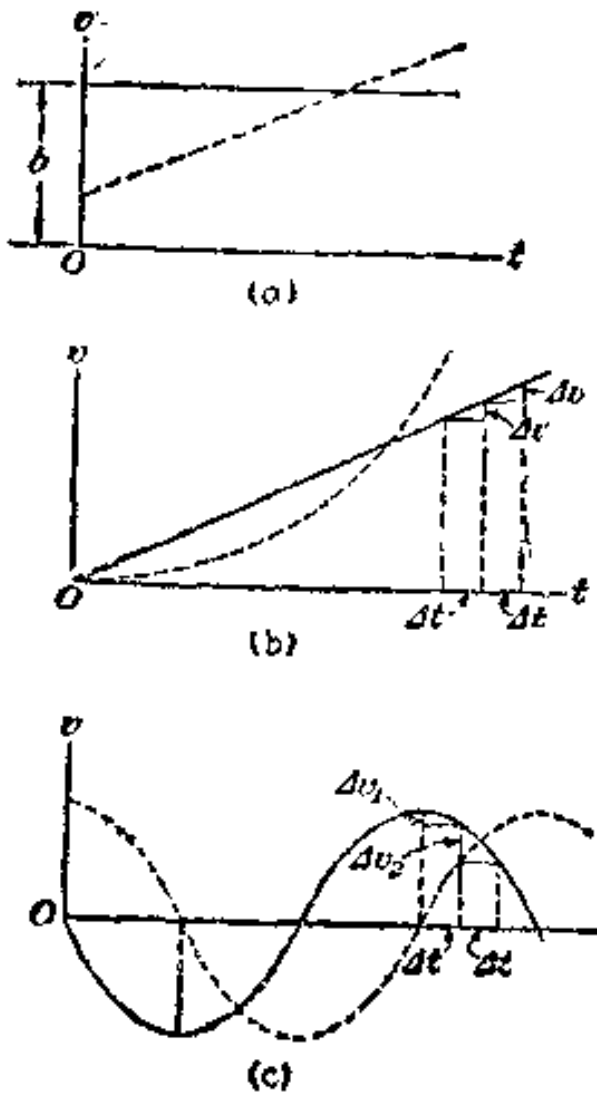
速度對時間的變化也可以用曲線表示。我們只要把速度 v 和時間 t 分別作爲縱坐標和橫坐標，就可以畫出(34)式的曲線圖。這曲線圖通常稱速度時間圖（以下簡稱速度曲線或速度圖）。(34a)(34b)和(34c)三式的這種曲線圖見第 389 圖。圖中的虛線是位移時間曲線，可以給我們一個比較。

第 389a 圖的速度曲線是一根水平直線，這表示：質點速度的固定不變性在位移曲線上就是各點的傾斜度不變。第 389b 圖的速度曲線是一根傾斜直線，它表示位移曲線各點的傾斜度按相同比率增加。第

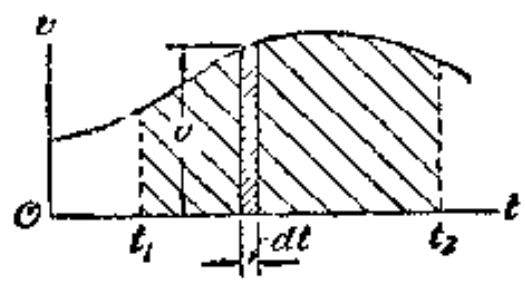
389c 圖表示的簡諧運動，速度曲線很複雜。在圖上看得出，當位移取極大或極小值時，速度等於零；換句話說，第 386 圖中活塞 P 在兩極端位置時，速度等於零。此外，還可看出，活塞經過中央位置時，速度將等於極大或極小。

第 390 圖是任意一直線運動的速度曲線。由(34)式，可得

$$dx = v dt \qquad (c)$$



第 389 圖



第 390 圖

代表質點在 dt 時間內所增加的位移，也就是速度圖中高 v 寬 dt 的無限條小形面積。所以把由 t_1 到 t_2 的所有位移的增量加起來，就得到圖中畫斜線部份的面積，亦即等於質點從 t_1 到 t_2 一段時間內所走過的距離。這就是說，由速度圖非但可以得到質點在任何一時刻的速度，而且還可以求出質點在任意一段時間內所走過的距離。

如果質點速度也隨時變化，那就表示質點有加速度。由第 389a 圖看到，均勻運動中，質點速度是固定不變的，但是在第 389b 圖所表示的運動中，速度在等時間 Δt 內却要發生等量的增加。增加量是 Δv，

故等加速度是

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{d}$$

質點的加速度跟速度相同，非但有大小而且有正負方向。假使速度的大小隨時間的增加而在正方向增加，那加速度就是正的；否則，就是負的。所以質點速度等於正的時候，也可以有負的加速度；速度負的時候，也可以有正的加速度，兩者方向並不一定相同。加速度的因次是「長度÷時間÷時間」，通常用 cm/s^2 或 m/s^2 做單位。

第 389c 圖所表示的是比較一般的情形。質點在兩段相等時間 Δt 內的速度的增加量 Δv_1 和 Δv_2 互不相等，所以這是一種不等加速運動。要求出質點在某一時刻 t 的加速度，我們仍可按照以前用的方法，先求得質點在 t 時刻到 $t+\Delta t$ 時刻中的平均加速度

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{e}$$

然後，命 $\Delta t\to 0$，決定 a_m 的極限值，就得到質點在 t 時刻的點加速度（以後簡稱加速度）如下：

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x} \tag{35}$$

由(35)式看得出，要求加速度跟時間的關係方程式，只要把位移-時間方程式對時間微分兩次就成。以上三個例子的質點加速度故分別是：

$$a=\ddot{x}=\frac{d^2}{dt^2}(c+bt)=0 \tag{35a}$$

$$a=\ddot{x}=\frac{d^2}{dt^2}(ct^2)=2c \tag{35b}$$

$$a=\ddot{x}=\frac{d^2}{dt^2}(r\cos\omega t)=-r\omega^2\cos\omega t \tag{35c}$$

這些關係表現在速度時間圖中，就是第 389 圖速度曲線上各點傾斜度的變化。

第 389a 圖所表示的運動，質點加速度是等於零的；第 389b 圖所表示的運動的加速度是 $2c$，等於落體加速度 $g=980cm/s^2$；第 389c 圖的運動是簡諧運動，質點的加速度最大等於 $+r\omega^2$，最小等於 $-r\omega^2$。加速度的大小跟位移成正比，但是方向跟位移相反，這就是簡諧運動的特徵。

例題和習題

283. 一個直綫運動的質點，位移方程式是

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (f)$$

試求這一質點的速度方程式和加速度方程式。

解： 命 $t=0$，得 $x=x_0$，可見 x_0 就是質點的最初位移。將 (f) 式對時間微分一次得

$$\dot{x} = v_0 + at \qquad (g)$$

代表所求的速度方程式。命式中 $t=0$，得 $x=v_0$，表示 v_0 是質點的初速。再將 (g) 式對時間微分一次，得

$$\ddot{x} = a \qquad (h)$$

代表所求的加速度方程式。由 (h) 式，可看到，(f) 式所表示的運動是一種等加速直綫運動。

289. 上題中如 $x_0=10\text{cm}$，$v_0=5\text{cm/s}$，$a=20\text{cm/s}^2$，試畫出這運動的位移圖、速度圖以及加速度圖，並求出 $t=2\text{s}$ 時，質點的速度和加速度。

〔解：$(\dot{x})_{t=2}=45\text{ cm/s}$，$(\ddot{x})_{t=2}=20\text{ cm/s}^2$〕

290. 某一運動質點的速度時間關係是 $\dot{x}=\frac{1}{3}ct^2$，其中 $c=8\text{m/s}^3$。設最初位移等於零，試求 $t=3\text{s}$ 時質點的位移。

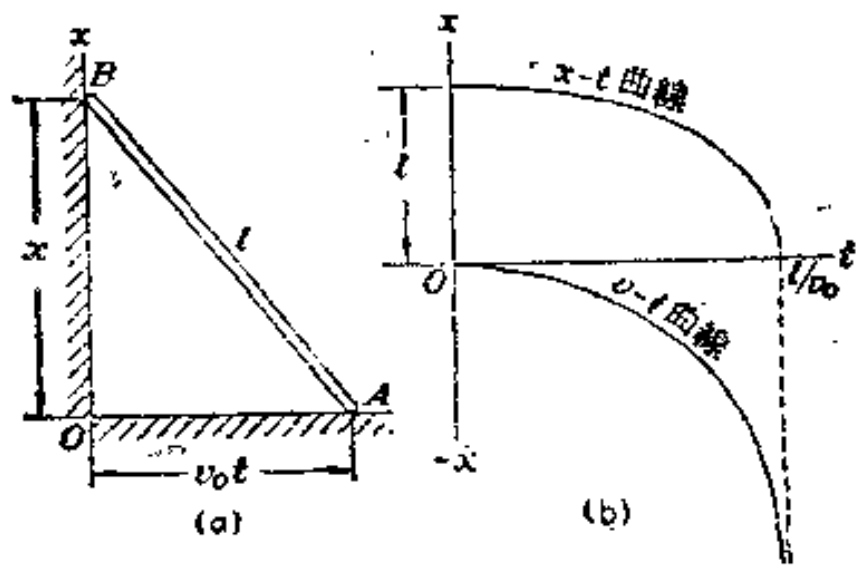
〔解：$(x)_{t=3}=36\text{m}$〕

291. 設第 386a 圖中，原動機的轉動角速 $\omega=4\pi$ 弳/s，曲軸長 10cm，試求活塞的最大速度和最大加速度等於多大？

〔解：活塞在路綫中點時，$|\dot{x}_{max}| = 40\pi\text{ cm/s}$；
活塞在路綫兩端，$|\ddot{x}_{max}| = 160\pi^2\text{cm/s}^2$〕

292. 細桿 AB 長 l，靠在牆上，下端以等速度 v_0 運動，位移是 $OA=v_0t$（第 391 圖），試求它上端 B 點的位移、速度和加速度的方程式。

解： 以 OB 作爲 x 軸，O 作爲原點，B 端位移就等於



第 391 圖

$$x=\sqrt{l^2-(v_0t)^2} \qquad (i)$$

對時間微分(i)式一次及二次，得

$$\dot{x}=-\frac{v_0^2t}{\sqrt{l^2-v_0^2t^2}} \qquad (j)$$

及

$$\ddot{x}=\frac{v_0^2l^2}{(l^2-v_0^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (k)$$

因 $t=l/v_0$ 時，B 端已將離開牆面，故所得三式只適用於 $0<t<l/v_0$ 的一段時間。

第 391b 圖是 (i) (j) 兩式的圖解。因 (i) 式又可寫成

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{t^2}{(l/v_0)^2}=1$$

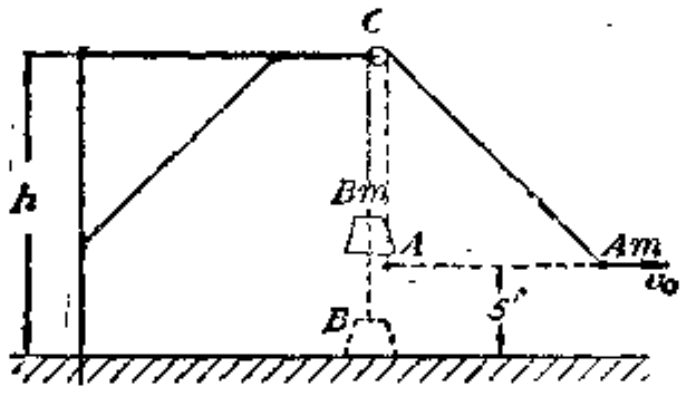
可見位移時間曲線是一四分之一的橢圓，它的軸長等於 l/v_0 及 l。

293. 第 392 圖中的 AB 繩，A 端離地面 5m，以固定速度 $v_0=10\text{m/s}$ 沿一水平直綫運動；B 端吊着一物體；滑車 C 的大小可以不計。(a)試畫出 B 端物體的速度時間圖。(b)試求把物體吊到離地 $h=20\text{m}$ 處所需要的時間。

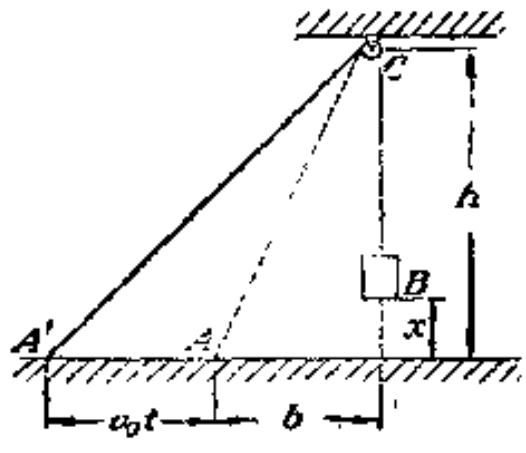
〔解：(a) $v=\dfrac{100t}{\sqrt{225+10t^2}}$，(b) $t=3{,}16\text{ s}$〕

294. 第 393 圖中，AB 繩 A 端沿直綫 AA' 以等速度運動，滑車 C 的大小可以不計，試求 B 端物體在鉛垂方向的速度時間的方程式。

$$\left(\text{解：}\ \dot{x}=\frac{v_0(b+v_0t)}{\sqrt{h^2+b^2+2bv_0t+v_0^2t^2}}\right)$$



第 392 圖

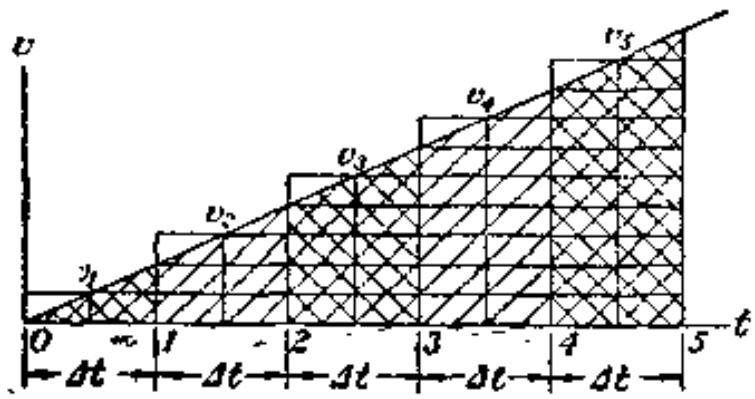


第 393 圖

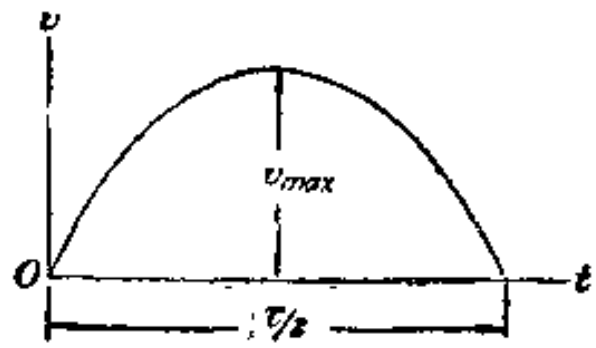
295. 一質點作等加速直綫運動，初速等於零，試證明質點在相繼的相等時間內所經過的距離之比等於 1 : 3 : 5 : 7……(第 394 圖)。

解：我們按研究落體運動的方法來考慮質點的速度時間圖，它顯然應該是一根直綫(第 394 圖)。分割此綫成寬度相等的許多梯形。時間坐標軸的分割點是：1、2、3、4……，表示一段段相等的時間 Δt。質點在每一段時間 Δt 內所經過的距離等於相應梯形的面積。如以面積相同的同寬長方形來代替梯形，長方形的高當然就必須等於梯形的平均高，這

也就是質點在 Δt 時間內的平均速度。 這些平均高是 v_1, $v_2=3v_1$, $v_3=5v_1$……；相應各面積是 $\Delta t\cdot v_1$, $\Delta t\cdot v_2=3\Delta t\cdot v_1$,……。可見質點在連續的一段段相等時間 Δt 內所走過的距離之比確是 1:3:5:7:9……。



第 394 圖



第 395 圖

293. 設一質點作直線運動的速度時間曲線是一根波形正弦曲線的一半(第 395 圖)，試求質點在半週期 $\tau/2$ 時間內所走的距離等於多少?

(解: $x=\tau v_{max}/\pi$)

297. 設第 395 圖所表示的速度時間曲線是一根拋物線，問質點在半週期 $\tau/2$ 時間內所走過的距離又等於多大?

(解: $x=\tau v_{max}/3$)

298. 有一部汽車，原來靜止，發動後以等加速度 a_1 使速度由 0 增加到 v。 以後就用這一速度 v 行走了一段時間，最後再用等減速度 a_2 間到停止。 設所行過的距離等於 s，問所需時間等於多少?

(解: $t=\frac{s}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)$)

299. 列車所可能達到的最大速度是 v。 最大的速度變化等於 a。 設兩站間距離是 s，試求列車由第一站出發到達第二站，需要的時間最少等於多少?

(解: $t_{min}=\frac{s}{v}+\frac{v}{a}$)

67. 運動方程式

剛體發生直線移動時，因爲它所有各質點的運動都完全相同，所以我們可以把它當作全部質量集結在重心一點的質點看待。 這樣，質點的普遍運動方程式 (32) 當然就可以直接應用於直線移動的剛體。 一個運動的物體 (或質點) 在作用線一定的外力作用下，外力作用線若通過它的重心，使它發生了跟外力方向相同的加速度，假使它的最初速度也在外力的作用線上，我們所得到的就是剛體的直線移動。 對於這樣

的運動，我們定運動路線爲 x 軸，用 $\ddot{x}$ 和 X 分別表示加速度和外力合力，就可得到底下的運動方程式：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=X \tag{36}$$

其中 W 指物體的重量。這一方程式顯然跟(32)式完全相同。

(36)式可解決兩種問題：(1)已知運動情形（就是已知位移 x 跟時間 t 的關係方程式），求產生這運動的作用力 X。(2) 已知作用力 X，求運動情形〔就是求能夠滿足(36)式的位移方程式〕。

第一種問題最簡單；只要將位移方程式連續對時間微分兩次，代入(36)式，就可得作用力 X。第二種問題因必須積分，所以須給有一定的條件，才能解。以下先討論第一類問題。

例題和習題

300. 第386圖中的原動機，活塞及活塞桿共重 50 kg，曲軸半徑等於 20cm，轉速是每分鐘 120 次，問(a)活塞在兩極端位置時和(b)活塞在路綫中點時，活塞所受的作用力合力各等於多大？

解：§66 中說明過，活塞乃作簡諧運動，它的位移方程式是

$$x=r\cos\omega t \tag{a}$$

其中 $\omega=2\pi n/60=4\pi$ 弳/s。連續微分(a)式兩次，得

$$\ddot{x}=-r\omega^2\cos\omega t=-320\pi^2\cos\omega t \tag{b}$$

代入(36)式中，得

$$X=-\frac{50}{980}320\pi^2\cos\omega t \tag{c}$$

可見作用力合力是一個時間函數，它隨着時間而變化。活塞在極端位置時，由第386圖可看到，ωt 必將等於 $i\pi$，i 是任何正奇數。當 $\cos\omega t=-1$ 時，代入(c)式就可得

$$X=161\text{ kg}$$

活塞在中央位置時，ωt 角必須等於 $i(\pi/2)$，i 是任意正奇數。因之，$\cos\omega t=0$，代入(c)式，可得，作用力合力等於零。至於如何按(c)式畫出本題作用力跟時間的關係曲綫，這留給讀者作爲一個練習。

301. 第396圖中汽球重 W，以等加速度 a 鉛垂下降，問這一氣球要拋出多少壓艙石塊，汽球才能以加速度 a 鉛垂上升？空氣阻力不計。

解：先觀察下降時情形（第396a圖）。汽球所受的作用力是浮力 P 和重力 W，依(36)式可得

$$\frac{W}{g}a=W-P \tag{d}$$

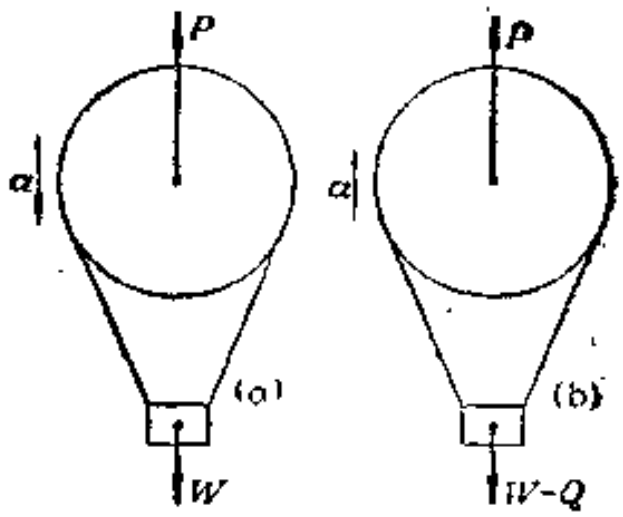
拋出重 Q 的壓艙石塊後，汽球要以加速度 a 上升，故必須

$$\frac{W}{g}a=P-(W-Q) \tag{e}$$

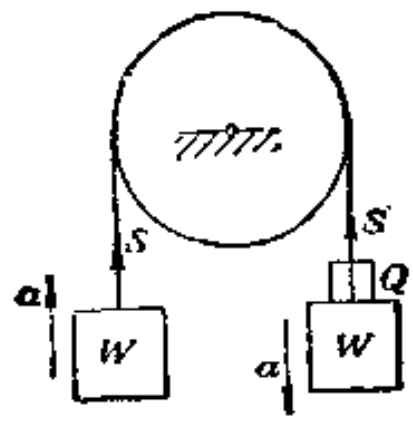
自 (d) (e) 兩式中消去浮力 P，就得

$$Q=\frac{2W}{1+g/a} \tag{f}$$

要校核這結果，可觀察兩極端情形：汽球下降時，若 $a=0$，(f) 式中 Q 就也等於零。可見在這種情形下，要使汽球以零加速度上升，並不需要拋出石塊。如果浮力不存在，汽球以 $a=g$ 加速度下降，那很顯然拋出任何多的石塊也不能使汽球上升；令 $a=g$ 代入 (f) 式，得 $Q=W$，也說明這事實。



第 396 圖



第 397 圖

302. 第 397 圖中是兩個重 W 的物體懸掛在一根繩子的兩端，繩子跨過一個滑車。如滑車的質量、空氣阻力以及摩擦力都可以不計，試問應該增加多大的重量 Q 於繩的一端才能使物體在圖中箭的方向產生加速度 a？

解： 本題是兩個質點構成的質點系的運動，所以可列兩個運動方程式。令 S 代表繩子的張力，左邊物體的運動方程式是

$$\frac{W}{g}a=S-W$$

右邊物體的是

$$\frac{W+Q}{g}a=W+Q-S$$

其中 Q 指所求的重量，消去兩端的 S，就得 $Q=2W/(\frac{g}{a}-1)$，由此式，可見假使要使 $a=g$，那就必須 $Q=\infty$。

303. 前題第397圖中，設運動方向相反但仍具同值加速度 a，求在左方物體上應加之重量 P。

$$\left[\text{解：}P=2Q\left(1+\frac{Q}{2W}\right)\right]$$

304. 第 398 圖中的升降電梯，重量 $W=5000$ kg，以等加速度鉛垂下降。經過的距離 $s=100$m，時間等於 10 s。如初速等於零，所有阻力可以不計，問吊纜中張力等於多大？

解：畫分離體圖如第 398a 圖。由圖上可以看到，電梯受到的作用力是重力 W 和張力 S，故得

$$\frac{W}{g}a=W-S$$

或

$$S=W\left(1-\frac{a}{g}\right) \qquad (g)$$

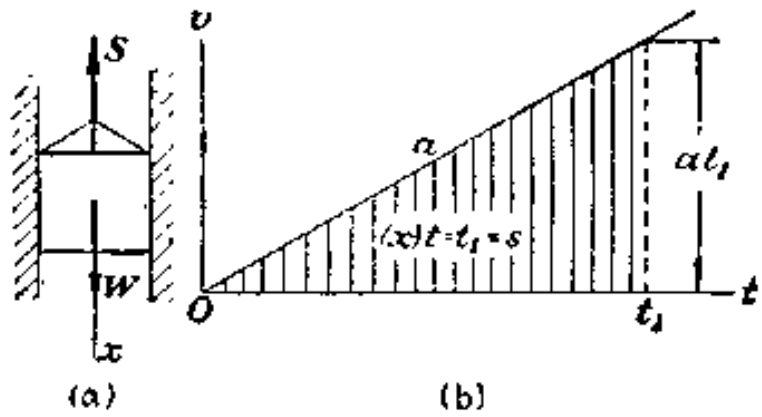
可見 S 的大小跟加速度密切關聯：$a=0$ 時，S 最大，等於 W，此時電梯或是停止或在等速下降；$a=g$ 時，S 最小等於零，此時電梯在自由下落。

第 398b 圖是電梯的速度時間圖。因加速度不變，故速度曲綫是一根直綫。直綫的傾斜度等於加速度值 a。因自 $t=0$ 到 $t=t_1=10\,s$ 一段時間內，電梯經過的距離 $s=100m$ 應當等於速度綫下面時間坐標 O 到 t_1 間的面積。故得

$$a=\frac{2s}{t_1^2}=200/100=2\,m/s^2$$

代入 (g) 式，就可解出纜中張力

$$S=W\left(1-\frac{2}{9,8}\right)=0,76\cdot W=3800\,kg$$



第 398 圖

305. 電梯，重量 $W=1000\,kg$，以等加速度向上開動，達到速度 $v=6m/s$ 時已上升 $s=6m$。求加速上升時，吊纜中張力等於多大？

(解：$S=13^{\prime}6\,kg$)

306. 上題中，電梯達到 6m/s 速度後，又以等減速度在兩秒鐘內停止。電梯中有一乘客重 70 kg。試求減速上升時，乘客加在電梯箱地板上的壓力 P 等於多大？

(解：$P=48,5\,kg$)

307. 列車重 200 t (機車重量在外)，以固定加速度沿一水平直綫軌道開動。在最初 60 s 內達到每小時 70km 速度。設摩擦力和空氣阻力固定等於列車重量的 0,005 倍，試求機車的牽引力等於多大？

(解：$S=6790\,kg$)

308. 行駛在水平直綫上的汽車，突然剎車，使車身在路面滑走 2 秒鐘後停止，滑走的距離是 9,8m。設剎車時，汽車的減速度不變，試求輪胎與路面間的摩阻係數 μ 等於多少？

(解：$\mu=0,5$)

309. 有一電梯，重量 $W=1t$，以等加速由靜止下降，在 10 s 內降落了 30m。求降落時吊纜內的張力 S 等於多大？

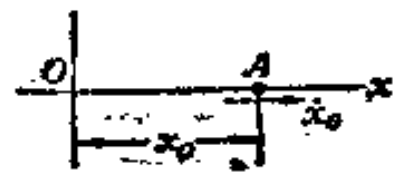
(解：$S=939$ kg)

68. 常力作用下的質點運動

質點在常力（大小和方向不變的力）作用下的運動是最簡單的「第二類問題」。這種運動中，作用力的大小、方向都不變。地面附近的自由落體運動，就是這種情形（如落體離地面很高，重力變化很顯著，那就不能把重力當作常力了）。

第 399 圖中，一質點 A 在常力 X 作用下沿 x 軸運動，最初位移 $OA=x_0$（就是當質點在 A 位置時，開始計算運動的時間）。質點的初速是 $\dot{x}_0$，方向跟 x 軸相同。根據(36)式，得

$$d(\dot{x})=\frac{g}{W}Xdt$$



第 399 圖

積分後，上式變爲

$$\dot{x}=\frac{g}{W}Xt+C_1 \qquad (a)$$

其中 C_1 是積分常數。$t=0$ 時，$\dot{x}=\dot{x}_0$，故 $C_1=\dot{x}_0$。可見這一積分常數就是質點的初速。把 C_1 代入(a)式，得

$$\dot{x}=\dot{x}_0+\frac{Xgt}{W} \qquad (37)$$

這就是質點在常力 X 作用下發生直線運動的速度方程式。(37)式如寫成

$$dx=\dot{x}_0dt+g\frac{X}{W}tdt$$

然後積分，又可得

$$x=\dot{x}_0t+g\frac{X}{W}\frac{t^2}{2}+C_2 \qquad (b)$$

因 $t=0$ 時，$x=x_0$，故將積分常數 $C_2=x_0$，代入上式，就得到

$$x=x_0+\dot{x}_0t+g\frac{X}{W}\frac{t^2}{2} \qquad (38)$$

這就是質點在常力 X 作用下發生直線運動的位移方程式。

以上這樣演算(36)式，當然一定會出現兩個積分常數。要決定這兩個常數必須已知具體問題中的兩個條件，譬如質點的最初位移和初速。因此，只要在運動方程式之外還已知這樣兩個條件，我們就能夠完全確定質點的運動狀況。關於質點在常力作用下的直線運動，最普通的一個例子就是自由落體。其中作用力 X 等於落體的重量 W，所以落體運動的 (37)(38) 兩式是：

$$\dot{x}=\dot{x}_0+gt \tag{37a}$$

$$x=x_0+\dot{x}_0t+\tfrac{1}{2}gt^2 \tag{38a}$$

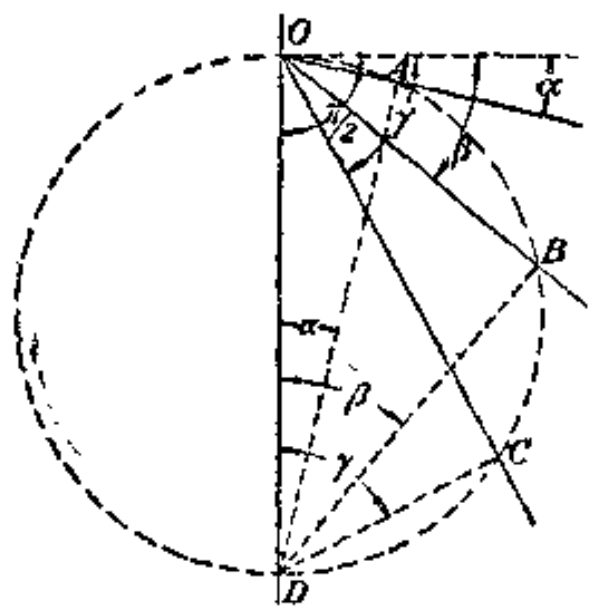
如落體最初位移 $x_0=0$ 和初速 $\dot{x}_0=0$，那就得到有名的自由落體公式(原來是根據實驗結果導出的)如下：

$$\dot{x}=gt \tag{37b}$$

$$x=\tfrac{1}{2}gt^2 \tag{38b}$$

例題和習題

810. 有幾個質點同時從一點出發，各自沿一斜面自由下降。各斜面的傾斜角次第是 α,β,γ 和 $\pi/2$(第 400 圖)。不計各斜面 OA, OB, OC, OD 上的摩擦力，試證明在任何一時刻 t，所有質點都將同在一以 OD 作爲直徑的圓周上(OD 爲質點自由落下所經的距離)。



第 400 圖

解：分別以各斜面作爲 x 軸，取 O 點作爲共同原點，如此，各質點最初位移與初速均等於零。根據(38b)式，知

$$OD=\tfrac{1}{2}gt^2 \tag{c}$$

質點沿一傾斜角等於 θ 的斜面下降，它受到的作用力是重力 W 和斜面反作用力。分解 W 於平行斜面和垂直斜面方向。後一分力由斜面反作用力抵消，故只餘運動方向的作用力

$$X=W\sin\theta \tag{d}$$

作用於質點，以(d)式代入(38)式，得

$$x=g\frac{W\sin\theta}{W}\frac{t^2}{2}=\tfrac{1}{2}gt^2\sin\theta=OD\sin\theta \tag{e}$$

可見沿 OA, OB, OC, OD 各斜面運動的質點在 t 時刻的位移分別是：

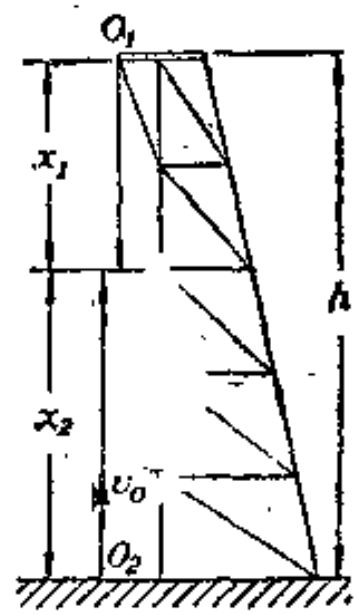
$$x_1=OD\sin\alpha$$

$$x_2=OD\sin\beta$$

$$x_3 = OD \sin \gamma$$

由第400圖中所表明的幾何關係，可知各質點在同一時刻的確同在一以 OD 爲直徑的圓周上。

311. 有一個球，自一高 $h=120$m 的鐵塔自由下墜。同時，另外有一球，以初速 $v_0=60$m/s 自塔底上升（第401圖）。求兩球交錯點離塔頂的距離和交錯時兩球的相對速度等於多大？



第 401 圖

解：致察第一球時，以塔頂作爲原點，令下降方向的位移爲正，如此，第一球的最初位移及初速均爲零。由(38b)式可得此球在任一瞬刻 t 的位移，是

$$x_1 = \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (f)$$

致察第二球時，以塔底作爲原點，上升方向的位移爲正。按(38a)式，可得

$$x_2 = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (g)$$

兩球交錯時，

$$x_1 + x_2 = h \qquad (h)$$

以(f)(g)兩式代入(h)式得

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 = h$$

再以 $v_0=60$m/s和$h=120$m 代入上式，可得兩球交錯的時刻 $t=2$s。應用(f)式，又可得

$$(x_1)_{t=2} = 19.6\text{m}$$

微分(f)(g)兩式，可知兩球在 $t=2$s 時的速度各等於 19,6m/s 和 40,4m/s，故交錯時兩球的相對速度等於 60m/s。

312. 一物體以初速 $x_0=20$m/s 鉛垂上升，試求物體(a)可達到的最大高度和(b)回落到原來位置，所需的時間各等於多少？計算時，可以出發處作爲原點，使 $x_0=0$。空氣阻力可以不計。

（解：(a)$x_{max}=20.4$m；(b)$t=4.08$s）

313. 列車以每小時 50km 的速度，自一 0,008 的斜坡道下行，途中剎車，全部阻力恰等於列車重量的十分之一，問剎車後，列車還行駛多少距離才停止？

（解：$x=107$m）

314. 電梯重 500kg，以等速度 4m/s 上升，設運動阻力等於 10kg，問切斷電流後，電梯還繼續上升多少距離才停止？

（解：$x=0.8$m）

315. 鉛垂向上射出一質點，經 t_1 秒後，質點到達高 h 處，在 t_2 時刻又落到此高 h 處。試求這一高度 h 和質點的初速 v_0 各等於多大？

解：若不計空氣阻力，質點受到的作用力在全部運動過程中就只有鉛垂向下的重力 W。以出發處爲原點，運動路綫爲 x 軸，並令向上的位移爲正，根據(38a)式，可得 $t=t_1$ 時，

$$h=v_0t_1-\tfrac{1}{2}gt_1^2 \qquad (i)$$

同樣，又可知 $t=t_2$ 時，

$$h=v_0t_2-\tfrac{1}{2}gt_2^2 \qquad (j)$$

消去 (i) (j) 兩式的 v_0，得

$$h=\tfrac{1}{2}gt_1\cdot t_2 \qquad (k)$$

消去 (i) (j) 兩式的 h，得

$$v_0=\tfrac{1}{2}g(t_1+t_2) \qquad (l)$$

316. 第 402a 圖中，斜面上的方塊重 W，斜面摩阻係數 $\mu=0.3$，方塊由 A 處開始自由滑下，試求滑到 B 點所需要的時間 t 等於多少秒?

解：由第 402b 圖的分離圖，可看到，斜面方向的作用力始終是

$$X=\frac{3}{5}W-\frac{6}{25}W=\frac{9}{25}W$$

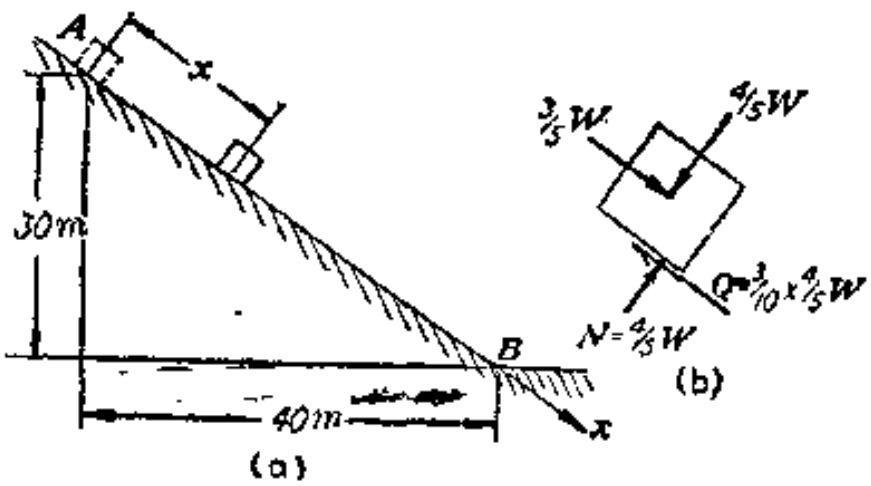
以 AB 爲 x 軸，A 爲原點，向下的位移爲正，根據(28)式，可得

$$x=\frac{9}{25}\cdot\frac{gt^2}{2}$$

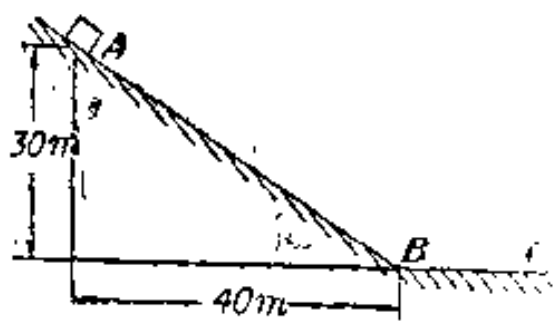
因 $x=AB=50\text{m}$，故 $t=5.33\text{s}$。

317. 第 403 圖中，斜面 AB 上的方塊自 A 處開始滑下，滑到 B 處後，繼續以所達到的速度沿水平平面 BC 前行。設兩平面同方塊間的摩阻係數都是 $\mu=0.3$，問方塊在 BC 平面上，前進多少距離才停止?

(解：$s=60\text{m}$)



第 402 圖

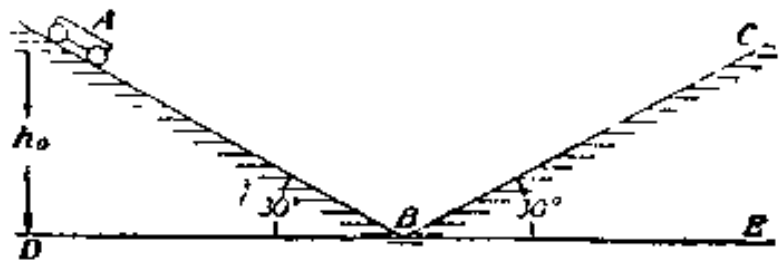


第 403 圖

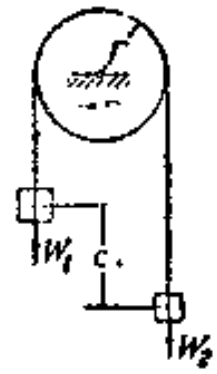
318. 第 404 圖中，一部小車自 A 處開始沿 AB 斜面下滑，然後衝上 BC 斜面，再滑下回到 BA 斜面，來回不息。設 A 處離水平平面 DE 的高度是 h_0。運動阻力固定等於十分之一的小車重量。小車來回經過 B 處共 n 次，最後靜止於 AB 或 BC 斜面上離 DE 平面高度等於 h 處。試證明 $h=(\frac{3}{8})^n h_0$。

319. 如第 405 圖的裝置，滑車和繩子的慣性以及摩阻力可以不計。靜止時，兩重體 W_1, W_2 高度相差等於 c，求開始運動到兩物體交錯時，經過的時間 t 等於多少?

$$\left(\text{解：}\ t=\sqrt{\frac{c}{g}\cdot\frac{W_1+W_2}{W_1-W_2}}\right)$$



第 404 圖



第 405 圖

69. 作用力是時間函數的質點運動

有時候我們會碰到這樣的質點直線運動，質點上的作用力按着一定的規律隨時間變化。譬如電磁現象中的磁場強度，它的大小看電流大小而定，通常就是時間的簡諧函數。

根據(36)式，知

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=X=f(t) \tag{a}$$

或

$$\frac{W}{g}d\dot{x}=f(t)dt \tag{b}$$

積分後，得

$$\frac{W}{g}\dot{x}=\int_0^t f(t)dt+C_1 \tag{c}$$

假設$(\dot{x})_{t=0}=\dot{x}_0$，那末 $C_1=\frac{W}{g}\dot{x}_0$，故得質點的速度方程式

$$\dot{x}=\dot{x}_0+\frac{g}{W}\int_0^t f(t)dt \tag{39}$$

再積分(39)式，又可得質點的位移方程式

$$x=\frac{g}{W}\int_0^t\int_0^t f(t)dtdt+\dot{x}_0t+C_2 \tag{d}$$

若最初位移 $x=x_0$，就可得積分常數 $C_2=x_0$，故

$$x=x_0+\dot{x}_0t+\frac{g}{W}\int_0^t\int_0^t f(t)dt\,dt \tag{40}$$

例 題 和 習 題

32). 一質點作直線運動，它的作用力在 $t=0$ 時是 X_0，之後，隨時間的增加而逐漸等量減小，到 $t=t_1$ 時，等於零，以後，質點上就無外力作用。設最初位移和初速都等於零，試求 $t=t_1$ 時，質點的速度和位移。

解：本題的作用力 X 顯然可以由底下這一時間的直綫函數表示：

$$X=X_0-\frac{X_0}{t_1}t \tag{e}$$

以(e)代入(39)式中，積分後，得

$$\dot{x}=\frac{g}{W}\int_0^t(x_0-\frac{X_0}{t_1}t)dt=\frac{g}{W}[X_0t-\frac{X_0}{t_1}\frac{t^2}{2}] \tag{f}$$

但在 $t=t_1$ 之後，X 已不存在，故(f)式只適用於 $0<t<t_1$ 範圍。以 $t=t_1$ 代入(f)式就可得所求的速度

$$(\dot{x})_{t=t_1}=\frac{g}{W}X_0\frac{t_1}{2} \tag{g}$$

再按(40)式積分(f)式，得

$$x=\frac{g}{W}\int_0^t(X_0t-\frac{X_0}{t_1}\frac{t^2}{2})dt=\frac{g}{W}[\frac{X_0}{2}t^2-\frac{X_0}{t_1}\frac{t^3}{6}] \tag{h}$$

這就是質點的位移方程式。由此式，可算出所求 $t=t_1$ 時的位移，是

$$(x)_{t=t_1}=\frac{g}{W}X_0\frac{t_1^2}{3} \tag{i}$$

在 $t=t_1$ 以後，質點以(g)式決定的速度等速前進，所以質點在 $t=t_2>t_1$ 時的位移，可以由(i)式位移加上(g)式速度跟時間 t_2-t_1 的乘積決定，故得

$$x_{t=t_2}=\frac{g}{W}X_0\frac{t_1^2}{3}+\frac{g}{W}X_0\frac{t_1}{2}(t_2-t_1)=\frac{X_0}{W}g(\frac{t_1t_2}{2}-\frac{t_1^2}{6}) \tag{j}$$

321. 有兩個作直綫運動的質點，重量都等於 W，受到的作用力分別是：

$$X=X_0\cos\omega t \tag{k}$$

和

$$X=X_0\sin\omega t \tag{l}$$

兩質點的最初位移、初速都等於零。試比較這兩種運動，分別求出它們的位移方程式並畫出相應的位移曲綫。

〔解：(k) $\frac{W}{g}x=\frac{X_0}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$，(l) $\frac{W}{g}x=\frac{X_0}{\omega^2}(\omega t-\sin\omega t)$〕

322. 一重 W 的質點，受一逐漸等量增大的作用力作用。最初作用力等於零，到第一秒末，增加到等於 W。設 $x_0=0$，$\dot{x}_0=1\text{m/s}$，求 $t=6\text{s}$ 時，質點的速度和位移。

〔解：$(x)_{t=6}=581\text{m/s}$，$(x)_{t=6}=1165\text{m}$〕

323. 一重 W 質點受到的作用力是 $X=kt^2$，試求它的速度方程式、位移方程式和運動方程式。

解：以 $X=kt^2$ 代入(39)和(40)式中，積分後，就可得

$$\dot{x}=x_0+\frac{g}{W}\frac{kt^3}{3}$$

和

$$x=x_0+\dot{x}_0t+\frac{g}{W}\frac{kt^4}{12}$$

324. 一物體重 3.14kg，作用力是 $X=X_0\sin\omega t$，其中 $\omega=8$弧/s；如假定 $\dot{x}_0=0, x_0=0$，則物體在作用力完成一次週期變化後，位移等於 10m，試求作用力最大值 X_0 等於多大？

(解：$X_0=32,6$kg)

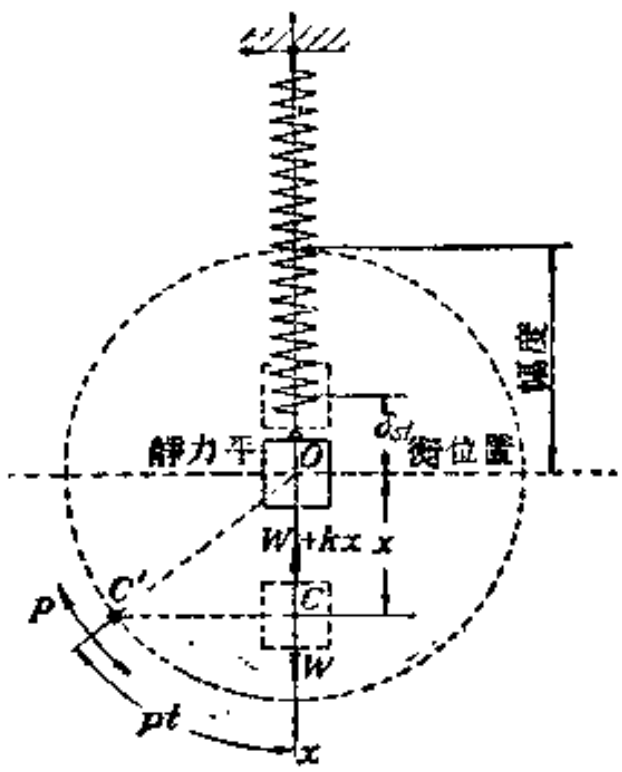
325. 第 384 圖中，質點受到的作用力是 $X=12-2t$。質點由 x 軸原點出發，開始沿軸後運動。試問什麼時刻，質點又回到原點？

(解：$t=18$s)

70. 正比於位移的作用力——自由振動(一)

作用力跟位移成正比的質點運動，是工程中常遇的一種運動；例如第 406 圖的螺旋彈簧，它下面懸掛的物體重 W。W 的靜力作用使彈簧發生 δ_{st} 的伸長，彈簧中產生的張力恰等於 W，故物體這時候是平衡的。不過，如果使物體發生一向下位移，彈簧張力就將隨位移的增加而變大。這樣，取去外力後，物體自然要向上運動，根據彈性定律，在彈簧的彈性限度以內，它的張力是跟伸長成正例的，故

$$S=W+kx \qquad (a)$$



第 406 圖

其中 k 是彈力常數（內中包括彈簧長度，彈性模數等），等於彈簧發生單位長度伸長時的張力的大小。

根據 (36) 式，並不計彈簧的慣性和阻力，可知

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-(W+kx)$$

故

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=-kx \qquad (b)$$

(b) 式說明，物體的位移等於正時，加速度是負的；位移等於負時，加速度就是正的，這也就是說，加速度方向永遠是指向物體原來的靜力平衡位置(即坐標原點)，它的大小跟位移成正比。以 $\frac{W}{g}$ 除(b)式兩邊，並命

$$\frac{kg}{W}=p^2 \qquad (c)$$

可得

$$\ddot{x}+p^2x=O \qquad (41)$$

這就是質點自由振動的運動方程式。

要滿足(41)式，我們所要求的「解」，必須是這樣一個 $x=f(t)$ 的函數，這函數對時間微分兩次後要等於自己本身跟一常數 $-p^2$ 的乘積。三角函數 $\cos pt$ 和 $\sin pt$ 都能滿足這一要求，事實上如將這兩個函數各乘以任意常數，然後相加，仍可滿足要求。如此，我們得到

$$x=C_1\cos pt+C_2\sin pt \tag{42}$$

就是(41)式的通解。式中兩常數 C_1 和 C_2 由個別運動的具體狀況決定。要證明(42)式是(41)式的通解，只要把(42)式對時間微分一次及兩次，就可得

$$\dot{x}=-C_1p\sin pt+C_2p\cos pt$$

$$\ddot{x}=-C_1p^2\cos pt-C_2p^2\sin pt=-p^2(C_1\cos pt+C_2\sin pt)=-p^2x$$

假使我們先讓物體發生一個離開它平衡位置的位移 x_0，然後突然放任它自由振動，使初速等於零。這樣，就得到底下兩個條件：

$$(x)_{t=0}=x_0 \qquad (\dot{x})_{t=0}=0 \tag{d}$$

先把第一個條件引用到通解(42)式中，可得 $C_1=x_0$。之後，對時間微分(42)式一次，得到普遍的速度方程式：

$$\dot{x}=-pC_1\sin pt+pC_2\cos pt \tag{e}$$

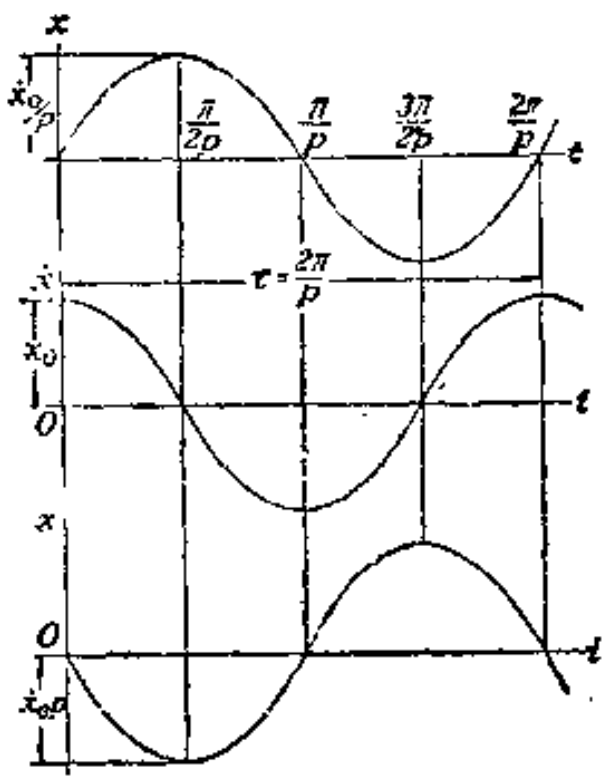
再把第二條件引用於這式，又可得 $C_2=0$。所以，這一運動的位移方程式，也就是振動方程式在(d)式兩個條件下的解，乃是

$$x=x_0\cos pt \tag{42a}$$

把上式跟 § 66 中(38)式比較一下，就知道這是一種簡諧運動。它的位移、速度和加速度等的圖解見 407 圖。在圖上看得出，物體的最大位移等於最初位移 x_0，通常稱之爲物體振動的振幅。此外還可看出，物體完成一次振動，需要的時間是 $2\pi/p$ 秒。這時間稱爲物體振動的週期，用 τ 代表，

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \tag{43}$$

可見週期 τ 跟 p 成反比。p 這一因子是有特殊意義的。它的單位是 s^{-1}，表示它的因次跟以弧度計算的單位時間內旋轉角 ω 相同。由第



第 407 圖

406 圖可看到，如果我們以物體的靜力平衡位置作爲圓心，畫一個半徑等於振幅的圓周，那末物體上下振動時，它重心在圓周上的水平投影將以一定的速率沿圓周運動。它每秒掠過的弧度角就等於 p。物體振動一次，投影也繞圓周運動一周，這圓周通常稱爲**參攷圓**。 總括起來說，p 是物體上下振動時物體的水平投影，沿參攷圓圓周運動，每秒鐘所掠過的弧度角。

(43)式又說明，週期 τ 的大小跟 $\sqrt{W}$ 成正比，而跟 $\sqrt{k}$ 成反比。所以物體重量小而彈簧強韌，週期就短；物體重而彈簧軟，週期就長。調節物體重量和彈簧軟硬就可改變振動週期。

按彈力常數 k 的定義，W/k 原表示彈簧在 W 的靜力作用下，產生的伸長 δ_{st}，故(43)式中

$$\delta_{st}=\frac{W}{k} \tag{44}$$

如果把(43)的第三式同單擺週期比較一下，立刻可看到，物體的振動週期是跟一個擺長等於 δ_{st} 的單擺相同的。δ_{st} 的大小，我們可以在彈簧下面懸掛物體直接來量出來，所以週期 τ 也可以根據量出來的 δ_{st} 決定。

週期的倒數稱爲**週率**(或稱振動數)，通常用 f 表示，故

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{45}$$

週期、週率實際上說明同一事實，如何選擇應用，純粹看我們的方便；例如電磁波，它每秒要振動數十萬到數百萬次，若應用週期說明，顯然很不方便，所以一般都只用週率表示。

以上的討論是從假定「最初位移等於 x_0」和「初速等於零」兩個條

件出發的。現在我們再討論另外一種開始振動的方式。假定開始振動是由於物體在鉛垂方向突然受到一下衝擊，使它在平衡位置上得到一個初速。這樣，我們就有底下兩個條件：

$$(x)_{t=0}=0; \qquad (\dot{x})_{t=0}=\dot{x}_0 \tag{f}$$

把第一和第二兩個條件分別引入(42)和(e)兩式，可得 $C_1=0$ 和 $C_2=\frac{\dot{x}_0}{p}$。本振動的位移方程式(42)因此是

$$x=\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \tag{42b}$$

可見還是一種簡諧運動。這運動的圖解見第 408 圖，週期 τ 仍等於 $2\pi/p$，振幅却變爲 $\frac{\dot{x}_0}{p}$。所以，物體自由振動的週期僅受彈力常數 k 和重量 W 的影響，而跟物體如何開始振動(初位移或初速)無關。

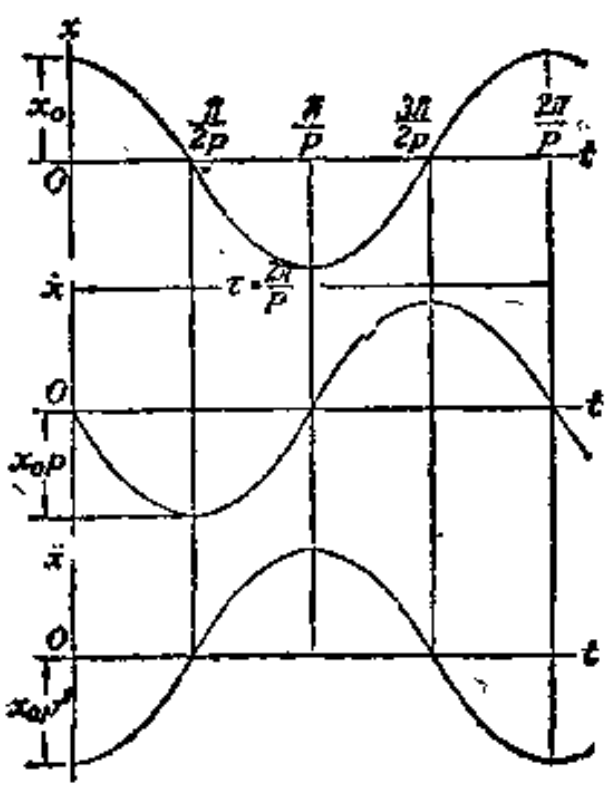
更一般的情形是假定物體最初位移和初速是：

$$(x)_{t=0}=x_0; \qquad (\dot{x})_{t=0}=\dot{x}_0 \tag{g}$$

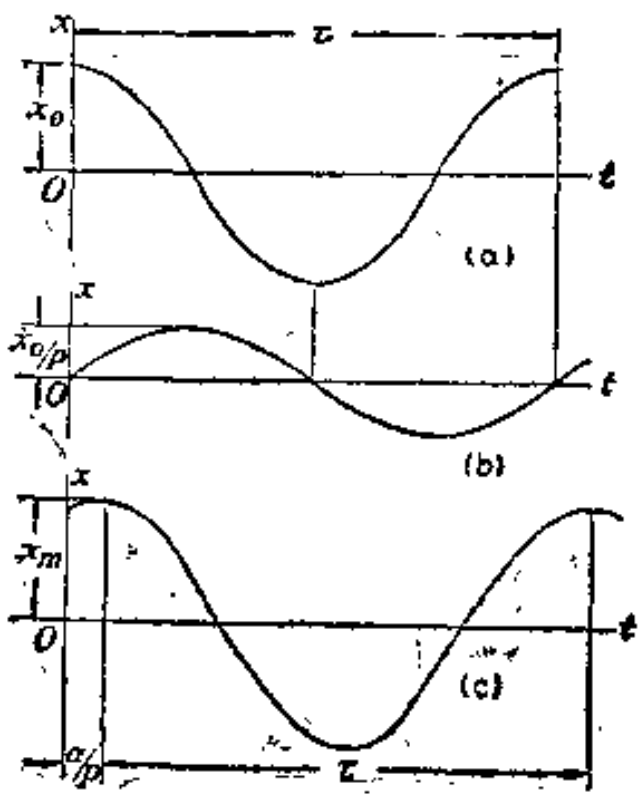
(42)式，因之，變成

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \tag{42c}$$

可見，我們只要把第 407 圖和第 408 圖中對應的縱坐標相加，就可得到(42c)式的圖解如第 409c 圖，結果仍舊是一種簡諧運動。

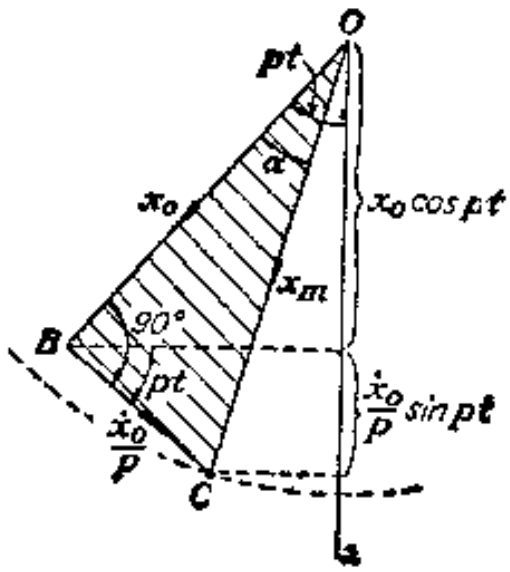


第 408 圖



第 409 圖

要證明(42c)式也是一種簡諧運動可觀察第410圖。圖中 Ox 是振動方向的軸綫，O 點表示物體的平衡位置。向量 $\overline{OB}$ 長度等於 x_0，跟 Ox 軸的正向成 pt 角；向量 $\overline{BC}$ 垂直於 $\overline{OB}$，長度等於 $\frac{\dot{x}_0}{p}$。這兩個向量在 Ox 軸上的投影分別等於 $x_0\cos pt$ 和 $\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt$，所以它們的合成向量 $\overline{OC}$ 在 Ox 軸上的投影正如(42c)式，等於 $x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt$；它代表物體的位移。因此，我們可以得出一個結論：即當物體上下振動時，C 點以角速 p 沿着一個半徑等於 $\overline{OC}$ 的參攷圓運動，$\overline{OC}$ 代表這個振動的振幅 x_m。如 OB 跟 OC 所成夾角等於 α，(42c)就可寫成底下的形式：



第 410 圖

$$x=x_m\cos(pt-\alpha) \qquad (42d)$$

可見兩簡諧運動的和的確還是一種同週率的簡諧運動。它振幅 x_m 和角 α 可由以下兩式算出：

$$x_m=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2} \qquad (h)$$

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}_0}{px_0} \qquad (i)$$

α 是 $\overline{OC}$ 跟 $\overline{OB}$ 的角度差，通常稱爲相角差。振動運動中，質點自平衡位置到達某一位置所需的時間對振動週期的比值，稱爲這一位置的相。質點在參攷圓的投影自平衡位置到某一位置所掠過的中心角則稱爲相角。故相角差的意義是：振動物體從開始 $t=0$、位移等於 x_0 時，到物體到達最大位移 x_m 時，它重心位移在參攷圓上的投影所含的中心角。換句話說，α/p(以秒計)是放鬆物體之後，它到達最低位置開始轉向上方行動以前，所需要的時間。

例題和習題

326. 有一部貨車，載重 25000kg 時，輪軸彈簧發生 10cm 的變形。假設現在彈簧載重 40000kg，試求貨車自由振動的週率等於多少？假定貨車只發生鉛垂方向振動。

解：輪軸彈簧的彈力常數是

$$k=25000/10=2500\text{kg/cm}$$

應用(45)式，就得到

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2500\cdot 980}{40000}}=1{,}246\text{ 次/s}$$

327. 有一根彈簧，作用力等於 10kg 時，彈簧的伸長是 1cm。現在懸掛一個重 1kg 的物體於彈簧下，試求振動數等於多少？

(解：$f=15{,}76$ 次/s)

328. 有一根彈簧，懸掛重 7kg 的物體時，靜力伸長等於 1,2cm，試求懸掛 10kg 重物體時的振動週期。

(解：$\tau=0{,}263$s)

329. 一物體重 W，掛在一根橡皮帶下面，靜力伸長 $\delta_{st}=5\text{cm}$（第 411 圖）。假設將物體托到橡皮帶張力等於零的位置，然後放任它自由振動。物體初速等於零。試求橡皮帶受到突然增加的物體重量作用後，所發生的最大伸長和物體的振動週率各等於多大？

解：以物體平衡位置作爲原點，規定向下位移爲正。物體的最初位移是

$$x_0=-\delta_{st} \tag{j}$$

初速等於零。按(42a)式，物體在任意一時刻 t 的位移應該是

$$x=-\delta_{st}\cdot\cos pt$$

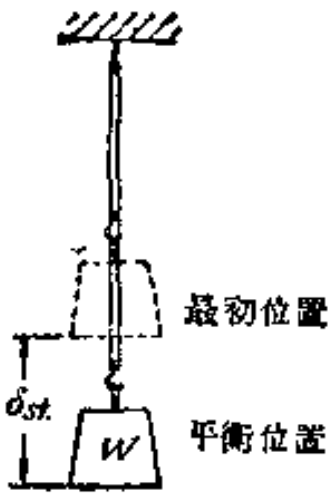
因 $pt=\pi$ 時，$\cos pt=-1$，故最大的正位移是

$$x_{max}=+\delta_{st} \tag{k}$$

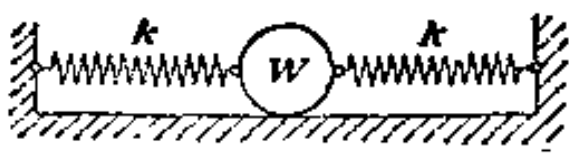
比較 (j) (k) 兩式，可知橡皮帶因突然作用的重力 W 而產生的伸長，要兩倍於由逐漸增加的重力 W 而產生的伸長。

根據(45)式，物體的自由振動週率就是

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{980}{5}}=2{,}23\text{ 次/s}$$



第 411 圖



第 412 圖

330. 第 412 圖中，兩彈簧的彈力常數都是 $k=1\text{kg/cm}$，圓球重 $W=1\text{kg}$。假設使圓球向右發生 1cm 的位移後，再放任它自由振動，試求週期以及圓球經過平衡位置時的速度等於多大？

（解：$\tau=0{,}142\text{s}$；$\dot{x}_{max}=44{,}3\text{cm/s}$）

331. 一電梯箱重 W，以均勻速度 v 下降。它鋼索的彈力常數等於 k。假設上面的捲揚電動機突然剎車，試求鋼索受到的最大張力以及電梯箱的振動週期各等於多大？

解：因電梯等速下降，故剎車時鋼索內張力就等於 W。命 $(x)_{t=0}=0$ 和 $(\dot{x})_{t=0}=v$，根據(42b)式，可得

$$x=\frac{v}{p}\sin pt \tag{l}$$

故在 $\sin pt=1$ 時，x 值最大，它等於 v/p。應用(c)式，就得

$$x_{max}=v\sqrt{\frac{W}{kg}} \tag{m}$$

但這一最大位移是自平衡位置開始計算的，故鋼索的全部伸長應等於

$$\delta_{max}=\delta_{st}+x_{max} \qquad (n)$$

因之，最大張力將是

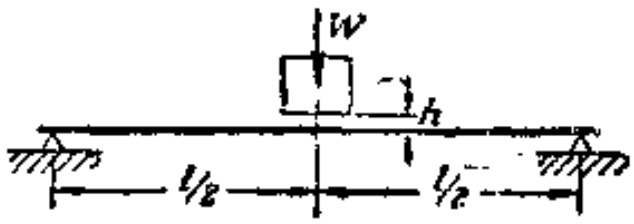
$$S_{max}=k\delta_{max} \qquad (o)$$

以(m)式和(44)式代入(o)式，就得

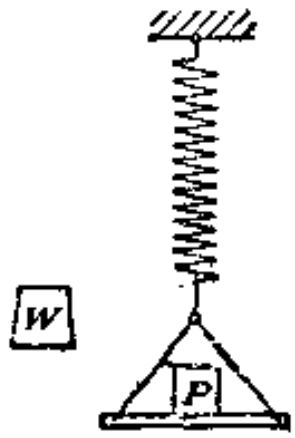
$$S_{max}=W\left(1+\frac{v}{\sqrt{g\delta_{st}}}\right) \qquad (p)$$

332. 一根鋼梁，載重150kg時，中點撓度等於0,3cm。設一物體重200kg，自高度$h=3$cm處在中點自由落下，靜止於梁上，試求梁的最大撓度以及物體的振動數(第413圖)。

(解：$\delta_{max}=1.95$cm，$f=7,88$次/s)



第 413 圖



第 414 圖

333. 第414圖中，盤中未放物體時，空盤的自由振動週期是τ_0。如放一已知重量P的物體於盤中，振動週期就變爲τ_1。假設重量W未知的物體放在盤中振動的週期等於τ_2，試求W等於多大？

$$\left(解：W=P\frac{\tau_2^2-\tau_0^2}{\tau_1^2-\tau_0^2}\right)$$

334. 第414圖中，彈簧的彈力常數k不知道。現在先後把兩個已知重量P和Q的物體放在盤內振動，觀察得兩物體的振動週期分別是τ_1和τ_2。試問彈簧的彈力常數k等於多大？

$$\left(解：k=\frac{4\pi^2(P-Q)}{g(\tau_1^2-\tau_2^2)}\right)$$

335. 第415圖上下兩彈簧的彈力常數分別是k_1和k_2。問串聯後，彈力常數將等於多大？

解：兩彈簧在重力W作用下的靜力伸長分別是$\delta_1=W/k_1$和$\delta_2=W/k_2$。串聯彈簧的靜力伸長δ_{st}等於$\delta_1+\delta_2$，故

$$\delta_{st}=W\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)$$

代入(44)式，可得所求的彈力常數是

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \qquad (q)$$

336. 試計算第 416 圖中並聯彈簧的彈力常數 k 等於多大? 設原來兩彈簧的彈力常數分別是 k_1 和 k_2。

解: 兩彈簧受到的作用力不一定相等,但發生的靜力伸縮必須相同,如命 W_1 和 W_2 分別代表物體分配於上下兩彈簧的重量,那末

$$\delta_{st}=\frac{W_1}{k_1}=\frac{W_2}{k_2}$$

或

$$W_2=\frac{k_2}{k_1}W_1$$

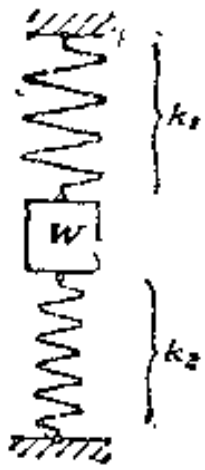
但

$$W=W_1+W_2=W_1\left(\frac{k_1+k_2}{k_1}\right)=\frac{W_1}{k_1}(k_1+k_2)$$

故得

$$k=\frac{W}{\delta_{st}}=k_1+k_2 \qquad (r)$$

第 415 圖



第 416 圖

71. 自由振動(二)

有很多種的物體直線運動,雖然不像 § 70 所討論的情形是一個物體掛在一根彈簧或幾根彈簧下面,可是物體受到的作用力也跟位移成正比。這種情形下,我們一下子可能看不出運動的性質。處理這類問題我們需要由建立基本方程式(36)開始。假設能夠把運動方程式化成底下的形式:

$$\ddot{x}+p^2x=0 \qquad (41')$$

其中 p^2 代表一個跟 x 無關的任意常數,那末這一運動一定還是一種簡諧運動,它的週期是

$$\tau=\frac{2\pi}{p}$$

在一般情形下，對於簡諧運動我們只要求知道它的週期，可以根本不必研求(41)式的通解方程式。現在舉一些例子來說明如何直接計算週期的方法。

例題和習題

337. 有一隻船，平均吃水深度等於 h，水綫切面面積等於 A。如不計水的摩阻力和質量，試證明這船的上下方向振動是一種簡諧運動，並求出它的週期等於多大(第417圖)?

解：若水的密度等於 w，船由平衡位置向下沉落 x 距離時，浮力的增加就是 Axw。所增加的浮力，方向向上，恰跟位移 x 方向相反，故

$$\frac{Ahw}{g}\ddot{x}=-Axw$$

也就是

$$\ddot{x}+\frac{g}{h}x=0 \qquad (a)$$

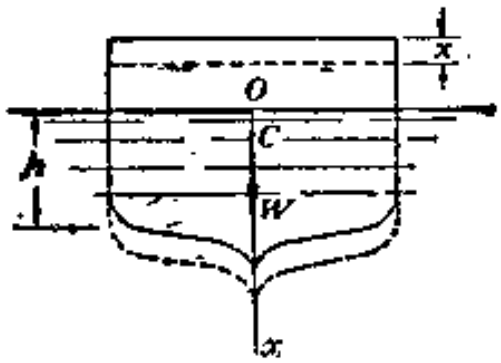
可見這一運動的確是一種簡諧運動。振動方程式的常數 p^2 在這裏等於 $\frac{g}{h}$，故週期是

$$\tau=2\pi/p=2\pi\sqrt{h/g}$$

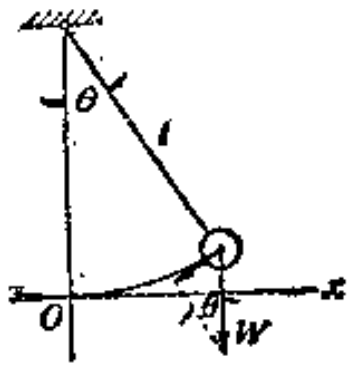
這說明，船的週期是跟擺長等於 h 的單擺週期相同的。

338. 試求吃水深度等於 $9.8m$ 的船隻的鉛垂方向振動週期等於多大?

(解：$\tau=6.28s$)



第 417 圖



第 418 圖

339. 試求單擺作微小角度擺動的週期等於多大(第418圖)?

解：因角度微小故質點的弧形路綫可認爲是一根直綫綫段。質點受到的作用力是

$$W\sin\theta=-W\frac{x}{l}$$

其中 l 表示單擺的擺長。根據(36)式，得

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=-W\frac{x}{l}$$

故

$$\ddot{x}+\frac{g}{l}x=0 \qquad (b)$$

可見單擺的擺動確是一種簡諧運動。由(41)知 $p^2=\frac{g}{l}$，故週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

340. 第419圖中，小球重 W，結在一根緊張的細繩 AB 中點。試證明小球在水平方向的微小振動是一種簡諧運動，並計算它振動週期等於多大？

解：假定細繩原來緊張時已經有很大的張力 S，小球作微小水平位移所引起的張力增加就可以不計。小球在圖中位置受到的水平作用力是

$$X=-2S\frac{x}{l}$$

應用(36)式，得

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=-2S\frac{x}{l}$$

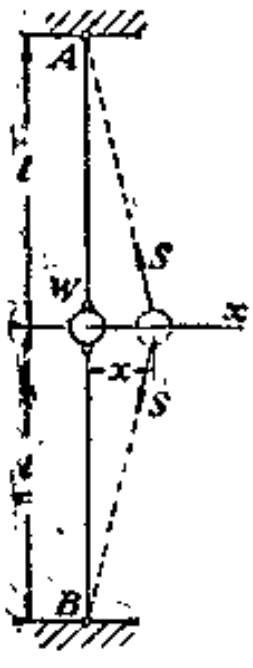
故

$$\ddot{x}+\frac{2S}{W}\frac{g}{l}x=0 \qquad (c)$$

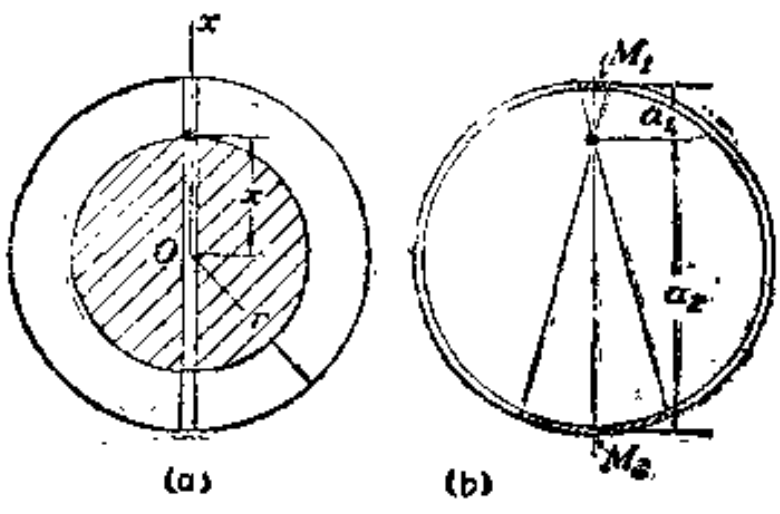
這表示小球確是作簡諧運動。(41)式中的常數 p^2 在這裏是等於 $2Sg/Wl$，故週期是

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{Wl}{2Sg}}$$

可見週期要跟張力的平方根成反比。所以調節細繩的緊張程度，就可以得到指定的振動週期。



第 419 圖



第 420 圖

341. 假設沿地球直徑打一個對穿的井洞。試證明一個物體落在井中後，必將發生簡諧運動，並求出這一振動週期的大小。假定地球半徑等於 r，單位體積的重量等於 w。

解：由萬有引力定律，知道

$$X=K\frac{m_1 m_2}{x^2}$$

其中 K 是引力常數。物體在第420圖中位置時，它受到的作用力應該等於圖中畫斜線部份質量的引力。若要問什麼緣故？可觀察第420b圖中的一層極薄的空心球。設想有一個圓錐。錐頂在物體所在位置，這圓錐在空心球上切出兩個圓盤，它們質量分

別是 M_1 和 M_2。因圓盤很薄，所以它們的質量可當作表面積成正比。但是同一圓錐角的圓錐底面積本來跟圓錐高 a_1 和 a_2 的平方成正比，所以根據引力公式，這兩個圓盤對物體的引力雖甚恰巧互相抵消。整個空心球球體當然可看作由如此兩兩相對的圓盤所構成，故在空心球內部的物體，它受到空心球的引力合力永遠等於零。一般說來，任何在物體外的空心球殼部分加於物體的引力都是如此，所以物體在井中不受它所在位置外的地殼的引力影響。物體的運動方程式，因此是

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=-K\frac{4\pi x^3 w W}{3g^2 x^2}$$

故

$$\ddot{x}+K\frac{4\pi w}{3g}x=0$$

可見物體的確是發生簡諧運動。(41)式的常數 p^2 在這裏等於 $K\frac{4\pi w}{3g}$。至於引力常數 K 的大小，我們另外由地球表面的引力現象來決定；物體在地球表面的加速度是 g，這就是說 $x=r$ 時，$x=g$，代入運動方程式，得

$$K=\frac{3g^2}{4\pi r w}$$

這樣，運動方程式就化爲

$$\ddot{x}+\frac{g}{r}x=0 \qquad (d)$$

可見物體的振動週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

相當於擺長等於 r 的單擺週期。

342. 設上題中 $r=637\cdot10^6$cm，試求週期應等於多大？

(解：$\tau=84.4$ 分)

343. 第 421 圖的裝置：AB 桿重 W；兩圓柱轉速相等，旋轉方向相反。試證明如果 AB 的重心 C 有一些偏移，AB 就會發生簡諧運動，而且這運動的週期與兩圓柱的中心距離 $2a$ 和圓柱跟 AB 桿間的摩擦係數 μ 而定。

解：按靜力學方法，可求出圓柱的反作用力是

$$R_1=\frac{W}{2a}(a-x) \text{ 和 } R_2=\frac{W}{2a}(a+x)$$

相應的摩擦力是

$$F_1=\mu R_1 \text{ 和 } F_2=\mu R_2$$

所以 AB 桿的運動方程式是

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=-F_2+F_1$$

AB 桿在圖中位置時，$F_2>F_1$，所以它受到的作用力合力應該在使 AB 桿回到平衡位置——也就是圖中由右到左——的方向。以 F_1 和 F_2 值代入運動方程式，得

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=-\frac{\mu W}{a}x$$

所以

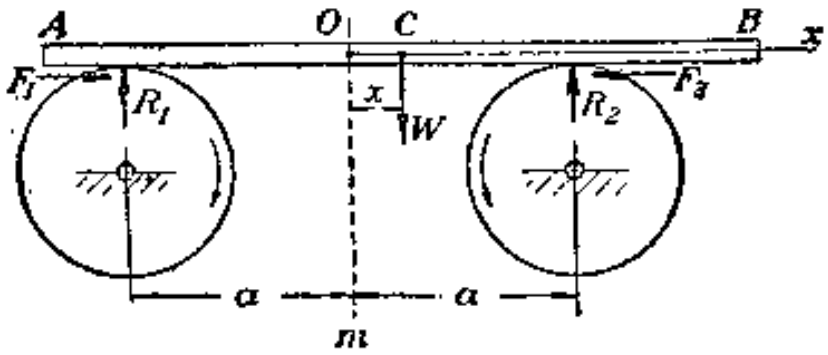
$$\ddot{x}+\frac{\mu g}{a}x=0 \qquad (e)$$

可見 AB 桿確是發生簡諧運動。常數 $p^2=\frac{\mu g}{a}$，故週期是

$$\tau=2\pi/p=2\pi\sqrt{a/\mu g}$$

利用第 421 圖這樣的裝置，我們顯然也可以由週期的觀察來測定圓柱跟 AB 桿間的摩阻係數。觀察出週期後，根據上式就可得

$$\mu=4\pi^2a/g\tau^2 \qquad (f)$$



第 421 圖

344. 設上圖中，AB 是一根放在兩個鋼柱上的木桿，測出的振動週率是 40 次/分。a 等於 25,4cm 問木與鋼間的摩阻係數等於多少？

(解：$\mu=0,45$)

72. 强迫振動

以上專就質點的自由振動討論。自由振動的推動力，像彈簧的彈力等等是由運動本身來維持的。假使沒在彈簧下面的物體不運動，那就不會有不平衡的彈力發生，從而就不會有振動。地球表面的重力，始終不變，所以它不能引起振動。

假設除開彈力外，另外有一個隨時間變化的外力在物體上作用，那物體的運動方程式(36)就變成

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=-kx+Q \qquad (a)$$

其中 $Q=f(t)$ 稱爲振動的擾動力。

實際問題中，Q 力常是時間的正弦或餘弦函數。例如第 422 圖中一部重 W 的電動機，底座裝有彈簧，可以上下振動。若電機轉子完全均衡，那就只有電動機的重量作用在彈簧上，使彈簧只發生靜力壓縮 $\delta_{st}=\frac{W}{k}$。這時候，如果有一個偶然外力，使電動機上下振動，那發生的就只是自由振動，週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}$$

不過轉子若因製造關係並不均衡，以致像有一偏心質量在圖中 A 處一樣，那末轉動時就會產生離心力 Q_0。這離心力傳到彈簧上的鉛垂方向分力是

$$Q=Q_0\cos\omega t \tag{b}$$

其中，ω 指轉動子的固定角速度，時間 t 從 Q_0 鉛垂向下時起算，以(b)式代入(a)式，兩邊同時除以 W/g，並命

$$\frac{kg}{W}=p^2,\quad \frac{Q_0g}{W}=q_0 \tag{c}$$

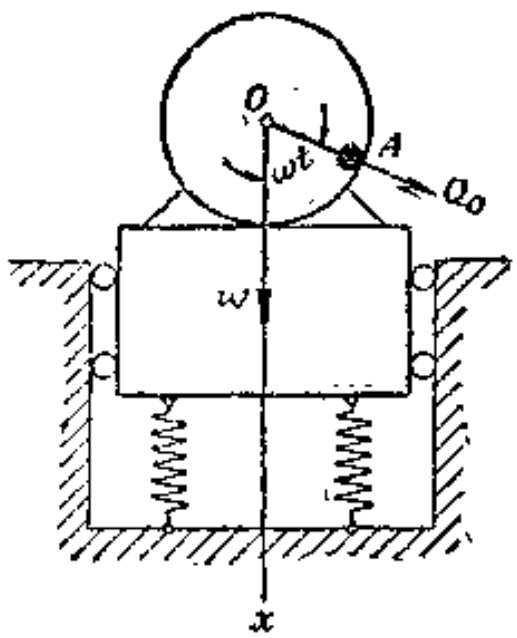
就可得

$$\ddot{x}+p^2x=q_0\cos\omega t \tag{46}$$

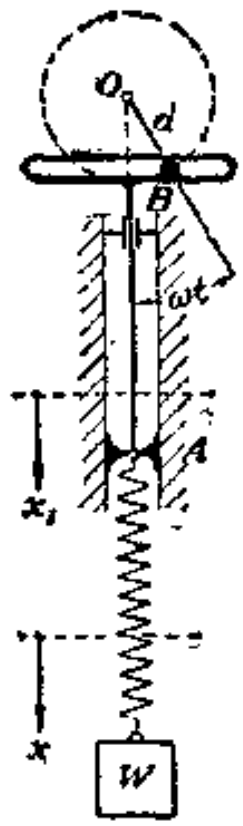
這就是物體的強迫振動方程式，式中 $q_0=\frac{Q_0g}{W}$ 表示電動機單位質量所受到的擾動力。(以上我們默認振動的幅度很小；否則，偏心質量的運動路綫不能認爲是一個圓周)。

在解(46)式以前，再另舉一個情形相當的例子如第 423 圖。圖中物體重 W，懸掛在一根彈簧下面，彈簧本身又懸掛在滑上下方向作簡諧運動的十字頭 A 下面。OB 曲軸長 a，轉速固定等於 ω。時間從 OB 鉛垂向下時開始計算，A 的位移 x 以它的運動路綫中點作爲原點。這樣，對該中點而言的 A 點的位移 x 就將是

$$x_1=a\cos\omega t \tag{d}$$



第 422 圖



第 423 圖

彈簧上端發生了這樣的位移，下端懸掛的物體自然將因而移動。計算物體的位移 x，我們以十字頭 A 在中點時，物體的靜力平衡位置爲原點。x 和 x_1 並不一定相等，因彈簧本身還有伸縮。故 $x-x_1$ 表示物體在某一位置時，彈簧經靜力伸長後的再伸長。根據這些條件，可得物體運動方程式如下：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-[W+k(x-x_1)]$$

以(d)式代入上式，得

$$\frac{W}{g}\ddot{x}+kx=ak\cos\omega t \tag{e}$$

如命

$$\frac{kg}{W}=p^2,\quad q_0=\frac{akg}{W} \tag{f}$$

並以 W/g 除(e)式各項，就可得

$$\ddot{x}+p^2x=q_0\cos\omega t$$

上式跟(46)式在形式上完全相同。兩種運動不同的地方只是擾動力在前一個例子中是直接加在物體上，而在後一個例子中，卻經過彈簧才傳達到物體上。

現在開始求(46)式的「解」。下式顯然能滿足(46)式：

$$x=C\cos\omega t \tag{g}$$

其中 C 是一個常數，以(g)式代入(46)式，可得

$$-C\omega^2+Cp^2=q_0 \tag{h}$$

故

$$C=\frac{q_0}{p^2-\omega^2} \tag{i}$$

以(i)代入(g)式，就得

$$x=\frac{q_0}{p^2}\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}\right)\cos\omega t \tag{47}$$

這僅是(46)式的特解。我們還需要把(41)式的通解(42)式加入進去，才能得到普遍適用的通解如下：

$$x=C_1\cos pt+C_2\sin pt+\frac{q_0\cos\omega t}{p^2\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)} \tag{48}$$

(48)式能滿足(46)式，可用代入法證明。這一通解有兩個積分常數，所以它適用於任何最初位移和任何初速的具體問題。(48)式中右邊第一、第二兩項代表自由振動，週期是

$$\tau=\frac{2\pi}{p}$$

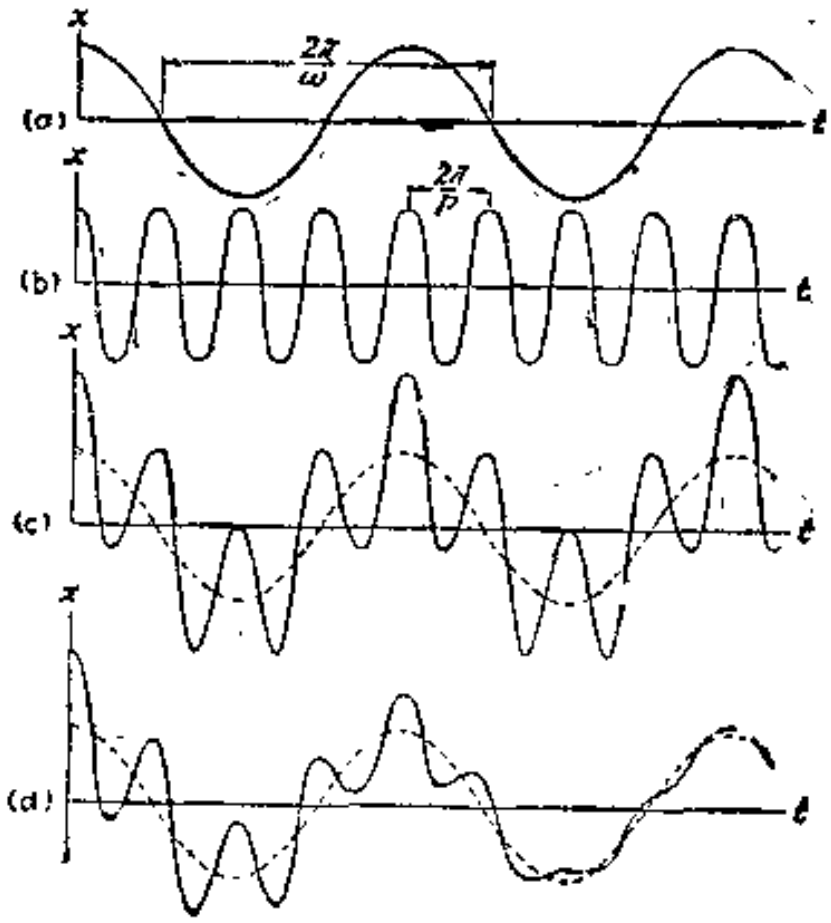
對於一個既定的振動系統，這一週期是不變的，是跟擾動力無關的。(48)式右邊最後一項代表強迫振動。這一振動的週期是

$$\tau_1=\frac{2\pi}{\omega}$$

它跟擾動力的週期變化相同，而跟振動系統的自然週期無關。

(48)式的運動既然由週期不同的兩種簡諧運動相加而成，它的圖形自然應該如第424圖。a 圖表示強迫振動的位移時間關係，相當於(48)式的最後項；b 圖表示自由振動的位移時間關係，相當於(48)式的前一二項，假定$C_2=0$。c 圖是兩種位移之和。以上導出(48)

式的過程中，摩阻力始終不曾顧及。事實上，摩阻力必然存在。物體振動次數一多，摩阻力雖小，它的累積影響就會相當可觀。所以自由振動的振幅，必然要因爲摩阻力關係逐漸減小而趨近於零。強迫振動可不同，只要擾動力繼續存在，振幅就可以維持。所以實際運動情形會像第424d圖，物體在振動很多次數後，自由振動就被摩阻力消滅，剩下來的只是純粹的強迫振動。換句話說，強迫振動會單獨成爲物體振動的經常形態，如(47)式所示。



第 424 圖

在前面電動機的例子中(第 422 圖)，以原值代出 q_0 和 p^2，(47)式就變爲

$$x=\frac{Q_0\cos\omega t}{k}\left(\frac{1}{1-\omega^2/p^2}\right) \tag{47a}$$

在彈簧下面懸掛物體的例子中(圖 423)，以原值代出 q_0 和 p^2，(47)就變爲

$$x=a\cos\omega t\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}\right) \tag{47b}$$

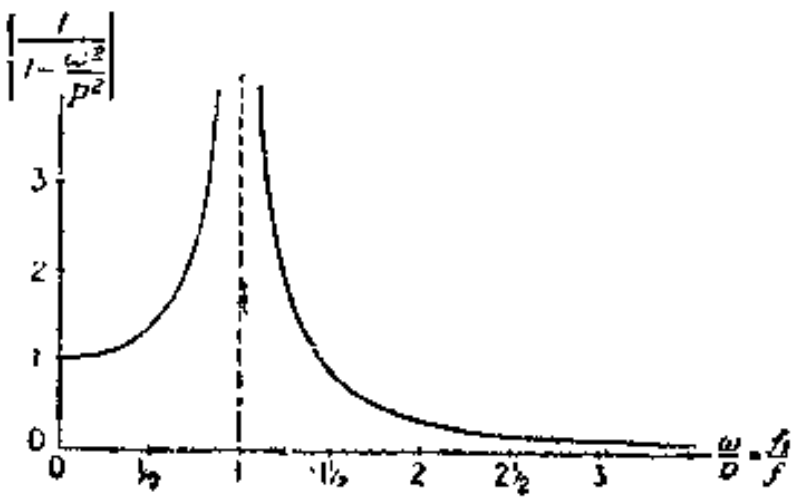
(47a)式的 $Q_0\cos\omega t/k$ 表示底座彈簧在擾動力靜力作用下的伸縮(此伸縮不可跟電機重量 W 所生的靜力變形 $\delta_{st}=W/k$ 混同)。(47b)式的 $a\cos\omega t$ 表示彈簧上面十字頭 A 的位移，也可以看作作用在彈簧上面的作用力所發生的靜力效應。所以在這兩例子當中可以看到，擾動力的動力效應是由底下這一因子

$$\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}\right) \tag{j}$$

跟靜力效應的乘積來決定的。這因子的絕對值通常稱爲強迫振動的放大因數。由 (j) 式

可知因數值的大小純粹看比值 ω/p 而定，也就是要看物體的自由振動週率 $f=p/2\pi$ 跟強迫振動週率 $f_1=\omega/2\pi$ 的比值而定。這兩種週率又分別稱爲自然週率和外加週率。

因強迫振動的振幅跟放大因數直接成比例，所以放大因數在強迫振動中至關重要。第425圖是這一因數跟週率比值間的關係曲綫。在圖上看得出，當 ω 小於 p 很多(也就是外加週率比自然週率低得多)，放大因數就近乎等於1。這樣，擾動力的動力效應就跟靜力效應相差無幾。當 ω 逐漸接近 p 值時，放大因數飛速增大，到 $\omega=p$ 時因數值就變成無限大，因之振幅也變爲無限大。實際上，因摩阻力關係振幅當然不至於成爲無限大。但振幅大到可以破壞振動系統本身則是沒有疑問的，這種情形下的振動通常稱爲共振或共鳴。



第 425 圖

當 ω 增加到大於 p，超過共振現象後，放大因數將開始減小。等 ω 大到大於 p 值幾倍，放大因數就逐漸接近於零。這時，擾動力的效應幾乎已經沒有；強迫振動的振幅極度微小，物體幾乎是處於靜止狀態。這一結論有極大的實際意義。

在 $\omega>p$ 後，放大因數變成負的，物體位移恰跟擾動力方向相反。所以物體在共振現象前的振動稱爲同步擾動；意思就是物體位移跟擾動力步伐相同。在過共振現象後的振動，通常稱爲異步擾動，表示擾動力跟物體位移方向相反，步伐相異。

例題和習題

345. 第422圖中，電動機轉子的轉速是每分鐘1800次，偏心質量所產生的擾動力等於 $W/10$，W 是電動機重量。此外，$\delta_{st}=W/k=0{,}0076\text{cm}$。試求強迫振動的振幅跟 δ_{st} 的比值等於多大？

解： 因 $\omega=2\pi\cdot1800/60=60\pi$ 弳/s，

$$p=\sqrt{\frac{gk}{W}}=\sqrt{\frac{W}{0.0076}\cdot\frac{981}{W}}=359\ \text{s}^{-1}$$

故

$$\omega/p=60\pi/359=0{,}525$$

應用(47a)式，得

$$x_m=\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}=\frac{\delta_{st}}{1-0{,}525^2}=\frac{\delta_{st}}{1-0{,}275}=0{,}138\ \delta_{st}$$

所以 $x_m : \delta_{st} = 0{,}138$

3 6. 第 423 圖中，$a=2{,}54\text{cm}$，$\omega=180$ 轉/s，$\delta_{st}=\dfrac{W}{k}=7{,}6\text{cm}$。試求重體 W 強迫振動的振幅等於多大?

(解: $x_m=0{,}0131\text{cm}$)

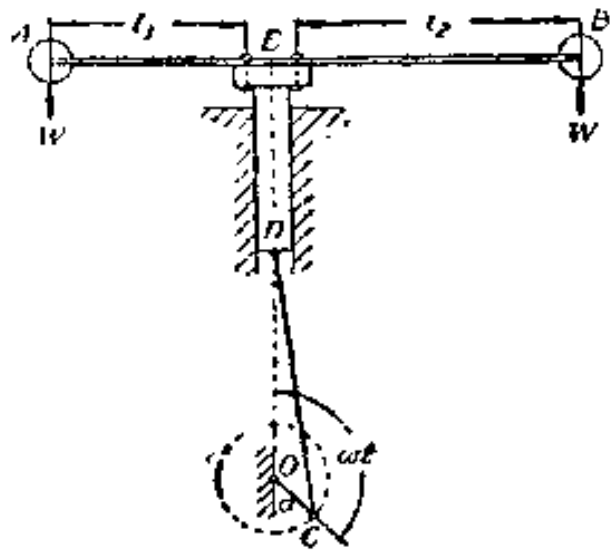
347. 第 426 圖的裝置，活塞 DE 上下運動的週期 $\omega/2\pi$ 的平方恰等於圖中兩個圓球自然週期的平方的平均值。兩圓球重量都等於 W。試求它們強迫振動的振幅比值等於多大?

[解: $(x_m)_a/(x_m)_b=(l_2/l_1)^3$]

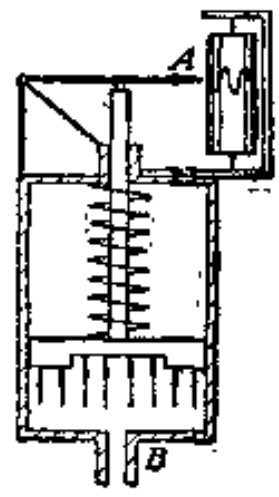
73. 強迫振動的應用

(1) 遠在共振現象前的強迫振動; $\omega/p<1$

各種壓力指示計多數都利用這種強迫振動作爲設計根據。壓力指示計構造形式如第 427 圖。主要部份是一個附裝彈簧的活塞。活塞的自然週率看彈簧的彈力常數 k 和活塞重量 W 的大小而定。指示計由 B 口引出一根導管跟原動機的汽缸連通，使活塞受到的壓



第 426 圖



第 427 圖

力跟汽缸中壓力相同。原動機汽缸內的壓力不斷變化，活塞因之將產生強迫振動。振動幅度由槓桿裝置記錄在一個旋轉的 A 筒上。因必須使活塞的振幅跟活塞受相同壓力的靜力位移相等，故指示計的自然週率一定要比原動機壓力的變化週率大得多，使放大因數接近於 1，壓力的動力效應才能接近於靜力效應。可見，指示計的小活塞應該輕，彈簧應該強韌，使自然週率很大，才成。

往復式原動機的加速度指示計也是應用以上這種振動現象來設計的。指示計的構造如第 428 圖。應用時，把它裝在原動機的十字頭上，使彈簧上端的運動完全跟十字頭運動相同。十字頭的位移方程式是

$$x_1=a\cos\omega t \qquad (a)$$

其中 a 代表十字頭的振幅(振動週期等於 $2\pi/\omega$)。因重體 W 的絕對位移是

$$x = a\cos\omega t\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}\right)$$

所以物體對於十字頭或「記錄圓筒」的相對位移是

$$x - x_1 = a\cos\omega t\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}} - 1\right)$$

或

$$x - x_1 = \frac{\omega^2}{p^2}a\cos\omega t\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}\right) \qquad (b)$$

這就是記錄下來的位移曲綫的方程式。因 ω/p 若十分微小，(b) 式就可簡化爲

$$x - x_1 = \frac{\omega^2}{p^2}a\cos\omega t$$

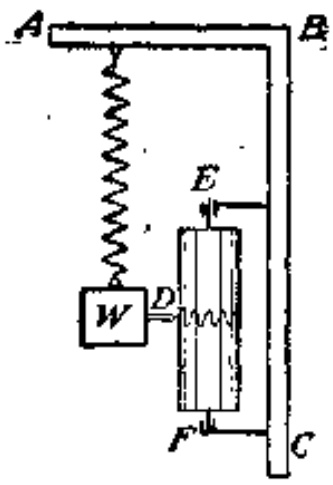
此外，因十字頭加速度是

$$\ddot{x} = -\omega^2 a\cos\omega t$$

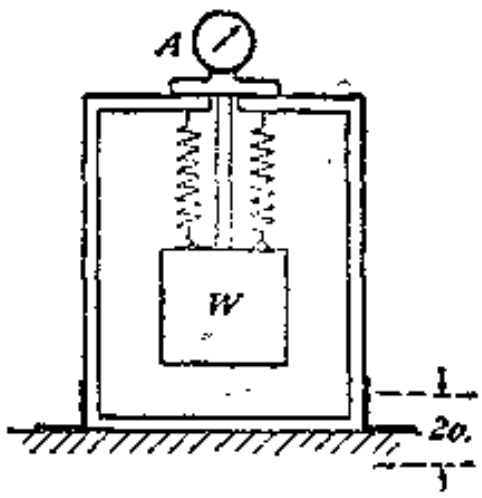
所以只要把記錄下來的位移曲綫乘上儀器常數 p^2，就可得到十字頭的加速度曲綫。

(2) 遠在共振現象以後的強迫振動；$\omega/p>1$

測量地基振動情形的地震儀和基礎振動儀，一般都利用這種振動作爲設計根據。儀器的結構形式如第 429 圖。應用時，將儀器裝在透平或電機的基礎上。儀器中彈簧的彈力常數極小，而物體的重量 W 却很大，所以自由振動週率極低。地震週率或透平的轉數一般都很



第 428 圖



第 429 圖

高，故儀器中的振動體幾乎近於絕對靜止，A 表因而可以記錄出地基在鉛垂方向的振動情形。如測量水平方向的振動，儀器中可改用水平方向彈簧。

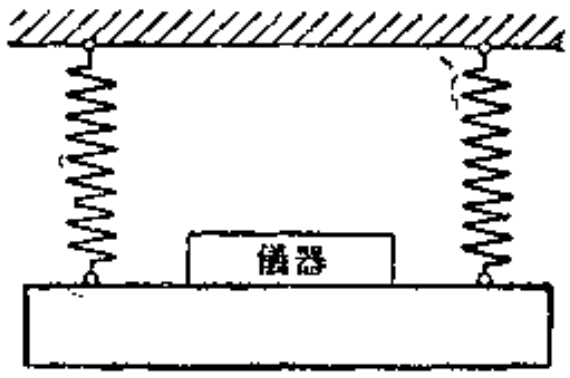
精密儀器的底盤，也利用這種強迫振動現象來設計(第 430 圖)。房屋結構一般都很堅實，自然週率頗高。街車振盪只有週率接近房屋的才能對房屋有相當影響，所以振動都使很強烈，它對低週率振動的底盤也不會有顯著的影響，儀器因此可以不受擾動。

在機器底座同機器間加裝彈性裝置也是這個緣故。若不裝這種減震裝置，機器旋轉所發生的不均衡的力就會傳導到基礎上，引起可厭的振動。

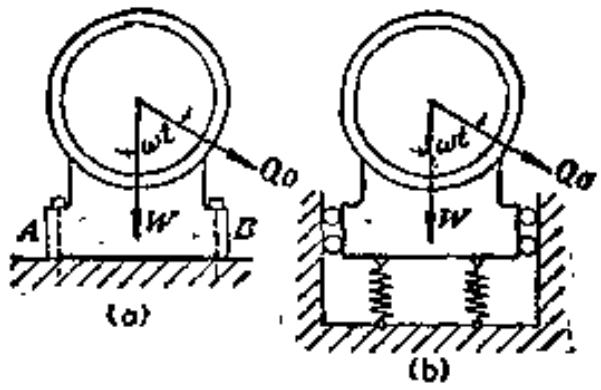
譬如第 431 圖的電動機，它的轉子有偏心質量，因之會產生一個離心力 Q_0 作用在機座上。假使我們把機座直接裝到基礎上去(第 431a 圖)，那 Q_0 就會傳導給基礎，引起基礎的振動。應用彈性裝置如第 431b 圖，情形就不同。若整個電動機重量等於 W，全部彈簧的彈力常數等於 k，那末 Q_0 的鉛垂分力所引起的強迫振動，振幅就將是

$$x_m=\frac{Q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}$$

可見只要選用適當的彈簧使振動系統的自然週率比外加週率——也就是電動機的每分鐘轉數——小得多，比值 ω/p 就會很大，從而可以使振幅 x_m 比 Q_0 的靜力作用所產生的彈簧形變小很多倍。這樣，經過彈簧傳導到基礎上的變化作用力也就比 Q_0 小同樣多的倍數；基礎由轉子不均衡而引起的振動自然也就大爲減弱。



第 430 圖

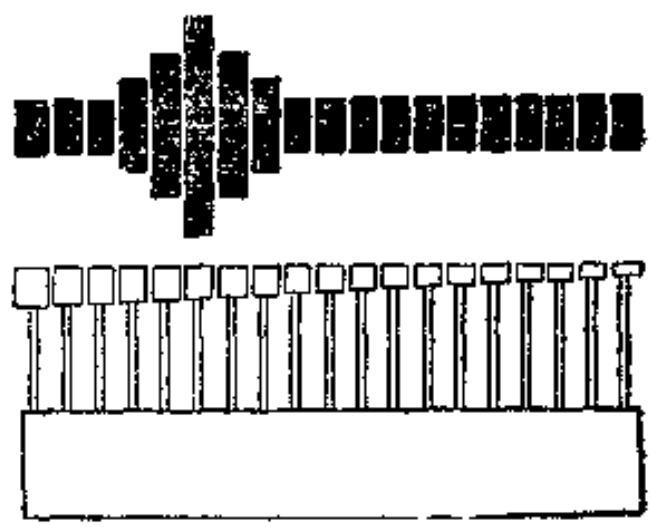


第 431 圖

(3) 共振現象

關於共振現象，§ 72 中討論的只是摩擦阻力可以不計的情形，因而實際現象究竟如何還不清楚。不過，有一點至少是可以肯定的(而且目前也只需要知道這一點)，就是發生共振時，強迫振動的振幅會特別大。正因爲這一緣故，所以共振是一種很危險的現象，它會使彈性裝置發生過大的內應力而毀壞。不過，一些測量振動週率的儀器倒是根據共振現象設計的。它們的振動週率非常接近共振。現在舉兩個例子來說明。

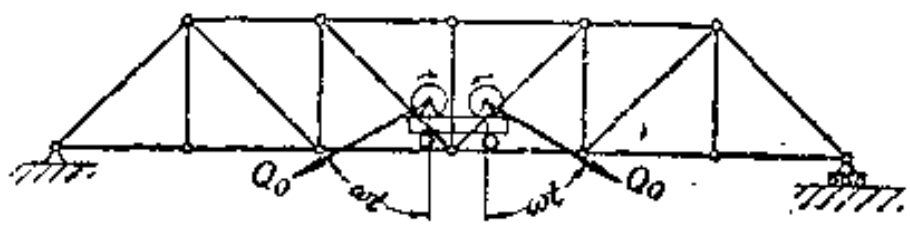
週率指示器：這是一種測量各種振動體的週率的儀器，構造形式見第 432 圖。主要部份是一排漸的鋼條，一頭嵌在底座內，另外一頭裝一個振動體。所以每一單位都像一頭有載重的嵌固梁，都有它自己的自然振動週率。各鋼條上振動體的重量，按一定規律安排，使共同包括某一階段的週率。應用時，把底座裝在要測量振動數的物體上。如果物體的振動週率跟儀器中某一單位的週率接近，這一單位的振幅就特別大，所以所求的週率可以



第 432 圖

直接根據這一單位的已知自然週率來決定。

振動器：第 433 圖是一個測量橋梁、房屋等自然週率的振動器。主要構造是兩個有相同偏心質量的摩輪。工作時，兩輪相對等速旋轉，偏心質量所產生的離心力 Q_0 非但大小相等，而且兩力方向也跟鉛垂綫成相等的交角。所以只在鉛垂方向產生一個週期變化的作用力。應用時，把這儀器裝在建築物上，逐漸增加兩輪的轉速，等看到建築物強迫振動的振幅顯著增大，記錄下這時候摩輪每分鐘的轉數，就得到建築物的自然週率。



第 433 圖

這一儀器還可以用來試驗大的結構模型和陳舊的建築物。試驗對象在振動器引起的共振現象下完全毀壞後，我們就可以詳細研究結構上各種破壞的類型。一個相當小的振動器能夠完全摧毀一個巨大建築物的事實，也說明了共振現象的危險，所以任何機件都不可以在共振現象（或接近這種現象）下工作。

例題和習題

348. 第 427 圖中是一個蒸汽壓力表，其中彈簧的彈力常數 $k=18\text{kg/cm}$。蒸汽壓力的最大變化週率每分鐘 600 次，誤差限度 2%，試問壓力表活塞的正確重量應等於多大？

（解：$W=0{,}091\text{kg}$）

349. 將第 428 圖的加速度指示計裝在一部蒸汽機的十字頭上。圓筒上記錄下來的振幅是 0,6mm。設指示計彈簧的彈力常數 $k=1{,}8\text{kg/cm}$，振動體的重量 $W=0{,}1\text{kg}$，試求十字頭的最大加速度等於多大？

（解：$\ddot{x}_1=10584\text{cm/s}^2$）

350. 假定第 431*b* 圖中，電動機經底座彈簧傳達到基礎的變化作用力，只等於無底座彈簧時（第 431*a* 圖）的十分之一。電動機轉數每分鐘 1800 次。電機重量是 100kg。試求底座彈簧彈力常數應等於多大？

（解：$k=330\text{kg/cm}$）

74. 慣性力——慣性力原理

質點的直線運動方程式(36)也可以寫成底下的形式：

$$X-m\ddot{x}=0 \qquad (a)$$

其中 X 代表所有沿 x 軸方向作用的外力的合力，m 代表質點的質量。這一運動方程式 (a) 跟靜力平衡方程式在形式上完全相同，所以可以

把它當作一個動力平衡方程式看待。要建立這樣一個方程式，我們只要在實際作用力之外，假想有一個 $-m\ddot{x}$ 力作用在質點上。然後，攷察各力的平衡條件就成。這一假想的作用力，大小等於質點的質量跟加速度的乘積，方向跟加速度相反，是所有實際作用力的平衡力，通常特稱爲慣性力。

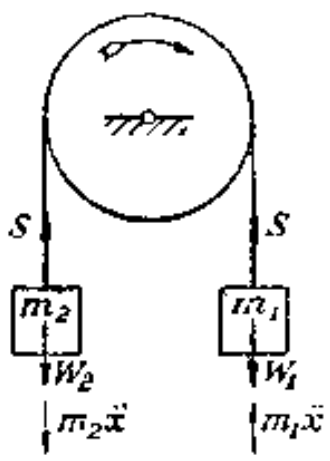
剛體作直線移動時，所有各質點都發生同樣的直線運動，各點加速度完全相同，所以各質點慣性力的合力應該是

$$-\Sigma m\ddot{x}=-\ddot{x}\Sigma m=-\frac{W}{g}\ddot{x} \tag{b}$$

式中 W 指剛體的全部重量。此外，各質點的慣性力跟質點的重力成正比，所以它合力的作用點也必定在剛體的重心上。剛體直線移動的動力平衡公式因此是

$$\Sigma X_i+\left(-\frac{W}{g}\ddot{x}\right)=0 \tag{49}$$

現在來討論幾個互相牽制的質點所組成的質點系，其中每一個質點都只能發生直線運動。例如第 434 圖的兩個物體，它們分別重 W_1 和 W_2，由一根沒有伸縮性的軟線連接，跨着掛在一個固定滑車上，滑車的慣性和軸承摩擦力全部可以不計。設整個系統按圖中箭頭表示的方向運動，可得重體 W_2 的向上加速度 $\ddot{x}$ 和重體 W_1 的向下加速度 $\ddot{x}$。現在在實際作用力——重力 W_1，W_2 和軟線反作用力 S——之外，把加速度引起的慣性力加入進去，就可以在每一個質點上得到一個平衡力系。由此又可以斷定，整個系統一定也是在平衡狀態。這樣，我們就只需要列一個整個系統的平衡方程式，而不必分列兩個質點的兩個平衡方程式。



第 434 圖

至於列方程式的方法，我們根據所有各力——包括慣性力在內——對於滑車中心的力矩代數和要等於零的條件，或根據第八章的虛位移原理都無不可。無論用那一種方法，軟線的張力 S 總是全系統的內力，可以不攷慮。因此，我們可直接得到底下的方程式：

$$W_2+m_2\ddot{x}=W_1-m_1\ddot{x}$$

只要已知 W_1 和 W_2，由上式就能求出加速度 $\ddot{x}$。

以上方法也可以應用於更複雜的質點系中。應用了這方法，我就只需要列出一個全系統的動力平衡方程式(否則，有多少個質點需要列多少個方程式)，質點間所有的內力——像前一例子中的 S 都可以不攷慮，計算手續當然大爲減少。

一個運動方程式只要把慣性力攷慮進去，就可以化爲形式跟靜平衡方程式相同的動力平衡方程式，系統中的內力，因自己成對抵可以完全不攷慮，這就是慣性力原理的根據。這一原理說明：對於系質點的運動，我們只要把質點系的全部外力，連同各質點上的慣性當作一個力系攷察，力系的平衡條件就是質點系的運動方程式。慣力原理在工程科學中應用極廣。底下我們舉一些例子來說明應用慣原理的好處。

例題和習題

351. 用繩子吊起一個重 W 的物體，使它發生加速度 a (第 435 圖)，問繩子內的張力於多大?

解：在物體上加入慣性力 $-\frac{W}{g}a$ 後，得動力平衡方程式

$$W+\frac{W}{g}a-S=0 \qquad (c)$$

故

$$S=W\left(1+\frac{a}{g}\right) \qquad (d)$$

可見繩子中的張力不但跟物體重量 W 有關，而且要看加速度的大小而定。若 a 值很大，S 就可能比 W 大得多。平常用突然急拉來扯斷細繩，就是這個道理。

若加速度 a 方向向下，S 就將比 W 小。假使物體自由下墜，$a=-g$，那於零。

352. 假設在用加速度 a 向上或向下運動的電梯箱中，掛一個長 l 重 W 的單擺，試問週期會受到什麼影響?

解：先假定加速度 a 方向向上，如第 436 圖。加入慣性力 $\frac{W}{g}a$ 後，擺重增加爲 W 當單擺跟鉛垂線成 θ 角時，所有作用力——包括慣性力在內——除張力 S 外於 x 軸。合各力在 x 軸方向分力的總和等於零，可得平衡方程式

$$-\frac{W}{g}\ddot{x}-S\sin\theta=0 \tag{e}$$

若投影各力於擺長方向，又可得

$$S=(W+\frac{W}{g}a)\cos\theta\approx W(1+\frac{a}{g})$$

θ 角很小，我們可以認爲 $\cos\theta\approx1$，$\theta\approx x/l$，所以以 S 值代入(e)式，可得

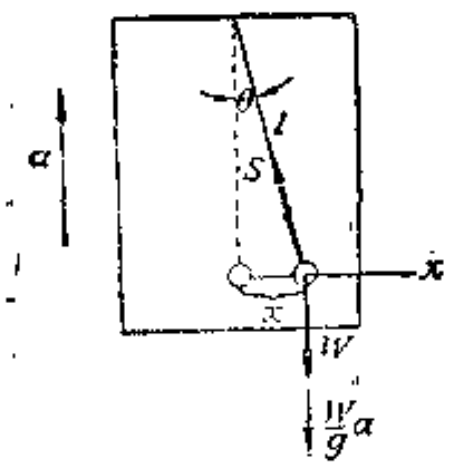
$$\ddot{x}+\frac{g+a}{l}x=0。 \tag{f}$$

其中 $(g+a)/l$ 相當於簡諧運動方程式(41)的常數 p^2，故單擺的週期是

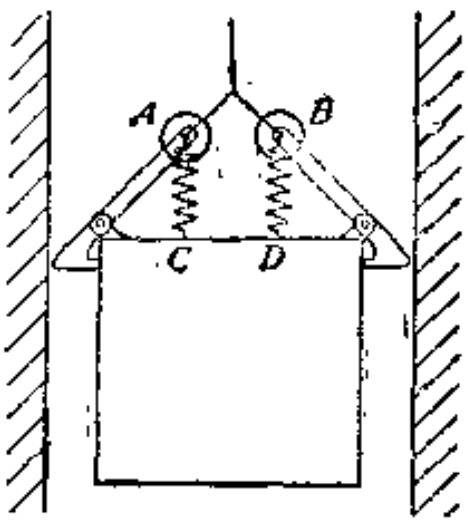
$$\tau=2\pi/p=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} \tag{g}$$

可見加速度 a 向上時，τ 比普通週期小；向下時，却比普通週期大。如果電梯箱自由下墜，$a=-g$，那就 $\tau=\infty$，表示擺球不擺動，它可以相對靜止於任何位置。換句話說，物體的慣性力恰好等於重力，它們會互相抵消，因之，引不起擺動。

第 437 圖中是防止電梯箱發生意外的剎車裝置。如果以爲應用了圖中的 A，B 兩重體來控制橫桿臂，在電梯箱自由下落時，兩臂會伸入導軌中而發生作用，那就錯了。根據以上結論，$a=-g$ 時，物體重力會被慣性力抵消，A、B 兩重體實際上壓不下剎車橫桿，所以正確的設計必須應用 AC 和 BD 兩彈簧。



第 436 圖



第 437 圖

貴使把第 430 圖的精密儀器底盤裝置，揭在一個電梯箱中，問電梯箱的向上或向下加速度對底盤的振動週期有何影響？

試求第 434 圖中物體的加速度等於多大？

(解：$\ddot{x}=\frac{W_1-W_2}{W_1+W_2}g$)

如第 438 圖的裝置。試不計摩阻力以及滑車和繩的慣性，求重體 Q 的加速度 a 等多大？

(解：$a=\frac{Q-P/2}{Q+P/4}g$)

356. 第 439 圖中，方塊重 W，放在一部平車上，接觸面摩擦係數等於 μ。試求(1)方塊將開始在平車上滑動，平車的加速度 a 等於多大？ (2) 方塊將開始翻倒，平車的加速度 a 等於多大？

解：除摩擦力和平車反作用力外，方塊受到的外力的合力是 R'。因此，摩擦力合平車反作用力的合力必須跟 R' 相等相反，而且在同一作用綫上。方塊將開始沿平車滑動時，必然

$$\frac{W}{g}a=\mu W \tag{h}$$

也就是

$$a=\mu g \tag{i}$$

假若摩擦係數很大，足夠使物體不發生滑動，那末加速度逐漸增加到合力 R' 通過 A 點時，方塊就將開始翻倒。這時候，

$$\frac{W}{g}ah=Wc$$

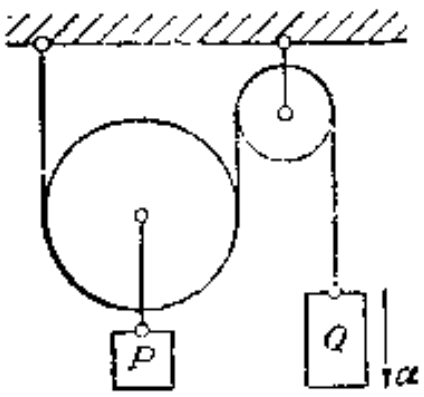
故

$$a=\frac{c}{h}g \tag{j}$$

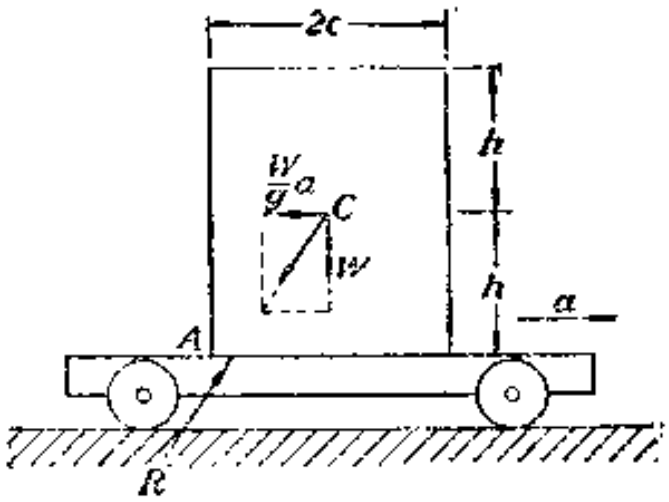
聯合以上兩結果，就知道，在

$$\mu=\frac{c}{h} \tag{k}$$

的條件下，方塊將同時開始滑動和翻倒。



第 438 圖



第 439 圖

357. 設上題中，平車速度等於 6m/s。此外，$c=2.3$m，$h=1$m 和 $\mu=0.5$，試求在不擾動車上方塊的條件下，所需要的最短停車距離 s 應等於多少？

(解：$s=3.7$m)

358. 假設輪胎跟路面間摩擦係數等於 μ，試求普通汽車(後輪爲推動輪)在平地上可達到的最大加速度 a 等於多大？(第 440 圖)

解：推動汽車的作用力是後輪的摩擦力 F，所以必須先求出前後輪加於路面的垂直壓力。汽車靜止時，這兩個壓力是：

$$\left.\begin{aligned} R_f &= \frac{b}{b+c}W \\ R_r &= \frac{c}{b+c}W \end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

導加入慣性力 $-\frac{W}{g}a$，就可得汽車運動時的前後輪壓力如下：

$$\left.\begin{aligned} R_f &= W\frac{b}{b+c} - \frac{W}{g}\frac{h}{b+c}a \\ R_r &= W\frac{c}{b+c} + \frac{W}{g}\frac{h}{b+c}a \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

可見後輪壓力因汽車的前進加速度而增加；前輪却減少。所以要增加推動力 F 起見，應該取後輪爲推動輪。根據同樣理由，剎車應該裝在前輪以增加效力（剎車時，汽車的加速度方向朝後）。

投影所有作用力於水平方向，應用(49)式，得

$$F = \mu R_r = \frac{W}{g}a \qquad (n)$$

以(m)中 R_r 值代入(n)式，就可得最大加速度

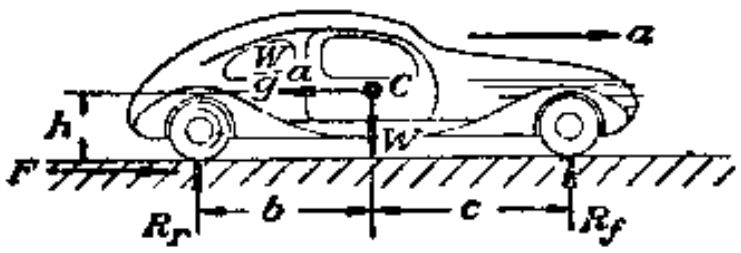
$$a = \frac{\mu c g}{b + c - \mu h} \qquad (o)$$

359. 假設第 440 圖中，汽車的馬力十分強大，同時輪胎路面間的摩阻力也足夠使車輪毫不滑動，試求這部汽車不至向後仰翻的最大加速度可以等於多大？

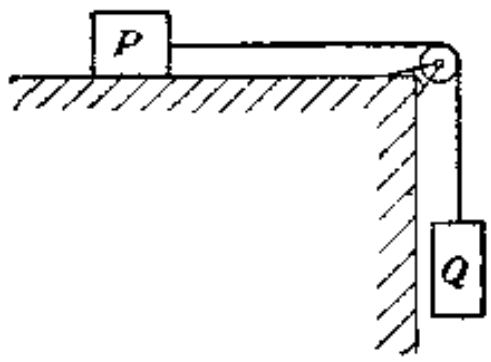
(解：$a = \frac{b}{h}g$)

360. 第 441 圖中兩重體的重量各等於 P 和 Q。設 P 與水平平面間的摩阻係數等於 μ，試不計其他摩阻力，求：(1)兩重體的加速度 a。(2)繩中張力 S。

(解：$a = \frac{Q - \mu P}{Q + P}g$，$S = \frac{PQ(1+\mu)}{P+Q}$)



第 440 圖



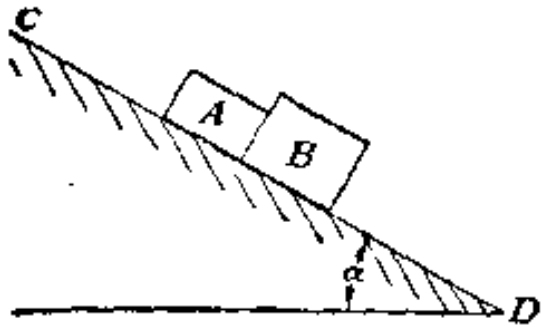
第 441 圖

361. 第 442 圖中，斜面 CD 的水平綫仰角 $\alpha = 30°$，兩物體 A 和 B 重量分別是 $W_a = 5$kg 和 $W_b = 10$kg，A 跟斜面間以及 B 跟斜面間的摩阻係數是 $\mu_a = 0.15$ 和 $\mu_b = 0.30$。試求運動時，兩重體間壓力等於多大？

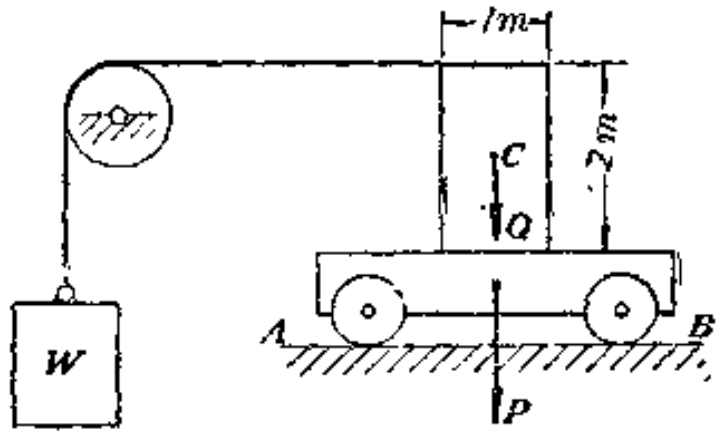
(解：$P = 0.43$kg)

362. 第443圖中的裝置，平車重量 $P=1[illegible]$ kg，方塊重量 $Q=2[illegible]$ kg。平車跟水平平面 AB 間摩阻力很小，可以不計；但方塊跟平車間的摩阻力却足夠防止方塊在平車上滑動。圖中重物 W 使平車和方塊一起發生加速運動。問重量 W 最大可以等於多少？再問所產生的最大加速度又等於多大？

(解：$W_{max}=100$kg，$a=2.45$m/s²)



第 442 圖



第 443 圖

75. 動量和衝量

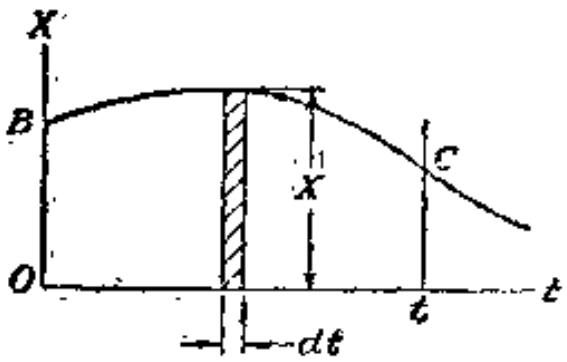
質點直線運動方程式還可以寫成如下的形式：

$$\frac{W}{g}\frac{d\dot{x}}{dt}=X,$$

或

$$d\left(\frac{W}{g}\dot{x}\right)=X\,dt \qquad (a)$$

其中作用力 X，在以後討論中，一概假定是一個已知的時間函數，它跟時間的關係曲線見第 444 圖。(a)式中右邊一項顯然表示圖中畫斜線的狹條面積，它的高度和寬度分別是 X 和 dt。「$X\,dt$」這樣一個量通常稱爲作用力 X 在 dt 時間內的**衝量**。(a)式左邊一項 $(W/g)\dot{x}$ 稱爲質點的**動量**。(a)式說明：質點動量在 dt 時間內的微分變化乃等於作用力在同時間的衝量。動量和衝量的因次都是「力×時間」；它們的單位通常用 kg·s。



第 444 圖

積分(a)式，得

$$\frac{W}{g}\dot{x}+C=\int_0^t X\,dt \qquad (b)$$

其中積分常數 C 可由運動的具體條件決定。如果質點在 $t=0$ 時，x 軸方向的初速等於 $\dot{x}_0$，由(b)式，就可得

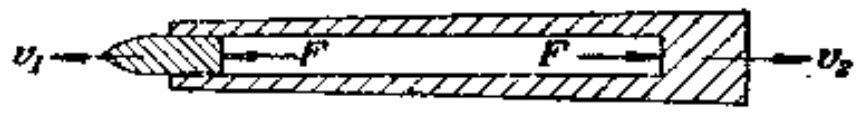
$$C=-\frac{W}{g}\dot{x}_0$$

故

$$\frac{W}{g}\dot{x}-\frac{W}{g}\dot{x}_0=\int_0^t X\,dt \tag{50}$$

可見在一定的有限時間內，質點動量的全部增減量將等於作用力在同時間內的全部衝量。第 444 圖中，$OBCt$ 面積正代表此衝量值。

動量方程式(50)對於「質點系」的運動問題特別有用。因爲在這



第 445 圖

類問題中，衝量因此可以不需要計算。譬如第 445 圖中所表示的炮彈的發射，炮彈和炮身可以共同當作兩個質點構成的質點系看待。在非常短促的爆炸瞬間，火藥作用於炮彈和炮身的氣體壓力 F 究竟如何變化是不知道的，計算衝量，因之，十分困難。雖然如此，但是炮彈出口速度 v_1 和炮身後坐速度 v_2 間的關係還是可以由(50)式確立，用不到計算衝量。因爲炮身和炮彈上受到的兩 F 力是屬於作用力和反作用力性質；它們在任何時刻總是相等相反的兩力，而且作用時間也相同，所以兩力在爆炸瞬間的衝量非相等不可。命 W_1 和 W_2 分別代表炮彈和炮身的重量，並且假定它們的初速都等於零，同時，不計其他外力，那末：

$$\frac{W_1}{g}v_1=\int_0^t F\,dt$$

$$\frac{W_2}{g}v_2=\int_0^t F\,dt$$

所以，就整個質點系而論，是

$$\frac{W_1}{g}v_1-\frac{W_2}{g}v_2=0$$

也就是

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{W_2}{W_1}$$

可見發射時，炮彈和炮身的速度是一對方向相反，大小跟它們自己的重量成反比的速度。

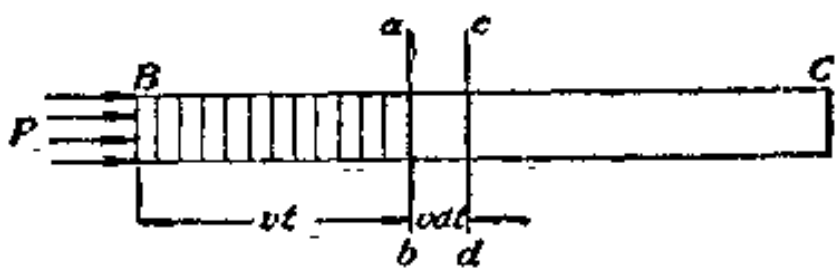
這一問題所以能夠如此簡便解決，純粹因爲全系統只有內力性質的作用力和反作用力而沒有任何外力存在。在一個質點系中，內力總是兩兩相等相反的力，所以應用動量及衝量方程式時，內力可不用去計算。換句話說，任何質點系若沒有外力作用，那這系統的動量就必然固定不變，因爲總衝量等於零。這一論斷通常稱爲**動量不滅原理**。

例題和習題

363. A，B 兩人重量相同，各自攀在一根掛在固定滑車上的繩子的一頭。問 A 向上爬的時候，B 將如何運動（繩子和滑車的慣性以及軸承摩阻力可以不計）？

解：繩內的張力在 A，B 間必定處處相等，所以作用於 A 和 B 的衝量一定也相等。因兩人重量相同，故各人的上升速度也必須相同。所以 A 向上攀爬時，B 可以毫不費力隨之上升。

364. 一根切面積等於 A 的 BC 桿放在光滑水平平面上（第 446 圖）。假定 BC 是一個完全彈性體，現在在一頭突然打擊 BC 桿一下，問壓縮在 BC 中的傳播速度等於多大？



第 446 圖

解：B 端壓力 P 發生的內應力是 P/A。相應的壓縮變形是 P/AE。E 指 BC 桿的彈性模數。假定這壓縮以不變速度 v 沿 BC 桿傳播，經過一段時間 t 後，到達 ab 切面（第 446 圖），再經過一段時間 dt，又到達 cd 切面。cd 和 ab 兩切面的距離自然是 vdt。此外，壓縮部份本身也沿水平方向前進，如命前進速度等於 v_1，那末在 dt 時間內的位移 $v_1\,dt$ 應該等於 $abcd$ 部份的壓縮。故

$$v_1=\frac{Pvdt}{AEdt}=\frac{Pv}{AE} \qquad (c)$$

$abcd$ 經壓縮後，也以 v_1 速度向前運動。故全系統在 dt 一段時間內所增加的動量，就是 $abcd$ 部份自靜止達到 v_1 速度所獲得的動量。若命 w 代表 BC 桿單位體積的重量，這動量的變化就等於

$$\frac{Awvdt}{g}\cdot v_1=\frac{Awv}{g}dt\cdot\frac{Pv}{AE} \qquad (d)$$

產生運動量的衝量是 Pdt，因爲就整個 BC 桿來說，內力兩兩抵消，不會產生衝量，只有外力 P 的衝量能夠使全系統在 dt 一段時間內增加動量。因此，

$$Pdt=\frac{Fwv^2dt}{Eg}$$

也就是

$$v=\sqrt{\frac{Eg}{w}} \qquad (e)$$

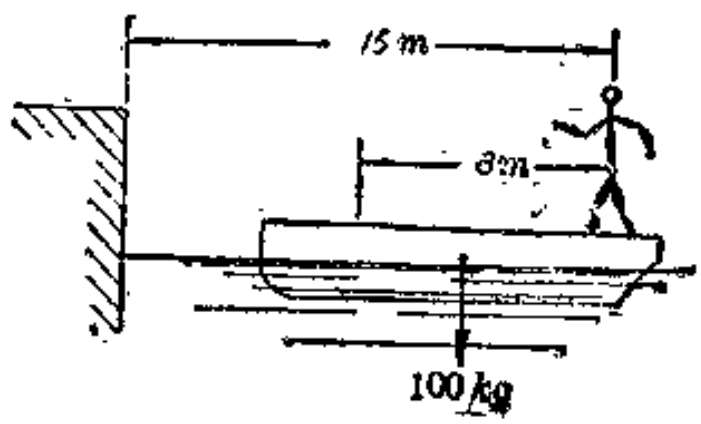
可見聲波在桿內的傳播速度只跟 BC 桿的彈性模數 E 和單位體積重量 w 有關，外力、切面積、長度等等對速度都沒有影響。

365. 設鋼桿的 $w=0{,}0079\text{kg/cm}^3$，$E=21\times10^5\text{kg/cm}^2$。試求聲音在鋼桿中的傳播速度。

(解：$v=5100\text{m/s}$)

366. 一人重 80kg，站在一條重 100kg 的靜止船上（第 447 圖）。人離開岸邊的距離是 15m。水與船的摩阻力可以不計。試求人在船上向岸行走 8m 後，離開岸的距離將變成多少？

(解：$10\frac{5}{9}\text{m}$)



第 447 圖

367. 機車重 54 噸，以每小時 16km 速度撞接一輛重 9 噸的靜止貨車。軌道水平，并不計摩阻力。試求接約後，這一車列繼續行動的速度等於多大？

(解：每小時 13,7km)

368. 一人重 68kg 坐在一條 34kg 重的小船上，向船尾的正後方射擊。射出的子彈重 0,028kg。不計水的摩阻力。設子彈的槍口速度等於 670m/s，問射擊後，船的速度 v 等於多大？

(解：$v=0.184\text{m/s}$)

369. 有一木塊重 2,3kg，放在光滑的水平平面上。一顆重 0,014kg 的槍彈在水平方向射入後，木塊以 3m/s 速度向前運動，問槍彈原來速度 v 等於多大？

(解：$v=495\text{m/s}$)

370. 炮身重 63000kg，射出的炮彈重 455kg，炮口速度是 164m/s；炮身後座彈簧的彈力

常數是 $k=268.0\text{kg/cm}$。爆炸時間極短。問發射後，炮身向後反坐多少距離？

(解：0.056m)

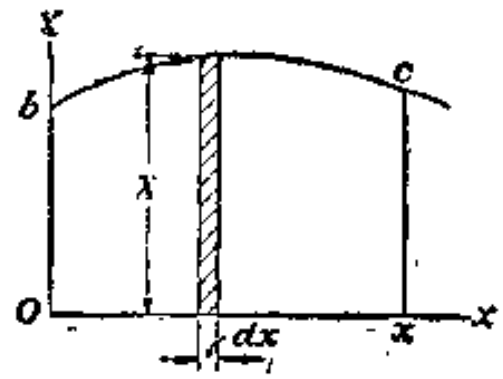
76. 功和能

質點直線運動方程式還可以寫成這樣的形式：

$$\frac{W}{g}\frac{d\dot{x}}{dt}=X$$

若兩邊同乘以 dx，就可得：

$$\frac{W}{g}\frac{dx}{dt}d\dot{x}=Xdx$$



第 448 圖

或
$$d\left(\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}\right)=X\,dx \qquad (a)$$

假定作用力 X 是一個已知的位移函數，第 448 圖是這一函數的圖象，那(a)式的右邊一項顯然就代表圖中畫斜線的狹條面積，這一「Xdx」項我們稱爲作用力 X 在位移 dx 上做的**功**。(a) 式左邊括弧內一項，我們稱爲質點的**動能**。(a)式就是說：一個質點的動能的微分變化乃等於作用力在質點的微分位移 dx 上所做的功。功和能的因次都是「力×長度」。通常應用 kg-m 或 kg-cm 作爲單位。

積分(a)式，可得

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}+C=\int_0^x X\,dx \qquad (b)$$

其中積分常數 C 由個別運動的具體條件決定。設質點位移 $x=o$ 時，初速是 $\dot{x}=\dot{x}_0$，由(b)式可得

$$C=-\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_0^2}{2}$$

故
$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}-\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_0^2}{2}=\int_0^x X\,dx \qquad (51)$$

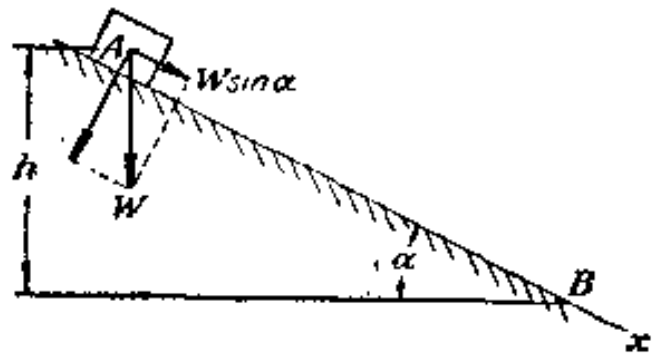
上式右項顯然是代表第 448 圖中的 $Obcx$ 面積，也就是作用力 X 在這一有限位移 x 上，所做的全部功。作用力跟質點位移方向相同，作用力的功是正的；否則，就是負的。(51)式說明：質點在發生位移 x 過程中所增減的動能，乃等於作用力 X 在同位移中所做的功。

對於作用力是位移函數，並且又只要決定速度跟位移關係的一類問題，那用(51)式處理最簡便。例如一個重 W 的物體，從高 h 處自由落下，若要求出它落到地面時的速度，我們就可以這樣做：因爲作用力 $X=W$，所以它做的全部功是 Wh；物體原來在靜止狀態，初速 $\dot{x}_0=0$；應用(51)式，立刻可得到

$$\frac{W}{g}\frac{v^2}{2}=Wh$$

所以所求的速度是

$$v=\sqrt{2gh} \qquad (c)$$



第 449 圖

即使這一物體不自由下落而是沿一光滑斜面 AB 滑下(見第 449 圖，圖中 A 點對於 B 點的高度是 h)，物體滑到 B 點的速度還是可以由(51)式決定。物體受到的作用力中，在這一情形下，只有重力在斜面方向的分力 $W\sin\alpha$ 才對物體位移做功。重力在垂直斜面方向的分力始終被斜面反作用力抵消，故所有各力的合力就是 $X=W\sin\alpha$，作用點位移是 $h/\sin\alpha$，因此，做的功等於

$$W\sin\alpha\frac{h}{\sin\alpha}=Wh$$

應用(51)式，仍舊可得到

$$v=\sqrt{2gh} \qquad (d)$$

(c) (d) 兩式結果完全相同，可見物體自斜面滑下或自由下墜，只要經過的高度相同，所達到的速度就一定相等。

例 題 和 習 題

371. 第 450a 圖中是一個擲球器。球重 W，彈簧的彈力常數是 k。擲球時，彈簧壓縮等於 δ_0。不計摩阻力。試求球的發射速度 $\dot{x}$ 等於多大？

解：命 X 代表彈簧加於球上的推力，可得 $X=kx$。位移 x 以彈簧不受壓縮時球的位置作爲原點，故推力跟位移的關係將如第 450b 圖。最初球受到的推力是 $k\delta_0$，以後逐漸均勻減少，等到 $x=0$ 時，就變到等於零。所以 X 力所做的功應該等於 $k\delta_0\cdot\delta_0/2=k\delta_0^2/2$；也就是等於第 450$b$ 圖中 oab 三角形的面積。應用(51)式，可得

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{k\delta_0^2}{2}$$

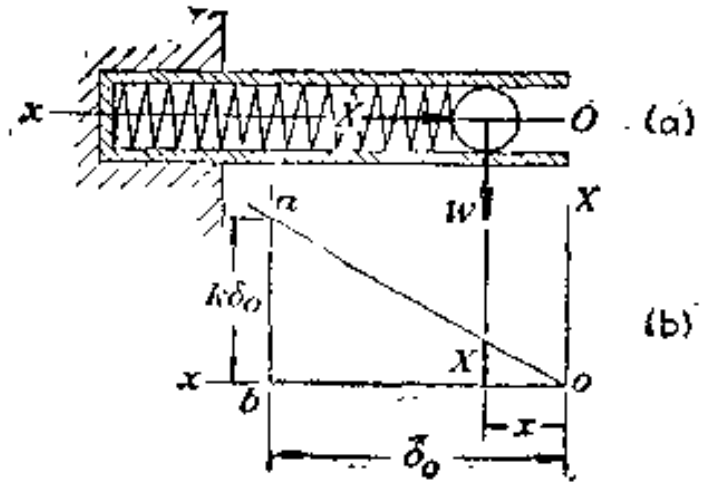
故

$$\dot{x}=\delta_0\sqrt{\frac{kg}{W}} \qquad (e)$$

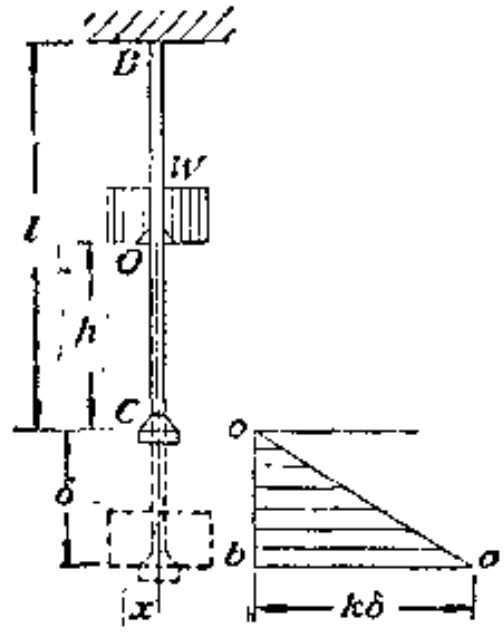
這跟 § 70 討論重物 W 掛在彈力常數等於 k 的彈簧下面，因最初位移 δ_0 引起振動的問

題中所求出的最大速度結果相同。

372. 第 451 圖中，重體 W，自高 h 處滑鋼桿 BC 自由滑下。BC 桿長 l；切面積等於 A；質量比重體 W 的小得多，所以可以不計。試求 BC 桿的最大伸長等於多少？



第 450 圖



第 451 圖

解：重體 W 由靜止出發，所經過的距離等於 $h+\delta$。它使 BC 桿伸長 δ 後，速度又回復到等於零。重體在滑下 h 長度中受到的作用力始終是重力 W。但在使 BC 桿發生 δ 伸長時卻還要受鋼桿的彈力作用。這彈力正比於 BC 的伸長。鋼桿彈力常數是 $k=AE/l$。彈力自 0 ($x=h$ 時) 逐漸增加到等於 $k\delta$ ($x=h+\delta$ 時) 過程中，所做的負功等於 $\frac{k\delta^2}{2}$，也就是 oab 三角形的面積，故

$$W(h+\delta)-\frac{k\delta^2}{2}=0 \qquad (f)$$

或

$$\frac{k}{2}\delta^2-W\delta-Wh=0 \qquad (g)$$

解出 (g) 式，並命 $W/k=\delta_{st}$，就得

$$\delta=\delta_{st}\pm\sqrt{\delta_{st}^2+2h\delta_{st}} \qquad (h)$$

因所求的是最大伸長，故得

$$\delta_{max}=\delta_{st}+\sqrt{\delta_{st}^2+2\cdot h\cdot\delta_{st}}$$

可見即使 $h=0$ (即驟然將重量 W 完全加於 BC 桿上)，BC 桿的最大伸長還是會兩倍於 δ_{st} (即將重量漸漸增加到 W 時，BC 桿的伸長)，這跟第 329 題結果符合。

373. 在一根簡單梁的中央高 10cm 處擱下一個重 2000kg 的物體。試不計梁的質量以及撞擊損失，求物體落下時，梁發生的動力撓度 δ。假定物體重量逐漸增加地作用在梁中央時，梁的靜力撓度 δ 等於 0.25cm。

(解：$\delta=2.5$cm)

374. 第 452 圖是一礦井電梯。電梯箱重量 $W=10,000$kg，弔繩切面積是 16cm²，彈性係數是 $1,1(10)^6$kg/cm²，電梯以速度 $v=1$m/s 等速下降，設上面捲揚機突然剎車時，弔繩長度 $l=60$m，試不計本身重量求弔繩的最大張力 S 等於多大？

解：弔繩的彈力常數是

$$k=\frac{AE}{l}=\frac{16\cdot 1,1(10)^6}{6000}=2933\text{kg/cm}$$

電梯箱使弔繩產生的靜力伸長是

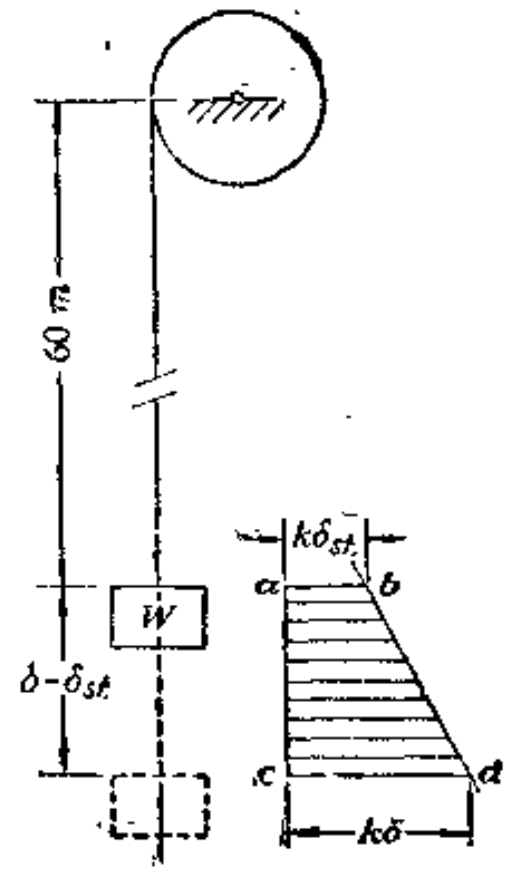
$$\delta_{st}=\frac{W}{k}=\frac{10000}{2933}=3,4\text{cm}$$

正剎車時，電梯箱的速度仍是 $v=1$m/s，故它的原有動能應等於

$$\frac{W}{g}\ \frac{v^2}{2}$$

這時叙弔繩已伸長了 δ_{st}，它的張力是 $k\delta_{st}$。之後，電梯繼續下降到弔繩總伸長等於 δ 時才停止。停止時，電梯箱動能等於零，這時候弔繩張力是 $k\delta$。故剎車後，電梯箱下降的位移等於 $\delta-\delta_{st}$。電梯箱的動能變化是

$$-\frac{W}{g}\ \frac{v^2}{2} \qquad (i)$$



第 452 圖

重力做的正功等於 $W(\delta-\delta_{st})$，弔繩對電梯箱反作用力做的負功等於第 452 圖中的 $abdc$ 面積，所以全部功是

$$W(\delta-\delta_{st})-\frac{k(\delta+\delta_{st})}{2}(\delta-\delta_{st}) \qquad (j)$$

(i)式「動能」應該等於(j)式「功」，故

$$\frac{k}{2}(\delta^2-\delta_{st}^2)-W(\delta-\delta_{st})-\frac{W}{g}\cdot\frac{v^2}{2}=0 \qquad (k)$$

由此可得

$$\delta=\delta_{st}+v\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \qquad (l)$$

因張力跟伸張成正比，故

$$\frac{S}{W}=\frac{\delta}{\delta_{st}}=1+\frac{v}{\sqrt{g\cdot\delta_{st}}} \qquad (m)$$

以各已知值代入(m)式，就得

$$S=2,73W=27300\text{kg}$$

375. 假設在上題的電梯箱同弔繩之間裝上一根彈力常數 $k=500$kg/cm 的彈簧，試求弔繩中的最大張力可以減小多少？

(解：$S=16300$kg)

376. 不計空氣阻力，試求從地面鉛垂向上拋射物體到無限高度所需要的初速。

解：因物體在離地心 x 處受到的引力 X 跟距離 x 的平方成反比，故

$$X=-W\frac{r^2}{x^2} \qquad (n)$$

其中 r 代表地球的半徑。物體從地面上升到 x 處，引力所做的功是

$$\int_r^x X dx=-Wr^2\int_r^x\frac{dx}{x^2}=Wr^2\left[\frac{1}{x}\right]_r^x=Wr^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{r}\right) \qquad (o)$$

(o)式中 W 前有一負號，是因爲引力方向跟位移方向相反。若 $x=\infty$，引力所做的功，按(o)式，就是 Wr。這功應該等於物體的全部動能變化，故

$$-\frac{W}{g}\frac{v^2}{2}=-Wr$$

物體離開地球的逃逸速度因此是

$$v=\sqrt{2gr} \qquad (p)$$

377. 設地球半徑 $r=6{,}37(10)6$m 試不計空氣阻力，求物體逃逸速度等於多大？

(解：$v=11.180$m/s)

378. 列車在水平直綫軌道上以固定速度每小時 60km 前行。如司機扳動汽門，使牽引力增加 20%。問列車要達到每小時 70km 速度，需要行駛的距離 x 應等於多少？假定運動阻力固定等於列車重量 1/200，跟速度無關，

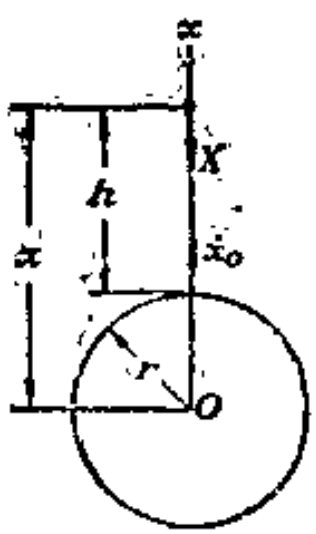
(解：$x=5{,}12$km)

379. 一重 W 方塊在水平平面作直綫運動，初速等於 $\dot{x}_0$。運動了距離 s 後，歸於靜止，假定摩阻力跟速度無關，試求方塊同平面間的摩阻係數等於多少？

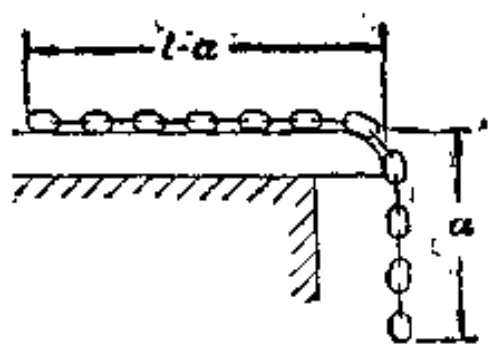
(解：$\mu=\dot{x}_0^2/2gs$)

380. 求第 454 圖中鐵鍊離開光滑桌面時，速度 v 等於多大？

解：命 W 代表鐵鍊重量可得



第 453 圖



第 454 圖

$$d\left(\frac{W}{g}\cdot\frac{v^2}{2}\right)=\frac{W}{l}a\cdot da$$

積分上式得

$$\frac{W}{g}\cdot\frac{v^2}{2}=\int_a^l\frac{W}{l}a\cdot da$$

或

$$\frac{Wv^2}{2g}=\frac{W}{2l}(l^2-a^2)$$

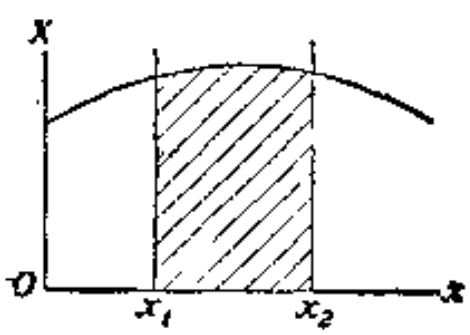
故所求的速度是

$$v=\sqrt{g(l^2-a^2)/l}$$

77. 能量不滅定理

在以上的能量方程式中，位移指質點從 $x=o$ 位置運動到任何其他位置 x 的位移，功也是指作用力 X 對於這樣一個位移做的功。我們如果把功看作 X 力對於質點從 $x=x_1$ 位置運動到任何其他 $x=x_2$ 位置的位移所做的功，這一能量方程式當然還可以採取更普遍的形式。若命 $\dot{x}_1$ 和 $\dot{x}_2$ 分別代表質點在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 兩位置的速度，(51)式顯然就可以化爲這樣的形式：

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_2^2}{2}-\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_1^2}{2}=\int_{x_1}^{x_2}X\,dx \tag{51a}$$



第 455 圖

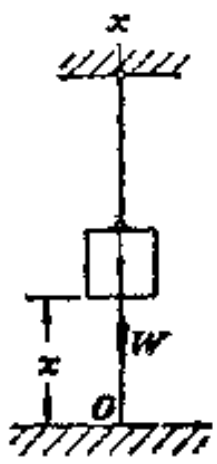
由第 455 圖的力跟位移的關係曲線，可以看出，(51a)式右邊的積分正代表圖中畫斜線部份的面積。現在把(51a)式改成底下的形式：

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_2^2}{2}-\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_1^2}{2}=\int_o^{x_2}Xdx-\int_o^{x_1}Xdx \tag{51b}$$

(51a)跟(51b)式不同處只是：(51a)式右項表示作用力 X 在從 $x=x_1$，到 $x=x_2$ 位移中所做的功，而(51b)右項却表示同一作用力 X 在自共同原點到 x_1 和 x_2 兩位置的兩個位移做的功的相差。

前面已指出過，$\int_o^x X\,dx$ 形式的積分一概指物體自零點運動到 x 位置中作用力 X 所做的功。其中 X 一定要純粹是位移 x 的函數；摩阻力的作用方向跟運動方向有關，不能只由 x 決定，所以不可包括在內。作

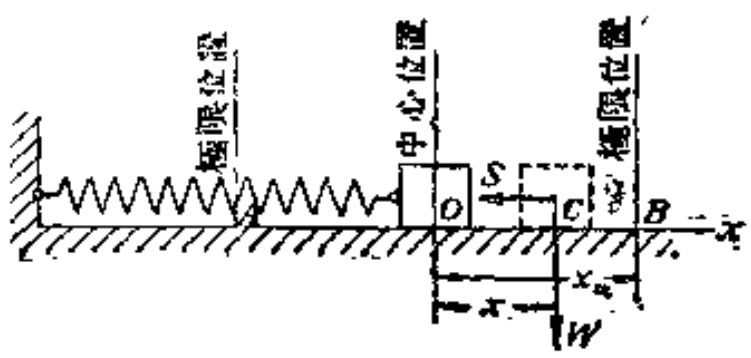
用力 X 既然純粹是位移 x 的函數，那末 $\int_0^x X\,dx$ 的負值自然一定代表物體自 x 處回到原點時，作用力可以做出來的功。這種物體回到原點時作用力就能做功的情形說明：物體在 x 位置賦有一種做功的能力。這能力由質點跟原點的相對位置而來，所以可稱爲物體對於原點的位能。例如第 456 圖中，一個重 W 的物體，它懸掛在離地面高 x 處。若切斷懸線，讓物體落下，重力 W 就將做功。以地面作爲原點，物體做功的能力是



第 456 圖

$$-\int_0^x X\,dx=-\int_0^x(-W\,dx)=Wx$$

同樣情形，一個由一根彈簧拉住的重體 W（第 457 圖），離開中心位置後，也會因作用力（在這裏就是彈簧的彈力 S）的關係，而據有對於中心



第 457 圖

位置的位能。若不計摩阻力，物體在圖中 C 處的位能就

$$-\int_0^x X\,dx=-\int_0^x(-kx)\,dx=\frac{kx^2}{2}$$

這位能就是重體從 C 處回到原點 O，彈力可以做出來的正功的大小。命 V 代表重體位能，可得

$$V=-\int_0^x X\,dx \qquad (a)$$

若再命 U 代表物體的動能，又可得

$$U=\frac{W}{g}\frac{\dot{x}^2}{2} \qquad (b)$$

(51b)式因此可以寫成

$$U_1+V_1=U_2+V_2 \qquad (52)$$

此式所說明的就是有名的**能量不滅定理**。它說明了物體由一個位置運動到其他位置，位能和動能雖然可以互相變換，但總能量却永遠是固定不變的。能量不滅的運動系統稱爲保守系統，其中作用力必須只跟位移有關(不能包括摩阻力在內)；否則，(52)式就不能成立。能量不滅定理特別適用於處理振動問題。關於處理的方法，底下我們舉些例子來說明。

例題和習題

381. 第 457 圖中是一個作簡諧運動的物體。它的最初位移等於 x_m。位移方程式是

$$x=x_m \cos pt \tag{c}$$

試不計摩阻力，求週率因子 p 的大小。

解：因爲不計摩阻力，所以這是一種保守系統的運動，物體的總能量在任何位置都彼此相等。(52)式當然適用於物體在運動路綫上的一切位置；我們隨意選擇兩個位置來攷察都無不可。不過爲簡便起見，最好選取一個中心位置和一個極限位置。物體在中心位置時，彈簧張力等於零，物體只有動能；在極端位置 A 時，物體速度等於零，它的全部能量就是物體的位能。若彈簧的彈力常數等於 k，由(a)式就知道物體在這位置的位能是

$$V_{max}=-\int_0^{x_m} X dx=-\int_0^{x_m}(-kx)dx=\frac{kx^2_m}{2} \tag{d}$$

物體在中心位置的動能，根據(b)式，是

$$U_{max}=\frac{W}{g}\,\frac{\dot{x}^2_m}{2} \tag{e}$$

故應用(52)式，可得

$$\frac{W}{g}\,\frac{\dot{x}^2_m}{2}=\frac{kx^2_m}{2} \tag{f}$$

因物體在中心位置時，$\sin pt=\pm 1$，速度最大，故微分(c)式，可得這一最大速度

$$\dot{x}_m=px_m \tag{g}$$

代入(f)式，就得

$$p=\sqrt{\frac{kg}{W}} \tag{h}$$

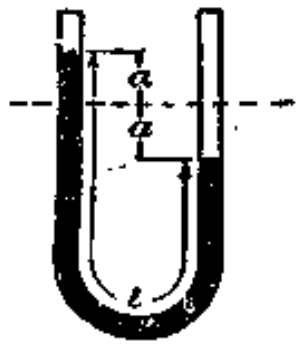
所以振動週率是

$$f=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}$$

此式跟 § 70 得到的結果符合。不過讀者比較一下就可知道，這兩種解法所用的推理方法實際上完全不同。由底下一些例題，我們還可以看出，即使是複雜得多的質點系——各質點間不完全是剛性連接着的質點系——能量方程式方法還是可以應用的。

382. 第 458 圖中是一個切面均勻的 U 形管。所盛的液體單位體積重量等於 w。液柱全長 l 受到擾動後，發生簡諧運動。試不計摩阻力，求它的振動週期。

解：這液柱是一個質點位置可以相對移動的質點系，其中一部份質點作直綫運動，另外一部份則沿 U 形管彎曲部份作曲綫運動。就整個液柱來說，雖然它不是剛體，不過能量不滅定理對於這樣一個質點系是同樣可以成立的。設液柱所有質點經過它們各自中心位置時的共同速度等於 v，那末，液體這時候的動能——也就是它的全部能量——就是



第 458 圖

$$U_{max}=\frac{wAl}{g}\frac{v^2}{2} \qquad (i)$$

其中 A 指液柱的切面積，wAl 代表液柱的全部重量。因液柱在從最高極限位置回到中心位置的運動過程中需要把 wAa 這樣多的液體降低一個等於 a 的高度，所以它在最高位置對於靜力平衡位置的位能——也就是它的全部能量——是

$$V_{max}=wAa^2 \qquad (j)$$

因爲所有質點間的內力全都兩兩抵消，不能做功，所以液柱內壓力的變化可以不必顧慮。因振動的週率直接跟運率因子 p 成比例，由(g)式又可知 $V=pa$，故令 $U_{max}=V_{max}$，就可得

$$\frac{wAlv^2}{2g}=\frac{wAv^2}{p^2}$$

也就是

$$p=\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

故振動週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

可見振動週期可以單獨由液柱的長度決定，跟液體密度以及管子粗細都毫無關係。這就是說，不論液體是水銀或水，它的振動週期總是相同的。

383. 設上題中U形管的兩臂跟鉛垂綫夾成 α 交角如第 459 圖。試求液柱長度等於 l 時的振動週期。

$$\left(\text{解：}\ \tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g\cos\alpha}}\right)$$

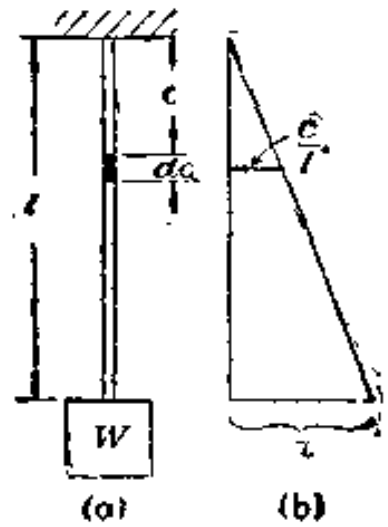
384. 第 460 圖中是一個重 W 的物體懸掛在一根鉛垂的彈性弔桿下面。若不計弔桿的本身質量，物體發生上下方向簡諧振動的振動週期就將是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}$$

其中 $k=AE/l$ 指弔桿的彈力常數。假定現在連弔桿質量的影響也要顧及，試問物體振動週期將等於多大？

解：弔桿在靜力作用下，它各部份的向下位移應該正比於這部份離開桿頂的距離(見第 460b 圖的三角形)。譬如，物體重量 W 的靜力作用使弔桿伸長了 x，桿中 dc 部份的向下位

第 459 圖



第 460 圖

移就將是$\frac{c}{l}x$。現在假定物體振動時，弔桿各部份的位移仍保持這樣的關係，那末各部份的速度對於弔桿下端速度的比值顯然也是 c/l。故當弔桿下端的速度等於 $\dot{x}$ 時，dc 部份的速度就是$\frac{c}{l}\dot{x}$。因此，當 dc 部份經過它中心位置時，它的動能應該等於

$$\frac{q\,dc}{g}\cdot\frac{c^2}{l^2}\cdot\frac{\dot{x}^2_m}{2}$$

其中 q 指弔桿單位長度的重量，$\dot{x}_m$ 指物體的最大速度，故弔桿的全部動能等於

$$\int_0^l\frac{q\,dc}{2g}\cdot\frac{c^2}{l^2}\cdot\dot{x}^2_m=\frac{\dot{x}^2_m q}{2l^2g}\int_0^l c^2dc=\frac{ql}{3g}\cdot\frac{\dot{x}^2_m}{2}$$

再加上物體的動能就得到

$$U_{max}=\left(\frac{W}{g}+\frac{ql}{3g}\right)\frac{\dot{x}^2_m}{2} \tag{k}$$

至於全系統的位能，因已經假定弔桿各部份的位移跟不計弔桿質量時的情況相同，所以全系統在極限位置的位能也一定跟不計弔桿質量時相同，故得

$$V_{max}=-\int_0^{x_m}(-kx)dx=\frac{kx^2_m}{2} \tag{l}$$

根據(52)式，(k)(l)兩式應該相等，故

$$\left(W+\frac{ql}{3}\right)\frac{\dot{x}^2_m}{2g}=\frac{kx^2_m}{2} \tag{m}$$

比較一下(m)(f)兩式，就可知道，到這一步已經不必再繼續計算。(m) 式已經很明顯地指出，弔桿質量對振動的影響，只要在物體重量 W 項下，把弔桿重量的三分之一增加進去就可以照顧到。換句話說，只要把物體重量改正爲原來重量加上三分之一的弔桿重量，全部問題就可以按照不計弔桿重量的情形處理。所以，由(43)式，可得

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{\left(W+\frac{ql}{3}\right)}{kg}} \tag{n}$$

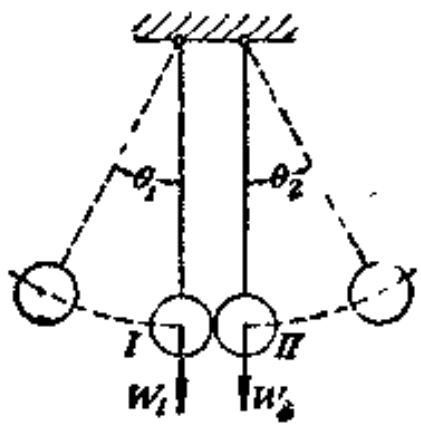
385. 一簡單樑，中點有一個重 W 的物體。不計樑的本身重量，這物體的振動週期當然很容易求到。現在要將均勻分佈的樑本身重量的影響也顧及在內，試問振動週期若應用平常的公式計算，就應當將樑本身重量 Q 幾分之幾加到物體重量 W 中去。計算中，可假定振動時樑的彎曲形狀跟重量作用在中點所引起的靜力變形相似。

(解：$\frac{17}{35}Q$)

78. 碰撞

兩物體碰撞時，其間的作用力及反作用力十分巨大，作用時間却非常短暫。這種巨大的作用力和極度短促的作用時間成爲碰撞現象的最主要的特徵。

碰撞時，力的大小以及時間的長短要看兩碰撞物體的形狀、速度以及材料的彈性性質而定。第 461 圖中是一個簡單的碰撞例子。兩圓球重量分別等於 W_1 和 W_2。它們碰撞處事先敷蓋好一層薄煤烟，碰撞後，用顯微鏡量出脫去煤烟處的大小，就得到兩球的接觸面積。之後，以靜力壓力加在這兩個球上，求出接觸面大小跟所加壓力的關係曲線。碰撞接觸面積既然已經量得，碰撞作用力的大小自然就可在關係曲線上讀出來。至於力的作用時間，也就是兩球的接觸時間，通常應用衝擊電流計測定。兩個直徑共同等於 2,5 cm 的黃銅球，以每秒約 30 cm 速度碰撞，實驗中量得的接觸時間約爲 $15\cdot10^{-5}$ s，萬分之一秒半而已。在這樣一瞬間兩球原來的速度要全部消失。這就說明了，爲什麼碰撞物體會發生一個非常巨大的減速度；爲什麼碰撞作用力跟碰撞物體的本身重量比起來，會顯得異常的巨大。



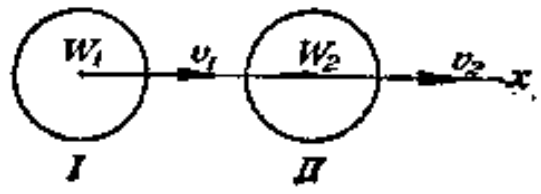
第 461 圖

以上的結論還是根據碰撞物體在接觸處有局部性的變形發生而言。如果連這樣一微小變形都不攷慮而假定物體有絕對的剛性，那結論就會是，接觸點的作用力無限大，作用時間無限小。研究碰撞作用力主要是攷察它在這極短的接觸時間內所發生的全部作用。這一作用決定於底下這樣一個積分：

$$\int_0^t F\,dt$$

這積分就是 § 75 所討論的力的衝量。至於作用力在極短的接觸時間內究竟如何變化，我們可以不必過問。由於碰撞力的十分巨大，相形之下，平常的作用力自然就顯得十分微小，所以在碰撞問題中，一般的作用力可以略去不計。此外，又由於碰撞物體的接觸時間極短，所以物體在這樣一瞬間所發生的位移也極爲微小，我們也可以忽略不計。一般作用力和物體在碰撞瞬間的位移既然都可以不計，解決一個碰撞問題，因此，不過是建立碰撞作用力的衝量跟物體的動量變化間的關係而已。

第 462 圖中，兩球分別重 W_1 和 W_2，碰撞前，兩球共同沿中心聯線運動，速度分別是 v_1 和 v_2。速度規定以 x 軸的正方向爲正。圖中



第 462 圖

所畫的情形，只 $v_1>v_2$ 時，碰撞才能發生。這是一種最簡單的碰撞現象，通常稱爲**中心碰撞**。在碰撞中，接觸點的作用力和反作用力始終相等相反，所以根據「動量不滅定理」，可知這兩力不能使全系統的動量發生任何變化。如 v_1' 和 v_2' 是兩球在碰撞中或在碰撞後任意一時刻的速度，那就得到

$$\frac{W_1}{g}v_1+\frac{W_2}{g}v_2=\frac{W_1}{g}v_1'+\frac{W_2}{g}v_2' \qquad (a)$$

僅僅這一個方程式還不能解決兩個未知的速度 v_1' 和 v_2'，我們還需要研究一下兩球的彈性性質。

假定兩球完全無彈性：那末碰撞開始後，接觸點就開始變形。I 球的速度因 II 球的反作用力而逐漸減少，II 球速度却因 I 球的作用力而逐漸增加。這樣，I 和 II 兩球的相對速度 $v_1'-v_2'$ 於是就漸漸消失，到 $v_1'=v_2'=v$ 時，兩球就停止變形，共同以速度 v 繼續運動。兩球既然完全沒有彈性，自然也不會有恢復原來形狀的傾向，所以 (a) 式可化爲

$$\frac{W_1}{g}v_1+\frac{W_2}{g}v_2=\left(\frac{W_1}{g}+\frac{W_2}{g}\right)v$$

也就是

$$v=\frac{W_1v_1+W_2v_2}{W_1+W_2} \tag{53a}$$

若假定兩球有完全的彈性（高硬度鋼珠或玻璃球近似這種理想情形），那全系統的能量在碰撞中就毫無損失。所以除開 (a) 式外，還可以應用底下這一能量方程式：

$$\frac{W_1}{g}\frac{v_1^2}{2}+\frac{W_2}{g}\frac{v_2^2}{2}=\frac{W_1}{g}\frac{(v_1')^2}{2}+\frac{W_2}{g}\frac{(v_2')^2}{2} \tag{b}$$

事實上，全系統的能量在碰撞中有一部份動能要化爲兩球的振動能；不過這種能量極小，對於 (b) 式的影響不大。以上 (a) (b) 兩式可以簡化爲：

$$W_1(v_1-v_1')=W_2(v_2'-v_2) \tag{c}$$

$$W_1[v^2-(v_1')^2]=W_2[(v_2')^2-v_2^2] \tag{d}$$

解開 (c) (d) 兩式，可得

$$v_1+v_1'=v_2'+v_2,$$

或

$$v_1'-v_2'=-(v_1-v_2) \tag{54}$$

可見完全彈性的碰撞，兩碰撞體在碰撞前後的相對速度必然將大小相等方向相反。解開 (54) 和 (c) 式，就得到兩球碰撞後的絕對速度分別是：

$$\left.\begin{aligned} v_1'&=\frac{2W_2v_2+(W_1-W_2)v_1}{W_1+W_2}\\ v_2'&=\frac{2W_1v_1-(W_1-W_2)v_2}{W_1+W_2}\end{aligned}\right\} \tag{53b}$$

假定在完全彈性的碰撞中兩球重量相等，II 球原來靜止，I 球以速度 v_1 運動，那末在碰撞瞬間的前半期，碰撞現象跟完全非彈性碰撞相同，I 球速度漸漸減少，II 球速度漸漸增加，一直到達到共同速度爲止。之後，兩球開始恢復原來形狀。復形彈力使 I 球速度繼續更減

少，而使 II 球速度繼續再增加，到兩球完全恢復了原來形狀，彈力不再存在時爲止。在這碰撞後半期中，彈力變化與前半期情形完全相同。結果 I 球速度在碰撞後完全消滅，而 II 球速度却自零增加到 $v_2'=v_1$。這結果說明了(54)式中負號的意義。

假定 II 球是一個無限大的圓球，變成了一個極重物體的平面，它的原來速度 $v_2=0$，那末碰撞後，它仍將保持靜止，根據(54)式就得到

$$v_1'=-v_1$$

可見 I 球將用原來的速率在 II 球上反彈回來。

實際上，當然沒有具有完全彈性的物體；全部能量在碰撞中必然有所損失。兩球的相對速率因此必然會比原來的小。命 e 代表一個小於1的正數，可得

$$v_1'-v_2'=-e(v_1-v_2) \tag{54'}$$

這一小於1的 e 值表示兩碰撞體的彈性性質，通常稱爲物體的**復形係數**。物體在碰撞後的速度應該根據(c)和(54′)兩式共同決定。這樣，可得：

$$\left.\begin{aligned} v_1'&=\frac{Wv_1(1+e)+(W_1-eW_2)v_1}{W_1+W_2}\\ v_2'&=\frac{W_1v_1(1+e)-(eW_1-W_2)v_2}{W_1+W_2}\end{aligned}\right\} \tag{53c}$$

例題和習題

386. 一個人重 70kg，自岸上以水平速度 $v_1=3$m/s，跑步跳上一條重 100kg 的船。船原來靜止在水中。假設人與船間是一種完全非彈性的碰撞，試求船在人跳上後，離岸前行的速度等於多大？

(解：$v=12.4$m/s)

387. 第 463 圖中的打樁裝置，木樁重 W_2，樁錘重 W_1，落高等於 h。假設地基的抵抗力固定不變，落錘一次，樁木打進土中的深度是 δ，求地基抵抗力 R 等於多大？

解：打樁時，若錘不回跳，就表示樁錘樁木間是完全非彈性的碰撞。樁錘落到樁頭時，速度是 $v_1=\sqrt{2gh}$。碰撞後，立即降低，直到跟樁木速度相等爲止，這一共同速度是

$$v=W_1\sqrt{2gh}/(W_1+W_2) \tag{c}$$

此外，因碰撞時間極短，所以可認爲樁連樁木達到這共同速度時，樁木還未顯著下降。

錘和樁木最初的速度是 v，下降後，在地基抵抗力作用下它們的速度就逐漸減低，直到等於零爲止。在這一段時間，樁木打進土中的深度是 δ。因此，應用能量方程式，就可得

$$-\frac{W_1+W_2}{2g}\frac{W^2{}_1\,2gh}{(W_1+W_2)^2}=-R\delta+(W_1+W_2)\delta \qquad (f)$$

通常地基的抵抗力 R 要比 (W_1+W_2) 大得多，所以 (f) 式右邊第二項實際上可以忽略不計。這樣，就可得

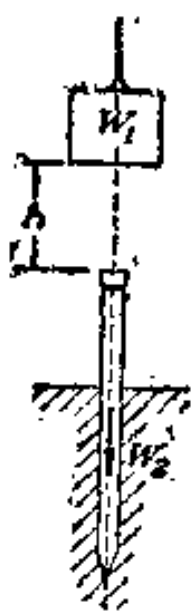
$$R=\frac{W^2{}_1h}{(W_1+W_2)\delta} \qquad (g)$$

或

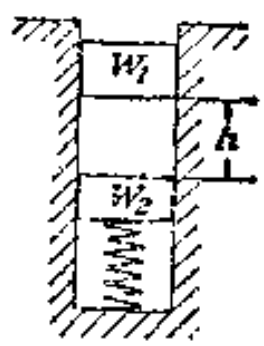
$$R\delta=W_1h\left(\frac{W_1}{W_1+W_2}\right) \qquad (h)$$

(h) 式就是說：得到的功 $R\delta$ 要比加進去的功 W_1h 小，減少的比率是 $\frac{W_1}{W_1+W_2}$。這一比率可以表示打樁的工作效率。可見要提高效率，樁錘應該愈重愈好。

388. 第 464 圖中表示一個重體 W_1 落在另一重體 W_2 上。碰撞完全無彈性。圖中彈簧的彈力常數等於 k。試求彈簧的最大壓縮等於多少？



第 463 圖



第 464 圖

解：假定兩重體達到共同速度 $v=\frac{W_1\sqrt{2gh}}{W_1+W_2}$ 前，彈簧尚未因重體 W_1 的落下而開始壓縮，根據能量方程式可得

$$-\frac{W_1+W_2}{2g}v^2=-\int_{\delta_{st}}^{\delta+\delta_{st}}kx\,dx+(W_1+W_2)\delta$$

或

$$-\frac{W_1{}^2h}{W_1+W_2}=-\frac{k}{2}\delta^2+W_1\delta$$

也就是

$$\delta^2-\frac{2W_1}{k}\delta-\frac{2W_1{}^2h}{k(W_1+W_2)}=0$$

解開這一二次方程式，就得到最大壓縮，是

$$\delta=\frac{W_1}{k}+\sqrt{\left(\frac{W_1}{k}\right)^2+\frac{2W^2{}_1h}{k(W_1+W_2)}}$$

389. 一靜止的圓球落在水泥路面上，反彈回來的高度等於原來高度的十分之九。如不計空氣阻力，試求這球的復形係數等於多大？

(解：$e=0,95$)

390. 假設第 461 圖中，兩球重量相等。I 球從懸綫跟鉛垂方向成 $Q=45°$ 交角的位置自由擺下。碰撞後，II 球擺開，擺到它的懸綫跟鉛垂綫成 30° 交角的位置爲止。問兩球的復形係數等於多大？

(解：$e=0,35$)

第十一章　曲線移動

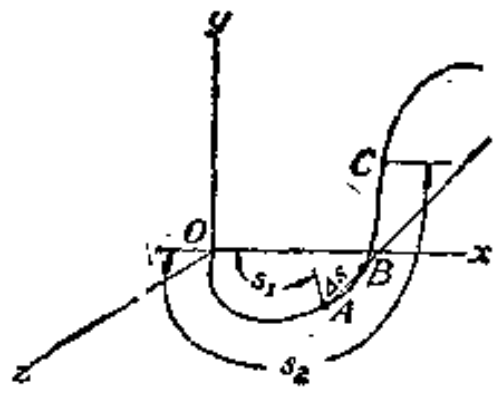
79. 剛體曲綫移動的運動幾何

剛體發生曲線移動時，它內中所有各質點的運動都完全相同，因此，我們可以跟剛體直線移動的情形一樣，把它當作一個全部質量集中在一點(譬如說，它的重心)的質點看待。

表明一個質點的曲線運動必須指出：(1)它的運動路線，(2)質點在這一路線上離開某一固定點的距離跟時間的關係。例如第465圖的質點，它沿着已定的曲線 $OABC$ 運動，我們只要知道它離開一個任意選定的原點 O 的距離 s 跟時間的關係方程式

$$s=f(t) \qquad (a)$$

以及運動路線的方程式，那這一質點在空間的位置就完全確定。



第 465 圖

一個運動質點在空間的位置，自然還可以用它對於三個正交坐標軸的坐標來決定。這些坐標值隨着時間不斷變化。如果質點在任何一時刻 t 的三個坐標值 x, y, z 跟時間的關係方程式

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t) \qquad (55)$$

都知道，那末，這一質點的運動就完全決定。(55)式好像跟運動路線無關。事實上，只要知道這三個方程式，消去它們中間的 t，我們就一定能夠得到路線的方程式。例如第466a圖的質點 B，已知它在 xy 平面上的運動是：

$$x=r\cos\omega t, \quad y=r\sin\omega t, \quad z=0 \qquad (55a)$$

消去 t 後，立刻就得到底下一方程式：

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (b)$$

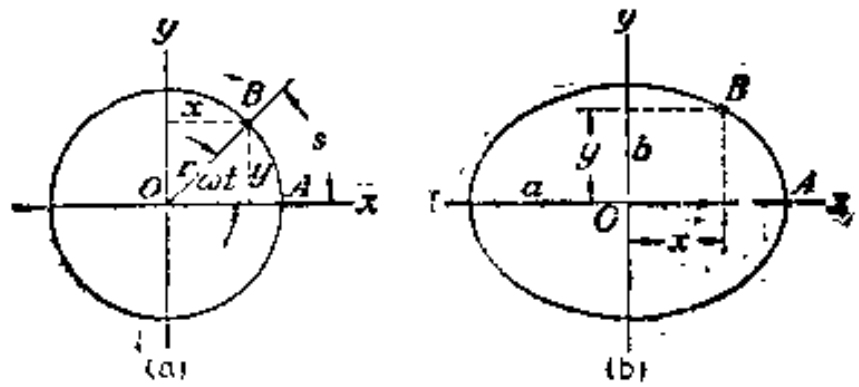
可見運動路線完全可以由 (55a) 式決定，它是一個以原點 O 作爲圓心的半徑等於 r 的圓周。同樣情形，一個質點在平面上的運動，假使是：

$$x=a\cos\omega t,\quad y=b\sin\omega t,\quad z=o \tag{55b}$$

那末消去 t 後，也可得到質點的運動路線

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{c}$$

這就表示路線是一個長軸和短軸各等於 a 和 b 的橢圓圓周（第 466b 圖）。



第 466 圖

現在我們回頭看第 465 圖。若命 t_1 及 t_2 代表質點到達圖中 A 及 C 兩位置的時刻，s_1 和 s_2 代表這兩個位置離開原點的距離，那末，

$$\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} \tag{d}$$

就稱爲質點在 t_1 到 t_2 一段時間內的**平均速率**。假使質點在任何相等的一段時間內，而且不論這一段時間多麼短，所走過的距離總是相等的，那末它的曲線運動就稱爲**均勻曲綫運動**。這也就是說，對於質點這樣的運動，不論 t_2-t_1 一段時間如何選擇，(d)式總保持是一個固定值。一般的情形下，質點並不作均勻曲線運動，命 A 及 B 兩點到原點的距離依次是 s 及 $s+\Delta s$，質點到達兩點的時刻依次是 t 及 $t+\Delta t$，可得 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 代表質點在 Δt 一段時間內的**平均速率**。如果 $t\to o$，那末 $\Delta s/\Delta t$ 的極限值就稱爲質點在 A 點的**點速率**。

至於質點的速度，那顯然還要包括運動的方向。一個大小等於平均速率，方向跟 AB 弦方向相同的向量卽稱爲質點在 Δt 一段時間內的**平均速度**。如果 $\Delta t\to o$，那末平均速度的極限向量就稱爲質點在 t 時刻的**點速度**，它的大小是

$$v=\lim_{\Delta t\to o}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|=\frac{ds}{dt} \tag{e}$$

方向跟路線在 A 點的切線方向相同。可見以上說的「速率」無非代表「速度」的大小而已。

速度是一種向量。計算時，我們可以把它分解成爲三個正交坐標軸 x、y，z 方向的分量。例如平均速度，它大小等於 $\Delta s/\Delta t$，方向跟 AB 弦相同。要求它 x 軸分量，只要把它的大小乘上 AB 弦跟 x 軸間夾角的餘弦就行。這餘弦當然等於 $\Delta x/\Delta s$，所以分量的大小，就是

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{f}$$

質點本身沿曲線運動，它在 x 軸上的投影同時也沿 x 軸運動。可見(f)式所表示的分量也就是質點投影在 x 軸上的平均速度。如果 $\Delta t\to 0$，我們就可得質點點速度在各軸線方向的分量，它們是：

$$\left.\begin{aligned} v\cos(v,x)&=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|=\frac{dx}{dt}=\dot{x}\\ v\cos(v,y)&=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta y}{\Delta t}\right|=\frac{dy}{dt}=\dot{y}\\ v\cos(v,z)&=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta z}{\Delta t}\right|=\frac{dz}{dt}=\dot{z}\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

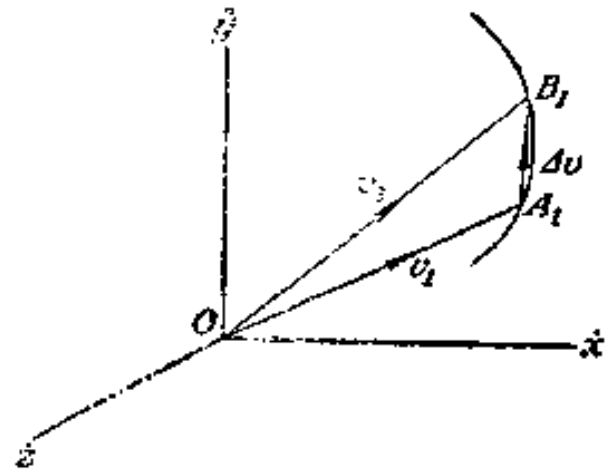
其中(v,x)，(v,y) 和 (v,z)分別代表速度本身跟 x，y 和 z 三軸線間的交角。由 (56) 式，同樣可以看出，質點點速度在各軸線方向的分量就等於質點投影在同軸的點速度(以下簡稱速度)。

若已知質點速度在各軸線的分量，應用下式就可算出原來速度 v 的大小和它的方向餘弦：

$$\left.\begin{aligned} v&=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\\ \cos(v,x)&=\dot{x}/v\\ \cos(v,y)&=\dot{y}/v\\ \cos(v,z)&=\dot{z}/v\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

由以上討論各點，可見一質點的曲線運動，如果(55)式已經知道，那末質點在任何時刻的速度也都能計算出來。

質點沿曲線路線運動，它速度的大小和方向隨時改變。例如，第465圖中 A，B 是質點沿曲線運動時的兩相鄰位置，質點在 A 及 B 點的時刻是 t 及 $t+\Delta t$，它在 A，B 兩點的速度是 v_1 和 v。我們在第467圖中分別用分離向量 OA_1，和 OB_1 代表 v_1 和 v_2。由圖中可看到，OB_1 是 OA_1 與 A_1B_1 的幾何和；換句話說，要得到速度 v_2，必須在原來速度 v_1 上加一個 A_1B_1 代表的速度變化 Δv。這一速度變化 Δv 對於時間的變化率就是質點在 Δt 一段時間內的平均加速度的大小。加速度方向就是 A_1B_1 的方向(決不是第465圖中 AB 的方向)。若 $\Delta t\to 0$，這一平均加速度的極限向量就稱爲質點在 t 時刻的點加速度，它的大小等於



第 467 圖

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=\frac{dv}{dt} \qquad (h)$$

設想自一固定點 O 引一變化的速度向量 v (第467圖)。這向量繞 O 點旋轉。它的大小和方向代表第465圖中質點在曲線路線上所有各位置的速度。第465圖中，質點沿路線運動時，第467圖中速度向量 v 的終點也隨之畫出一條對應的曲線如圖中的 A_1B_1。這曲線通常稱爲質點運動的**速度綫**。A_1，B_1 是速度線上相鄰兩點，質點在這兩點的時刻先後是 t 及 $t+\Delta t$。速度 v 終點在 Δt 一段時間內描畫速度線的平均速度，大小等於 $\Delta v/\Delta t$，方向跟 A_1B_1 方向相同。它就是質點在 Δt 時間內的平均加速度(平均加速度定義見前面)。若 $\Delta t\to 0$，那末，第467圖中速度 v 終點在 t 時刻描畫速度線的點速度就代表質點在 t 時刻的點加速度(以下簡稱加速度)。因 v 的終點的坐標值是 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 和 $\dot{z}$，所以它描繪速度線的速度在各軸上的投影應該就等於質點在相應各軸上的分加速度：

$$\left.\begin{aligned} a\cos(a,x) &= \frac{d}{dt}(\dot{x}) = \ddot{x} \\ a\cos(a,y) &= \frac{d}{dt}(\dot{y}) = \ddot{y} \\ a\cos(a,z) &= \frac{d}{dt}(\dot{z}) = \ddot{z} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

可見質點本身的加速度在各軸的分量等於質點的投影在同軸的加速度。已知質點的分加速度後，加速度本身的大小和方向可由以下各式決定：

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} \\ \cos(a,x) &= \ddot{x}/a \\ \cos(a,y) &= \ddot{y}/a \\ \cos(a,z) &= \ddot{z}/a \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

根據(g)(i)兩式，可見一個質點的運動只要位置方程式(55)式已經知道，質點在任何時刻的速度及加速度就都算得出來。計算手續很簡單，只要把(55)式對時間微分一次及二次，就可得到所求的(56)(57)兩式。例如第 466a 圖中所表示的質點運動，(55a)是質點的位置方程式，對時間微分它一次，就得到各分速度如下：

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t, \quad \dot{y} = r\omega\cos\omega t, \quad \dot{z} = 0 \tag{56a}$$

所以速度本身等於

$$v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = r\omega$$

可見這一質點是沿圓周作均勻運動。之後，對時間微分(56a)式，又可得質點各分加速度如下：

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t, \quad \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t \quad \ddot{z} = 0 \tag{57a}$$

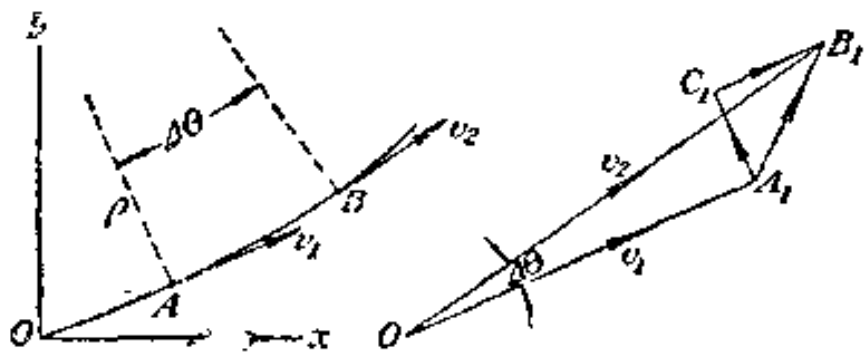
所以加速度本身等於

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} = r\omega^2$$

可見這一質點的加速度的大小始終固定不變。此外，由(i)式的餘弦值還可以看出，它的方向始終是指向圓心。

80. 法綫加速度和切綫加速度

有些問題適宜於把質點的加速度分解爲路線的法線和切線方向的分量。這兩個分量通常依次稱爲**法綫加速度**和**切綫加速度**。例如第468a 圖中，質點在相鄰 A, B 兩位置的速度分別是 v_1 和 v_2，相應的時



第 468 圖

刻是 t 及 $t+\Delta t$。$\overline{A_1B_1}$ 表示質點在 Δt 一段時間內的速度變化(第468b 圖)，把 $\overline{A_1B_1}$ 分解於 v_1 的平行和垂直方向，得到平均加速度的兩個分加速度 $\overline{C_1B_1}/\Delta t$ 和 $\overline{A_1C_1}/\Delta t$。現在命 $\Delta t\to 0$ 來求兩分加速度的極限向量。命路線在 A 點的曲率半徑等於 ρ，因質點在微分時間 dt 內所經過的 AB 弧等於 vdt，所以 AB 弧所對的圓心角 $\Delta\theta$ 應等於 vdt/ρ。在極限情形下，$\overline{OB_1}$ 跟 $\overline{OA_1}$ 方向一致，$\overline{C_1B_1}$ 跟 $\overline{OC_1}$ 方向一致，同時 $\overline{A_1C_1}$ 又垂直於 $\overline{OB_1}$。由第 468 圖的 ΔOC_1A_1 可以看出，$\overline{A_1C_1}$ 方向分加速度變化的極限值必等於 $vd\theta=v^2dt/\rho$，若兩邊同除以 dt，就得到質點在 t 時刻的切線加速度和法線加速度，它們的大小依次是：

$$a_t=\frac{dv}{dt},\qquad a_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{58}$$

可見質點的切線加速度 a_t 純然表示質點速率的變化率；法線加速度的大小只跟質點的速率和路線的曲率半徑有關，方向永遠指向着曲率中心。如果已知這兩個分加速度，那末質點的加速度本身就可由下式決定：

$$\left.\begin{aligned} a&=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}\\ \cos(s,a)&=\frac{\dot{v}}{a}\\ \cos(n,a)&=\frac{v^2}{\rho a}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

其中 s 表示路線切線上質點的運動方向，n 表示指向曲率中心的法線方向。

以上決定切線、法線加速度的(58)式，同樣也適用於質點在空間的一般運動。在質點空間運動的問題中，第 468 圖的 xy 平面可以看做路線在 A 點的密切面。密切面包含 A 點的切線，並且跟 B 點切線平行。加速度本身就在密切面中，因此(58)式還是可以成立的。不過，在這種情形下，其中的 n 代表路線的主法綫方向，ρ 代表主曲率半徑。

特殊情形，質點作均勻曲線運動時，質點加速度的大小永遠等於 $\frac{v^2}{\rho}$，方向永遠正指曲率中心。

例題和習題

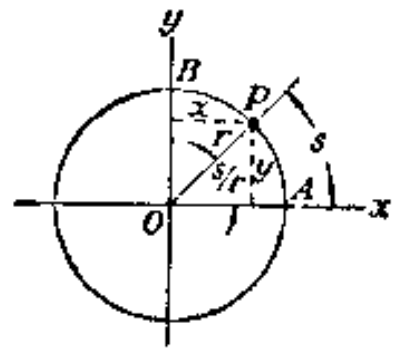
391. 一質點 P 沿一半徑等於 r 的圓周運動（第 469 圖）。設質點在 t 時刻離開圓周上某一定點 A 的距離是 $s=ct^2$。試問 P 在 B 點的運動速度等於多大？此外，問 P 點的分速度 $\dot{x}, \dot{y}$ 及分加速度 a_t, a_n 的一般公式又應該如何決定？

解：

$$s=ct^2 \qquad (b)$$

微分上式，得速率

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(ct^2)=2ct \qquad (c)$$



第 469 圖

質點在 B 點時，由(b)式可知

$$\frac{\pi r}{2}=ct^2$$

故 $t=\sqrt{\pi r/2c}$，代入(c)式得

$$v_b=\sqrt{2\pi rc}$$

在圖上可看到，

$$x=r\cos\left(\frac{s}{r}\right),\quad y=r\sin\left(\frac{s}{r}\right) \qquad (d)$$

以(b)式 s 值代入(d)式，得

$$x=r\cos\left(\frac{c}{r}t^2\right),\quad y=r\sin\left(\frac{c}{r}t^2\right) \qquad (e)$$

對時間微分(e)式，又得

$$\dot{x}=-2ct\sin\left(\frac{c}{r}t^2\right),\quad \dot{y}=2ct\cos\left(\frac{c}{r}t^2\right) \qquad (f)$$

兩分速度值的平方和應等於速度本身的平方，故得 $v=2ct$，結果跟(c)式符合。要決定質點在任意一時刻 t 的切綫和法綫加速度，可應用(58)式，結果是：

$$a_t=\frac{dv}{dt}=2c,\quad a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{4c^2}{r}t^2 \tag{g}$$

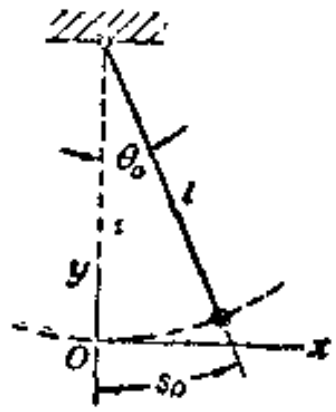
892. 第 470 圖中是一個單擺。擺錘開離平衡位置一微小位移 s_0 後，開始自由擺動。運動路綫是一根半徑等於 l 的圓弧。設擺錘在任意一時刻 t 離開它平衡位置（也就是最低位置）O 點的距離是

$$s=s_0\cos(pt)$$

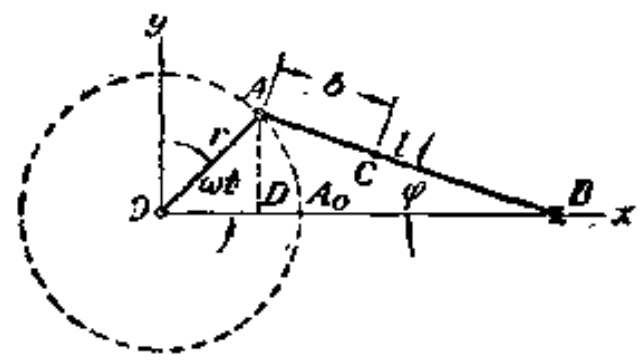
其中 $p=\sqrt{g/l}$ 是一個固定常數。試求週期 τ，擺錘最大速度 v_{max} 和最大法綫加速度 $(a_n)_{max}$ 各等於多大。

$$\left(\text{解：}\ \tau=\frac{2\pi}{p},\ v_{max}=s_0p,\ (a_n)_{max}=\frac{s_0^2p^2}{l}\right)$$

893. 第 471 圖表示的是原動機的傳動裝置。設 A 點以固定速率 v 沿半徑等於 r 的圓周運動，間接限制於 x 軸上的 B 點將如何運動？



第 470 圖



第 471 圖

解：自 A 點在 A_0 位置時起算時間。令 ω 代表 A 點單位時間內所割過的圓心角，可得

$$\omega=v/r,\quad \angle AOA_0=\omega t$$

故 A 點在 t 時刻的坐標值是：

$$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t \tag{h}$$

因爲 B 點作直綫運動，它坐標 y 等於零，坐標 x 等於 OA 同 AB 的投影和，所以

$$x=r\cos\omega t+l\cos\varphi \tag{i}$$

但是

$$r\sin\omega t=l\sin\varphi$$

和

$$\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t}$$

所以代入(i)式後，可得

$$x=r\cos\omega t+l\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t} \tag{j}$$

這裏，值得注意的是：D 點只作簡諧運動，而 B 點的運動却像上式那樣的複雜。

設 C 是 AB 推桿上任意的一點。它同 A 點的距離是 b，坐標值因之是：

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\omega t+b\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t} \\ y&=\frac{l-b}{l}r\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (k)$$

特殊情形，$r=l$ 時，(k)式變爲

$$\left.\begin{aligned} x&=(r+b)\cos\omega t \\ y&=(r-b)\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (k')$$

消去(k')式中 t，就得到 C 點的路綫方程式：

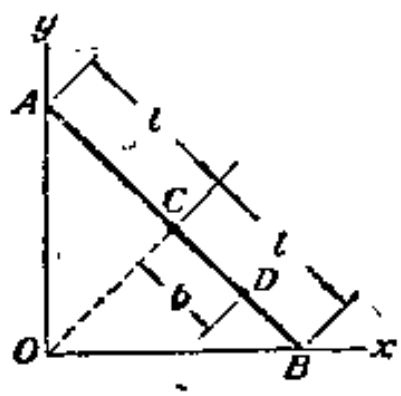
$$\frac{x^2}{(r+b)^2}+\frac{y^2}{(r-b)^2}=1 \qquad (l)$$

這是一個長軸等於 $r+b$，短軸等於 $r-b$ 的橢圓，所以第 471 圖的機構還可以用來設計畫橢圓的橢圓儀。

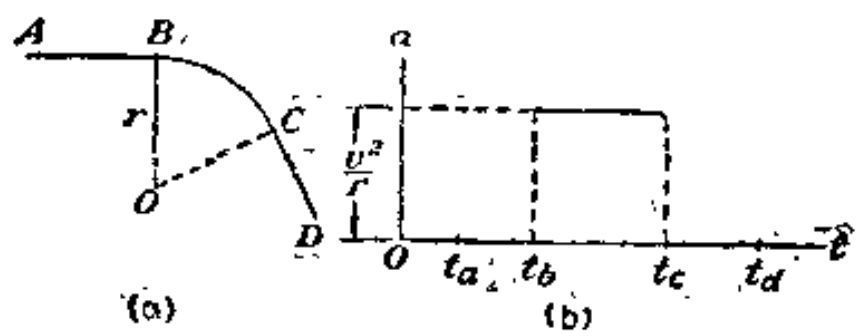
394. 第 472 圖中，AB 桿兩端各滑 x 和 y 軸運動。桿長 $2l$。試證明 AB 中點 C 的運動路綫是一個以原點 O 作爲圓心，半徑等於 l 的圓周。假設 AB 上另有一點 D，離開 C 點的距離是 b，試證明 D 點的運動路綫就是(l)式所表示的橢圓，其中 $r=l$。

395. 設一質點沿第 473a 圖中 $ABCD$ 路綫均勻運動。質點在 t_a，t_b，t_c 和 t_d 時刻分別到達 A，B，C 和 D 各點。試畫出此質點運動的加速度跟時間的關係圖。

解： 質點加速度與時間的關係圖見第 473b 圖。由圖上可看出，質點在 B 和 C 兩點，加速度有突躍的變化。爲避免這種突躍變化起見，可在切綫和圓弧 BC 間插入一段介曲綫，使路綫的曲率半徑逐漸由直綫部份的∞，變到曲綫部份的 r。鐵道路綫一般都採用這方法定綫。



第 472 圖



第 473 圖

396. 一機車於 $t=0$ 時開動，以等加速率沿一半徑等於 600m 的彎道前行，六十秒鐘後速率達到每小時 25km。試求在 $t=30$ s 時，機車的切綫和法綫加速度各等於多大？

（解：$a_t=0.116\text{m}/^2\text{s}$，$a_n=0.02\text{m}/\text{s}^2$）

397. 一質點沿螺旋綫等速下降如第 474a 圖。它的速度由圖中 v 表示。螺綫柱半徑等於 r，螺旋綫的水平綫傾角是 α。試求這一質點的加速度。

解：因質點沿螺旋綫等速下降，$dv/dt=0$，所以它沒有切綫加速度。因之，法綫加速度就是質點的全部加速度：

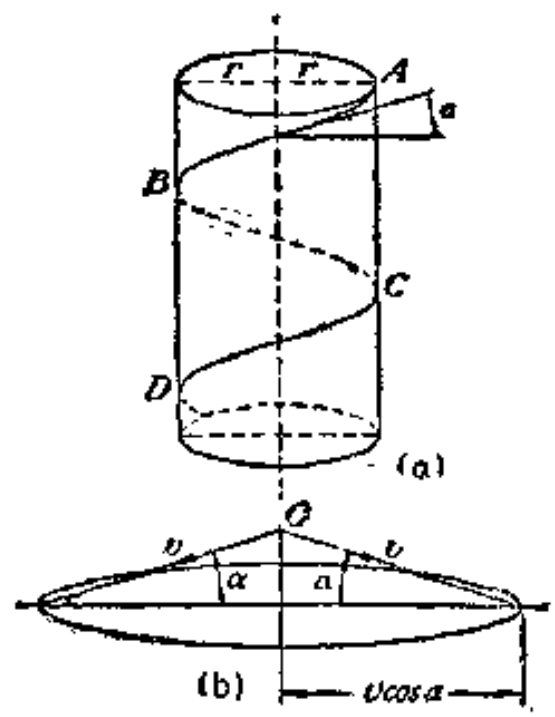
$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{v^2\cos^2\alpha}{r}$$

其中 $r/\cos^2\alpha$ 指路綫上任意一點的主曲率半徑。另一求加速度方法是畫質點運動的速度綫（第474b圖）。因速度 v 跟水平方向始終成 α 交角，而且 v 的大小不變，所以速度綫必定是一個半徑等於 $v\cos\alpha$ 的水平圓周。速度 v 的終點迴轉速度綫一周所需的時間是

$$\tau=\frac{2\pi r}{v\cos\alpha}$$

故 v 終點描畫速度綫的速度等於

$$a=2\pi v\cos\alpha/\tau=v^2\cos^2\alpha/r$$



第 474 圖

這就是所求的質點加速度。可見加速度大小始終固定不變，方向，按第 474b 圖，是在水平平面上指向螺旋柱的中心軸。

398. 地球的半徑是 6370km，試求地球表面北緯 40° 處，任一質點因地球自轉而生的加速度。

（解：$a=0.00002545\text{km/s}^2$，在垂直通過地軸方向）

399. 試求第 391 題中，質點速度綫的極坐標方程式，並畫出相應的極坐標曲綫。

400. 第 470 圖中，單擺的位置也可以由懸綫跟鉛垂綫所成的交角決定。設擺錘在任一位置的速度值是

$$v^2=2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

試求它速度綫的極坐標方程式；並假定 $\theta_0=30°$，把速度綫的極坐標曲綫畫出來。

81. 質點的曲綫運動方程式

牛頓第二定律是導出質點運動的普遍方程式(32)式的根據。它說明：一個質點在力 F 的作用下會產生一個加速度 a，方向跟力的方向相同，大小跟力的大小成正比。這一定律對於質點受力作用前的運動狀況沒有任何限制。假設質點原來的運動跟作用線固定的作用力同在一直線上，那出現的就是 §67 所討論的「直線運動」。假使力的作用線並不固定或者質點原來運動方向跟力的方向並不一致，那發生的就是「曲線運動」。(32)式雖然也適用於曲線運動，但是因爲力的大小、方向兩樣東西都隨時變化，所以最好分解質點的作用力 F 和加速度 a

於三正交坐標軸方向。命 X, Y, Z 和 $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ 分別代表質點在三軸線 x, y, z 方向的分力和分加速度，因各分力所產生的質點加速度，大小跟分力大小成正比，方向跟分力方向相同，所以質點的運動方程式可以分寫成底下三式：

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{g}\ddot{x} &= X \\ \frac{W}{g}\ddot{y} &= Y \\ \frac{W}{g}\ddot{z} &= Z \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

(59)式跟(36)式用途相同，也可以用來解決這樣兩類問題：(1)已知質點運動情形——也就是已知(55)式——求產生這一運動的力；(2)已知質點受到的力，求質點運動情形——也就是求微分方程式(59)的解。

第二類問題需要積分，所以有時很難解決，不像第一類問題簡單只要應用微分計算就可以。現在先討論幾個簡單的第一類問題如下：

例題和習題

401. 一個重 W 的質點，由一根長 l 的繩連接在一個固定的 O 點。設這一質點在水平平面上繞 O 點以固定速率 v 迴旋(第 475 圖)，試求繩中張力的 S 等於多大？

解：因質點等速迴旋，所以它只有指向中心 O 的法綫加速度：

$$a_n = \frac{v^2}{l}$$

根據(32)式，可得

$$S = \frac{Wv^2}{gl}$$

可見張力的大小要跟速率的平方成正比，而跟繩長 l 成反比。

402. 機車重 60 噸，以固定速率每小時 72km 沿一半徑 $r=400$m 的彎道前行。試求外軌所受橫力等於多大？

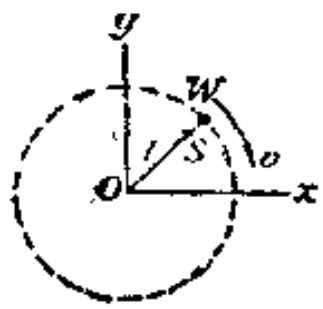
(解：6125kg，向外)

403. 設一質點 W，切綫加速度 $a_t = g\sin\alpha$，沿第 474 圖中一半徑等於 r 的螺旋柱的螺綫槽 $ABCD$ 運動。試求使螺旋柱繞中心軸旋轉的力矩 M 等於多大？

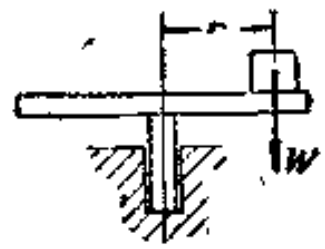
(解：$M = \frac{Wr}{2}\sin 2\alpha$)

404. 一重 W 物體放在第 476 圖中轉台上。物體到旋轉軸綫的距離等於 r。接觸面摩阻係數等於 μ。試求物體因轉台旋轉而引起的不生滑動的最大固定速率 v_{max} 等於多大?

(解: $v_{max}=\sqrt{\mu gr}$)



第 475 圖



第 476 圖

405. 第 477 圖中是一個振幅很小的單擺,位置方程式是

$$s=s_0\cos pt$$

試求懸綫中最大張力 S 等於多大?

解: 定懸綫本身方向以及垂直方向依次爲坐標軸 y 和 x 的方向。擺錘上各作用力的合力在軸 y 方向的分力是

$$Y=S-W\cos\left(\frac{s}{l}\right) \tag{a}$$

相應的加速度是

$$\ddot{y}=a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{s_0^2p^2\sin pt}{l} \tag{b}$$

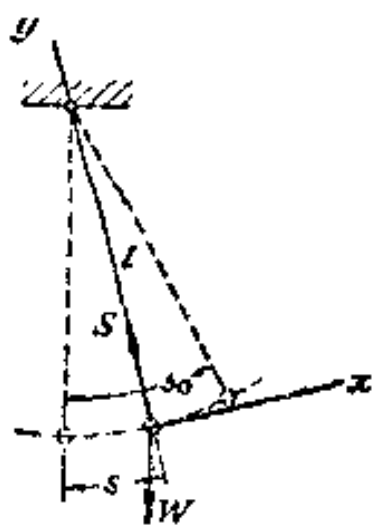
把(a)(b)代入(59)第二式中,得

$$S=W\left[\frac{s_0^2p^2\sin^2 pt}{gl}+\cos\left(\frac{s_0\cos pt}{l}\right)\right] \tag{c}$$

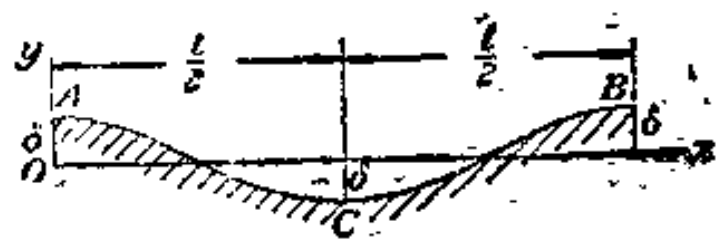
單擺懸綫中最大張力在擺錘經過平衡位置時 ($pt=\frac{\pi}{2}$ 時) 發生,所以命 $p^2=g/l$ 就可得

$$S_{max}=W\left(1+\frac{s_0^2}{l^2}\right) \tag{d}$$

406. 第 478 圖中 ACB 是一根鉛垂平面中的餘弦曲綫。它的方程式如下:



第 477 圖



第 478 圖

$$y=\delta\cos(2\pi x/l)$$

一個重 W 的質點，沿這一餘弦曲綫以固定速率運動，試求質點經過最低點 C 時，它加於運動路綫的壓力 R 等於多大？

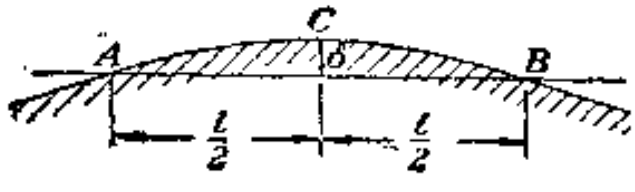
解：由曲率公式 $$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

求出路綫在 C 點的曲率，就可求得

$$R=W(1+\frac{4\pi^2\delta}{gl^2}v^2)$$

407. 一部重量等於 W 的汽車，以固定速率 v 沿拋物綫路綫 ACB 行駛。試求汽車經過最高點 C 時，它兩個車輪加於路面的壓力 R 等於多大(第 479 圖)？

〔解：$R=W(1-\frac{8\delta}{gl^2}v^2)$〕



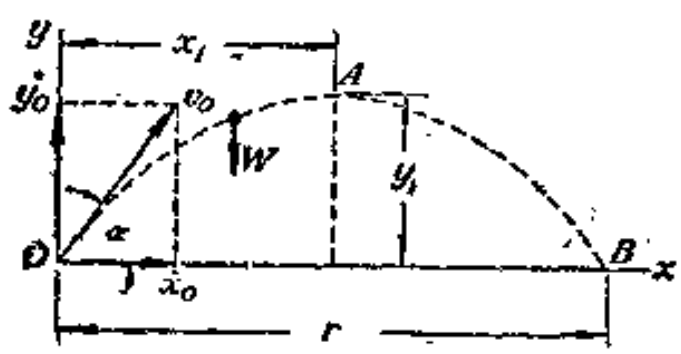
第 479 圖

82. 拋射體的運動

現在我們開始研究「已知作用力求質點曲線運動」的第二類問題。其中最簡單的情形是作用力的大小和方向都固定不變：質點的運動路線之所以會是曲線，純粹因爲質點原來有一個方向跟力的方向不同的初速存在。

例如第 480 圖中的拋射體，它的初速是跟水平線成 α 交角的 v_0。v_0 在圖中兩坐標軸 x 和 y 上的投影是 $\dot{x}_0$ 和 $\dot{y}_0$。假定空氣阻力可以不計，並且拋射體上除開重力 W 外沒有其他外力作用，由(50)式就可得：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=0,\qquad \frac{W}{g}\ddot{y}=-W$$



第 480 圖

或

$$\ddot{x}=0, \qquad \ddot{y}=-g \tag{a}$$

積分一次後得

$$\dot{x}=C_1, \qquad \dot{y}=-gt+C_2 \tag{b}$$

如果 $t=0$ 時，$\dot{x}=\dot{x}_0$ 和 $\dot{y}=\dot{y}_0$，那末上式中

$$C_1=\dot{x}_0, \qquad C_2=\dot{y}_0$$

(b)式就變爲

$$\dot{x}=\dot{x}_0, \qquad \dot{y}=-gt+\dot{y}_0 \tag{c}$$

(c)式是拋射體的速度方程式。它說明，我們若在高空俯視這一運動，那拋射體就像一個用固定水平速度 $\dot{x}_0$ 運動的質點；若從拋射平面中遠處來觀察，拋射體就像一個以初速 $\dot{y}_0$ 向正上方拋出的質點。

積分式(a)兩次，得：

$$x=\dot{x}_0t+D_1, \quad y=-\tfrac{1}{2}gt^2+\dot{y}_0t+D_2 \tag{d}$$

若 $t=0$ 時，$x=y=0$，兩積分常數就將是

$$D_1=0, \qquad D_2=0$$

(d)式變成

$$x=\dot{x}_0t, \qquad y=-\tfrac{1}{2}gt^2+\dot{y}_0t \tag{e}$$

這就是拋射體的位置方程式。應用這式我們可以算出拋射體在任何時刻的位置，所以它的運動已經完全決定。

消去(e)中兩式的 t 可得路線方程式：

$$y=-\frac{g}{2\dot{x}_0^2}x^2+\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}x \tag{f}$$

這是一根鉛垂的拋物線。最高點 A 的 x 軸坐標，因路線在這一點的切線是水平方向，可以由 $dy/dx=0$ 這一條件來定。這樣，便得到

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{g}{\dot{x}_0^2}x+\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}=0$$

因此，

$$x_1=\frac{\dot{x}_0\dot{y}_0}{g} \tag{g}$$

把此值代入(f)式又可得最高點的 y 軸坐標

$$y_1=\frac{\dot{y}_o^2}{2g} \qquad (h)$$

這一坐標值稱爲射高。由(c)式也求得到 x_1 和 y_1，因拋射體在最高點時，它在鉛垂方向的速度 $\dot{y}$ 等於零，所以把 $\dot{y}=0$ 代入(c)式，得到

$$-gt+\dot{y}_o=0$$

或

$$t=\frac{\dot{y}_o}{g}$$

把 t 代入(e)式就可得最高點坐標值 x_1 和 y_1，結果跟(g)(h)兩式完全相同。若要求運動路線跟 x 軸的交點，只要把 x_1 加一倍就得到交點到原點 O 的距離，是

$$r=2x_1=2\frac{\dot{x}_o\dot{y}_o}{g} \qquad (i)$$

這一距離通常稱爲射程。如果把 $\dot{x}_o=v_o\cos\alpha$ 和 $\dot{y}_o=v_o\sin\alpha$ 代入(i)式，那末，

$$r=\frac{2v_o^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_o^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (i')$$

可見對於固定大小的初速 v_o，射程在 $\alpha=45°$ 時最遠，它等於

$$r=\frac{v_o^2}{g} \qquad (i'')$$

以上的討論完全不曾攷慮空氣阻力對拋射運動的影響。事實上，在一般的拋射速度下，物體所受到的空氣阻力絕不算小，所以實際問題中決不能不加顧慮。不過加入空氣阻力後，問題就十分複雜，討論起來會超出本書所允許的範圍。在以下的例題中我們仍假定空氣阻力可以不計。(1)

題例和習題

408. 一步兵炮在射程等於 r 時，射高等於 h。試證明它用同樣的初速發射，炮彈可達到的最遠射程是

$$r_{max}=2h+\frac{r^2}{8h}$$

(1) 關於計算有空氣阻力的拋射運動，讀者可參閱 H. Lamb 著的 Dynamics 一書。

解：命 α 和 v_0 分別代表射程等於 r 時的未知的發射角和炮彈的初速，由$(h)(i')$兩式可知

$$\left.\begin{aligned} h&=\frac{v_0^2}{g}\,\frac{\sin^2\alpha}{2}\\ r&=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\}\qquad (j)$$

(i'')式已指出：$r_{max}=\frac{v_0^2}{g}$，所以

$$\left.\begin{aligned} h&=r_{max}\,\frac{\sin^2\alpha}{2}\\ r&=r_{max}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\}\qquad (j')$$

(j')中第一式也可以寫成

$$h=\frac{r_{max}}{4}(1-\cos 2\alpha)$$

故

$$\cos 2\alpha=1-\frac{4h}{r_{max}}\qquad (k)$$

(j')中第二式是

$$\sin 2\alpha=\frac{r}{r_{max}}$$

以上兩式的平方和應該等於一，

$$1=\left(1-\frac{4h}{r_{max}}\right)^2+\frac{r^2}{r^2_{max}}$$

故得

$$r_{max}=2h+\frac{r^2}{8h}$$

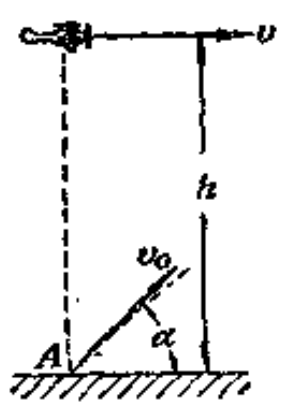
409. 設發射初速增加 10%，問拋射體的最大射程將增加多少？

(解：21%)

410. 有一個發射器，最大射程等於 2000m。若發射初速不變，問射程等於 1500m 時，發射角 α 應等於多大？

(解：$\alpha=24°18'$或$65°42'$)

411. 一架飛機以固定速度 v 在高 h 的水平平面飛行。設高射機槍等飛機飛到它正上方時發射，問最小的發射初速 v_0 及射角 α 應等於多大才能擊中飛機？(第 481 圖)。



第 481 圖

解：擊中的條件：第一，應該

$$v_0\cos\alpha=v\qquad (l)$$

這就是說，必須

$$\alpha=\arccos\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

第二，必須槍彈能達到飛機的飛行高度 h，所以必須

$$v_0 \sin \alpha \geqq \sqrt{2gh} \qquad (m)$$

再自 (l) (m) 兩式消去 α，就可得

$$v_0 \geqq \sqrt{v^2+2gh}$$

412. 設上題中，飛機要投炸圖中 A 處的機槍陣地，問飛機擲彈處離 A 點的水平距離 x 應等於多少，炸彈才能命中（第 481 圖）？

（解：$x=v\sqrt{2h/g}$）

83. 曲綫運動中的慣性力——慣性力原理

質點的曲線運動方程式(59)也可以寫成底下的形式：

$$\left.\begin{aligned} X-m\ddot{x}&=0\\ Y-m\ddot{y}&=0\\ Z-m\ddot{z}&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

其中 $m=W/g$ 代表質點的質量。這些方程式的形式跟靜力平衡方程式(21)完全相同，所以可以看作**動力平衡方程式**。列立一個運動質點的動力平衡方程式，手續很簡單，只要在質點的實際作用力之外，把慣性力加入進去，讓所有各力共同組成一個平衡力系就成。慣性力在 x，y，z 三坐標軸上的投影是：

$$-m\ddot{x}, \qquad -m\ddot{y}, \qquad -m\ddot{z}$$

全部慣性力的合力跟質點上全部外力的合力共同構成平衡，因此，可以當作質點是處於平衡狀態。

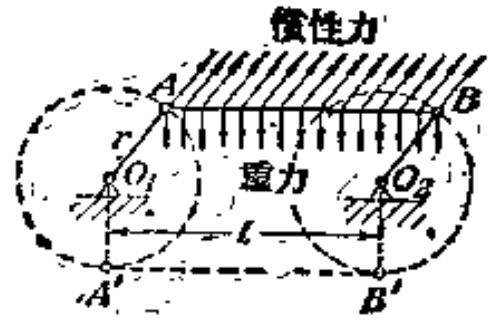
剛體發生曲線移動時，它上面所有各質點都作同樣的運動，因之，各點的加速度也都完全相同。假使把所有各質點的慣性力合成爲一個合力，那這一合力也應該跟剛體上所有外力的合力共同構成平衡，所以我們仍然會得到一個平衡的力系；剛體內各質點間的內力全部將成對抵消，是用不到致慮的。

底下我們舉些例子來說明慣性力原理在剛體曲線移動中的應用

例 題 和 習 題

413. 第 482 圖中的傳動機構，$O_1A=O_2B=r=40\text{cm}$，O_1A 和 O_2B 的轉數是每分鐘 240 次。試求 AB 的最大彎曲力矩等於多大？

解: 因 O_1A 和 O_2B 等速轉動，所以 AB 上所有各質點都是以相同的固定速率 v 各自沿半徑等於 r 的圓周運動，因之，它們的加速度都在各自的向心方向，大小等於 v^2/r。這也就是說，各質點的慣性力在任何時刻都平行於 O_1A 和 O_2B。命 q 代表 AB 單位長度的重量，可得 AB 的單位長度上分佈着的慣性力等於



第 482 圖

$$\frac{q}{g}\cdot\frac{v^2}{r}$$

AB 的最大彎曲力矩出現在 AB 的中點切面。當 AB 運動到圖中 $A'B'$ 位置時，慣性力跟 AB 的重力在同一方向。此時荷重最大。根據靜力學公式，可得 AB 中點切面的最大彎曲力矩

$$M_{max}=\left(q+\frac{q}{g}\cdot\frac{v^2}{r}\right)\frac{l^2}{8}=\frac{ql^2}{8}\cdot\left(1+\frac{v^2}{gr}\right) \qquad (a)$$

其中 l 指 AB 的長度。如以各已知數值 $r=40\text{cm}$，$v=40\cdot240\cdot2\pi/60=320\pi$ 代入 (a) 式中，可得

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}(1+25{,}8)=\frac{ql^2}{8}26{,}8 \qquad (b)$$

可見這一最大彎曲力矩，較 AB 靜止時本身重量所引起的彎曲力矩約大 27 倍。而且由 (a) 式還可看到最大彎曲力矩要跟轉速的平方成正比，所以在高速原動機的設計中，慣性力決不可忽視。

414. 試計算第 483a 圖中以固定速率 v 繞中心旋轉的細圓環內的張力 S 等於多大？設圓環半徑等於 r，單位長度重量等於 q。

解: 圓環內均勻分佈的慣性力是

$$\frac{q}{g}\cdot\frac{v^2}{r}$$

慣性力的作用方向是圖中所表示的輻射方向。力決定後，可考察一半圓環的動力平衡（第 483b 圖）。根據第 481 題所得結果，環中張力是

$$S=\frac{q}{g}\cdot\frac{v^2}{r}\cdot r=\frac{qv^2}{g} \qquad (c)$$

若圓環的切面面積等於 A，單位體積的重量是 $w=q/A$，那環中的內應力就是

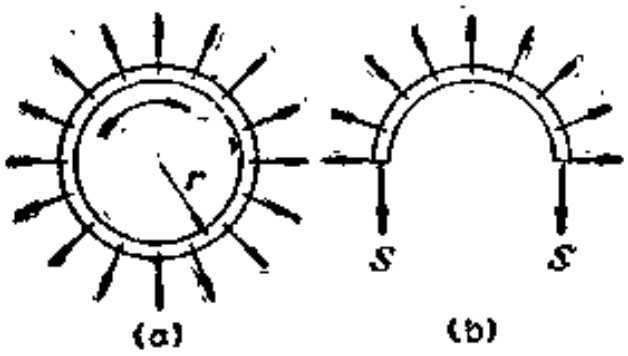
$$s=\frac{S}{A}=\frac{q}{A}\cdot\frac{v^2}{g}=w\frac{v^2}{g} \qquad (d)$$

415. 第 483 圖的一個鋼製圓環，平均半徑 $r=50\text{cm}$，單位體積重量 $w=0{,}0079\text{kg/cm}^3$，最大的張力強度是 4200kg/cm^2。試求使圓環破裂所需要的旋轉速率等於多大？

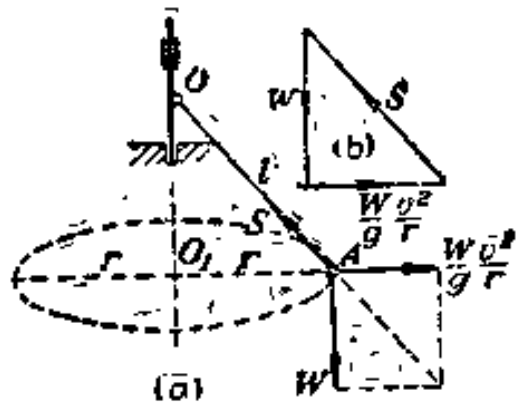
（解：每分鐘約 4400 轉）

416. 第 484a 圖中，小球 A 重 W，沿半徑等於 r 的水平圓周等速運動。圖中懸繩長 l，重量可以不計。試求小球的速率以及繩中張力 S 等於多大？

解：A 球的慣性力是 $\frac{W}{g}\ \frac{v^2}{r}$，方向如圖。這一慣性力應該跟實際作用的重力 W 和張力 S 構成平衡，故可得第 484b 圖的封閉的力三角形。



第 483 圖



第 484 圖

這一力三角形當然跟第 484a 圖中 ΔO_1AO 相似，所以

$$\frac{r}{\sqrt{l^2-r^2}}=\frac{v^2}{gr}$$

也就是

$$v=\sqrt[4]{\frac{gr^2}{(l^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}} \qquad (e)$$

由第 484b 圖又可看到

$$S=W\sqrt{1+\frac{v^4}{g^2r^2}}$$

以(e)式 v 值代入上式，得

$$S=W\sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}} \qquad (f)$$

第 484a 圖的裝置通常稱爲圓錐擺，它的週期是

$$\tau=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt[4]{l^2-r^2} \qquad (g)$$

若圓錐擺的圓錐角很小，以致 r^2 比 l^2 要小得多，那 r^2 可以忽略不計，(g)式就變成

$$\tau\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

表示圓錐擺的週期，跟單擺的週期相同。

417. 第 485 圖中是一個離心調速裝置。C,D 兩球都重 W。四鉸連桿，長度全等於 l，重量可以不計。此外，摩阻力也可以不計。試問 C,D 兩球繞鉛垂軸綫 AB 的轉速 n 應達到多大才能將重體 Q 提起(Q 可以沿 AB 軸自由滑動)？如果 $W=5$kg，$Q=10$kg，$l=25$cm，問轉數 n 等於多大？

(解：n=每分鐘 111 轉)

418. 設(第 486 圖)中，列車的速率等於 v，求半徑等於 r 的彎道內，外軌超高數 e 應該等於多大?

解：列車的慣性力是 $\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}$，方向如圖。這一慣性力跟重力 W 所構成的合力必須垂直於軌道平面；否則，內外軌受到的壓力不能相等。由圖中可以看到，

$$e:b=\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}:W$$

所以

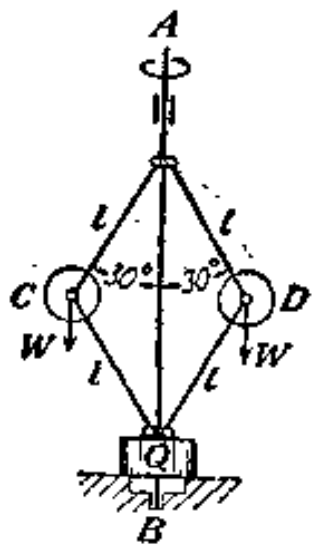
$$e=\frac{v^2b}{gr} \tag{h}$$

其中 b 代表軌距。

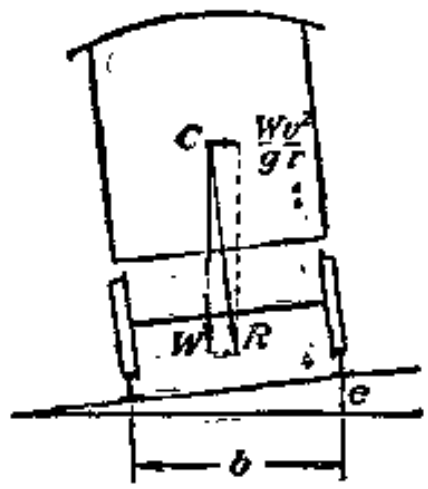
419. 一公路路面，寬 8m，彎道半徑等於 600m，行車速率每小時 80km。求路肩超高數 e 應等於多大?

(解：$e=0{,}67$m)

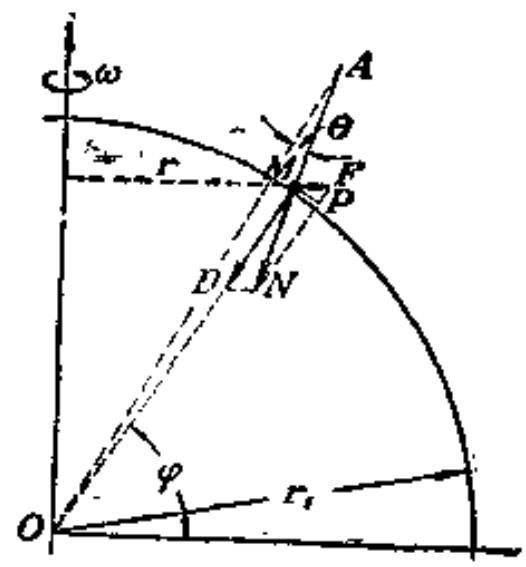
420. 試求地球表面某處的鉛垂綫因地球自轉而發生的偏差(第 487 圖)。



第 485 圖



第 486 圖



第 487 圖

解：φ 代表鉛垂綫所在地的緯度，r_1 代表地球半徑，ω 代表地球自轉的角速。掛在鉛垂綫下面的物體，它的運動是均勻圓周運動，速率 $v_1=r_1\cos\varphi\cdot\omega$，圓周半徑 $r=r_1\cos\varphi$。所以物體上除開圖中 $\overline{MD}$ 所代表的重力外，還有 $\overline{MF}$ 所代表的慣性力在作用。兩力的合力是 $\overline{MN}$，故鉛垂綫將跟眞垂綫 AO 成極微小的交角 θ。引 MP 垂直於 NF，因 $\triangle NMP\sim\triangle MPF$，故

$$W\sin\theta=\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}\sin\varphi \tag{i}$$

θ 極微小，可命

$$\theta=\sin\theta=\frac{v^2}{gr}\sin\varphi \tag{j}$$

以 $v=2\pi r/86400$，$r=r_1\cos\varphi$ 和 $r_1=6{,}37\times10^6$m 代入(j)式，就得

$$\theta=\frac{1}{582}\sin2\varphi \tag{k}$$

由(k)式可看到，鉛垂線的偏差在緯度 45° 處最大，可以達到 $\delta=\frac{1}{5.2}$ 弧度角。

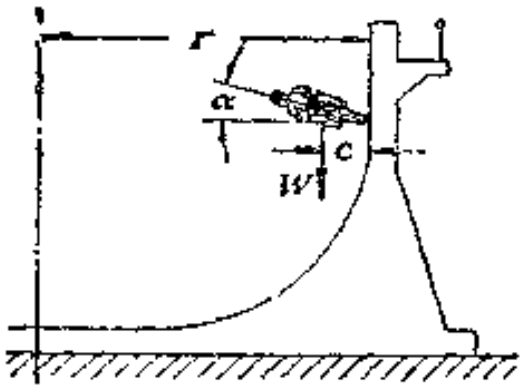
421. 第 488 圖中的機器脚踏車表演，車道壁半徑等於 r，接觸面摩擦係數等於 μ。周行車的最低速率 v 以及車身中平面的水平傾仰角 α 各應等於多大？（假設機器脚踏車連同人的重量共等於 W）。

（解：$v=\sqrt{\frac{g}{\mu}(r-c)}$，$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\mu$）

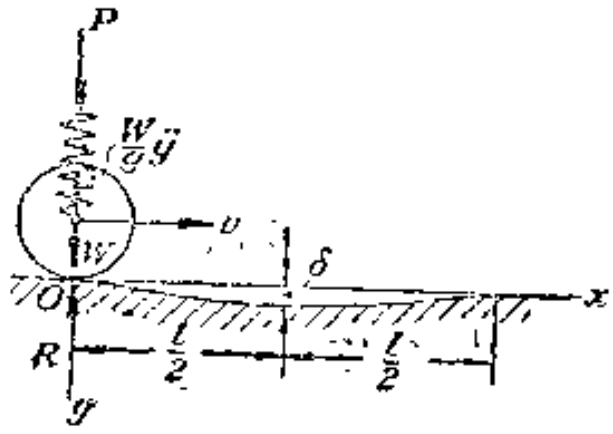
422. 一個重 W 的車輪行駛在 x 軸方向的水平路軌上（第 489 圖），路軌中間有一個小坑，形狀是

$$y=\frac{\delta}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)$$

若車輪上除開本身重量 W 外，還有經過彈簡傳導來的荷重力 P 在作用，試求車輪跟路面間的作用力。



第 488 圖



第 489 圖

解：車輪在水平路軌行駛時，車輪壓力永遠是 $W+P$。駛入小坑後，車輪在鉛垂方向也有運動，所以這一方向的加速度 $\ddot{y}$ 也應該考慮。對時間微分小坑中的運動路線方程式，得到車輪在鉛垂直方向的分速度如下：

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dy}{dx}=v\frac{\delta\pi}{l}\sin\frac{2\pi x}{l} \qquad (l)$$

再微分一次，又可得這一方向的加速度如下：

$$\ddot{y}=\frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{d\dot{y}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{d\dot{y}}{dx}=\frac{2\pi^2}{l^2}v^2\delta\cos\frac{2\pi x}{l} \qquad (m)$$

$\ddot{y}$ 所引起的車輪慣性力自然也要傳導到路面上去，所以車輪在任意一位置 x 對路面的壓力應該是

$$R=P+W-\frac{W}{g}\ddot{y}=P+W\left(1-\frac{2\pi^2v^2\delta}{gl^2}\cos\frac{2\pi x}{l}\right) \qquad (n)$$

車輪離小坑邊緣時，$x=0$，$\cos\frac{2\pi x}{l}=1$，所以這時的車輪壓力最小，只等於

$$R_{min}=P+W\left(1-\frac{2\pi^2v^2\delta}{gl^2}\right) \qquad (n')$$

可見如果$\frac{2\pi^2v^2\delta}{gl^2}>1$，壓力就將反而小於 P 力。這種情形下，假使 $P=0$，顯然車輪將在小坑上掠過，不會陷入坑中。

在小坑的中點處，$x=\frac{l}{2}$，$\cos\frac{2\pi x}{l}=-1$，故此處的車輪壓力最大，要等於

$$R_{max}=P+W\left(\frac{1+2\pi^2v^2\delta}{gl^2}\right) \qquad (n'')$$

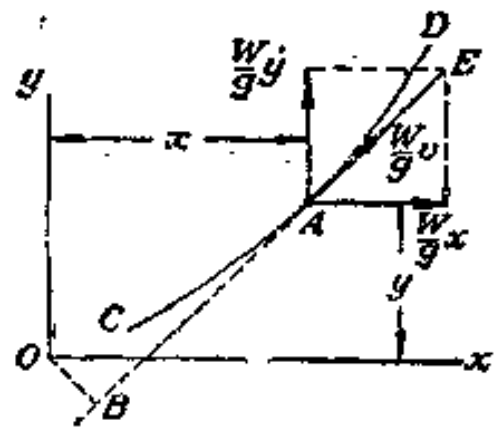
假設題中 $\delta=0.3\text{cm}$，$l=100\text{cm}$，$v=30\text{m/s}$，那末

$$R_{max}=P+W(1+5.7)$$

可見即使路面凹凸很微小，但是因凹凸而增加的車輪壓力還是很大，所以設計車輪一方面要儘量減小車輪本身的重量，另一方面還必須用彈簧墊在車身和輪軸間（否則（n''）式中的 P 力要直接加在 W 力內計算）。這樣，才能減小路面不平的影響。此外，使車輪表面和路面的彈性增加，也可減弱慣性力的作用。

84. 動量矩

第 490 圖中，一個質點 A 沿曲線 CD 運動，速率等於 v，它的動量，根據定義，是 $\frac{W}{g}v$。我們在圖中以向量 $\overline{AE}$ 表示這一動量。$\overline{AE}$ 方向跟速度方向——也就是路線的切線方向——一致。假使 $\overline{AE}$ 對任意一定點，譬如 O 點的垂直距離是 OB，那末動量 $\overline{AE}$ 跟 OB 的乘積就稱爲質點 A 對於 O 點的**動量矩**。換句話說，如果把質點的動量當作一個作用力，這一作用力對於任何一點的力矩就是質點對同點的動量矩。計算動量矩，最好把動量 $\overline{AE}$ 分解於 x 和 y 軸方向，求出它的分動量：



第 490 圖

$$\frac{W}{g}\dot{x} \quad 和 \quad \frac{W}{g}\dot{y}$$

因爲動量的向量性跟力相同，所以一個質點對於任何一點的動量矩，也必定等於它對於同點的各分動量矩的代數和。我們規定質點繞定點發生反時針方向運動的動量矩爲正，就可得

$$\frac{W}{g}(\dot{y}x-\dot{x}y) \qquad (a)$$

代表質點 A 對於原點 O 的動量矩。

同樣情形，作用於 A 質點的 F 力也可以分解爲 x 和 y 軸方向的分力 X 和 Y。F 力對原點 O 的力矩等於

$$Yx-Xy \qquad (b)$$

根據(59)式，

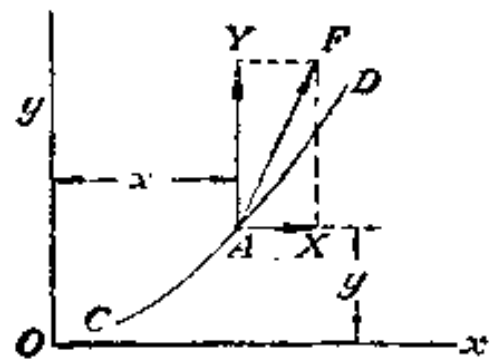
$$\frac{W}{g}\ddot{x}=X, \qquad \frac{W}{g}\ddot{y}=Y \qquad (c)$$

以 y 和 x 分別乘(c)中第一和第二兩式，然後相減，可得

$$\frac{W}{g}(\ddot{y}x-\ddot{x}y)=Yx-Xy$$

上式也可以寫成

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{W}{g}(\dot{y}x-\dot{x}y)\right]=Yx-Xy \qquad (61)$$



第 491 圖

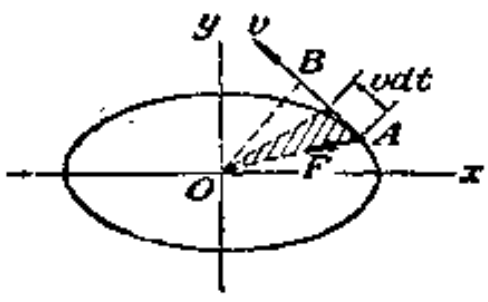
這(61)式說明：質點在任一位置，對於某一定點的動量矩的時間變化率，就等於它上面的作用力合力對於同點的力矩。

(61)式最適宜於解決向心力問題。因爲向心力對於中心點的力矩永遠等於零，所以根據(61)式，可以斷定質點在所有位置的對中心點的動量矩都是一個不變常數，這也就是說，

$$\dot{y}x-\dot{x}y=\text{常數} \qquad (d)$$

例如第 492 圖中，質點 A 在向心力 F 作用下，沿一根平面曲線運動。因向心力永遠指向中心點 O，所以根據(d)式，可知速度向量 v 對於 O 點的速度矩必然等於一個常數：

$$v\cdot OB=\text{常數} \qquad (d')$$



第 492 圖

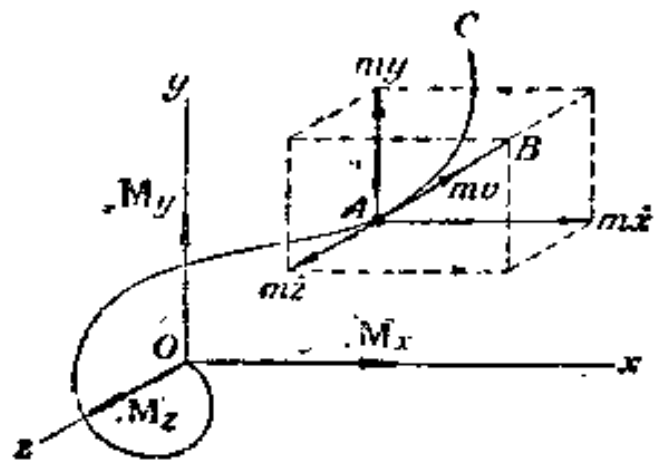
圖中劃斜線的三角形是質點由 A 點運動到 B 點的一段時間 dt 內，它半徑向量所掃過的面積。這面積等於 $(vdt/2)\ OB$；也就是，半徑向量掃過的面積對於時間的變化率等於 $(v/2)OB$。根據(d)式，這一變化率是固定不變的。可見半徑向量，在相等的時間內一定掃過相等的面積。這一結論，通常又稱爲面積速度定理。

更普遍的情形是質點 A（質量等於 m）沿一空間曲綫 OAC 運動(第 493 圖)。我們把質點的動量 mv 分解爲三直坐交標軸 x, y 和 z 方向的分動量。這一質點對於 x, y 和 z 軸的動量矩分別是：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}_x &= m(\dot{z}y - \dot{y}z) \\ \mathrm{M}_y &= m(\dot{x}z - \dot{z}x) \\ \mathrm{M}_z &= m(\dot{y}x - \dot{x}y) \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

這三個「質點對於 x, y, z 軸綫的動量矩」，我們可以由原點 O 出發沿相應各軸綫方向畫三個向量來代表（第 493 圖）。合成的動量矩也是一個向量，它的大小是

$$\mathrm{M} = \sqrt{\mathrm{M}_x^2 + \mathrm{M}_y^2 + \mathrm{M}_z^2} \qquad (f)$$



第 493 圖

它的方向餘弦是

$$\frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\mathrm{M}_z}{\mathrm{M}}$$

同樣情形，作用力 F 也可分解爲三坐標軸方向的分力 X, Y, Z。F 力對三軸綫的力矩分別是：

$$\left.\begin{aligned} M_x &= Zy - Yz \\ M_y &= Xz - Zx \\ M_z &= Yx - Xy \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

所以合成力矩，大小是 $\quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$

方向餘弦是 $\quad \dfrac{M_x}{M}, \ \dfrac{M_y}{M}, \ \dfrac{M_z}{M} \qquad (h)$

(59)式已指出：$m\ddot{x} = X$，$m\ddot{y} = Y$，$m\ddot{z} = Z$，所以我們按照以前處理平面運動的方法，可得

$$\frac{d}{dt}\mathrm{M}_x = M_x, \quad \frac{d}{dt}\mathrm{M}_y = M_y, \quad \frac{d}{dt}\mathrm{M}_z = M_z \qquad (61')$$

(61′) 式也就是說，質點對於各坐標軸的動量矩的變化率應等於質點作用力合力對於同軸的力矩。不過，其中對坐標軸如何選擇並無任何限制，所以一般說來，質點對於任何一固定軸

綫的動量矩的變化率都將等於作用力合力對同軸的力矩。這一論斷通常稱爲質點繞固定軸運動的動量矩定理。

假使用向量來表示動量矩的變化率，那末，根據(61)式，這一向量就一定等於(h)式的力矩的代表向量。

例 題 和 習 題

423. 一個重W的小球結在一根綫上如第494圖。小球沿光滑水平面中一個半徑等於 r 的圓周均勻運動，速率等於 v。假使穿過圓周中心 O 拉綫，使運動圓周半徑縮小爲 $r/2$，問這時候小球的速率 v 和綫中的張力 S 各等於多大?

解：因光滑平面上，摩擦力可以不計，故只有張力 S 和互相抵消了的重力及平面反作用力作用在小球上。張力 S 永遠指向 O 點，對 O 點的力矩始終等於零。因此，小球對於 O 點的動量矩應該始終固定不變。這就是說，應該

$$\frac{W}{g}v_1\frac{r}{2}=\frac{W}{g}vr$$

故得

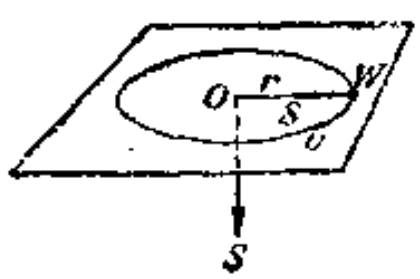
$$v_1=2v$$

再觀察小球這時候的動力平衡，又可知張力 S 應等於小球的慣性力，故得

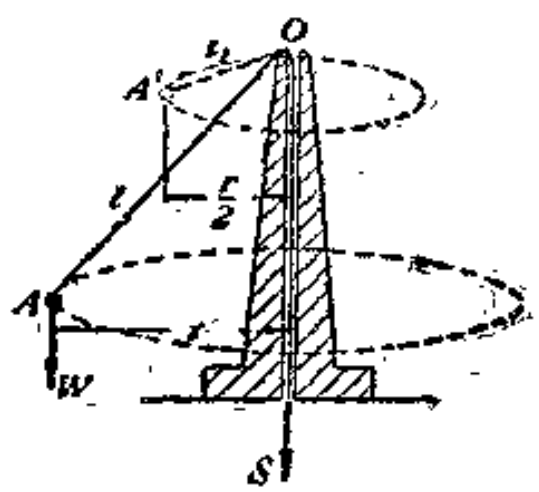
$$S=\frac{W}{g}\ \frac{v_1^2}{r/2}=8\ \frac{W}{g}\ \frac{v^2}{r}$$

可見這時候的張力要八倍於原來的張力。

424. 第495圖中，小球重 W，掛在 AOS 綫上，以固定速率 v 沿水平平面作半徑等於 r 的圓周運動。現在牽引 AOS 綫末端 S，使小球上升到 A' 位置，沿半徑等於$\frac{r}{2}$的水平圓周作均勻運動。設 OA 原來長度等於 l，問 S 端的位移應等於多大?



第 494 圖



第 495 圖

解：因小球上除重力和 AOS 的張力外，並沒有其他外力，而且重力 W 平行於 OS 軸，AOS 綫的張力又通過 OS 軸，所以小球由 A 位置運動到 A' 位置的過程中，所有外力的力矩都等於零，因而質點在 A，A' 兩位置對於 OS 軸的動量矩必然相等。命 v' 代表小球在 A'位置的圓周速率，可得

$$\frac{W}{g}v\,r=\frac{W}{g}v'\frac{r}{2}$$

或

$$v'=2v$$

故命 θ 代表 OA' 的水平綫仰角；T 代表小球在 A' 位置時，AOS 綫中的張力，可得

$$T\cos\theta=\frac{W}{g}\,\frac{v'^2}{r/2}=8\,\frac{W}{g}\,\frac{v^2}{r}$$

和

$$T\sin\theta=W$$

故

$$\frac{gr}{8v^2}\cos\theta=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

或

$$\cos^2\theta+\frac{g^2r^2}{64v^4}\cos^2\theta-1=0$$

因此，

$$\cos^2\theta=1/(1+\frac{g^2r^2}{64v^4})$$

或

$$\cos\theta=1/\sqrt{1+\frac{g^2r^2}{64v^4}}$$

所以所求的位移等於

$$l-l_1=l-OA'=l-\frac{r}{2}\,/\cos\theta=l-\frac{r}{2}\sqrt{1+\frac{g^2r^2}{64v^4}}$$

426. 設第 494 圖中小球始終沿半徑等於 r 的圓周運動。最初的的速率等於 v_0。球與平面間摩阻係數等於 μ。試應用 (61) 式算出小球由開始運動到停止運動，所需的時間 t 等於多大？

解：因摩阻力 $W\mu$ 始終與小球的速度 v 平行，所以它對於 O 點的力矩始終等於 $W\mu r$。根據(61)式，知

$$d(\frac{W}{g}v_0r)=-W\mu\,r\,dt$$

積分上式，得

$$\frac{W}{g}v_0r=-\int_0^t W\mu\,r\,dt$$

故

$$W\cdot\frac{r}{g}v_0=r\mu\,t\cdot W$$

也就是

$$t=\frac{v_0}{\mu g}$$

423. 在一根很長的鉛垂綫下面掛一個質點，讓它自由擺動。如質點運動路綫是第492圖的水平橢圓周，橢圓很小，中心在鉛垂綫上，長短軸各等於 $2a$ 和 $2b$。試求質點穿過 x 軸時的速度 v_x 跟穿過 y 軸時的速度 v_y 的比值等於多大？

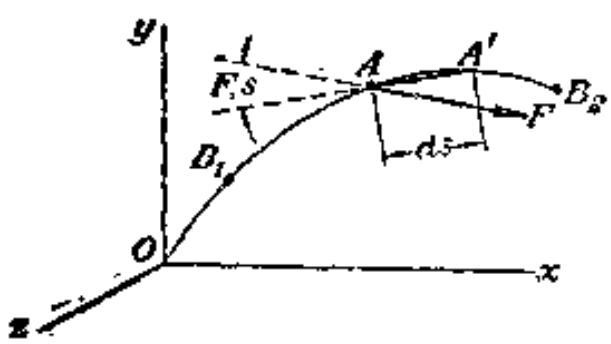
(解：$v_x/v_y=a/b$)

85. 曲綫運動的能量方程式

討論質點的直線運動時，我們已規定過，一個質點如果速度等於 v，重量等於 W，那末，

$$\frac{W}{g}\frac{v^2}{2} \qquad (a)$$

就稱爲質點的動能。這一定義同樣也適用於質點的曲線運動。



第 496 圖

質點發生曲線運動時，它上面的力的作用線並不一定跟質點的位移一致。例如第496圖中的質點，它沿曲線 OAB_2 運動，F 的作用線就跟質點由 A 到 A' 的位移 AA' 構成 (F,s) 交角。在這種情形下，F力在質點的微分位移 ds 方向的投影跟 ds 的乘積就叫做 F 力在質點微分位移 ds 中所做的**微分功**。這一微分功等於

$$Fds\cdot\cos(F,s) \qquad (b)$$

計算微分功，最好把 F 力和 ds 位移分解於三個正交坐標軸方向。這樣，可得到 F 的三個分力 X,Y,Z 和 ds 的三個分位移 dx, dy, dz。因合力在任何軸線上的投影要等於各分力在同軸投影的代數和，故

$$F\cos(F,s)=X\cos(x,s)+Y\cos(y,s)+Z\cos(z,s)=$$

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds} \qquad (c)$$

以(c)式代入(b)式，就得 F 力的微分功

$$Fds\cdot\cos(F,s)=Xdx+Ydy+Zdz \qquad (d)$$

(d)式說明了：F 力在 ds 位移中所做的微分功，乃等於它三個坐標軸方向的分力 X, Y, Z 在相應的分位移 dx, dy, dz 中所做微分功的代數和。

一個運動質點的「動能(a)」跟它外力合力的「微分功(d)」相互間有一定的關係。要確立這一關係，我們可以從運動方程式開始。現在把(59)式寫成底下的形式：

$$\left.\begin{aligned} m d\dot{x} &= X dt \\ m d\dot{y} &= Y dt \\ m d\dot{z} &= Z dt \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

用 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ 分別乘以上三式，然後相加，可得

$$m\dot{x}\cdot d\dot{x} + m\dot{y}d\dot{y} + m\dot{z}d\dot{z} = Xdx + Ydy + Zdz$$

或

$$d\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\right] = Xdx + Ydy + Zdz \qquad (f)$$

因其中 $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=v^2$，故

$$d\left(\frac{Wv^2}{2g}\right) = Xdx + Ydy + Zdz \qquad (g)$$

(g)式就是說：質點動能 $\frac{Wv^2}{2g}$ 在 ds 位移中的變化，乃等於外力合力 F 在同位移內所做的功。這就是質點曲線運動的功能關係。

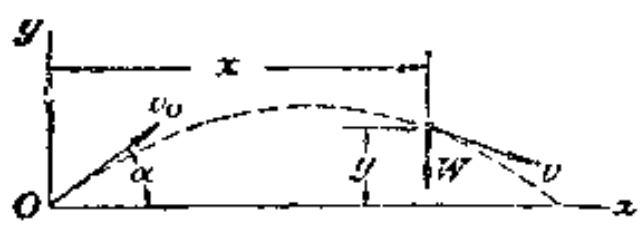
命 $B_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B_2(x_2, y_2, z_2)$ 代表運動路線上任意兩點，質點在這兩點的速度分別是 v_1 和 v_2。積分(g)式，可得

$$\frac{Wv_2^2}{2g} - \frac{Wv_1^2}{2g} = \int_{x_1}^{x_2} Xdx + \int_{y_1}^{y_2} Ydy + \int_{z_1}^{z_2} Zdz \qquad (62)$$

可見質點在有限位移內的動能變化就等於外力合力在同位移內所做的全部功。(62)式通常稱爲質點的能量方程式。

應用能量方程式來研究質點在不同位置的速度，最方便。例如第497圖中，若發射槍彈的射角 α 和初速 v_0 都已經知道，那槍彈在其他位置的速度就很容易由(62)決定。我們選定坐標軸 x, y 如圖。若不計空氣阻力，彈頭受到的外力就只有重力 W，所以 $X=Z=0, Y=-W$，代入(62)式中，得

$$\frac{Wv^2}{2g} - \frac{Wv_0^2}{2g} = \int_0^y -Wdy = -Wy$$



第 497 圖

故

$$v=\sqrt{v_0^2-2gy}$$

假設這一質點的運動路線已經知道，那就最好分解作用力於切線和法線方向，這樣要比在坐標軸方向分解更方便。命 T 和 N 分別代表作用力的切線分力和法線分力，因質點切線加速度等於 $\frac{dv}{dt}$，法線加速度等於 v^2/ρ，故得

$$\left.\begin{aligned}\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}&=T\\ \frac{W}{g}\frac{v^2}{\rho}&=N\end{aligned}\right\}\qquad(63)$$

以 v 乘(63)第一式，可得

$$\frac{W}{g}v\frac{dv}{dt}=T\frac{ds}{dt}$$

也就是

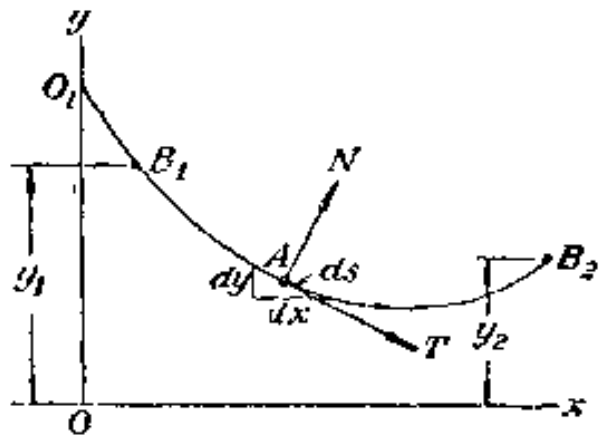
$$d\left(\frac{Wv^2}{2g}\right)=Tds\qquad(h)$$

(h)式說明：質點在位移 ds 中的動能變化，將等於切線分力在 ds 位移中所做的微分功(法線分力永遠垂直於位移，不能做功)。

假設 B_1 和 B_2 是路線上任意兩點，它們沿曲線到某一定點 O 的距離是 s_1 和 s_2，積分(h)式，可得

$$\frac{W}{g}\frac{v_2^2}{2}-\frac{W}{g}\frac{v_1^2}{2}=\int_{s_1}^{s_2}Tds\qquad(64)$$

(64)式說明，質點在發生位移 s_2-s_1 過程中的全部動能變化就等於作用力的切線分力沿這位移做的全部功。



第 498 圖

例如一個重 W_1 的質點，由 B_1 (x_1, y_1) 處出發，初速 $v_0=0$，沿第 498 圖所畫的曲線 O_1AB_2 運動。現在要問，質點在自己的重力作用下，運動到圖中 B_2 (x_2, y_2) 處時，速度 v_2 等於多大？ 這一問題非常簡單，因爲

$$T=-W\frac{dy}{ds}$$

代入(64)式後，就可得

$$\frac{W}{2}\frac{v_2^2}{g}=\int_{s_1}^{s_2}Tds=-\int_{y_1}^{y_2}Wdy=W(y_1-y_2)$$

故

$$v_2=\sqrt{2g(y_1-y_2)}$$

可見結果跟質點自由落下 (y_1-y_2) 高度的情形完全相同。 這也就是說，如果不計空氣阻力，那末質點在曲線運動中自 B_1 到 B_2 所達到的速度，大小將跟自 B_1 自由下落到 B_2 所達到的完全相同；不過它的方向却被運動路線改變爲跟路線的切線方向相同。

以上討論雖然就平面運動而論，不過實際上，質點的空間曲線運動還是可以應用(63) (64) 兩式。 只是式中 $\frac{dv}{dt}$, $\frac{v^2}{\rho}$ 兩分加速度和 T, N 兩分力都應該在路線曲線的密切面上。

例 題 和 習 題

427. 在第 499 圖中的拋物綫形路面 ACB 上，有一個重 W 的小球，由 A 處開始自由滾下。問小球經過 C 點時，它對於路面的壓力等於多大？ 摩阻力可以不計。

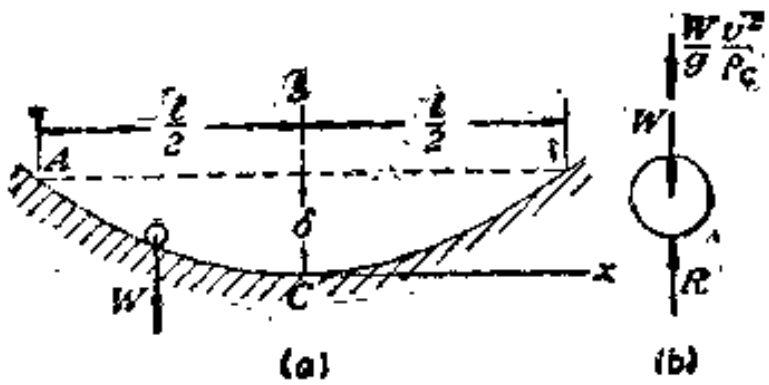
解： 選定 x 和 y 軸如圖。 因不計摩阻力，故小球達到 C 點時的速度應該是

$$v=\sqrt{2gh} \qquad (i)$$

命 R 代表 C 點的地面反作用力，觀察小球的動力平衡，可得

$$R=W\left(1+\frac{v^2}{g\rho_c}\right) \qquad (j)$$

式中 ρ_c 是路面在 C 處的曲率半徑。 決定曲率半徑必須先求出 ACB 的曲綫方程式。拋物綫的標準公式是



第 499 圖

$$x^2=4ay \tag{k}$$

在本題中，因 $x=\pm l/2$ 處，$y=\delta$，代入 (k) 式，可得 $a=l^2/16\delta$，故路綫方程式應該如下：

$$y=\frac{4\delta}{l^2}x^2 \tag{l}$$

曲率半徑的公式是

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

對 x 微分 (l) 式，可得 $\frac{dy}{dx}=\frac{8\delta}{l^2}x$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8\delta}{l^2}$，代入曲率半徑公式，並命 $x=0$，就得

$$\frac{1}{\rho_c}=\frac{8\delta}{l^2} \tag{m}$$

再把 ρ_c 代入 (j) 式，就可得到

$$R=W\left(1+\frac{16\delta^2}{l^2}\right) \tag{n}$$

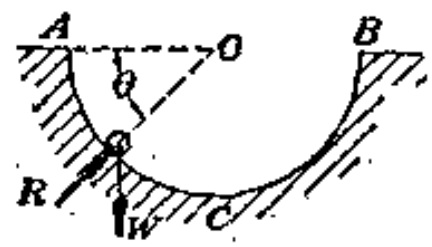
由這結果可以看出，如果 $\frac{\delta^2}{l^2}$ 很大，那末 C 點的反作用力會比小球的重量大得很多。

428. 設想第 427 題中的 ACB 曲綫是一根正弦曲綫的一半，試求 C 處的反作用力等於多大？

〔解：$R=W\left(1+\frac{2\pi^2\delta^2}{l^2}\right)$〕

429. 一個重 W 的小球自第 500 圖中 A 處開始出發，沿鉛垂平面中的 ACB 半圓圓周運動，小球在運動中的位置可以由小球的半徑向量跟水平綫 OA 的交角 θ 決定。試不計摩阻力，求小球在各位置所受到的圓周表面的反作用力。

(解：$R=8W\sin\theta$)



第 500 圖

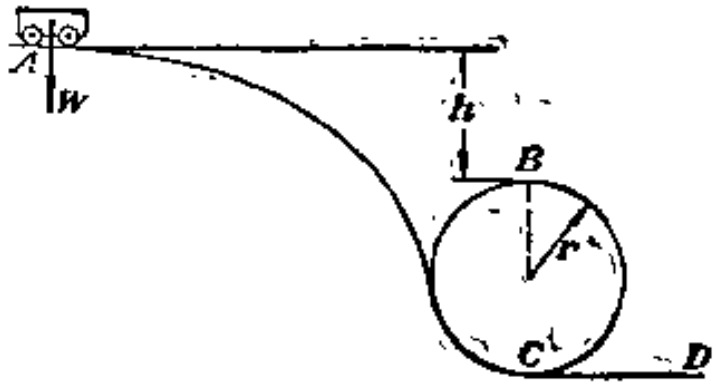
430. 第 501 圖中是一具環道玩具。一部重 W 的小車，自圖中 A 處出發，沿環道 $ABCD$ 運動。摩阻力可以不計。問出發處 A 離 B 處的高度

至少應等於多大，小車才不至在於 B 處落下？ 最小高度 h 確定後，問小車在水平直綫 CD 部份的速度 v_c 等於多少？

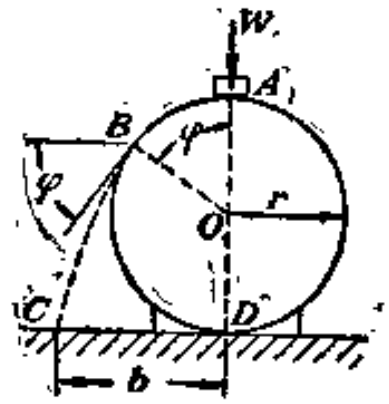
(解：$h_{min}=r/2$，$v_c=\sqrt{5gr}$)

431. 第 502 圖中，一重 W 的方塊放在一個光滑的圓筒表面上。 圓筒橫臥在水平平面，它的半徑等於 r。 方塊由 A 處出發，沿 AB 弧運動，到 B 處時，開始離開圓筒表面，沿 BC 綫落下，落在 CD 水平平面上 C 處。 C 點到圓筒中心 O 的水平距離等於 b。 AB 弧所跨的中心角等於 φ。 試求 φ 和 b 各等於多大？

(解：$\varphi=48°11'$；$b=1{,}46r$)



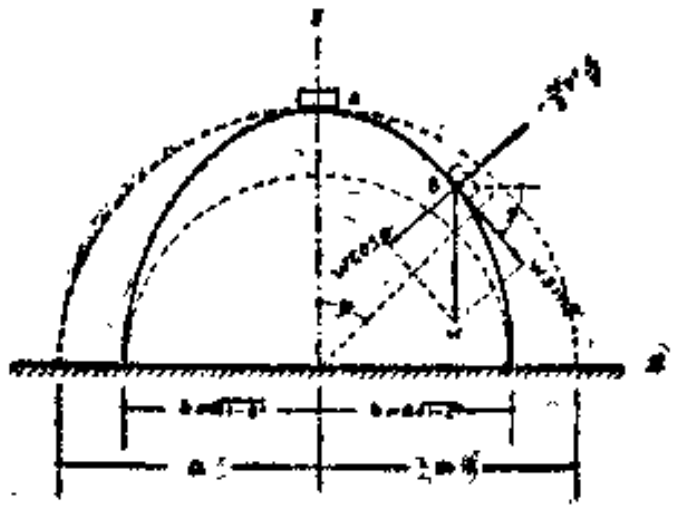
第 501 圖



第 502 圖

432. 一質點由第 503 圖中 A 點出發，沿一光滑的橢圓柱表面滑下，到達 B 點時，開始脫離橢圓面。 設橢圓的鉛垂長軸等於 $2a$，偏心率等於 e，AB 橢圓弧所跨的中心夾角等於 φ，試證明

$$e^2\cos^3\varphi-3\cos\varphi+2=0$$



第 503 圖

解：定坐標軸如圖。 橢圓方程式是

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

b 是橢圓的短軸，故

$$b=a\sqrt{1-e^2} \qquad (o)$$

因

$$\left.\begin{aligned} x&=b\sin\varphi \\ y&=a\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (p)$$

故

$$dx=b\cos\varphi\, d\varphi$$

從而，

$$dy=-a\sin\varphi\, d\varphi=-\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}dx=-\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\, dx \qquad (q)$$

因此，

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{a}{b}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi=-\frac{a}{b}\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{dx}{b\cos\varphi}=-\frac{a}{b^3}\cdot\frac{1}{\cos^4\varphi}dx \qquad (r)$$

橢圓在 B 點的曲率是

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{-\frac{a}{b^3}\frac{1}{\cos^3\varphi}}{\left[1+\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{-\frac{a}{b^3}\frac{1}{\cos^3\varphi}}{\left[\frac{b^2\cos^2\varphi+a^2(1-\cos^2\varphi)}{b^2\cos^2\varphi}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{-ab}{[(b^2-a^2)\cos^2\varphi+a^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (s)$$

命 ψ 代表 B 點橢圓切綫的水平綫傾角，可得 $\operatorname{tg}\psi=dy/dx=-\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi$，也就是

$$\cos\psi=1\Big/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}=1\Big/\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\varphi}=b\cos\varphi\Big/\sqrt{b^2\cos^2\varphi+a^2(1-\cos^2\varphi)}$$

$$=b\cos\varphi\Big/\sqrt{(b^2-a^2)\cos^2\varphi+a^2} \qquad (t)$$

設 h 是 A，B 兩處的高度差，根據能量方程式，可知物體在 B 點的速度是

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2ga(1-\cos\varphi)} \qquad (u)$$

物體在 B 處脫離橢圓面，表示它在此處加於橢圓的壓力等於零。這就是說，

$$W\cos\psi+\frac{W}{g}v^2\frac{1}{\rho}=0 \qquad (v)$$

把(s)(t)(u)……代入(v)式中，得

$$\frac{b\cos\varphi}{\sqrt{(b^2-a^2)\cos^2\varphi+a^2}}+2a(1-\cos\varphi)\frac{-ab}{(\sqrt{(b^2-a^2)\cos^2\varphi+a^2})^3}=0$$

或

$$b\cos\varphi\cdot[(b^2-a^2)\cos^2\varphi+a^2]-2a^2b(1-\cos\varphi)=0$$

也就是

$$(b^3-a^3)\cos^3\varphi+a^3\cos\varphi-2a^3+2a^3\cos\varphi=0$$

或

$$(b^2-a^2)\cos^3\varphi+3a^2\cos\varphi-2a^2=0 \qquad (w)$$

由 (o) 式知 $(b^2-a^2)=-a^2e^2$，故上式也可化成

$$-a^2e^2\cos^3\varphi+a^2\,3\cos\varphi-2a^2=0$$

或

$$-e^2\cos^3\varphi+3\cos\varphi-2=0$$

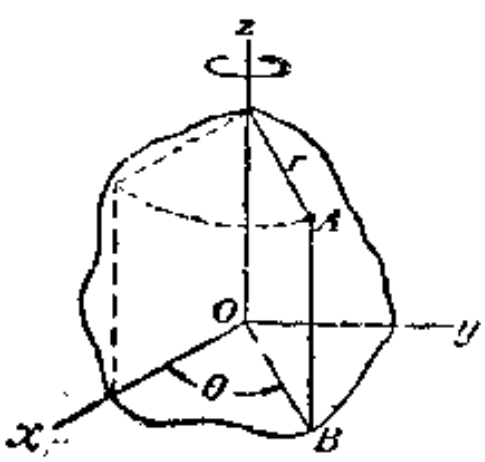
最後，就得到

$$e^2\cos^3\varphi-3\cos\varphi+2=0$$

第十二章　剛體的定軸旋轉

86. 旋轉的運動幾何

剛體繞一固定軸線旋轉時，它在任何時刻的位置都可由這一時刻的旋轉角 θ 來決定。**旋轉角**乃是剛體中通過旋轉軸線 Oz（第 504 圖）的一個平面 OAB 跟一靜止的也通過旋軸 Oz 的坐標軸平面（例如 xz 平面）所構成的交角。旋轉角，在剛體旋轉時，隨時間而變化。如已知旋轉角的時間函數



第 504 圖

$$\theta=f(t)$$

那這一剛體的旋轉就完全決定。旋轉角 θ 通常不用度數做單位，而以多少弧度或多少圓周角來計算。

設剛體在相等時間內，不論此相等的時間如何短，它旋轉角的變化始終都相等，那就是**均勻旋轉運動**。旋轉角對於時間的變化率就稱爲**角速度**。

一般的剛體旋轉運動，旋轉角的變化在相等時間內並不相同，所以是**不均勻旋轉運動**。假設剛體在相繼的 t_1 及 t_2 時刻的旋轉角各等於 θ_1 及 θ_2，那末

$$\omega_m=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1} \qquad (a)$$

就稱爲剛體在 t_1 到 t_2 時間內的**平均角速度**。

命 $t_1=t$，$t_2=t+\Delta t$ 和 $\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\Delta\theta$，可得 $\omega_m=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$。$\Delta t\to 0$ 時，ω_m 的極限值是

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right|=\dot{\theta}$$

這極限值稱爲剛體在 t 時刻的**角速度**。角速度是一種向量，通常以旋轉軸線上一根有方向的線段代表。角速度的方向，按右旋螺絲法則決定。剛體旋轉方向跟螺絲旋轉方向相同，它的代表向量的方向就是螺絲的進退方向；公定前進方向爲正，後退方向爲負。角速度單位用 $^{\circ}/s$。

在工程應用中，等速旋轉機件的角速度，通常以每分鐘的旋轉次數來計算。設每分鐘轉數是 n，這機件的角速度就等於

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi}{30}\cdot n \tag{b}$$

剛體繞固定軸線旋轉時，每一質點，例如距軸線爲 r 的 A 點都將沿一固定半徑的圓周運動。設 A 點在 Δt 時間內沿圓周運動的距離是 Δs，與 Δs 相應的中心角是 $\Delta\theta$，質點 A 的速度就是

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{r\cdot\Delta\theta}{\Delta t}\right|=r\dot{\theta}=r\omega \tag{66'}$$

不均勻旋轉中，角速度 ω 隨時間變化；變化量對時間的變化率稱爲**角加速度**。設剛體在 t_1 及 t_2 時刻的角速度各爲 ω_1 及 ω_2，那末，

$$\alpha_m=\frac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1} \tag{c}$$

就稱爲剛體在 t_1 到 t_2 時間中的**平均角加速度**。如 t_1 到 t_2 時間很短，命 $t_1=t$，$t_2=t+\Delta t$ 和 $\omega_1=\omega$，$\omega_2=\omega+\Delta\omega$，那末 $\Delta t\to 0$ 的 α_m 的極限值

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right|=\frac{d\omega}{dt}=\dot{\omega}=\ddot{\theta} \tag{67}$$

就稱爲剛體在 t 時刻的**角加速度**。

第 504 圖中，A 點的加速度，根據 § 80，可分解爲切線和法線加速度：

$$\left.\begin{aligned} a_t&=\frac{dv}{dt}=r\dot{\omega}=r\ddot{\theta}\\ a_n&=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r=\dot{\theta}^2 r\end{aligned}\right\} \tag{67'}$$

可見質點的加速度跟剛體的角速度和角加速度間有確定不移的關係。

如已知剛體的角速度和角加速度以及某一質點跟旋軸的距離 r，這質點的加速度就可由(67′)式決定。

例題和習題

433. 設一物體作旋轉運動的旋轉角方程式是

$$\theta=\theta_0+bt+ct^2$$

試求這物體的角速度和角加速度的一般公式，如物體的最初角速是 2π 弳/s，一秒後變爲 4π 弳/s，問式中常數 b 和 c 應等於多大？

解：由(66)式，知

$$\omega=\dot{\theta}=b+2ct \qquad (d)$$

以 $t=0$ 和 $\omega=2\pi$ 代入上式，得 $b=2\pi$。 再以 $t=1$，$\omega=4\pi$ 和 $b=2\pi$ 代入上式，又可得

$$4\pi=2\pi+2c$$

故 $c=\pi$。 根據 (67) 式，知

$$\alpha=\ddot{\theta}=2c=2\pi$$

這 α 等於一常數，可見物體的旋轉是均勻旋轉運動。

434. 第 505 圖中，一個固定在一根細桿下的圓盤在作扭轉擺動，以圓盤的平衡位置作爲計量旋轉角的起點，可得關係式如下：

$$\theta=\theta_0\cos(pt)$$

試求圓盤角速度，角加速度以及圓盤盤周一點的法綫和切綫加速度。 假設圓盤半徑等於 12cm，最大角速度等於 2π 弳/s，圓盤每秒擺動 2 次，試算出法綫和切綫加速度等於多大？

解：根據(66)和(67)兩式，知

$$\dot{\theta}=-\theta_0\,p\sin(pt) \qquad (e)$$

$$\ddot{\theta}=-\theta_0\,p^2\cos(pt) \qquad (f)$$

故圓盤盤周一點的切綫加速度和法綫加速度，根據(67′)式，應該是：

$$a_t=r\ddot{\theta}=-r\theta_0\,p^2\cos(pt) \qquad (g)$$

$$a_n=\dot{\theta}^2r=\theta^2_0\,p^2\,r\sin(pt) \qquad (h)$$

圓盤每秒擺動兩次，故由

$$\tau=2\pi/p=1/2$$

可得 $p=4\pi$。 由(e)式可看到，最大的角速度只能等於 $\theta_0=p2\pi$，故 $\theta_0=\frac{1}{2}$。 把已得的 θ_0，p 和 r 代入(g)(h)兩式，就得最大的加速度：

$$(a_t)_{max}=\theta_0\,rp^2=96\,\pi^3\ \mathrm{cm/s^2}$$

$$(a_n)_{max}=\theta^2_0\,p^2r=48\,\pi^2\ \mathrm{cm/s^2}$$

435. 發電動機轉子(1)的旋轉角速是

$$n=\text{每分鐘 } 1800 \text{ 轉}$$

關斷電流後，轉子以固定角減速度 α 減低轉數，6 秒後開始完全停止。試求 α 應該等於多大？又問關斷電流後，轉子旋轉了多少轉才停止？

〔解：$(a)\alpha=10\pi$ 弳/s²，(b)90 轉〕

436. 如第 506 圖中的機構，試求 OA 桿的角速度 $\dot{\theta}$ 及角加速度 $\ddot{\theta}$ 的一般公式。

解：自 OA 桿在鉛垂位置時起算時間，那末，

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{x}{b}=\frac{v_0}{b}t$$

對時間微分上式，得

$$\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}=\frac{v_0}{b}$$

但

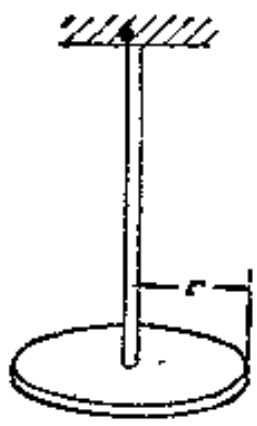
$$\cos\theta=b/\sqrt{x^2+b^2}=b/\sqrt{b^2+v_0^2t^2}$$

故

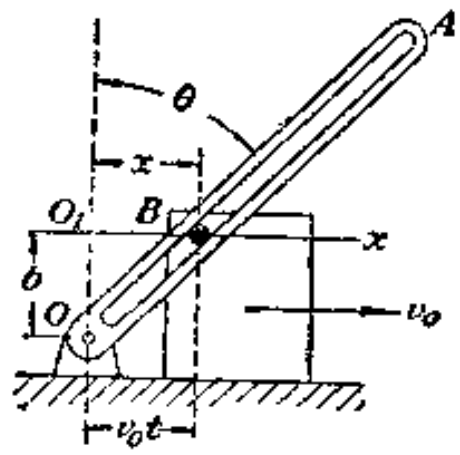
$$\dot{\theta}=\frac{v_0b}{b^2+v_0^2t^2}$$

再對時間微分上式，就得

$$\ddot{\theta}=-\frac{2v_0^3bt}{(b^2+v_0^2t^2)^2}$$



第 505 圖



第 506 圖

87. 剛體定軸旋轉的運動方程式

因爲剛體是一個相互剛性連接的質點系，所以可引用動力平衡攷察各質點的慣性力來導出它的旋轉運動方程式。加入慣性力後，因所有剛體內各質點上的力羣都應該是一平衡力系，所以就全剛體而言，它上面所有的力也構成一個平衡力系。其中雖然包括各質點間的內力在

(1) 電機

內，但整個質點系中，所有內力都成對抵消，本身自成平衡，所以只要攷察剛體上所有外力及慣性力的動力平衡就能解決問題。若應用力矩法決定平衡，那末，剛體上所有外力對於任意一旋轉軸線的力矩代數和就必定跟剛體中所有慣性力對於同軸的力矩代數和互相抵消。

計算慣性力對於旋轉軸線的力矩代數和只要攷慮慣性力的切線分力；法線方向的分力都通過旋轉軸線是不產生力矩的。如命 dm 代表剛體中任一質點的質量，r 代表這質點離開旋轉軸線的距離（第 504 圖）。根據 (67) 式，就知道，這一質點的慣性力對軸線的力矩將是 $(-r^2\ddot{\theta}dm)$。積分這力矩，可得全剛體中所有質點的慣性力對於同軸的力矩和。此和應等於所有外力對同軸的力矩代數和(或所有外力的合力對旋轉軸線的力矩) M，故

$$-\int r^2\ddot{\theta}\,dm+M=0 \qquad (a)$$

因所有質點的角加速度 $\ddot{\theta}$ 在同一時刻全相同，所以可以把它放在上式的積分號前面去；所餘的積分 $\int r^2dm$ 就跟運動無關，它的大小純粹看剛體的質量和剛體對於旋轉軸線的形狀而定。可見這一積分是屬於剛體的本身性質。這積分用符號 I 代表，通常稱爲剛體對於定軸的**質量慣矩**，但也可稱爲剛體對於定軸的旋轉質量；

$$I=\int r^2dm \qquad (b)$$

I 值如何決定，將在本書附錄中討論。現在將 (b) 式代入 (a) 式中，又可得

$$I\ddot{\theta}=M \qquad (68)$$

這就是剛體定軸旋轉的**運動方程式**。此式跟質點直線運動方程式(36)形式相同。它說明：力矩的作用就是使物體發生角加速度的原因；角加速度的大小跟力矩的大小成正比，並且方向相同。應用此式可解決兩類問題：(1) 已知運動情形（已知 θ 同時間關係），求產生這運動的全部力矩；(2)已知力矩 M，求所產生的運動(θ 的時間函數)。第一類問題很簡單，只要把所給的的時間函數對時間微分，代入(68)式，就可以求到力矩 M。現在先舉一些例子來說明這一類問題。

例題和習題

437. 一圓盤重150kg，直徑等於50cm 開始以固定角加速度繞垂直中心軸線旋轉 四秒鐘後轉數達到每分鐘30轉。 試求作用力矩等於多大? 又問圓盤在此四秒內的迴轉次數等於多少?

解: 因角加速度固定不變，故角速度跟時間的關係曲線必如定第 507 圖是一根直綫。 從圖上看得出:

$$\ddot{\theta}=\frac{30\cdot 2\pi}{4\cdot 60}=\frac{\pi}{4}\text{ 弧/s}^2 \qquad (c)$$

圓盤對於垂直中心軸的慣矩是

$$I=\left(\frac{150}{g}\right)\left(\frac{25^2}{2}\right)=47{,}8\text{kg}\quad \text{s}^2\cdot\text{cm}$$

把 $\ddot{\theta}$ 和 I 代入(68)式，就得

$$M=I\ddot{\theta}=47{,}8\frac{\pi}{4}=37{,}5\text{kg}\cdot\text{cm}$$

至於剛體在 $t=4$s 時的旋轉角，那顯然是等於圖中三角形的面積，故得

$$\theta=\frac{4\pi}{2}=2\pi$$

相當於圓盤旋轉一週。

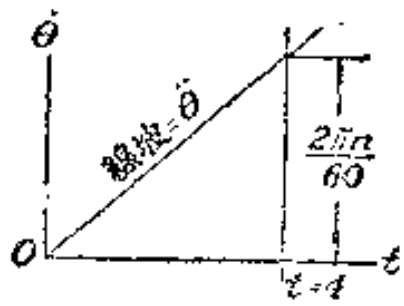
438. 一飛輪對於旋軸的慣矩是 I，轉數是每分鐘 n 轉。 若取去推動力矩，讓它自己轉動，飛輪將因軸承摩阻力關係，開始作等減速旋轉，在 x 秒後完全停止。 試求摩阻力的力矩等於多大?

(解: $M=\frac{2\pi n}{60t}I$)

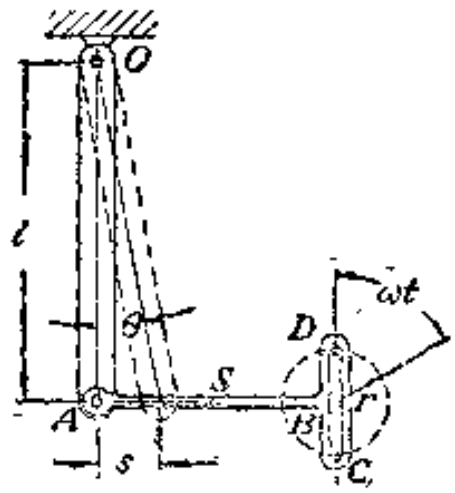
439. 一密度均勻的圓球，半徑 $a=25$cm，重量 $W=50$kg，從靜止狀態開始繞一直徑作等加速旋轉。 迴轉 12 次後，轉數達到每分鐘 $n=180$ 轉，問所加的作用力矩 M 等於多大?

(解: $M=20$kg · cm)

440. 如第 508 圖的裝置。 圖中曲軸半徑 r 比 OA 桿的長度 l 遠為微小。 因此，OA 桿的



第 507 圖



第 508 圖

擺幅很小，A 點在鉛垂方向的位移可以完全不計。 此外，AB 桿的質量極小，也可以不計。 試求圖中 AB 桿內張力 S 等於多大?

解：命 ω 代表曲軸的固定角速。 自 OA 在鉛垂位置時起算時間。 A 點水平位移是

$$s=r\sin\omega t \tag{d}$$

命 θ 代表相應的 OA 桿的旋轉角，因

$$\theta\approx\sin\theta=\frac{s}{l}=\frac{r}{l}\sin\omega t \tag{e}$$

故

$$\ddot{\theta}=-\frac{r}{l}\omega^2\sin\omega t \tag{f}$$

作用於 OA 上的外力力矩分兩種：(1) AB 桿力 S 對 O 點的力矩，(2) 作用於 OA 桿重心的重力 W 對於 O 點的力矩。 故

$$M=Sl-W\frac{l}{2}\sin\theta$$

若 θ 很小，可命 $\sin\theta=\theta=\frac{r}{l}\sin\omega t$，故

$$M=Sl-\frac{Wr}{2}\sin\omega t \tag{g}$$

以(f)(g)兩式代入(68)式，得

$$-I_o\frac{r}{l}\omega^2\sin\omega t=Sl-\frac{Wr}{2}\sin\omega t$$

故

$$S=\left(\frac{Wr}{2l}-I_o\frac{r\omega^2}{l^2}\right)\sin\omega t \tag{h}$$

計算 I_o，可假定 OA 桿的切面尺寸遠較長度 l 爲小，使

$$I_o=\frac{W}{g}\frac{l^2}{12}+\frac{W}{g}\frac{l^2}{4}=\frac{W}{g}\frac{l^2}{3}\text{(1)}$$

代入(h)式中，就得到

$$S=\frac{Wr}{l}\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega^2 l}{3g}\right)\sin\omega t \tag{i}$$

可見 S 值要看 ω 而定。 若 ω 很小，上式第二項可以不計，那末

$$S=\frac{Wr}{2l}\sin\omega t=\frac{W}{2l}s \tag{i'}$$

S 的正負要看 s 而定，OA 向右擺時，S 是張力；向左時，是壓力。 S 的大小隨着 W 的增加而逐漸減小，到 $\frac{\omega^2 l}{3g}=\frac{1}{2}$ 時，S 就等於零。 $\frac{\omega^2 l}{3g}=\frac{1}{2}$ 表示

(1) 參閱附錄 II. § 8。

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}} \tag{j}$$

故 D 點旋轉週期是

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} \tag{k}$$

很顯然的，(k)式也就是 OA 桿的自然振動週期。可見兩週期若相同，OA 桿的擺動就不需要 AB 桿的作用力來維持。

設若 ω 比(j)式所決定的還要大，那 S 就變成負的了。這表示 AB 桿在圖中情形下，將受壓力作用。

441. 一個重 2000kg 的飛輪，轉速每分鐘 180 轉。轉數的最大漲落是 0,01 ω。飛輪對於旋軸的慣矩半徑 $i=50cm$。設旋轉角方程式是

$$\theta=\omega t+\alpha\sin\omega t$$

試求原動機作用於飛輪的扭力力矩的時間函數。

解：$\omega=180\frac{\pi}{30}=6\pi s^{-1}$，　$\alpha=0,01$，　$I=\left(\frac{2000}{g}\right)50^2$

代入(68)式，就得

$$M=I\ddot{\theta}=-I\alpha\omega^2\sin\omega t=-18150\sin\omega t\ \mathrm{kg\cdot cm}$$

88. 不變力矩作用下的旋轉運動

剛體受不變力矩作用的定軸旋轉運動，是已知作用力矩求運動情形的「第二類問題」。因力矩固定不變，(68) 式中 M 變成一個常數，故積分(68)式可得

$$I\dot{\theta}=Mt+C_1$$

命 $\dot{\theta}_0$ 代表剛體最初角速度，代入(a)式，就得積分常數 $C_1=I\dot{\theta}_0$。故

$$\dot{\theta}=\frac{M}{I}t+\dot{\theta}_0 \tag{69}$$

再積分(69)式，得

$$\theta=\frac{M}{2I}t^2+\dot{\theta}_0t+C_2 \tag{b}$$

如剛體的最初旋轉角是 θ_0，代入上式，就可得積分常數 $C_2=\theta_0$，故

$$\theta=\frac{Mt^2}{2I}+\dot{\theta}_0t+\theta_0 \tag{70}$$

(69)和(70)兩式可以解決各種簡單的剛體定軸旋轉問題。至於如何應用這兩個公式，我們可以參照§68中處理固定力作用下的質點直線移動的方法。

例題和習題

442. 一個實心圓球，重量 $W=45$kg，半徑 $a=5$cm，繞一根直徑旋轉，最初轉速是每分鐘 $n=180$轉。假設在旋轉軸綫的垂直平面中加一扭力力矩 $M=-4.5$ kg·cm 作用在這圓球上，問這球受力矩作用後，旋轉多少次才停止？

解：最初角速度 $\dot{\theta}_0=2\pi\cdot\frac{180}{60}=6\pi$弧/s。圓球對直徑的慣矩是

$$I=\frac{2Wa^2}{5g}=\frac{45}{980}\text{kg}\cdot\text{s}^2\cdot\text{cm}$$

因圓球停止轉動時，$\dot{\theta}=0$，故應用(69)式，可得所求的時間是

$$t=-\frac{I}{M}\dot{\theta}_0=0.192\text{s} \qquad (c)$$

以 t 值代入(70)式，得

$$\theta=-\frac{I\dot{\theta}_0^2}{2M} \qquad (d)$$

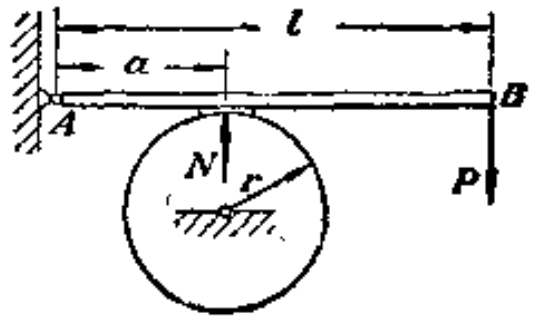
再以已得各數值代入上式，就得到

$$\theta=1.81\text{弧，或 }0.288\text{ 週}$$

443. 一傳動軸半徑等於 r，軸同軸承間摩阻係數是 μ。假設傳動軸初定角速等於 ω，問原動扭力力矩取去後，此軸還可以旋轉多少角度？

(解：$\theta=r\omega^2/4\mu g$)

444. 如第509圖中的剎車裝置。剎車同飛輪間的摩阻係數是 μ，飛輪原來角速是 ω，試求受圖中 P 力作用後，飛輪還可以旋轉幾次？飛輪重量等於 W，軸承摩阻力可以不計。



第 509 圖

解：考察圖中 AB 桿的靜力平衡，可知剎車部份在接觸處的正交壓力是

$$N=P\cdot\frac{l}{a}$$

故摩阻力等於

$$\mu N=\mu P\cdot\frac{l}{a}$$

它所產生的對於旋轉軸綫的作用力矩是

$$M=-\mu Pr\cdot\frac{l}{a}$$

負號的意思是因爲這一力矩所產生的是減速旋轉。由第442題的(d)式，得

$$\theta=\frac{W\omega^2 r a}{4\mu g P l} \qquad (e)$$

故相應的轉數等於

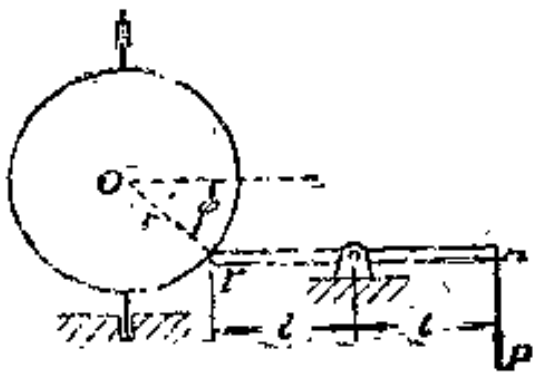
$$\frac{\theta}{2\pi}=\frac{W\omega^2 r a}{8\pi\mu g P l} \qquad (e')$$

445. 第510圖中，圓球重W，半徑等於r。繞一根鉛垂直徑旋轉。最初角速是ω，由如圖裝置的AB槓桿剎停。設軸承摩阻力可以不計，圓球和槓桿間摩阻係數等於μ，作用力P也已知，問所需的剎停時間等於多久？

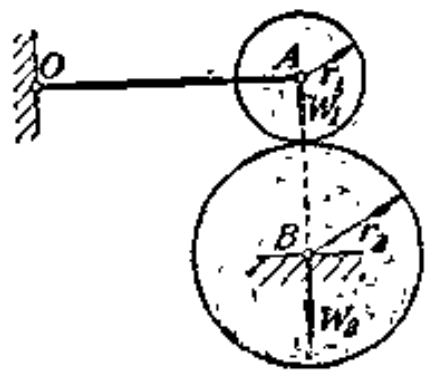
(解：$t=\dfrac{2Wr\,\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi}{5\mu g P}$)

446. 第511圖中，A球的角速是ω，落在原來靜止的B球上。接觸後，B球開始旋轉，但接觸處尚有滑動發生。之後，A球轉速逐漸減小，B球轉速逐漸增大。最後，兩球間毫無滑動存在。設接觸處的摩阻係數等於μ，軸承摩阻力可以不計，試求達到毫無滑動情形所需的時間t (A，B兩球的重量和半徑各等於W_1，W_2和r_1，r_2)。

解：在毫無滑動時，$\omega_1 r_1=\omega_2 r_2$，故$\omega_1=\dfrac{r_2}{r_1}\omega_2$。在$t$時間內，$A$球角速必須自$\omega$降到等於$\omega_1$；$B$球角速必須自零增加到等於$\omega_2=\dfrac{r_1}{r_2}\omega_1$；故$A$球角減速是$\alpha_1=\dfrac{\omega-\omega_1}{t}$；



第510圖



第511圖

B球角加速是$\alpha_2=\dfrac{\omega_2}{t}=\dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{\omega_1}{t}$。又因$I_1=\dfrac{W_1 r_1^2}{2g}$和$I_2=\dfrac{W_2 r_2^2}{2g}$，兩球所受摩阻力都是$W_1\mu$，故$A$和$B$球受到的作用力矩分別是$M_1=W_1\mu r_1$和$M_2=W_1\mu r_2$。把兩值代入(68)式，即得

$$W_1\mu r_1=\frac{W_1 r_1^2}{2g}\,\frac{\omega-\omega_1}{t};\quad W_1\mu r_2=\frac{W_2 r_2^2}{2g}\cdot\frac{r_1}{r_2}\,\frac{\omega_1}{t}$$

故

$$t=(r_1\omega-r_1\omega_1)/2g\mu \text{ 和 } t=W_2 r_1\omega_1/2g\mu W_1$$

也就是

$$W_1(r_1\omega-r_1\omega_1)=W_2 r_1\omega_1$$

或

$$\omega_1=\frac{W_1\omega}{W_1+W_2}$$

因此，得

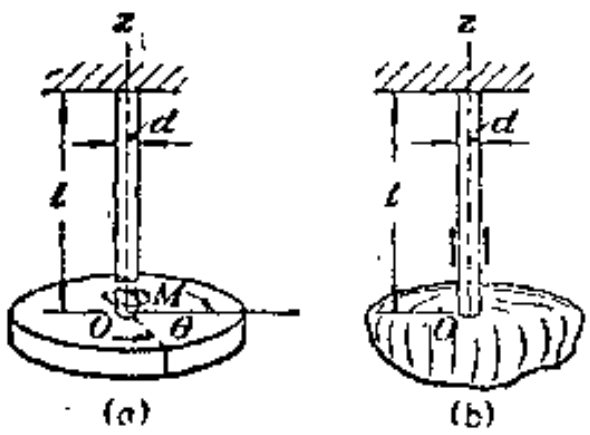
$$t=W_2r_1\left(\frac{W_1\omega}{W_1+W_2}\right)/2g\mu W_1=W_2\omega r_1/(W_1+W_2)2\mu g$$

或

$$t=\frac{\omega r_1}{(1+\frac{W_1}{W_2})2\mu g}$$

89. 扭轉振動

第 512a 圖的裝置稱爲扭擺。圖中 M 是一個圓盤，固定在一直軸的下面，圓盤可繞直軸中心線 Oz 轉動。直軸上端固定，軸線 Oz 通過圓盤中心，並跟圓盤平面垂直，如果加一個外力力矩使圓盤旋轉來扭歪直軸，取去外力力矩後，圓盤就將作**扭轉振動**。討論這種振動，暫時可不計直軸的質量和阻尼（例如空氣阻力，直軸非完全彈性等）對於運動的影響。設圓盤對於 Oz 的惰矩等於 I，旋轉角等於 θ（在平衡位置時，$\theta=0$），所有作用外力對 Oz 的力矩和等於 M，那末，



第 512 圖

$$I\ddot{\theta}=M \qquad (a)$$

因圓盤的重力通過旋轉軸線，不產生力矩，外力所形成的力矩只是直軸扭歪後所生彈性力對於 Oz 的力矩而已。在彈性限度內，這一力矩跟旋轉角 θ 成正比；

$$M=-k_t\theta \qquad (b)$$

k_t 稱爲直軸的**扭力常數**．它的意義就是使直軸扭轉一單位弧度角，所需的作用力矩。(b)式中的負號指旋轉角方向跟力矩方向相反，直軸若是圓柱形狀，那末

$$\theta=\frac{Ml}{GJ} \qquad (c)$$

(c)式的來源,可參閱任何材料力學教科書。式中,l 指直軸長度,G 指直軸材料的剪力彈性模數,J 指直軸切面的面積極惰矩(等於 $\pi d^4/32$),比較(b)(c)兩式,可知

$$k_t=\frac{GJ}{l} \tag{d}$$

以(b)代入(a)中,可得

$$I\ddot{\theta}=-k_t\theta$$

若令

$$p^2=\frac{k_t}{I}=\frac{GJ}{Il} \tag{e}$$

那末

$$\ddot{\theta}+p^2\theta=0 \tag{71}$$

此式跟(41)式是形式相同的微分方程式,它的通解顯然是

$$\theta=C_1\cos pt+C_2\sin pt \tag{72}$$

其中積分常數 C_1 和 C_2,可按處理質點直線振動的方法決定,結果是:$C_1=\theta_0$, $C_2=\frac{\dot{\theta}_0}{p}$。$\theta_0$ 是圓盤的最初旋轉角,$\dot{\theta}_0$ 是它的最初角速度,故得

$$\theta=\theta_0\cos pt+\frac{\dot{\theta}_0}{p}\sin pt \tag{72a}$$

若最初角速 $\dot{\theta}_0=0$,那末,

$$\theta=\theta_0\cos pt; \tag{72b}$$

若扭擺由突然的衝擊引起振動,$\theta_0=0$,那末,

$$\theta=\frac{\dot{\theta}_0}{p}\sin pt \tag{72c}$$

從(72)式也可以看出,圓盤的旋轉是一種週期性運動,振動週期是

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{Il}{GJ}} \tag{73}$$

可見週期跟軸長和圓盤對於旋轉軸線的惰矩的平方根成正比,跟直軸

切面積極惰矩 J 的平方根成反比。若扭擺所有尺寸都加大 n 倍，由(73)式就可看到，I 將增大 n^5 倍，J 將增大 n^4 倍，l 將增大 n 倍，所以週期也將增大 n 倍。扭擺的振動週率根據(73)式，是

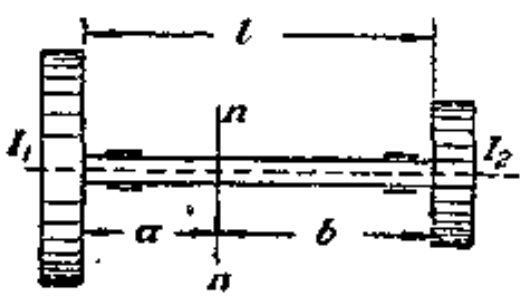
$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GJ}{Il}} \tag{74}$$

若在直軸下端，加裝一個軸承來防止直軸的彎曲(第512b圖)，那就任何形狀物體都可裝在直軸下面作(72)式所表示的扭轉振動。這個原理可以利用來測量隨便一個物體的質量惰矩 I。測量方法很簡單，只要把物體裝在直軸下面，觀察得扭轉振動週率 f 後，由(74)式就可算出 I 值的大小。如式中 G,J,l 還不知道，那還可用已知惰矩 I_o 的物體來比較觀察。先將已知惰矩的物體裝到直軸上去，測出它扭轉振動的週率 f_o，之後，再改把未知 I 的物體裝上去，測出振動週率 f，由(74)式就可知

$$I=I_o\frac{f_o^2}{f^2} \tag{f}$$

應用這方法來測定形狀不規則物體對於一旋轉軸線的質量惰矩，最方便。

在工程應用中，常常碰到這樣的情形，就是一根傳動軸，兩端各裝有一機件，例如透平機的傳動軸，一端是推進器，一端是輪葉(第513圖)。傳動軸兩端各有一相等相反的扭力力矩作用。一旦兩扭力力矩突然消失後，立刻會發生扭轉振動。如不計軸承摩阻力，在振動中，兩機件的旋轉方向就必然相反(此現象的解釋見以下第495題)。因此，在傳動軸上必有一切面 $n-n$ 存在，此切面在振動時完全靜止，不作扭轉，通常稱爲傳動軸的節切面。由於節切面的存在，我們可以把傳動軸當作各自固定於這一切面的兩個扭擺處理。節切面距兩端的距離是 a 和 b。因兩扭擺的週期必須相等，故



第 513 圖

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{I_1a}{GJ}}=2\pi\sqrt{\frac{I_2b}{GJ}} \tag{g}$$

也就是

$$a:b=I_2:I_1 \tag{h}$$

可見節切面距離傳動軸兩端的長度比例就等於兩端機件對於旋轉軸線的惰矩 I_1 和 I_2 的反比。 此外，因

$$a+b=l \tag{i}$$

故由(h)和(i)兩式可得

$$a=\frac{I_2 l}{I_1+I_2}, \qquad b=\frac{I_1 l}{I_1+I_2} \tag{j}$$

把(j)式代入(g)式，就得到

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{I_1 I_2 l}{GJ(I_1+I_2)}} \tag{73a}$$

或

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GJ(I_1+I_2)}{I_1 I_2 l}} \tag{74a}$$

可見振動週率將隨着傳動軸直徑的加大而增高；隨着兩端機件的惰矩的增大而降低。

在往復式原動機中，曲軸所受推動力的「扭力力矩」並非固定不變；但這變化着的扭力力矩中，主要部份的週率一般都跟原動機轉速相同。 如轉速恰好跟扭轉振動系統（包括飛輪等在內）的自然週率相同，顯然將有強烈的扭轉振動發生。 原動機發生這種現象的轉速通常稱爲臨界轉速。

扭轉振動在推進器傳動軸的設計中最需要注意。多數傳動軸的損壞都是由強迫振動而致。 故爲消除共振現象起見，必須使原動機的轉速遠離振動系統的自然週率；或改變傳動軸的尺寸，使自然週率遠離原動機轉速。如果轉速必須在臨界速率附近，就務須應用適當的阻尼裝置來減小振動強度。關於扭轉振動的專門著作很多，詳細的討論可參看這類著作。

例題和習題

447. 第514圖中，水平桿 AB，長度 $a=61\text{cm}$，重量 $W=1.82\text{kg}$，固定在一根長度 $l=61\text{cm}$ 的鋼綫下面。 鋼綫直徑等於 0.32cm，剪力彈性模數是 $G=8.46\times10^5\text{kg/cm}^2$，試不計鋼綫的質量和 AB 桿的切面面積，求 AB 的扭轉振動週期。

解：AB 桿對鋼綫的惰矩是

$$I=\frac{W}{g}\cdot\frac{a^2}{12}=\frac{1.82}{980}\cdot\frac{61^2}{12}=0.576$$

鋼綫對旋轉軸綫的面積極惰矩是

$$J=\frac{\pi d^4}{32}=10,3(10)^{-4}$$

把 I 和 J 等代入(74)式，就得到

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GJ}{Il}}=0,793\text{次/s}$$

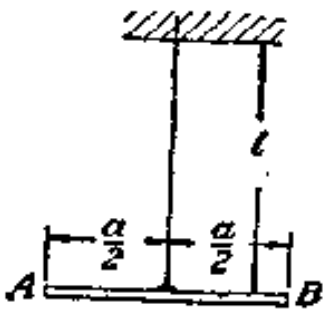
448. 設第 514 圖中 AB 桿的切面是半徑等於 r 的圓。試證明在這情形下，振動週率較上題所得結果要小，兩週率的比值將等於

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3r^2}{a^2}}}\approx\frac{1}{1+\frac{3}{2}\frac{r^2}{a^2}}$$

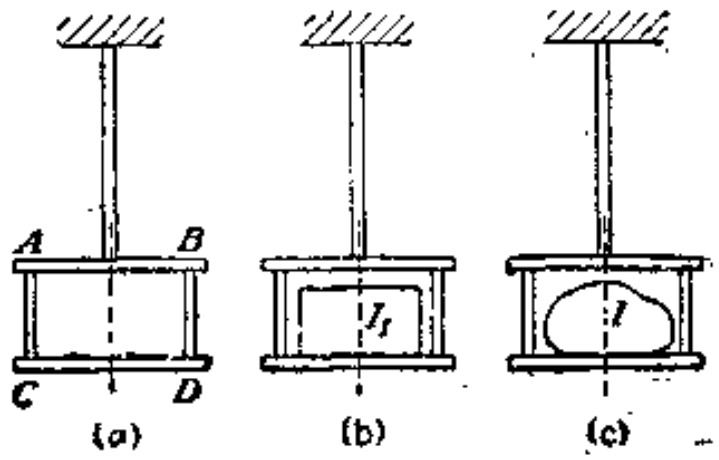
449. 第 512a 圖中，圓盤的半徑 $a=15\text{cm}$，重量 $W=25\text{kg}$，測出它的振動週率是每秒 1 次。現在改把另外一物體裝在直軸下面，發現振動週率是每秒 1,2 次，試求後一物體對於旋轉軸綫的惰矩等於多大？

(解：$I=1,99\text{kg}\cdot\text{s}^2\cdot\text{cm}$)

450. 如第 515 圖的扭擺。 AB，CD 是兩個圓盤，由 AC，BD 柱連接成功一個盒狀剛體。大小適當的任何形狀物體都可放在盒內作扭轉振動。 設盒中無物體時，扭轉週期等於 τ_0，若把一個已知對旋轉軸綫惰矩等於 I_1 的物體放在盒內振動，那週期就變成 τ_1。現在改將一個惰矩不知道的物體放在盒內，又測得振動週期等於 τ_2，試問 I 等於多少？



第 514 圖



第 515 圖

解：令 I_0 代表空盒對於旋轉軸綫的惰矩。因 $\tau_0=2\pi\sqrt{\frac{I_0 l}{GJ}}$，故 $I_0=\frac{GJ}{4\pi^2 l}\tau_0^2=K^2\tau_0^2$。其中 $K=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GJ}{l}}$。物體 I_1 放在盒中時，振動系統對於旋轉軸綫的惰矩等於 I_0+I_1，故

$$K^2\tau_1^2=I_0+I_1$$

也就是

$$I_1=K^2\tau_1^2-I_0=K^2(\tau_1^2-\tau_0^2)$$

可見

$$K^2=\frac{I_1}{\tau_1^2-\tau_0^2}$$

同樣理由，

$$I+I_0=K^2\tau_2^2$$

故

$$I=K^2(\tau_2^2-\tau_0^2)=I_1\frac{\tau_2^2-\tau_0^2}{\tau_1^2-\tau_0^2}$$

451. 第 513 圖中是一輪機的傳動鋼軸，軸長 4m，直徑 10cm。它一端裝透平機的輪葉，輪葉重 $W_1=1500$kg，惰矩半徑 $i_1=80$cm。另一端的推進器重 $W_2=500$kg，惰矩半徑 $i_2=50$cm。鋼料的剪力彈性模數 $G=8,1(10)^5$kg/cm²。如不計軸承摩阻力 試求這振動系統的自然週率等於多少？

(解：$f=7,05$次/s)

452. 假設第 513 圖中，直軸的直徑沿一半長度增大 10%，問扭轉振動的週率將較原來增加幾成？

解：因直徑增大，故直軸切面的極惰矩將較原來增加 $(1,1)^4:1=1,46$ 倍。一個已定扭力矩所生的旋轉角 θ，將因直徑的增大而減少，減少的比值等於 $\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2\times1,46}\right):\theta=0,842:1$，故直軸的扭力常數將按比值 $1:0,842$ 增大，從而振動週率將按比值 $1/\sqrt{0,842}=1/0.918=1.09$ 增大。可見週率較原來增大了 9%。

453. 設第 513 圖中扭擺的尺寸跟第 451 題中所給的數值相同，不過直軸直徑沿長度的 1/3 由 10cm 增加到 12,5cm。試問振動週率等於多大？

(解：$f=7,87$次/s)

90. 一般的力矩正比於旋轉角的旋轉運動

在工程問題中，常可遇到這樣的運動情形：就是一個可以繞一固定軸線旋轉的剛體，旋轉後，產一反作用力力矩，大小正比於剛體的旋轉角，像第 512a 圖的扭擺一樣。這一剛體若受到擾動而離開平衡位置，那它就將發生簡諧運動形式的旋轉振動。一般的問題的中心就在於如何決定這種振動的振動週期。

例如第 516 圖中的 OA 桿，一端由一個鉸連固定，另一端掛在一根彈力常數等於 k 的彈簧下面。AO 在平衡位置時，彈簧所受的拉力等於梁本身重量 W 的二分之一。如少許受到一些擾動，OA 桿顯然將發生對於 O 點的旋轉振動。命 θ 代表 OA 在振動中某一時刻 t 的旋轉角，這時刻的彈簧張力就將是

第 516 圖

$$S=\frac{W}{2}+k\cdot l\cdot\theta \qquad (a)$$

若 OA 樑切面面積很小,那末

$$\frac{W}{g}\ \frac{l^2}{3}\ \ddot{\theta}=W\cdot\frac{l}{2}-\left(\frac{W}{2}+kl\theta\right)l$$

也就是

$$\ddot{\theta}+\frac{3kg}{W}\theta=0 \qquad (b)$$

(b)式是一個跟(71)式相同的微分方程式,(71)式中的 p^2 等於(b)式中的 $\frac{3kg}{W}$,故根據(71)式計算結果,可知 OA 的振動週期是

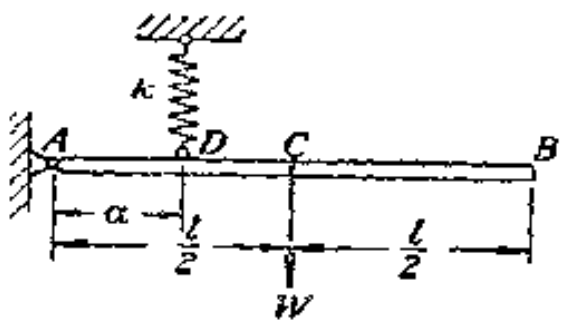
$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{3kg}} \qquad (c)$$

例題和習題

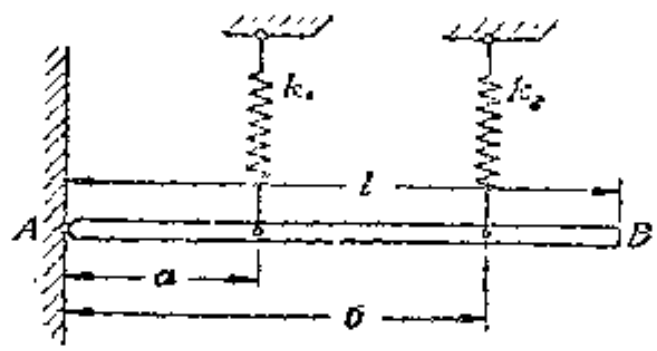
454. 第 517 圖中,細樑 AB 長 l,重 W。試根據圖中所給各值,求 AB 在鉛垂平面中作小振幅振動的振動週期 τ 等於多大?

$$\left(解:\ \tau=2\pi\ \frac{l}{2}\sqrt{\frac{W}{3kg}}\right)$$

455. 第 518 圖中,細樑 AB 長 l,重 W。彈力常數和各部份尺寸已在圖中註明。試求 AB



第 517 圖



第 518 圖

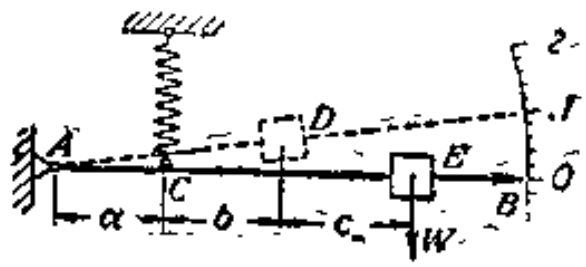
在圖平面中作小振幅振動的振動週期等於多大?

$$\left(\text{解: } \tau=2\pi\sqrt{\frac{WI^2}{3g(k_1a^2+k_2b^2)}}\right)$$

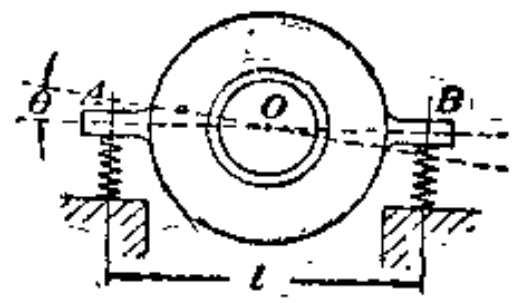
456. 如第 519 圖的裝置，重錘 W 若由 D 處沿指針 AB 移動到 E 處，指針 B 端就將降下鉛垂距離 0,25 cm。 AB 針的質量可以不計，長度等於 90 cm。 設圖中 $a=25$ cm，$b=25$cm，$c=38$cm，試求重錘在 E 處時，全系統的振動週期等於多大?

(解: $\tau=0,152$ s)

457. 單相電機中，轉子常發生有不斷變化的扭轉力矩作用在定子上。爲減少扭轉力矩所產生的地基振動起見，通常用彈簧墊在電機同基礎之間，如第 520 圖。所用彈簧應使定子扭轉振動的自然週率比作用力矩的變化週率小。 設彈簧共用四根，彈力常數都等於 k，定子對於旋轉軸綫 O 的慣矩等於 I，試求定子扭轉振動的自然週率 f 等於多少?



第 519 圖



第 520 圖

解: 設想有一力偶作用在定子上，使一邊彈簧壓縮，另一邊伸長。 這力偶若突然消失，定子頓然將對 O 軸發生扭轉振動。 命 θ 代表定子在 t 時刻的旋轉角，兩邊彈簧的壓縮及伸長就都等於 $\theta\frac{l}{2}$(假定 θ 甚小)，故各彈性力的大小全等於 $k\theta\frac{l}{2}$。 這些彈性力構成力矩等於 $2\frac{k\theta l}{2}\cdot l=k\theta l^2$ (因彈簧共有四根) 的力偶作用在定子上，故

$$I\ddot{\theta}=-kl^2\theta$$

也就是

$$\ddot{\theta}+\frac{kl^2}{I}\theta=0$$

因此，得

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kl^2}{I}}$$

458. 第 521 圖中，CD 是一根油絲彈簧，AE 桿相當於鐘錶中的擺輪。 靜止時，AE 跟 x 軸切合；如 AE 發生一旋轉角 θ，那末油絲彈簧因變形關係，將於圖中 C 處產生一力矩和一作用力作用在 AE 上。 其中，作用力很小，可以不計。 設 B 代表油絲彈簧的彈力彎曲力矩常數 (使單位長度油絲一端切面對於另一端切面旋轉一單位弧度角所需的彎曲力矩)，油絲長度等於 l，AE 桿對 O 點的慣矩等於 I，試決定 AE 桿的振動週期。

解: C 處只受力矩作用，表示油絲只有單純的彎曲發生。 若以油絲長度 l 除 AE 的旋轉

角 θ（也就是油絲 C 端切面的旋轉角），可得油絲的曲率變化 $\frac{\theta}{l}$，故所引起的沿油絲全長不變的彎曲力矩 M 應等於 $B\frac{\theta}{l}$。此力矩傳導到 AE 桿上使 AE 回復原來的平衡位置。因此，可得

$$I\ddot{\theta}=-(B/l)\theta$$

或

$$\ddot{\theta}+\frac{B}{Il}\theta=0$$

故所求振動週期是

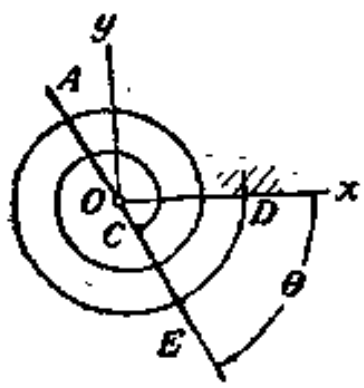
$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{Il}{B}}$$

可見增減油絲的長度 l，或增減油絲的彈力彎曲力矩常數，就可以調節 AE 的週期。由上式還可看到，週期跟擺幅大小及其變化無關。

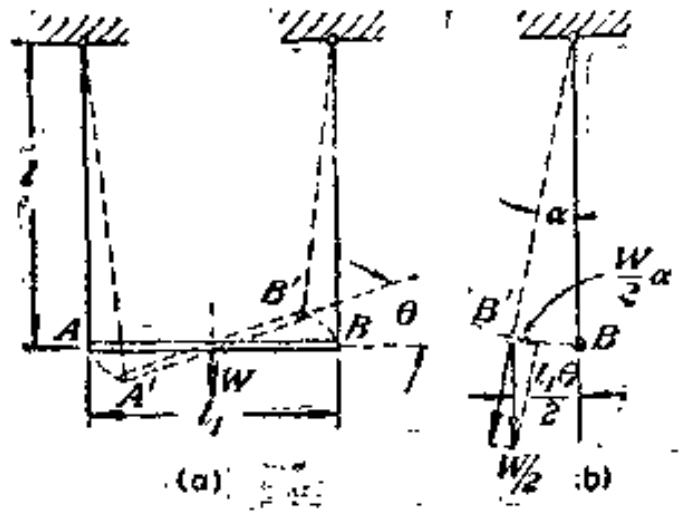
通常鐘錶擺輪的擺動現象就是如此。擺輪的作用跟鐘擺相同，不過擺論在錶或船鐘中都好用，鐘擺只適用於固定不動的時鐘中。

以上計算中，因 C 點的作用力未加考慮，所以實際上，擺輪週期不能不跟擺幅的大小、變化有關。因此，在鐘錶中仍舊需要讓擺幅保持固定不變。

459. 試求第 522 圖中 AB 桿在水平平面作微小振幅旋轉振動的週期。



第 521 圖



第 522 圖

解：AB 桿的旋轉角等於 θ 時，懸繩跟鉛垂線所成的交角是

$$\alpha=\frac{l_1\theta}{2l} \qquad (e)$$

分解懸繩張力 $\frac{W}{2}$ 為鉛垂分力和水平分力如第 522b 圖。其中水平分力約等於 $\frac{W}{2}\alpha$，折成的力偶，力矩等於 $\frac{W}{2}\alpha l_1$ 作用在 AB 上使 AB 回復原來平衡位置，故

$$\frac{W}{g}\ \frac{l_1^2}{12}\ddot{\theta}=-\frac{l_1^3W}{4l}\theta$$

或

$$\ddot{\theta}+\frac{3g}{l}\theta=0$$

因此，所求振動週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}} \tag{f}$$

相當於擺長等於 $l/3$ 的單擺週期。

460. 如果上題中的兩根懸綫的位置改在 AB 桿的兩個三等分點處，問振動週期將增加多少倍？

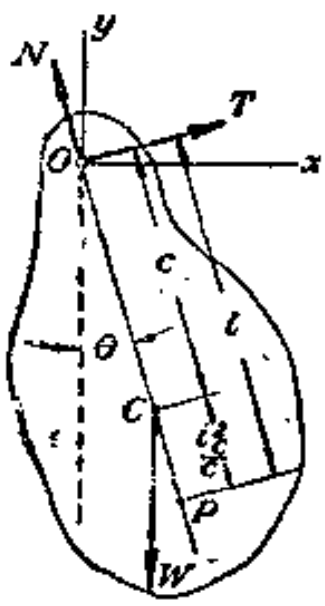
（解：三倍）

461. 假設第 522 圖中的兩根懸綫都不鉛垂而是向外跟鉛垂綫成 β 交角，問 AB 的振動週期又將等於多大？

$$\left(\text{解：}\ \tau=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\beta}{3g}}\right)$$

462. 一個水平的細圓環，由幾根長 l 的懸綫懸掛在空中。懸綫的位置平均分佈在圓環周圍。如果圓環在水平平面中發生旋轉振動，試證明它的振動週期 $\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$。

91. 複擺



第 523 圖

任何一個剛體，如果可以繞一根垂直於 xy 平面的任意水平軸線 O 自由旋轉，就稱爲複擺（第 523 圖）。複擺在平衡位置時，它的重心 C 一定要在通過懸點 O 的鉛垂線上，懸點反作用力才能跟重力 W 抵消；否則無法平衡。若把複擺旋轉一個角度，然後放任它自由運動，那它就將發生繞 O 點的來回擺動。產生這種擺動的作用力矩是（不計摩阻力的影響）

$$M=-Wc\sin\theta$$

式中 c 指懸點 O 到重心 C 的距離。以上式代入(68)式，得

$$\frac{W}{g}i_o^2\ddot{\theta}=-Wc\sin\theta \tag{a}$$

其中 i_o 指複擺對於 O 點的慣矩半徑。消去(a)式的 W，並假定旋轉角 θ 很小，使 $\sin\theta\approx\theta$，那末

$$\ddot{\theta}+\frac{cg}{i_o^2}\theta=0 \tag{b}$$

把這一方程式跟單擺運動方程式

$$\ddot{x}+\frac{g}{l}x=0$$

比較一下，就可知：複擺的振動週期若跟擺長等於 l 的單擺週期相等，那末，應該

$$l=\frac{i_o^2}{c} \tag{75}$$

這 l 稱爲複擺的當量擺長，複擺振動週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{c}$$

命 i_c 代表複擺對於重心 C 的惰矩半徑，因

$$i_o^2=i_c^2+c^2$$

故(75)式又可化爲

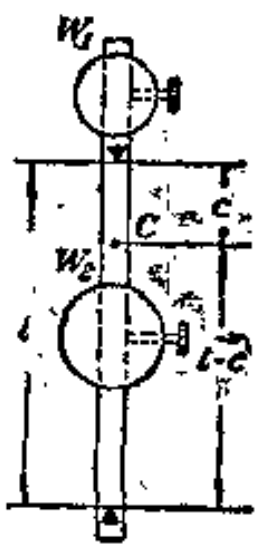
$$l=c+\frac{i_c^2}{c} \tag{75'}$$

可見當量擺長必然大於懸點 O 到重心 C 的距離 c，如使第 523 圖中通過重心 C 的直線 OP 長度等於 l，這 P 點就稱爲複擺的**振動中心**。

根據(75)式，可知

$$c\,(l-c)=i_c^2 \tag{d}$$

此式說明，c 與 $(l-c)$ 是互相對稱的；如果掉過來以振動中心 P 爲懸點，原來懸點 O 就變成複擺的振動中心，所以懸點跟振動中心可以互相掉換而複擺週期不變。應用這一互換性，我們可製造任意指定週率的複擺。第 524 圖是這種複擺的構造形式。如指定週率的當量擺長算出來是等於 l，擺上兩相向刃口的距離就製成 l。另外以可以移動調節的兩重體 W_1 和 W_2 裝置在擺上。調節這兩個重體，使複擺以兩刃口爲懸點的擺動，週期完全相同。這樣，兩刃口就互相是複擺的懸點和振動中心，複擺的當量擺長就等於兩刃口的距離 l，從



第 524 圖

而，振動週期完全跟指定的相符。

複擺原理可以應用來測定物體對於一定方向的重心軸線的惰矩。以物體上任意一點作爲懸點，精密量出懸點到物體重心的距離。觀察得小振幅的擺動週期後，就可算出當量擺長等於多少。之後，又以物體上另一點作爲懸點再同樣算出它的當量擺長。經過多次觀察，我們便可精確決定物體對於重心軸線的惰矩。因每一次觀察可得到一個當量擺長 l 和懸點重心間的距離 c，應用 $i_c^2=c(l-c)$ 公式就可求到每一次的 i_c 值；根據多次觀察，取得 i_c 的平均值，結果自然十分精確。惰矩原等於物體重量 W 跟 i_c^2 的乘積，因之，也隨而精密測定。

若 $c=0$，當量擺長 l 就將等於無限大；換句話說，如複擺以重心作爲懸點，週期就會變成無限大，毫無振動發生。$c=\infty$，l 也等於無限大，可見在 $c=0$ 和 $c=\infty$ 中間，l 必有一最小值（相當於複擺最小的週期或最高的週率），要決定此最小值，可將 $l=c+\frac{i_c^2}{c}$ 對變數 c 微分，令導函數等於零就得

$$\frac{dl}{dc}=1+\left(-\frac{i_c^2}{c^2}\right)=0$$

故

$$c=i_c \qquad (c)$$

這結果說明：如果懸點到重心的距離 c 恰巧等於惰矩半徑 i_c，複擺就週期最小，週率最高。

例題和習題

463. 一複擺，由一個半徑等於 a 的圓球和一根長度等於 b 的細桿連接構成。若以細桿的自由端作爲懸點，問當量擺長 l 等於多大？

解：不計細桿的質量可得：

$$c=a+b, \qquad i_c^2=\frac{2}{5}a^2$$

故由(75′)式，可得

$$l=a+b+\frac{2}{5}\frac{a^2}{a+b}$$

464. 一圓柱形複擺，長度等於 b，半徑等於 a，以一端作爲懸點作小振幅擺動，問它的週期等於多大？

解：複擺對於懸軸的惰矩是

$$I_o=\frac{W}{g}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{12}\right)+\frac{W}{g}\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{W}{g}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{3}\right)$$

故

$$i_o^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{3}$$

它的當量擺長是

$$l=\frac{i_o^2}{c}=\frac{2}{3}b+\frac{a^2}{2b}$$

週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}b+\frac{a^2}{2b}\right)}{g}}$$

若式中 a 比 b 小得多，根號內第二項可以不計，那末，

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{2b}{3g}}$$

465. 設上題中長卜的圓擺不是圓柱形而是一個邊長等於 a 的正方切面柱體，問它的小振幅擺動週期等於多大？

$$\left(\text{解：}\tau=2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}b+\frac{a^2}{6b}\right)}{g}}\right)$$

466. 第 525 圖的複擺，細桿長 b 重 W_1，下端接一個半徑等於 a 的重 W_2 圓盤，細桿的切面面積可以不計，問當量擺長 l 等於多少？

解：複擺對於懸軸的慣矩是

$$I_o=\frac{W_2}{g}\cdot\frac{a^2}{2}+\frac{W_2}{g}(a+b)^2+\frac{W_1}{g}\frac{b^2}{3}$$

重心到懸軸的距離 c 是

$$c=\frac{W_2(a+b)+\frac{W_1b}{2}}{W_1+W_2}$$

故

$$l=\frac{\frac{W_2a^2}{2}+W_2(a+b)^2+\frac{W_1b^2}{3}}{W_2(a+b)+\frac{W_1b}{2}}$$

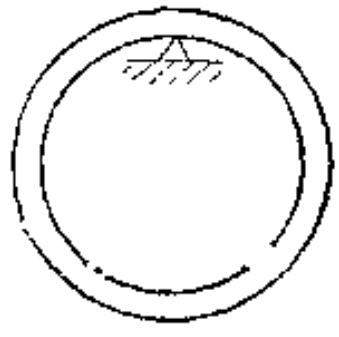
467. 第 525 圖中的複擺 $b=30{,}58\text{cm}$，$a=12{,}70\text{cm}$，$W_1=0{,}227\text{kg}$，$W_2=1{,}362\text{kg}$。問它的小振幅擺動的週期 τ 等於多大？

(解：$\tau=1{,}32\text{s}$)

168. 第 526 圖中，是一個圓環所成的擺，環的內徑是 99cm。它在圖平面中小擺幅振動的週期是 $\tau=2.98s$，問這圓環對於中心的慣矩半徑等於多大？

(解：$i_c=107cm$)

第 525 圖



第 526 圖

169. 第 527 圖中是一原動機的推桿，重量 $W=1.36kg$，以圖中刃口作爲懸點，在圖平面中作小振幅擺動。測出來的振動週期 $\tau=1.05s$，試求這一推桿對於曲軸中心的慣矩 I_o。

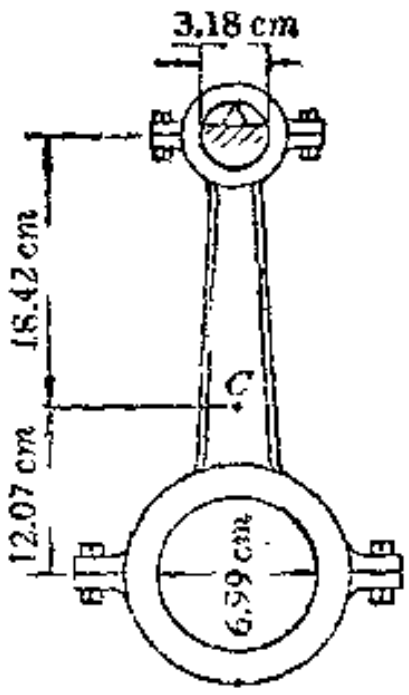
(解：$I_o=0.407kg\text{-}s^2\text{-}cm$)

47. 如第 528 圖的裝置。圖中質點 A 離開它的極定平衡位置後，開始作週期振動。如質點 A 重 W；OA 桿長 l，重量可以不計；旋軸 BD 跟鉛垂綫所成交角等於 α，重量也可不計，試求質點 A 的振動週期等於多大？

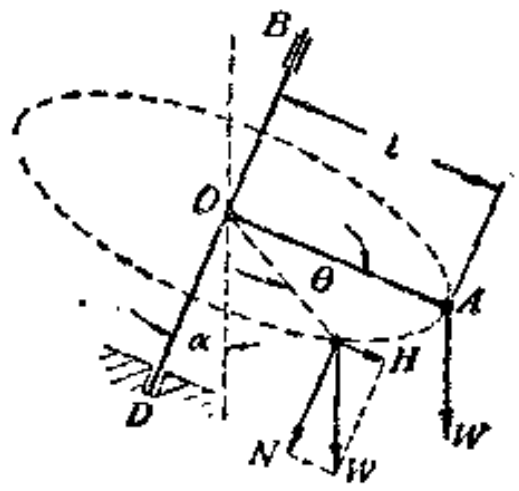
解：命 θ 代表質點所在位置同原來穩定平衡位置所對的圓心角。質點受到的重力 W 可分解爲：(1) 分力 $H=W\sin\alpha$，平行於 OA；(2) 分力 $N=W\cos\alpha$，平行於 BD 軸。兩分力中只有 H 產生對於 BD 軸的力矩 $M=-W\sin\alpha\,(l\sin\theta)$，負號指力矩作用方向與旋轉角 θ 的增加方向相反。因此，

$$\frac{W}{g}l^2\ddot{\theta}=-W\,l\sin\alpha\sin\theta \qquad (f)$$

若 θ 很小，可命 $\theta=\sin\theta$，那末(f)式可化爲



第 527 圖



第 528 圖

$$\ddot{\theta}+\frac{g\sin\alpha}{l}\theta=0 \qquad (g)$$

故週期 $$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}$$

把 (g) 式跟單擺運動方程式比較一下，可知這一振動相當於擺長等於 $l/\sin\alpha$ 的單擺。調節旋軸與鉛垂綫的交角就可使相應單擺的擺長發生變化。α 很微小時，振動週期很大，週率極低，故用來記錄低週率振動，如地震和高大建築因風力的擺動等最爲適宜。

471. 第 529 圖中的長方薄片可以繞 AB 軸自由旋轉，設 AB 軸跟鉛垂綫的交角等於 α，薄片重量等於 W，長寬各等於 b 和 a，試求它小振幅擺動的週期等於多大？

$$\left(\text{解：}\ \tau=2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g\sin\alpha}}\right)$$

472. 假設上題的長方薄片是一個邊長等於 a 的等腰三角形，一邊跟 AB 軸重合，問振動週期將等於多大？

$$\left(\text{解：}\ \tau=2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}a}{4g\sin\alpha}}\right)$$

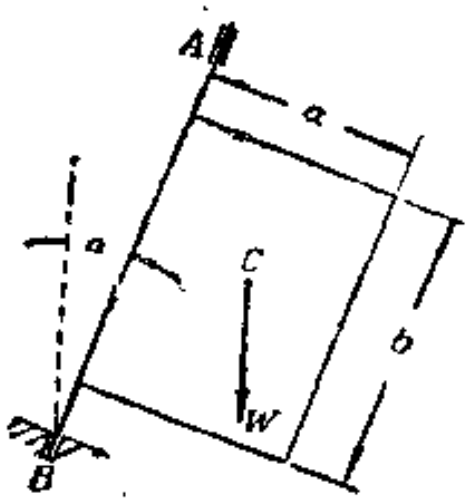
92. 旋轉運動的慣性力

第 530a 圖中是一個聯合系統。命 θ 代表圓盤順時針方向的旋轉角，S 代表線中張力，不計摩擦力，可得圓盤的旋轉運動方程式如下：

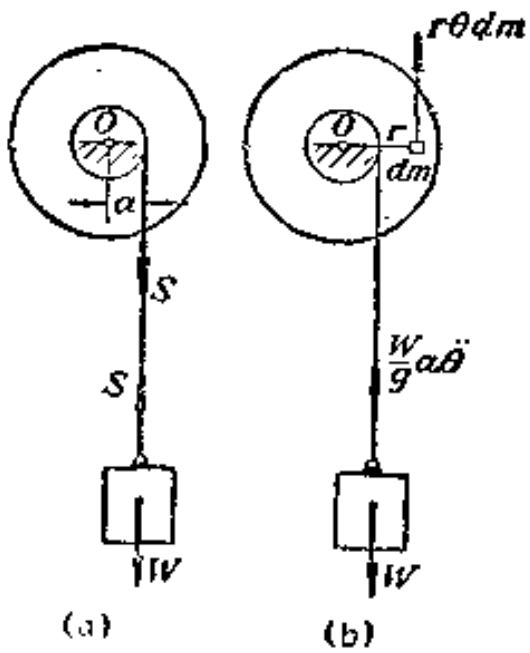
$$I\ddot{\theta}=Sa \qquad (a)$$

此外，重體 W 的直線移動方程式是

$$\frac{W}{g}a\ddot{\theta}=W-S \qquad (b)$$



第 529 圖



第 530 圖

其中，$a\ddot{\theta}$ 是重體的直線加速度，也就是圓盤盤軸邊上一點的切線加速度。若消去 (a) (b) 兩式的 S，就可得整個聯合系統的運動方程式如下：

$$\left(I+\frac{W}{g}a^2\right)\ddot{\theta}=Wa \qquad (c)$$

由(c)式已經可以看出：一個聯合系統的運動問題只要應用慣性力原理，就可以簡化爲一個動力平衡問題。攷察動力平衡時，可將全部運動系統當作是一個整體；在實際作用力對於某一旋轉軸線的力矩外，再加上各質點的慣性力對於同軸的力矩，就可決定動力平衡方程式。例如第 530 圖中，設圓盤中任一質點的質量是 dm，這質點到旋轉軸線 O 的距離是 r。它的切線方向加速度等於 $r\ddot{\theta}$，慣性力因之等於$-r\ddot{\theta}dm$。此外，重體 W 的慣性力是$-\frac{W}{g}a\ddot{\theta}$。若以 O 軸作爲力矩中心，就得

$$Wa-\frac{W}{g}a^2\ddot{\theta}-\int r^2\ddot{\theta}\,dm=0,$$

也就是

$$\left(I+\frac{W}{g}a^2\right)\ddot{\theta}=Wa \qquad (d)$$

其中 I 指圓盤對於 O 軸的慣矩。此式是用慣性力原理導出的，跟(c)式完全符合。(d)式還可以應用虛位移原理來決定。命圓盤繞 O 點的微小旋轉角 $\delta\theta$ 代表虛位移，並假定旋轉方向跟時針相同，根據虛位移原理，可直接求得

$$\left(W-\frac{W}{g}a\ddot{\theta}\right)a\delta\theta-\int r\ddot{\theta}dm\cdot r\delta\theta=0$$

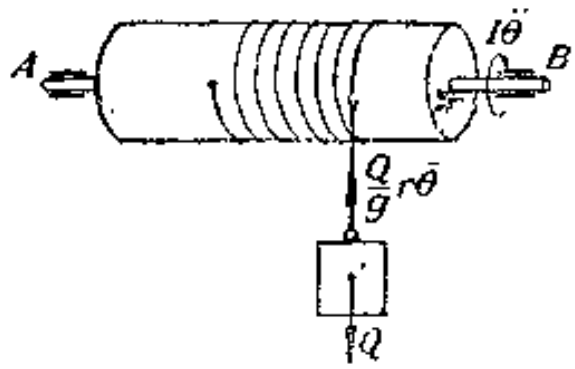
也就是

$$\left(I+\frac{W}{g}a^2\right)\ddot{\theta}=Wa$$

結果跟(d)式完全相同。虛位移原理在解決動力平衡問題中，非常有用。因爲由虛位移原理來列立動力平衡方程式，全系統的內力可以完全不必攷慮，所以十分簡便。

例題和習題

473. 第531圖中是一個半徑等於 r、重量等於 W 的滾子。它的旋軸跟軸承間摩阻力極小，可以不計。運動開始前，滾子上繞有 n 匝弦繩。繩的一端固定在滾子上。另外一端掛一個重體 Q。試問重體 Q 下降，n 匝弦繩全部解脫時，滾子的角度速等於多大？



第 531 圖

解：考察全系統動力平衡時，命所有作用力（包括慣性力在內）對於 AB 軸線的力矩和等於零，就可得

$$Qr-\frac{Q}{g}r^2\ddot{\theta}-I\ddot{\theta}=0$$

但 $I=\frac{W}{g}\frac{r^2}{2}$，故上式又可化爲 $\left(\frac{W}{g}\frac{r^2}{2}+\frac{Qr^2}{g}\right)\ddot{\theta}=Qr$，或

$$I_s\ddot{\theta}=Qr$$

其中

$$I_s=\frac{Wr^2}{2g}+\frac{Qr^3}{g}$$

I_s 可當作整個運動系統的慣矩看待。故 $I_s\ddot{\theta}=Qr$ 可以認爲是一個在 Qr 力矩作用下的剛體的旋轉運動方程式。因 Qr 固定不變，故可直接引用 § 88 的(69)(70)兩式：以 $\theta=2\pi\cdot n$ 代入(70)式中，並命 $\dot{\theta}_0=\theta_0=0$ 就得

$$t=\sqrt{\frac{4\pi nI_s}{Qr}}$$

這就是解脫全部弦繩所需要的時間。因此，所求的旋轉角速度是

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{4\pi nQr}{I_s}}=2\sqrt{\frac{2\pi ngQ}{(W+2Q)r}}$$

474. 第405圖的兩重體 W_1 和 W_2 在圖中位置開始運動。滑車重量等於 W_3。如不計摩阻力，試問兩重體在交錯時，相對速度等於多大？

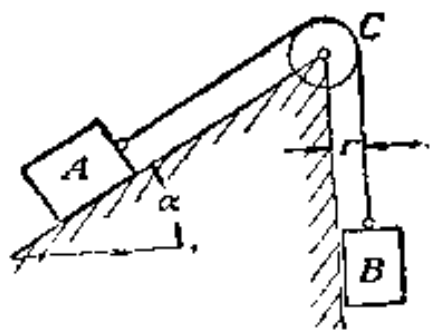
$$\left(\text{解：}\ v=2\sqrt{\frac{(W_1-W_2)cg}{W_1+W_2+\frac{W_3}{2}}}\right)$$

475. 第532圖中，物體 A 的重量 $W_a=394\text{kg}$。物體 B 的重量 $W_b=293\text{kg}$。滑車半徑 $r=30{,}5\text{cm}$，重量 $W_a=145{,}5\text{kg}$。斜面傾斜角 $\alpha=30°$，接觸面的摩阻係數 $\mu=0{,}1$，滑車軸承所發生的摩阻力力矩等於 11,54kg cm。假定滑車與繩索間無滑動，試求：(1)兩物體的加速度 a，(2)繩中最大張力 S_{max}。

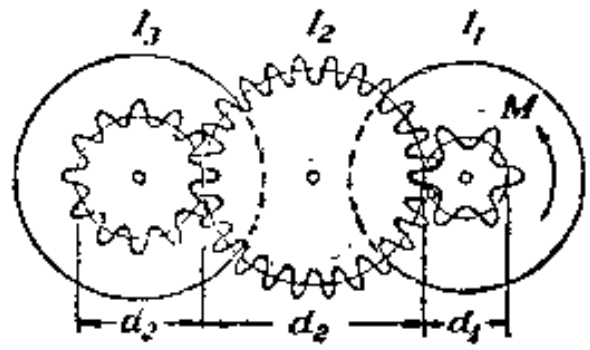
(解：$a=74\text{cm/s}^2$；$S_{max}=270\text{kg}$)

476. 第 533 圖的齒輪傳動機構，假定機械效率等於 1，試求惰矩等於 I_1 的齒輪受一固定的扭力力矩 M 作用時，惰矩等於 I_3 的齒輪，角加速度 $\ddot{\theta}$ 等於多大？ 圖中 I_2 是中間齒輪的惰矩，所有惰矩全指齒輪對本身旋轉軸綫而言。 三齒輪的直徑比是 $d_1:d_2:d_3=1:4:2$。

$$\left(\text{解：}\ \ddot{\theta}_3=\frac{M}{2I_1+\frac{1}{8}I_2+\frac{1}{2}I_3}\right)$$



第 532 圖



第 533 圖

93. 旋轉機件的內應力

剛體旋轉時，各部份所產生的慣性力在旋轉半徑方向的分力，通常稱爲離心力。 機件因離心力所引起的內應力常很可觀，所以設計機件必須使機件尺寸適當，以減少或擔當這種內應力。

處理旋轉機件的內應力問題，以用慣性力原理爲最簡便。 我們只要計算機件中所有各質點的慣性力，然後攷察全系統的動力平衡，問題就可以解決。 不過機件中各質點的慣性力，常常取連續性的分佈力的形式所以需要應用 § 29 和 § 35 所討論的方法處理。

例題和習題

477. 第 534 圖中，直軸 AB 的中點 C 處有一水平桿 CD，以固定角速 ω 繞軸旋轉。 不計 CD 重量 W 所產生的靜力力矩。 試求 AB 軸所受的最大彎曲力矩。

解：令 q 代表 CD 桿單位長度的重量，圖中 dx 部份的慣性力是 $\frac{qdx}{g}\omega^2x$。 整個 CD 桿的慣性力因此是

$$\int_0^l \frac{q\omega^2}{g}xdx=\frac{q\omega^2}{2g}l^2=\frac{W}{g}\omega^2\frac{l}{2}$$

這慣性力在水平方向，作用於直軸的中點。 從上式可看到，CD 桿傳導到 AB 軸的全部慣性力，完全跟 CD 的質量全部集中於 CD 重心點的情形一樣。 作用力既經決定，AB 所受的最大彎曲力矩顯然是

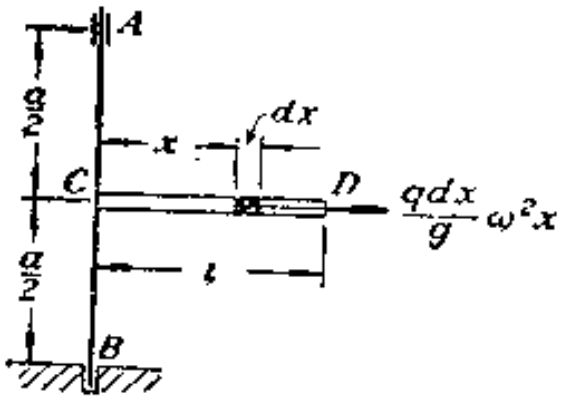
$$M_{max}=\frac{W}{g}\frac{\omega^2 l}{2}\frac{a}{4}$$

478. 第 535 圖中是一個車輪的輪毂，四週有幾根輻撐。車輪以固定角速 ω 旋轉。每根輻撐傳導到軸心的輻射方向慣性力是 S。試證明各輻撐加於軸心的 S 力跟輻撐全部質量集中於它本身重心時所產生的相同。

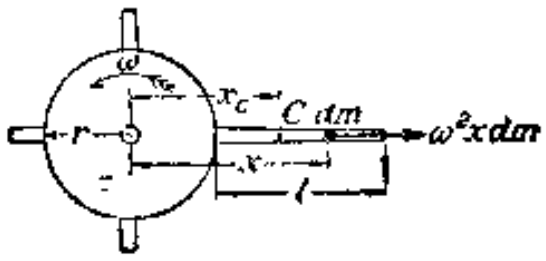
證：輻撐上任意一微分質量 dm 的慣性力是 $\omega^2 xdm$，方向在輻射方向。每一輻撐的全部慣性力因此是

$$S=\int_r^{l+r}\omega^2 xdm=\omega^2\int_r^{l+r}xdm=\frac{W}{g}\omega^2 x_c$$

這結果說明，輻撐的全部慣性力確跟全部質量集中於重心所產生的相同。



第 534 圖



第 535 圖

479. 一透平機的鋼製渦輪，輪葉片切面均一，長度是25,4cm，葉根處的輪毂半徑是76,2cm，轉數是每分鐘 1800 次，輪葉的單位體積重量是 0,00785kg/cm³。試求離心力所引起的葉片最大拉應力等於多大？

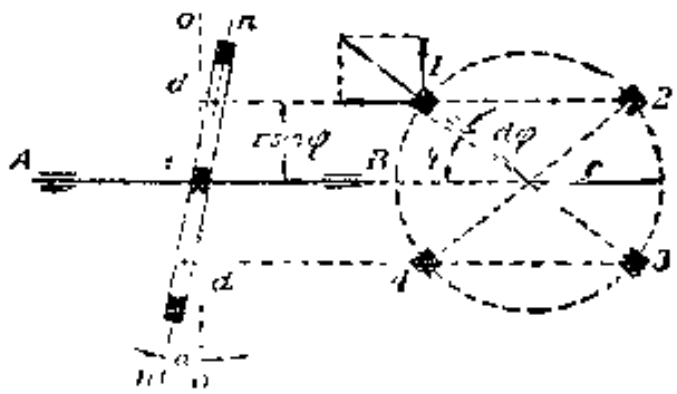
(解：$\sigma=642\text{kg/cm}^2$)

480. 假設上題中葉片切面尺寸並不均一，而是逐漸由葉端直綫增加，到葉根處輪葉的切面積恰等於葉端切面的一倍。試問最大的拉應力又將等於多大？

(解：$\sigma=474\text{kg/cm}^2$)

481. 第 536 圖中，飛輪跟水平傳動軸的垂直平面有微小交角 α，試求此飛輪以固定角速 ω 旋轉時，對於傳動軸 AB 所生的彎曲力矩等於多大？(假定飛輪質量全部集中分佈於飛輪邊的中平面內一半徑等於 r 的圓周上)

解：圖中 $n-n$ 代表飛輪的中平面，$o-o$ 代表過圖中 C 點而跟傳動軸垂直的平面。$n-n$



第 536 圖

和 $o-o$ 間平面的交綫就是飛輪的水平直徑。飛輪旋轉角 φ 以此直徑作爲起綫，命 $d\varphi$ 代表飛輪輪邊任一微分質量 dm 所跨之中心角。

這一微分質量的慣性力因此是 $\frac{qrd\varphi}{g}\omega^2 r$，其中 q 指分佈在輪邊中綫的單位長度上的飛輪重量。這慣心力可以分解爲兩分力：(1)水平分力，大小等於

$$\frac{qr^2d\varphi}{g}\omega^2\cos\varphi$$

(2)鉛垂分力，大小等於

$$\frac{qr^2d\varphi}{g}\omega^2\sin\varphi$$

因圖中 1,2,3,4 處各微分質量 dm 的慣性力都可以如此分解，故在 1 和 2 或 3 和 4 處的慣性力的水平分力都將互相抵消。1 和 2 處慣性力的鉛垂分力的合力則等於

$$\frac{2qr^2d\varphi}{g}\omega^2\sin\varphi$$

這合力的作用綫離 $o-o$ 平面的距離是 $d=\alpha r\sin\varphi$。同樣情形，3 和 4 處慣性力的鉛垂分力所成合力，大小與上一合力相等，方向相反，作用綫在 $o-o$ 平面的另一方，距離 $o-o$ 平面的距離也等於 d。故四鉛垂分力將構成一力臂等於 $2d$ 的力偶，力矩等於

$$\frac{2qr^2d\varphi}{g}\omega^2\sin\varphi\cdot 2r\alpha\sin\varphi \qquad (a)$$

把所有如此的力偶，由 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\pi/2$，合成爲一個合成力偶。這力偶就代表飛輪通過軸心傳導到旋軸上的作用力系，它的力矩等於

$$M=\int_0^{\pi/2}\frac{2qr^2d\varphi}{g}\omega^2\sin\varphi\cdot 2r\alpha\sin\varphi=\frac{W}{2g}\omega^2r^2\alpha$$

飛輪旋轉時這力偶的作用面也隨着旋轉，始終保持跟 $n-n$ 和 $o-o$ 平面的交綫垂直。

482. 試畫出第 537a 圖中，當 CD 桿以固定角速 ω 旋轉時，直軸 AB 上的彎曲力矩圖。CD 桿長 $2l$ 重 W，長軸跟 AB 成 α 交角。

解：第 537a 圖中，兩微分長度 dx 處所生的離心力將構成一力偶，力矩等於

$$\frac{qdx}{g}\omega^2x\sin\alpha\cdot 2x\cos\alpha=\frac{q\omega^2\sin 2\alpha}{g}x^2dx$$

所以 CD 桿上所產生的全部力偶的總力矩是

$$M=\int_0^l\frac{q\omega^2\sin 2\alpha}{g}x^2dx=\frac{ql^3\omega^2}{3g}\sin 2\alpha=\frac{W\omega^2l^2}{6g}\sin 2\alpha$$

彎曲力矩圖 $AEFB$ 因此應如第 537b 圖。題中 q 指 CD 桿單位長度的重量。

483. 假設第 534 圖中，水平桿 CD 的固定轉速每分鐘 $n=120$ 次。另外有一扭力力矩 M 作用在 AB 軸上，使 CD 在四秒鐘內歸於靜止。試求角加速度所引起的作用於 CD 桿的最大彎曲力矩等於多大？假定 CD 本身重量所引起的彎曲力矩可以不計。

(解：$M_{max}=\frac{\pi}{3}\frac{W}{g}l^2$)

484. 第 538 圖中，一組長 l 的組桿 OA 在圖平面中繞水平軸線 O 擺動。求 OA 受到的最大彎曲力矩等於多人？

解：假定擺動的發生是由於 CD 桿最初跟鉛垂線有一個微小的交角 α_0。這樣，擺動的方程式就是

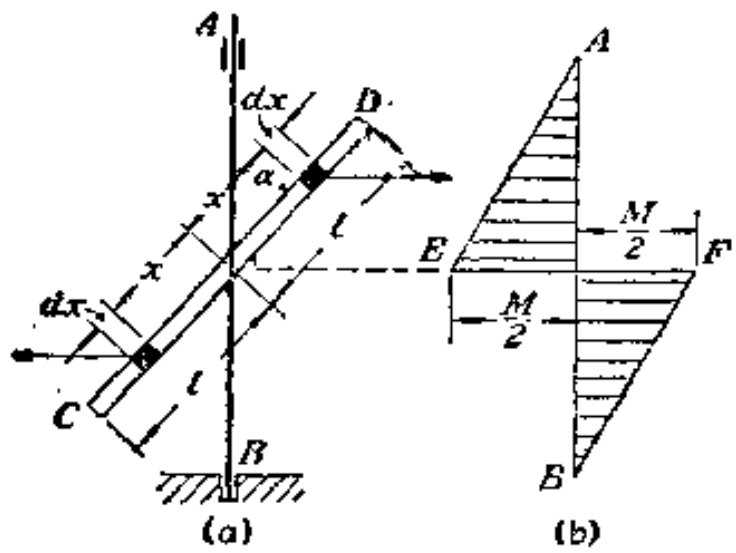
$$\theta=\theta_0\cos pt \tag{b}$$

其中

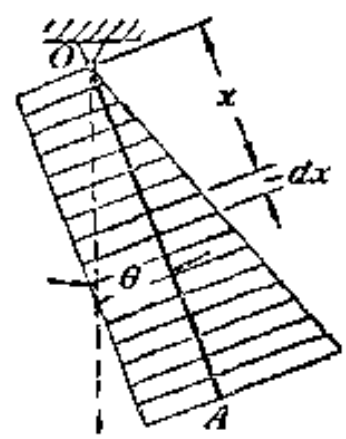
$$p=\sqrt{\frac{gc}{i_0^2}}=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}} \tag{c}$$

質點慣性力在 OA 桿本身方向的彎曲效應極小，可以不計；質點慣性力在切綫(指擺動時，各質點運動路綫的切綫，由就是 OA 的垂直綫)方向的分力是

$$-\frac{qdx}{g}\ddot{\theta}x=\frac{q}{g}\theta_0 p^2\cos pt\cdot xdx \tag{d}$$



第 537 圖



第 538 圖

此中 q 指 OA 桿單位長度的重量。(d) 式說明，各慣性力的切綫分力沿 OA 軸的分佈是 x 的直綫函數。這一分佈情形可由圖中的三角形部份來表示。除此之外，還有重力W在切綫方向的分力沿棒軸均勻分佈着，由圖中的長方形表示。此分力是

$$q\sin\theta dx\approx q\theta_0\cos pt\cdot dx \tag{e}$$

按慣性力原理，OA 桿應在圖中的分佈力以及 O 點反作用力作用下構成動力平衡，所以現在可以應用靜力學平衡公式來決定 OA 桿中的彎曲力矩。由荷重圖可知，桿中 x 處切面的切力是

$$Q=\frac{3}{2}q\theta_0\cos pt\frac{l}{2}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)-q\theta_0\cos pt\,(l-x)$$

$$=q\theta_0\cos pt\,(l-x)\left(\frac{3}{4}\frac{l+x}{l}-1\right) \tag{f}$$

觀察(f)式，可知切力 $Q=0$ 的切面在

$$x=l \quad 和 \quad x=\frac{l}{3} \tag{g}$$

兩處，可見最大彎曲力矩就在 $x=l/3$ 的切面上，它的大小是

$$M_{max}=\int_{\frac{l}{3}}^{l}\left(\frac{q\theta_0}{g}p^2x-q\theta_0\right)\left(x-\frac{l}{3}\right)\cos pt\cdot dx$$

$$=\frac{q\theta_0 l^2\cos pt}{9}\left(\frac{14p^2l}{9g}-2\right) \qquad (h)$$

由(h)式又可看到，M_{max} 的最大值又將在 $\cos pt=1$ 時發生；換句話說，OA 在擺動中的極端位置，M_{max} 將取絕對最大值。以(c)式 p^2 值代入(h)式，就得到這最大的彎曲力矩，是

$$M_{max}=\frac{q\theta_0 l^2}{27}$$

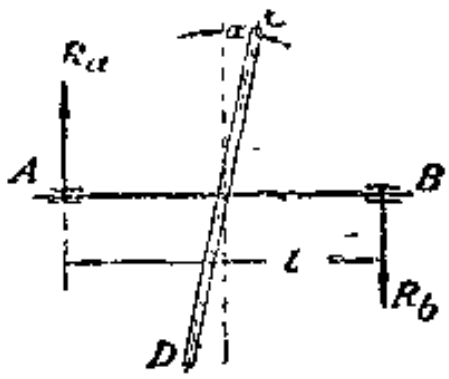
根據以上討論，可知在擺動中，OA 上每一切面都有彎曲力矩作用。OA 之所以能保持近似的直綫形狀，只是由於本身的抗彎性。如果 OA 是一根同樣長度的索鍊，那它就不能抵抗彎曲，在擺動中必然要變成曲綫形狀。振動週率因而不會跟 OA 桿相同。

485. 第 539 圖中，圓盤 CD 的半徑等於 r，重量等於 W，固定在一根 AB 軸上。盤面跟 AB 的垂直平面成微小的交角 α。假 AB 軸以固定角速 ω 旋轉，問旋轉所引起的 AB 兩軸承的反作用力等於多大？

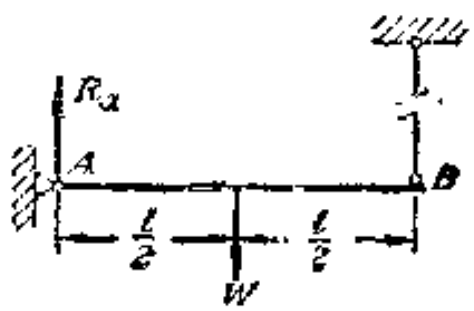
(解：$R_a=R_b=\frac{W}{g}\omega^2\frac{r\alpha}{4l}$，作用方向如圖)

486. 求第 540 圖中，B 處繩綫被切斷的一剎那，A 處的反作用力等於多大？

(解：$R_a=W/4$)



第 539 圖

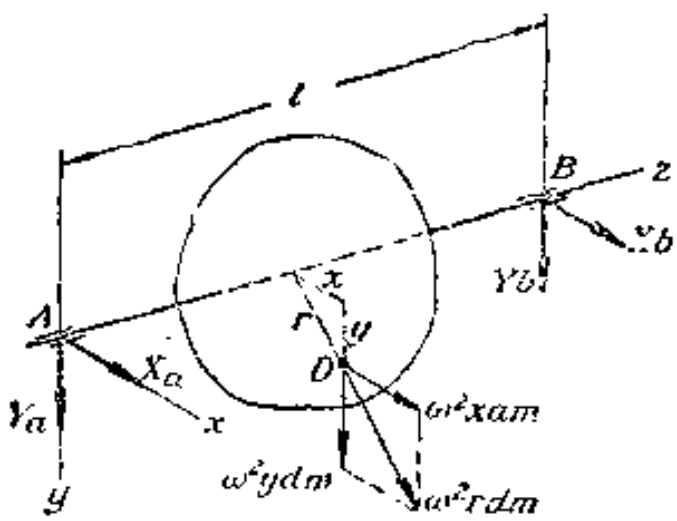


第 540 圖

94. 固定旋軸上的反作用力

現在觀察一個可以繞固定旋軸自由旋轉的任意形狀物體。例如第 541 圖的物體，它可以繞水平旋軸 AB 自由旋轉。如不計軸承摩阻力，這一物體在重心取最低位置時就達到穩定平衡。兩軸承 A,B 加於旋軸的反作用力，只要用靜力學方法就能決定。假定 AB 軸上另有一扭力力矩作用，物體自然要發生一相當角度的旋轉，使重力可構成一個跟

扭力力矩相等、相反的力矩來維持物體的平衡。此時兩軸承的反作用力仍跟物體在穩定平衡時一樣，並無變化。



第 541 圖

即使物體不復靜止，而是以固定角速 ω 繞 AB 軸旋轉，AB 軸上的扭力力矩的總和必定仍舊等於零；否則就會有角加速度發生。不過，物體一發生旋轉，兩軸承的反作用力却可能增大。這種由物體旋轉所引起的反作用力，我們可應用慣性力原理先求出物體各部份的慣性力，然後仍根據靜力學方法來決定。計算時，先擇定一正交坐標軸系：定旋軸 AB 爲 z 軸，命 x 和 y 軸隨物體旋轉。物體中任意一質點 D 的坐標，因此，是固定不變的 (x, y, z)。若這一質點到 z 軸的距離是 r，質量是 dm，那它的加速度就只是半徑方向的向心加速度 $\omega^2 r$（因物體等速旋轉，無切線加速度），相應的慣性力是離心力 $\omega^2 rdm$。將離心力分解於 x 和 y 軸方向得兩個等於

$$\omega^2 xdm \quad 和 \quad \omega^2 ydm \tag{a}$$

的分力。這兩個慣性力對於 x 和 y 軸的力矩分別是

$$-\omega^2 yzdm \quad 和 \quad \omega^2 xzdm \tag{b}$$

力矩的符號仍按右旋螺絲法則決定。之後，將所求的兩軸承反作用力也分解爲軸線方向分力 X_a, Y_a 和 X_b, Y_b。命所有作用力在 x 和 y 軸上的投影和等於零，可列出兩個平衡方程式；再命所有作用力對 x 和 y 軸的力矩和等於零，又可列出兩個平衡方程式：總共得到底下四個平衡方程式：

$$\left.\begin{aligned} X_a+X_b+\omega^2\int x\,dm=0 \\ Y_a+Y_b+\omega^2\int y\,dm=0 \\ -Y_b l-\omega^2\int yz\,dm=0 \\ +X_b l+\omega^2\int xz\,dm=0 \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

這四個方程式顯然可以解決其中四個未知分力 X_a, X_b 和 Y_b, Y_b。 今(c)式中

$$\int x\,dm=\frac{W}{g}x_c,\quad \int y\,dm=\frac{W}{g}y_c,\quad \int yz\,dm=I_{yz},\quad \int xz\,dm=I_{xz}$$

其中，前兩個積分依次是物體質量對於 yz 和 xz 平面的靜力矩；這在靜力學中已討論過。 後兩個積分可依次稱爲物體對於 y, z 軸和 x, z 軸的惰矩積。 惰矩積如何計算，附錄 II 中將詳細說明。 上式中 x_c 和 y_c 是物體重心的坐標值。 把這四個積分值代入(c)式就得到

$$\left.\begin{aligned} X_a+X_b&=-\omega^2\frac{W}{g}x_c \\ Y_a+Y_b&=-\omega^2\frac{W}{g}y_c \\ Y_b&=-\frac{\omega^2}{l}I_{yz} \\ X_b&=-\frac{\omega^2}{l}I_{xz} \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

可見只要已知物體重心的坐標值，和它對於 x, z 軸和 y, z 軸的惰矩積，就可以由以上四方程式決定軸承的反作用力。特殊情形，重心恰巧在旋軸上時，$x_c=0$, $y_c=0$ 可得：

$$X_a=-X_b,\qquad Y_a=-Y_b$$

X_a, X_b, 和 Y_a, Y_b 各在 xz 和 yz 平面上構成一個力偶。 這兩個力偶又將在包含旋軸的某一平面內構成一個合成力偶，合成力偶的平面

隨着物體旋轉。可見軸承必然有一對等速轉動的反作用力作用在旋軸上來構成這力偶。引起這種轉動力的作用力顯然將使軸承座發生強迫振動，故必需加以消滅。從(76)的最後兩式可看到，只要使物體對 y，z 軸和對 x，z 軸的惰矩積都等於零，X_a，X_b Y_a，Y_b 就可消滅。從而軸承也就不會受慣性力的影響。因此，物體的旋轉軸線必需通過物體重心，並且必須跟惰矩主軸相重合。總括起來說，只有繞惰矩主軸旋轉的物體，它的軸承才沒有變化不定的反作用力發生。

例題和習題

487. 第 542 圖中，直軸 AB 以固定角速 ω 旋轉，裝在軸上的兩水平桿都各負荷 b 重 W。試求 A B 兩軸承的反作用力。

解：兩水平桿所生的離心力是

$$\frac{W}{g}\cdot\frac{\omega^2 b}{2}$$

這兩個離心力構成一力偶，力矩等於 $W/g\cdot\omega^2 be/2$。

軸承的兩個反作用力 R_a 和 R_b 必須構成相等相反的力偶跟它平衡，故得

$$R_a=R_b=\frac{W}{g}\cdot\frac{\omega^2 be}{2l}$$

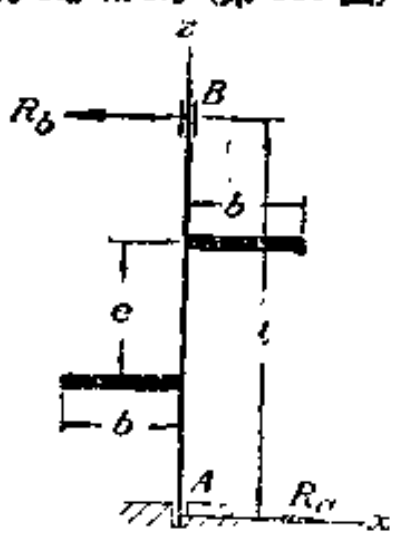
這兩個作用力隨着直軸旋轉，方向不斷變化。

應用 (76) 式自然也能得到同樣結果。因旋軸通過全系統的重心，由 (76) 式中前兩式也可知兩反作用力在兩水平桿的平面中應構成一力偶。再應用其中第四式，並令 $X_a=-X_b=R$，就得

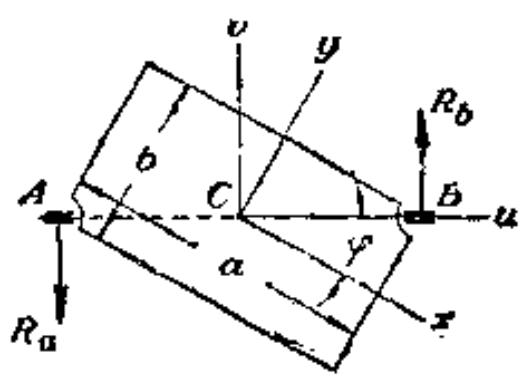
$$R\cdot l=\omega^2\int xzdm=\omega^2 e\int xdm=\omega^2 e\frac{W}{g}\cdot\frac{b}{2}$$

結果跟以上相同。

488. 一個重量等於 W 的長方形薄板，以等角速 ω 繞一對角綫旋轉。試求軸承對於它的反作用力 R_a 和 R_b (第 543 圖)。



第 542 圖



第 543 圖

解：薄板對 x, y 軸的慣矩是

$$I_x = W/g \cdot b^2/12, \quad I_y = W/g \cdot a^2/12$$

因此，它對於圖中 u, v 軸的慣矩就是

$$I_{uv} = \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{g} \frac{b^2 - a^2}{12} \sin^2\varphi = \frac{W}{g} \frac{ab(b^2 - a^2)}{12(a^2 + b^2)}$$

應用(76)中的第四式，並令 $R_b = X_b$, $I_{uv} = I_{xz}$, 就得

$$R_b \sqrt{a^2 + b^2} = -\omega^2 \frac{W}{g} \frac{ab(b^2 - a^2)}{12(a^2 + b^2)}$$

故

$$R_b = \frac{W}{g} \omega^2 \frac{ab(a^2 - b^2)}{12(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

R_a 跟 R_b 相等相反。它們共同構成一個力偶(見第 543 圖)，力偶面隨軸旋轉。

95. 旋轉剛體的均衡

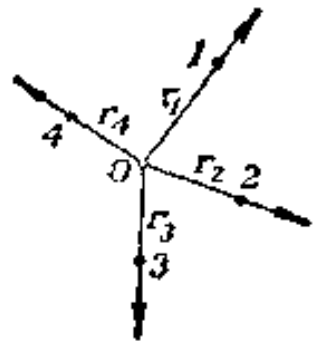
§ 94 指出：剛體等速旋轉，一般都會對於軸承產生動力壓力。(1) 這壓力隨着旋軸旋轉。假使旋軸水平，我們把這壓力分解爲水平方向和垂直方向的分力，那每一分力就都代表一個週期變化的作用力，週期等於剛體旋轉一周的時間。要是這一週期剛好跟軸承支架結構的自然振動週期相同，那就會發生很危險的共振現象。

§ 94 說明過，爲消滅這種動力效應起見，應該在設計旋轉機件時，使它的中心主軸完全跟旋轉軸線相合。不過有時候因實際條件限制，常常不可能使它們完全合一，所以必須另外加裝適當的重體來調節機件的中心主軸，使它仍能跟旋軸相合。底下就討論這種均衡旋轉體的方法。

例 1. 第 544 圖中 1, 2, 3, 4……各質點構成一平面的剛性質點系，共同繞垂直於所在平面的旋轉軸線 O 等速旋轉。各慣性力全通過 O 點。如果它們的向量能構成封閉的力多角形，合力等於零，這一質點系統就完全均衡。若力多角形不能封閉，所合成的合力就將對於軸承產生動力壓力；若已經知道這一合力的大小和方向，我們自然不難算出，使整個系統完全均衡，應加重體的質量以及它應在的位置。

對於互相剛性連接(指各質點不能作相對運動的連接)的質點系繞它們主軸旋轉的問題，我們可假定全部質量是集結於全系統的重心，然

(1) 因運動而引起的壓力。



第 544 圖

第 545 圖

後按這假定計算動力壓力。如果重心正在旋轉軸線上，重心加速度等於零，那末全系已經均衡；否則就不均衡。這種不均衡，發生的原因是旋轉軸線雖然是主軸但不通過物體重心，通常稱爲**靜力失衡**。處理靜力失衡問題，只要把旋軸兩端放在兩根水平的軌條上，任憑它自由轉動，全系統就會在重力作用下旋轉到全系統的重心達到最低位置時靜止。發現重心位置後，在重心的對方加一適當的改正重量，就可以使全系統完全均衡。這方法稱爲**靜力均衡法**。

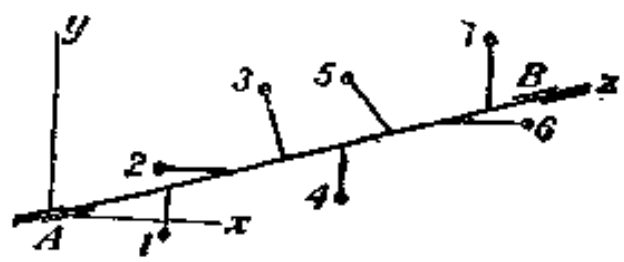
一個跟旋轉軸線正確垂直的飛輪或薄圓盤是比較容易處理的。我們可以假定它們的質量是集中分佈在它們的中平面中，再應用靜力均衡法來均衡就已經可以滿意。

假設質點系統中各質點在旋軸長度方向的分佈也不是集中在一個垂直於旋轉軸線的平面中，那均衡問題就不簡單；靜力均衡法已經不能消除軸承上的動力壓力。例如第 545 圖中，有兩個相等質量的質點同在含旋轉軸線的平面內，距離軸線的距離相同，全系統的重心仍在旋轉軸線上，不過以上的方法已經不能檢出它的不均衡性。它在旋轉時，§ 94 已指過出，會產生隨軸旋轉的力偶，使軸承受到動力壓力作用。原因是旋軸雖然通過重心，但不是全系統的惰矩主軸。這種非旋轉不能覺察的不均衡性稱爲**動力失衡**。

設兩質點既不在同一平面，離開軸線的距離又不相等，如第 546 圖所表示的情形一樣，那末旋轉軸線既非惰矩主軸，又非中心軸，全系統將變爲靜力失衡和動力失衡同時存在的聯合失衡。現在進一步研究最一般的情形。例如第 547 圖中，一系互相剛性連接的偏心質點 1,2,3,4,5……構成一個繞 AB 軸以等角速 ω 旋轉的質點系，在旋轉時，它們沿旋軸方向產生各自旋轉半徑方向的慣性力。分解各慣性力於 x 和 y

軸方向(z 軸跟旋轉軸線相合，x 和 y 軸垂直於旋軸並隨質點系旋轉)，然後又分別綜合各分力得 xz 平面的合力 Q 和 yz 平面的合力 P，這樣，問題就簡化爲跟第 546 圖的情形一樣。這就是說，我們可以將第 546 圖兩質點構成的質點系來替代原來系統（兩質點的旋轉半徑互相垂直)。

第 546 圖

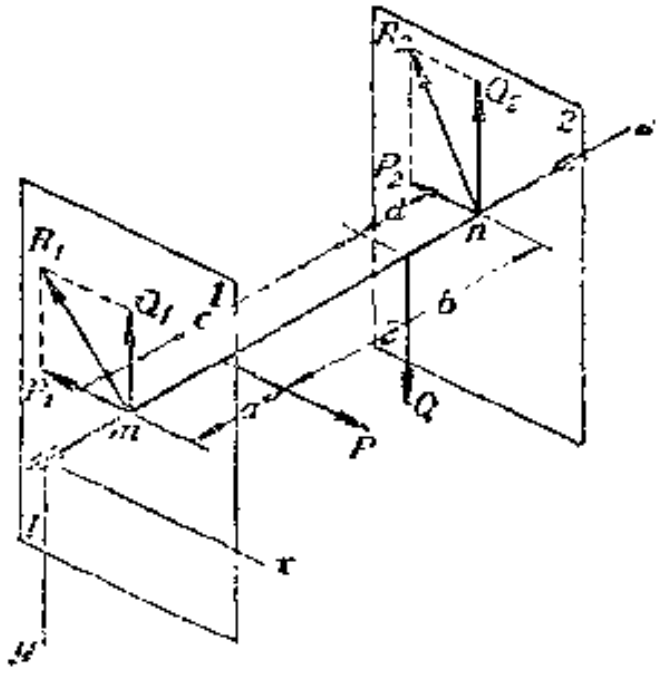


第 547 圖

均衡此系統的方法：先在旋轉軸線上任意擇定兩點 m 和 n（實際上 m, n 如何選定要看機件的設計情形而定)。過這兩點而垂直於旋軸的平面分別是第 548 圖中的 1 和 2。這兩平面通常稱爲**改正平面**。在 1,2 跟 xz 平面的交線上分別引 P_1, P_2 兩力的代表向量，它們方向跟 P 相反，並且

$$\left.\begin{aligned} P_1+P_2&=P \\ P_1a&=P_2b \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

同樣，在 1,2 平面跟 yz 平面的交線上引跟 Q 力方向相反的兩力 Q_1 和 Q_2 的代表向量，並使



第 548 圖

$$\left.\begin{aligned} Q_1+Q_2&=Q \\ Q_1c&=Q_2d \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

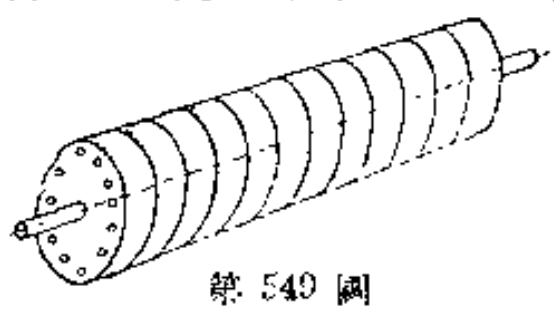
P_1, P_2 兩力可使 P 力完全均衡；Q_1, Q_2 可使 Q 力完全均衡。它們的合力 R_1 和 R_2（見圖）自然也有同樣效果，所以只要在 1 和 2 平面中 R_1 和 R_2 的作用線上安置兩個重 W_1 和 W_2 的物體，使所生的慣性力恰等於 R_1 和 R_2，全系統就可以完全均衡。

W_1, W_2 的大小以及它們離開旋轉軸線的距離 r_1 和 r_2 可由以下兩式決定：

$$\frac{W_1}{g}\omega^2 r_1=R_1 \qquad (c), \qquad \frac{W_2}{g}\omega^2 r_2=R_2 \qquad (d)$$

由(c)(d)可以看到，W_1, W_2 和 r_1, r_2 還可相互調節來湊合製造條件。

一般的旋轉機件像飛輪、電機轉子等，都設計成旋轉軸線跟中心主軸合一的旋轉體，按理應該沒有均衡問題發生。不過事實上，材料的不均勻，製造的不精確無法完全避免，旋轉軸線與中心主軸多少必有偏差，不加均衡，軸承一定會受到不定的動力壓力作用。要完全消滅這種動力效應，必須在製造完成後，加以檢驗，並另加適當的改正重量才成。例如第 549 圖中的電機轉子，我們可以設想它是由很多的薄圓盤疊接而成。各圓盤的重心因製造關係不可能恰好都在旋轉軸線上，正跟第 547 圖中的質點分佈情形一樣。因此，也可按前一方法另加兩個適當的改正重量來使它完全均衡。大型電機的轉子的兩端的表面，周圍都備有特製的洞孔以便加改正重量，所以兩端表面也就是改正平面。這種因製造不精密而引起的失衡，性質很難確定，改正重量不能僅由計算決定；普通多應用均衡機以反復檢驗方法來處理。



第 549 圖

以上的討論只就剛體以等角速 ω 旋轉的情形而論。至於角速不等的時候，這種對於等角速已經均衡好的旋轉體，是否仍會有動力壓力發生，我們還不曾研究過。現在觀察這種旋轉體中任意一微分質量 dm。

它的切線加速度是 $\dot{\omega}r$，法線加速度是 $\omega^2 r$，相應的慣性力是 $\dot{\omega}rdm$ 和 $\omega^2 rdm$。因旋轉體所有的微分質量的角加速度都等於 $\dot{\omega}$，角速度都等於 ω，所以整個旋轉系中所有因 $\dot{\omega}$ 而生的慣性力也就全部等於因 ω 而生的慣性力的 $\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$ 倍，作用方向也是全部互相相交成 90°。所有因 ω 而生的慣性力 $\omega^2 rdm$，由於機件已經照以上方法完成均衡手續，所以必然共同是一個平衡力系。現在只把這一平衡力系全部按同一倍數$\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)$放大，並且它們間相對的作用方向也完全沒有變動，只是全部旋轉了一個 90°，這當然不會破壞這一力系的平衡性，從而也不會影響機件已經得到的均衡。所以，一個已經均衡了的機件，不論它的角加速度 $\dot{\omega}$ 存在已否，仍然是一個均衡的旋轉體，不會產生對於軸承的動力壓力。

例題和習題

489. 第 550 圖中是一個鋼製圓盤，在 A，B 兩處鑽有圓孔。圓盤可以繞垂直於本身的 O 軸自由旋轉。現在要在 C 處鑽一圓孔，使圓盤完全均衡。問此圓孔的直徑 d 及位置角 φ 應等於多大？圖中尺寸以 cm 爲單位。

(解：$d=5.53$cm，$\varphi=118°$)

490. 一機車車輪，直徑是 1.83m。它上面的荷重包括本身重量在內是 6364kg 設道車輪的偏心重量等於 90.9kg，偏心半徑是 25.4cm，試求機車速度等於每小時 96.5km 時，軌道所受到的最大和最小車輪壓力等於多大？

解：機車的等速直綫前行對於車輪上任何質點因旋轉而引起的慣性力並無影響，慣性力仍跟車輪繞一固定軸綫旋轉時一樣。因此，仍可以按 §95 方法求得：

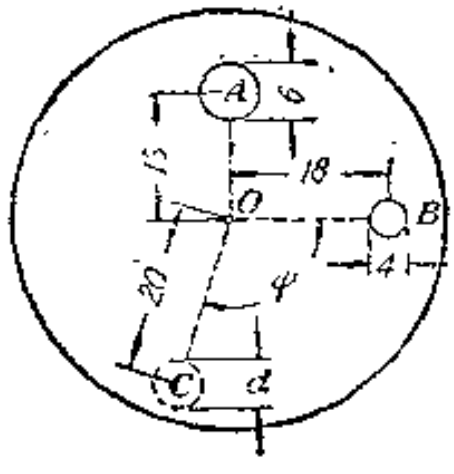
$$R_{max}=8791\text{kg},\quad R_{min}=3937\text{kg}$$

491. 一圓盤重 95.45kg，重心偏離旋轉軸綫 1cm。圓盤的旋軸，兩邊各有一軸承，軸承間距是 152.4cm。圓盤平面離一端軸承 A 的距離是 60.1cm。設圓盤轉速是每分鐘 $n=210$ 次，試求離心力所引起的軸承反作用力等於多大？設在圓盤的旋轉平面中，距離旋軸 106.7cm 處，加一改正重量 W 使圓盤完全均衡，問 W 等於多大？

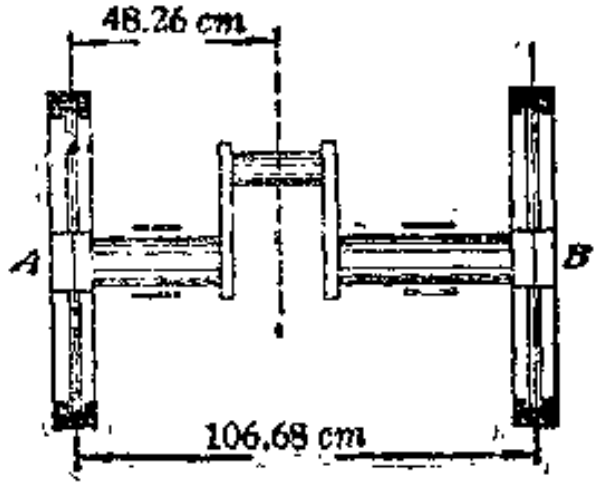
(解：$R_a=26.1$kg，$R_b=173.6$kg，$W=9.1$kg

492. 第 551 圖中是一原動機的曲軸。A，B 代表兩飛輪，曲軸臂及曲軸栓所產生的慣性力相當於曲軸旋轉平面中半徑等於 25.4cm 處一個重 49.1kg 的質點。現在要在兩飛輪平面中，半徑等於 61cm 處，分別加改正重量 W_a 和 W_b，使全系統完全均衡。問 W_a 和 W_b 應等於多大？

(解：$W_a=12.1$kg；$W_b=9.25$kg)



第 550 圖



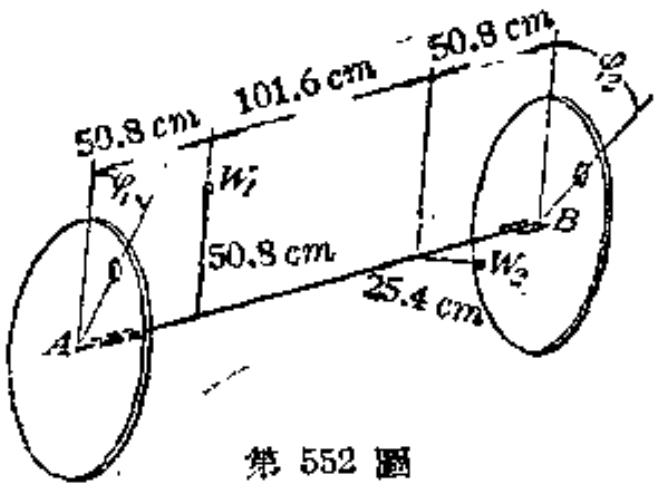
第 551 圖

493. 一水平傳動軸 AB（第 552 圖）帶有兩個心質點 $W_1=0.45$kg 和 $W_2=0.91$kg，位置如圖。兩質點各自跟旋轉軸所成的兩平面互相垂直，傳動軸兩端各有一鋼製的均衡圓盤，厚 2.54cm。現在要在兩圓盤上半徑等於 50.8cm 處各鑽一洞孔，以使全系統均衡，試問這兩洞孔的直徑 d_1 和 d_2 以及洞孔的位置角 φ_1 和 φ_2 應等於多少？

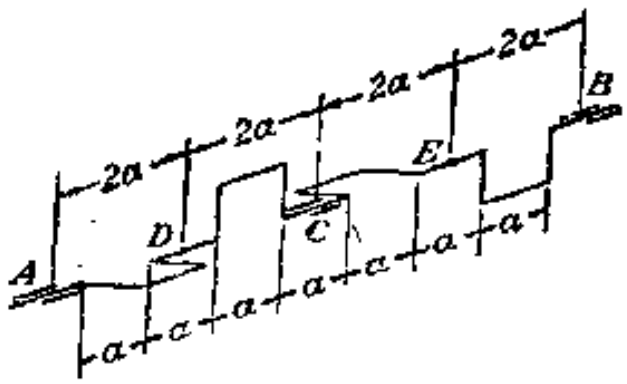
（解：$d_1=d_2\approx4.8$cm；$\varphi_1=18°26'$；$\varphi_2=71°34'$）

494. 第 553 圖中是一個三軸承曲軸。每一曲拐（包括曲軸臂在內）的動力效應相當於曲拐旋轉面中一個半徑等於 r 的偏心重量 W。改正重量擬加在曲軸的 D、E 兩處，偏心半徑也是 。試求改正重量的大小和位置角各等於多少？

解：改正重量應該在曲軸兩邊相等處。兩重體跟旋軸所成的平面，恰等分四曲拐所成兩平面的夾角。兩重體的重量都等於 $\sqrt{2}\,W$。



第 552 圖



第 553 圖

96. 角動量定理

在第十一章討論「質點曲線移動」時，我們已經知道，一個質點對於任意一固定軸線的動量矩，它的變化率就等於質點作用力對於這軸線的力矩。第 554 圖表示一個剛體繞 z 軸旋轉，它 A 處的微分質量 dm 離開 z 軸的距離是 r，旋轉面垂直於 z 軸，A 點在這平面上的運動路線是一半徑等於 r 的圓周。若剛體的旋轉角速是 $\dot{\theta}$，A 點的速度就等於 $\dot{\theta}r$，它對旋轉軸線的動量矩就是

$$r^2\dot{\theta}dm \tag{a}$$

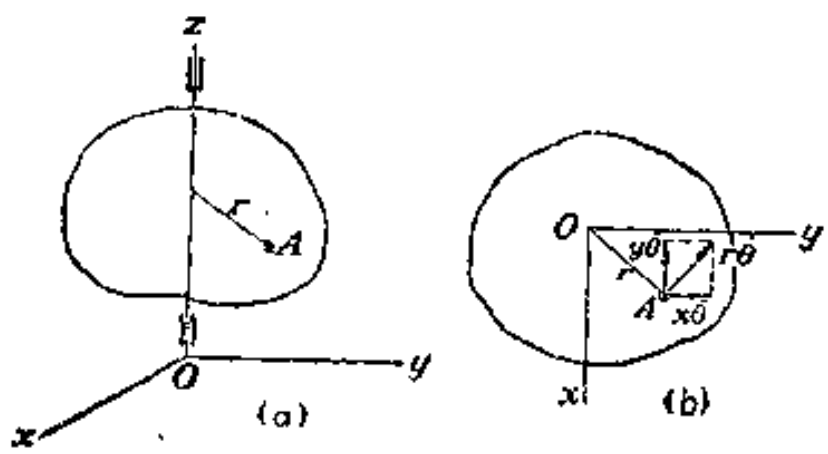
動量矩的變化率應等於這質點上所有外力對於 z 軸的力矩。綜合全物體所有的質點，可得：整個物體的動量矩的總變化率就等於物體上所有外力對旋轉軸線的力矩總和 M_z；也就是

$$\frac{d}{dt}\int \dot{\theta}r^2dm = M_z \tag{b}$$

或

$$\frac{d}{dt}(I_z\dot{\theta}) = M_z \tag{77}$$

其中，$I_z = \int r^2dm$ 指物體對於 z 軸的惰矩；$I_z\dot{\theta}$ 稱爲旋轉體對於 z 軸的**角動量**。(77)式說明：旋轉體對某定軸的角動量的變化率乃等於所有外力對於此軸線的力矩和。這就是所謂**角動量定理**。



第 554 圖

I_z 若是一個常數，(77)式就跟運動方程式(68)全同。但 I_z 不一定是常數；旋轉體在旋轉過程中，因溫度變化而漲縮，I_z 值就可能變動。(77)式可以應用於一羣物體繞同一軸線旋轉的旋轉運動。若各物體對軸線的惰矩分別是 $I_1, I_2, I_3\cdots\cdots$，角速依次是 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3\cdots\cdots$，那末

$$\frac{d}{dt}(I_1\dot{\theta}_1 + I_2\dot{\theta}_2 + I_3\dot{\theta}_3 + \cdots\cdots) = M_z \tag{77'}$$

若外力合力對旋軸的力矩等於零，由上式就可斷定，這一羣物體對旋軸的角動量將始終是一個不變常數

例題和習題

495. 扭轉第 513 圖中的旋軸，然後，突然放任它自由運動。它兩端的圓盤將作扭擺振動，試證明軸承如果沒有摩阻力，兩盤的擺動方向必定恰恰相反。

解：在開始振動時，圓盤靜止不動，全系統的角動量等於零。軸承如無摩擦力，重心又恰好在旋軸上，那末所有外力對旋軸的力矩的總和就必然等於零。因此，全系角動量不可能發生變化，原來等於零的角動量應該永遠等於零。

這只有圓盤靜止或相對轉動才可能；令 I_1 和 I_2 代表兩盤對旋軸的惰矩，$\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 代表它們在 t 時刻的角速度，可得

$$I_1\dot{\theta}_1+I_2\dot{\theta}_2=0$$

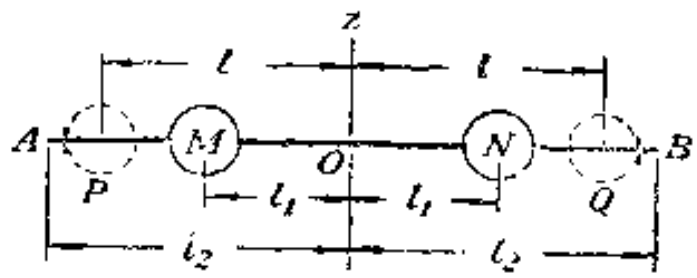
故

$$\dot{\theta}_1:\dot{\theta}_2=-I_2:I_1$$

可見兩角速度的符號相反，大小跟各自相應的惰矩成反比例。

又因旋轉角(以平衡位置爲起綫的旋轉角)跟角速成正比，所以兩盤的節切面(即不生扭轉的旋軸切面)到兩盤的距離也跟兩盤的惰矩成反比。

496. 第 555 圖中的 AB 桿重 W_1，桿上兩重體 M,N 同重 W。M 和 N 間有細綫連結。整個系統以角速 ω_0 繞 z 軸等速旋轉時，M 和 N 間的距離可保持等於 $2l_1$。假使突然把細綫切斷，M 和 N 自然將因離心力關係，向 AB 兩端滑動，分別達到圖中 P 和 Q 兩新位置。試問此時全系統的新角速 ω_1 等於多大？(計算中可假定 AB 重量沿 AB 的長度均勻分佈，M 和 N 兩球重量集中在球心)



第 555 圖

解：細綫被切斷前，全系統對於 z 軸的惰矩是

$$I_0=2\frac{W}{g}l_1^2+\frac{W_1}{g}\frac{l_2^2}{3}$$

細綫切斷後的惰矩是

$$I_1=2\frac{W}{g}l^2+\frac{W_1}{g}\frac{l_2^2}{3}$$

因沒有外力力矩作用在 z 軸上，角動量應該始終相等，故

$$I_0\omega_0=I_1\omega_1$$

這樣，就得到

$$\omega_1=\omega_0\frac{I_0}{I_1}=W\omega_0\frac{6Wl_1^2+W_1l_2^2}{6Wl^2+W_1l_2^2}$$

497. 一個厚度均勻的水平圓盤，半徑等於 a，重量等於 W，可以繞中心鉛垂軸綫自由旋轉。盤中有一半徑等於 r 的同心槽綫(見第 556 圖)。槽綫內有一個重 Q 的質點。最初圓盤和質點都靜止不動。之後，質點以相對於圓盤的固定速率 v 沿槽綫運動。問圓盤

的角速 ω 將等於多大?

$$\left(\text{解: } \omega=\frac{2Qrv}{Wa^2+2Qr^2}\right)$$

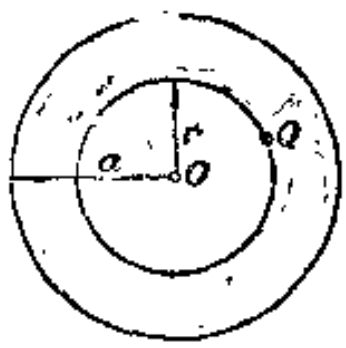
498. 一個圓球以固定角速繞一根直徑旋轉。它上面沒有任何外力作用。圓球旋轉時,因溫度下降調節,直徑縮短了 0.1%。問這一圓球的角速受到什麼影響?

(解: 角速增加 0.2%)

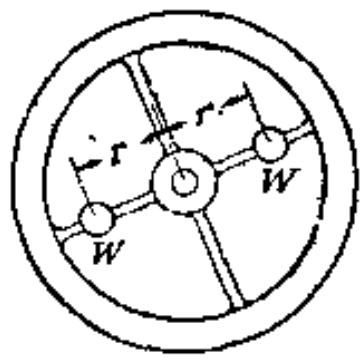
499. 第 557 圖中是一個以固定角速 ω 旋轉的飛輪。它受到一變動的扭力力矩作用,這力矩是

$$M=M_0\cos\omega t$$

為保持飛輪的均勻旋轉起見,我們在它的輻條上裝了兩個可以自由滑動的重體W。另外用偏心輪桿設節這兩個重體的位置。試問兩重體到軸心的距離半徑 r 應該如何變化,飛輪才不會因變動力矩的作用而改變轉速?



第 556 圖



第 557 圖

解: 根據(77)式,知

$$\frac{d}{dt}(I\omega)=M_0\cos\omega t$$

因 ω 必須是一個常數,故

$$\frac{d}{dt}I=\frac{M_0\cos\omega t}{\omega} \qquad (c)$$

命飛輪單獨對於旋軸的慣矩等於 I_0,可假定

$$I=I_0+\frac{2W}{g}r^2 \qquad (d)$$

以(d)代入(c)中,得

$$\frac{2W}{g}\frac{d(r^2)}{dt}=\frac{M_0\cos\omega t}{\omega}$$

上式積分後,就得到

$$r^2=\frac{M_0 g}{2W\omega^2}\sin\omega t+C$$

如 $t=0$ 時,$r=r_0$,積分常數 $C=r_0^2$,故所求 r 同 t 的關係是

$$v=\sqrt{r_0^2+\frac{M_0 g}{2W\omega^2}\sin\omega t}$$

500. 第 558 圖中是一個測量槍彈速度的彈道擺。 擺錘是一塊重的木塊。 木塊重 W，由細桿 OA 懸掛在 O 點。 設槍彈，重量等於 W_1，擊入彈道擺的振動中心 A 處，使複擺產生角速 $\dot{\theta}_0$，試求槍彈速度 v 跟複擺最大旋轉角 θ_m 的關係。

解：把槍彈和複擺當作整個運動系統。 槍彈未擊中複擺前，全系統對於 O 點的角動量原等於

$$\frac{W_1}{g}vl$$

當槍彈進入擺中，相對靜止於擺中時，角動量變爲

$$I_0\dot{\theta}_0$$

因槍彈嵌入複擺是一種碰撞現象，碰撞時間極短，故槍彈相對靜止於擺中前，複擺所發生的旋轉角極小，即使假定全系統達到角速 $\dot{\theta}_0$ 時，複擺尚未開始運動也無不可。 此外，槍彈的質量比複擺實際上小得多，所以假定複擺對於 O 點惰矩 I_0，在碰撞前後，沒有變動也無不可。 到碰撞完成、全系統達到角速 $\dot{\theta}_0$ 前，所有外力對於 O 點力矩一直等於零，故全系統的角動量不能發生變化；這就是說，應該

$$\frac{W_1}{g}vl=I_0\dot{\theta}_0$$

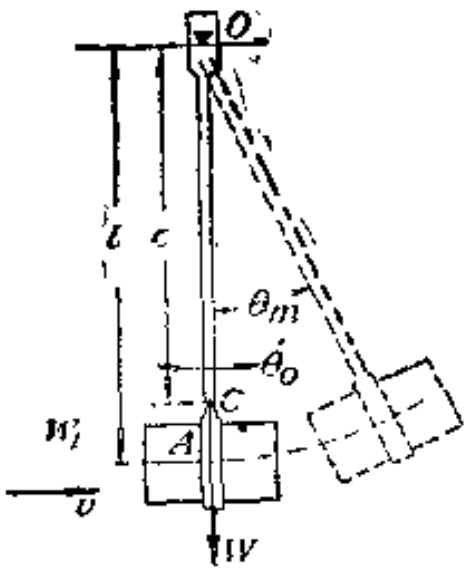
或

$$v=\frac{gI_0\dot{\theta}_0}{W_1 l}$$

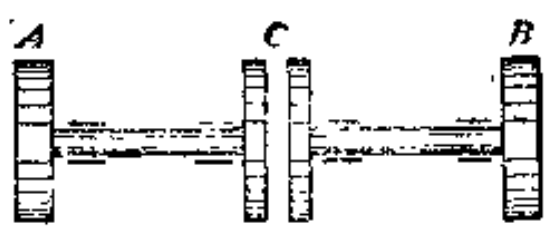
到這一步，我們已得到槍彈速度 v 跟彈道擺的最初角速 $\dot{\theta}_0$ 的關係。 至於 v 跟最大旋轉角 θ_m 的關係，我們在第 510 題中再繼續討論。

501. 轉子 A，最初靜止；另一轉子 B，最初角速是 ω_b。 設應用聯合器 C，突然將兩個轉子連接起來（見第 559 圖），問兩轉子可能達到的共同角速 ω 將等於多大？ I_a 和 I_b 分別是轉子 A 和 B 對於旋轉軸線的惰矩。 軸承的摩擦力可以不計。

$$\left(\text{解：}\ \omega=\omega_b\frac{I_b}{I_a+I_b}\right)$$



第 558 圖



第 559 圖

97. 角動量的向量表示

以上說明的雖然只是就物體對於旋轉軸線的角動量而言，但在導出角動量定理的過程中，我們對於軸線的選定並無限制，所以事實上角動量定理對於任何固定軸線都能成立。第 554 圖中，有一個質點 A，速度等於 $r\dot{\theta}$，質量等於 dm。若分解它的速度於 x 和 y 軸方向，就可得兩個分速度 $y\dot{\theta}$ 和 $x\dot{\theta}$。就 x 軸而論，只有 $x\dot{\theta}$ 才產生動量矩

$$-dm\,\dot{\theta}\,x\cdot z \qquad (a)$$

這動量矩的變化率應等於 A 點上外力合力對 x 軸的力矩。綜合整個物體所有各質點的動量矩以及物體上所有外力的力矩，就得

$$\frac{d}{dt}\left(-\dot{\theta}\int xz\,dm\right)=\frac{d}{dt}(-I_{xz}\dot{\theta})=M_x \qquad (b)$$

其中 M_x 是外力合力對於 x 軸的力矩；$(-I_{xz}\dot{\theta})$ 是物體繞 z 軸旋轉時，它對於 x 軸的角動量。同樣理由，又可得

$$\frac{d}{dt}(-I_{yz}\dot{\theta})=M_y \qquad (c)$$

若 z 軸恰巧就是物體的惰矩主軸，惰矩積 I_{xz} 和 I_{yz} 就都等於零。因此，物體在繞主軸旋轉時，對於 x 和 y 軸的角動量全等於零。這樣的情形下，根據 $(b)(c)$ 兩式，可知所有外力的合力對 x 和 y 軸的力矩也非都等於零不可。

物體對於三坐標軸的角動量可應用各軸線上的向量來表示。它們的正負方向按照力矩的的符號規則確定。求到旋轉體對於三坐標軸的角動量後，應用向量的幾何相加方法，就可得到它的總角動量。總角動量以及外力合力的力矩如分別用向量代表，那末兩代表向量間的關係，自然仍舊是前面所說的，總角動量的變化率要等於外力合力的力矩。這一論斷對於軸線如何選擇，毫無限制，所以是更普遍的角動量定理，適用於一物體或一羣物體繞一固定軸線旋轉的任何旋轉運動。

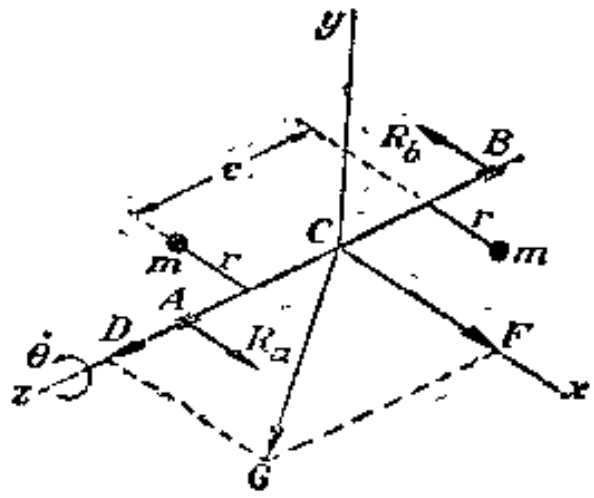
例如第 560 圖中，一個兩質點構成的質點系，它的旋軸 AB 以角速 $\dot{\theta}$ 繞 z 軸等速旋轉。兩質點質量都等於 m，離開旋軸的距離同是 r，同在一包含旋轉軸線的平面中。以質點系的重心 C 作爲坐標原點，旋軸爲 z 軸，並令 x 軸位於含兩質點的平面中，y 軸垂直於這平面。各坐標軸選定後，可得全系統對於 z 軸的角動量是

$$2mr^2\dot{\theta} \qquad (d)$$

因 $I_{xz}=-mrc$, $I_{yz}=0$, 故全系統對於 x 軸的角動量等於

$$\dot{\theta}\, mrc \qquad (e)$$

對於 y 軸的角動量等於零。現在在圖中,用 $\overline{CD}$ 和 $\overline{CF}$ 兩向量代表(d)和(e)兩式的角動量。由向量加法,可得總角動量的代表向量 $\overline{CG}$, 這 $\overline{CG}$ 是 xz 平面中的向量。



第 160 圖

以上的討論,雖然認定兩質點恰巧同在 xz 平面內,不過事實上兩質點在其他位置也是一樣的。總角動量的大小仍然與 CG 的相同。所以只要全系統的角速度 $\dot{\theta}$ 不變,總角動量的大小就不會變動;角動量的代表向量 $\overline{CG}$ 只隨同質點系統繞 z 軸旋轉,在空間畫出一個正圓錐。$\overline{CG}$ 終點 G 在空間的描畫速度就是總角動量的變化率。因 G 點描畫的圓周,半徑等於 $\overline{CF}=mrc\cdot\dot{\theta}$ 所以總角動量變化率就等於

$$\dot{\theta}^2\, mrc \qquad (f)$$

這一 G 點速度的代表向量應該垂直於 xz 平面。所以根據角動量定理——外力合力的力矩的代表向量應等於 G 點速度的代表向量——就可以斷定,外力力偶的作用平面也是 xz 平面,力矩大小等於 $\dot{\theta}^2mrc$。構成這一力偶的外力,就是兩軸承的反作用力 R_a 和 R_b, 所以這兩個反作用力也在 xz 平面內。

以上如果應用慣性力原理計算,也可以得到同樣結果。兩質點的慣性力各等於 $m\dot{\theta}^2r$, 作用在 xz 平面中;兩力構成的力偶,力矩等於 $\dot{\theta}^2\, mrc$, 跟(f)式結果完全相同。

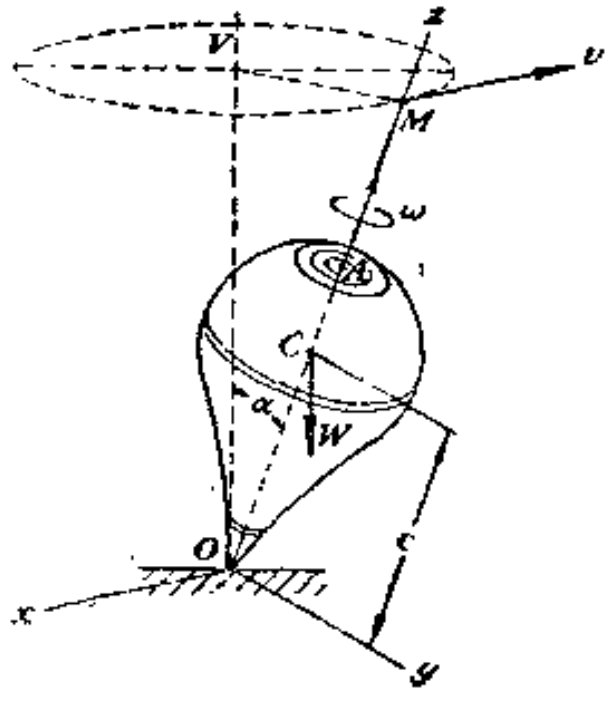
98. 迴轉儀

迴轉儀主要是一個繞中心軸旋轉的沉重的物體。當高速旋轉時,它所產生的「動力性能」有很大的實用價值。討論迴轉儀的這種性能,應用角動量定理最簡便。通常用兩個向量分別來代表旋轉體對於一定點的總角動量以及所有外力對於同點的總力矩。這兩個向量在一般情形下,並不合而為一。但是由總力矩的代表向量,我們可以決定總角動量的時間變化率。假定旋轉體的自旋軸是一根固定軸線。旋轉體對於這軸線的惰矩和角速分別是 I_z 和 ω, 按(77)式,就可得

$$\frac{d}{dt}(I_z\omega)=M_z \qquad (a)$$

由 § 97 的討論已可推論出:只要旋轉軸線是旋轉體的中心主軸,旋轉體對於任何一根通過旋軸同時又垂直於旋軸的軸線的角動量,就一定

等於零。 迴轉儀的自旋軸，因對稱關係，同時就是中心主軸，所以它對於自旋軸的角動量 $I_z\omega$ 也就代表它的全部角動量。總動角量的代表向量，因此，就在自旋軸上。 如果迴轉儀既無軸承摩阻力又無其他外力力矩作用在 z 軸，那角動量自然就是一固定不變值。



第 561 圖

假使自旋軸並不固定，而是可以繞一定點在空間自由旋轉的軸線，那末迴轉儀的動力性能馬上就會顯露出來。 例如第 561 圖中的迴轉儀，自旋軸 OA 可以繞固定點 O 自由旋轉(例如陀螺)。物體自旋角速是 ω。 OA 同時又是物體的中心主軸。 取固定坐標軸系 x, y 和 z 軸如圖。 物體在圖中位置時，自旋軸恰好跟 z 軸相合。

因自旋軸繞 O 點旋轉，方向變更不息，故物體對於 x 和 y 軸必然也有旋轉。 換句話說，物體對於這兩根軸線的角動量將不等於零。總角動量的計算，因此，將十分複雜。 爲簡便起見，通常假定自旋角速 ω 非常非常大，相形之下，使自旋軸的旋轉角速顯得十分微小；此外，並使物體對於自旋軸的惰矩不比對於 x 和 y 軸的惰矩爲小。 這樣就可以使迴轉儀對於自旋軸的角動量比對於 x 和 y 軸的角動量大得很多；我們即使認爲 OM 代表的自旋軸角動量 $I\omega$ 就代表物體的總角動量，也無甚不可。 假使迴轉儀中，既無摩阻力又無外力產生對於自旋軸的力矩，我們按以前的討論，就可以認爲物體的總角動量是一固定不變值。

旋轉體的重力 W 作用在重心 C 點上。 W 跟 O 點的反作用力共同構成在 OVM 平面中一個力偶，力矩等於 $Wc\sin\alpha$，由一個垂直於 OVM 平面並指向 $-x$ 軸方向的向量代表。 根據角動量定理，這力矩應當等於總角動量的變化率，所以總角動量的代表向量 OM 的終點 M 必然有一描畫速度發生。 這速度就是總角動量的變化率。 外力力矩 $Wc\sin\alpha$ 的代表向量既垂直於 OVM 平面，M 點的速度自然也應垂直於 OVM 平面。 可見 M 點將沿一水平圓週運動，圓週的半徑是 $OM\sin\alpha$

$=I\omega\sin\alpha$。換句話說，自旋軸本身是沿一圓錐角等於 2α 的圓錐的表面運動。OVM 平面的轉速 ω_1 因之可以由圓周半徑 $I\omega\sin\alpha$ 跟 M 點的速率 $Wc\sin\alpha$ 的商決定，

$$\omega_1=\frac{Wc\sin\alpha}{I\omega\sin\alpha}=\frac{Wc}{I\omega} \qquad (b)$$

ω_1 通常稱爲自旋軸的進動角速度。由(b)式可以看到，如果旋轉體受空氣阻力和支點摩阻力影響以致自旋角速 ω 減小，進動角速 ω_1 就反而會增大；如果重心 C 離開支點 O 的距離 c 減小，ω_1 就會隨之減小。

地球因爲月球的引力關係有一極小的地軸進動角速度。地軸完成一次迴轉約需 26000 年。

假設迴轉儀的支點 O 就在重心 C 處，那末，因 $c=0$，因而 $\omega_1=0$，自旋軸在空間的方向將永不變動。以前已有人應用過這一現象來證明地球的自轉。如令旋軸指向某一恆星，它就將永遠指着這一恆星。但從地球上的觀察者來看，自旋軸却是沿一個中心軸正對北極星的圓錐體表面轉動。

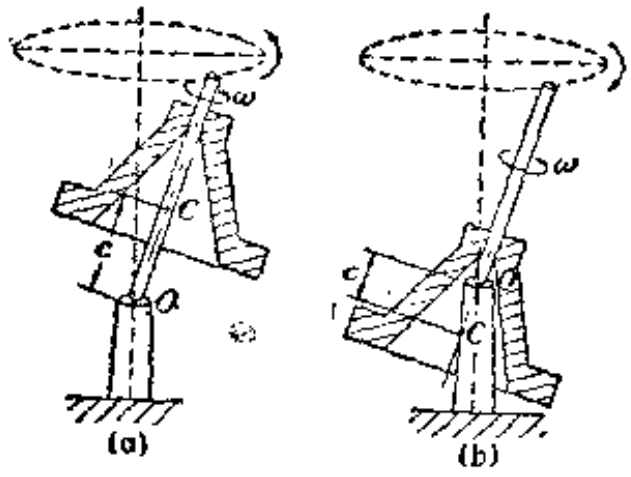
利用旋轉體高速旋轉所產生的保持方向的動力性能，除海空定向儀外，還有槍炮膛中的來復線。不過因爲空氣阻力的合力並不是正確地通過子彈的重心，所以在通過子彈重心包含槍彈前進速度的鉛平垂面中，這一合力將產生一個對於重心的作用力矩，此力矩使自旋軸方向逐漸改變，以致彈道會發生脫離上述鉛垂平面的偏差。

例題和習題

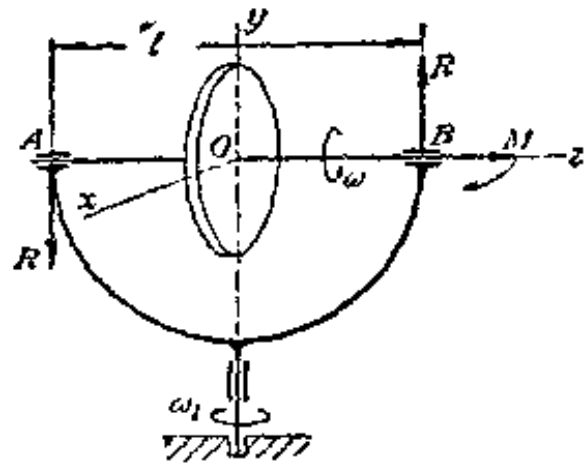
502. 第 562a 圖中的錘形旋轉體，它的自旋軸跟中心軸相合。旋轉體可以沿旋軸上下移動，使重心 C 可以在支點 O 之下，也可以在 O 點之上。試證明自旋軸的進動角速恰跟第 562b 圖中旋轉體的自旋軸的進動角速方向相反。

503. 第 563 圖中的圓盤是一個完全均衡的旋轉體。它以角速 ω 繞 AB 軸作高速旋轉。如果 AB 是一根固定軸線，軸承的反作用力自然很容易用靜力學方法決定。但是現在 AB 軸也繞支架軸旋轉，角速等於 ω_1，問兩軸承 AB 因而增加的反作用力將等於多大？假定 ω_1 比 ω 小得多。

解：取圓盤中心作爲原點，分別選定坐標軸 x，y 和 z 如圖。因 ω_1 比 ω 小得多，所以旋轉體對於 z 軸的角動量 $I\omega$ 要比對於 y 軸的大得多。因此，我們可以認爲 $I\omega$ 就是旋轉體的總角動量。命 z 軸上的向量 OM 代表總角動量 $I\omega$。$\overline{OM}$ 的方向按右旋螺線法



第 562 圖



第 563 圖

則決定。自旋軸顯然有角速 ω；$\overline{OM}$ 向量的終點 M 顯然將在一半徑等於 $\overline{OM}=I\omega$ 的水平圓周上轉動。M 點的速度，大小等於 $I\omega\ \omega_1$，方向垂直於 yz 平面。根據角動量定理，這一速度——也就是總角動量的變化率——應當跟外力力矩的代表向量相同。可見構成外力力矩的力偶必然在 yz 平面中。這一力偶由兩軸承因 ω_1 關係而增加的反作用力 R 所構成，故

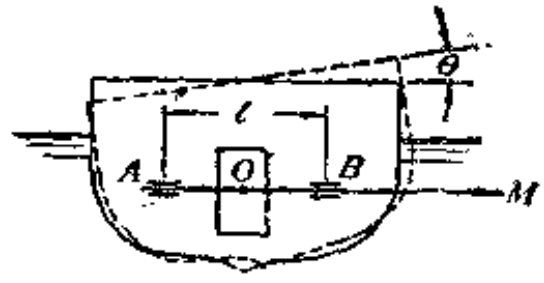
$$R\cdot l=I\omega\ \omega_1 \tag{c}$$

或

$$R=\frac{I\omega\ \omega_1}{l} \tag{d}$$

AB 兩軸承的反作用力可以由實驗方法測定。實際測定的結果確跟 (d) 式精密符合。

504. 第 564 圖中是一部裝置在船內的電動機。電動機的旋軸恰好在船的簸動方向。假設電動機轉子的角速等於 ω，船簸動的方程式是 $\theta=\theta_0\cos pt$，試求轉子兩軸承因簸動所增加的反作用力最大值等於多少？



第 564 圖

解：因爲船的簸動週期時間都很大，所以可以假定轉子對於自旋軸的角動量 $I\omega$ 就是它的總角動量。以 $\overline{OM}$ 代表這一總角動量 $I\omega$。在船簸動時，$\overline{OM}$ 的終點 M 點將在空間畫出一圓弧，半徑等於 $OM=I\omega$。M 點速率顯然應當等於這一半徑乘簸動的角速度 $\dot{\theta}=-\theta_0 p\sin pt$，所以 M 點的最大速度就等於 $I\omega\cdot\theta_0 p$。這一最大速度也就是轉子總角動量的最大變化率，根據角動量定理，應該跟軸承增加的反作用力所構成的最大力矩相等。因最大值出現在 $\sin pt=1$ 或 $\cos pt=0$ 時。這時候，旋轉角 $\theta=0$，M 點的速度恰好在鉛垂方向，所以軸承增加的反作用力一定是在水平平面中，它們構成一個力偶，力矩的大小是

$$R_{max}\cdot l=I\omega\ \theta_0\ p$$

故

$$R_{max}=\frac{I\omega\ \theta_0\ p}{l} \tag{e}$$

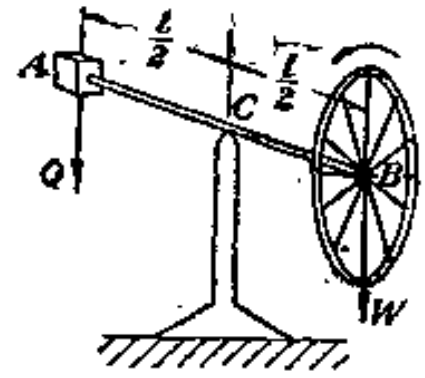
505. 假定上題中船艏動的最大旋轉角是 5°，艏動週期是 30s；轉子的轉數是每分鐘 1800 次，惰矩 $I=350\text{kg}-\text{s}^2-\text{cm}$；$l=90\text{cm}$。試求最大反作用力 R_{max}。

(解：$R_{max}=4{,}02\text{kg}$)

506. 一機車沿半徑等於 r 的彎道以速率 v 等速前行。軌距是 l，車輪半徑是 r，車輪對於輪軸的惰矩是 I_z，試求因車輪旋轉運動所引起的外軌的壓力增加，以及內軌的壓力減少各等於多少？

$$\left(\text{解：}R=\frac{I_z\,\omega\,\omega_1}{l}=\frac{I_z\,v^2}{arl}\right)$$

507. 第 565 圖中 AB 是一根長 $l=90\text{cm}$ 的水平軸。支點就是它的中點 C。A 端懸掛一個重體 $Q=2{,}5\text{kg}$。B 端是一個車輪，重量 $W=5\text{kg}$。車輪全部質量均勻分佈於半徑 $r=30\text{cm}$ 的圓周上。車輪轉速是每分鐘 600 次。試求 AB 軸繞 C 點豎直軸綫旋轉的角速 ω_1 等於多大？



第 565 圖

(解：$\omega_1=0{,}39$轉/s)

508. 電車上的電動機，轉動方向跟車輪旋轉方向相反，轉子重 271,5kg，兩軸承的距離是 61.5cm，轉子對於旋軸的惰矩半徑等於 15,25cm。車輪半徑等於 83,8cm。轉子旋轉四次，車輪旋轉一次。假定電車沿一半徑等於 30,25m 的右向彎道前行，速率是 6 09m/s，問電動機上兩軸承受到的全部壓力等於多大？

(解：左邊軸承 124kg，右邊軸承 149kg)

509. 機車的一對推動輪重 227kg，惰矩半徑是 76.2cm，輪軸距離是 1,829m。軌矩是 1,524m。設這一機車沿 6° 的彎道以每點鐘 72,4km 速率前行，試求外軌對車輪所增加的反作用力等於多大？

(解：134kg)

99. 旋轉體的能量方程式

如果一個物體繞一固定軸線旋轉(第 566 圖)，角速等於 $\dot{\theta}$，它上面的一質點 A 當然就沿一個半徑等於 r 的圓周運動，運動的速率等於 $r\dot{\theta}$，所以這一質點的動能是

$$dm\frac{(r\dot{\theta})^2}{2} \qquad (a)$$

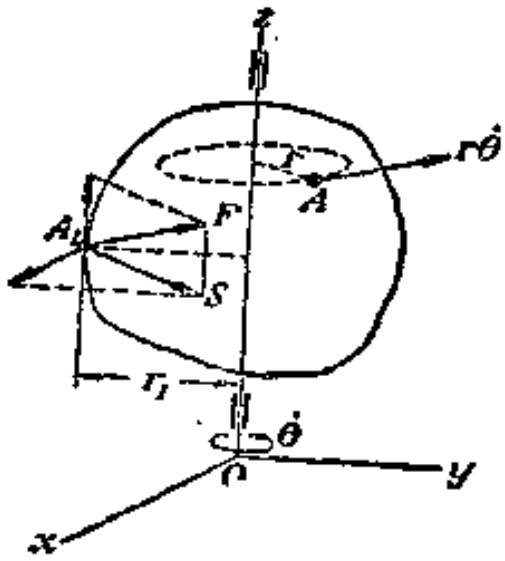
積分(a)式，可得物體的全部動能：

$$U=\int\frac{dm}{2}(r\dot{\theta})^2 \qquad (b)$$

因各質點的角速 $\dot{\theta}$ 完全相同，所以

$$U=\frac{\dot{\theta}^2}{2}\int r^2dm=\frac{I\dot{\theta}^2}{2} \qquad (c)$$

其中，$I=\int r^2dm$，是物體對於旋轉軸線的惰矩。把 (a) 式跟 § 85(a) 式比較一下，我們會發現，旋轉物體的動能公式跟移動物體的動能公式在形式上完全相似。



第 566 圖

§ 85 中已指出過，一個質點在經過一微分位移 ds 後的「動能變化」應等於質點的所有外力在同位移上所做的「功」。對於一個旋轉的物體，我們可以把它所有各質點的外力所做的功加成總和，也可以把它所有各質點的動能變化加成總和。這樣，自然就得到這兩個總和應當相等的結論。而且，因爲剛體內各質點間的內力自己會成對抵消，對任何位移都不能做功，所以旋轉體所有各質點動能變化的總和，也就等於所有外力在運動過程中所做的全部功。換句話說，旋轉體旋轉一旋轉角 $d\theta$ 後，動能的全部變化必等於旋轉體上所有外力在旋轉過程中所做的全部功。

要計算外力做的功，可以把外力分解於旋轉軸線方向和旋轉軸線的垂直平面上。平行旋軸的外力分力，因爲跟質點位移垂直，是不能產生功的。現在命 S 代表質點 A 處的外力 F 在垂直旋轉軸線平面中的分力，它做的功是

$$r_1\,d\theta\,S\sin(r_1,\,S) \qquad (d)$$

所以外力所作的功，也可以說等於外力對於旋軸的力矩 $S\sin(r_1,S)\,r_1$ 同旋轉角 $d\theta$ 的乘積。根據(d)式，整個旋轉體上所有外力在發生旋轉角 $d\theta$ 過程中做的全部功是

$$\Sigma r_1\,d\theta\,S\sin(r_1,S)=Md\theta \qquad (e)$$

其中

$$M=\Sigma r_1\,S\sin(r_1,S)$$

指所有外力對於旋轉軸線的全部力矩。

根據以上的說明，一個旋轉體繞固定軸線旋轉一微分旋轉角 $d\theta$ 後，它全部動能的變化就等於所有外力做的全部功，所以應用(c)(e)兩式，可得

$$d\left(\frac{I\dot{\theta}^2}{2}\right)=M\ d\theta \tag{f}$$

積分上式，得

$$\frac{I\dot{\theta}^2}{2}-\frac{I\dot{\theta}_o^2}{2}=\int_{\theta_o}^{\theta}Md\theta \tag{78}$$

(78)式說明：一個剛體繞定軸旋轉一定角度後，速度由 $\dot{\theta}_o$ 變爲 $\dot{\theta}$，它的動能的全部變化，就等於剛體上所有外力在旋轉角自 θ_o 變爲 θ 過程中所做的全部功。

(f)式也可改成底下的形式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\dot{\theta}^2}{2}\right)=M\frac{d\theta}{dt} \tag{79}$$

這表示，動能的時間變化率應該跟外力所產生的功的時間變化率相等。外力做的功對於時間的變化率通常簡稱爲功率。功率的因次是「力×長度÷時間。」

功率的單位，在工業上用 1 kg m/s。這一單位的 75 倍就是所謂一匹馬力。「馬力」是英制單位，一匹馬力代表每秒鐘產生 550 呎磅功的功率。

例題和習題

510. 第 558 圖中的彈道擺，擺重等於 W，當量擺長等於 l，惰矩等於 I_o；槍彈重量等於 W_1。假設彈道擺受到射擊後的最大旋轉角是 θ_m，問槍彈原來的速度等於多大？

解：假設槍彈擊入後，彈道擺所達到的最大角速是 $\dot{\theta}_o$，它的動能就是 $I_o\dot{\theta}_o^2/2$。彈道擺達到最大旋轉角 θ 時，速度等於零，已無動能。所以(78)式中的左邊只是 $-\frac{I_o\dot{\theta}_o^2}{2}$ 一項。彈道擺上的外力只有重力和懸點的反作用力，所以外力對於懸點的力矩，不論 θ 值如何，都將等於 $-Wc\sin\theta$（負號指力矩的作用方向跟 θ 的增加方向相反）。外力力矩所做的功，因此，是

$$-\int_{o}^{\theta_m}Wc\sin\theta d\theta=-Wc(1-\cos\theta_m)$$

代入(78)式,可得

$$\frac{I_o\dot{\theta}_o^2}{2}=Wc(1-\cos\theta_m)$$

故

$$\dot{\theta}_o=\sqrt{\frac{2gc(1-\cos\theta_m)}{i_o^2}}$$

其中 i_o 代表彈道擺對於懸點的慣矩半徑。我們把上式代入§96第500題的結果中,就得到所求的槍彈速度是

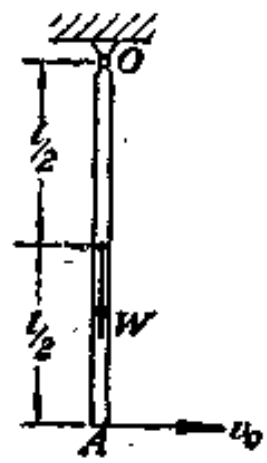
$$v=\frac{Wi_o}{W_1l}\sqrt{2gc(1-\cos\theta_m)}$$

511. 第558圖中的彈道擺,全部重量是 $W=1$kg,重心 C 到懸點的距離是 $c=32$cm,小振幅的擺動週期是 $\tau=3.22$s。槍彈重0.03kg,自水平方向以速度 v 擊入彈道擺的振動中心處,設量得擺動的最大旋轉角 $\theta_m=26°40'$,試問 v 等於多大?

(解: $v=694$m/s)

512. 第567圖中 OA 桿重 W,長 l,懸掛在 O 點,在圖平面中自由擺動。設 OA 桿恰巧能夠自鉛垂位置擺到水平位置,問 A 端的初速 v_0 必須等於多大?

(解: $v_0=\sqrt{3gl}$)



第567圖

513. 第512a圖中的扭擺,因直軸的慣矩 I_1,實際上不可能等於零,所以(73)式所得的擺動週期並不十分精確。現在要求正確的週期值 τ,試問 I_1 的影響應當怎樣計算?

解: 假定擺動時,直軸各切面的旋轉角正比於這一切面離開固定端的距離,那末直軸上距離固定端等於 x 處的一段微分長度 dx 的角速就是 $x\dot{\theta}/l$,它的動能是

$$\frac{I_1dx}{2l}\left(\frac{x\dot{\theta}}{l}\right)^2$$

所以全系統的總動能將等於

$$\frac{I\dot{\theta}^2}{2}+\int_0^l\frac{I_1}{2l}\left(\frac{x\dot{\theta}}{l}\right)^2dx=\frac{\dot{\theta}^2}{2}\left(I+\frac{1}{3}I_1\right) \qquad (g)$$

可見,計算一個扭擺週期,如果需要考慮直軸本身的影響,只要在扭擺慣矩中加入三分之一的直軸慣矩就可以。

514. 第512a圖的扭擺的重量是 $W=2.3$kg,半徑是 $r=25$cm;鋼製直軸,直徑是 $d=2.5$cm,長度是 $l=130$cm,單位體積重是 $W=0.00785$kg/cm³,剪力彈性模數 $G=8.1(10)^5$ kg/cm。試求這一扭擺的振動週期等於多大?

(解: $f=28.8$ 一次/s)

515. 試求第 531 圖中，重錘 Q 自靜止落下時，所達到的速度 v 跟位移(以最初位置爲起點)的函數關係，

解：最初，全系統的動能等於零。重錘 Q 落下一段距離 x 後，本身得到一速度 v，圓筒得到一角速 $\dot{\theta}=v/r$，所以全系統在這時候的動能是

$$\frac{Q}{g}\frac{v^2}{2}+\frac{W}{g}\frac{r^2}{2}\frac{v^2}{2r^2}=\frac{v^2}{2g}\left(Q+\frac{W}{2}\right) \qquad (h)$$

因最初動能等於零，所以這一動能也就是全系統動能的全部變化。不計軸承摩阻力，所有外力所做的功是

$$Qx \qquad (i)$$

全部動能變化(h)應跟外力所做的功(i)相等，故得

$$\frac{v^2}{2g}\left(Q+\frac{W}{2}\right)=Qx$$

或

$$v=\sqrt{2gx\left(\frac{Q}{Q+\frac{W}{2}}\right)}$$

516. 試應用功能方程式解第 474 題。

517. 一重 W、高 h 的正圓柱體，半徑是 r，可以繞中心軸 oo 自由旋轉(第 568 圖)。圓柱體表面刻有一條光滑的螺旋槽綫 $ABCDE$。槽綫的水平綫傾角是 φ。有一重 Q 的質點自 A 處沿螺旋槽綫下降。圓柱體原本靜止，質點滑下時，開始繞 oo 軸旋轉，試求質點在 E 處離開圓柱時，圓柱體的角速度 ω 等於多大？所有摩阻力完全可以不計。

解：質點離開圓柱時，圓柱對於 oo 軸的角動量是

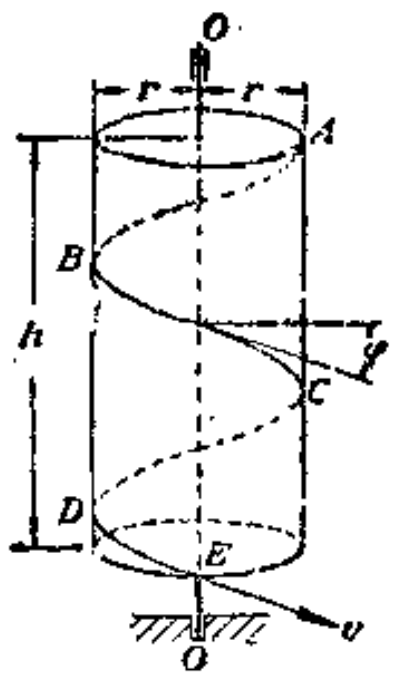
$$\frac{W}{g}\frac{r^2}{2}\omega$$

質點對於 oo 軸的角動量(或動量矩)是

$$\frac{Q}{g}r(r\omega-v\cos\varphi)$$

其中 v 指質點對於圓柱表面的速度。因所有外力對於 oo 軸的力矩總和應該等於零，同時又因全系統最初的角動量原等於零，所以根據角動量定理，可得

$$\frac{W}{g}\frac{r^2}{2}\omega+\frac{Q}{g}r^2\omega-\frac{Q}{g}rv\cos\varphi=0 \qquad (j)$$



第 568 圖

質點離開時，圓柱體的動能是

$$\frac{W}{g}\frac{r^2}{2}\frac{\omega^2}{2}$$

質點的動能是

$$\frac{Q}{g}\frac{(r\omega-v\cos\varphi)^2}{2}+\frac{Q}{g}\frac{v^2\sin^2\varphi}{2}$$

但最初全系統的動能等於零，所以以上兩式的和也就是全系統的全部動能變化。這一變化的來源是重力 Q 降落高度 h 所做的功 Qh，所以

$$\frac{W_1^2\omega^2}{4g}+\frac{Q}{g}\frac{(r\omega-v\cos\varphi)^2}{2}+\frac{Q}{g}\frac{v^2\sin^2\varphi}{2}=Qh \qquad (k)$$

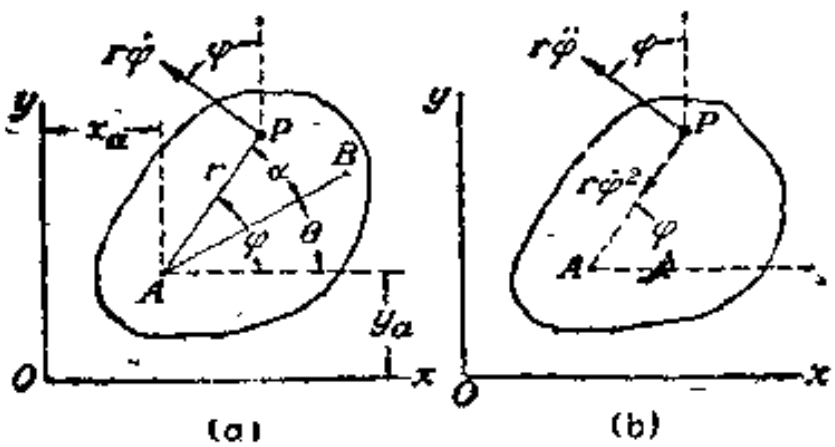
消去 (j) (k) 兩式中的 v，就得到

$$\omega=\frac{\sqrt{2gh}}{r\left(1+\frac{W}{2Q}\right)\sqrt{\frac{W}{W+2Q}+\mathrm{tg}^2\varphi}}$$

第十三章　剛體的平面運動

100. 剛體平面運動的運動幾何

一個運動的剛體在運動過程中，始終有一個平面跟一固定平面相合，這樣，它的運動就叫做**平面運動**。在這種運動狀態下，剛體內每一



第 569 圖

個質點都是沿一根平行於固定平面的平面曲線運動。最簡單的例子像一個正圓柱體或一個圓盤在光滑平面上的滾轉，如果中心軸線始終保持本身的相互平行，那這一圓柱或圓盤就是在作平面運動。剛體的這種運動可以完全由剛體在它旋轉軸線的垂直平面上的投影圖形的運動狀況來決定。這一平面圖形的位置又可以由其中一點的位置以及圖形繞過這一點而垂直於運動平面的軸線旋轉的旋轉角來決定。例如，第 569 圖所表示的投影圖形，它的位置就可以由其中任意一點 A 的坐標值 x_a 和 y_a，以及圖形中任意一直線 AB 跟 x 軸方向所構成的旋轉角 θ 完全決定。這種任意選定的 A 點通常叫做**極點**。圖形在 xy 平面上運動時，坐標值 x_a, y_a 和旋轉角 θ 隨着時間不斷變化。只要知道表示它們變化情況的底下三式：

$$x_a = f_1(t), \qquad y_a = f_2(t), \qquad \theta = f_3(t) \tag{80}$$

那運動狀態就已經完全確定。

一個剛體的平面運動，如果已知它的(80)式，那剛體上任何一點的速度和加速度都是很容易決定的。譬如第569a圖中的 P 點，它跟極點 A 的距離 r 以及 AP 線跟 AB 線的交角 α 是它在圖形中的坐標，令 $\varphi=\alpha+\theta$，就可得這 P 點在運動平面中的坐標：

$$\left.\begin{aligned} x&=x_a+r\cos\varphi \\ y&=y_a+r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

對時間微分上式，因 r 是一個常數，隨時間變化的只有 x_a，y_a 和 φ，故得

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=\dot{x}_a-r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y}&=\dot{y}_a+r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

(b)式說明：P 點在 x 和 y 軸方向的分速度分別等於極點 A 在同方向的分速度同 P 點因物體繞 A 點旋轉而產生的速度 $r\dot{\varphi}$，在同方向的分速度的代數和。這也就是說，P 點的速度乃是極點 A 的速度同 P 點對於 A 點的相對速度的向量和(幾何和)。

將(a)式對時間連續微分兩次，可得 P 點的兩個分加速度：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}&=\ddot{x}_a-r\dot{\varphi}^2\cos\varphi-r\ddot{\varphi}\sin\varphi \\ \ddot{y}&=\ddot{y}_a-r\dot{\varphi}^2\sin\varphi+r\ddot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

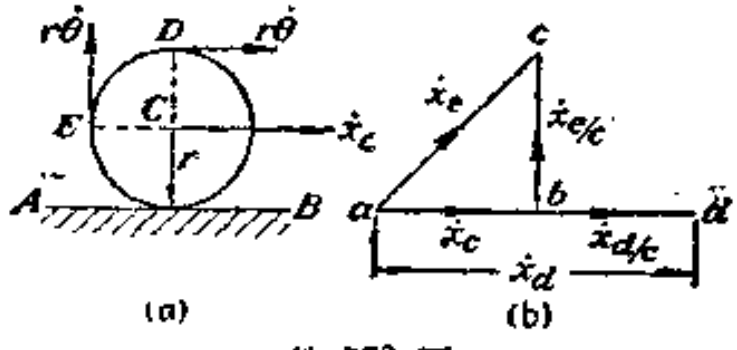
上式右邊第一項是極點 A 在 x 和 y 軸方向的分加速度。第二項是 P 點對於 A 點的法線加速度 $r\dot{\varphi}^2$，在兩坐標軸方向的分加速度。第三項是 P 點對於 A 點的切線加速度在兩坐標軸方向的分加速度。後二者都是因物體繞 A 點旋轉而引起的 P 點相對加速度，所以我們也可以說：P 點的加速度就是極點 A 的加速度同 P 點對於極點的相對加速度的向量和。總而言之，只要已知平面運動的(80)式，剛體上任何一點的速度和加速度就都可以完全決定。

例題和習題

518. 一個正圓柱體沿水平平面作無滑動的滾轉運動。設圓柱的中心軸 C 在某一時刻的速度是 $\dot{x}_c$ (見第 570 圖)，試求圓柱的 D，E 兩點在這一時刻的速度。

解： 因圓柱同平面間無滑動發生，故圓柱繞 C 點旋轉的角速度是 $\dot{\theta}=\frac{\dot{x}_c}{r}$。定 C 點爲極點，

D 和 E 點對於 C 點的相對速度都是 $r\cdot\dot{\theta}=r\cdot\frac{\dot{x}_c}{r}=\dot{x}_c$，它們的方向見第 570$a$ 圖。將 C 點的速度跟 D,E 兩點的相對速度分別舉行向量相加，就得 $\overline{ad}$ 和 $\overline{ac}$ 依次代表 D 和 E 點的速度如第 570b 圖。從圖上可看到：D 點的速率等於 $2\dot{x}_c$，E 點速率等於 $\sqrt{2}\dot{x}_c$。



第 570 圖

519. 設第 570a 圖中，圓柱中心軸 C 在某一時刻除開有一速度 $\dot{x}_c$ 外，還有一水平加速度 $\ddot{x}_c$。試求 E 點加速度在水平和鉛垂方向的分加速度 $\ddot{x}_e$ 和 $\ddot{y}_e$。

(解：$\ddot{x}_e=\ddot{x}_c+\frac{\dot{x}_c^2}{r}$，$\ddot{y}_e=\ddot{x}_c$)

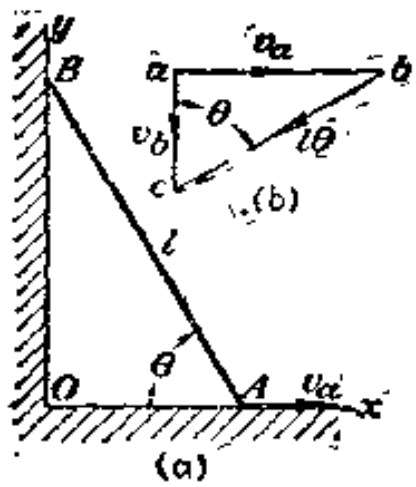
520. 一 AB 桿，兩端分別擱在牆面和地面上如第 571 圖。A 端以不變速度 v_a 向圖中所畫的方向沿地面運動。問 AB 桿跟地面成 θ 交角時，它的角速度以及 B 端沿牆面下降的速度 v_b 各等於多大？

解：定 A 端爲極點。B 端的速度 v_b 應等於 v_a 同 B 點對 A 點的相對速度 $l\dot{\theta}$ 的向量和。先畫出 $\overline{ab}$ 代表 v_a（第 571b 圖），因 AB 桿繞 A 點旋轉，故 B 點的相對速度必然垂直於 AB。引 bc 垂直於 AB，跟 a 點的鉛垂線相交於 c 點，就得代表 v_b 的 $\overline{ac}$。從圖上可看到

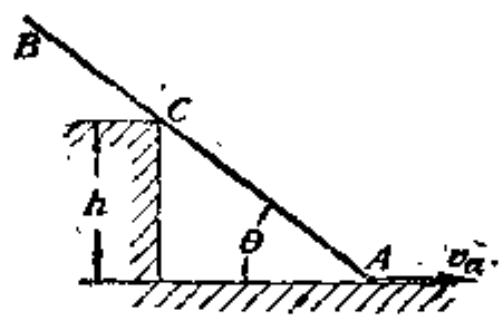
$$v_b=v_a\operatorname{ctg}\theta,\quad \dot{\theta}=\frac{v_a}{l\sin\theta}$$

521. 第 572 圖中，AB 桿的 A 端以固定的水平速度 v_a 沿地面運動。試求 AB 桿的角速度 $\dot{\theta}$ 同 AB 桿跟水平方向的交角 θ 間的關係。

(解：$\dot{\theta}=\frac{v_a}{h}\sin^2\theta$)



第 571 圖



第 572 圖

522. 第 573 圖中的原動機，曲軸半徑 OA 長 $r=25\text{cm}$，推桿 AB 長 $l=60\text{cm}$，轉速固定是 $\omega=60\pi$ 轉/s。設圖中 $\angle BOA=45°$，問活塞的速度 $\dot{y}_b$ 和加速度 $\ddot{y}_b$ 應該如何決定？

解：先用比例尺精確畫出原動機的圖形如第 573a 圖。然後，再畫向量圖如第 573b 圖和第 573c 圖，就可得 $\dot{y}_b$ 和 $\ddot{y}_b$ 的代表向量。它們的量度是：

$$\dot{y}_b=435\text{m/s},\quad \ddot{y}_b=6450\text{m/s}^2$$

523. 第 574 圖中 AA 和 BB 兩平板的速度各爲 v_1 和 v_2。設夾在兩平板間的圓盤不會滑動，只能繞平板滾轉，試求圓盤旋轉的角速度 $\dot{\theta}$ 和中心 C 的速度 v_c。題中假定 $v_1>v_2$。

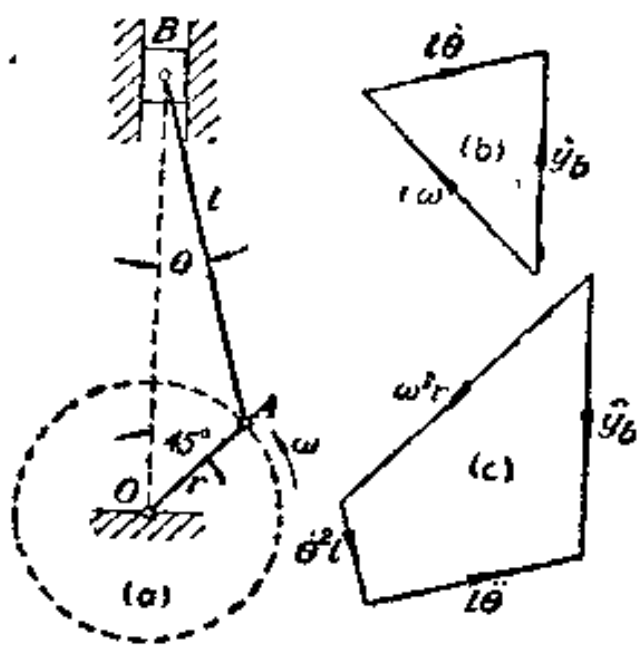
解：m 和 n 點的速度，因圓盤和平板間無滑動發生，故一定也等於 v_1 和 v_2。選定 C 作爲極點，得 m 和 n 點對於 C 點的相對速度 $a\dot{\theta}$，故

$$v_1=v_c+a\dot{\theta}$$

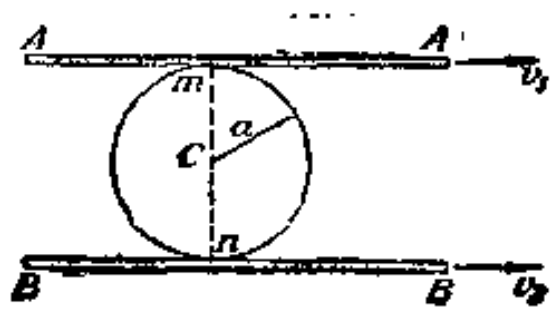
$$v_2=v_c-a\dot{\theta}$$

解以上兩式，就得

$$v_c=\frac{v_1+v_2}{2},\quad \dot{\theta}=\frac{v_1-v_2}{2a}$$



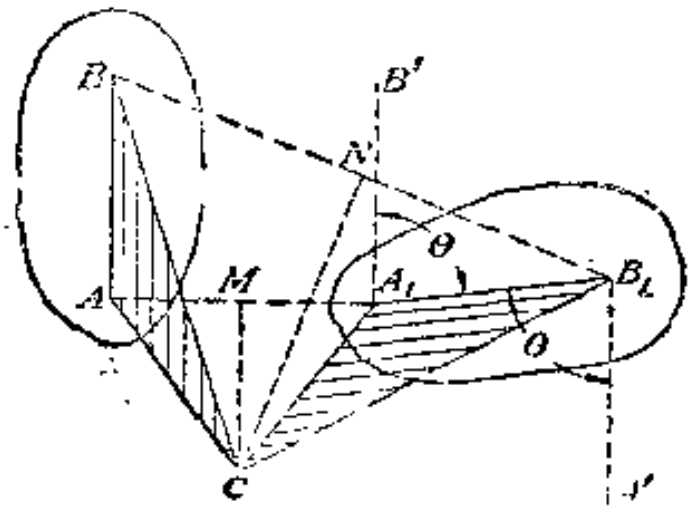
第 573 圖



第 574 圖

101. 瞬時中心

一個平面圖形的位移，根據 § 100 的討論，在任何情形下都可以看作由它的「移動」跟它繞極點的「轉動」所聯合組成的。譬如第 575 圖中的圖形，它由圖中 AB 位置運動到 A_1B_1 位置，我們設想 A 是極點，讓圖形先由 AB 位置平行移動到圖中 A_1B' 位置，然後，又繞極點旋轉一 θ 角，它顯然就可以達到 A_1B_1 位置。不過，設想 B 是極點，圖形先平行移動到 B_1A' 位置，再繞極點旋轉一 θ 角，結果還是一樣；圖形同樣也可達到 A_1B_1 位置。可見圖形的任何平面運動都可以看做是移



第 575 圖

動和旋轉的結合。 此外，還可以看到，圖形在移動過程中，它極點的位移要看極點的位置如何而定；而它繞極點的旋轉角 θ 却完全跟極點的位置無關，永遠是一個固定值。 極點的位移既然要看它的位置而定，那自然一定能找到一個位移會等於零的極點位置。 例如，第 575 圖中的 C 點，它就是這樣一個極點。 圖形只要繞 C 點旋轉 θ 角，就能直接到達 A_1B_1 位置。 至於 C 點的位置，我們只要引 AA_1 和 BB_1 兩連接線的垂直平分線 MC 和 NC，就可以由兩線的交點來決定。 因爲 ΔCAB 跟 ΔCA_1B_1 全等，所以可以由圖形繞 C 點的旋轉把它們疊合起來。AB 跟 A_1B_1 既然能重合，先後兩位置的圖形自然也可完全重合。

研究物體的切面圖形在運動平面中所發生的運動，我們可以把整個連續不斷的運動看成由一系列的無限小位移所構成。這一系列的位移次第發生於無限短暫的一瞬間又一瞬間，根據前面的討論，又可看作是圖形在每一瞬間繞一個特定的極點發生無限小旋轉的結果。這種特定的極點通常就稱爲運動的**瞬時中心**。例如第 518 題（§ 100）的圓柱，因爲它只有滾轉，沒有滑動，所以跟水平平面接觸的那一點，速度始終等於零。這接觸點就是運動的「瞬時中心」。 按瞬時中心的意義，圓柱邊上任意一點的速度當然一定在這一點跟瞬時中心連接線的垂直方向，大小等於連接線的長度跟圓柱角速的乘積。圓柱運動時，瞬時中心的位置也隨着它沿 AB 平面運動，所以瞬時中心跟 § 100所說的「極點」完全不同。極點在圖形中是一個固定點；瞬時中心却是不斷變動的。

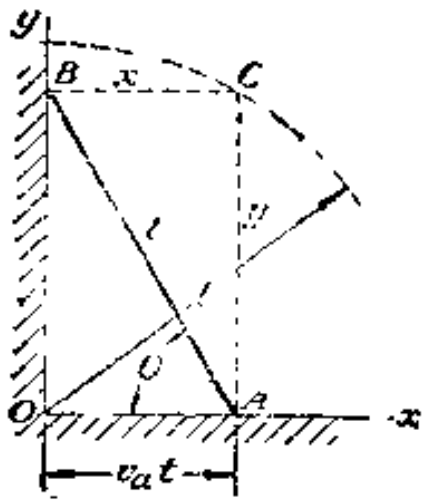
已知圖形中任意兩點在某一瞬刻的速度，瞬時中心的位置就很容易確定。 例如第 576 圖的一根長 l 的 AB 桿，它兩端 A，B 分別沿 x，

y 軸運動。因 A 端速度在水平方向，所以瞬時中心必須在過 A 點的鉛垂線上。另一方面，因 B 端速度在鉛垂方向，瞬時中心又必須在過 B 點的水平線上，所以瞬時中心 C 非在 A 點鉛垂線和 B 點水平線的交點上不可。令 x, y 代表 C 點坐標，按圖中關係可得

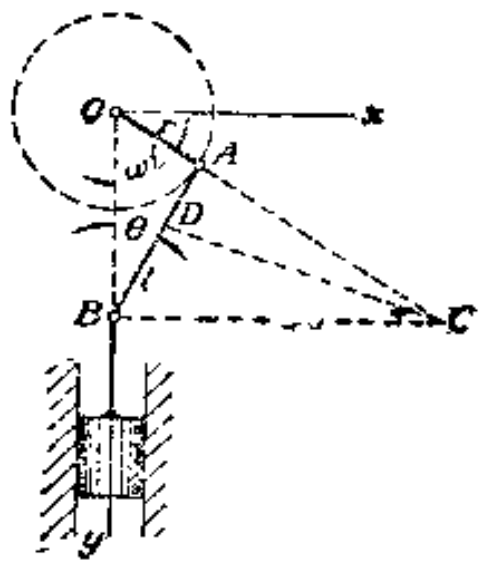
$$x^2+y^2=l^2$$

這表示瞬時中心 C 是沿着一個以原點爲圓心、l 爲半徑的圓周在變動。

再如第 577 圖中原動機的推桿 AB。它 A 端沿半徑 OA 的垂直方向運動，B 端沿鉛垂方向運動，所以瞬時中心 C 就在過 B 點的水平線跟 OA 延長線的交點上。



第 576 圖



第 577 圖

若已知一點的速度大小和速度方向以及另外一點的速度方向，那應用瞬時中心來決定切面圖形的角速度，以及其中各點的速度，就最方便。例如第 577 圖中，若已知 OA 的角速 ω，我們就知道了 A 點的速度大小和速度方向，另外，B 點速度是鉛垂方向，也是知道的，按以上方法確定瞬時中心 C 後，我們就可以把推桿 AB 在這一瞬刻的運動看作繞 C 點的旋轉。命 $\dot{\theta}$ 代表 AB 桿的角速，可得

$$AC\cdot\dot{\theta}=r\omega$$

所以

$$\dot{\theta}=\frac{r\omega}{AC}$$

第 577 圖如果是按比例畫成的，AC 就可以直接在圖上量出來。根據

上式算出 $\dot{\theta}$ 後，B 點的速度 v_b 又可以按下式計算：

$$v_b = BC \cdot \dot{\theta}$$

BC 當然也可以由圖上量出來。同樣，推桿 AB 上任何一點 D 的速度 v_d 也可以決定如下：

$$v_d = DC \cdot \dot{\theta}$$

它的方向垂直於 DC。

例題和習題

524. 試求第 578 圖中曲軸 O_1A 和 O_2B 的角速度 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 的比值等於多大？

解：瞬時中心 C 的位置如圖。因

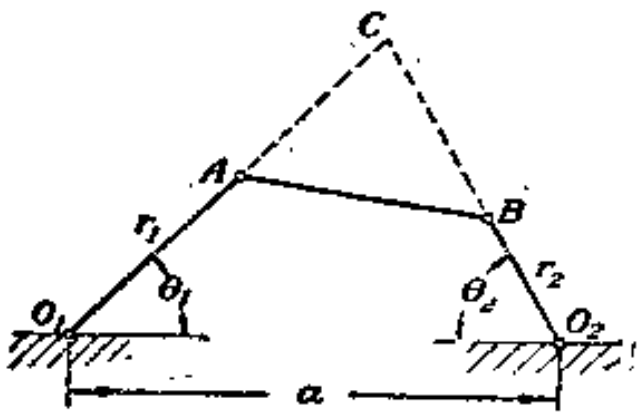
$$\frac{r_1\dot{\theta}_1}{AC} = \frac{r_2\dot{\theta}_2}{BC}$$

故得

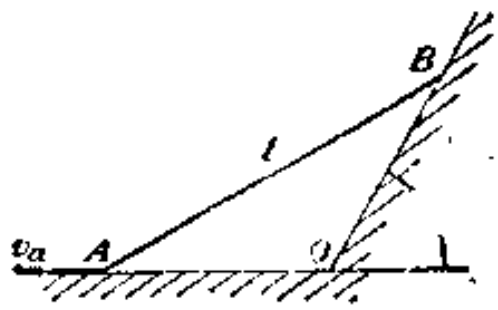
$$\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{AC}{BC}$$

若已知 r_1，r_2，θ_1，θ_2 和 a 的大小，我們按比例畫出圖來，由圖上量出 AC 和 BC 的長度，就可以算出所求的比值。

525. AB 桿長 l，兩端分別沿成 α 交角的兩平面運動如第 579 圖。A 端的水平速度 v_a 固定不變，試證明瞬時中心的軌跡是一個以 O 爲圓心、$l/\sin\alpha$ 爲半徑的圓周。



第 578 圖



第 579 圖

526. 假定第 576 圖的 AB 桿從它的鉛垂位置開始運動。A 端沿 x 軸等速運動，速度等於 v_a。試求 AB 的角加速度 $\ddot{\theta}$ 跟時間的函數關係。

解：瞬時中心 C 已決定。AB 桿的角速度是 $\dot{\theta} = v_a/AC$。從圖上，可以得到

$$AC = \sqrt{l^2 - v_a^2t^2}$$

故

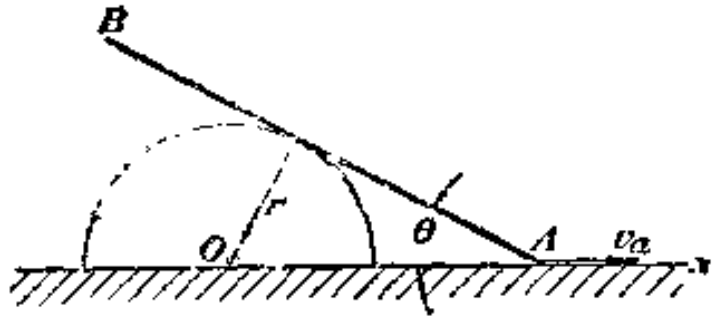
$$\dot{\theta} = \frac{v_a}{\sqrt{l^2 - v_a^2t^2}}$$

對時間微分上式，就得

$$\ddot{\theta}=\frac{v_a{}^2t}{(l^2-v_a{}^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

527. AB 桿擱在一個半徑等於 r 的半圓柱上如第 580 圖。A 點以速度 v_a 沿平面等速運動。試求 AB 的角速度 $\dot{\theta}$ 跟旋轉角 θ 的關係函數。

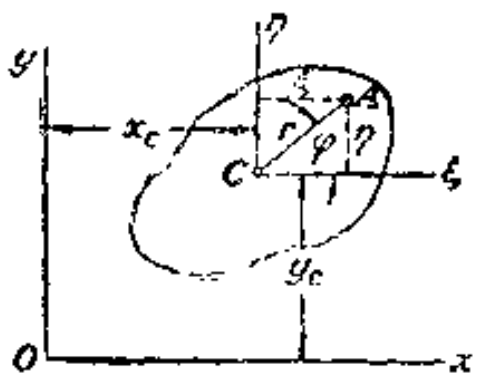
$$\left(\text{解：}\ \dot{\theta}=\frac{v_a\sin^2\theta}{r\cos\theta}\right)$$



第 580 圖

102. 平面運動中移動和轉動的相互獨立性

重心的運動



第 581 圖

第 581 圖中是一個物體的通過重心 C 而平行於運動平面的切面圖形。討論這一物體在 xy 平面中的運動，可選定重心 C 作爲極點。C 點坐標是 x_c 和 y_c。現在在 C 點再建立一個平行於 x, y 軸並且隨着物體移動的坐標軸系 ξ,η。這樣，物體中任意一點 A 的坐標，按 § 100 中 (a) 式，就將是：

$$\left.\begin{aligned} x&=x_c+\xi \\ y&=y_c+\eta \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

在圖上很明顯的看得出，其中

$$\xi=r\cos\varphi \qquad \text{和} \qquad \eta=r\sin\varphi$$

物體發生移動時，x_c 和 y_c 不斷變化；轉動時，ξ、η 不斷變化。

要決定 A 點速度在 x 和 y 軸方向的投影只要對時間微分 (a) 式，就可得：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{x}_c+\dot{\xi}\\ \dot{y}&=\dot{y}_c+\dot{\eta}\end{aligned}\right\}\qquad(b)$$

再對時間微分(b)式，又可得 A 點加速度在 x 和 y 軸方向的投影：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=\ddot{x}_c+\ddot{\xi}\\ \ddot{y}&=\ddot{y}_c+\ddot{\eta}\end{aligned}\right\}\qquad(c)$$

若 A 處的質點的質量等於 dm，那末這一質點的運動方程式就是：

$$\left.\begin{aligned}dm(\ddot{x}_c+\ddot{\xi})&=X_i\\ dm(\ddot{y}_c+\ddot{\eta})&=Y_i\end{aligned}\right\}\qquad(d)$$

其中 X_i, Y_i 代表質點上各力合力在兩軸線方向的分力。

把物體中所有各質點的運動方程式(d)加成總和，就可得：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma dm\,(\ddot{x}_c+\ddot{\xi})&=\Sigma X_i=X\\ \Sigma dm\,(\ddot{y}_c+\ddot{\eta})&=\Sigma Y_i=Y\end{aligned}\right\}\qquad(e)$$

其中 X, Y 是物體上所有外力的合力在軸線方向的分力。因爲內力是質點間的作用力和反作用力，自己會成對抵消，對物體運動是沒有任何影響的。

因 ξ, η 是通過物體重心的兩軸線，所以

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\xi\,dm=0 \qquad \Sigma\eta\,dm=0\\ \text{因之}\quad&\Sigma\dot{\xi}\,dm=0 \qquad \Sigma\dot{\eta}\,dm=0\\ &\Sigma\ddot{\xi}\,dm=0 \qquad \Sigma\ddot{\eta}\,dm=0\end{aligned}\right\}\qquad(f)$$

以(f)最後兩式代入(e)式，就可得：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}_c=X \quad 和 \quad \frac{W}{g}\ddot{y}_c=Y \qquad (81)$$

其中 $W/g=\Sigma dm$ 是物體的全部質量。我們把(81)式跟質點運動方程式比較一下立刻就知道，物體發生平面運動時，它重心的運動完全跟所有質量集結在這重心點，所有外力也都按原來方向集中作用在這重心

點的情形一樣。此外，因物體上任何一個力都能由作用在重心上一個單力和另外一個力偶來代替，全部外力因此也可以由作用在物體重心的它們的合力和一個總力偶來代表。(81)式說明了，這外力合力產生的重心運動完全跟總力偶產生的旋轉無關。

以上的結論雖然是由假定物體作平面運動而得到的。實際上，這一結論也適用於物體的一般運動。我們可以很容易證明，任何物體的重心運動總永遠像物體質量全部集結於重心並且所有外力也集中作用在重心的質點的運動一樣。

根據以上討論，作用在一個物體或一系物體上的外力，若是合力等於零，那這一個物體或一系物體的重心，就必然只可能作均勻直線運動。譬如太陽系，若不計其他恆星的引力，那根據這個道理就是不研究各行星和太陽的個別運動，也可以知道：全系統的重心一定在作均勻直線運動。

再如炮彈的運動，我們同樣也可以斷定，它的任何旋轉都不會影響它重心的運動，它重心純然像一個受重力和空氣阻力集中作用的質點。爆炸時，炮彈上只有內力在變化。自全系統來看內力的總和是等於零。所以，雖然彈片飛逸，但炮彈重心仍跟未爆炸前相同，繼續原來的運動，是可以斷言的。

繞重心軸線的旋轉

在討論平面運動時，物體的轉動，可應用§96的角動量定理來說明。物體繞垂直於 xy 平面的軸線 z 旋轉時，它角動量的變化率應當等於所有外力對同軸的力矩。

計算物體(第581圖)的角動量，可令 dm 代表在任一 A 點的質點的質量。這一質點對於圖中 z 軸的動量矩按定義應該等於

$$dm(\dot{y}x-\dot{x}y) \tag{g}$$

根據(a)(b)兩式，這(g)式又應當等於

$$dm\left[(\dot{y}_c+\dot{\eta})(x_c+\xi)-(\dot{x}_c+\dot{\xi})(y_c+\eta)\right] \tag{h}$$

把物體上所有各質點的動量矩加成總和，就得到整個物體對 z 軸的角動量如下：

$$\mathbf{M}_z=\Sigma dm\left[(\dot{y}_c+\dot{\eta})(x_c+\xi)-(\dot{x}_c+\dot{\xi})(y_c+\eta)\right]=$$

$$\Sigma dm(x_c\dot{y}_c-y_c\dot{x}_c)+\Sigma dm(\dot{\eta}\xi-\eta\dot{\xi})+x_c\Sigma\dot{\eta}dm+\dot{y}_c\Sigma\xi dm-$$
$$y_c\Sigma\dot{\xi}dm-\dot{x}_c\Sigma\eta dm$$

按(f)式，上式最後四項都應等於零，故得：

$$\mathbf{M}_z=\frac{W}{g}(x_c\dot{y}_c-\dot{x}_cy_c)+\Sigma(\dot{\eta}\xi-\dot{\xi}\eta)dm \qquad (i)$$

其中 $W/g=\Sigma dm$ 是物體的全部質量。(i)式右邊，第一項代表在物體重心處的一個質點的動量矩，這質點的質量跟物體全部質量相等；第二項代表物體對於過重心而平行於 z 軸的軸線的角動量，這角動量由物體繞重心 C 旋轉而來。可見一個作平面運動的物體，它對於垂直於運動平面的軸線的角動量是由底下兩部份構成的：

(1) 把物體看作一個全部質量 $\frac{W}{g}$ 集結在物體重心的質點，而得到的對於這一軸線的動量矩。

(2) 物體對於通過重心而垂直於運動平面一軸線的角動量。

若命 $\dot{\theta}$ 代表物體對於過 C 點而垂直於運動平面的軸線的角速度，(i)式第二項就等於 $I_c\dot{\theta}$，跟繞固定軸線旋轉的剛體的角動量一樣。所以，(i)式可化爲

$$\mathbf{M}_z=\frac{W}{g}(x_c\dot{y}_c-y_c\dot{x}_c)+I_c\dot{\theta} \qquad (j)$$

其中 I_c 指物體對於過重心 C 而垂直於運動平面的軸線的惰矩。

現在應用角動量定理命 $\mathbf{M}_z$ 的變化率等於所有外力對 z 軸的全部力矩 $\mathbf{M}_z$，就可得

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{W}{g}(x_c\dot{y}_c-y_c\dot{x}_c)+I_c\dot{\theta}\right]=M_z=Yx_c-Xy_c+M_c \qquad (k)$$

其中 X 和 Y 分別指外力合力在 x 和 y 軸方向的分力；M_c 指這一合

力對重心 C 的力矩。 (k)式經微分後，又可寫成如下形式：

$$\frac{W}{g}(x_c\ddot{y}_c-y_c\ddot{x}_c)+I_c\ddot{\theta}=Yx_c-Xy_c+M_c \tag{l}$$

現在再回頭看(81)式，以 y_c，x_c 乘其中第一、第二兩式，然後相減就可得

$$\frac{W}{g}(x_c\ddot{y}_c-y_c\ddot{x}_c)=Yx_c-Xy_c \tag{m}$$

比較$(l)(m)$兩式，立刻就知道：

$$I_c\ddot{\theta}=M_c \tag{82}$$

由這一結果可得出兩個重要的結論：

(1) (82)式跟剛體繞定軸旋轉的運動方程式在形式上完全相同。這說明：物體上的外力所產生的旋轉，跟重心軸線是一根固定軸線時一樣，所以討論物體繞重心的旋轉運動，可以不致慮重心的運動，可以把重心看作靜止不動。

(2) (82)式也可以改寫成底下這樣的形式：

$$\frac{d}{dt}(I_c\dot{\theta})=M_c \tag{82'}$$

可見在剛體的平面運動中，對於一根垂直於運動平面的重心軸線，不論它是不是一根固定軸線，角動量定理總是同樣成立的。

103. 剛體平面運動的運動方程式

§ 100 中已說明過，要完全決定一個剛體的平面運動，需要有三個坐標值：兩個決定剛體中一點的位置，一個決定剛體對於過這一點軸線的旋轉角。計算這三個坐標值，可應用在 § 102 導出的(81)(82)兩式，所以剛體的平面運動方程式歸納起來就是底下三式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{W}{g}\ddot{x}_c&=X\\ \frac{W}{g}\ddot{y}_c&=Y\\ I_c\ddot{\theta}&=M_c\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

§102 中已指出過，這些運動方程式表明了如下兩個事實：第一，物體重心的運動，完全跟重心處的一個質量等於物體全部質量的質點，在推移到這一點的物體上全部外力的作用下所發生的運動相同。第二，物體的旋轉又完全跟重心軸線是一根固定軸線的旋轉相同。因此，在物體的平面運動中，如何決定物體的重心運動，不過是一個簡單的質點曲線運動問題；如何決定物體的旋轉，也只是一個簡單的剛體繞定軸旋轉問題。

以上應用角動量定理導出(83)式的過程中，我們用了固定軸 z 作爲軸線。其實，用其他軸線，這個式子同樣可以成立。譬如，我們知道物體對於 x 或 y 軸的角動量變化率，那物體上所有外力對於這兩根定軸的力矩就可以由相應的變化率決定。這些外力，假使存在的話，也僅僅是運動平面的垂直平面中的一個力偶；不會在(83)式中出現。它們代表把物體運動限制在平行於某一平面所必需的約束力。不過在工程問題中，重心的運動平面多數都是物體的對稱平面，所以通過重心 C 而垂直於運動平面的軸線也就是物體的惰矩主軸。這樣，物體就不需要垂直運動平面的約束力來維持它的平面運動了。

值得注意的是：(83)式中只出現了物體的質量以及它對重心軸線的惰矩；物體實際形狀如何並不直接影響運動方程式——即運動狀況。因此，我們可以任意用一個物體代替原來物體，只要兩者的質量、重心位置和對重心軸線的惰矩三樣都相同，運動就不會改變。

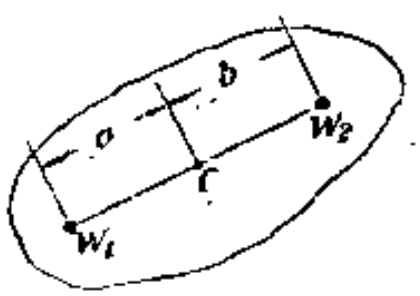
例如，一個重心的運動平面就是對稱面的物體，這物體就可以如第 582 圖用剛性連結的兩個質點來代替。這兩質點同在通過物體重心的直線上，它們的重量 W_1 和 W_2 應該

$$W_1+W_2=W \tag{a}$$

其中 W 指物體的重量。兩質點中有一個質點，它到重心 C 的距離 a 是可以任意選擇的。不過第二個質點到 C 的距離 b 就必須

$$W_1a=W_2b \tag{b}$$

才能使重心位置不改變。此外，因惰矩 I_c 也不能改變，所以還必須



第 582 圖

$$I_c=\frac{W_1}{g}a^2+\frac{W_2}{g}b^2 \qquad (c)$$

由(a)(b)(c)三式，W_1，W_2 和 b 就可決定如下：

$$b=\frac{i_c^2}{a}, \qquad W_1=\frac{Wi_c^2}{a^2+i_c^2}, \qquad W_2=\frac{Wa^2}{a^2+i_c^2} \qquad (d)$$

這種把物體簡化爲兩個質點的方法，對於研究桿形物體(譬如，往復式原動機的推桿)的運動最有用。

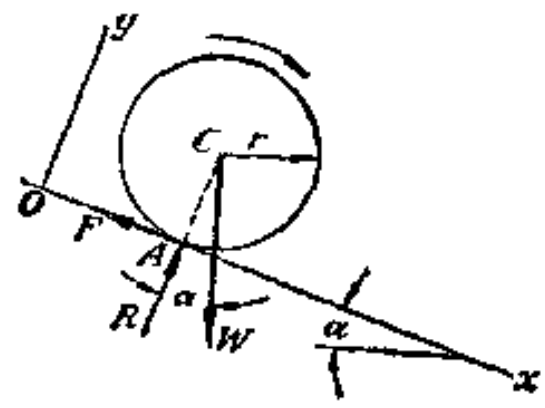
應用(83)式，可解決兩種問題：(1)已知物體的運動，求產生這運動的作用力；(2)已知作用力，求所產生的物體運動。

例題和習題

528. 一圓柱重 W，沿一斜面無滑動下滾(第583圖)。設物體與斜面間的摩擦係數等於 F，試求圓柱重心 C 的加速度 $\ddot{x}_c$ 以及不生滑動的最大斜面傾斜角 α 各等於多大？

解：選定 x，y 軸如圖。令 r 代表圓柱的半徑，根據(83)式，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{W}{g}\ddot{x}_c=W\sin\alpha-F\\&\frac{W}{g}\ddot{y}_c=W\cos\alpha-R=0\\&I_c\ddot{\theta}=Fr\end{aligned}\right\} \qquad (e)$$



第 583 圖

式中 F 是接觸點 A 處的全部摩阻力，R 是斜面對物體的反作用力。圓柱不在斜面上滑動，接觸點 A 的速度自然在任何時刻都等於零，可見 A 點就是運動的瞬時中心。因此，圓柱的角加速是 $\ddot{\theta}=\ddot{x}_c/r$，代入(e)中最後一式，可得

$$I_c\frac{\ddot{x}_c}{r}=Fr \qquad (f)$$

消去(e)的第一式和(f)式中的摩阻力 F 得

$$\left(\frac{W}{g}+\frac{I_c}{r^2}\right)\ddot{x}_c=W\sin\alpha \qquad (g)$$

可見重心 C 沿斜面等加速下降的加速度是

$$\ddot{x}_c=\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{i_c^2}{r^2}} \qquad (h)$$

其中 i_c 指物體對於中心軸線 C 的慣矩半徑。

如果斜面沒有摩阻力，物體就將無滾轉滑下，它重心的加速度是 $g\sin\alpha$。物體因摩阻力關係作無滑動滾轉時，它的重心加速度根據(h)式要按底下這一比值減少：

$$\frac{r^2}{r^2+i^2_c} \tag{l}$$

物體若是一個實心圓柱 $i^2_c=\frac{1}{2}r^2$，這比值等於 $\frac{2}{3}$；物體若是一薄圓筒，$i^2_c=r^2$ 這比值約等於 $\frac{1}{2}$；物體若是一個圓球，$i^2_c=\frac{2}{5}r^2$，這比值就等於 $\frac{5}{7}$。所以，讓半徑相等的三種形狀物體同時自同一高度不生滑動滾下，那就圓球最快，圓柱次之，圓筒最慢。

加速度 $\ddot{x}_c$ 決定後，代入(e)中第一式就得到全部摩阻力

$$F=\frac{Wi^2_c\sin\alpha}{r^2+i^2_c} \tag{i}$$

物體沿斜面滾下，要完全沒有滑動，那只有摩阻力 F 小於它的最大值 $\mu W\cos\alpha$ 時才可能；也就是說，必須

$$\frac{Wi^2_c\sin\alpha}{r^2+i^2_c}<\mu W\cos\alpha$$

或

$$\operatorname{tg}\alpha<\frac{\mu(r^2+i^2_c)}{i^2_c} \tag{k}$$

斜面的傾斜角若不能滿足(k)式，物體就必然會連滾帶滑而下。這樣，重心加速度 $\ddot{x}_c$ 跟物體角加速度 $\ddot{\theta}$ 就沒有幾何上的關係。換句話說，$\ddot{\theta}$ 不會等於 $\ddot{x}_c/r$。在這樣情形下，我們必須將 $F=\mu W\cos\alpha$ 代入(e)中第一式及第三式內，才能決定這兩種加速度的大小。

529. 一實心圓柱體和一圓球，半徑相同，同時在斜面頂上，由靜止出發，沿斜面無滑動滾下。設圓球到達斜面底時，圓柱還在它後面 1.2m 處，問斜面全長 s 等於多少？

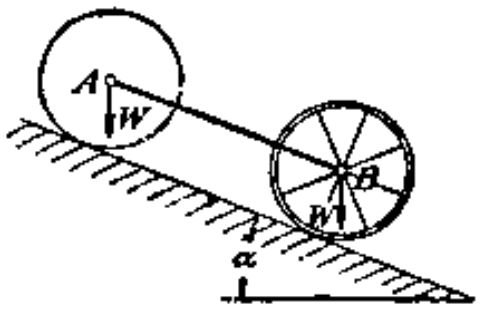
(解：$s=18$m)

530. 一實心圓柱和一圓球，重量同等於 W，半徑同是 r，由一根質量可以不計的 AB 桿相互連結在一斜面上，作無滑動的滾轉運動(第 584 圖)。試求它們的加速度 $\ddot{x}$ 和 AB 中的內力 S（斜面的傾斜角為 α）。

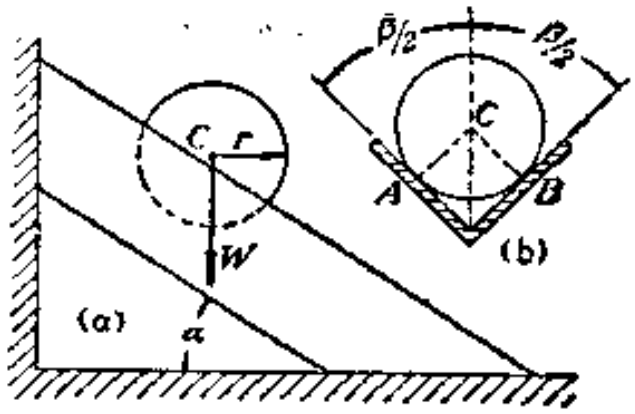
(解：$\ddot{x}=\frac{4}{7}g\sin\alpha$，$S=\frac{W}{7}\sin\alpha$ 壓力)

531. 第 585a 圖中是一 V 形槽。槽軸跟水平面成 α 交角。一個重 W 的圓球，半徑等於 r，沿槽無滑動滾下。槽的切面如第 585b 圖。球和槽間在 AB 兩接觸處的摩擦係數是 μ。試求圓球中心的加速度 $\ddot{x}_c$ 以及圓球不至於發生滑動的 α 角應各等於多大？

$$\left(\text{解：}\ddot{x}_c=\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{2}{5}\frac{1}{(\sin^2\beta/2)}},\ \operatorname{tg}\alpha<\mu\left(\frac{5}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\right)$$



第 584 圖



第 585 圖

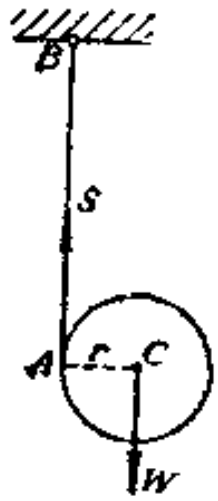
532. 一個半徑等於 r、重量等於 W 的圓柱，由一根繞在它表面的繩子掛在一固定點 B 的下面如第 586 圖。現在讓它自由墜落。試證明它的重心 C 一定是沿鉛垂綫下降，並求出 C 的加速度 $\ddot{x}_C$ 和繩子的張力 S 各等於多大？

$$\left(\text{解: } \ddot{x}_C=\frac{2}{3}g,\ S=\frac{W}{3}\right)$$

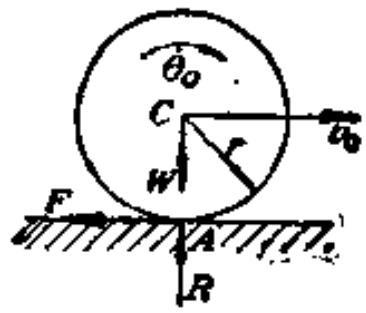
533. 我們沿一摩擦係數等於 μ 的水平平面以初速 v_0、初角速 $\dot{\theta}_0$ 射出一個半徑等於 r 的圓球(第 587 圖)。試討論這圓球的運動情形。

解: 若 $v_0=r\dot{\theta}_0$，A 點的速度等於零，A 點就是運動的瞬時中心。在這情形下，圓球只滾轉而不滑動，重心速度的大小是一個固定值。

若 $v_0>r\dot{\theta}_0$，接觸點 A 必然有滑動發生，作用在 A 點的全部摩擦力就將是圖中的 $F=\mu W$。圓球運動方程式因此是：



第 586 圖



第 587 圖

$$\frac{W}{g}\ddot{x}_C=-\mu W,\quad \frac{2}{5}\,\frac{W}{g}r^2\ddot{\theta}=\mu Wr$$

積分後，得：

$$\dot{x}_C=v_0-\mu gt,\qquad \dot{\theta}=\dot{\theta}_0+\frac{5\mu g}{2r}t \tag{1}$$

這兩式只適用於圓球速度達到 $\dot{x}_C=r\dot{\theta}$ 以前。換句話說，等到

$$v_0-\mu gt=r\dot{\theta}_0+\frac{5\mu g}{2}t$$

或

$$t=\frac{v_0-r\dot{\theta}_0}{\mu g\left(1+\frac{5}{2}\right)} \qquad (m)$$

時，圓球將開始作無滑動的滾轉。之後，重心就以固定速度 $\dot{x}_c$ 繼續前進。$\dot{x}_c$ 值可以由(l)(m)兩式計算，結果是：

$$\dot{x}_c=\frac{5}{7}v_0+\frac{2}{7}r\dot{\theta}_0 \qquad (n)$$

若 $v_0<r\dot{\theta}_0$，那 A 點還是有滑動發生，不過摩擦力 $F=\mu W$ 却跟圓中方向相反。圓柱運動方程式是：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}_c=W\mu, \qquad \frac{2}{5}\cdot\frac{W}{g}r^2\ddot{\theta}=-\mu Wr$$

積分後，得：

$$\dot{x}_c=v_0+\mu gt, \quad \dot{\theta}=\dot{\theta}_0-\frac{5\mu g}{2r}t$$

這兩式直到 $\dot{x}_c=r\dot{\theta}$ 時還成立。換句話說，直到 $t=\frac{2}{7}\,\frac{r\dot{\theta}_0-v_0}{\mu g}$ 時，圓球才開始作無滑動滾轉，重心速度將同(n)式一樣，是

$$\dot{x}_c=\frac{5}{7}v_0+\frac{2}{7}r\dot{\theta}_0$$

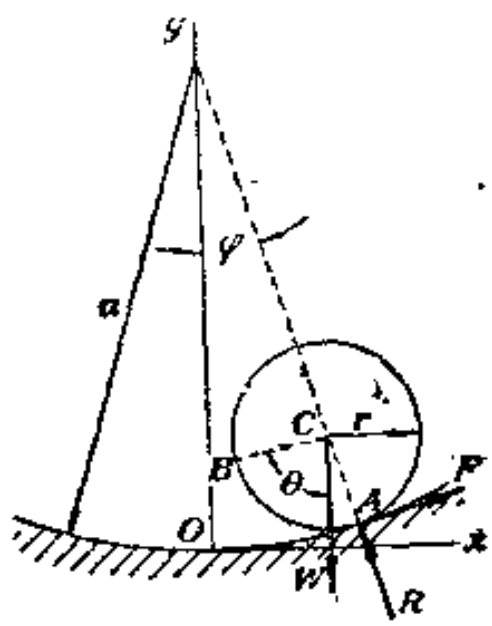
531. 一個半徑等於 r、重量等於 W 的圓柱體在一個半徑等於 a 的空圓筒內作無滑動的滾轉擺動（第 538 圖）。假定圓柱離開平衡位置的位移很小，試問它在圓筒中的擺動週期等於多大？

解：由圖中可看到，圓柱重心 C 的運動路綫是一根半徑等於 $(a-r)$ 的圓弧。作用在小圓柱的外力是重力 W 和圓筒反作用力 R 以及一個沿切綫方向作用的摩擦力 F。研究重心 C 的運動，可以不管圓柱的轉動。爲方便起見，我們分解 C 點加速度於運動路綫的切綫和法綫方向。此外，暫令 φ 代表圓柱所在位置和平衡位置所跨的中心角，可得：

$$a_t=(a-r)\ddot{\varphi}, \quad a_n=\dot{\varphi}^2(a-r)$$

把上式代入運動方程式，得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{W}{g}(a-r)\ddot{\varphi}&=-W\sin\varphi+F\\ \frac{W}{g}(a-r)\dot{\varphi}^2&=R-W\cos\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$



第 588 圖

之後，考察圓柱繞重心軸綫的旋轉，可得

$$\frac{W}{g}i^2_c\ddot{\theta}=-Fr \tag{p}$$

因圓柱和圓筒間並無滑動，OA 弧自應等於 AB 弧。 B 點是圓柱原來在平衡位置 O 跟圓筒的接觸點，故 $r(\theta+\varphi)=a\varphi$，也就是

$$\theta=\frac{a-r}{r}\varphi \tag{q}$$

因此，(p)式可化爲

$$\frac{W}{g}i^2_c\left(\frac{a-r}{r}\right)\ddot{\varphi}=-Fr \tag{p'}$$

消去$(o)(p')$式中 F，就得

$$(a-r)\left(1+\frac{i^2_c}{r^2}\right)\ddot{\varphi}=-g\sin\varphi \tag{r}$$

這問題也可以應用角動量定理處理。 我們只要令小圓柱繞接觸綫 A 的角動量變化率等於所有外力對於這軸綫的力矩和，也能導出 (r) 式。 至於爲什麼能應用角動量定理，那是因爲 A 點是運動的瞬時中心，因而物體上所有各點的運動都跟 A 點接觸綫是一根固定軸綫時相同。 按以上所說，可知

$$\frac{d}{dt}(I_a\dot{\theta})=-Wr\sin\varphi$$

根據(q)式，就得到

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{W}{g}(i^2_c+r^2)\left(\frac{a-r}{r}\right)\dot{\varphi}\right]=-Wr\sin\varphi$$

結果跟(r)式完全相同。

(r)式跟單擺的運動方程式相同，相應的單擺擺長是

$$l=(a-r)\left(1+\frac{i^2_c}{r^2}\right)$$

可見 φ 很小時，圓柱會在圓筒中作簡諧運動，週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{(a-r)\left(1+\frac{i^2_c}{r^2}\right)}{g}} \tag{s}$$

小圓柱若是一個實心圓柱，那末 $i^2_c=\frac{r^2}{2}$，可得

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{3(a-r)}{g}} \tag{s'}$$

小圓柱若是一個薄圓筒，那末 $i^2_c=r^2$，可得

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{2(a-r)}{g}} \tag{s''}$$

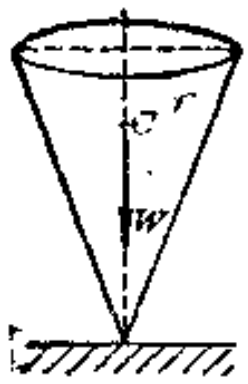
小圓柱若變成一個半徑等於 r 的小圓球，那末 $i^2_c=\frac{2}{5}r^2$，可得

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{7(a-r)}{5g}} \qquad (s'''')$$

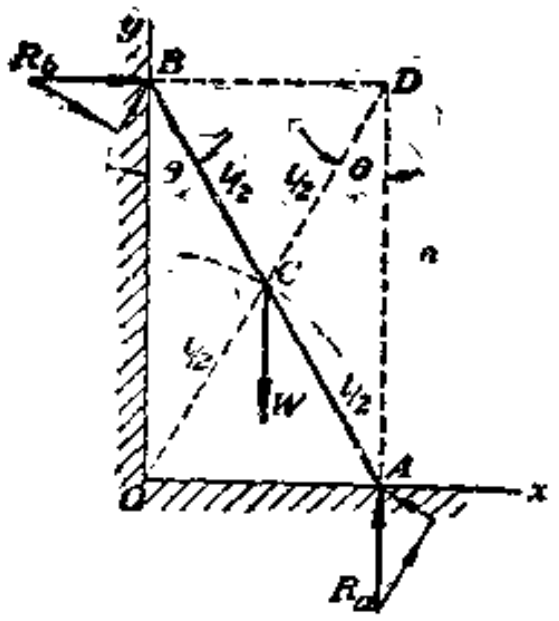
以上計算中始終未應用(o)中第二式。此式只有在決定反作用力 R 時才需要。

535. 第 589 圖表示一個正圓錐體的不穩定平衡。設圓錐體受重力 W 作用而倒下，試證明它重心 C 是沿一鉛垂直綫運動。水平平面的摩阻力可以不計。

536. 有一 AB 桿長 l、重 W，兩端分別被限制在 x 和 y 軸上如第 590 圖。假設 AB 在重力作用下自鉛垂位置開始運動，試求兩端的反作用力 R_a 和 R_b 跟 AB 的旋轉角 θ 的關係。



第 589 圖



第 590 圖

解：第 394 題已指出過，AB 桿的重心 C 是沿一個半徑等於 $l/2$ 的圓周運動，圓周的中心就是 O 點。因此，C 點的切綫和法綫加速度應該分別是

$$a_t=\frac{l}{2}\ddot{\theta} \quad 和 \quad a_n=\frac{l}{2}\dot{\theta}^2$$

現在先把 AB 桿當作全部質量集中在重心點的質點看待。這一質點的運動方程式是

$$\left.\begin{aligned}\frac{W}{g}\frac{l}{2}\ddot{\theta}&=W\sin\theta+R_b\cos\theta-R_a\sin\theta\\ \frac{W}{g}\frac{l}{2}\dot{\theta}^2&=W\cos\theta-R_b\sin\theta-R_a\cos\theta\end{aligned}\right\} \qquad (t)$$

要決定 AB 桿的旋轉運動方程式可先求出瞬時中心 D 如圖，然後應用角動量定理，令 AB 對於 D 點軸綫的角動量變化率等於所有外力對同軸的力矩總和（這樣，可以使作用綫始終通過 D 點的 R_a 和 R_b 兩力不要考慮），就可得

$$\frac{d}{dt}(I_D\dot{\theta})=W\frac{l}{2}\sin\theta$$

也就是

$$\frac{W}{g}\left(\frac{l^2}{12}+\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}=W\frac{l}{2}\sin\theta$$

或

$$\ddot{\theta}=\frac{3g}{2l}\sin\theta \qquad (u)$$

用 $2\dot{\theta}=2\,d\theta/dt$ 乘上式的兩邊，得

$$2\dot{\theta}\,d\dot{\theta}=\frac{3g}{l}\sin\theta\,d\theta$$

也就是

$$d(\dot{\theta}^2)=\frac{3g}{l}d(-\cos\theta)$$

積分後，得

$$\dot{\theta}^2+C=-\frac{3g}{l}\cos\theta$$

$\theta=0$ 時，$\dot{\theta}=0$，表示 $C=-\frac{3g}{l}$，所以上式可化爲

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{l}(1-\cos\theta) \qquad (v)$$

可見 AB 桿達到水平位置時，角速度是

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

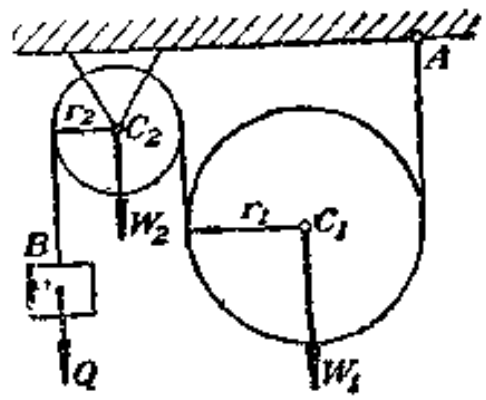
以 (u) (v) 兩式代入 (t) 式，就得到：

$$\left.\begin{aligned}R_a&=\frac{W}{4}(3\cos\theta-1)^2\\R_b&=\frac{W}{4}(11\cos\theta-6)\end{aligned}\right\} \qquad (w)$$

可見 $\cos\theta=\frac{6}{11}$（這表示 $\theta=57°$）後，R_b 的方向會改變；換句話說，如果 AB 桿只是斜靠 y 軸上，B 端在 $\theta=57°$ 後，就會脫離 y 軸而落下。此外，還可以看到：R_a 在 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，也就是 $\theta=70°30'$ 時會等於零，不過不會改變方向。

537. 第 591 圖中，動滑車重 W，半徑等於 r_1；定滑車重 W_2，半徑等於 r_2。繩子 AB，A 端固定，B 端懸掛一個重體 Q。全系統同在一個鉛垂平面中。兩滑車可看作兩個圓盤。試不計 AB 繩的重量以及滑車 C_2 的軸承摩阻力，求重體 Q 的下落加速度 $\ddot{x}$ 等於多大？

$$\left(\text{解：}\ \ddot{x}=\frac{Q-\frac{1}{2}W_1}{Q+\frac{3}{2}W_1+\frac{1}{2}W_2}g\right)$$



第 591 圖

104. 剛體平面運動的能量方程式

第581圖表示一個剛體作平行於 xy 平面的運動。在物體 A 處的一個質點，質量等於 dm，動能等於

$$\frac{dm}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \tag{a}$$

現在將物體中所有各質點的動能加成總和，並應用 § 102 的(b)式：

$$\dot{x}=\dot{x}_c+\dot{\xi} \qquad 和 \qquad \dot{y}=\dot{y}_c+\dot{\eta}$$

就可得物體的全部動能

$$U=\tfrac{1}{2}\Sigma dm\left[(\dot{x}_c+\dot{\xi})^2+(\dot{y}_c+\dot{\eta})^2\right]=\tfrac{1}{2}(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)\Sigma dm$$

$$+\tfrac{1}{2}\Sigma(\dot{\xi}+\dot{\eta})dm+\dot{x}_c\Sigma\dot{\xi}\,dm+\dot{y}_c\Sigma\dot{\eta}\,dm \tag{b}$$

上式最後兩項等於零，故

$$U=\tfrac{1}{2}(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)\Sigma dm+\tfrac{1}{2}\Sigma(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)dm \tag{c}$$

(c)式第一項中，$\dot{x}_c$ 和 $\dot{y}_c$ 是物體重心 C 在兩坐標軸方向的分速度；第二項是物體對於重心軸線的旋轉動能。若命 v_c 代表重心 C 的速度，$\dot{\theta}$ 代表物體繞重心軸線旋轉的角速，(c)式就可化爲

$$U=\frac{W}{g}\frac{v_c^2}{2}+I_c\frac{\dot{\theta}^2}{2} \tag{84}$$

由(84)式看得出，作平面運動的物體，它動能是由這樣兩部份構成的：(1)設想物體全部質量集中在重心，變成一個質點，這質點的動能；(2)物體繞垂直於運動平面的重心軸線旋轉的動能。例如一個實心圓柱，半徑等於 a，沿一水平平面作無滑動滾轉。如速度等於 v，這圓柱的全部動能就是

$$U=\frac{W}{g}\frac{v^2}{2}+\frac{W}{g}\frac{r^2}{2}\frac{v^2}{2r^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{W}{g}\frac{v^2}{2}\right)$$

知道一個物體或一系物體的全部動能 U 後，只要命物體在任意兩位置間的動能變化等於所有外力在相應位移中所做的全部功，就可得到剛體平面運動的能量方程式。現在舉幾個例子說明如下：

例題和習題

538. 第 583 圖中，一個實心圓柱沿斜面作無滑動滾轉。 試應用能量方程式求物體的速度 $\dot{x}_c$。 假定運動開始時，$(x_c)_0=(\dot{x}_c)_0=\dot{\theta}_0=0$。

解：根據(84)式，運動體在任意一時刻的全部動能是

$$U=\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_c^2}{2}+I_c\frac{\dot{\theta}^2}{2}=\frac{W\dot{x}_c^2}{2g}\left(1+\frac{i_c^2}{r^2}\right) \tag{d}$$

物體原本靜止，並無動能，所以 U 也就代表動能的全部變化。 至於外力做的功，因外力中反作用力 R 的方向永遠跟運動方向垂直，無功產生；此外，摩擦力 F，因物體無滑動，也不產生功，所以全部功應等於

$$Wx_c\sin\alpha \tag{e}$$

(d)(e)兩式必須相等，故得

$$\frac{W\dot{x}_c^2}{2g}\left(1+\frac{i_c^2}{r^2}\right)=Wx_c\sin\alpha \tag{f}$$

或

$$\dot{x}_c=\sqrt{\frac{2gx_c\sin\alpha}{1+\frac{i_c^2}{r^2}}}$$

將(f)式對時間微分一次，得

$$\frac{W}{g}\ddot{x}_c\left(1+\frac{i_c^2}{r^2}\right)=W\sin\alpha$$

結果跟 § 103 中(h)式完全符合。

應用能量方程式所以能簡化計算手續，就本題說，顯然是因爲 R 和 F 不做功，計算中因而可以不考慮這兩個力的存在。 如果要決定這兩個力的大小，那自然非按第 528 題中辦法，應用運動方程式不可。

539. 假定第 590 圖中，AB 桿在重力作用下開始自鉛垂位置向下滑落，試應用能量方程式求出 AB 桿的角速度 $\dot{\theta}$ 跟旋轉角 θ 的關係。

解：我們在圖上已經看得出，AB 桿的重心 C 是沿一根以 O 點爲圓心的、半徑等於 $l/2$ 的圓弧運動，速度是 $v_c=\frac{l\dot{\theta}}{2}$。 全部動能因此是

$$U=\frac{W}{g}\frac{(l\dot{\theta})^2}{8}+\frac{W}{g}\cdot\frac{l^2}{12}\cdot\frac{\dot{\theta}^2}{2}=\frac{1}{6}\frac{W}{g}l^2\dot{\theta}^2 \tag{g}$$

因 AB 桿本來靜止，所以 U 也就代表動能的全部變化。 至於外力做的功，因其中 R_a，R_b 始終垂直於位移，不產生功，所以全部功就等於

$$W\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \tag{h}$$

命(g)等於(h),得

$$\frac{1}{6}\frac{W}{g}l^2\dot{\theta}^2=W\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \qquad (i)$$

故

$$\dot{\theta}=\frac{3g}{l}(1-\cos\theta) \qquad (j)$$

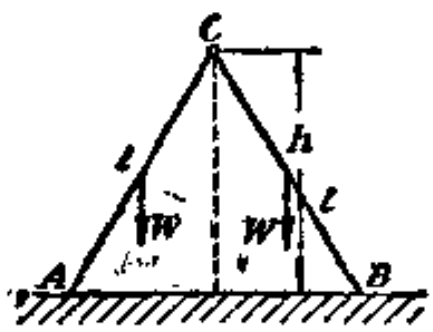
結果跟第 536 題完全符合。 本題應用了能量方程式，可以不經積分直接得到 AB 的角速度，所以在手續上簡單得多。

540. 第 592 圖的兩桿件 AC 和 BC 都重 W，長 l，由鉸連 C 相互連接，放在光滑的水平平面上。 最初 C 點的高度是 h，因重力關係，兩桿件開始沿所成鉛垂平面滑落。 試求 C 點落到水平平面時，它的速度 v 等於多大?

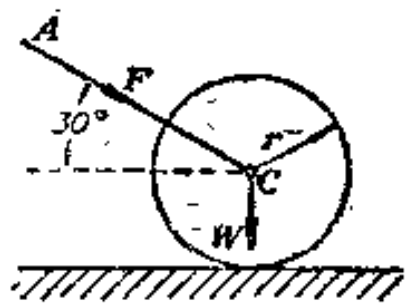
(解: $v=\sqrt{3gh}$)

541. 一兩人推一個重量 $W=980$kg 的圓柱形路滾。 路滾半徑是 $r=0.5$m。 推力 F 大小固定，方向取圖中的 AC 方向(第 593 圖)。 路滾跟水平地面間沒有滑動發生，滾動了 $x=3$m 的距離後，路滾的速度達到 $v=1$m/s。 試求推力 F 等於多大?

(解: $F=28.9$kg)



第 592 圖



第 593 圖

542. 第 594 圖中的 AB 桿，重量等於 W，長度等於 $l=\sqrt{2}r$，在重力作用下由圖中位置開始沿平面曲線 ABD 滑動。 這平面曲線由半徑等於 r 的一個四分之一圓弧 AB 及其水平切線 BD 構成。 接觸處無摩擦力。 試求 AB 桿沿 BD 切線等速滑動時速度 v 等於多大?

(解: $v=\sqrt{gr}$)

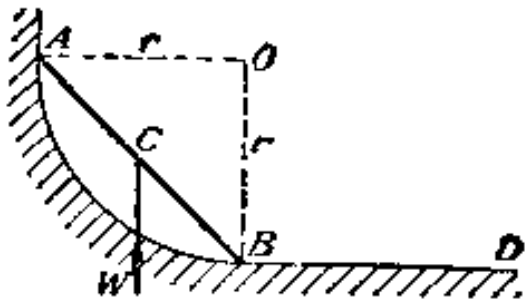
543. 第 595 圖的物體，底部是一個半徑等於 r 的圓柱面，放在一個水平平面上。 現在旋轉這一物體使它稍微離開一些穩定平衡位置，再放任它自由擺動。 假定最初的旋轉角 θ_0 很小，接觸處毫無滑動發生，試應用能量方程式求振動週期等於多大?

解: 我們選擇如下兩個位置來考察物體的能量: (1)旋轉角等於最大的 θ_0 的位置(見圖中虛線)，物體在這一位置的角速 $\dot{\theta}_0=0$; (2)旋轉角等於任意的 θ 的位置。 此外，又選定坐標軸 x, y 和原點 O 如圖。 物體重心 C 的坐標是:

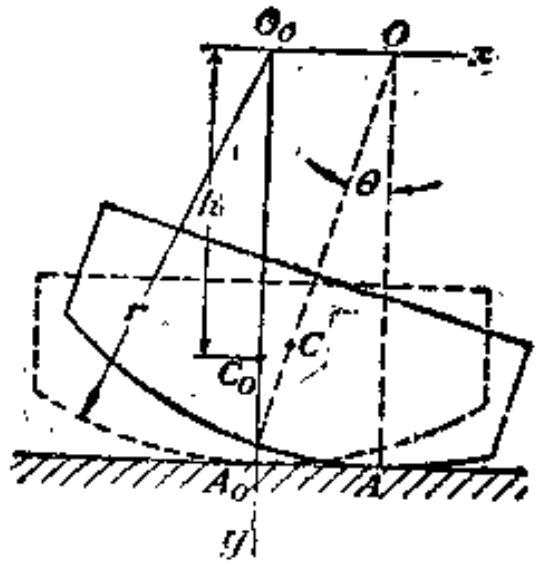
$$\left.\begin{aligned} x_c &= r\theta - h\sin\theta \\ y_c &= h\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (k)$$

物體在旋轉角由 θ_0 變到 θ 的運動過程中，因沒有滑動發生，所以外力中只有重力才做功，這功等於

$$Wh(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (l)$$



第 594 圖



第 595 圖

旋轉角等於 θ_0 時，物體靜止，沒有動能，所以旋轉角等於 θ 時，物體的動能也就是動能的全部變化。若命 W 代表物體的重量，i_c 代表它對於重心軸綫的惯矩半徑，這動能變化就等於

$$\frac{W}{g}\frac{\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2}{2}+\frac{W}{g}i_c^2\frac{\dot{\theta}^2}{2} \qquad (m)$$

表示動能變化的(m)式應等於表示外力所做的功的(l)式。現在以(k)式的 x_c 和 y_c 值代入(m)式，就得到

$$\dot{\theta}^2[(r^2-2rh\cos\theta+h^2)+i_c^2]=2gh(\cos\theta-\cos\theta_0) \qquad (n)$$

因 θ 很小，可命

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}$$

所以把上式代入(n)式並略去 θ 的高次方，就可得

$$\dot{\theta}^2[(r-h)^2+i_c^2]=gh(\theta_0^2-\theta^2)$$

對時間微分上式，又可得

$$\ddot{\theta}+\frac{gh}{(r-h)^2+i_c^2}\theta=0 \qquad (o)$$

可見 θ 很小時，物體發生的是一種簡諧運動，它的振動週期是

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{(r-h)^2+i_c^2}{gh}} \qquad (p)$$

由(p)式看得出，這一物體的振動週期跟擺長等於

$$l=\frac{(r-h)^2-i^2_c}{h} \qquad (a)$$

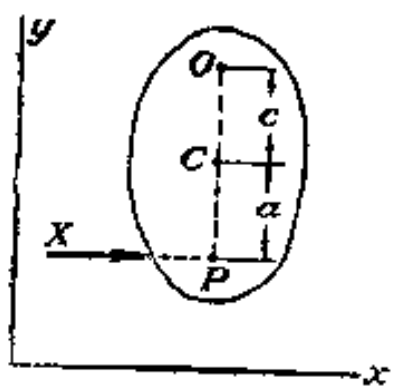
的單擺週期相同。

544. (a)假設上題物體是一個正圓柱體的一半。問柱體半徑等於 r。問小振幅的振動週期應等於多大？ (b) 假設上題物體是一個半徑等於 r 的半圓球，振動週期又應該等於多大？

(解：$(a)\tau=2\pi\sqrt{1.54r/g}$，$(b)\tau=2\pi\sqrt{1.73r/g}$)

105. 碰撞及碰撞中心

§ 78 中討論的碰撞現象，只是指碰撞作用力同時通過兩碰撞體的重心的情形。這種碰撞只會使物體重心的速度發生變化，不會使物體本身發生旋轉。現在要進一步討論更一般的碰撞現象。



第 596 圖

第 596 圖中表示一個可以在 xy 平面中自由運動的靜止物體；xy 平面通過物體的重心，並且就是它的慣性主切面。如果它在這主切面中遭遇到碰撞而發生運動，那就可以應用 § 103 的(83)式來處理。命圖中水平力 X 代表碰撞作用力，a 代表 X 力作用線到物體重心 C 的距離，可得運動方程式：

$$\frac{W}{g}\ddot{x}_c=X \quad 和 \quad I_c\ddot{\theta}=Xa$$

以 dt 分乘以上兩式的兩邊，然後就碰撞時間 t 積分，又可得：

$$\frac{W}{g}\dot{x}_c=\int_0^t Xdt \quad , \quad I_c\dot{\theta}=a\int_0^t Xdt$$

若命 X_I 代表碰撞力在這從 0 到 t 的一段極短時間內所生的衝量，那末，

$$\frac{W}{g}\dot{x}_c=X_I \quad ; \quad I_c\dot{\theta}=aX_I \qquad (a)$$

物體上任意一點的速度應該等於重心速度跟這一點繞重心軸線旋轉而引起的速度的向量和。譬如圖中 O 是通過重心 C 而垂直於衝量

作用線的直線上的任意一點，它到重心的距離若等於 c，那它的速度就是

$$\dot{x}_0=g\frac{X_I}{W}\left(1-\frac{a\cdot c}{i_c^2}\right) \qquad (b)$$

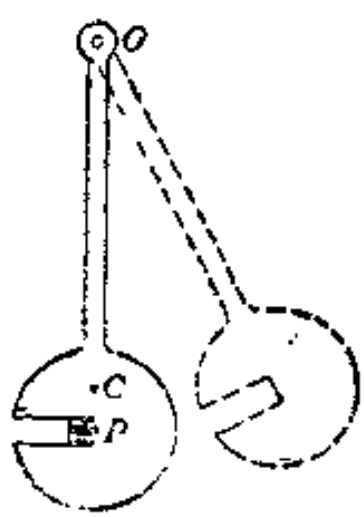
若命 $c=\frac{i_c^2}{a}$，O 點的速度就將等於零。這 O 點顯然就是物體運動的瞬時中心。所以，通過 O 點而垂直於 xy 運動平面的直線完全可以看作是物體繞着旋轉的一根固定軸線。換句話說，如果有一個可以繞過 O 點而垂直於 xy 平面的固定軸線自由旋轉的物體發生了碰撞，而且碰撞力的衝量作用點 P 到物體重心 C 的距離恰好是

$$a=i_c^2/c \qquad (c)$$

那末由於 O 點是物體運動的瞬時中心，上述固定軸線就絲毫不會受到碰撞的影響；這樣決定的 P 點，通常稱爲物體的**碰撞中心**。將(c)式跟 § 91 中(75′)式比較一下，立刻可看到，碰撞中心 P 與固定旋轉軸線間的關係，事實上，完全跟複擺的振動中心與懸點間的關係相同。

工程上常利用這種碰撞中心與旋轉軸線間的特殊關係，來消滅或減少固定軸線所受的碰撞影響。例如撞擊試驗機的撞鎚(第 597 圖)，它的設計就必須使撞擊點 P 恰好在旋軸 O 的碰撞中心處，以免旋軸容易損壞。其餘像彈道擺，鍛鎚等的設計也無不如此。

碰撞中心可以由一個簡單的實驗來說明。我們把一根手杖掛在一根繩子上如第 598 圖。反復試驗後，可以在手杖上找到一個 P 點，若在這 P 點上加一水平碰撞力，手杖只會繞繩子旋轉而不會脫離開繩子，那這 P 點就是手杖的碰撞中心。



第 597 圖

第 598 圖

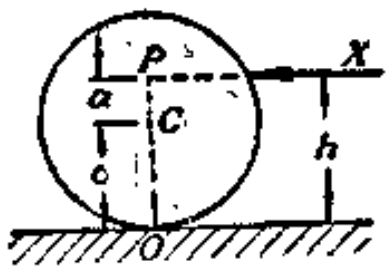
假設物體的旋轉軸線恰好通過重心，(c)式中距離 c 就將等於零。碰撞中心到重心的距離 a 因而就將等於無限大，這表示旋軸無論如何都不能避免碰撞的影響；換句話說，碰撞力在任何情形下都會傳導到旋軸上去的。

例題和習題

545. 在台球遊戲(俗稱打彈子)中，假使要使台球跟台面間沒有滑動發生，試問擊球的高度 h 應等於多少？ 假定台球的半徑等於 c (第 599 圖)。

解：台球對重心軸線的慣矩半徑是 $i_c=\sqrt{\frac{2c^2}{5}}$。 要使台球不發生滑動，它跟台面的接觸點 O 就必須是運動的瞬時中心。命 a 代表(c)式中碰撞力作用綫到重心 c 的距離，可得

$$h=c+a=c+\frac{i^2_c}{c}=c+\frac{2}{5}c=\frac{7}{5}c$$



第 599 圖

546. (a)假使第 545 題中的台球是一個半徑等於 r 的圓柱，那末擊點高度又應該等於多少？
(b)假使第 545 題中的台球是一個半徑等於 r 的薄圓筒，又如何？

(解：(a)$h=\frac{3}{2}r$，(b)$h=2r$)

547. 第 600 圖中的 AB 桿長 l，由 OA 綫連接在一根垂直於圖平面的軸綫 O 上。 AB 以固定角速 ω 繞 O 軸在光滑的圖平面中旋轉(見圖中虛綫)。 現在在圖中 P 處釘一個樁子，使 AB 跟這一樁子發生碰撞後，立刻完全靜止。 假設 OA 綫長度等於 b，問 P 點到 O 軸的距離 r 應等於多大？

解：AB 跟 P 樁碰撞時，它重心 C 的速度恰在圖中 x 軸方向，速度的大小等於 $\omega\left(b+\frac{l}{2}\right)$。碰撞時，$AB$ 對於 C 點的旋轉角速度是 ω。 命 X_I，代表 P 樁所發生的衝量，根據(a)式，可得：

$$X_I=-\frac{W}{g}\omega\left(b+\frac{l}{2}\right)$$

$$aX_I=-\frac{W}{g}\frac{l^2}{12}\omega$$

消去以上兩式的 X_I，就得到：

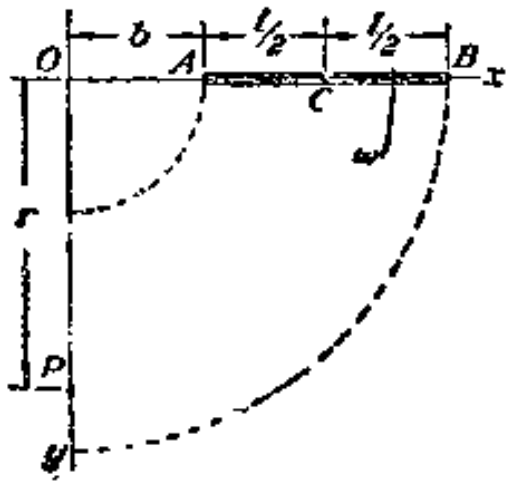
$$a=\frac{l^2}{12\left(b+\frac{l}{2}\right)}$$

和

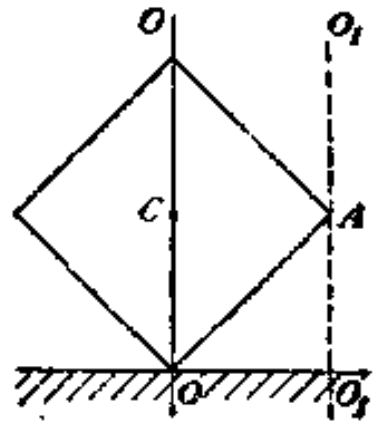
$$r=b+\frac{l}{2}+a$$

548. 一個密度均勻的方板，在一光滑的水平平面上繞鉛垂對角線 OO 自由旋轉(第 601 圖)，旋轉角速固定等於 ω_0。現在突然將方板的 A 角固定起來，使方板開始繞圖中 O_1O_1 軸線旋轉。問新角速度 ω_1 將等於多大?

(解: $\omega_1 = \frac{1}{7}\omega$)



第 600 圖

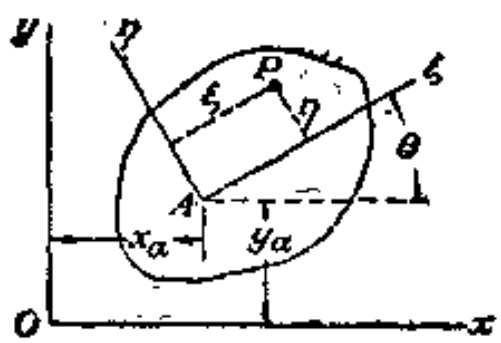


第 601 圖

第十四章　相對運動

106. 相對運動的運動幾何

以前討論的質點運動或物體運動都只是指質點或物體對於一個固定的坐標軸系的運動；它們對於一個運動着的坐標軸系的運動，還不曾討論過。實驗室裏觀察到的運動全是對於固定在地球上、跟隨地球運動的坐標軸系的運動。地球本身的運動對於一般的工程問題雖然影響極小，可以忽略不計，不過也不是所有問題都如此；有時，我們必須攷慮這種運動的影響，決不可把地球當做絕對靜止的坐標軸系看待。



第 602 圖

討論物體的相對運動，我們仍從物體的平面運動出發。假使一個剛體在一個固定的 xy 平面中運動(第 602 圖)，那這一運動就完全可以由剛體上任意一點 A 的坐標值以及剛體上任意一直線繞 A 點的旋轉角 θ 來決定。現在在 A 點再建立一個固定在剛體上的正交坐標軸 ξ,η。假使另外有一 P 點在這一 $\xi\eta$ 平面上運動，P 點對於剛體的位置就可由隨時變化的坐標值 ξ,η 確定。這兩坐標值通常稱爲 P 點的**相對坐標**。至於確定 P 點對於固定坐標軸 x,y 的位置的坐標，通常另稱爲 P 點的**絕對坐標**。P 點的絕對坐標也就是 P 點在 x 和 y 軸上的投影的坐標，故

$$\left.\begin{aligned} x &= x_a+\xi\cos\theta-\eta\sin\theta \\ y &= y_a+\xi\sin\theta+\eta\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

將(85)式對時間微分，就得到 P 點**絕對速度**(對固定坐標軸系的速度)的 x 和 y 軸方向分速度：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_a-(\xi\sin\theta+\eta\cos\theta)\,\dot{\theta}+\dot{\xi}\cos\theta-\dot{\eta}\sin\theta \\ \dot{y} &= \dot{y}_a+(\xi\cos\theta-\eta\sin\theta)\,\dot{\theta}+\dot{\xi}\sin\theta+\dot{\eta}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

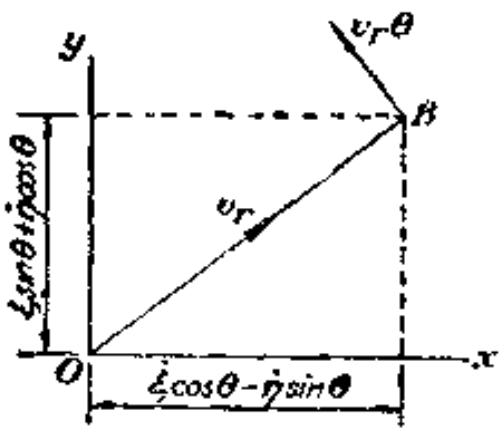
其中 $\dot{\xi}$ 和 $\dot{\eta}$ 是相對坐標 ξ 和 η 對於時間的導函數，通常稱爲 P 點相對速度的分速度。這相對速度是可以由跟隨剛體一起運動的觀察者測量出來的。(86)中兩式的第一、第二項是將 ξ, η 當作常數的導函數，所以它們也代表當時剛體上跟 P 點重合的一點的分速度。兩式中的第三、第四項是 P 點相對速度在兩固定坐標軸方向的分速度。因此，P 點的絕對速度我們可以看作是底下兩速度的向量和：(1)剛體上當時跟 P 重合的一點的速度，這速度通常叫做**參攷系速度**，以 $\bar{v}_t$ 表示；(2) P 點對於運動剛體的相對速度，以 $\bar{v}_r$ 表示。若用向量方程式來說明，那 P 點的絕對速度就是

$$\bar{v}=\bar{v}_t+\bar{v}_r \tag{86a}$$

如果把(85)式連續對時間微分兩次，又可得 P 點的**絕對加速度**在兩固定坐標軸方向的分加速度：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}=\ddot{x}_a&-(\xi\sin\theta+\eta\cos\theta)\ddot{\theta}-(\xi\cos\theta-\eta\sin\theta)\dot{\theta}^2\\&-2(\dot{\xi}\sin\theta+\dot{\eta}\cos\theta)\dot{\theta}+\ddot{\xi}\cos\theta-\ddot{\eta}\sin\theta\\\ddot{y}=\ddot{y}_a&+(\xi\cos\theta-\eta\sin\theta)\ddot{\theta}-(\xi\sin\theta+\eta\cos\theta)\dot{\theta}^2\\&+2(\dot{\xi}\cos\theta-\dot{\eta}\sin\theta)\dot{\theta}+\ddot{\xi}\sin\theta+\ddot{\eta}\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

以上兩式中，最初三項是將 ξ, η 當作常數的導函數，所以是當時剛體上跟 P 點重合的一點的分加速度，通常就稱爲**參攷系加速度**的分加速度。其餘三項都是由 P 點對於剛體發生相對運動而來的分加速度；這種加速度又可分爲兩種：(1) 含 $\ddot{\xi}$ 和 $\ddot{\eta}$ 的最後兩項，(2) 含 2 的項。前者是 P 點相對加速度在坐標軸上的投影；後者就是所謂**補加速度**。補加速度的性質可以按如下的幾何關係來說明：第 603 圖中 $\overline{OB}$ 代表 P 點的相對速度 $\bar{v}_r$。這 $\overline{OB}$ 在兩個固定軸 x 和 y 上的投影就是 (86) 兩式中的最後兩項。當剛體(也就是參攷坐標系)在 xy 平面運動時，設想 $\overline{OB}$ 同時以角速 $\dot{\theta}$ 繞 O 點旋轉，它的終點 B 因之有一垂直於 $\overline{OB}$ 線的速度 $v_r\dot{\theta}$ 如第 603 圖。$\overline{OB}$ 終點 B 的速度，因爲 OB 是代表



第 603 圖

相對速度 v_r 的代表向量，所以它的因次跟加速度相同。由第 603 圖可看到，它跟 x 軸交角的餘弦是 $-\frac{(\dot{\xi}\sin\theta+\dot{\eta}\cos\theta)}{v_r}$。因此，它在 x 軸上的投影應該是

$$-v_r\dot{\theta}\frac{\dot{\xi}\sin\theta+\dot{\eta}\cos\theta}{v_r}=-\dot{\theta}(\dot{\xi}\sin\theta+\dot{\eta}\cos\theta) \qquad (a)$$

它在 y 軸上的投影應該是

$$v_r\dot{\theta}\frac{\dot{\xi}\cos\theta-\dot{\eta}\sin\theta}{v_r}=\dot{\theta}(\dot{\xi}\cos\theta-\dot{\eta}\sin\theta) \qquad (b)$$

將(a)(b)兩式與(87)兩式的補加速度比較一下，立刻可看到，所謂補加速度也就是相對速度 v_r 的代表向量以角速 $\dot{\theta}$ 旋轉時，它終點的運動速度的兩倍。

令 $\bar{a}_t$ 代表參攷系加速度，$\bar{a}_r$ 和 $\bar{a}_s$ 分別代表 P 點的相對加速度和補加速度，P 點的絕對加速度 $\bar{a}$，用向量方程式來表示，就是

$$\bar{a}=\bar{a}_t+\bar{a}_r+\bar{a}_s \qquad (87a)$$

以上的討論指 P 點只在 $\xi\eta$ 平面中運動。不過，即使它在 $\xi\eta$ 平面的垂直方向也有運動，這一方向的運動是不會受剛體平行於 xy 平面的運動的影響，因此，P 點絕對加速度在這一方向的分加速度，就等於 P 點相對加速度在同方向的分加速度；如令 $\bar{a}_r$ 代表 P 點的全部相對加速度，(87a)式自然還是成立的。

例題和習題

549. 一個質點 P 用固定速率 v_r 沿半徑等於 a 的圓盤的盤周運動。圓盤同時用角速 ω 向相反方向繞中心等速旋轉(第 604 圖)。試求 P 點的絕對加速度。

解：P 點的相對加速度 a_r，方向是指向圓盤中心，大小是

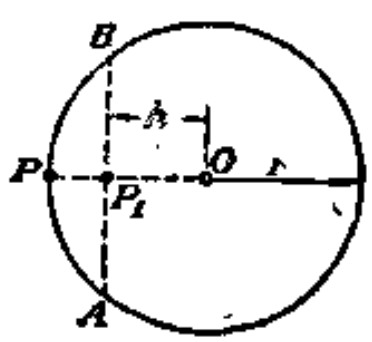
$$a_r=\frac{v_r^2}{r} \qquad (c)$$

圓盤上跟 P 點重合的一點，它的加速度也指向圓盤中心；這一參考系加速度的大小是

$$a_t=\omega^2 r \qquad (d)$$

根據補加速度的幾何意義，可知本題 P 點的補加速度是

$$a_s=2\omega v_r \qquad (e)$$



第 604 圖

它的方向在離開圓盤中心的半徑方向。綜合以上 $(c)(d)$ 和 (e) 三式，就得 P 點的絕對加速度

$$a=\frac{v_r^2}{r}+\omega^2 r-2\omega v_r=r\left(\frac{v_r}{r}-\omega\right)^2 \qquad (f)$$

方向是指向圓心。當 $v_r=r\omega$ 時，對於固定軸綫來說，P 點顯然是靜止不動的；由 (f) 式也可看到，這情形下，它的絕對速度的確等於零。

550. 設第 604 圖中，圓盤的角速等於 $\dot{\theta}$，角加速等於 $\ddot{\theta}$，P 點仍以固定速率 v_r 沿圓周向反方向運動，試求 P 點的絕對加速度。

$$\left(\text{解：}\ a=\sqrt{(r\ddot{\theta})^2+r^2\left(\frac{v_r}{r}-\dot{\theta}\right)^4}\right)$$

551. 假使第 604 圖中有一質點 P_1 沿 AB 弦用固定相對速度 v_r 運動，圓盤仍用角速 ω 繞中心等速旋轉，試求 P_1 點在圖中位置的絕對速度和絕對加速度。假定 P_1 點是沿圓盤的旋轉方向運動。

$$\left(\text{解：}\ \begin{cases} v=v_r+h\omega, \text{切綫方向} \\ a=\omega^2 h+2v_r\omega, \text{指向中心} \end{cases}\right)$$

552. 假設第 604 圖中 P_1 點沿 AB 弦的全長作簡諧運動，週期 $\tau=2\pi/\omega$；圓盤仍用固定角速 ω 繞中心旋轉。試求 P_1 在圖中位置的絕對加速度。

(解：$a=\omega^2 h\pm 2\omega^2\sqrt{r^2-h^2}$，指向中心)

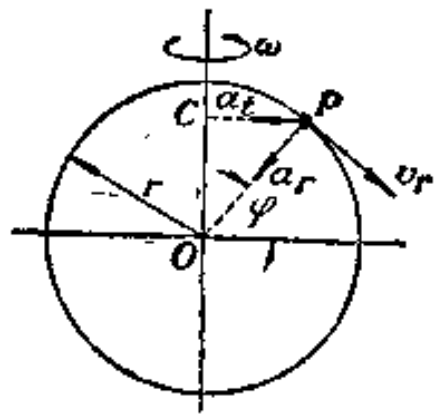
553. 假設第 604 圖中，質點 P 由 O 點出發，沿半徑 OP 以固定相對速度 v_r 運動；圓盤仍用角速 ω 繞中心等速旋轉。試求 P 點達到盤周時的絕對加速度。

(解：$a=\omega\sqrt{(\omega r)^2+(2v_r)^2}$)

554. 假設第 604 圖中，P 點沿圓盤直徑的全長作簡諧運動，週期 $\tau=2\pi/\omega$。圓盤仍以固定角速 ω 繞中心旋轉，試求 P 點到達盤周時的絕對加速度。

(解：$a=2r\omega^2$，指向中心)

555. 第 605 圖中，一質點 P 在一半徑等於 r 的圓球表面上，以固定的相對速率 v_r 沿球面的一根子午圈運動。圓球以角速 ω 繞鉛垂直徑等速旋轉。試求 P 點在圖中位置的絕對加速度(P 點的位置由緯度 φ 表示)。



第 605 圖

解：因球表面跟 P 點重合的一點沿一半徑等於 $r\cos\varphi$ 的水平圓周運動，故參考系加速度應該方向如圖，大小是

$$a_t=\omega^2 r\cos\varphi \qquad (g)$$

因 P 點沿子午圈運動的速率 v_r 固定不變，故相對加速度顯然將指向球心，大小是

$$a_r=\frac{v_r^2}{r} \tag{h}$$

此外，因補加速度 a_s 應等於 v_r 代表向量的終點以角速 ω 繞通過 P 點的鉛垂線旋轉的速度的兩倍，故它的大小應該是

$$a_s=2\omega\, v_r \sin\varphi \tag{i}$$

方向由紙面指向讀者。

(g)(h)和(i)三式確定後，取這三種加速度的向量和，就得所求的 P 點絕對加速度。

556. 假設第 605 圖中，P 是流向南方的河流中的一個水質點，流速是 3m/s，所在地點的北緯度是 $\varphi=50°$，地球半徑是 $r=6{,}37\cdot10^6$m，試求這一質點的補加速度 a_s。

(解：$a_s=0{,}000324$m/s²，向東)

107. 相對運動的運動方程式

根據牛頓第二定律，一個質點上的作用力合力，等於質點的質量跟質點的絕對加速度的乘積；合力的作用方向跟絕對加速度相同。所以(87a)式兩邊同時乘以質點的質量 $\frac{W}{g}$ 後，就變成

$$\bar{F}=\frac{W}{g}(\bar{a}_t+\bar{a}_r+\bar{a}_s)$$

或

$$\frac{W}{g}\bar{a}_r=\bar{F}-\frac{W}{g}\bar{a}_t-\frac{W}{g}\bar{a}_s \tag{88}$$

上式右邊的第二、第三兩項可認爲是加速度 a_t，a_s 所引起的慣性力。因此，一個質點的相對運動方程式，只要在作用力合力外，設想另有 a_t 和 a_s 引起的慣性力一同作用在質點上，就將完全跟一般運動方程式相同。(88)是一個向量方程式。假使把 F 力和 a_r，a_t，a_s 三加速度投影於參攷系的 ξ,η,ζ 三軸線上，那(88)就可以化爲相對運動的三個運動方程式。這裏所謂參攷系三軸線指固定在跟質點作相對運動的剛體上的三正交坐標軸。

若剛體（也就是參攷系）作等速直線運動，加速度 a_t 和 a_s 等於零，(88)式就簡化爲

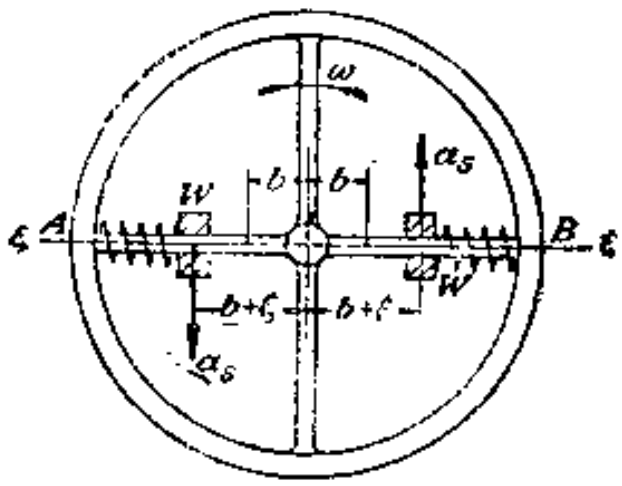
$$\frac{W}{g}a=F$$

這樣，就跟質點一般運動的運動方程式(32)完全相同。這一事實說明：質點對於一個等速直線運動的剛體的相對運動，事實上，跟剛體絕對靜止的情形是完全一樣的。因此，在均勻直線運動的車輛中做的動力學實驗，跟在固定實驗室中做的，結果一定完全相同。不過，車輛一旦駛入彎道，a_t 和 a_n 的影響立刻就會被覺察到。

從(88)式，我們可以導出一個質點的**相對平衡方程式**。假使相對速度 v_r 和相對加速度 a_r 都等於零，那末

$$\bar{F}-\frac{W}{g}\bar{a}_t=0 \tag{89}$$

就是質點的**相對平衡方程式**。它說明：一個處於相對平衡狀態的質點，它上面的作用力合力將跟參攷系加速度 a_t 的慣性力共同構成「平衡力系」，它們的向量和等於零。(89)是一個向量方程式，所以一個相對平衡的質點，它上面所有作用力以及 a_t 的慣性力對於任何軸線上的投影的代數和必然等於零。



第 606 圖

關於如何列立一個質點相對運動的運動方程式，我們舉一個飛輪的例子來說明。有一種飛輪，它幅撐上裝有兩個重體 W，可以各自沿所在的幅撐自由滑動，它們同飛輪輪邊間各墊有一根彈簧（見第 606 圖），兩彈簧的彈力常數都等於 k。圖中 b 代表彈簧開始受壓縮時，重體離開軸心的距離。飛輪以固定角速 ω 在水平平面中旋轉。在運動中，兩重體始終保持對於軸心對稱，位置由相對位移 $b+\xi$ 表示。ξ 的方向以指向軸心方向爲負，離開爲正。兩重體的相對加速度顯然都是 $\ddot{\xi}$；參攷系加速度等於 $\omega^2(b+\xi)$，朝軸心方向；補加速度垂直於直徑 AB，大小等於 $2\omega\dot{\xi}$，方向如圖。補加速度的方向，是按「兩重體離開軸心向外運動時爲正」而決定的。

投影所有作用力和加速度於直徑 AB 方向，由(88)式可得每一重體的相對運動方程式如下：

$$\frac{W}{g}\ddot{\xi}=-k\xi+\frac{W}{g}(b+\xi)\omega^2 \qquad (a)$$

若將所有各力和加速度投影於直徑 AB 的垂直方向，又可得

$$0=R-2\frac{W}{g}\omega\dot{\xi} \qquad (b)$$

其中 R 指幅撐加於重體的反作用力。由上式可看到，每一重體上的 R 力都跟補加速度方向相同。兩重體對於幅撐的壓力當然跟兩 R 力相等相反，可見兩重體離開軸心運動時，飛輪將受到一個方向恰好跟它旋轉方向相反的力偶作用。現在把(a)式化爲

$$\frac{W}{g}\ddot{\xi}=-\left(k-\frac{W}{g}\omega^2\right)\xi+\frac{W}{g}\omega^2 b \qquad (c)$$

令 $\ddot{\xi}=0$，就可得兩重體的相對平衡方程式，是

$$\left(k-\frac{W}{g}\omega^2\right)\xi_s=\frac{W}{g}\omega^2 b \qquad (d)$$

其中 ξ_s 就是以重體在彈簧將開始受壓縮時位置作爲原點的半徑方向位移。(d)式表示：

$$\xi_s=\frac{\frac{W}{g}b\omega^2}{k-\frac{W}{g}\omega^2} \qquad (e)$$

若 ξ_s 是正的，那就應該

$$k>\frac{W}{g}\omega^2$$

在這一條件下，根據以上 (c) 式，兩重體發生的就是簡諧運動；振動週期是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{g\left(k-\frac{W}{g}\omega^2\right)}} \qquad (f)$$

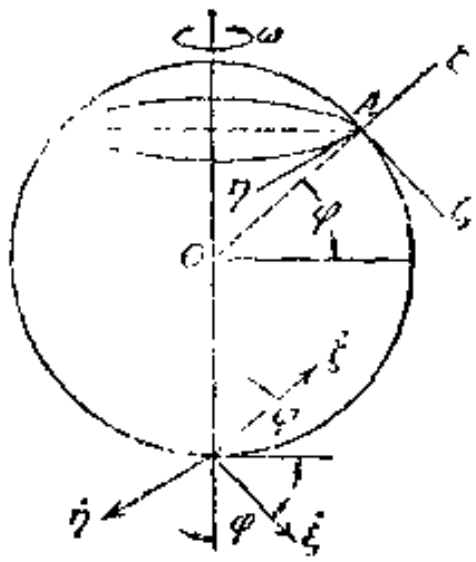
由此式可看到，重體振動所受到飛輪旋轉的影響，相當於減低彈簧的彈力常數$\left(把\ k\ 減低\ \frac{W}{g}\omega^2\right)$。

假使飛輪的角速 ω 大到使

$$k \leqq \frac{W}{g}\omega^2$$

兩重體就將始終壓緊彈簧，不會有振動發生。

第二個例子，我們可攷察地球自轉對於落體的影響。第 607 圖中，A 點是落體的所在地，緯度等於 φ。ξ，η 和 ζ 是固定在地球上、以 A 點爲原點的三正交坐標軸。其中 ξ 軸取 A 點子午圈的切線方向，η 軸取 A 點緯圈的切線方向，ζ 軸取 A 點的地球半徑方向。列立落體的相對運動方程式主要只要攷慮 a_r 和 a_s 兩種加速度；參攷系加速度 a_t 對於落體的影響，有人算出過，是個極微小的數值，所以可以忽略不計。現在先求落體的補加速度 a_s：分解 v_r（相對速度）於 ξ，η 和 ζ 三軸線方向，以圖中 $\dot{\xi}$，$\dot{\eta}$ 和 $\dot{\zeta}$ 三向量代表分解的結果，再攷察這三向量的終點因地球以固定角速旋轉而引起的速度。這樣得到的三個速度，就決定了補加速度的分加速度；觀察第 607 圖，可知 $\dot{\xi}$ 和 $\dot{\eta}$ 兩向量的終點的速度應垂直於 ξζ 平面，各等於 $\omega\dot{\xi}\sin\varphi$ 和 $\omega\dot{\zeta}\cos\varphi$，由此可得相應的兩補加速度的分加速度等於 $2\omega\dot{\xi}\sin\varphi$ 和 $2\omega\dot{\zeta}\cos\varphi$；至於其餘一分加速度，因向量 η 的終點的速度在 ξζ 平面中垂直於地軸並等於 $\omega\dot{\eta}$，所以相應的補加速度的分加速度是 $2\omega\dot{\eta}$。



第 607 圖

補加速度的各分加速度決定後，我們就可列立 A 處落體的相對運動方程式如下：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{W}{g}\ddot{\xi} &= -2\frac{W}{g}\omega\dot{\eta}\sin\varphi \\
\frac{W}{g}\ddot{\eta} &= +2\frac{W}{g}\omega(\dot{\xi}\sin\varphi+\dot{\zeta}\cos\varphi) \\
\frac{W}{g}\ddot{\zeta} &= -W-2\frac{W}{g}\omega\dot{\eta}\cos\varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

假定落體的初速等於零，積分(g)中第一、第二兩式，就可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\xi}&=-2\omega\eta\sin\varphi\\ \dot{\zeta}&=-gt-2\omega\eta\cos\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(h)$$

以(h)代入(g)中第二式，得

$$\ddot{\eta}=-4\omega^2\eta-2\omega gt\cos\varphi\qquad(i)$$

因地球自轉的角速極小，含 ω^2 項顯然可以忽略不計，故積分 (i) 式後可得

$$\eta=-\tfrac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi\qquad(j)$$

以(j)式代入(h)式，並略去含 ω^2 各項，又可得

$$\xi=0,\qquad \zeta=h-\tfrac{1}{2}gt^2\qquad(k)$$

其中 h 指落體原來的高度。 這(j) (k)兩式完全確定了一個落體在任何一時刻 t 的位置。 其中(k)式跟我們假定地球絕對靜止所得的結果沒有分別；(j)式則說明，落體在鉛垂軸線 ζ 方向有向東的運動發生；這也就是說，落體並不是沿鉛垂軸 ζ 直線落下，而是含有偏東的偏差的。要決定這一偏差，只要令 $\zeta=0$，代入(k)式，求得落體達到地面的時間：

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

把這一時間值代入(j)中，就可得所求的偏東偏差是

$$\eta=-\tfrac{2}{3}\omega\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\cos\varphi\qquad(l)$$

實地測量的結果的確跟這(l)式精密符合。

例 題 和 習 題

557. 在第 608 圖的旋轉曲面(指一根曲線繞一固定軸線旋轉所產生的曲面)上，有一個質點 P 沿子午線 AOB 運動。 曲面以固定角速 ω 繞旋轉軸線 Oz 旋轉。 質點的重量等於 W。 試不計摩阻力，求 P 點在曲面上的相對平衡方程式。

解：質點 P 受到的作用力是：重力 W，曲面反作用力 R 和慣性力 $-\frac{W}{g}a_t$(見第 608 圖)。因 $a_t=\omega^2r$，故慣性力應該等於 $\frac{W}{g}\omega^2r$，方向在離開旋轉軸線的半徑方向(見圖)。 把

各力投影於 P 點的子午綫的切綫方向，根據(89)式，可得

$$W\cos\alpha-\frac{W}{g}\omega^2 r\sin\alpha=0$$

化開上式，就得所求的 P 點的相對平衡方程式如下：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{g}{\omega^2 r} \qquad (m)$$

558. 假設第 608 圖中的質點 P 在子午綫 AOB 上任何一點都可以相對平衡，試問旋轉曲面應該是什麼形狀？

解：選定坐標軸綫如圖。 令 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dr}{dz}$，代入以上相對平衡方程式$(m)$中，積分後，就可得

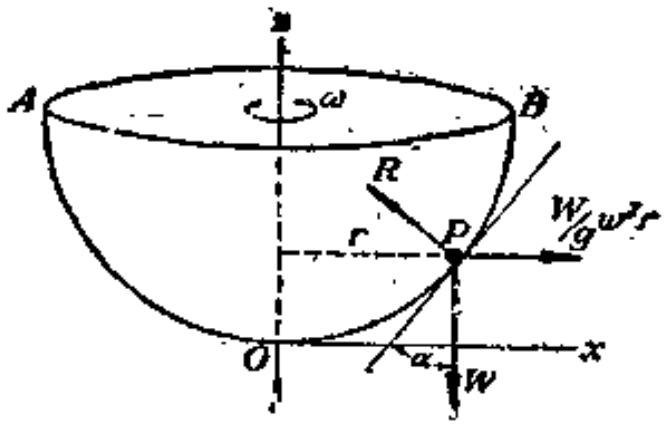
$$r^2=\frac{2g}{\omega^2}z \qquad (n)$$

可見旋轉曲面是一拋物綫旋轉面。

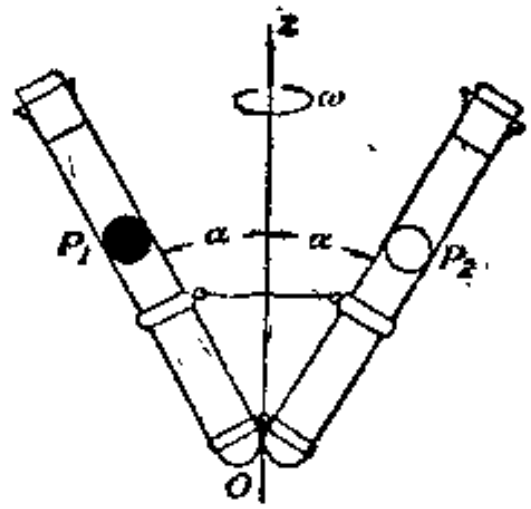
559. 第 609 圖是兩個化學試管，管軸與鉛垂軸 Oz 構成相等的交角 α。 試管中裝滿着水，管口封閉，共同繞 Oz 軸等速旋轉，角速等於 ω。 左邊一試管中，浸着一個鋼球 P_1；右邊試管中浸着一硬膠做的空心球 P_2。 試證明，P_2 的相對平衡是穩定平衡；而 P_1 的相對平衡則是不穩定平衡。

560. 第 610 圖中，一質點 P 在一水平圓盤的直徑方向的凹槽內運動。 圓盤以角速 ω 繞圓心鉛垂軸綫等速旋轉。 最初，P 點在槽內只有對於圓心的微小位移 a，而無初速，試求運動中，槽邊對於 P 點的反作用力等於多大？ 摩阻力可以不考慮。

解：選定坐標軸 ξ，η 如圖。 P 點的相對運動方程式是：



第 608 圖



第 609 圖

$$\left.\begin{aligned}\frac{W}{g}\ddot{\xi}&=\frac{W}{g}\omega^2\xi\\ R&=2\frac{W}{g}\omega\dot{\xi}\end{aligned}\right\} \qquad (o)$$

式中 R 指槽邊對質點的反作用力。 以 $\dot{\xi}\,dt$ 乘(o)中第一式的兩邊，得

$$d(\dot{\xi})^2=\omega^2 I(\xi)^2 \qquad (p)$$

積分(p)式後，因運動開始時，$\xi_0=a$ 和 $\dot{\xi}=0$，故得

$$\dot{\xi}=\omega\sqrt{\xi^2-a^2} \qquad (q)$$

或

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}}=\omega dt \qquad (r)$$

積分上式，可得

$$\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{\xi}{a}\right)=\omega t+C$$

或

$$\xi=a\cosh(\omega t) \qquad (s)$$

(s)式說明，圓盤中心是質點不穩定相對平衡的位置；質點只要稍微離開一點中心，它就會繼續向外運動。(1)

(o)式所表示的是反作用力 R 與相對速度 $\dot{\xi}$ 的函數關係。如果把(q)式的 $\dot{\xi}$ 值代入(o)中，就可得反作用力 R 同質點位移的關係函數，是

$$R=2\frac{W}{g}\omega^2\sqrt{\xi^2-a^2}$$

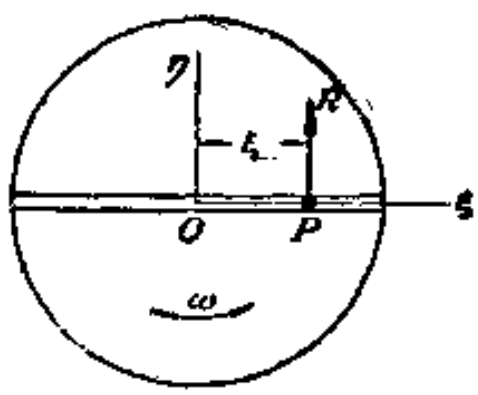
假使對時間微分(s)式，得

$$\dot{\xi}=a\omega\sinh(\omega t)$$

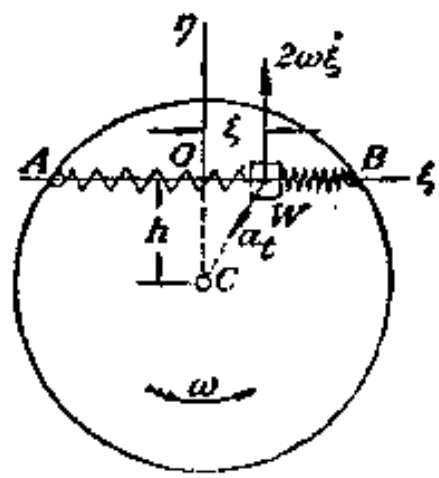
代入(o)中第二式，那又可得反作用力跟時間的函數關係，是

$$R=2\frac{W}{g}\omega^2 a\sinh(\omega t)$$

561. 第 611 圖中是一個以角速 ω 繞鉛垂中心軸旋轉的水平圓周。在它的 AB 弦上，有一



第 610 圖



第 611 圖

(1) 因爲(s)式中，只要 a 不等於零，不論它多麼微小，質點的位移 ξ 都會隨着時間的增加而不斷變大。

重 W 的質點，可以沿 AB 作無摩阻滑動。質點兩邊各有一彈力常數等於 $\frac{k}{2}$ 的螺旋彈簧，把質點跟 AB 弦的兩端連接起來。假定質點對於圓周的相對平衡位置是 AB 弦的中點 O，試求質點的振動週期等於多大？

解： 定 OC 爲 ξ 軸。因質點的位置可由相對坐標 ξ 決定，故 $\dot{\xi}$ 和 $\ddot{\xi}$ 顯然分別代表質點的相對速度和相對加速度。AB 弦上跟質點重合的一點的速度是 $v_t=\omega\sqrt{h^2+\xi^2}$，其中 h 指 AB 弦到圓心 C 的垂直距離，故參考系加速度是

$$a_t=\omega^2\sqrt{h^2+\xi^2}$$

質點的補加速度在 AB 弦的垂直方向，大小等於 $2\omega\dot{\xi}$，方向如圖（假定圓周反時針方向旋轉）。

三加速度確定後，把所有各作用力和加速度投影於 ξ 軸方向，根據(88)式，就可得

$$\frac{W}{g}\ddot{\xi}=-k\xi+\frac{W}{g}\omega^2\xi=-\left(k-\frac{W}{g}\omega^2\right)\xi \qquad (t)$$

這顯然是一個簡諧運動的運動方程式。故得質點的振動週期

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{g\left(k-\frac{W}{g}\omega^2\right)}} \qquad (u)$$

(t) (u) 兩式內都沒有 h 出現，可見質點在圓周的任何一根弦上都將發生相同的振動。

562. 假設第 561 圖中，質點與 AB 弦間有摩阻力存在，摩阻力跟接觸處的垂直壓力成正比，試求質點的運動方程式。

解： 質點與 AB 弦間的垂直壓力是 a_s 和 a_t 的慣性力在這一方向的分力所構成的。前一慣性力，大小等於 $2\frac{W}{g}\omega\dot{\xi}$，方向跟 a_s 相反；後一慣性力在這一方向的分力，大小等於 $\frac{W}{g}\omega^2h$，方向向外。令 μ 代表質點和 AB 弦間的摩阻係數，可得摩阻力

$$F=-\mu\frac{W}{g}(2\omega\dot{\xi}\pm\omega^2h) \qquad (v)$$

其中右邊括弧內第二項的符號，ξ 爲負時，爲正；ξ 爲正時，爲負。摩阻力確定後，質點的運動方程式就可以列出如下：

$$\frac{W}{g}\ddot{\xi}=-k\xi+\frac{W}{g}\omega^2\xi-\mu\frac{W}{g}(2\omega\dot{\xi}+\omega^2h) \qquad (w)$$

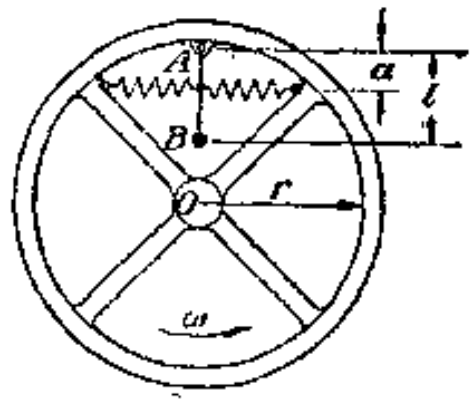
值得注意的是 AB 弦就是圓周直徑的特殊情形。在這一情形下，$h=0$，上式括弧內最後一項將消滅，(w)式變成阻尼振動的運動方程式，摩阻力的效果竟然跟黏滯性的阻力相同。

563. 假設第 611 圖中 $W=27\text{kg}$，$\omega=6\pi\text{s}^{-1}$，$k=36\text{kg/cm}$，試不計摩阻力，求質點的振動週期等於多大？

(解: $\tau=0.204s$)

564. 第 612 圖中，AB 是一個重 W 的單擺，擺長等於 l，懸掛在圖中飛輪的輪邊上。單擺用穿裝着兩根螺旋彈簧，彈力常數合等於 $k/2$。彈簧跟飛輪輪邊連接點的連線，到懸點 A 的垂直距離等於 a。飛輪，半徑等於 r，以固定角速 ω 在水平平面中繞中心軸旋轉。單擺的擺幅很小，因此，補加速度對於單擺相對運動的影響也十分微小，可以忽略不計。試求這一單擺作小振幅振動的週期。

$$\left(\text{解: } \tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{g\left[k\frac{a^2}{l^2}-\frac{W}{g}\omega^2\left(2-\frac{r}{l}\right)\right]}}\right)$$

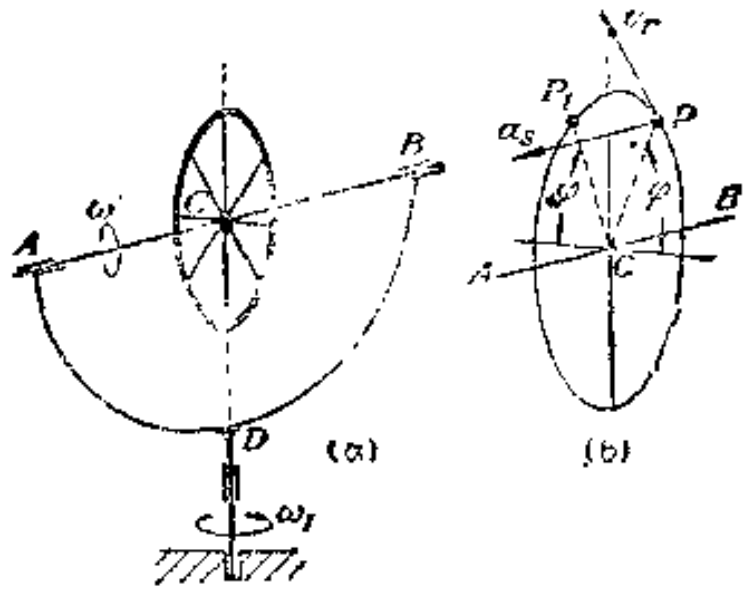


第 612 圖

108. 相對運動中的慣性力

應用慣性力原理處理一個質點或一系質點的運動，我們只要把各質點的慣性力和實際外力一起看作質點或質點系的外力，就可以把問題轉化爲力系的平衡問題。在相對運動中，質點有三種加速度，所以可以得到慣性力的三個分力。這三個分力就是：$-ma_r$，$-ma_t$ 和 $-ma_s$。其中 m 代表質點的質量，a_r，a_t 和 a_s 分別代表相對加速度，參致系加速度和補加速度。致察一個剛體的相對運動，我們只要把它每一個質點上這三個分力構成的慣性力連同所有的實際外力一起看作作用在剛體上的力系，那相對運動的運動方程式，就可以完全由這樣一力系的平衡條件來決定。

例如第 613a 圖中的迴轉儀，它的轉子以固定角速 ω 繞中心軸 AB 旋轉，軸架 ADB 以固定角速 ω_1 繞鉛垂軸線旋轉。爲簡便起見，我們假定轉子的全部質量，完全集中分佈在一個半徑等於 r 的圓周上。這圓周上任意一個質點 P 的相對速度是第 613b 圖中的 v_r；它的相對加速度 a_r，因 P 點的相對運動是繞 AB 軸的等速旋轉，故應等於 $\omega^2 r$，方向是指向中心 C。從整個轉子來說，a_r 所引起的慣性力是平均分佈於質量所散佈的圓周上，所以相對兩質點的 a_r 慣性力全都會兩兩抵消；這一慣性力力系整個是一個平衡力系，從而它的影響可以完全不致慮。至於 P 點的參致系加速度 a_t，我們可根據軸架旋轉時，P 點的運動情形來決定。圖中 φ 代表 P 點同中心 C 的連接線 CP 跟水平線所成的交角。當軸架旋轉時，P 點沿一個半徑等於 $r\cos\varphi$ 的水



第 613 圖

平圓周運動，所以 P 點的參攷系加速度應該是 $a_t=\omega^2{}_1 r\cos\varphi$。這一加速度所引起的 P 點慣性力恰好跟圖中 P_1 點的抵消。因此，整個轉子上所有各質點因 a_t 而生的慣性力也是一個可以不攷慮的平衡力系。賸下來的只有補加速度 a_s 的慣性力還需要顧及。觀察圖中 P 點相對速度 v_r 的大小和方向後，可知這一 a_s，方向跟 AB 軸平行，大小等於 $2r\omega\omega_1\sin\varphi$（參看圖中畫的 a_s）。a_s 所產生的慣性力，方向跟 a_s 相反，對於轉子水平直徑的力矩是

$$2dm\ r\ \omega\omega_1\sin\varphi\cdot r\sin\varphi=2dm\ \omega\omega_1 r^2\sin^2\varphi \qquad (a)$$

其中 dm 就是 P 點的質量。令 W 代表轉子的全部重量，$d\varphi$ 代表 P 點質量 dm 所跨的圓心角，可得

$$dm=\frac{W}{g}\cdot\frac{d\varphi}{2\pi}$$

把它代入(a)式，積分後，就得到轉子的所有各質點上的慣性力對於水平直徑的全部力矩，是

$$M=4\frac{W}{2\pi g}\cdot 2\omega\ \omega_1 r^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\ d\varphi=\frac{W}{g}r^2\omega\omega_1=I\omega\omega_1 \qquad (b)$$

其中 I 指轉子全部質量對於 AB 的惰矩。

因所有外力必須跟慣性力共同構成平衡，所以外力力系必然將產生一個跟 M 相等相反的對於水平直徑的力矩來抵消慣性力的力矩。轉子上的外力，除開通過水平直徑的重力 W 外，只有 A，B 兩軸承對

於 AB 軸的反作用力 R，所以，應該

$$Rl = I\omega\omega_1$$

這結果跟以前 § 98 中應用角動量定理導出的完全符合。至於上式中兩反作用力 R 的方向，很顯然的，如果轉子和軸架的旋轉方向都如第 613 圖，A 處的 R 就是鉛垂向下，B 處的就是鉛垂向上。

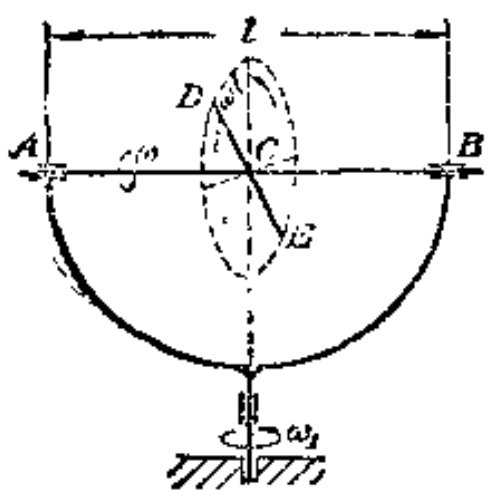
例題和習題

565. 第 614 圖中，DE 桿是一個迴轉儀的轉子。它的長度等於 l，重量等於 W，繞 AB 軸旋轉的角速固定等於 ω。迴轉儀的軸架繞鉛垂軸線等速旋轉，角速是 ω_1。試求 DE 桿跟鉛垂線構成交角 ωt 時，軸承 A 和 B 對於 AB 軸的反作用力在水平和鉛垂方向的分力 R_h 和 R_v。

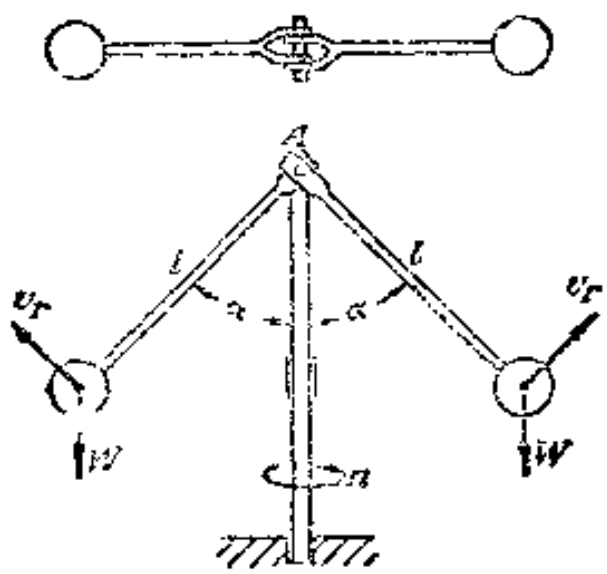
(解：$R_h = \frac{1}{3}\frac{W}{g}\frac{r^2}{l}\omega\omega_1 \sin 2\omega t$，$R_v = \frac{2}{3}\frac{W}{g}\frac{r^2}{l}\omega\omega_1 \cos^2 \omega t$)

566. 第 615 圖中是一個調速器。兩球的重量都等於 W。調速器的角速是每分鐘 120 轉。圖中 $\alpha = 45°$ 時，兩球的相對速度 $v_r = 15\text{cm/s}$，方向如圖。此外，圖中 $l = 30\text{cm}$，$W = 9\text{kg}$。試不計各桿件的重量，求鉛垂旋軸在 A 處所受到的扭力力矩 M 等於多大？

(解：$M = -10\text{kg-cm}$)



第 614 圖



第 615 圖

567. 一條流向正南方的河流，流速 v_r 固定等於 91,4cm/s。由於地球自轉的影響，它的水面不能與正水平。設所在地的緯度是 $\varphi = 50°$，試求水面同與正水平方向的交角 α 等於多大？

(解：$\alpha = 0.0000104$ 弧度)

附　錄　I

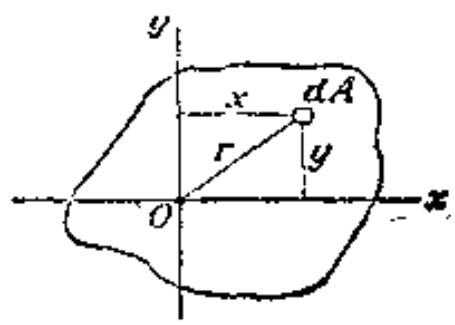
平面圖形的面積惰矩

1. 平面圖形對於同平面軸綫的惰矩

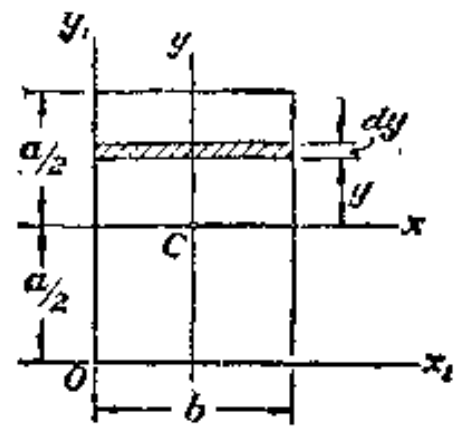
任何一平面圖形的底下這樣兩個積分就稱爲這一圖形對同平面正交軸線 x 和 y 的**面積惰矩**，或者簡稱爲「惰矩」(第 1 圖)：

$$I_x=\int_A y^2 dA, \qquad I_y=\int_A x^2 dA \tag{1}$$

兩積分中，dA 代表圖形的微分面積。以上的定義也就是說，每一微分面積乘上它跟 x 軸或 y 軸的距離的平方後，沿圖形的全部面積積分，所得的積分值就叫做這圖形對 x 軸或 y 軸的惰矩。



第 1 圖



第 2 圖

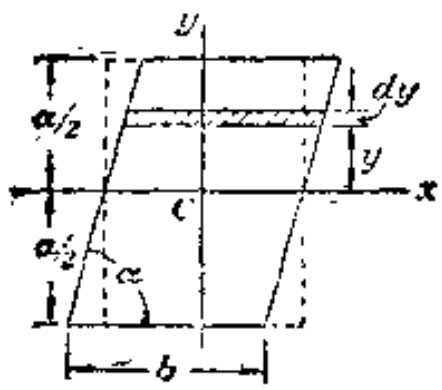
(1)式的積分值，在簡單的情形下，是很容易計算的。例如，第 2 圖中的長方形。我們要計算它對於水平中線 x 軸的惰矩，可以取圖形的水平狹條作爲圖形的微分面積(圖中畫斜線部份)。任一微分面積的大小是 $dA=bdy$。故得

$$I_x=2\int_0^{a/2} by^2\,dy=\frac{ba^3}{12} \tag{2a}$$

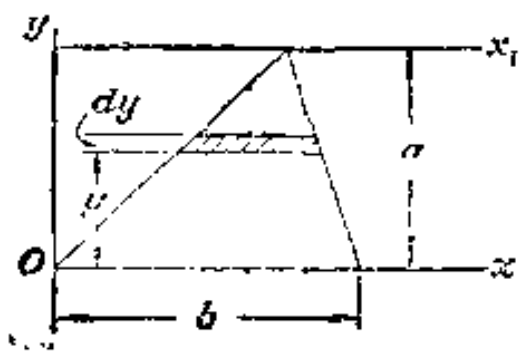
同樣方法，又可得這一長方形對於圖中 y 軸的惰矩

$$I_y=\frac{ab^3}{12} \tag{2b}$$

以上(2a)式還可用來計算第 3 圖中平行四邊形的惰矩 I_x。這一平行四邊形可當作由圖中虛線表示的長方形的每一微分面積沿 x 軸方向平行移動而成。因爲微分面積的大小既未改變，它跟 x 軸的距離也沒有變動，所求的對 x 軸惰矩 I_x 自然跟長方形完全相同。



第 3 圖



第 4 圖

計算一個三角形對它底邊的惰矩 I_x，我們可將三角形面積按第 4 圖方法分割。任意一離底邊距離等於 y 的微分面積的大小是

$$dA=\frac{b(a-y)dy}{a}$$

故得

$$I_x=\frac{b}{a}\int_0^a y^2(a-y)dy=\frac{ba^3}{12} \tag{3}$$

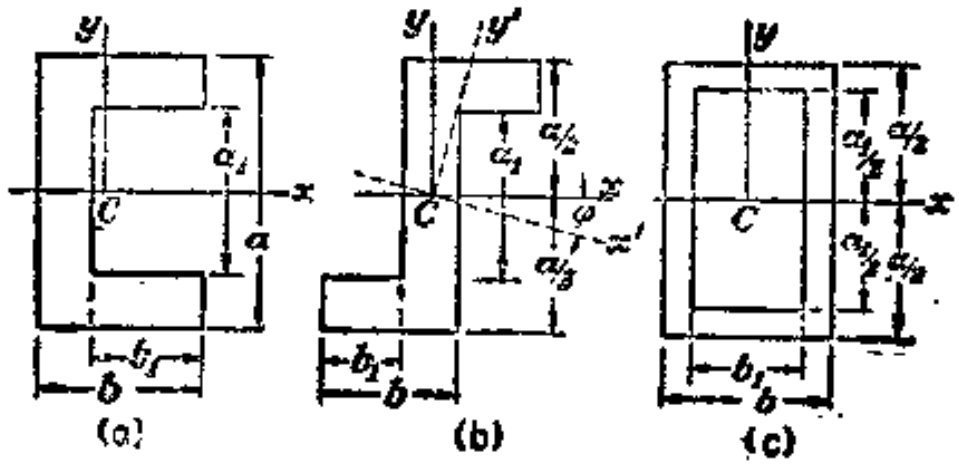
假使一個圖形能夠分割成爲幾部份，而這些部份對軸線的惰矩都已經確定，那計算就簡單得多。例如第 5a 圖的槽鋼切面。它對於水平中軸 x 的惰矩，根據惰矩定義，顯然等於圖中長方形 ab 跟長方形 a_1b_1 對同軸的惰矩差，故得

$$I_x=\frac{1}{12}(ba^3-b_1a_1^3) \tag{4}$$

至於第 5b 圖的 Z 形形鋼切面以及第 5c 圖的回形形鋼切面對各自水平中軸的惰矩，很明顯的，計算式將完全跟(4)式相同。

以上各例所說明的，是計算平面圖形對於一軸線的惰矩的最普遍方法；任何一個平面圖形對一根軸線的惰矩，都可以按這樣的方法來決定，就是：把整個面積分爲平行於軸線的微分面積，然後按(1)式積分。

不過，如果某一圖形的(1)式積分很難計算，而問題本身又只要求一個近似的解答，那在一般情形下，我們就不必積分，直接把圖形分割成爲若干平行於軸線的狹條面積，在圖上量出各狹條的形心到軸線的距離，然後，將各狹條的面積跟所量出的距離的平方分別乘得乘積，再加成總和，就得到這一圖形對軸線的惰矩的近似值。



第 5 圖

根據(1)式規定的定義，一個平面圖形的面積對於同平面一根軸線的惰矩，它的因次是長度的四次方，所以如果把圖形面積去除這一惰矩，就可得到一個因次是長度兩次方的商數。這商數，我們可以當作某一長度的平方，並稱這長度爲圖形對於軸線的**惰矩半徑**或**旋轉半徑**。用符號 i 代表惰矩半徑，可得

$$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}},\qquad i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{5}$$

例如第 2 圖的長方形，它對於兩坐標軸線 x 和 y 的惰矩半徑就是

$$i_x=\sqrt{\frac{ba^3}{12ba}}=\frac{a}{2\sqrt{3}}\quad 和\quad i_y=\frac{b}{2\sqrt{3}} \tag{6}$$

習　題

1. 求第 2 圖中的長方形對於底邊的惰矩。

(解: $Ix_1=ba^3/3$)

2. 試求第 3 圖的平行四邊形對於它底邊的惰矩。

(解: $Ix_1=la^3/3$)

3. 試求第 4 圖的三角形對於圖中 1 軸的惰矩。

(解: $Ix_1=ba^3/4$)

4. 求邊長等於 a 的正方形對於它一根對角綫的惰矩。

(解: $I_d=a^4/12$)

5. 求底下第 15 圖中的角鋼切面對於它底邊的惰矩。

[解: $I_x=\frac{h}{3}(a^3+ah^2-h^3)$]

2. 平面圖形對於垂直於圖平面的軸綫的惰矩——極惰矩

一個平面圖形對於一根垂直於圖平面的軸線的惰矩，它的定義就是底下這樣一個積分:

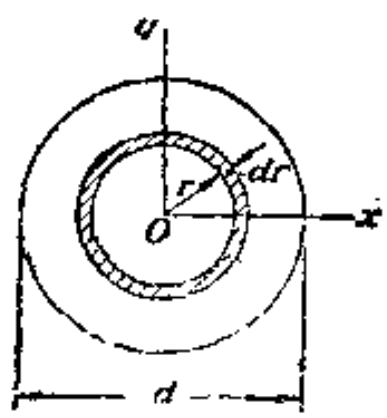
$$J=\int_A r^2 dA \tag{7}$$

其中 r 代表任意一微分面積 dA 到軸線的距離。(7) 式說明: 一個平面圖形對垂直圖平面的軸線的惰矩就是每一微分面積 dA 跟各自到軸線的距離平方 r^2 相乘，然後，沿整個面積積分而得的積分值。設想第 1 圖內，在 O 點有一垂直於圖平面的軸線，那這一圖形對於這軸線的惰矩就是

$$J=\int_A r^2 dA=\int_A (x^2+y^2)dA=I_y+I_x \tag{8}$$

在這一例子當中，因爲所取的距離也就是每一微分面積到 O 點的距離，所以(8)式的惰矩又稱爲圖形對 O 點的**極惰矩**。由(8)式可看到，任何一個平面圖形對於同平面一點 O 的極惰矩總等於圖形對於同平面上過 O 點的任意兩根正交軸線的惰矩的總和。

例如第 6 圖中的圓面積，計算它對於圓心 O 的極惰矩，我們可以以它內中的同心圓環作爲微分面積。任意一微分圓環的半徑等於 r、寬度等於 dr，面積因此等於 $2\pi r\,dr$，故根據定義，它對於圓心 O 的極惰矩就等於 $2\pi r^3 dr$。把圓內所有圓環對 O 點的極惰矩積成總和，就得到整個圓面積對同點的極惰矩，是



第 6 圖

$$J=\int_0^{d/2} 2\pi r^3 dr=\frac{\pi d^4}{32} \tag{9a}$$

如果圓內有一個同心圓孔，直徑等於 d_1，那末 (9a) 中的積分下限就應該是 $d_1/2$，而不是 0，故得

$$J=\int_{d_1/2}^{d/2}2\pi r^3dr=\frac{\pi}{32}(d^4-d_1^4) \tag{9b}$$

圓面積對於圓心的極惰矩決定後，它對於任意一直徑的惰矩就可以很容易的直接由(8)式決定。因爲一個圓對於所有直徑的惰矩都大小相同，所以，由(8)式，可得

$$I_x=I_y=\frac{1}{2}J=\frac{\pi d^4}{64} \tag{10}$$

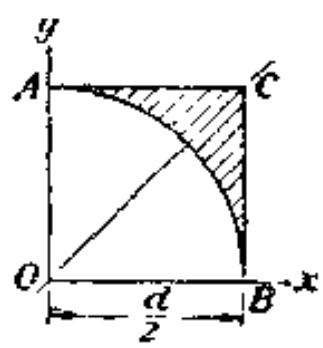
第 7 圖中的四分之一圓對於圖中 x 軸的惰矩是

$$I_x=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi d^4}{64}\right)=\frac{\pi d^4}{256}=I_y \tag{11}$$

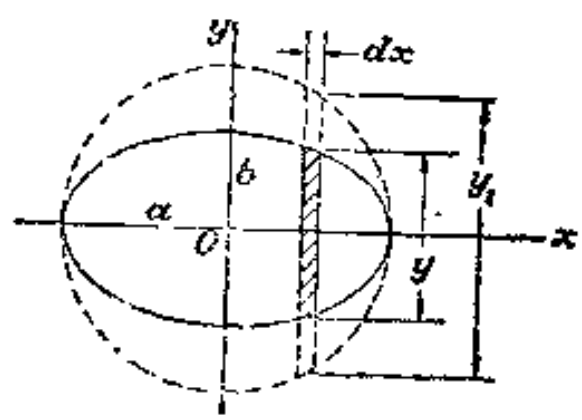
第 7 圖中，畫斜線部份 ACF 的對 x 軸惰矩等於正方形 $OACB$ 的惰矩減掉四分之一圓的惰矩；故

$$I_x=\frac{d^4}{3\cdot 16}-\frac{\pi d^4}{256}=I_y \tag{12}$$

一個橢圓(第 8 圖)對於它長軸 x 的惰矩可以由這一橢圓跟一個圓(圖中虛線圓)的比較來決定。因橢圓中每一微分面積(平行於圖中



第 7 圖



第 8 圖

軸的狹條)的高度 y 等於虛線圓相應的微分面積的高度 y_1 跟比值 b/a 的乘積，所以由(2a)式，可知橢圓微分面積的 x 軸惰矩應該等於圓的微分面積對同軸惰矩的 b^3/a^3 倍。整個橢圓跟整個圓對 x 軸的惰矩當然也是如此的關係，故橢圓的 x 軸惰矩是

$$I_x=\frac{\pi(2a)^4}{64}\cdot\frac{b^3}{a^3}=\frac{\pi ab^3}{4} \tag{13a}$$

同樣方法，又可得橢圓對於短軸 y 的惰矩，是

$$I_y=\frac{\pi a^3 b}{4} \tag{13b}$$

最後，應用(8)式可得橢圓對於它中心的極惰矩，是

$$J=I_x+I_y=\pi ab(a^2+b^2)/4 \tag{14}$$

習 題

6. 試求第 2 圖長方形對於形心的極惰矩。

$\left(\text{解: } J=\frac{ha^3}{12}+\frac{ab^3}{12}\right)$

7. 試求第 5c 圖的同形形鋼切面對於形心的極惰矩。

8. 試求第 7 圖中畫斜綫部份對於 O 點的極惰矩。

9. 試求第 2 圖長方形對於一個角頂的極惰矩。

[解: $J_o=\frac{ab}{3}(a^2+b^2)$]

10. 試求底下第 15 圖中角鋼切面對於坐標原點的極惰矩。

[解: $J_o=\frac{2}{3}h(a^3+ah^2-h^3)$]

3. 平行軸綫定理

假使已知一個平面圖形（第 9 圖）對於通過它形心的軸線 x 的惰矩，那這一圖形對於任何其他平行於 x 軸的軸線 x_1 的惰矩都可以由底下一式來決定：

$$I_{x1}=I_x+Ab^2 \tag{15}$$

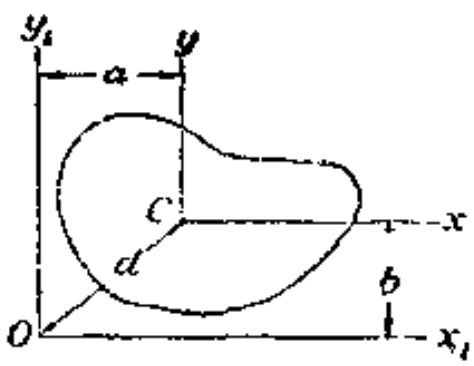
式中 A 指圖形的全部面積，b 指 x 軸到 x_1 軸間的距離。(15)式稱爲平行軸綫定理，它的證明如下：

按惰矩的定義，知

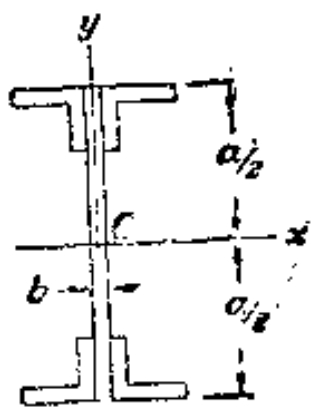
$$I_{x1}=\int_A (y+b)^2 dA=\int_A y^2\,dA+2\int_A by\,dA+\int_A b^2 dA \tag{a}$$

式中右邊第一個積分就是 I_x；第二個積分，因 x 軸通過形心，將等於零；第三個積分，因 b 是常數，將等於 Ab^2。因此，(a) 式正就是(15)式；這就證明了平行軸線定理。

(15)式對於計算一個鈑梁切面(如第10圖)的惰矩特別有用。因爲形鋼切面的形心位置以及切面對於平行於切面邊的形心軸線的惰矩，在工程手册內都可以查到，故鈑梁切面對於像圖中 x 和 y 軸這樣的軸線的惰矩，可以很容易地根據平行軸線來確定。



第 9 圖



第 10 圖

對於垂直於圖平面的平行軸線，我們也可以導出一個類似(15)式的公式。觀察以上第9圖，可知，圖中圖形對於 O 點的極惰矩是

$$J_o=I_{x_1}+I_{y_1}=I_x+Ab^2+I_y+Aa^2=J_c+Ad^2 \qquad (16)$$

式中 d 指圖形形心 C 離開 O 點的距離。(16)式就是關於垂直於圖平面的軸線的平行軸線定理。

習　題

11. 試應用平行軸線定理求第4圖三角形對於平行底邊並通過形心的軸線的惰矩。

(解：$I_{x_c}=\frac{ba^3}{36}$)

12. 設第10圖中的角鋼尺寸是 $4\times4\times\frac{1}{2}$cm；此外，$a=20$cm，$b=\frac{1}{2}$cm，試求鈑梁切面的 I_x。

(解：$I_x=1524\text{cm}^4$)

13. 第7圖中畫斜綫部份的形心位置在以前第117題中已經求得，試應用平行軸線定理求這一圖形對於平行於 x 軸的形心軸線的惰矩。

(解：$I_{x_c}=0{,}000471d^4$)

14. 試求以前第173圖的角鋼切面對於平行於 x 軸的軸線的惰矩，所有各圓角的影響都要估計在內。此外，計算一下：如果不計圓角，惰矩的誤差將等於多大？

15. 試求以前第175圖中的切面對於平行於 x 軸的形心軸線的惰矩。

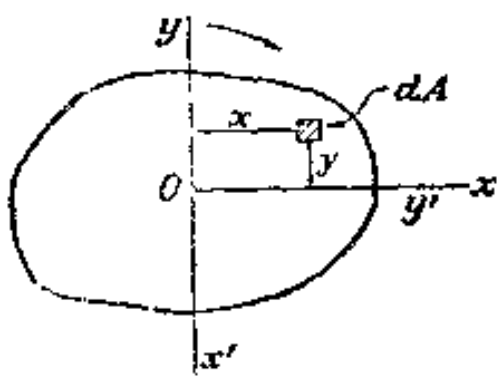
4. 惰矩積和主軸

一個平面圖形(第11圖)的底下這樣一個積分就稱爲這圖形對於

x 和 y 軸的惰矩積：

$$I_{xy}=\int_A xydA \tag{17}$$

積分中的 x 和 y 分別指圖形中任意一微分面積 dA 的 x 和 y 軸坐標。



第 11 圖

(17)式也就是說，我們把圖形的每一微分面積跟它兩坐標值的連乘積沿整個圖形面積積分，所得的總和就叫做圖形對兩軸線的惰矩積。惰矩值，根據 (1) 和 (7) 兩定義式，永遠是正的；可是惰矩積 (17)式却可以正、可以負，完全要看 x 和 y 軸的方向而定。譬如，第 11 圖圖形的惰矩積原本是正的，假使 x, y 兩坐標軸繞原點 O 順時針方向旋轉 90°，變爲圖中的 x', y' 兩軸，那每一微分面積的新坐標值 x', y' 同它原來坐標值 x, y 的關係就是：

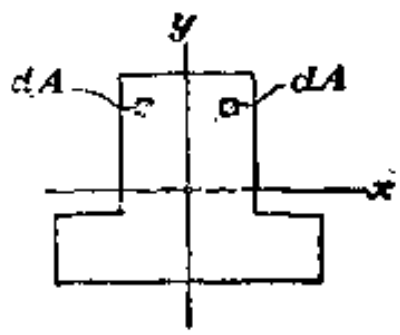
$$y'=x, \quad x'=-y$$

所以圖形對於新軸線 x', y' 的惰矩積就變成

$$I_{x'y'}=\int_A x'y'dA=-\int_A xydA=-I_{xy}$$

可見惰矩積在軸線旋轉的過程中曾經由正變負，改變過符號。但是惰矩積隨坐標軸旋轉的變化是連續性的。因此，在旋轉過程中，必定會有一坐標軸方向將使惰矩積的值等於零。這一方向的軸線 x'' 和 y'' 稱爲圖形的**主軸**。通常情形下，我們都以圖形的形心作爲主軸的原點，這樣特殊選定的主軸稱爲圖形的**中心主軸**。如果圖形有一對稱軸，那這對稱軸同任何一垂直於它的直線都將構成圖形的主軸。因爲就有對稱軸的情形來說，不論其他垂直於對稱軸的直線的位置如何，圖形的每一微分面積 dA 必然有一對稱的相等微分面積存在，這兩微分面積分別跟各自坐標的連乘積當然是符號相反的兩值，所以在積成總和的積分過程中全部將兩兩抵消，使(17)式值等於零，因之，x 和 y 軸必然是圖形的主軸(主軸如何決定，見底下 § 5)。

坐標軸線如發生平行推移，惰矩積的值隨而改變。命 I_{xy} 代表圖形對於兩正交形心軸線 x 和 y 的惰矩積，x_1 和 y_1 代表平行於 x 和 y



第 12 圖

軸的新軸線，a 和 b 代表圖形形心 C 的 x_1 和 y_1 軸坐標（第 13 圖）。因圖形中每一微分面積 dA 的新坐標值是：

$$x_1=x+a,\quad y_1=y+b$$

故整個圖形對於兩新軸線 x_1 和 y_1 的惰矩積將是

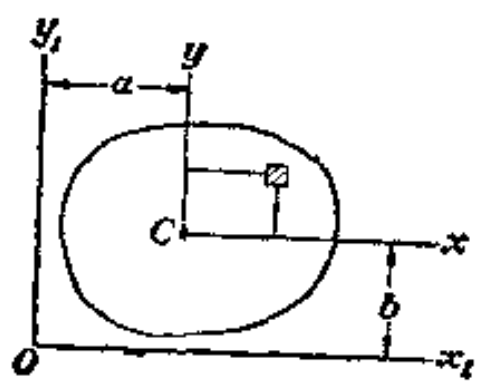
$$I_{x_1y_1}=\int_A(x+a)(y+b)dA=\int_A xydA+a\int_A ydA+b\int_A xdA+ab\int_A dA \qquad (a)$$

但 x 和 y 軸是圖形的形心軸線，故(a)式右邊第二、第三兩個積分都應當等於零。因此，(a)式可化爲

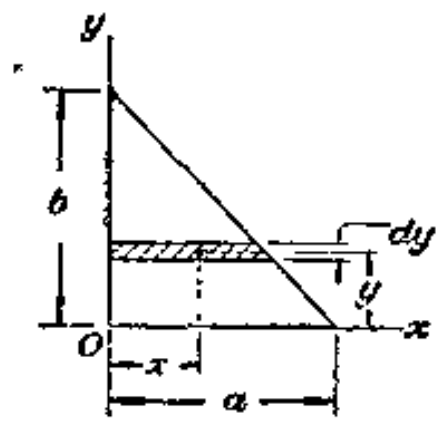
$$I_{x_1y_1}=I_{xy}+Aab \qquad (18)$$

這就是圖形惰矩積的平行軸線定理。

例如第 14 圖的直角三角形，如果要求它的惰矩積 I_{xy}，我們可把



第 13 圖



第 14 圖

它分割爲平行於 x 軸的狹條，每一微分面積等於 $\frac{a(b-y)dy}{b}$，距離底邊的距離是 y，按(18)式，可得惰矩積，等於

$$\frac{a(b-y)dy}{b}\cdot\frac{a(b-y)y}{2b} \qquad (b)$$

積分(b)式，就得三角形對兩坐標軸 x 和 y 的惰矩積如下：

$$I_{xy}=\frac{a^2}{2b^2}\int_0^b(b-y)^2ydy=\frac{a^2b^2}{24} \qquad (19)$$

習 題

16. 試應用(18)式求第 2 圖長方形對 x_1 和 y_1 軸的惰矩積。

17. 試應用(18)(19)兩式決定第 3 圖的平行四邊形的惰矩積 I_{xy}。

18. 試求第 4 圖三角形的惰矩積 I_{xy}。

19. 試第 15 圖中的角鋼切面的惰矩積 I_{xy} 和 $I_{x'y'}$。

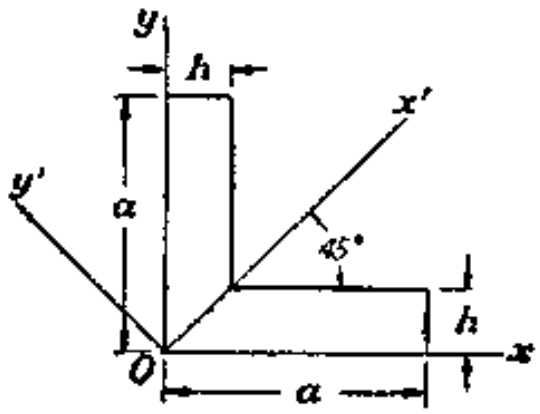
[解: $I_{xy}=\frac{a^2h^2}{4}+\frac{h^2(a^2-h^2)}{4}$, $I_{x'y'}=0$]

20. 試求第 56 圖 Z 形形鋼切面的惰矩積 I_{xy}。

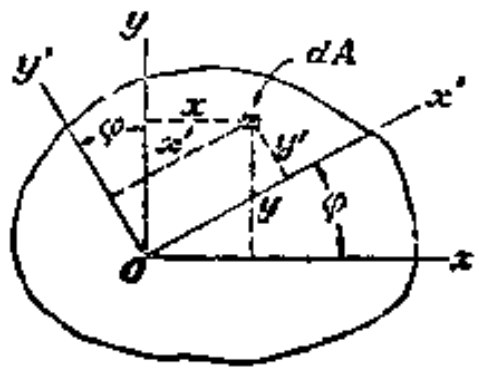
$\left(\text{解: } I_{xy}=bb_1\frac{a+a_1}{4}\cdot\frac{a-a_1}{2}\right)$

5. 主軸及主軸惰矩

假設第 16 圖中圖形的惰矩



第 15 圖



第 16 圖

$$I_x=\int_A y^2dA,\quad I_y=\int_A x^2dA \tag{a}$$

和惰矩積

$$I_{xy}=\int_A xydA \tag{b}$$

全都知道，現在要求這一圖形對於圖中一對新坐標軸 x' 和 y' 的 $I_{x'}$, $I_{y'}$ 和 $I_{x'y'}$。因圖形中任意一微分面積 dA 的新坐標值是

$$x'=x\cos\varphi+y\sin\varphi \quad 和 \quad y'=y\cos\varphi+x\sin\varphi \tag{c}$$

其中 φ 指 x 跟 x' 軸或 y 跟 y' 軸的交角，故根據惰矩的定義可得

$$I_{x'}=\int_A(y\cos\varphi-x\sin\varphi)^2dA=\int_A y^2\cos^2\varphi\,dA$$
$$+\int_A x^2\sin^2\varphi\,dA-2\int_A xy\sin\varphi\cos\varphi\,dA$$

也就是

$$I_{x'}=I_x\cos^2\varphi+I_y\sin^2\varphi-2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \tag{20a}$$

上式中如用 $\pi/2+\varphi$ 代替 φ，又可得

$$I_{y'}=I_x\sin^2\varphi+I_y\cos^2\varphi+2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \tag{20b}$$

取(20a)同(20b)的總和，得

$$I_{x'}+I_{y'}=I_x+I_y \tag{21}$$

可見在坐標軸繞 O 點的旋轉過程中，圖形對於任何兩坐標軸的惰矩的總和是始終等於一個固定常數的。如果取(20a)(20b)的差，又可得

$$I_{x'}-I_{y'}=(I_x-I_y)\cos 2\varphi-2I_{xy}\sin 2\varphi \tag{22}$$

應用(21)和(22)兩式來計算 $I_{x'}$ 和 $I_{y'}$，要比引用(20)式直接計算簡便得多。

圖形對於兩根新軸線的惰矩積是

$$\begin{aligned}I_{x'y'}&=\int_A(x\cos\varphi+y\sin\varphi)(y\cos\varphi-x\sin\varphi)dA\\&=\int_A y^2\sin\varphi\cos\varphi\,dA-\int_A x^2\sin\varphi\cos\varphi\,dA\\&+\int_A xy(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)dA=\tfrac{1}{2}(I_x-I_y)\sin 2\varphi+I_{xy}\cos 2\varphi\end{aligned} \tag{23}$$

有了這式，我們就可決定 O 點的主軸方向。根據定義，如果 x' 和 y' 是圖形的主軸(第 16 圖)，那圖形對於 x' 和 y' 兩軸的惰矩積 $I_{x'y'}$ 就應該等於零；這也就是說，x' 和 y' 如果是主軸，必須

$$\tfrac{1}{2}(I_x-I_y)\sin 2\varphi+I_{xy}\cos 2\varphi=0$$

也就是

$$\operatorname{tg} 2\varphi=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x} \tag{24}$$

由這式，我們可以得到兩個 2φ 值，兩值相差 π；也就是兩 φ 值相差 $\pi/2$。決定主軸方向的 φ 值找到後，把它代入(21)和(22)式中，就可求得圖形的主軸惰矩。

從(20)式中可以看到，$I_{x'}$ 和 $I_{y'}$ 的大小，隨着 φ 角的增減作連續性的變化，所以我們可以斷定，在變化過程中 $I_{x'}$ 和 $I_{y'}$ 一定有一個最大值或最小值存在。要決定這最大或最小值，只要將(20a)和(20b)對 φ 微分，令導函數等於零就成。不過，在任何情形下，我們得到的結果都將是跟(24)式完全相同的方程式。這說明，圖形對於兩主軸的惰矩也就分別是惰矩的最大和最小值。

關於決定主軸方向的方法，底下我們舉一個計算例來說明。例如第 5b 圖中的 Z 形形鋼切面，假設 $a=16\text{cm}$，$a_1=13{,}8\text{cm}$，$b=7\text{cm}$，$b_1=5{,}9\text{cm}$。這一切面可當作由三個長方形構成，故應用 (2) (15) 和 (18) 三式可得：

$$I_x=1097\text{cm}^4,\quad I_y=198{,}4\text{cm}^4,\quad I_{xy}=338{,}5\text{cm}^4$$

把這些結果代入(24)式中，就得到

$$\operatorname{tg} 2\varphi=-0{,}753,\quad 2\varphi=-37^\circ,\quad 或\quad 2\varphi=143^\circ$$

取前一 2φ 值，那末 x 軸順時針方向旋轉 $18^\circ 30'$ 後，就是一根主軸 x'。再把 $\sin 2\varphi=-0{,}602$ 和 $\cos 2\varphi=0{,}799$ 一一代入(22)式，我們就可由(21)和(22)兩式算出圖形的主軸惰矩是：

$$I_{x'}=1211\text{cm}^4,\quad I_{y'}=85{,}0\text{cm}^4$$

習 題

21. 第 7 圖中，設 $d=4\text{cm}$，試求畫斜綫部份對於中心主軸的兩個惰矩值。

22. 第 14 圖中，設 $b=2a$，試求三角形的中心主軸的方向。

23. 試求第 15 圖中的切面的主軸惰矩 $I_{x'}$ 和 $I_{y'}$。

24. 第 3 圖中，設 $\alpha=60^\circ$，$b=a$，試求平行四邊形的中心主軸方向。

25. 試求以前第 173 圖（第 89 頁）中角鋼切面對於中心主軸的惰矩。

附 錄 II

物體的質量惰矩

6. 剛體的惰矩

假使令 dm 代表一個剛體的微分質量，r 代表這一微分質量 dm 離開某一固定軸線的距離，那末底下這一積分就稱爲剛體對於定軸的**質量惰矩**(或簡稱惰矩)：

$$I=\int_V r^2 dm \tag{25}$$

(25)式也就是說，我們把剛體的微分質量乘上它到某一定軸的距離的平方，然後，沿剛體的全部體積 V 積分，所得到的結果就叫做剛體對定軸的惰矩。按這一定義，可知質量惰矩的因次是「質量×長度²」，或「力×長度×時間²」。因此，質量惰矩可以由底下這一公式來表示：

$$I=\frac{W}{g}i^2 \tag{26}$$

其中 $\frac{W}{g}$ 代表物體的質量；i 代表某一長度，這長度通常稱爲物體對於以上定軸的**惰矩半徑**(或旋轉半徑)。

確定一個物體的惰矩無非就是計算(25)式的積分值。底下我們討論處理各種具體問題的各種不同的方法。

7. 薄片體的惰矩

如果一個物體厚度十分微小，形狀成爲一個薄片，那它的惰矩計算就非常簡單。這樣一物體若密度均勻、厚度一致，我們就可選用它的厚度方向中平面作爲 x 和 y 坐標軸平面(第 1 圖)，令 h 和 w 分別代表物體的微小厚度和單位體積的重量，dA 代表中平面切面圖形的微分面積，它的微分質量就是 $\frac{w}{g}h\cdot dA$。按(25)式規定的定義，這一薄片體對

於通過任意一 O 點的三坐標軸 x, y 和 z 的惰矩應該是:

$$I_x=\frac{wh}{g}\int_A y^2dA,\quad I_y=\frac{wh}{g}\int_A x^2dA,\quad I_z=\frac{wh}{g}\int_A r^2dA \quad (27)$$

這些公式跟附錄 I 中面積惰矩的 (1)(7) 兩式只差一個常數因子 $\frac{wh}{g}$, 可見只要把附錄 I 中各式乘上這個因子 $\frac{wh}{g}$, 就可以得到各種形狀薄片體的質量惰矩。

例如附錄 I 中第 2 圖的長方形,如果它代表一個厚 h、重 W 的長方薄片, 那末令 w 代表它單位體積重量, 就可得這一長方薄片對於兩對稱軸 x 和 y 的惰矩,是:

$$I_x=\frac{wh}{g}\frac{ba^3}{12}=\frac{W}{g}\frac{a^2}{12},\qquad I_y=\frac{W}{g}\frac{b^2}{12} \qquad (28a)$$

再應用(8)式,又可得它對於通過重心的 z 軸的惰矩,是

$$I_z=I_x+I_y=\frac{W}{g}\cdot\frac{a^2+b^2}{12} \qquad (28b)$$

同樣,物體如果是一半徑 $a=\frac{d}{2}$ 的圓形薄片(第 6 圖),那它對於通過圓心的坐標軸的惰矩就是:

$$I_x=I_y=\frac{wh}{g}\cdot\frac{\pi d^4}{64}=\frac{W}{g}\cdot\frac{a^2}{4},\quad I_z=\frac{W}{g}\cdot\frac{a^2}{2} \qquad (29)$$

比較(28)同(26)兩式, 可知一長方薄片對於三坐標軸的惰矩半徑將分別是:

$$i_x=\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad i_y=\frac{b}{2\sqrt{3}},\quad i_z=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}} \qquad (30)$$

它們完全跟長方形面積的惰矩半徑相同[見第 209 頁(6)式]。一般說來, 任何密度均勻的薄片體, 它對於一定軸線的惰矩半徑,一定跟它的中平面切面圖形對同軸的面積惰矩半徑相同。

習 題

26. 一塊密度均勻的三角形薄片,重量等於 W。試應用(3)式決定它對於底邊的惰矩。

$\left(\text{解: } I_x=\frac{W}{g}\cdot\frac{a^2}{6}\right)$

27. 一塊密度均勻的薄片，重量等於 W，形狀如第 5a 圖，試求它的 I_x。

28. 一塊密度均勻的圓形薄片，半徑等於 a，重量等於 W，試求它對於圓周上一根切線的惰矩 I。

(解：$I=\frac{5}{4}\frac{W}{g}a^2$)

29. 一塊密度均勻的正十邊形薄片，重量等於 W，每邊長度等於 a，試求它對於一對角綫的惰矩 I_d。

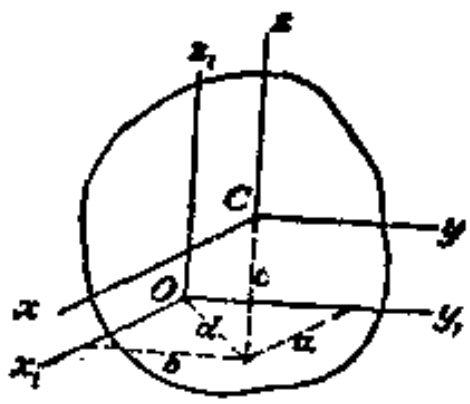
(解：$I_d=\frac{5}{24}\frac{W}{g}a^2$)

30. 一塊密度均勻的 Z 形薄片，形狀如第 5b 圖。設重量 $W=1.27$kg，$a=5$cm，$=3$cm，$a_1=3$cm，$b_1=2$cm，試求 I_x 等於多大？

(解：$I_x=0.00384$kg－s²－cm)

8. 立體物體的惰矩

立體物體指三方向的長度很相近的物體。計算一個立體物體的惰矩，首先應求出它對於平行於已定軸線的重心軸線的惰矩，然後歸算到已定的軸線上去。令 x, y 和 z 代表通過物體重心並平行於已定 x_1, y_1 和 z_1 三軸的三正交坐標軸線（第 17 圖）。物體的重心 C 在已定坐標軸 x_1, y_1 和 z_1 中的坐標是 a, b 和 c。按(25)式所規定的定義，可得物體的 z_1 軸惰矩如下：



第 17 圖

$$I_{z_1}=\int_V(x_1^2+y_1^2)dm$$

$$=\int_V\left[(a+x)^2+(b+y)^2\right]dm=(a^2+b^2)\int_V dm+2a\int_V xdm$$

$$+2b\int_V ydm+\int_V(x^2+y^2)dm \qquad (a)$$

因 x, y 和 z 三軸全通過物體的重心，故(a)中第二、第三兩積分都應等於零（見 §49）。若令

$$d^2=a^2+b^2, \quad 和 \quad r^2=x^2+y^2,$$

以上(a)式就化爲

$$I_{z_1}=\int_V r^2dm+md^2=I_z+\frac{W}{g}d^2 \qquad (31)$$

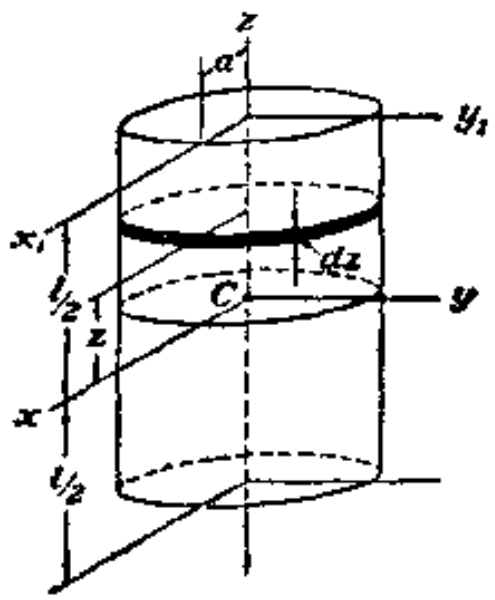
這就是物體質量惰矩的**平行軸綫定理**。這定理說明：物體對於任一軸線的惰矩就等於它對於過重心的平行軸線的惰矩加上物體全部質量跟兩軸線間距離的平方的乘積。

若將(31)式改成如下的形式：

$$\frac{W}{g}i_{z_1}^2=\frac{W}{g}i_z^2+\frac{W}{g}d^2$$

就可得物體對於兩軸線的惰矩半徑間的關係如下：

$$i_{z_1}^2=i_z^2+d^2 \tag{32}$$



第 18 圖

至於如何應用平行軸線定理來計算立體物體的惰矩，我們用以下兩例來說明：第一個例子是第 18 圖中的一個密度均勻的實心圓柱。現在要計算它對於圖中三坐標軸 x, y 和 z 的惰矩。計算 x 軸惰矩時，可設想這圓柱分解爲一層層的薄圓片。任意一薄片的厚度是 dz，它離開圓柱重心 C 的距離是 z，重量是 $\pi a^2 w dz$（其中 w 指圓柱的單位體積重量），故應用 (29) 式和平行軸線定理，可得薄片對於 x 軸的惰矩，是

$$\frac{\pi a^2 w dz}{g}\cdot\frac{a^2}{4}+\frac{\pi a^2 w dz}{g}z^2$$

加攏所有這些薄片對於 x 軸的惰矩，我們就得到整個圓柱對同軸的惰矩 I_x，故

$$I_x=\frac{\pi a^2 w}{g}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\left(\frac{a^2}{4}+z^2\right)dz=\frac{\pi a^2 wl}{4g}+\frac{\pi a^2 l^2 w}{12g}=\frac{W}{g}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right) \tag{33}$$

其中 $W=\pi a^2 wl$ 指圓柱的全部重量。

因圓柱形狀是對稱的，所以它對於 y 軸或任何其他垂直於長軸的重心軸線的惰矩都可以按(33)式計算；也就是說，都等於 I_x。

若圓柱的長度 l 比半徑 a 小得很多，(33) 中的 $l^2/12$ 將顯得十分微小，因而可以忽略不計，那物體的慣矩就跟圓形薄片相同；(33) 式的結果就跟(29) 式的完全相同。設若圓柱的半徑 a 比長度 l 要微小得多，(33)中的 $a^2/4$ 項可以忽略不計，那這一細桿形物體的慣矩就是

$$I_x=\frac{W}{g}\cdot\frac{l^2}{12} \tag{34}$$

有時候，我們需要計算一根細桿對於通過它一端的橫軸的慣矩 I_{x1}。這只要聯合應用(34)和(31)兩式，就可得

$$I_{x1}=\frac{W}{g}\left(\frac{l^2}{12}+\frac{l^2}{4}\right)=\frac{Wl^2}{3g} \tag{35}$$

至於圓柱對於 z 軸的慣矩，我們把圓柱中所有各圓形薄片的 z 軸慣矩加成總和，就得到

$$I_z=\frac{W}{g}\cdot\frac{a^2}{2}$$

第二個例子是一個密度均勻、半徑等於 a 的實心圓球。現在要計算它對於任一直徑的慣矩。令 x, y 和 z 代表通過球心的三正交坐標軸；圓球對這三軸線的慣矩，根據慣矩的定義，應分別是：

$$I_x=\int_V(y^2+z^2)dm,\quad I_y=\int_V(x^2+z^2)dm,\quad I_z=\int_V(x^2+y^2)dm$$

因圓球對任何直徑的慣矩都相等，故將以上三式加成總和後，又可得

$$I_x=I_y=I_z=\frac{2}{3}\int_V(x^2+y^2+z^2)dm=\frac{2}{3}\int_V r^2dm \tag{b}$$

其中 r 指微分質量 dm 到球心的距離。設想圓球分解爲一層層的薄層球殼，任意一球殼的厚度是 dr，半徑是 r，質量因之是 $4\pi r^2dr\,\frac{w}{g}$ (w 指圓球的單位體積重量)，以這一質量代出(b)式中的 dm，就得

$$I_x=I_y=I_z=\frac{2}{3}\int_0^a\frac{4\pi r^4wdr}{g}=\frac{8}{15}\cdot\frac{\pi wa^5}{g}=\frac{2}{5}\,\frac{W}{g}a^2 \tag{36}$$

其中 $W=\frac{4}{3}\pi a^3w$ 就是圓球的全部重量。

習 題

31. 一個密度均勻的正圓錐體，底圓半徑等於 a，高度等於 h，試求它對中心軸綫以及對通過錐頂與平行於底平面的軸綫的惰矩 I_z 和 I_x。

$$\left[\text{解：}\ I_z=\frac{3}{10}\cdot\frac{W}{g}a^2,\ I_x=\frac{W}{g}\left(\frac{3a^2+12h^2}{20}\right)\right]$$

32. 一個密度均勻的長方體，邊長是 a，b 和 c，試求它對於平行於長 a 的一邊的形心軸綫的惰矩 I_x。

$$\left[\text{解：}\ I_x=\frac{W}{g}\left(\frac{b^2+c^2}{12}\right)\right]$$

33. 一個密度均勻的正方體，邊長等於 a，試求它對於一邊的惰矩。

$$\left[\text{解：}\ I=\frac{2}{3}\ \frac{W}{g}\ a^2\right]$$

34. 一個密度均勻的空心圓球，內外半徑分別是 a_i 和 a_o，單位體積重量是 w，試求它對於一根直徑的惰矩 I_o。

$$\left[\text{解：}\ I=\frac{8}{15}\ \frac{\pi w}{g}(a_o^5-a_i^5)\right]$$

35. 一個密度均勻的半球，半徑等於 a，重量等於 W，球表面有一根平行於底平面的切綫，試求半球對於這切綫的惰矩。

9. 惰矩積和主軸

「惰矩積」這一觀念對於我們計算物體對於各種不同軸線的惰矩非常有用。一個物體對於三個正交坐標軸 x, y, z（第 17 圖）計有三個質量惰矩積：它們的定義由底下三個積分規定：

$$I_{xy}=\int_V xy\,dm,\quad I_{yz}=\int_V yz\,dm,\quad I_{xz}=\int_V xz\,dm \tag{37}$$

物體惰矩積的因次，同它惰矩一樣，也是「質量×長度²」。不過惰矩積的值可以正、也可以爲負，不像惰矩，永遠是正值。計算物體的惰矩積，一般說來，就是求(37)式的積分。以下我們舉些例子來說明計算的方法。

計算一個薄片體的惰矩積可取它厚度方向的中平面作爲 xy 平面。在這種情形下，(37)式中的 I_{xz} 和 I_{yz} 都等於零，只需要算出 I_{xy}，故直接引用附錄 I 中 § 4 各式，並按 § 7 所說的，乘一個常數因子 $\frac{wh}{g}$ 就可得到薄片體的質量惰矩積。例如一個直角三角形薄片（第 14 圖），直接應用(19)式，就可得到這薄片對於兩直角邊的惰矩積：

$$I_{xy}=\frac{wh}{g}\cdot\frac{a^2b^2}{24}=\frac{W}{g}\cdot\frac{ab}{12} \tag{38}$$

其中 $W=\frac{whab}{2}$ 指三角形薄片的全部重量。

在一定的情形下，一個立體物體的惰矩積也可以用簡單的方法決定。例如第 17 圖中，如果三正交坐標軸 x, y 和 z 全都是物體的對稱軸，那物體的三惰矩積 I_{xy}, I_{yz} 和 I_{xz} 就會一起等於零。因爲 xy 平面若是物體的一個對稱平面，(37)式中對於每一正的 $yzdm$ 或 $xzdm$ 都必然有一個負的 $yzdm$ 或 $xzdm$ 相對存在，所以在積成總和的過程中，它們全都兩兩抵消，以致 I_{xz} 和 I_{yz} 非等於零不可。同樣，xz 平面若是一個對稱平面，那就必然 $I_{xy}=0$。

使惰矩積(37)式等於零的兩正交坐標軸通常叫做物體的**主軸**。物體對於主軸的惰矩(不是惰矩積)就稱爲**主軸惰矩**。

我們如果利用物體對於兩組相互平行的正交坐標軸系的惰矩積間所存在的關係，來計算惰矩積，那手續還可以簡化很多。例如第 17 圖中，x, y 和 z 是通過物體重心的三坐標軸；x_1, y_1 和 z_1 是以任意一 O 點作爲原點的三坐標軸。兩坐標軸系中相應各軸兩兩平行。根據惰矩積的定義可得物體對於 x_1, y_1 兩軸的惰矩積如下：

$$I_{x_1y_1}=\int_V x_1y_1dm=\int_V(x+a)(y+b)dm$$

$$=b\int_V xdm+a\int_V ydm+\int_V xydm+ab\int_V dm \tag{a}$$

因爲 x, y 是重心軸線，故上式中第一、第二兩個積分都等於零。第三個積分，按惰矩積定義，就是物體對於重心軸線 x, y 的惰矩積。因此，我們可得

$$I_{x_1y_1}=I_{xy}+\frac{W}{g}ab \tag{39}$$

這也就是物體質量惰矩積的平行軸綫定理。

惰矩積 $I_{y_1z_1}$, I_{yz} 間和 $I_{x_1z_1}$, I_{xz} 間自然也有跟 (39) 式相同的關係存在。

關於如何應用(39)式,現在舉一個正方體的計算例來說明。設正方體的邊長等於 a,重量等於 W,它的某一角頂的三邊分別跟已定的三正交坐標軸 x_1, y_1 和 z_1 相合,現在要計算它對於這三坐標軸的各惰矩積。因爲平行於已定三軸的重心軸線 x, y 和 z 全都是物體的對稱軸線,故 I_{xy}, I_{yz} 和 I_{xz} 都應等於零。應用(39)式就得

$$I_{x_1y_1}=I_{y_1z_1}=I_{x_1z_1}=\frac{W}{g}\cdot\frac{a^2}{4} \tag{40}$$

習 題

36. 一個密度均勻的三角形薄片,形狀如第 14 圖,試求它對於平行於 x, y 軸的重心軸線的惰矩積 $I_{x_cy_c}$。

$$\left(\text{解: } I_{x_cy_c}=-\frac{W}{g}\cdot\frac{ab}{36}\right)$$

37. 一個密度均勻的薄板,形狀如第 15 圖。設 $W=2{,}8\text{kg}$, $a=6\text{cm}$, $h=1\text{cm}$,試求 I_{xy}。

(解: $I_{xy}=0{,}00460\text{kg}-\text{s}^2-\text{cm}$)

38. 試求第 30 題中 Z 形薄片的惰矩積 I_{xy}。

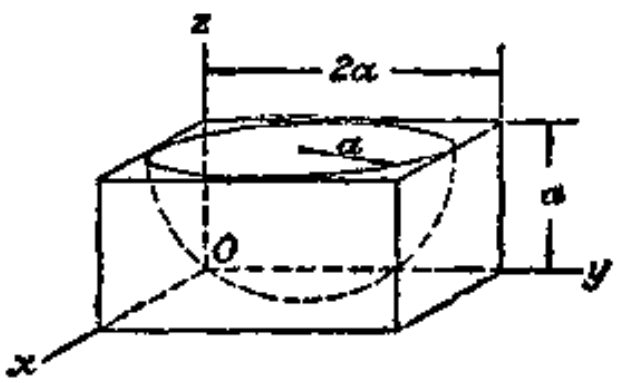
(解: $I_{xy}=0{,}00173\text{kg}-s^2-cm$)

39. 第 19 圖中是一個密度均勻,半徑等於 a 的半球。試求這半球對於圖中 x, y 和 z 三軸的三惰矩積。

(解: $I_{xy}=\frac{W}{g}a^2$, $I_{yz}=I_{xz}=\frac{5}{8}\cdot\frac{W}{g}a^2$)

40. 設想第 19 圖中的半球變成一個正圓柱體,高度是 h,半徑是 a,試求它對於圖中 x, y 和 z 三軸的三惰矩積。

$$\left(\text{解: } I_{xy}=\frac{W}{g}a^2,\ I_{xz}=I_{yz}=\frac{W}{g}\cdot\frac{ah}{2}\right)$$



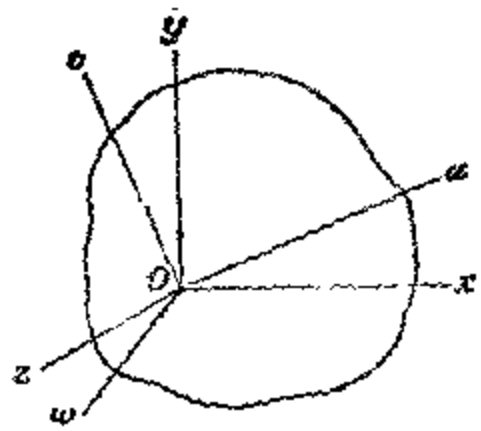
第 19 圖

10. 惰矩軸線的方向變換

假設已經知道物體對於三正交坐標軸 x, y 和 z 的 I_x, I_y, I_z 和 I_{xy}, I_{yz}, I_{xz},要求出物體對另外三正交坐標軸 u, v 和 w 的各惰矩和惰矩積(第 20 圖)。兩坐標軸系共同以 O 點作爲原點;u, v 和 w 三軸在 x, y 和 z 坐標軸系中的方向餘弦分別是:$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$。按導出 (20) 式的方法,我們可求得物體對於 u 軸的惰矩,是

$$I_u=I_x\alpha_1^2+I_y\beta_1^2+I_z\gamma_1^2-2I_{xy}\alpha_1\beta_1-2I_{xz}\alpha_1\gamma_1-2I_{yz}\beta_1\gamma_1 \tag{41}$$

至於 I_v 和 I_w，我們自然也求得到跟上式形式相同的結果。



第 20 圖

特殊情形，x, y 和 z 三軸是物體的主軸時，(41)式中 I_{xy}, I_{yz} 和 I_{xz} 三慣矩積都將等於零，就得

$$I_u = I_x \alpha_1^2 + I_y \beta_1^2 + I_z \gamma_1^2 \quad (41')$$

物體若是一薄片體，我們可取它厚度方向中平面作爲 xy 平面（第 16 圖），u, v 兩軸當然就在這一平面中。在這種情形下，$I_{yz} = I_{xz} = 0$，故 (41) 式化爲

$$I_u = I_x \alpha_1^2 + I_y \beta_1^2 - 2 I_{xy} \alpha_1 \beta_1 \quad (42)$$

此式實際上跟(20a)式完全相同；由第 16 圖可看到，u 和 v 兩軸就相當於其中 x' 和 y' 兩軸。

第 20 圖中，物體對於 u, v 兩軸的慣矩積可以按照導出(23)式的方法來決定。結果是：

$$I_{uv} = -\alpha_1 \alpha_2 I_x - \beta_1 \beta_2 I_y - \gamma_1 \gamma_2 I_z + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) I_{xy} + (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1) I_{xz} + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) I_{yz} \quad (43)$$

至於慣矩積 I_{vw} 和 I_{uw}，我們自然也可以得到跟 (43) 形式相同的計算公式。

在 x, y 和 z 是物體主軸的特例中，因 $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$ 所以(43)式將簡化爲

$$I_{uv} = -\alpha_1 \alpha_2 I_x - \beta_1 \beta_2 I_y - \gamma_1 \gamma_2 I_z \quad (43')$$

物體若是薄片形狀，我們可取它厚度方向中平面作爲 xy 和 uv 平面。在這一情形下，$I_{yz} = I_{xz} = 0$ 和 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$，因之(43)式的慣矩積公式將化爲

$$I_{uv} = -\alpha_1 \alpha_2 I_x - \beta_1 \beta_2 I_y - (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) I_{xy} \quad (44)$$

我們若令

$$\alpha_1 = \beta_2 = \cos \varphi, \ \beta_1 = -\alpha_2 = \sin \varphi, \ \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

還可以把(44)式的 I_{uv} 改變爲跟 (23) 式中平面圖形的 $I_{x'y'}$ 相同的形式。

習 題

41. 一個密度均勻的長方形薄片，重量是 W，邊長是 a 和 b (第 2 圖)，試求它對於一對角綫的惰矩。

$$\left[\text{解}\quad I_d=\frac{1}{6}\,\frac{W}{g}\cdot\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\right]$$

42. 一個密度均勻的長方體，重量是 W，邊長是 a，b 和 c，試求它對於一對角綫的惰矩。

$$\left[\text{解：}\ I_d=\frac{1}{6}\cdot\frac{W}{g}\quad\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\right]$$

43. 一個密度均勻的正圓錐體，重 W，高 h，底圓半徑等於 a，試求它對於長軸的惰矩。

$$\left[\text{解：}\ I_g=\frac{3Wa^2}{20g}\left(\frac{a^2+6h^2}{a^2+h^2}\right)\right]$$

44. 一個密度均勻半徑等於 a 的正圓柱體，重量等於 W，長度等於 l，試求它對於長軸平面中一對角綫的惰矩。

$$\left[\text{解：}\ I_d=\frac{Wa^2}{6g}\left(\frac{6a^2+5l^2}{4a^2+l^2}\right)\right]$$

45. 若第 2 圖中是一塊密度均勻的長方薄片，重量等於 W。在它中平面中有一正交坐標軸系 u 和 v，原點是薄片的重心，其中 u 軸跟長方形對角綫相合。試求這一薄片對於 u 和 v 兩軸的惰矩積 I_{uv}。

$$\left[\text{解：}\ I_{uv}=-\frac{Wab}{12g}\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)\right]$$

[General Information]
书名=铁氏工程力学　（下册）
作者=S.Timoshenko著　江可宗译
页数=228
SS号=11040222
出版日期=1953年06月第1版

前言
目录
内容

下册　　动力学

第九章　　动力学原理
６０．导论
６１．质点的运动
６２．牛顿定律
６３．质点运动的一般方程式
６４．重力单位和绝对单位
６５．刚体运动的分类
第十章　　直线移动
６６．刚体直线移动的运动几何
６７．运动方程式
６８．在常力作用下的质点运动
６９．作用力是时间函数的质点运动
７０．正比于位移的作用力——自由振动（一）
７１．自由振动（二）
７２．强迫振动
７３．强迫振动的应用
７４．惯性力—惯性力原理
７５．动量和衡量
７６．功和能
７７．能量不灭定理
７８．碰撞
第十一章　曲线移动
７９．刚体曲线移动的运动几何
８０．法线加速度和切线加速度
８１．质点的曲线运动方程式
８２．抛射体的运动
８３．曲线运动中的惯性力——惯性力原理
８４．动量矩
８５．曲线运动的能量方程式
第十二章　刚体的定轴旋转
８６．旋转的运动几何
８７．刚体定轴旋转的运动方程式
８８．不变力矩作用的旋转运动
８９．扭转振动
９０．一般的力矩正比于旋转角的旋转运动
９１．复摆
９２．旋转运动的惯性力
９３．旋转机件的内应力
９４．固定旋轴上的反作用力
９５．旋转刚体的均衡
９６．角动量定理
９７．角动量的向量表示
９８．回转仪
９９．旋转体的能量方程式
第十三章　刚体的平面运动
１００．刚体平面运动的运动几何
１０１．瞬时中心

１０２．平面运动中移动和转动的相互独立性
１０３．刚体平面运动的运动方程式
１０４．刚体平面运动的能量方程式
１０５．碰撞及碰撞中心
第十四章　相对运动
１０６．相对运动的运动几何
１０７．相对运动的运动方程式
１０８．相对运动中的惯性力
附录Ⅰ　平面图形的面积惰矩
附录Ⅱ　物体的质量惰矩