

記 号

- a, b, c, d 数值系数, 距离
 A 横截面积
 c 由中性轴至梁的边缘纤维的距离
 C 扭转刚度 ($C = GJ$)
 C_1 翘曲刚度 ($C_1 = EC_w$)
 C_w 翘曲常数
 D 板或壳的弯曲刚度 [$D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$]
 e 偏心距, 由形心至剪心的距离
 E, E_r, E_t 弹性模量, 折合模量, 切线模量
 F 应力函数
 g 重力加速度
 G 剪切弹性模量
 h 板或壳的厚度, 高度, 距离
 I_c, I_o 平面面积对于形心及剪心的极惯性矩
 I_x, I_y, I_z 平面面积对于 x, y, z 轴的惯性矩
 I_{xy} 平面面积对于 x 与 y 轴的惯性积
 J 扭转常数
 k 梁-柱的轴向荷重因数 ($k^2 = \frac{P}{EI}$), 弹性基础模量, 数值因子
 l 长度, 跨度
 L 折合长度
 m, n 整数, 数值系数
 m_x 沿 x 轴每单位长度的扭矩强度
 M 弯矩, 力偶
 M_t 扭力偶或扭矩
 M_x, M_y, M_{xy} 板或壳每单位长度的弯矩及扭矩
 n 安全系数
 N 梁内的剪力, 法向力
 N_x, N_y, N_{xy} 板或壳的中面每单位长度的法向力与剪力

- p, q 分布荷重的强度, 压力
 P 集中力, 梁-柱中的轴向力
 P_{cr} 临界荷重
 Q 梁内的剪力, 集中力
 Q_x, Q_y 板或壳每单位长度的剪力
 r 迴转半径, 壳的曲率半径, 半径
 R 半径, 反力
 s 核心半径($s = Z/A$), 距离
 S 轴向力
 t 厚度, 时间, 温度
 T 功, 张力
 u 梁-柱的轴向荷重因数($u = kl/2$)
 u, v, w 在 x, y, z 方向的位移
 U 应变能
 v, w 切向与径向位移
 V 梁内的剪力
 w 梁内的翘曲位移
 x, y, z 直角坐标
 Z 截面模量($Z = I/c$)
- α, β 角, 数值系数, 比值, 弹簧常数, 端点约束系数
 γ 剪应变, 单位体积的重量, 弹簧常数, 数值因子
 δ 挠度
 ϵ 正应变, 热膨胀系数
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 在 x, y, z 方向的正应变
 $\eta, \lambda, \phi, \chi, \psi$ 梁-柱的放大因数
 θ 角, 角坐标, 单位长度的扭转角
 λ 距离, 数值因子
 ν 泊松比
 ξ, η, ζ 直角坐标
 ρ 曲率半径
 σ 正应力
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 在 x, y, z 方向的正应力

- σ_c 柱的平均压应力
- σ_{cr} 临界荷重时的压应力
- σ_{ult} 极限应力
- σ_w 实用应力
- $\sigma_{Y.P.}$ 屈服应力
- τ 剪应力
- $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 与 x, y, z 轴垂直的面上平行于 y, z, x 轴的剪应力
- φ 角, 角坐标, 杆的扭转角
- ψ 角
- χ 壳的曲率的改变
- ω 振动的圆频率
- ω_s 翘曲函数

目 录

第二版序	iii
第一版序	v
記号	xii
第一章 梁-柱	1
§ 1.1. 引言	1
§ 1.2. 梁-柱的微分方程	1
§ 1.3. 有一横向集中荷重作用的梁-柱	4
§ 1.4. 几个集中荷重	7
§ 1.5. 连续横向荷重	9
§ 1.6. 由力偶引起的梁-柱的弯曲	13
§ 1.7. 挠度的近似公式	15
§ 1.8. 两端固定的梁-柱	16
§ 1.9. 有弹性约束的梁-柱	18
§ 1.10. 有轴向荷重的连续梁	20
§ 1.11. 三角级数的应用	26
§ 1.12. 初弯曲对挠度的影响	33
§ 1.13. 許可应力的决定	40
第二章 杆与框架的弹性屈曲	49
§ 2.1. 欧拉的柱公式	49
§ 2.2. 由另一形式的微分方程决定临界荷重	54
§ 2.3. 用梁-柱理论计算临界荷重	63
§ 2.4. 框架的屈曲	66
§ 2.5. 连续梁的屈曲	71
§ 2.6. 弹性支座上的连续梁的屈曲	74
§ 2.7. 屈曲杆的大挠度(弹性线)	81
§ 2.8. 能量法	87
§ 2.9. 以能量法计算近似的临界荷重	94

§ 2.10. 在弹性基础上的杆的屈曲	100
§ 2.11. 在中间压力作用下杆的屈曲	104
§ 2.12. 在分布轴向荷重作用下杆的屈曲	107
§ 2.13. 弹性基础上的杆在分布轴向荷重作用下的屈曲	114
§ 2.14. 变截面杆的屈曲	120
§ 2.15. 用逐次逼近法决定临界荷重	124
§ 2.16. 横截面连续变化的杆	134
§ 2.17. 剪力对临界荷重的影响	141
§ 2.18. 组合柱的屈曲	144
§ 2.19. 螺旋弹簧的屈曲	151
§ 2.20. 杆系的稳定性	154
§ 2.21. 非保守力的情形	163
§ 2.22. 在变化轴向力作用下稜柱杆的稳定性	169
第三章 杆的非弹性屈曲	175
§ 3.1. 非弹性弯曲	175
§ 3.2. 在轴向荷重联合作用下的非弹性弯曲	180
§ 3.3. 杆的非弹性屈曲。基本情形	188
§ 3.4. 具有其他端点条件的杆的非弹性屈曲	196
第四章 实验与设计公式	199
§ 4.1. 柱的实验	199
§ 4.2. 以理想柱的公式作为设计柱的基础	207
§ 4.3. 设计柱的经验公式	209
§ 4.4. 以所设的缺陷作为设计柱的根据	211
§ 4.5. 各种端点条件	217
§ 4.6. 组合柱的设计	221
第五章 扭转屈曲	227
§ 5.1. 引言	227
§ 5.2. 开口薄壁杆件的纯扭转	227
§ 5.3. 开口薄壁杆件的非均匀扭转	233
§ 5.4. 扭转屈曲	240
§ 5.5. 由于扭转与弯曲的屈曲	245
§ 5.6. 具有连续弹性支承的杆由于扭转与弯曲的屈曲	253

§ 5.7. 在压力与端弯矩作用下的扭转屈曲	261
第六章 梁的横向屈曲	269
§ 6.1. 横向屈曲的微分方程	269
§ 6.2. 纯弯曲梁的横向屈曲	271
§ 6.3. 悬臂梁的横向屈曲	275
§ 6.4. 简支工字梁的横向屈曲	281
§ 6.5. 简支狭长矩形截面梁的横向屈曲	286
§ 6.6. 横向屈曲的其他情形	288
§ 6.7. 工字梁的非弹性横向屈曲	290
第七章 圆环、曲杆与拱的屈曲	297
§ 7.1. 圆形细曲杆的弯曲	297
§ 7.2. 应用三角级数分析薄圆环的弯曲	301
§ 7.3. 均匀压力对圆环弯曲的影响	306
§ 7.4. 在均布外压下圆环及管的屈曲	308
§ 7.5. 以所设的缺陷为根据设计受均布外压作用的管子	313
§ 7.6. 均匀受压圆拱的屈曲	316
§ 7.7. 其他形式的拱	322
§ 7.8. 很扁平的曲杆的屈曲	325
§ 7.9. 两种金属组合小条的屈曲	330
§ 7.10. 圆形轴线曲杆的横向屈曲	333
第八章 薄板的弯曲	339
§ 8.1. 板的纯弯曲	339
§ 8.2. 在分布横向荷重作用下板的弯曲	346
§ 8.3. 板受弯曲与拉伸或压缩的联合作用	353
§ 8.4. 板弯曲的应变能	355
§ 8.5. 简支边矩形板的挠度	361
§ 8.6. 具有微小初弯曲的板的弯曲	364
§ 8.7. 板的大挠度	366
第九章 薄板的屈曲	369
§ 9.1. 临界荷重的计算方法	369
§ 9.2. 在一个方向均匀受压的简支矩形板的屈曲	372
§ 9.3. 在两垂直方向受压的简支矩形板的屈曲	377

§ 9.4. 承受均布压力的矩形板的屈曲:与压力方向垂直的两对边 简支,而沿其余的两边有各种的边界条件·····	381
§ 9.5. 两对边简支并在与这两边平行的方向均匀受压的矩形板 的屈曲·····	394
§ 9.6. 在弯曲与压缩联合作用下简支矩形板的屈曲·····	396
§ 9.7. 在剪应力作用下矩形板的屈曲·····	403
§ 9.8. 矩形板屈曲的其他情形·····	410
§ 9.9. 圆板的屈曲·····	413
§ 9.10. 其他形状的板的屈曲·····	416
§ 9.11. 以肋条加强的板的稳定性·····	418
§ 9.12. 超过比例极限的板的屈曲·····	435
§ 9.13. 屈曲板的大挠度·····	437
§ 9.14. 屈曲板的极限强度·····	445
§ 9.15. 板的屈曲实验·····	451
§ 9.16. 板屈曲理论的实际应用·····	457
第十章 薄壳的弯曲 ·····	468
§ 10.1. 壳上体元的变形·····	468
§ 10.2. 圆柱形壳的对称变形·····	471
§ 10.3. 圆柱形壳的无伸长的变形·····	473
§ 10.4. 柱形壳的变形的一般情形·····	477
§ 10.5. 球形壳的对称变形·····	482
第十一章 壳的屈曲 ·····	486
§ 11.1. 圆柱形壳在均匀轴向压缩下的对称屈曲·····	486
§ 11.2. 圆柱形壳由于不稳定性无伸长的弯曲形式·····	490
§ 11.3. 在均匀轴向压力作用下圆柱形壳的屈曲(一般情形)·····	491
§ 11.4. 圆柱形壳轴向受压的实验·····	497
§ 11.5. 均匀横向外压作用下圆柱形壳的屈曲·····	503
§ 11.6. 受弯曲的或偏心受压的圆柱形壳·····	512
§ 11.7. 曲薄板的轴向压缩·····	516
§ 11.8. 在剪力或剪力与轴向应力共同作用下的曲薄板·····	519
§ 11.9. 在轴向压缩下加劲圆柱壳的屈曲·····	521
§ 11.10. 在轴向压力与均匀横向压力共同作用下圆柱形壳的屈曲·····	526
§ 11.11. 受扭转的圆柱壳的屈曲·····	531

§ 11.12. 锥形壳的屈曲	541
§ 11.13. 均匀受压的球形壳的屈曲	545

附录

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表	553
表 A-2 函数 $\eta(u)$ 与 $\lambda(u)$ 表	561
表 A-3 截面的性质	562
内容索引	563

三

目

第一章 梁-柱

§ 1.1. 引言

在弯曲的初等理論中,梁的应力和挠度与作用的荷重成正比。这要求梁由弯曲引起的变形不影响荷重的作用。例如,图 1.1a 中只承受横向荷重 (Q_1 与 Q_2) 的梁,微小的挠度 δ_1 与 δ_2 及荷重的铅直作用綫的稍微改变,对弯矩与剪力的影响无关紧要。于是,就可以在梁的原有形状的基础上,来计算挠度、应力与弯矩等等。在这些条件下,并設材料服从胡克定律,則挠度与作用的荷重成正比,且迭加原理可以适用;即最終的变形为各荷重单独所产生的变形之和。

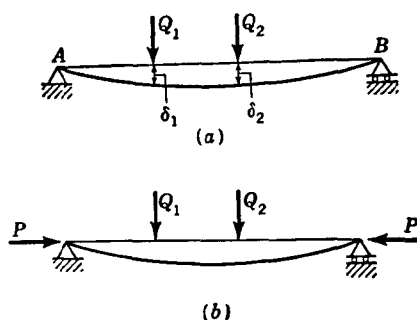


图 1.1

当軸向和横向荷重同时作用于梁时(图 1.1b),情况完全不同。梁的弯矩、剪力、应力及挠度并不与軸向荷重的大小成比例;而且,它們的值与所产生的挠度的大小有关,且軸向荷重作用的稍微偏心就对它們有很大的影响。同时承受軸向压力和横向荷重的梁称为**梁-柱**。在这第一章內,将分析在各种支承与加载状况下具有对称横截面的梁-柱¹⁾。

§ 1.2. 梁-柱的微分方程

用以分析梁-柱的基本方程可由研究图 1.2a 中的梁而推出。

1) 对于承受轴向拉力的梁的分析,可参阅 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part II, p. 41, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.

这梁承受轴向压力 P 及强度为 q 的分布横向荷重, q 系沿梁的距离 x 而变化。在图 1.2b 中表明了与梁原来轴綫(未挠曲)垂直的两横截面之間的一微段 dx 。在 dx 內的横向荷重的强度 q 可认为常量;其方向与 y 軸的正向(此时向下)相同则为正。作用于微段两边的剪力 V 与弯矩 M 如图所示者为正。

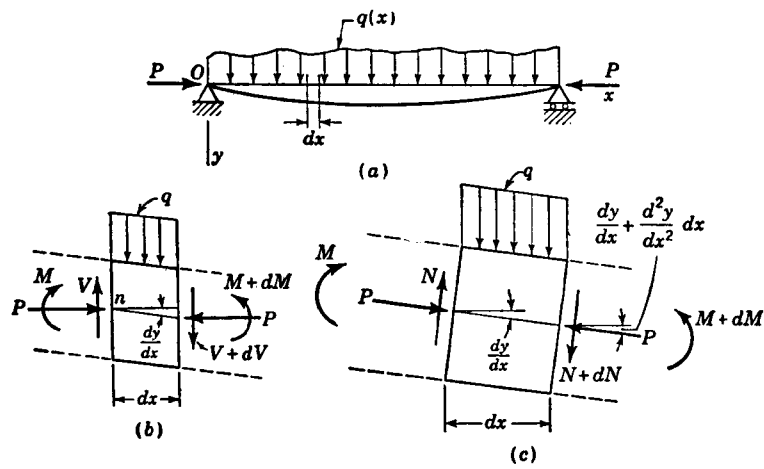


图 1.2

荷重、剪力与弯矩之间的关系, 可自图 1.2b 中微段的平衡得到。将 y 方向诸力求和, 得

$$-V + qdx + (V + dV) = 0,$$

或

$$q = -\frac{dV}{dx}. \quad (1.1)$$

对点 n 取矩, 并设梁的轴綫与水平綫之间的夹角很小, 得到

$$M + qdx \frac{dx}{2} + (V + dV)dx - (M + dM) + P \frac{dy}{dx} dx = 0,$$

略去二阶小项, 这方程成为

$$V = \frac{dM}{dx} - P \frac{dy}{dx}. \quad (1.2)$$

若略去剪切变形及梁轴綫縮短的影响，則梁轴綫的曲率的表达式为

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M, \quad (1.3)$$

EI 为梁在弯曲平面內的，即在所設的对称面 xy 平面內的弯曲刚度。将方程(1.3)与方程(1.1), (1.2)組合, 可将梁轴綫的微分方程表成別种形式:

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} + P \frac{dy}{dx} = -V, \quad (1.4)$$

及

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = q. \quad (1.5)$$

方程 (1.1) 至 (1.5) 为梁-柱弯曲的基本微分方程。若軸向力 P 为零, 这些方程都化为只由橫向荷重所弯曲的方程。

我们可以截取一垂直于梁挠曲轴綫的微段 (图 1.2c), 而不用侧面垂直于 x 轴的微段 dx (图 1.2b)。由于梁的斜率是小量, 垂直于微段侧面的力可取为等于軸向压力 P 。对于这情形, 剪力 N 与图 1.2b 的剪力 V 之间由表达式

$$N = V + P \frac{dy}{dx} \quad (a)$$

相联系; 于是代替方程(1.1)与(1.2), 得到

$$q = -\frac{dN}{dx} + P \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (1.1a)$$

和

$$N = \frac{dM}{dx}. \quad (1.2a)$$

方程 (1.1a) 与 (1.2a) 亦可由图 (1.2c) 中微段的平衡获得。最后, 将方程 (1.2a) 与方程(1.3)組合, 得

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = -N. \quad (1.4a)$$

方程(1.5)对于图(1.2c)中的微段亦适用。于是, 按照在垂直于梁已挠曲或未挠曲的轴綫上来取剪力, 对于梁-柱有两组微分方程。

§ 1.3. 有一横向集中荷重作用的梁-柱

作为运用梁-柱方程的第一个例子, 研究一长 l 的简支梁 (图

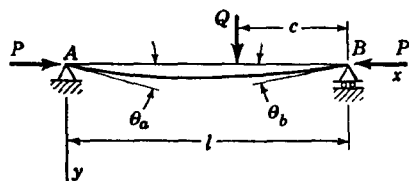


图 1.3

1.3), 距右端 c 处作用一横向荷重 Q 。如只有一横向荷重 Q 作用, 则很容易由静力学算出弯矩, 但此时轴向力 P 所产生的弯矩须待确定了挠度以后才能

得出。因此, 梁-柱是静不定的, 而必须首先解梁的挠度曲线的微分方程。

梁的左段与右段 (图1.3) 的弯矩各为:

$$M = \frac{Qc}{l}x + Py, \quad M = \frac{Q(l-c)}{l}(l-x) + Py,$$

因此, 利用方程(1.3), 得

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Qc}{l}x - Py, \quad (a)$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q(l-c)(l-x)}{l} - Py. \quad (b)$$

为简单计, 引入下列记号:

$$k^2 = \frac{P}{EI}, \quad (1.6)$$

于是方程(a)成为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = -\frac{Qc}{EI}x.$$

这方程的通解为

$$y = A \cos kx + B \sin kx - \frac{Qc}{Pl}x. \quad (c)$$

同样, 方程(b)的通解为

$$y = C \cos kx + D \sin kx - \frac{Q(l-c)(l-x)}{Pl}. \quad (d)$$

积分常数 A, B, C, D 由杆在两端及在荷重 Q 的作用点处的

条件来决定。由于杆两端的挠度为零，我們断定：

$$A = 0, C = -D \tan kl. \quad (e)$$

在荷重 Q 的作用点处，由方程(c) 与 (d) 給出的两段挠度曲线将有相同的挠度及公切线。于是

$$\begin{aligned} B \sin k(l-c) - \frac{Qc}{Pl}(l-c) &= D[\sin k(l-c) - \\ &- \tan kl \cos k(l-c)] - \frac{Qc}{Pl}(l-c), \\ Bk \cos k(l-c) - \frac{Qc}{Pl} &= Dk[\cos k(l-c) + \\ &+ \tan kl \sin k(l-c)] + \frac{Q(l-c)}{Pl}, \end{aligned}$$

由上两式得

$$B = \frac{Q \sin kc}{Pk \sin kl}, \quad D = -\frac{Q \sin k(l-c)}{Pk \tan kl}. \quad (f)$$

将由(e),(f)所得的常数代入(c)与(d)，我們得到挠度曲线的两部分的方程为：

$$\begin{aligned} y &= \frac{Q \sin kc}{Pk \sin kl} \sin kx - \frac{Qc}{Pl}x, \quad 0 \leq x \leq (l-c); \quad (1.7) \\ y &= \frac{Q \sin k(l-c)}{Pk \sin kl} \sin k(l-x) - \frac{Q(l-c)(l-x)}{Pl}, \\ &\quad (l-c) \leq x \leq l. \quad (1.8) \end{aligned}$$

我們可以看出，若以 $(l-c)$ 代 c ，以 $(l-x)$ 代 x ，則方程(1.8)可自方程(1.7)得到。

計算(1.7),(1.8)两式的导数，得到在以后計算中有用的下列諸公式：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Q \sin kc}{P \sin kl} \cos kx - \frac{Qc}{Pl}, \quad 0 \leq x \leq (l-c); \quad (1.9) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{Q \sin k(l-c)}{P \sin kl} \cos k(l-x) + \frac{Q(l-c)}{Pl}, \\ &\quad (l-c) \leq x \leq l; \quad (1.10) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Qk \sin kc}{P \sin kl} \sin kx, \quad 0 \leq x \leq (l-c); \quad (1.11)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Qk \sin k(l-c)}{P \sin kl} \sin k(l-x), \quad (l-c) \leq x \leq l. \quad (1.12)$$

对于荷重作用于中点这特殊情况, 挠度曲线是对称的, 于是只须考虑荷重左边的这段。要得到在这特殊情况下的最大挠度, 我们将 $x = c = l/2$ 代入式(1.7), 得到

$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{Q}{2Pk} \left(\tan \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right). \quad (g)$$

为了简化此方程, 运用以下记号:

$$u = \frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad (1.13)$$

于是方程(g)成为

$$\delta = \frac{Ql^3}{48EI} \frac{3(\tan u - u)}{u^3} = \frac{Ql^3}{48EI} \chi(u). \quad (1.14)$$

这方程右边的第一个因子表示只有横向荷重作用时的挠度, 第二个因子 $\chi(u)$ 表明了轴向力 P 对于挠度 δ 的影响。在附录的表A-1中给出了对于不同 u 值的 $\chi(u)$ 的数值。用了这表, 就可由方程(1.14) 很容易地算出每一特定情形下杆的挠度。

当 P 很小时, u 的数值也很小[参阅方程(1.13)], 而因子 $\chi(u)$ 接近于 1。这可用下列级数并只保留其为首的两项而证明之:

$$\tan u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{3.5} + \dots$$

还可以看出, 当 u 趋近于 $\pi/2$ 时, $\chi(u)$ 趋于无限大。当 $u = \pi/2$ 时, 自式(1.13)得到

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (1.15)$$

这样, 可得到结论: 当轴向压力趋近于方程(1.15)所给出的极限值时, 即使极小的横向荷重, 也会产生相当大的挠度。这压力的极限值称为**临界荷重**, 并以 P_{cr} 表示。运用了轴向力的临界值[方程

(1.15)], u 的值[參閱方程(1.13)]可表示如下:

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}. \quad (1.16)$$

这样, u 只取决于 P/P_{cr} 的值.

要計算梁的撓度曲綫一端的斜率, 我們以 $c = l/2, x = 0$ 代入方程(1.19), 于是,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} &= \frac{Q}{2P} \left(\frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right) = \frac{Ql^2}{16EI} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} \\ &= \frac{Ql^2}{16EI} \lambda(u). \end{aligned} \quad (1.17)$$

依然, 第一个因子为横向荷重 Q 单独作用于梁中点时所产生的斜率, 而第二个因子表示軸向力 P 的影响. 附录的表 A-2 中給出了因子 $\lambda(u)$ 的值.

运用方程(1.11), 得到最大弯矩如下:

$$M_{\max} = -EI \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=l/2} = \frac{EIQk}{2P} \tan \frac{kl}{2} = \frac{Ql}{4} \frac{\tan u}{u}. \quad (1.18)$$

对于这情形, 最大弯矩等于横向荷重所产生的弯矩乘以因子 $\tan u/u$. 当軸向压力逐渐变小时, 这因子以及以前的三角函数因子 $\lambda(u)$ 与 $\chi(u)$ 的值趋近于 1; 而当量 u 趋近于 $\pi/2$ 时, 即当压力接近于临界值(1.15)时, 这因子将无限地增大.

§ 1.4. 几个集中荷重

前一节的结果可用于更一般的情形, 即有多个横向荷重及軸向压力共同作用于梁的情形. 方程(1.7)和(1.8)指出, 对于任一給定的軸向力, 杆的撓度与横向荷重 Q 成正比; 同时, 撓度与軸向力 P 之间的关系较为复杂, 因这軸向力是包括在含有 k 的三角函数內的. 撓度为 Q 的綫性函数这事实表明: 通常用于当梁只有横向荷重作用时的**迭加原理**, 稍加修改后亦能应用于横向荷重及軸向力共同作用下的情形. 从方程(1.7), (1.8)可以看出, 当使横向荷重 Q 增加一量 Q_1 , 如作用于杆的軸向力相同, 則总的撓度可自 Q

所产生的挠度及 Q_1 所产生的挠度迭加而得。

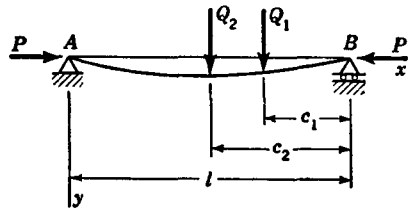


图 1.4

可以证明，若有多个横向荷重作用于压杆，也能运用迭加法。运用方程 (1.7)，(1.8)，并将每一荷重单独与轴向力共同作用时所产生的挠度迭加，即得总挠度。例如有两横向荷重 Q_1 及 Q_2 ，作

用于距右端支座各为 c_1 及 c_2 处 (图 1.4)。按照前一节那样，梁左段 $[x \leq (l - c_2)]$ 的挠度曲线的微分方程为

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Q_1 c_1}{l} x - \frac{Q_2 c_2}{l} x - P y. \quad (a)$$

如果我们现在分别考虑荷重 Q_1 及 Q_2 单独作用于压杆，并以 y_1 表示当荷重 Q_1 作用时的挠度，以 y_2 表示 Q_2 作用时的挠度。于是对于这两种情况，梁左段的挠度曲线的微分方程为

$$EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{Q_1 c_1}{l} x - P y_1,$$

$$EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{Q_2 c_2}{l} x - P y_2.$$

将这两方程相加，得到

$$EI \frac{d^2 (y_1 + y_2)}{dx^2} = -\frac{Q_1 c_1}{l} x - \frac{Q_2 c_2}{l} x - P (y_1 + y_2).$$

可以看出，挠度 y_1 与 y_2 之和的方程，与荷重 Q_1 及 Q_2 共同作用时所得的挠度方程 (a) 是一样的。对于杆的中段及右段也能得到相同的结论。因此，当有多个荷重作用于压杆时，总的挠度可由各个横向荷重单独与轴向力 P 共同作用时所产生的挠度迭加而得。

根据上述原则，我们可以写出在任意个数的横向荷重作用下杆的任一段的挠度曲线方程。设有 n 个横向荷重 Q_1, Q_2, \dots, Q_n ，各距梁的右端为 $c_1, c_2, \dots, c_n (c_1 < c_2 < \dots < c_n)$ 。于是，运用对于一个横向荷重的方程 (1.7) 及 (1.8)，在荷重 Q_m 与 Q_{m+1} 之间

的挠度曲线方程为

$$\begin{aligned}
 y = & \frac{\sin kx}{Pk \sin kl} \sum_{i=1}^{i=m} Q_i \sin kc_i - \frac{x}{Pl} \sum_{i=1}^{i=m} Q_i c_i + \\
 & + \frac{\sin k(l-x)}{Pk \sin kl} \sum_{i=m+1}^{i=n} Q_i \sin k(l-c_i) - \\
 & - \frac{l-x}{Pl} \sum_{i=m+1}^{i=n} Q_i (l-c_i). \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

同样,运用方程(1.9)至(1.12),我们可以得到挠度曲线的斜率及梁任一截面的弯矩。如是,运用在形式上修改了的迭加法,计算梁在多个横向荷重及轴向力共同作用下的挠度的一般问题就解决了。

§ 1.5. 连续横向荷重

前一节所述的迭加法,也可以用于连续分布的荷重。前一节的公式可用于这情形,只须以积分代替和号。考虑一有**均布横向荷重**作用的两端铰支的压杆(图 1.5)。设 q 为横向荷重的强度, c 为自右端支座至连续荷

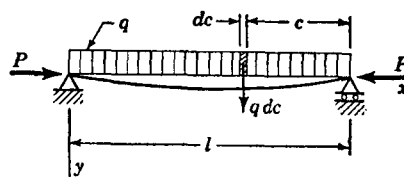


图 1.5

重元 qdc 的可变距离。这荷重元可视为一无限小的集中荷重,而这均布荷重可以用一系列这样无限小的集中荷重来代替。于是,运用方程(1.19),并以由 0 至 $l-x$ 的积分代替 $i=1$ 至 $i=m$ 的求和,以 $l-x$ 至 l 的积分代替由 $i=m+1$ 至 $i=n$ 的求和,得

$$\begin{aligned}
 y = & \frac{\sin kx}{Pk \sin kl} \int_0^{l-x} q \sin kc \, dc - \frac{x}{Pl} \int_0^{l-x} qc \, dc + \\
 & + \frac{\sin k(l-x)}{Pk \sin kl} \int_{l-x}^l q \sin k(l-c) \, dc - \\
 & - \frac{l-x}{Pl} \int_{l-x}^l q(l-c) \, dc. \quad (a)
 \end{aligned}$$

积分以后并运用记号(1.13),我们得到下列挠度曲线方程:

$$y = \frac{ql^4}{16EIu^4} \left[\frac{\cos\left(u - \frac{2ux}{l}\right)}{\cos u} - 1 \right] - \frac{ql^2}{8EIu^2} x(l-x). \quad (1.20)$$

将 $x = l/2$ 代入方程(1.20), 便得梁中点的挠度. 用了一些变换, 可将结果表示为

$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{5ql^4}{384EI} \frac{12(2 \sec u - 2 - u^2)}{5u^4} = \frac{5ql^4}{384EI} \eta(u). \quad (1.21)$$

这方程右边的第一个因子, 表示横向荷重单独作用时在中点所产生的挠度, 第二个因子 $\eta(u)$ 表明了轴向压力 P 对于中点挠度的影响. 将 $\sec u$ 展成级数即可证明, 当 u 趋近于零时, 第二个因子趋近于 1; 而当 u 趋近于 $\pi/2$ 时, 即当 P 趋近于临界值 [方程 (1.15)] 时, 第二个因子将无限地增大. 如是, 轴向力 P 对挠度的影响与 u 的值有关, 即与 P/P_{cr} 的值有关 [参阅方程 (1.16)]. 如果这比值很小, 则 P 对于挠度的影响也很小, 但当这比值趋近于 1 时, P 的影响将很快地增大. 对于其他种类的横向荷重, 也可以得到同样的结论. 在附录的表 A-2 中列出了因子 $\eta(u)$ 的值.

计算方程 (1.20) 的导数, 便可以得到挠度曲线的斜率的一般表达式. 在以后研究固定端的杆时, 我们将用到杆两端的斜率. 将 $x = 0$ 代入上述斜率的表达式, 可以证明, 杆左端的斜率 (即等于该端的微小转角 θ) 为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \theta = \frac{ql^3}{24EI} \frac{3(\tan u - u)}{u^3} = \frac{ql^3}{24EI} \chi(u). \quad (1.22)$$

右边的第一个因子, 是当只有均布荷重作用于梁时梁左端斜率的表达式, 第二个因子 $\chi(u)$ 表示轴向力 P 对斜率的影响. 前已证明, 当 u 趋近于零时, 因子 $\chi(u)$ 趋近于 1, 而当 u 趋近于 $\pi/2$ 时, 即当 P 趋近于临界值时, 它将无限地增大.

为了计算最大弯矩, 必须计算挠度 y 的方程 (1.20) 的二阶导数. 最大弯矩系在跨度的中点, 其大小为

$$M_{\max} = -EI \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l/2} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} = \frac{ql^2}{8} \lambda(u). \quad (1.23)$$

这一结果，亦可由轴向力的弯矩 $P\delta$ 与弯矩 $\frac{ql^2}{8}$ 相加而得到。将式(1.21)的 δ 的值代入，我们得到

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{5ql^4}{384EI} \frac{12(2 \sec u - 2 - u^2)}{5u^4} P;$$

将 $P = k^2 EI$ 代入此式并用记号 (1.13)，即可将这结果化为式 (1.23)。

式 (1.23) 的第一个因子，表示只有均布荷重作用时所产生的弯矩。第二个因子为轴向力 P 对于最大弯矩的影响。以前曾提及 (参阅 7 页)，对于很小的比值 P/P_{cr} ，因子 $\lambda(u)$ 趋近于 1，而当 P 趋近于 P_{cr} 时，则将无限地增大。

计算挠度的迭加法也可以应用于荷重只分布于跨度的一部分的情形 (图 1.6a)。例如，要得到荷重左边的这段梁的挠度曲线，我们用对集中力的方程 (1.7)。由荷重元 qdc 所产生的挠度，可在方程 (1.7) 中以 qdc 代替 Q 而得到。要得到总的荷重所产生的挠度，我们必须自 $c = a$ 到 $c = b$ 进行积分。这样，我们得到如下形式的梁左段的挠度曲线：

$$y = \int_a^b \frac{qdc \sin kc}{Pk \sin kl} \sin kx - x \int_a^b \frac{qcdc}{Pl}.$$
 (b)

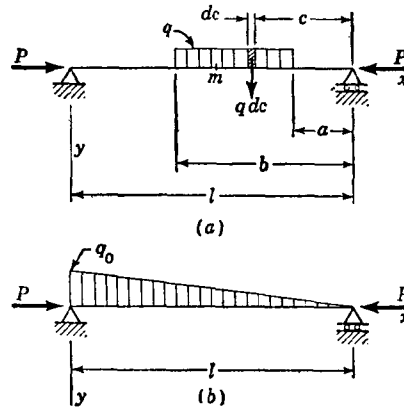


图 1.6

如果有必要求出在荷重范围内的任一点 m 的挠度 (图 1.6a), 对于 m 右边的荷重我们用方程 (1.7), 对于 m 左边的荷重我们用方程 (1.8), 于是所求的挠度为

$$y = \int_a^{l-x} \frac{qdc \sin kc}{Pk \sin kl} \sin kx - x \int_a^{l-x} \frac{qcdc}{Pl} + \int_{l-x}^b \frac{qdc \sin k(l-c)}{Pk \sin kl} \sin k(l-x) - \int_{l-x}^b \frac{qdc(l-c)(l-x)}{Pl}. \quad (c)$$

按此进行积分, 即得荷重下的挠度曲线。将 $a = 0, b = l$ 代入, 即得到对均布荷重的梁的方程 (1.20)。

若 q 不是常数而是 c 的某一函数, 我们可将 q 这已知的函数代入方程 (b) 和 (c) 而得到挠度曲线。例如图 1.6b 所示的情形, 将 $q = q_0c/l$ 代入方程 (c), 并使 $a = 0, b = l$, 即得挠度曲线。

对于以上诸例, 梁-柱的挠度曲线系由解微分方程 (1.3), 或由某些已知结果迭加而得。决定挠度曲线的另一途径, 是从微分方程 (1.5) 着手。例如, 对于图 1.5 所示的强度为 q 的均匀荷重梁, 方程为

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = q.$$

这方程的通解为

$$y = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D + \frac{qx^2}{2P}, \quad (d)$$

式中的 A, B, C, D 为积分常数, 须由梁的端点条件来决定。由于在杆端挠度与弯矩均为零, 端点条件为

$$y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{当 } x = 0, x = l.$$

由 $x = 0$ 处的两条条件, 得到

$$B = -D = \frac{q}{k^2P};$$

由 $x = l$ 处的条件, 得到

$$A = \frac{q}{k^2P} \frac{1 - \cos kl}{\sin kl}, \quad C = -\frac{ql}{2P}.$$

将这些常数值代入方程 (d), 即得梁-柱的挠度曲线方程。运用了三角函数的

代換以及方程(1.13),可証明这结果与方程(1.20)相同。

§ 1.6. 由力偶引起的梁-柱的弯曲

有了单个集中荷重 Q 作用(图 1.3)的解,就不难得到一力偶作用于梁端时的挠度曲线方程。为了求这方程,設图 1.3 中的距离 c 趋于零,而同时 Q 则在增大,务使乘积 Qc 为一有限值且等于 M_b 。在趋于极限时,我們就得到在力偶 M_b (图 1.7)作用下杆的弯曲。由方程(1.7),代入 $\sin kc = kc$, $Qc = M_b$, 即得挠度曲线

$$y = \frac{M_b}{P} \left(\frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right). \quad (1.24)$$

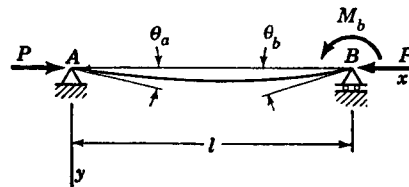


图 1.7

在我们以后的讨论中,有必要知道在杆两端的微小轉角 θ_a, θ_b 的公式。当杆端的轉角是按照正的弯矩方向而轉时,这轉角为正,图 1.7。计算式(1.24)的导数,得到

$$\begin{aligned} \theta_a &= \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{M_b}{P} \left(\frac{k}{\sin kl} - \frac{1}{l} \right) = \\ &= \frac{M_b l}{6EI} \frac{3}{u} \left(\frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right), \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \theta_b &= - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = - \frac{M_b}{P} \left(\frac{k \cos kl}{\sin kl} - \frac{1}{l} \right) = \\ &= \frac{M_b l}{3EI} \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan 2u} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

可以看出,力偶 M_b 单独作用时所产生的轉角 $M_b l / 6EI$ 及 $M_b l / 3EI$, 乘上了一三角函数因子,表示出軸向力 P 对于杆两端轉角的影响。不难証明,当 u 趋近于零时,以上这两因子趋近于 1; 当 u 趋近于 $\pi/2$ 时,这两因子将无限地增大。在以后的方程中,将

用以下的記号以简化表达式:

$$\phi(u) = \frac{3}{u} \left(\frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right), \quad (1.27)$$

$$\psi(u) = \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan 2u} \right). \quad (1.28)$$

这两个函数的数值可查附录的表 A-1.

若有两个力偶 M_a, M_b 分别作用于杆的 A, B 两端 (图 1.8a),

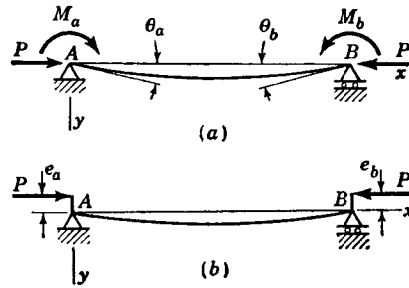


图 1.8

挠度曲线可由迭加而得。从方程(1.24), 得到力偶 M_b 所产生的挠度。在这方程中, 以 M_a 代替 M_b , $(l-x)$ 代替 x , 便得到力偶 M_a 所产生的挠度。将这些结果相加, 得图 1.8a 所示的梁的挠度曲线为

$$y = \frac{M_b}{P} \left(\frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right) + \frac{M_a}{P} \left[\frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} - \frac{l-x}{l} \right]. \quad (1.29)$$

当两个偏心压力 P 作用时, 图 1.8b, 我们就有这样的荷重。将 $M_a = e_a P, M_b = e_b P$ 代入方程(1.29), 得到

$$y = e_b \left(\frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right) + e_a \left[\frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} - \frac{l-x}{l} \right]. \quad (1.30)$$

运用方程(1.25), (1.26) 及记号(1.27), (1.28), 即可得到图 1.8a 中杆两端的转角 θ_a 及 θ_b 。于是由迭加,

$$\begin{aligned} \theta_a &= \frac{M_a l}{3EI} \phi(u) + \frac{M_b l}{6EI} \phi(u), \\ \theta_b &= \frac{M_b l}{3EI} \phi(u) + \frac{M_a l}{6EI} \phi(u). \end{aligned} \quad (1.31)$$

运用附录中表 A-1 的 $\phi(u)$ 及 $\psi(u)$ 的值, 即可很容易地自方程(1.31)得到角度 θ_a 及 θ_b .

当两力偶相等, 即 $M_a = M_b = M_0$ 时, 自方程(1.29)得到

$$y = \frac{M_0}{P \cos \frac{kl}{2}} \left[\cos \left(\frac{kl}{2} - kx \right) - \cos \frac{kl}{2} \right] =$$

$$= \frac{M_0 l^2}{8EI} \frac{2}{u^2 \cos u} \left[\cos \left(u - \frac{2ux}{l} \right) - \cos u \right]. \quad (1.32)$$

代入 $x = l/2$, 杆中点的挠度为

$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{M_0 l^2}{8EI} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} = \frac{M_0 l^2}{8EI} \lambda(u). \quad (1.33)$$

由式(1.32)的导数并代入 $x = 0$, 即得杆两端的转角. 结果为

$$\theta_a = -\theta_b = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{M_0 l}{2EI} \frac{\tan u}{u}. \quad (1.34)$$

发生于杆中点的最大弯矩, 可由式(1.32)的二阶导数得到,

$$M_{\max} = -EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=l/2} = M_0 \sec u. \quad (1.35)$$

式(1.35)可用以计算杆承受两偏心压力且偏心距相等时的最大弯矩(图 1.8b). 当轴向力 P 比临界值 [方程(1.15)] 小得多时, u 的数值就很小, $\sec u$ 可取作等于 1, 即可假设弯矩沿杆长为一直数. 当 u 趋近于 $\pi/2$, 即 P 趋近于 P_{cr} , $\sec u$ 将无限地增大. 对 P_{cr} 附近的 P 值, 荷重作用点的稍微偏心会在杆的中点产生相当大的弯矩. 对于这种情形的实用应力, 将在 § 1.13 内讨论.

§ 1.7. 挠度的近似公式

在作初步的设计计算时, 如果有一近似公式来决定简支端梁-柱中点挠度, 常常是有用处的. 在前几节中, 曾对三种对称荷重(中点处的集中力, 均布荷重, 及两个相等的端弯矩)得到了中点挠度的表达式. 对于每一情形, 挠度等于两项的乘积, 第一项为无轴向力时的挠度, 第二项为依赖于 u 值, 从而依赖于比值 P/P_{cr} [参阅式(1.16)] 的**放大因数**. 对于这三种荷重情形的放大因数各为 $\chi(u)$, $\eta(u)$ 及 $\lambda(u)$.

放大因数的一近似式¹⁾为

$$\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (1.36)$$

如果比值 P/P_{cr} 不很大,用这简化表达式来代替精确的因子 $\chi(u)$, $\eta(u)$ 及 $\lambda(u)$ 时有很好的准确度。图 1.9 中给出了此放大因数的曲线。当 P/P_{cr} 小于 0.6, 此近似表达式²⁾的误差小于 2%。

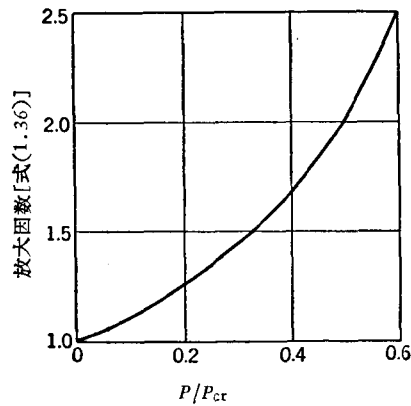


图 1.9

§ 1.8. 两端固定的梁-柱

运用前几节的结果及迭加法 (参阅 § 1.4), 就可解决各种静不定问题。例如, 图 1.10 所示为一承受均布荷重的压杆; A 端简支,

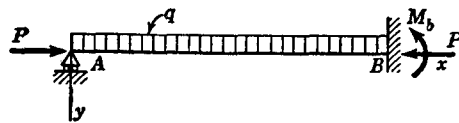


图 1.10

B 端为固定端。在固定端 B 的静不定反力偶 M_b , 可由固定端处挠度曲线的切线必为水平这条件而得到。因此, 均布荷重在 B 端所

1) § 1.11 中给出了这因数的推导。

2) 表达式(1.36)系 Timoshenko 所提出, Bull. Polytech. Inst., Kiev, 1909.

产生的轉角 [方程(1.22)], 与力偶 M_b 所产生的轉角 [方程 (1.31) 第二式] 之和必等于零。这样, 得到

$$\frac{ql^3}{24EI} \chi(u) + \frac{M_b l}{3EI} \psi(u) = 0,$$

由此

$$M_b = -\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{\chi(u)}{\psi(u)}. \quad (1.37)$$

負号表示 M_b 的方向与图 1.10 中所設的相反, 使梁向上凸起而弯曲。弯矩 M_b 可由附录的表 A-1 很容易地算得。有了弯矩(1.37), 挠度曲綫可由均布荷重所产生的挠度 [方程 (1.20)] 和弯矩 M_b 所产生的挠度 [方程(1.24)] 迭加而得。

若受均布荷重梁的两端均为固定 (图 1.11), 則挠度曲綫为对称, 并且固定端的弯矩相等 ($M_a = M_b = M_0$)。这两弯矩的大小可由这一条件得到, 即均布荷重所产生的两端的轉角 [方程 (1.22)], 被作用于两端的弯矩所抵消 [方程(1.34)]。于是

$$\frac{ql^3}{24EI} \chi(u) + \frac{M_0 l}{2EI} \frac{\tan u}{u} = 0,$$

由此

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12} \frac{\chi(u)}{\frac{\tan u}{u}}. \quad (1.38)$$

負号依然表示弯矩的方向与图 1.11 所設的相反。有了这端弯矩,

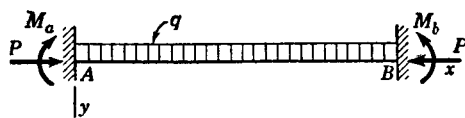


图 1.11

挠度曲綫可由均布荷重所产生的挠度 [方程(1.20)] 和作用于两端的两相等力偶所产生的挠度 [方程 (1.32)] 迭加而得。同样, 中点的弯矩可由均布荷重所产生的弯矩 [方程 (1.23)] 与两力偶 M_0 所产生的弯矩 [参閱方程(1.35)与(1.38)] 迭加而得, 即

$$(M)_{x=l/2} = \frac{ql^2}{8} \lambda(u) - \frac{ql^2}{12} \frac{\chi(u)}{\sin u} = \frac{ql^2}{24} \frac{6(u - \sin u)}{u^2 \sin u}. \quad (1.39)$$

方程右边的这三角函数, 可以 u 代替 $\phi(u)$ 表达式中的 $2u$ 而用附录的表 A-1 进行计算。

当作用于两端固定的梁-柱上的横向荷重不对称时, 两端的弯矩可由两端的斜率为零的条件得出。因此, 对于图 1.12 所示的梁, 决定两端点弯矩 M_a 与 M_b 的方程为

$$\begin{aligned} \theta_a &= \theta_{0a} + \frac{M_a l}{3EI} \phi(u) + \frac{M_b l}{6EI} \phi(u) = 0, \\ \theta_b &= \theta_{0b} + \frac{M_a l}{6EI} \phi(u) + \frac{M_b l}{3EI} \phi(u) = 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

在这两个方程中, θ_{0a} 与 θ_{0b} 表示当 Q 单独作用时铰支梁两端的转角¹⁾, 它们可由方程(1.9)与(1.10)得到。

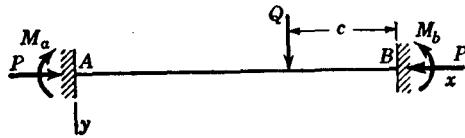


图 1.12

§ 1.9. 有弹性约束的梁-柱

作为一个更为一般的静不定问题, 我们来研究一两端弹性固定的杆。这种端点状况的实例如图 1.13a 所示。一承受横向荷重的梁 AB , 于 A, B 处刚性地固结于两铅直杆, 并承受轴向压力 P 。若 θ_a 与 θ_b 为两端的转角, 则在梁的两端将产生两力偶 M_a 与 M_b (图 1.13b), 它们可表示为如下形式:

$$M_a = -\alpha\theta_a, \quad M_b = -\beta\theta_b. \quad (1.41)$$

图 1.13 示出了正的弯矩与转角。因子 α, β 为规定杆端固定程度的系数, 称为端点约束系数。当杆端的转角等于 1 时, 此系数在数

1) 取图 1.8a 所示的转角与弯矩 M_a 及 M_b 为正。

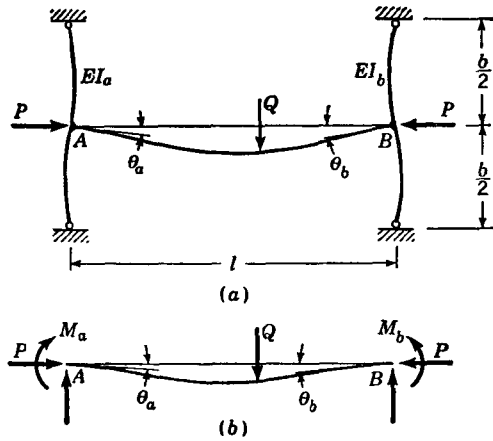


图 1.13

值上等于該端的反作用力矩。这系数的值可在零(簡支端)至无限大(固定端)之間变化。例如,若 EI_a 为 A 处鉛直杆的弯曲刚度,并設此鉛直杆的两端为铰支,于是轉角 θ_a 与弯矩 M_a 之間的关系为

$$\theta_a = -\frac{M_a b}{12EI_a},$$

因此

$$\alpha = \frac{12EI_a}{b}.$$

角度 θ_a 及 θ_b 現在可由考虑杆 AB 的弯曲而决定。仍以 θ_{0a} 及 θ_{0b} 表示在横向荷重作用时对于铰支端所計算得的角度,并由方程(1.31)确定力偶 M_a 及 M_b 所产生的角度,于是我們得到

$$\begin{aligned} \theta_a &= \theta_{0a} + \frac{M_a l}{3EI} \psi(u) + \frac{M_b l}{6EI} \phi(u), \\ \theta_b &= \theta_{0b} + \frac{M_b l}{3EI} \psi(u) + \frac{M_a l}{6EI} \phi(u). \end{aligned} \quad (1.42)$$

最后,从(1.41)及(1.42),得到确定两端弯矩的下列方程:

$$\begin{aligned} -\frac{M_a}{\alpha} &= \theta_{0a} + \frac{M_a l}{3EI} \psi(u) + \frac{M_b l}{6EI} \phi(u), \\ -\frac{M_b}{\beta} &= \theta_{0b} + \frac{M_b l}{3EI} \psi(u) + \frac{M_a l}{6EI} \phi(u). \end{aligned} \quad (1.43)$$

用了这些方程，可以研究杆 AB 的各种端点状况。例如，取 $\alpha = 0, \beta = \infty$ ，我們得到图 1.10 所示的情况，即杆的左端可自由转动而右端为固定端。在这种情况下， $M_a = 0$ ，而 B 端的弯矩为 [方程(1.43)的第二式]

$$M_b = -\frac{3EI\theta_{0b}}{l\psi(u)}. \quad (a)$$

若杆 AB 系承受均布荷重，则由方程(1.22)得

$$\theta_{0b} = \frac{ql^3}{24EI} \chi(u). \quad (b)$$

将式(b)代入式(a)，得固定端的弯矩，其结果与以前所得的相同 [参阅方程(1.37)]。

取 $\alpha = \beta = \infty$ ，我們得到两端固定的杆这情形，并且方程(1.43)化为前节的方程(1.40)。方程(1.43)的应用将在以后讨论稳定性问题时给出(参阅 § 2.3)。

§ 1.10. 有轴向荷重的連續梁

刚性支座上的連續梁 对于一承受横向及轴向荷重共同作用，并由刚性支座所支承的連續梁，以位于支座上方截面内的弯矩作为静不定量是得当的。令 $1, 2, \dots, m$ 表示相继的支座， M_1, M_2, \dots, M_m 为相应的弯矩， l_1, l_2, \dots, l_{m-1} 为跨度， u_1, u_2, \dots, u_{m-1} 为各跨度相应的 u 值 [由方程(1.13)]。压力与弯曲刚度对于各跨度可以各不相同，但在各跨度内这些量均设为常数。

我们来研究支座 $n-1, n$ 及 $n+1$ 间的两个相邻的跨度(图 1.14)。支座上方截面内的正的弯矩如图所示，它们使梁的顶部受压；与正弯矩方向相同的转角为正。

相应的弯矩 M_{n-1}, M_n, M_{n+1} 之间的关系，可由这两个跨度的挠度曲线在中間支座上有一公切线这条件而得到。跨度 $n-1$ 右端的转角 θ_n 与跨度 n 左端的转角 θ'_n ，必大小相等，但正负号相反，

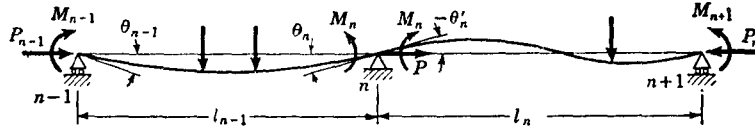


图 1.14

因此

$$\theta_n = -\theta'_n. \quad (a)$$

以每一跨度作为承受横向荷重与端弯矩的简支梁，以计算转角。故转角 θ_n 的表达式包括两部分，其一与作用于这跨度的横向荷重有关，以 θ_{0n} 表之；第二部分与力偶 M_{n-1} 及 M_n 有关，并可得自方程 (1.31)，如是

$$\theta_n = \theta_{0n} + \frac{M_{n-1}l_{n-1}}{6EI_{n-1}} \phi(u_{n-1}) + \frac{M_n l_{n-1}}{3EI_{n-1}} \phi(u_{n-1}).$$

对于角 θ'_n 我们也可以写出同样的表达式。于是方程 (a) 成为

$$\begin{aligned} \theta_{0n} + \frac{M_{n-1}l_{n-1}}{6EI_{n-1}} \phi(u_{n-1}) + \frac{M_n l_{n-1}}{3EI_{n-1}} \phi(u_{n-1}) = \\ = - \left[\theta'_{0n} + \frac{M_n l_n}{3EI_n} \phi(u_n) + \frac{M_{n+1} l_n}{6EI_n} \phi(u_n) \right], \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} M_{n-1} \phi(u_{n-1}) + 2M_n \left[\phi(u_{n-1}) + \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{I_{n-1}}{I_n} \phi(u_n) \right] + \\ + M_{n+1} \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{I_{n-1}}{I_n} \phi(u_n) = - \frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}} (\theta_{0n} + \theta'_{0n}). \quad (1.44) \end{aligned}$$

对于任何种横向荷重，角 θ_{0n} 及 θ'_{0n} 可用 §§ 1.3 至 1.5 诸节所述的方法来计算。所以方程 (1.44) 只有三个未知的弯矩 M_{n-1} , M_n , M_{n+1} 。对于连续梁的每一中间支座写出方程 (1.44)，并运用第一个及最后一个支座处的条件，我们就得到足够的方程去解所有的未知力矩。方程 (1.44) 为有轴向荷重的连续梁的**三弯矩方程**。

若强度为 q_{n-1} 及 q_n 的均布荷重各作用于跨度 $n-1$ 及 n ，则由方程 (1.22)，我们得到

$$\theta_{0n} = \frac{q_{n-1} l_{n-1}^3}{24 EI_{n-1}} \chi(u_{n-1}),$$

$$\theta'_{0n} = \frac{q_n l_n^3}{24EI_n} \chi(u_n),$$

而方程(1.44)可写成如下形式:

$$\begin{aligned} M_{n-1}\phi(u_{n-1}) + 2M_n \left[\phi(u_{n-1}) + \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{I_{n-1}}{I_n} \phi(u_n) \right] + \\ + M_{n+1} \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{I_{n-1}}{I_n} \phi(u_n) = - \frac{q_{n-1} l_{n-1}^2}{4} \chi(u_{n-1}) - \\ - \frac{q_n l_n^2}{4} \frac{I_{n-1}}{I_n} \frac{l_n}{l_{n-1}} \chi(u_n). \end{aligned} \quad (1.45)$$

用了附录的表 A-1 中函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$ 及 $\chi(u)$ 的值, 用上述方程来计算弯矩将大大简化。

支座不位于一直线上的连续梁 若一原来直的压杆为不位于一直线上的刚性支座所支承, 则将产生附加的弯曲。设 $n-1, n$ 及 $n+1$ 为连续梁的三个相继的支座 (图 1.15), h_{n-1}, h_n 及 h_{n+1} 为各支座相应的纵坐标。我们

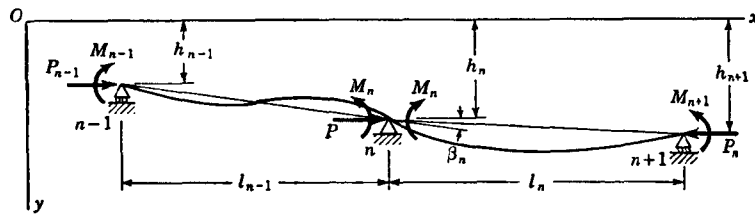


图 1.15

假设这些坐标相差非常小, 以致两相邻跨度间的夹角 β_n 可足够精确地由下列方程表出:

$$\beta_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{l_{n-1}} - \frac{h_{n+1} - h_n}{l_n}. \quad (b)$$

由于支座位置的高度差所引起的弯矩 M_{n-1}, M_n 及 M_{n+1} , 可由连续条件得到。若以跨度 $n-1$ 及 n 作为两个简单梁, 我们得到结论: 在公共支座 n 上, 这两梁的两端所转的角度必须与角度 β_n 相抵消。于是运用方程(1.31), 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{M_{n-1} l_{n-1}}{3EI_{n-1}} \phi(u_{n-1}) + \frac{M_{n-1} l_{n-1}}{6EI_{n-1}} \phi(u_{n-1}) + \frac{M_n l_n}{3EI_n} \phi(u_n) + \\ + \frac{M_{n+1} l_n}{6EI_n} \phi(u_n) = \beta_n, \end{aligned}$$

由此

$$M_{n-1}\phi(u_{n-1}) + 2M_n \left[\phi(u_{n-1}) + \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{l_{n-1}}{I_n} \phi(u_n) \right] + M_{n+1} \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{l_{n-1}}{I_n} \phi(u_n) = \frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}} \beta_n. \quad (1.46)$$

这就是支座不在同一高度的三弯矩方程。如果已知所有支座的位置，很容易就可决定每个中间支座的 β_n 。于是由对于每个支座所写出的联立方程 (1.46) 求解，可决定在支座上方的弯矩。如果尚有横向荷重作用于梁，将方程 (1.44) 与 (1.46) 的右边组合，即得三弯矩方程。

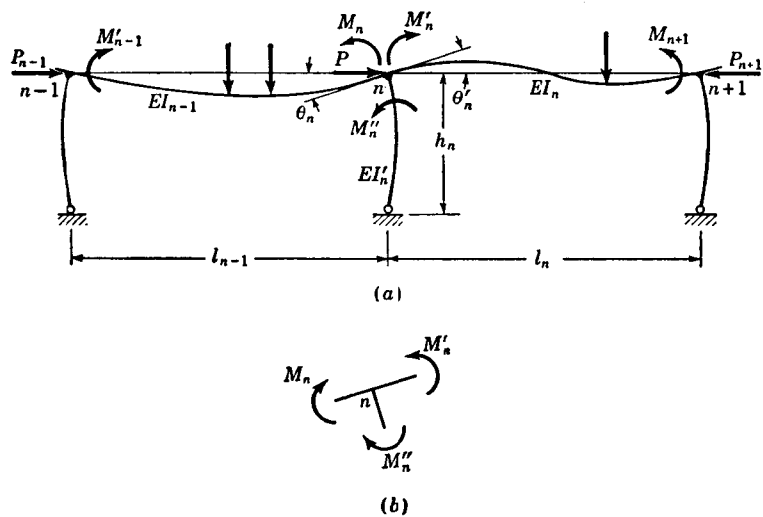


图 1.16

刚结于柱的连续梁 如果连续梁在支座上方的截面由于刚性连接于如图 1.16a 所示的柱，因而不能自由地转动，则在支座 n 的左边及右边两相邻截面上的弯矩 M_n 及 M'_n 并不相等。两者之间的关系可由结点 n (图 1.16b) 的平衡方程给出：

$$M_n - M'_n + M''_n = 0. \quad (c)$$

与以前一样，并运用方程 (a)，我们得到¹⁾

1) 在这推演中，略去了由于柱在支座 $n-1, n, n+1$ 处的水平反作用力而引起的梁的轴向力的改变。

$$\begin{aligned} \theta_{0n} + \frac{M'_{n-1}l_{n-1}}{6EI_{n-1}} \phi(u_{n-1}) + \frac{M_n l_{n-1}}{3EI_{n-1}} \psi(u_{n-1}) = \\ = - \left[\theta'_{0n} + \frac{M'_n l_n}{3EI_n} \phi(u_n) + \frac{M_{n+1} l_n}{6EI_n} \psi(u_n) \right], \end{aligned} \quad (1.47)$$

或

$$\begin{aligned} M'_{n-1} \phi(u_{n-1}) + 2M_n \psi(u_{n-1}) + 2M'_n \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{l_{n-1}}{l_n} \phi(u_n) + \\ + M_{n+1} \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{l_{n-1}}{l_n} \psi(u_n) = - \frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}} (\theta_{0n} + \theta'_{0n}). \end{aligned} \quad (1.48)$$

对于这同一接合点的另一方程可由柱的弯曲而得到。设结点 n 并无横向位移,则表示结点对柱的作用图(1.16a)的弯矩 M''_n ,可由方程

$$M''_n = \alpha_n \theta_n \quad (d)$$

表示,其中 α_n 为对于支座 n 的约束系数 [参阅方程(1.41)]。例如,对于下端铰接的柱,其弯曲刚度为 EI'_n ,长为 h_n ,我们得到

$$\theta_n = \frac{M''_n h_n}{3EI'_n}, \quad (e)$$

这方程略去了轴向力对柱弯曲的影响。由方程(e)得

$$M''_n = \frac{3EI'_n \theta_n}{h_n} \quad \text{及} \quad \alpha_n = \frac{3EI'_n}{h_n}.$$

如是,对于每一特殊情形可得出 α_n 。

现在回到方程(d),并与方程(c)组合,得

$$\theta_n = \frac{M''_n}{\alpha_n} = \frac{M'_n - M_n}{\alpha_n}.$$

注意,方程(1.47)的左边也等于 θ_n ,对于每一结点可得下述补充方程:

$$\frac{1}{\alpha_n} (M'_n - M_n) = \theta_{0n} + \frac{M'_{n-1} l_{n-1}}{6EI_{n-1}} \phi(u_{n-1}) + \frac{M_n l_{n-1}}{3EI_{n-1}} \psi(u_{n-1}). \quad (1.49)$$

对于每个中间支座,我们可以写出(1.48)和(1.49)两方程。如是,如果梁的两端为简支,我们就有足够的方程以决定所有的静不定弯矩。如果两端为固定端,必须加上两个表示两端固定这条件的补充方程¹⁾。运用了附录中函数 $\phi(u)$ 及 $\psi(u)$ 的表 A-1,解这些方程可以大大地简化。

1) 这问题的很详尽的讨论可参阅 F. Bleich 与 J. Melan 所著的书: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatic, Berlin, 1927. 并参阅 F. Bleich, Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes, 2d ed., Berlin, 1925,

力矩分配法 为分析连续梁与框架受轴向力与弯矩联合作用的另一方法。此法要用到劲度系数,传递系数等;这些系数经修正以包括轴向力的影响。已将这些系数的值制成图和表¹⁾以备查用。有了这些系数,力矩分配的计算可按标准方法。

在弹性支座上的连续梁 如果梁的中间支座是有弹性的,即支座的沉陷与反作用力成正比,方程(1.46)仍旧可用。但若压力 P 沿梁的全长为一常量,且梁的两端支持在刚性支座上,则以中间支座的反力作为静不定量为宜。要决定这些反力,可用方程(1.19)并适当地改变以前的记号,以 c_1, c_2, \dots, c_n ($c_1 < c_2 < c_3 \dots$) 表各中间支座离连续梁右端的距离,以 R_1, R_2, \dots, R_n 表示相应的反力(图 1.17)。要计算这连续梁的任一点的挠度,可将这梁作为一

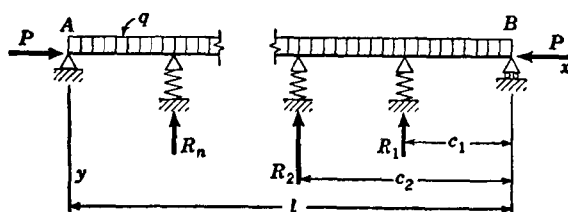


图 1.17

长为 l 的简单梁,在这简单梁上作用着已知的横向荷重及未知的反力 R_1, R_2, \dots 。设想我们以这样的方法已算得任一支座 m 的挠度。这挠度亦可由另一方法得到,即考虑支座的弹性。设 α_m 为使支座 m 有一单位挠度所须的荷重。于是在支座 m 的反力等于压力 R_m 的作用之下,挠度将为 R_m/α_m 。使这挠度等于以上所计算得的挠度,我们就得到一个包含中间支座反力 R_1, R_2, \dots, R_n 的方程。有几个中间支座,我们就可以写出几个类似这样的方程,因此将有足够的方程以计算所有中间支座的静不定反力。

现以荷重沿梁 AB 均匀分布的情形为例(图 1.17)。这荷重所产生的挠度可由方程(1.20)得到,反力 R_1, R_2, \dots, R_n 所产生的挠度可由方程(1.19)来计算。运用记号 $x_m = l - c_m$,对于支座 m 我们得到

1) 参阅 B. W. James, Principal Effects of Axial Load on Moment Distribution Analysis of Rigid Structures, *NACA Tech. Note* 534, 1935. 在 Niles 与 Newell 的书亦叙述了这方法 (*Airplane Structures*, 3d ed., vol. 2, pp. 120—132, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1943).

$$\begin{aligned}
& \frac{ql^4}{16EIu^4} \left[\frac{\cos\left(u - \frac{2ux_m}{l}\right)}{\cos u} - 1 \right] - \frac{ql^2}{8EIu^2} x_m(l - x_m) - \\
& - \frac{\sin kx_m}{Pk \sin kl} \sum_{i=1}^{i=m} R_i \sin kc_i + \frac{x_m}{Pl} \sum_{i=1}^{i=m} R_i c_i - \\
& - \frac{\sin k(l - x_m)}{Pk \sin kl} \sum_{i=m+1}^{i=n} R_i \sin k(l - c_i) + \\
& + \frac{l - x_m}{Pl} \sum_{i=m+1}^{i=n} R_i(l - c_i) = \frac{R_m}{\alpha_m}. \quad (1.50)
\end{aligned}$$

类似这样的方程的个数与中间支座的个数相等,所以所有的静不定支座反力均可算得。方程(1.50)将在以后用于讨论在弹性支承杆的稳定性。

代替图 1.17 所示的弹性支座,梁亦可为连续的弹性基础所支承。在海乞尼 (Hetényi) 的书¹⁾中详细地分析了这情形。

§ 1.11. 三角级数的应用

在研究棱柱杆的挠度时,以三角级数的形式表示出挠度曲线有时候是有利的²⁾。这样,一个数学表达式就可适用于梁的全长,而不必象 §§1.3, 1.4 中那样逐段地去讨论相邻荷重之间的挠度曲线。

这种分析方法对于简支梁特别有用(图 1.18a)。在这种情况下,挠度曲线可用富氏正弦级数来表示:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (1.51)$$

级数的每一项都适合端点条件,因为每一项及其二阶导数在梁的两端($x = 0$ 和 $x = l$)均等于零。如是,梁的挠度及弯矩在梁的两端均等于零。在几何意义上,级数(1.51)表明:梁 AB 的挠度曲线可由正弦曲线(如图 1.18b, c 及 d)迭加而得。曲线 b 表示级数的第一项,曲线 c 表示第二项,以此类推。级数的系数 a_1, a_2, \dots

1) M. Hetényi, Beams on Elastic Foundation, chap. 6, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1946.

2) 参阅 Timoshenko 的论文, Application of Generalized Coordinates to the Solution of Problems on Bending of Bars and Plates *Bull. polytech. Inst.*, Kiev., 1909 (俄文)。

为各正弦曲线的纵坐标的最大值,而与 π 相乘的数值 $1, 2, 3, \dots$ 表明正弦曲线有几个半波。

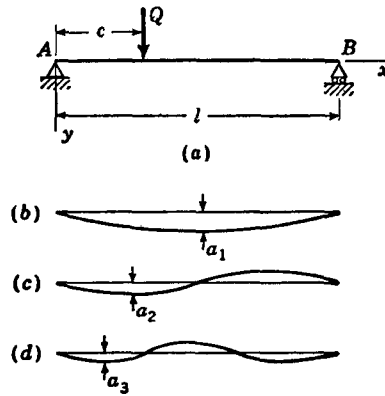


图 1.18

可以严格证明:恰当地决定系数 a_1, a_2, a_3, \dots , 可使级数 (1.51) 表示任何的挠度曲线¹⁾, 而其精确度与所取的项数有关. 在以下的讨论中, 我们运用梁的弯曲应变能的一般表达式, 以得到系数 a_1, a_2, a_3, \dots . 这表达式由方程²⁾

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1.52)$$

给出. 由(1.51), y 对于 x 的二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - 2^2 a_2 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - \\ & - 3^2 a_3 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{3\pi x}{l} - \dots \end{aligned}$$

代入方程(1.52), 我们发现积分号下的表达式有两种类型的项:

$$a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \text{ 及 } 2a_n a_m \frac{n^2 m^2 \pi^4}{l^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

1) 对于富氏级数的详细讨论, 读者可参阅任何高等微积分的标准教科书。

2) 参阅 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part I, p. 317, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton. N. J., 1955.

直接由积分可以証明:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \text{ 及 } \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0.$$

因此,在式(1.52)中所有包含如 $a_m a_n$ 系数乘积的諸項均消失,而只留下系数平方的諸項. 于是应变能的表达式为

$$U = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} (a_1^2 + 2^4 a_2^2 + 3^4 a_3^2 + \dots) = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2. \quad (1.53)$$

如果我们使这梁(图 1.18a) 离开其平衡位置而有一很小的位移, 则梁的应变能的改变等于产生这位移时荷重所作的功. 这是由虚位移原理推出的, 我们将用它来决定級数(1.51)的系数. 梁离开其平衡位置的微小位移, 可由系数 a_1, a_2, a_3, \dots 的微小改变而得到. 若任一系数 a_n 有一增量 da_n , 在級数(1.51)中, 我们将有 $(a_n + da_n) \sin n\pi x/l$ 这一項以代替 $a_n \sin n\pi x/l$ 这一項, 而其他諸項保持不变. 如是, 系数 a_n 的增量 da_n , 表示在梁原来的挠度曲綫上迭加一附加的小挠度 $da_n \sin n\pi x/l$. 对此附加挠度, 我們可計算荷重所作之功. 对于作用于离左端支座为 c 的单个荷重 Q (图 1.18a), 荷重的作用点有一鉛直位移 $da_n \sin n\pi c/l$, 于是这荷重作功

$$Q da_n \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

由于 a_n 增加了 da_n 所产生的梁的应变能[方程(1.53)]的改变为

$$\frac{\partial U}{\partial a_n} da_n = \frac{\pi^4 EI}{2l^3} n^4 a_n da_n.$$

使应变能的改变等于所作之功, 我們就得到决定系数 a_n 的方程:

$$\frac{\pi^4 EI}{2l^3} n^4 a_n = Q \sin \frac{n\pi c}{l},$$

由此

$$a_n = \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI n^4} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

将此系数的表达式代入級数(1.51), 我們得到級数形式的挠度曲綫方程

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI} \left(\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^4} \sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right) = \\
 &= \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.54)
 \end{aligned}$$

运用这级数,可计算对于任何 x 值的挠度。

作为一例,研究荷重作用在跨度中点这情形。要计算荷重作用点的挠度,以 $x = c = l/2$ 代入方程(1.54),我们得到

$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right).$$

这级数收敛很快,取为首的少数几项就得到精确程度很高的挠度。只取级数的第一项,我们得到

$$\delta = \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI} = \frac{Ql^3}{48.7EI}.$$

与精确解相比表明,代替 48 我们得到的是 48.7。如是,只取第一项以代替整个级数,所引起的误差为 $1\frac{1}{2}\%$ 。在许多实际问题中,这样的准确程度已足够了。

已有了一单个荷重的解(方程 1.54),对于其他的荷重,均可运用迭加法来解。例如,受强度为 q 的均布荷重的梁,距左端支座为 c 的每一荷重增量 qdc 可以看作一集中荷重,而相应的挠度 dy 可以由 qdc 代替级数(1.54)中的 Q 而得到。于是

$$dy = \frac{2ql^3 dc}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

将这表达式对于 c 积分,积分限为 $c = 0$ 和 $c = l$ 。于是,当均布荷重分布于梁全长时,我们得到梁的挠度曲线为

$$y = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

我们又得到了一收敛很快的级数。例如,只取第一项以计算梁中点的挠度,得

$$\delta = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = \frac{ql^4}{76.5EI}.$$

这情形的精确解为

$$\delta = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{ql^4}{76.8EI}$$

因此,只取第一項时其誤差小于 $\frac{1}{2}\%$ 。

以三角級数 (1.51) 的形式表示挠度曲綫,对于同时承受横向荷重及軸向荷重的梁特別有用。例如研究图 1.19 所示的梁,在决

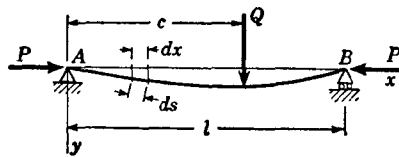


图 1.19

定級数(1.51)的系数 a_1, a_2, \dots 时,我們象以前一样考虑这梁离开其平衡时的挠度曲綫的无限小位移 $da_n \sin n\pi x/l$ 。弯曲应变能的相应的改变与以前的情形相同。但在計算对于这位移外力所作的功时,我們不仅須考虑横向荷重所作的功 $Qda_n \sin n\pi c/l$, 还須考虑軸向力 P 所作的功。挠度曲綫形状的任何改变,常常引起可动支座 B 的位移,于是作用于这支座的力 P 将作功。首先讓我們考虑支座 B 的位移,这位移发生于当杆在变形时从它原来是直的形状变为如图 1.19 所示的平衡曲綫。如认为杆是不可伸长的,这位移等于挠度曲綫的长度与弦 AB 的长度之差。以 λ 表示这位移,并注意曲綫的微段的长度 ds 与相应的弦的微段 dx 之差等于

$$ds - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

我們得到¹⁾

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \quad (1.55)$$

1) 对于计及柱的初弯曲及端荷重偏心性的 λ 的更为一般的表达式,参阅 T. H. Lin, Shortening of Column with Initial Curvature and Eccentricity and Its Influence on the Stress Distribution in Indeterminate Structures, Proc. 1st Natl. Congr. Applied Mech., ASME, New York, 1952.

將級數(1.51)代這表达式中的 y , 並注意到

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}, \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0,$$

我們得到

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2. \quad (1.56)$$

如果我們現在使係數 a_n 有一增量 da_n , 而使離開平衡位置有一很小的位移, 於是鉸支座 B 的相应的小位移为

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial a_n} da_n = \frac{\pi^2 n^2}{2l} a_n da_n.$$

使弯曲应变能的改变等于外力对小位移 $da_n \sin n\pi x/l$ 所作之功, 我們就得到以下決定級數(1.51)的任何係數 a_n 的方程:

$$\frac{\pi^4 EI}{2l^3} n^4 a_n da_n = Q da_n \sin \frac{n\pi c}{l} + P \frac{\pi^2 n^2}{2l} a_n da_n,$$

由此

$$a_n = \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{n\pi c}{l} \frac{1}{n^2 \left(n^2 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} \right)}.$$

为了簡化上述方程, 我們用 α 表示軸向力 P 与其临界值 [方程(1.15)] 之比, 于是

$$a_n = \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{n\pi c}{l} \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha)}.$$

代入級數(1.51), 我們得到

$$y = \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI} \left[\frac{1}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^2(2^2 - \alpha)} \sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right] = \frac{2Ql^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.57)$$

將這級數与只有橫向荷重 Q 作用的級數(1.54)相比較可知, 由于軸向压力 P 的作用, 級數的所有的係數都增大. 並且还可以看出, 当力 P 趋近于临界值, 即 α 趋近于 1 时, 級數(1.57)的第一項将无

限地增大。

以前曾指明,当只有横向荷重作用时,級数(1.51)的第一項給出了杆挠度的很好的近似值。于是,以 δ_0 表横向荷重 Q 单独所产生的杆的最大挠度,将級数(1.54)与(1.57)相比,我們得到結論:当横向荷重 Q 与軸向压力 P 共同作用时,最大挠度近似地等于

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 - \alpha} \quad (a)$$

于是,只有横向荷重时的 δ_0 ,当又有軸向力作用时,将按放大因数 $1/(1 - \alpha)$ 而增大。这放大因数曾在 § 1.7 討論过。

有了一个横向荷重 Q 的挠度曲綫 [方程 (1.57)], 运用迭加法不难得到对于任何种横向荷重的挠度。当均布横向荷重作用于压杆时,我們以 qdc 代替級数(1.57)中的 Q , 并对在梁承受荷重部分的范围内变化的 c 积分此級数。若荷重分布于整个跨度, 則积分限为 0 与 l , 于是我們得到

$$y = \frac{4ql^4}{\pi^3 EI} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

我們又得到一收斂很快的級数, 并且其第一項已給出了很好的近似值; 所以可以用与式 (a) 相似的公式, 而挠度可由横向荷重单独所产生的挠度 δ_0 乘以因数 $1/(1 - \alpha)$ 而得到。对于微小的 α 值, 这公式是很准确的。当 α 增大时, 这近似公式的誤差也增大, 当 P 趋近于临界值时, 誤差趋近于 $\frac{1}{2}\%$ 。

将荷重 Q 移向左端支座 (图 1.19) 而使 c 无限地减小, 使逼近杆被作用于其左端的力偶 Qc 所弯曲的情形。以 $\sin n\pi c/l = n\pi c/l$ 代入方程 (1.57), 并运用記号 $Qc = M_a$, 便得到下述級数, 这級数給出了压杆被作用于杆一端的力偶所弯曲的挠度曲綫:

$$y = \frac{2M_a l^2}{\pi^3 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (b)$$

若有两个力偶 M_a 及 M_b 作用在两端, 則挠度曲綫可由每一力偶所产生的挠度迭加而得。例如設 $M_a = M_b = M_0$, 并运用方程 (b), 便得到两相等的力偶作用时的挠度曲綫

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2M_0 l^2}{\pi^3 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi x}{l} + \\
&+ \frac{2M_0 l^2}{\pi^3 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi(l-x)}{l} = \\
&= \frac{4M_0 l^2}{\pi^3 EI} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (c)
\end{aligned}$$

因在这情形中曲线系对于梁的中点对称,故偶数 n 诸项于级数(c)中不出现. 中点的挠度为

$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{4M_0 l^2}{\pi^3 EI} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{3(9-\alpha)} + \dots \right]. \quad (d)$$

若两端的力偶系由作用于两端的偏心压力 P 所产生, 偏心距均为 e , 我们以 Pe 代替方程(d)中的 M_0 , 于是

$$\delta = \frac{4e\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{3(9-\alpha)} + \dots \right].$$

这又是一收敛很快的级数, 只取级数的第一项, 我们就可以得到足够准确的挠度 δ . 于是

$$\delta = \frac{4ea}{\pi(1-\alpha)}. \quad (e)$$

对于 M_a 与 M_b 并不相等的一般情况, 我们总是可以用两个正负号相同而等于 $\frac{1}{2}(M_a + M_b)$ 的力偶 M' , 及两个正负号相反而等于 $\frac{1}{2}(M_a - M_b)$ 的力偶 M'' 代替之. 只有前两个力偶在中点产生挠度. 所以, 如果偏心率为 e_1 与 e_2 的压力 P 作用在两端, 则可将 $(e_1 + e_2)/2$ 代替¹⁾ e 而由方程(e)得到中点的挠度.

§ 1.12. 初弯曲对挠度的影响

当一杆只有横向荷重作用, 此时杆的很小的初弯曲对弯曲并无影响, 而最终的挠度曲线可由初弯曲的纵坐标与根据直梁所计算得的挠度迭加而得. 如果有轴向力作用于杆, 则初弯曲将大

1) 若偏心使得在两端产生正的弯矩, 则这偏心应作为正, 反之为负.

大地影响轴向力所产生的挠度。

作为一例，我们研究杆轴线的初始形状如以下方程所示（图 1.20）的情形：

$$y_0 = a \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (a)$$

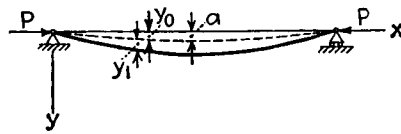


图 1.20

如是，杆轴线的初始形状为一正弦曲线，其最大纵坐标位于中点且等于 a 。若这杆受轴向力 P 的作用，则将产生附加挠度 y_1 ，所以挠度曲线最后的纵坐标为

$$y = y_0 + y_1, \quad (b)$$

而任何截面处的弯矩为

$$M = P(y_0 + y_1).$$

于是，由于变形所产生的挠度 y_1 ，可得自用通常方法解微分方程

$$EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -P(y_0 + y_1), \quad (c)$$

或以式(a)代 y_0 ，并运用记号 $k^2 = P/EI$ ，我们得到

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k^2 y_1 = -k^2 a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

这方程的通解为

$$y_1 = A \sin kx + B \cos kx + \frac{1}{\frac{\pi^2}{k^2 l^2} - 1} a \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (d)$$

对于任何 k 值都要适合端点条件（在 $x = 0$ 及 $x = l$ 处 $y_1 = 0$ ），为此必须使 $A = B = 0$ 。然后，运用表示轴向力与其临界值之比的先前的记号 α ，我们得到

$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}} = \frac{k^2 l^2}{\pi^2} \quad (1.58)$$

及

$$y_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} a \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (1.59)$$

挠度曲线总的纵坐标为

$$\begin{aligned} y = y_0 + y_1 &= a \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\alpha}{1-\alpha} a \sin \frac{\pi x}{l} = \\ &= \frac{a}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

这方程表明,由于轴向压力的作用,杆中点的初始挠度 a 将依比值 $1/(1-\alpha)$ 而放大. 当轴向压力趋近于临界值时,即当 α 趋近于 1 时,表示挠度的纵坐标 y 将无限地增大.

若杆的初始形状由级数¹⁾

$$y_0 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots$$

给出,我们将这表达式代入方程 (c) 中的 y_0 , 然后对于级数的每一项象以前一样地解微分方程, 我们得到

$$y_1 = \alpha \left(\frac{a_1}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{a_2}{2^2-\alpha} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right). \quad (1.61)$$

因 α 总是小于 1, 且当 P 趋近于 P_{cr} 时 α 趋近于 1, 所以这表达式的第一项常起主要作用, 并可以看出与式 (1.59) 一致.

以等效横向荷重求解 有初弯曲的杆的弯曲问题可用另一方法去解, 即以等效横向荷重的影响代替初弯曲对于挠度的影响. 等效横向荷重对于直杆的弯矩图, 应与轴向力对有初弯曲的杆所产生的弯矩图(只计初挠度)相同. 例如取初弯曲如方程 (a) 所示. 这弯曲对于压杆挠度的影响, 与使杆产生弯矩 $M = Pa \sin \pi x/l$ 的横向分布荷重的影响相同, 因为对于这两种情形, 弹性曲线的微分方程 (c) 是相同的. 于是, 运用 q 与 M 之间的关系, 可得到等效横向荷重强度 q 的表达式, 即

1) 参阅 Timoshenko, *Bull. Soc. Eng. Tech.*, St. Petersburg, 1913 (俄文). 并参阅 T. H. Lin, *loc. cit.*

$$q = -\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{\pi^2 a P}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

这横向荷重所产生的挠度,可由前节的一般方法而得到.将量

$$\frac{\pi^2 a P}{l^2} \sin \frac{\pi c}{l} dc$$

代替一般表达式(1.57)中的 Q ,并自 $c=0$ 至 $c=l$ 积分,我们得到

$$y_1 = \frac{2l^3}{\pi^4 EI} \frac{\pi^2 a P}{l^2} \int_0^l \sin \frac{\pi c}{l} dc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

因

$$\int_0^l \sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} dc = 0, \text{ 当 } n \neq 1; \int_0^l \sin^2 \frac{\pi c}{l} dc = \frac{l}{2},$$

故除了第一项以外,上述积分的其他各项均等于零.最后得到

$$y_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

这表达式与以前所得的式(1.59)相同.

作为另一例,取杆的初挠度曲线(图 1.20)为一抛物线:

$$y_0 = \frac{4a}{l^2} x(l-x). \quad (e)$$

相应的等效横向荷重为

$$q = -\frac{d^2(Py_0)}{dx^2} = \frac{8aP}{l^2}.$$

将它代方程(1.20)中的 q ,挠度曲线为

$$y_1 = \frac{2a}{u^2} \left[\frac{\cos\left(u - \frac{2ux}{l}\right)}{\cos u} - 1 \right] - \frac{4a}{l^2} x(l-x), \quad (f)$$

其中的 u 系由方程(1.13)给出.将这挠度与初挠度[方程(e)]迭加,这弯曲杆的总的纵坐标为

$$y = y_0 + y_1 = \frac{2a}{u^2} \left[\frac{\cos\left(u - \frac{2ux}{l}\right)}{\cos u} - 1 \right].$$

若杆的初始形状系由两直线段 AC 与 BC 所组成,如图 1.21 所示,则等效横向荷重为一作用于 C 的集中荷重 Q ,因这时此荷重

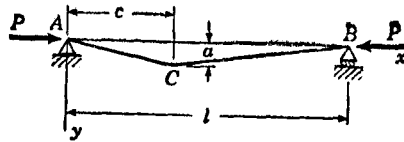


图 1.21

的弯矩图与图(1.21)的 P 所产生的弯矩图的形状相同。等效荷重的大小可由弯矩等式而得到, 即

$$Pa = \frac{Qc(l-c)}{l},$$

由此

$$Q = \frac{Pal}{c(l-c)}.$$

将它代方程(1.7)及(1.8)中的 Q , 得到对于这种情形的挠度 y_1 .

挠度反向现象 值得注意, 当压力 P 逐渐增加时, 初弯曲杆可能发生相反方向的挠度。这是由于挠度与压力之间的非线性关系造成的。为了解释这性状, 让我们研究图 1.22 所示的杆, 其初弯曲为

$$y_0 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

若幅度 a_1 远较 a_2 为小, 则初弯曲的形状如图中实线所示。

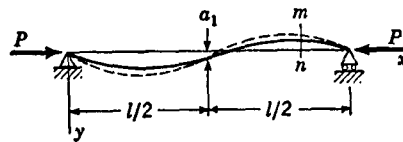


图 1.22

由方程(1.61), P 所产生的挠度为

$$y_1 = \frac{\alpha a_1}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\alpha a_2}{2^2-\alpha} \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (g)$$

当压力 P 远较临界荷重为小时, 则 α 也为小量; 于是, 因 a_1 远较 a_2 为小, 我们可得到结论: 式(g)的第二项更为重要, 而挠度将近似地如虚线所示。如截面 mn 的挠度是向上的。

現設力 P 逐漸增大, 直至趨近臨界值。於是 α 趨近於 1, 而方程 (g) 的第一項起了主要作用。杆的撓曲形狀近似地為半個正弦波, 而截面 mn 的撓度是向下的。

有橫向荷重作用的杆 若一有初撓曲的梁-柱承受橫向荷重或端荷重, 則總撓度可由以上所討論的由於初撓曲所產生的撓度, 及橫向荷重對於直杆所計算得的撓度迭加而得。由於初撓曲的影響可以用等效橫向荷重來代替, 而在 § 1.4 中曾指明修正形式的迭加原理適用於所有類型的橫向荷重, 故將以上兩類撓度迭加是合理的。

作為一例, 研究圖 1.23 所示的在端點承受偏心荷重 P 的初撓曲杆。設杆的初撓度 y_0 由方程 (a) 給出。作用於端點的偏心荷

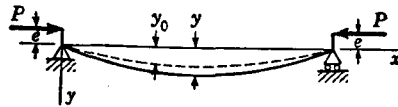


圖 1.23

重, 可由靜力等效的荷重代替, 即軸向荷重 P 及端點彎矩 $M_0 = Pe$ 。於是總撓度為由於初撓曲產生的撓度 [方程 (1.60)] 與由於彎矩 M_0 所產生的撓度之和。後面這撓度可以 Pe 代替方程 (1.32) 中的 M_0 而得到。撓度迭加的結果為

$$y = \frac{a}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{e}{\cos \frac{k l}{2}} \left[\cos \left(\frac{k l}{2} - k x \right) - \cos \frac{k l}{2} \right]. \quad (h)$$

最大撓度係在杆的中點 ($x = l/2$):

$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{a}{1-\alpha} + e \left(\sec \frac{k l}{2} - 1 \right); \quad (i)$$

杆的任一截面 x 的彎矩為

$$\begin{aligned} M &= P(e + y) = \\ &= P \left[\frac{a}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{e}{\cos \frac{k l}{2}} \cos \left(\frac{k l}{2} - k x \right) \right], \quad (j) \end{aligned}$$

而在杆中点的最大弯矩为

$$M_{\max} = P \left(\frac{a}{1 - \alpha} + \frac{e}{\cos \frac{kl}{2}} \right). \quad (k)$$

这样地运用迭加原理，可以分析作用于初弯曲杆的任何横向荷重或端点荷重¹⁾。

两端固定的杆 若压杆的两端系固定而非简支，则在受压时两端将产生弯矩。端点弯矩的大小可得自两端固定的条件。例如，假定此杆的初弯曲由方程(a)，即

$$y_0 = a \sin \frac{\pi x}{l}$$

给出。假若杆两端可自由转动，由于轴向力的作用，杆的挠度由方程(1.59)得出，而两端转角的大小为

$$\left(\frac{dy_1}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\pi a}{l}.$$

要消除这些转角，必须在两端作用力矩 M_0 ，它们的大小可自以下方程²⁾得到[参阅方程(1.34)]:

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{\pi a}{l} + \frac{M_0 l}{2EI} \frac{\tan u}{u} = 0,$$

由此

$$M_0 = - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{2\pi a EI}{l^2} \frac{u}{\tan u}. \quad (1)$$

杆的总的挠度，可将由初弯曲所产生的挠度[方程(1.60)]及弯矩 M_0 所产生的挠度[方程(1.32)]迭加而得。这样，我们得到中点 ($x = l/2$) 的挠度为

$$\delta = \frac{a}{1 - \alpha} + \frac{M_0 l^2}{8EI} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u},$$

或运用方程(1)，

1) 对于几种端点荷重的特殊情形的方程，曾为 H. K. Stephenson 所作出，Stress Analysis and Design of Columns, Highway Research Board, Proc. (34th annual meeting), January, 1955.

2) 设方程中正的 M_0 系如图 1.8a 所示的方向。

$$\delta = \frac{a}{1-\alpha} \left(1 - \frac{\pi\alpha}{2} \frac{1-\cos u}{u \sin u} \right). \quad (m)$$

杆中点的弯矩得自式 $M = P\delta + M_0$, 式中 M_0 由方程(1)给出。

在以上讨论中, 作用于杆的压力 P 系在杆的端点. 具有初弯曲的杆在中间部分作用轴向力的情形, 亦曾被讨论过¹⁾。

§ 1.13. 许可应力的决定

在设计只承受横向荷重的钢梁时, 我们通常选择一比屈服点应力小的应力作为许用应力. 如是, 我们有

$$\sigma_w = \frac{1}{n} \sigma_{Y.P.}, \quad (a)$$

其中 n 为安全系数. 梁的横截面尺寸的选择, 应使最大应力不超过式 (a) 所规定的许用应力。

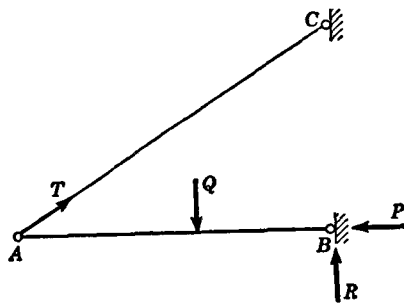


图 1.24

当横向荷重与轴向压力共同作用时, 若轴向力保持常数, 而只须考虑横向荷重有可能增加, 则上述步骤仍然适用. 由迭加原理 (§ 1.4) 可知, 如用方程 (a) 所给的许用应力来

决定梁的截面, 则当所有的横向荷重以因子 n 而增加时, 最大应力将等于屈服点应力. 这系设置直至屈服点胡克定律均适用. 这对于结构钢这样的材料是合理的。

但在有些情况中, 轴向力随横向荷重而增加. 图 1.24 所示的结构即为这种情况的一例. 可以看出, 索 AC 内的张力 T 及杆 AB 内的相应的压力 P , 与作用于梁的横向荷重 Q 按相同的比例而增加. 在这种情况下, 挠度与最大应力比横向荷重增加得快; 在选择许用应力以保证所需的安全系数时, 以上这事实必须加以考虑. 在使安

1) 参阅 S. I. Sergev, Univ. Wash., Eng. Expt. Sta. Bull., 113, 1945.

全系数等于 n 时, 我們必須这样定出梁的橫截面尺寸, 使得当所有作用于梁的荷重(包括軸向力 P) 增加到 n 倍时, 梁的最大的纖維应力将等于屈服点应力, 这需要用小于方程 (a) 所示的資用应力。

为了說明选择这种梁的截面尺寸的步驟, 我們来研究一承受偏心压力 P 的柱 (图 1.8b), 并設两偏心率都等于 e , 且弯曲发生在梁的对称面內。于是由方程(1.35), 最大弯矩为

$$M_{\max} = Pe \sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (b)$$

以 r 記截面的迴轉半径, 以 c 記中性軸至邊緣纖維的距离, 我們得到中央截面处的最大应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{l}{2r} \sqrt{\frac{P}{AE}} \right), \quad (1.62)$$

这就是熟知的最大应力的**正割公式**。

以記号 s 表示量 $\frac{r^2}{c}$, 并称之为**核心半径**, 因为它在截面內定出了一个核心, 若压力作用在短柱的核心之內, 則在任何邊緣纖維內并不引起拉应力。核心半径等于截面模量 Z 与截面面积之比¹⁾, 故

$$s = \frac{Z}{A} = \frac{I}{Ac} = \frac{r^2}{c^2} \quad (1.63)$$

例如, 对于寬为 b 高为 h 的矩形截面, 核心半径为

$$s = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6}. \quad (c)$$

用了表示核心半径的 s 这記号, 割綫公式可写成形式

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{e}{s} \sec \frac{l}{2r} \sqrt{\frac{P}{AE}} \right). \quad (1.64)$$

对于一尺寸为已知的柱, 并已知偏心距 e , 則細长比 l/r 及 e/s 均为已知, 因此方程 (1.64) 表示最大纖維压应力及平均压应力 $\sigma_c = P/A$ 之間的关系。对于已知的弹性模量 E , 这关系可由一曲綫表

1) 在 Timoshenko 的书中讨论了核心半径, Strength of Materials, 3d ed., part I, p. 254, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1955.

示,以 Pl^2/Ar^2 为横坐标而以 $\sigma_{\max} l^2/r^2$ 为纵坐标。图 1.25 中按照三个不同的偏心率 $e/s = 1$, $e/s = 0.5$ 及 $e/s = 0.1$ 繪出了三条这类曲线。弹性模量取作等于 2.1×10^6 公斤/厘米²。图上也繪有直线 OA , 表明荷重沿轴綫作用时 ($e/s = 0$) 最大的纤维应力。这直线所表示的最大纤维应力,由零开始直至平均压应力的临界值。

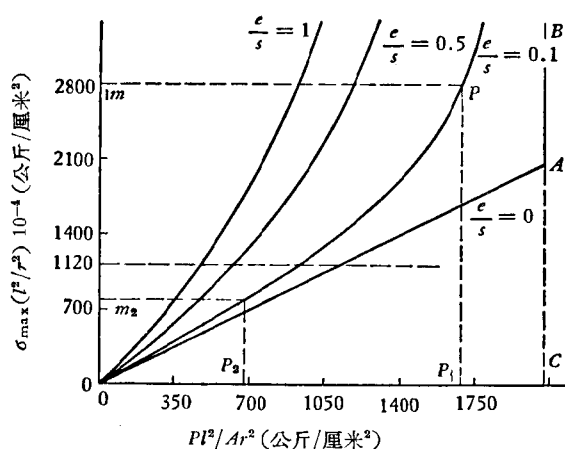


图 1.25

图中的铅直线 CAB 表示了这临界值。所有与图所示的三曲线类似的曲线,都将以这直线为渐近线,因为当 $P = P_{cr}$ 时,方程 (1.64) 中的 $\sec(l/2r)\sqrt{P/AE}$ 变为无限大。当偏心距 e 逐渐变小时,相应的曲线就越来越接近于直线 OA 及 AB 。有了如图 1.25 中的一组曲线,对于已知的柱,我们就很容易得到为已知的偏心压力所产生的最大压应力。

对于已知的柱及已知的偏心距,这些曲线可用以决定在给定的安全系数下所允许作用的压荷重的大小。例如,设柱的材料屈服点应力为 2800 公斤/厘米²,所需的安全系数为 2.5, $e/s = 0.1$, 细长比 $l/r = 100$ 。由 $\sigma_{\max} = 2800$ 公斤/厘米² 作水平线与图 1.25 中对 e/s 的相应的曲线相交于 p (图 1.25), 我们在横坐标轴上所得的 p_1 , 定出了使最大纤维应力等于屈服点应力时平均应力 σ_c 的数值。我们以 $(\sigma_c)_{y.p.}$ 表示这平均应力的数值。要使安全系数等

于 2.5, 則許可的平均应力应为点 p_1 所定出的数值的 0.4 倍。在图 1.25 中, 这值由点 p_2 所表示 (那里 $P/A = 679$ 公斤/厘米²); 而相应的 $e/s = 0.1$ 的曲綫的纵坐标为 Om_2 , 它給出最大纖維应力 σ_{\max} (等于 798 公斤/厘米²), 必須取它作为資用应力, 以保証所需的安全系数。可以看出, 这样所得的資用应力的数值, 远小于由方程 (a) 所得的 1120 公斤/厘米²。

在設計承受偏心荷重的柱时, 我們开始先假定一可能的横截面尺寸, 然后按照以上所述, 得出这柱所能負担的安全荷重。如果这荷重与实际荷重相差很大, 則必須改变所假定的截面并重复計算。如是, 运用这試算法, 我們总可以得到柱的合适的横截面尺寸。

我們可以不用以上的曲綫, 而直接运用正割公式 [方程 (1.64)] 設計偏心受压的柱。若 P 表示柱的安全荷重, n 为安全系数, 則荷重 nP 应使最大纖維应力等于屈服点应力。对于这荷重, 方程 (1.64) 成为

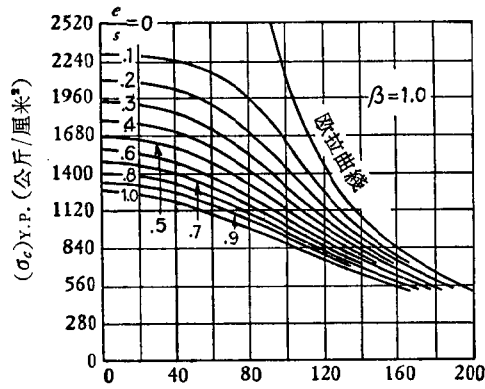
$$\sigma_{y.p.} = \frac{nP}{A} \left(1 + \frac{e}{s} \sec \frac{l}{2r} \sqrt{\frac{nP}{AE}} \right). \quad (d)$$

我們总可以用試算法从这方程解 P/A , 这样就得到已知柱的安全平均应力 P/A 。假設了 $\sigma_{y.p.}$, n 及 e/s 諸值, 并运用方程 (d), 我們可以計算得一表, 关于不同細长比 l/r 的安全平均压应力 $\sigma_c = P/A$ 。 σ_c 与 l/r 間的这关系可以用一曲綫族来表示。

要使这些曲綫与安全系数 n 的数值无关, 可繪 $nP/A = (\sigma_c)_{y.p.}$ 与細长比 l/r 的曲綫。这样, 可直接由曲綫得到开始屈服时的平均压应力 $(\sigma_c)_{y.p.}$, 并且, 曲綫的纵坐标用任何所需安全系数 n 来除后, 即得所需的安全系数。图 1.26 表示了結構鋼的一組曲綫¹⁾, 其中 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\sigma_{y.p.} = 2520$ 公斤/厘米², $e/s = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ 。有了这样的曲綫, 就不难用試算法決定

1) 这些曲线系由 D. H. Young 所计算, Rational Design of Steel Columns, Trans. ASCE, Vol. 101, p. 422, 1936.

偏心压杆所需的横截面¹⁾。



细长比值
图 1.26

对于横向荷重与轴向压力共同作用的别的情形，可以计算类似的曲线²⁾。例如，对于有均布荷重的梁，必须象以上运用方程(1.35)那样运用方程(1.23)。

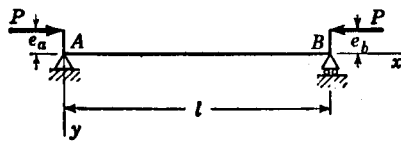


图 1.27

若两压力的偏心距 e_a 与 e_b 不相等 (图 1.27)，我们可运用方程(1.30)。在讨论桁架的压杆中的应力时，这情形是有实际重要性的。

由于桁架的结点的刚度，常出现次应力，因而每一压杆承受作用于两端的弯矩所生的弯曲。若弯矩的大小可由次应力的分析而得到³⁾，则可由与以上所讨论的两相等弯矩的情

- 1) 由正割公式所计算的并适于设计用的大量这类曲线，为 H. K. Stephenson 与 K. Cloninger, Jr., 所给出，Stress Analysis and Design of Steel Columns, Texas Eng. Expt. Sta. Bull., 129, February, 1953.
- 2) 几个这类的表为 S. Zavriev 所制，这见解是由他首创的。参阅 Mem. Inst. Engrs. Ways of Commun., St. Petersburg, 1913.
- 3) 例如参阅 Timoshenko 与 Young, Theory of Structures, pp. 398—403, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1945.

形相类似的方式,得到每一特定情形的最大应力¹⁾。

設 e_a 为数值上較大的偏心距,并运用記号 $\beta = e_b/e_a$ 。如是, β 自 1 变化至 -1; 当两偏心距相等且在同一方向时 $\beta = 1$; 当偏心距相等而在相反方向时, $\beta = -1$ 。

对于較短的杆,最大纖維应力将发生于偏心距較大的 A 端。这应力的数值,容易自压缩及弯曲联合作用的通常的公式計算而得。开始屈服时的平均压应力可由下列方程給出:

$$(\sigma_c)_{Y.P.} = \frac{\sigma_{Y.P.}}{1 + \frac{e_a}{s}} \quad (e)$$

对于細长的杆,最大应力发生在中間截面內,而开始屈服时的平均压应力可由下列方程²⁾得出:

$$(\sigma_c)_{Y.P.} = \frac{\sigma_{Y.P.}}{1 + \frac{e_a}{s} \psi \operatorname{cosec} 2u}, \quad (f)$$

其中

$$2u = kl = l \sqrt{\frac{P_{Y.P.}}{EI}}, \quad \psi = \sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos 2u + 1}.$$

在細长比 l/r 的某一极限值以下,方程(e)才能运用。对于每一特定情形,这极限值可由方程

$$\cos^{-1}\beta = \frac{l}{r} \sqrt{\frac{(\sigma_c)_{Y.P.}}{E}} \quad (g)$$

得出,此式是使(e)与(f)两式相等而来的。

由方程(e),(f)及(g)所算出的結果,由图 1.28 至 1.31 中的曲綫所表示。这些曲綫都是对 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\sigma_{Y.P.} = 2520$ 公斤/厘米²的結構鋼而繪的, $e_0/s = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$; 每图各对一不同的 β 而作。运用这些曲綫,容易得到开始屈服时的平均

1) 这问题由 D. H. Young 全面地讨论过, Stresses in Eccentrically Loaded Steel Columns, Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng., vol. 1, p. 507, 1932.

2) 参阅 *ibid.*

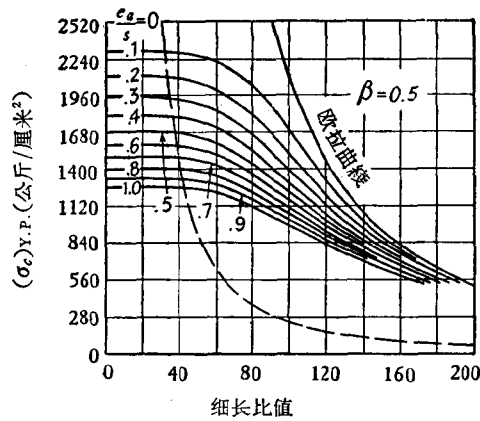


图 1.28

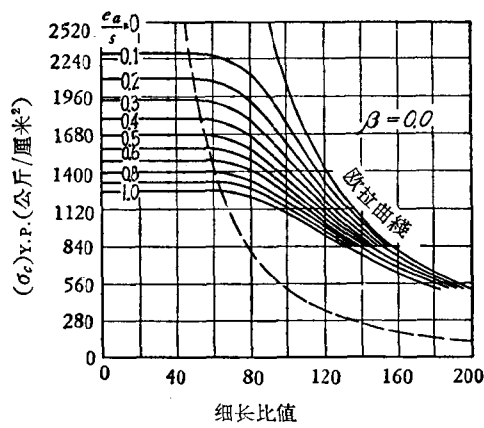
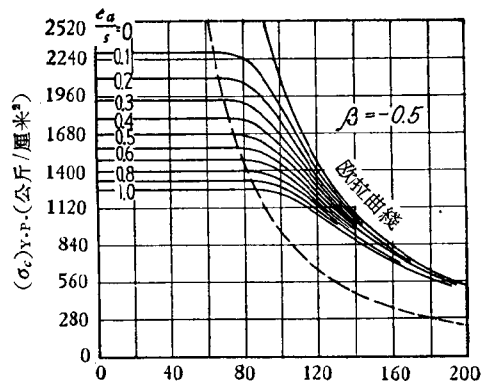


图 1.29

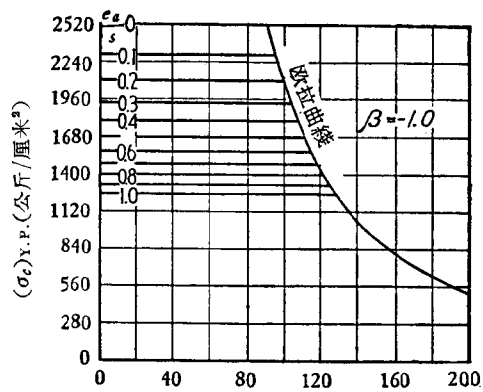
压应力 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 。图 1.28 至 1.30 中的虚线系由方程 (g) 得到, 它们是方程 (e) 及 (f) 的应用范围的分界线。

当偏心距 e_a 趋近于零时, 对于短柱平均应力 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 等于 $\sigma_{Y.P.}$ 。对于细长的柱 (l/r 较大), $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 的数值趋近于数值 P_{cr}/A , P_{cr} 为方程 (1.15) 所示的临界荷重。后一曲线标明为“欧拉曲线”, 因临界荷重也称为欧拉荷重。

同样地, 我们可以决定有初弯曲的压杆的安全荷重 例如, 柱



细长比值
图 1.30



细长比值
图 1.31

的初挠度为正弦曲线 $y_0 = a \sin \pi x/l$ (图 1.20)。若轴向压力 P 无偏心地作用于杆的两端，将 $x = l/2$ 代入方程 (1.60)，并用记号 $\alpha = P/P_{cr}$ ，得中点的挠度

$$\delta = \frac{a}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

而最大压应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{a}{s} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right), \quad (h)$$

式中 s 表示截面的核心半径。与以前一样，以 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 表示使最大纤维应力等于屈服点应力时的平均压应力，于是由方程 (h)，决定 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 的方程成为

$$\sigma_{Y.P.} = (\sigma_c)_{Y.P.} \left[1 + \frac{a}{s} \frac{1}{1 - \frac{(\sigma_c)_{Y.P.} l^2}{\pi^2 E r^2}} \right]. \quad (i)$$

这是 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 的二次方程，对于任何 a/s 及 l/r 的比值，都可以解这方程。

有了开始屈服时的平均压应力，对于有初弯曲的柱，将 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 除以任何所需的安全系数即得许可的平均压应力。图 1.32 的曲线¹⁾表明 $\sigma_{Y.P.} = 2520$ 公斤/厘米²， $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米² 的结构钢在开始屈服时的平均压应力； $a/s = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ 。运用这些曲线，对任何所需的安全系数，就可用试算法计算有给定初弯曲的柱的许可压荷重。应当注意，对于相应的 a/s 与 e/s 值，图 1.32 中的曲线与图 1.26 的曲线很相似。

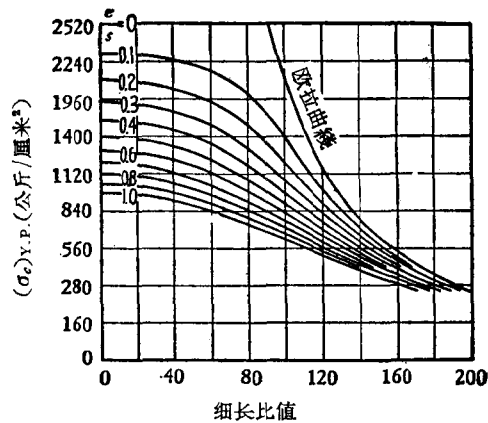


图 1.32

1) 这些曲线取自 D. H. Young, Rational Design of Steel Columns, Trans. ASCE, vol. 101, p. 422, 1936.

第二章 杆与框架的弹性屈曲

§ 2.1. 欧拉的柱公式

在前一章内,压杆的临界荷重值,是由研究压力与弯曲力共同作用或由假设了初弯曲而得到的.对于前一情形,临界荷重由这样的轴向力的值所决定,就是,即使横向荷重很小,这轴向力将引起很大的横向挠度[参阅方程(1.15)].同样地,对于具有很小的初弯曲的杆,当压力趋近于临界值时,挠度将无限地增大[参阅方程(1.60)].

压杆的临界荷重,亦可由研究**理想柱**的性状这另一途径而得到.理想柱系起初完全是直的而承受中心压力.我们首先来研究一细长的理想柱,其下端铅直地固定于基础,而顶端自由且承受一轴向力 P (图 2.1a)¹⁾.设这柱系完全弹性,且应力不超过比例极限.若荷重 P 小于它的临界值,这杆将保持直的而只承受轴向压缩.直的形式弹性平衡是**稳定的**,即如果有一横向力作用于杆使杆有一小的挠曲,而当这横向力除去后,挠度就消失,杆复又变成直的.逐渐地增加 P ,将会达到这样的状况,使得柱的直的平衡位置变为**不稳定**,即一很小的横向力就会产生挠曲,并且当横向力除去后这挠曲并不消失.于是,足使杆保持一微小的弯曲形状的轴向力定义为**临界荷重**(或欧拉荷重)(图 2.1b).

运用挠度曲线的微分方程(参阅 §1.2)可以计算出这荷重.取如图 2.1b 所示的坐标轴,并设柱有一微小的挠曲,任何横截面 mn

1) 这情形首先为 L. Euler 所解决,并发表于他的书“Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes” (Lausanne 及 Geneva, 1744) 的附录“De curvis elasticis”中.附录的英译文发表于 *Isis*, vol. 20, No. 58, p. 1, Nov., 1933 (重印于 Bruges, Belgium).更详细的历史性的讨论,参阅 Timoshenko, *History of Strength of Materials*, pp. 30—36, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.

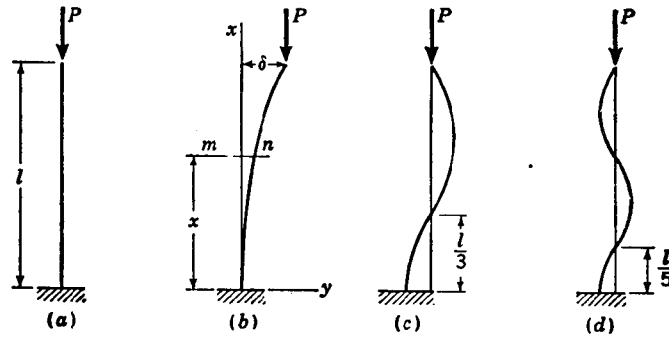


图 2.1

的弯矩为 $M = -P(\delta - y)$, 于是挠度曲线的微分方程(1.3)成为

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y). \quad (2.1)$$

因杆的顶端为自由端, 显然, 杆的屈曲将发生在弯曲刚度最小的平面内, 设这平面为一对称面. 在方程 (2.1) 内用了这最小的刚度 EI . 运用先前的记号

$$k^2 = \frac{P}{EI},$$

可将方程(2.1)写成

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \delta. \quad (a)$$

这方程的通解为

$$y = \delta + A \cos kx + B \sin kx, \quad (b)$$

式中的 A 与 B 为积分常数. 这两常数须以杆固定端的条件来决定, 即

$$(y)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

由此得

$$A = -\delta, \quad B = 0,$$

于是

$$y = \delta(1 - \cos kx). \quad (2.2)$$

杆頂端的条件要求

$$(y)_{x=l} = \delta,$$

由此

$$\delta \cos kl = 0. \quad (c)$$

方程(c)要求或者 $\delta = 0$ 或者 $\cos kl = 0$. 若 $\delta = 0$, 則杆无挠度, 因而并未屈曲(图 2.1a); 若 $\cos kl = 0$, 則必須有关系

$$kl = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (2.3)$$

式中 $n = 1, 2, 3, \dots$. 这方程决定了对可以存在的屈曲形式的 k 值. 挠度 δ 仍是未定的, 对于这理想的情形, 在小挠度理論范围内可以有任意值¹⁾.

取 $n = 1$ 得适合方程(2.3)的最小 kl 值, 相应的 P 值即为最小临界荷重, 且我們有

$$kl = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2},$$

由此得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \quad (2.4)$$

这是如图 2.1a 所示的杆的最小临界荷重, 即足以使杆保持微小弯曲的最小軸向力. 方程(2.2)中的量 kx 在这情况中在 0 至 $\pi/2$ 間变化, 所以挠度曲綫的形式如图 2.1b 所示.

将 $n = 2, 3, \dots$ 代入方程(2.3), 我們得到相应的压力值为

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4l^2}, \quad P_{cr} = \frac{25\pi^2 EI}{4l^2}, \dots$$

方程(2.2)中的量 kx , 各在 0 至 $3\pi/2$, 0 至 $5\pi/2$, \dots 間变化, 其相应的挠度曲綫如图 2.1c 及 2.1d 所示. 对于图 2.1c 所示的形状, 所須的荷重为临界荷重的 9 倍, 对于图 2.1d 所示者, 所須的荷重为临界荷重的 25 倍. 要产生这种情况, 可用一很細的杆, 并在反曲点处加以約束. 否則, 这种形式的屈曲是不稳定的, 并且无实际

1) 注意, 微分方程(2.1)是以曲率的近似表达式为基础的, 只对于小挠度适用.

意义,因为当荷重达到方程(2.4)所给的数值时,结构就已产生大挠曲。

在柱的其他端点状况下的临界荷重,可由前例的解法而得到。例如,对于一两端铰接的杆(图 2.2),由对称性显见,杆的每一半均与图 2.1 的杆的情况相同。所以,用 $l/2$ 代替方程(2.4)中的 l ,就可得到对于这情形的临界荷重:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (2.5)$$

与其他的端点条件相比,在实际中往往更多地设杆的两端为铰接;因而它被称稜柱杆屈曲的基本情形。

对于两端固定的杆(图 2.3),将有反作用弯矩以阻止杆两端在屈曲时转动。轴向压力与端弯矩的组合等效于图中偏心压力 P 。 P 的作用线 与挠度曲线的交点为曲线的反曲点,因为在这些点处弯矩等于零。这些点以及跨度的中点将杆等分为四等部分,而每一部分与图 2.1 所示的杆的情况相同。因此,在方程(2.4)中以 $l/4$ 代替 l ,即得两端固定的杆的临界荷重:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \quad (2.6)$$

作为最后一例,研究图 2.4a 所示的柱。这杆的顶端在横向可以自由地移动,但弹性线在该点的切线保持铅直;杆的下端固定。

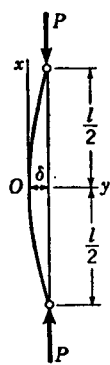


图 2.2

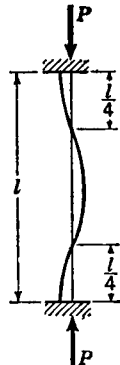


图 2.3

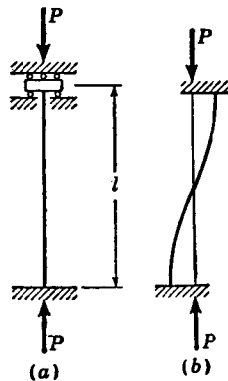


图 2.4

因在杆中点有一反曲点(图 2.4b),以 $l/2$ 代替方程(2.4)中的 l , 即得临界荷重。由此可见方程(2.5)对这情形亦适用。

在前述这几种情况中,均设杆在任何方向可以自由地屈曲,故 EI 表示最小的弯曲刚度。若柱受到约束,而只能在一个主平面内发生屈曲,则 EI 表示在该平面内的弯曲刚度。

在前述讨论中,我们曾假设杆很细长,所以屈曲时最大压应力是在比例极限以内。只有符合这些条件,前述临界荷重的方程才适用。为了建立临界荷重公式的应用的限制,让我们来研究基本情形(图 2.2)。以杆的横截面积 A 除方程(2.5)所给出的临界荷重,并令

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}},$$

式中的 r 为迴转半径。压应力的临界值为

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}, \quad (2.7)$$

这应力是只与材料的弹性模量 E 及细长比 l/r 有关。只要应力 σ_{cr} 是在比例极限以内,此表达式即成立。已知比例极限及材料的弹性系数 E , 对于每一种特定材料,可以从方程(2.7)很容易地得到细长比的极限值。例如,比例极限为 2100 公斤/厘米², $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米² 的结构钢,我们由方程(2.7)得到最小的 $l/r \approx 100$ 。因此,对于这材料的两端铰接的杆,若 $l/r > 100$, 则它的临界荷重可由方程(2.5)计算;当 $l/r < 100$, 在屈曲发生之前,压应力已到达了比例极限,所以方程(2.5)是不再能应用。应力超过比例极限的压杆的屈曲问题,将在下一章讨论。

以临界应力作为 l/r 的函数,方程(2.7)可由图 2.5 的曲线 ACB 来表示。横坐标轴 l/r 为曲线的渐近线,即杆细长比增大时,临界应力将趋近于零。纵坐标轴也是这曲线的渐近线,但只当应力 σ_{cr} 是在材料的比例极限以内时,这部分曲线才有用。图 2.5 中的曲线系对上述结构钢所绘,点 C 相应于比例极限 2100 公斤/

厘米²;于是只是曲线的BC部分是可用的。

对于图 2.1a 及 2.3 所示情形,如同对铰接杆一样计算,我们得到临界应力的表达式:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E \left(\frac{r}{2l} \right)^2; \quad \sigma_{cr} = \pi^2 E \left(\frac{r}{\frac{1}{2}l} \right)^2.$$

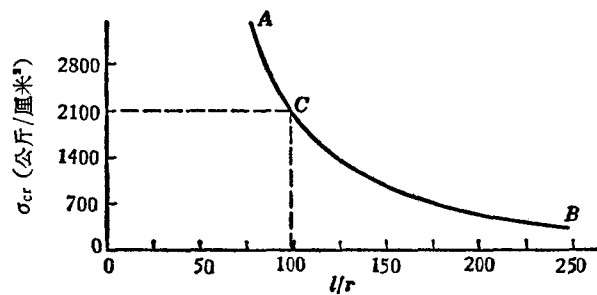


图 2.5

由此可见,在这两种情形中,我们可以用与基本情况的方程(2.7)相似的方程来计算临界应力。以杆的折合长度 L 代替方程(2.7)中的实际长度 l ,即得这些方程。于是,一般地可写为

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E \left(\frac{L}{r} \right)^{-2}. \quad (2.8)$$

对于一端固定而另一端自由的稜柱杆,则折合长度为原长的两倍,即 $L = 2l$ 。对于两端固定的稜柱杆,折合长度为原长的一半,即 $L = l/2$ 。如是,以折合长度代替杆的原长,就基本情形所得的结果可用于其他情形的杆的屈曲。

§ 2.2. 由另一形式的微分方程决定临界荷重

在前一节中曾指明,对于理想柱的临界荷重,可由用弯矩表达杆的曲率的微分方程(1.3)着手而获得。另一方法是以方程(1.5)作为出发点。因在决定屈曲杆的临界荷重时横向荷重为零,故柱的微分方程为

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

或代入 $k^2 = P/EI$,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (2.9)$$

这方程的通解为

$$y = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D, \quad (2.10)$$

这方程中的常数及临界荷重的值,可由杆的端点条件而得到。现在研究几个特殊情形。

两端铰接的柱 对于两端铰接的杆(图 2.6a),在端点的挠度与弯矩为零,于是得到条件

$$y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{当 } x = 0 \text{ 和 } x = l,$$

将这些条件用于通解[方程(2.10)],得

$$B = C = D = 0, \quad \sin kl = 0$$

因而

$$kl = n\pi. \quad (a)$$

这方程决定了临界荷重的值;当 $n = 1$, 即得以前方程(2.5)的结果。挠度曲线的形状由方程

$$y = A \sin kx = A \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (b)$$

给出。式中的 A 表示挠度的未定幅度。对于最小的临界荷重 ($n = 1$), 屈曲形状如图 2.6a 所示。对于 $n = 2, 3, \dots$, 可由方程(a) 得较高的临界荷重值, 而相应的屈曲形状如图 2.6b 与 c 所示。

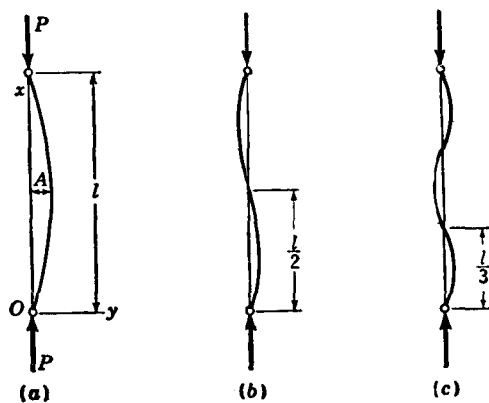


图 2.6

一端固定一端自由的柱 图 2.1a 中所示的杆,其下端固定而顶端自由。下端的条件为

$$y = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{当 } x = 0.$$

在自由端($x = l$), 弯矩与剪力必须为零. 按照 §1.2 中的方程(1.3)与(1.4), 这些条件即指

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{当 } x = l;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + k^2 \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{当 } x = l.$$

由杆下端的条件得

$$B = -D, \quad C = -Ak;$$

最后两条条件给出

$$A \sin kl + B \cos kl = 0, \quad C = 0.$$

因此最后归结为 $C = A = 0$ 以及

$$\cos kl = 0, \quad kl = \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

这与前一节的方程(2.3)相同.

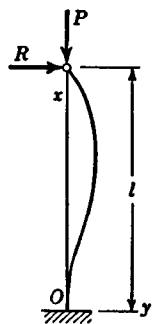


图 2.7

一端固定一端铰接的柱 在图 2.7 中表示了这情形, 杆的下端为固定而顶端为铰接. 当横向屈曲发生时, 在铰接端将形成反力 R . 注意到这反力必须抵抗固定端的弯矩, 就可决定这反力的方向. 这柱的端点条件为

$$y = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{当 } x = 0;$$

$$y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{当 } x = l.$$

程:

将这些条件用于通解(2.10), 得以下关于常数的方程:

$$B + D = 0,$$

$$Ak + C = 0,$$

$$Cl + D = 0,$$

$$A \sin kl + B \cos kl = 0.$$

取 $A = B = C = D = 0$, 可满足这四个方程. 在这情况下, 挠度[参阅方程(2.10)]为零, 而杆的平衡形式系平直. 要使屈曲的平衡形式成为可能, 对于这些方程我们需要非平凡解. 由前三式以 B 解出 A , 并代入最后一式, 得

$$-B \frac{\sin kl}{kl} + B \cos kl = 0,$$

因此

$$\tan kl = kl. \quad (2.11)$$

于是得满足杆端点条件的弯曲的平衡形式, 必须满足超越方程(2.11).

为解方程(2.11), 可用图解法¹⁾. 图 2.8 中的曲线表示 $\tan kl$ 为 kl 的函数. 这些曲线的渐近线为 $kl = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ 等铅直线, 因对于这些 kl 值 $\tan kl$ 为无限大. 以上这些曲线与直线 $y = kl$ 的诸交点, 即表示方程(2.11) 的诸根. 相应于点 A 的最小根为

$$kl = 4.493,$$

而相应的临界荷重为

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699l)^2}. \quad (2.12)$$

于是, 临界荷重与一两端铰接而折合长度为 $0.699l$ 的杆的相同[参阅方程(2.8)].

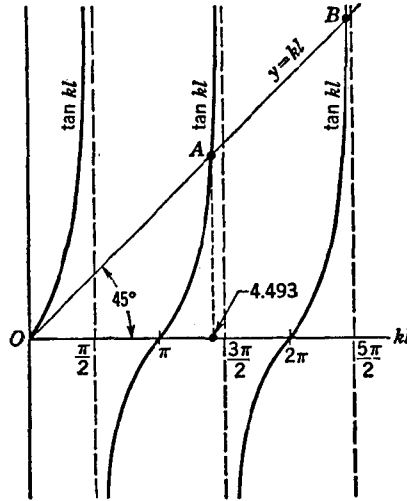


图 2.8

固定端柱 若杆的两端固定(图 2.9a), 则端点条件为

$$y = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{当 } x = 0 \text{ 及 } x = l.$$

这些条件给出了下列决定方程(2.10)中常数的方程:

1) 方程(2.11)的解亦曾由 Jahnke 与 Emde 列成了表, Tables of Functions, 4th ed., 补篇第 30 页, Dover Publication, New York, 1945.

$$\begin{aligned}
 B + D &= 0, \\
 Ak + C &= 0, \\
 A \sin kl + B \cos kl + Cl + D &= 0, \\
 Ak \cos kl - Bk \sin kl + C &= 0.
 \end{aligned} \tag{c}$$

要使弯曲的平衡形式成为可能,即要得到这四个方程的非平凡解,只有使系数行列式等于零. 这行列式为

$$\begin{vmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 k & 0 & 1 & 0 \\
 \sin kl & \cos kl & l & 1 \\
 k \cos kl & -k \sin kl & 1 & 0
 \end{vmatrix} = 0$$

使这行列式等于零,得

$$2(\cos kl - 1) + kl \sin kl = 0.$$

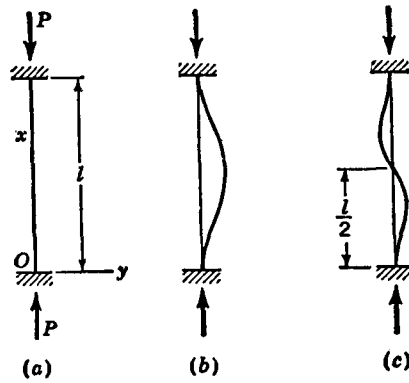


图 2.9

注意及 $\sin kl = 2 \sin kl/2 \cos kl/2$, 并且 $\cos kl = 1 - 2 \sin^2(kl/2)$, 可将这方程写成

$$\sin \frac{kl}{2} \left[\frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right] = 0. \tag{d}$$

这方程的一个解为

$$\sin \frac{kl}{2} = 0,$$

因此

$$\begin{aligned}
 kl &= 2n\pi, \\
 P_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2 EI}{l^2}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

注意到当 $\sin kl/2 = 0$ 时 $\sin kl = 0$ 及 $\cos kl/2 = 0$, 由方程(c)得以下诸常数

$$A = C = 0, \quad B = -D;$$

于是挠度曲线的方程为

$$y = B \left(\cos \frac{2n\pi x}{l} - 1 \right). \quad (2.14)$$

若 $n = 1$, 得最低临界荷重值[参阅方程(2.6)], 而柱形成对称屈曲形状, 如图 2.9b 所示.

令方程(d)的括号内的项等于零, 得第二个解, 即

$$\tan \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2}.$$

这方程的最小根为 $kl/2 = 4.493$, 于是

$$P_{cr} = \frac{8.18\pi^2 EI}{l^2}, \quad (2.15)$$

这相应于图 2.9c 所示的反对称屈曲形式. 但由于这临界值比对称屈曲的值大, 故只当在柱的中点有横向支座时才有实际意义.

荷重通过一定点的柱 在前面的诸例中, 设杆屈曲时压力 P 的方向保持不变. 现研究力 P 的方向改变的情形. 例如, 设力 P 系由绳索的张力所产生, 而这绳索总通过在 x 轴上的定点 C , 如图 2.10 所示. 柱的下端固定, 而顶端可以在横向自由地移动.

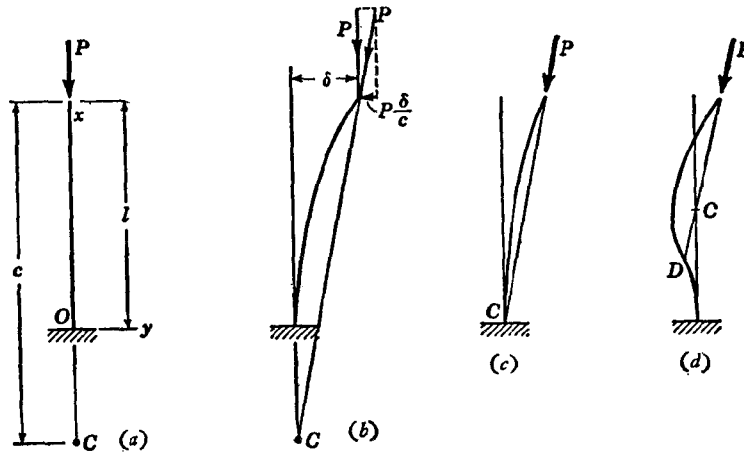


图 2.10

这问题与通常的欧拉情形(参阅图 2.1) 不同,因在屈曲时在杆顶端有一剪力。这力等于绳内的张力 P 的水平分量(图 2.10b); 而因对于小挠度这力的铅直分量可取作等于 P , 故得

$$V = -\frac{P\delta}{c}.$$

将 V 的表达式代入剪力的一般方程 [方程 (1.4)], 得杆顶端 ($x = l$) 的条件为

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} + P \frac{dy}{dx} = \frac{P\delta}{c},$$

或

$$\frac{d^3y}{dx^3} + k^2 \frac{dy}{dx} = \frac{k^2\delta}{c};$$

杆顶端的第二个条件为弯矩等于零, 或即

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{当 } x = l.$$

在杆的下端, 条件为

$$y = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{当 } x = 0.$$

要计算通解(2.10)中的常数, 由下端的条件得

$$B + D = 0, \quad Ak + C = 0;$$

而由顶端的条件得

$$C = \frac{\delta}{c}, \quad A \sin kl + B \cos kl = 0.$$

由这些方程解出常数, 并代入方程(2.10)得

$$y = \frac{\delta}{kc} [\tan kl (\cos kx - 1) + kx - \sin kx]. \quad (e)$$

作为最后一条件, 杆顶端的挠度为 δ , 于是由方程(e)得

$$\tan kl = kl \left(1 - \frac{c}{l}\right). \quad (2.16)$$

方程 (2.16) 给出了对于任何比值 c/l 的临界荷重值。运用函数 $\tan x/x$ 的表¹⁾, 将便于解这方程。对于各种不同的 c/l 值, 表 2.1 给出了由方程(2.16)所决定的 kl 与 P_{cr} 值。

若 c 大于 l , 如图 2.10b 所设, 则方程(2.16)的右边为负, 而满足这方程

1) 参阅 *ibid.*, 补篇第 32 页。

表 2.1 荷量通过一定点的柱的临界荷重 [根据方程(2.16)]

$\frac{c}{l}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5
kl	4.493	4.438	4.346	4.173	3.790	π	2.654	2.289
$\frac{P_{cr}}{\pi^2 EI / l^2}$	2.05	2.00	1.91	1.76	1.46	1	0.714	0.531
$\frac{c}{l}$	2.0	3.0	4.0	5.0	8.0	10	20	∞
kl	2.029	1.837	1.758	1.716	1.657	1.638	1.602	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{P_{cr}}{\pi^2 EI / l^2}$	0.417	0.342	0.313	0.298	0.278	0.272	0.260	0.25

表 2.2 球形端柱的临界荷重 [根据方程(2.17)]

$\frac{l}{2R}$	0	1	2	4	6	8	10	15	20	30	40	50	∞
kl	π	2.798	2.459	2.043	1.874	1.791	1.743	1.682	1.653	1.625	1.611	1.603	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{P_{cr}}{\pi^2 EI / l^2}$	4	3.17	2.45	1.69	1.42	1.30	1.23	1.15	1.11	1.07	1.05	1.04	1

的最小 kl 值¹⁾ 系在 $\pi/2$ 与 π 之间 (参阅图 2.8)。这意味着临界荷重大于先前对于图 2.1 情形所得的 $\pi^2 EI/4l^2$ 。这是由于横向力 $P\delta/c$ 抵抗横向屈曲的倾向,因而需要较大的临界荷重。若 c 增大,则 kl 的值趋近于 $\pi/2$; 而当 c 最后成为无限地大时,得

$$kl = \frac{\pi}{2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

这与以前荷重永远保持铅直时的结果(图 2.1) 相同。

当 $c = l$, 即固定点 C 与杆的下端重合(图 2.10c) 时, 方程(2.16) 的右边为零, 于是得到

$$kl = \pi, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

这与屈曲的基本情形相同。这是由于当 P 的作用线通过柱的底部时, 该点的弯矩为零, 故该杆与两端铰接杆的情形相同。

若距离 c 小于 l , 方程(2.16) 的右边为正, 而满足这方程的 kl 的最小值系在 π 与 $3\pi/2$ 之间。于是挠度曲线有一反曲点 D , 如图 2.10d 所示。最后, 当 $c = 0$, 方程(2.16) 与方程(2.11) 相同, 于是情形与上端铰接下端固定的杆(图 2.7) 相同。

球形端杆 当一球形端杆横向屈曲时(图 2.11), 压力 P 的作用线将有一位移 b 。因杆端的转角 θ 很小, 位移(参阅图 2.11b) 将为

$$b = R\theta, \tag{f}$$

其中 R 为杆端半球形的半径。

设屈曲的形式为对称(图 2.11c), 并取杆的中点为坐标原点, 即可得结论: 通解(2.10) 中的常数 A 与 C 必等于零。这可由对称条件看出, 它要求方程(2.10) 的项给出对杆中点对称的挠度曲线²⁾。由 $x = 0$ 时 $y = 0$ 这条件, 得 $B = -D$, 因而挠度曲线方程成为

$$y = D(1 - \cos kx). \tag{g}$$

柱的任一截面的弯矩为

$$M = -P(\delta - b - y), \tag{h}$$

而在 B 端的弯矩为

$$(M)_{x=l/2} = Pb = PR\theta = PR \frac{dy}{dx}.$$

1) 象通常那样, 已将平凡解 $kl = 0$ 除外。

2) 可用以下的端点条件得到相同的结果: $dy/dx = 0$, 当 $x = 0$; $y = \delta$, 当 $x = l/2$ 及 $x = -l/2$ 。

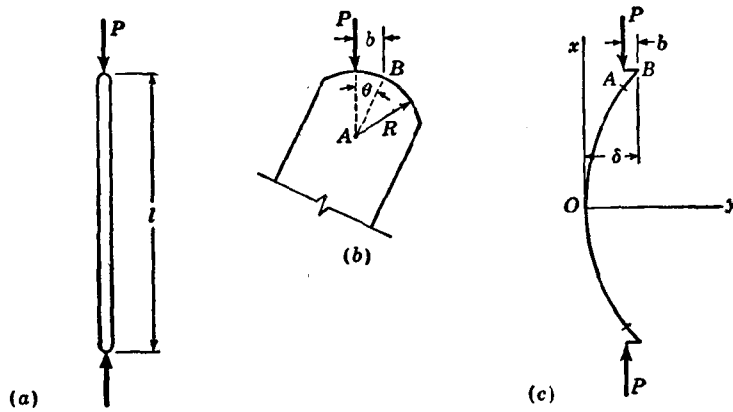


图 2.11

于是在杆的顶端有下述条件:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -PR \frac{dy}{dx}, \quad \text{当 } x = \frac{l}{2}.$$

将这条件用于方程(g)得

$$1 + kR \tan \frac{kl}{2} = 0,$$

或

$$\frac{kl}{2} \tan \frac{kl}{2} = -\frac{l}{2R}. \quad (2.17)$$

方程(2.17)可用以决定对称屈曲的临界荷重。若 R 等于零, 我们得

$$\frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (2.18)$$

这与通常两端铰接杆的结果相同。当 R 无限地增大时, 就逼近于平端杆的状况, 于是方程(2.17)给出

$$\frac{kl}{2} = \pi, \quad P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2},$$

这就是固定端柱的临界荷重。表 2.2 给出了 $kl/2$ 值, 以及对于不同的比值 $l/2R$ 由方程(2.17)¹⁾ 所得的 P_{cr} 。

§ 2.3. 用梁-柱理论计算临界荷重

在很多情况下可用于对于梁-柱已得的结果来计算临界荷重值,

1) 运用 $x \tan x$ 的函数表, 可以很容易地解方程(2.17); 参阅 *ibid.*, 补篇第 32 页。

以代替前两节用解挠度曲线的微分方程来解。在第一章曾指明，在某些压力值 P 时，梁-柱的挠度与弯矩将无限地增大。这些压力值显然即为临界值。

作为一例，研究梁-柱 AB ，其一端铰接另一端固定，如图 1.10 所示。若此梁承受均布横向荷重 q ，在固定端的弯矩 [参阅 (1.37)] 为

$$M_b = -\frac{ql^2}{8} \frac{\chi(u)}{\psi(u)} = -\frac{ql^2}{8} \frac{4 \tan 2u (\tan u - u)}{u (\tan 2u - 2u)}. \quad (a)$$

若分子不趋近于零，则当此表达式的分母趋近于零时，弯矩将无限地增大。这条件给出

$$\tan 2u = 2u,$$

或代入 $kl = 2u$ [参阅方程 (1.13)]，

$$\tan kl = kl.$$

这结果与以前由微分方程的积分所得的结果相同 [参阅方程 (2.11)]。于是，不论横向荷重的大小如何，使固定端的弯矩变为无限大的压力即为压力的临界值。

同样的方法，亦可用以决定弹性固定端杆 (图 1.13) 的临界荷重。当这杆承受了横向荷重，端点的弯矩可由方程 (1.43) 得到，即

$$-\frac{M_a}{\alpha} = \theta_{0a} + \frac{M_a l}{3EI} \psi(u) + \frac{M_b l}{6EI} \phi(u), \quad (2.19)$$

$$-\frac{M_b}{\beta} = \theta_{0b} + \frac{M_b l}{3EI} \psi(u) + \frac{M_a l}{6EI} \phi(u). \quad (2.20)$$

在这两方程中 α 与 β 为端点约束系数 [参阅方程 (1.41)]， θ_{0a} 与 θ_{0b} 为只有横向荷重时所产生的转角，而函数 $\phi(u)$ 与 $\psi(u)$ 由方程 (1.27) 与 (1.28) 给出。弯矩 M_a 与 M_b 为作用于杆 AB 的端弯矩 (图 1.13)，且如图所示的为正。由方程 (2.19) 与 (2.20) 解出 M_a 得

$$M_a = \frac{-\theta_{0a} \left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{3EI} \psi(u) \right] + \theta_{0b} \left[\frac{1}{6EI} \phi(u) \right]}{\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3EI} \psi(u) \right] \left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{3EI} \psi(u) \right] - \left[\frac{1}{6EI} \phi(u) \right]^2}; \quad (b)$$

同样可得 M_b 的解，并且其分母与上式的相同。因此，当方程 (b)

的分母趋近于零时, 弯矩 M_a 与 M_b 将变为无限大. 于是, 决定临界荷重的方程为:

$$\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3EI} \psi(u) \right] \left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{3EI} \psi(u) \right] - \left[\frac{1}{6EI} \phi(u) \right]^2 = 0. \quad (2.21)$$

对于特定的 α 与 β 值, 可由这方程解出 u , 并从而决定临界荷重. 这计算方法可用于分析刚架和连续梁, 正如以下几节将讨论的.

对于对称这特殊情形(图 2.12), 得

$$\alpha = \beta, \quad \theta_{0a} = \theta_{0b}, \quad M_a = M_b, \quad (c)$$

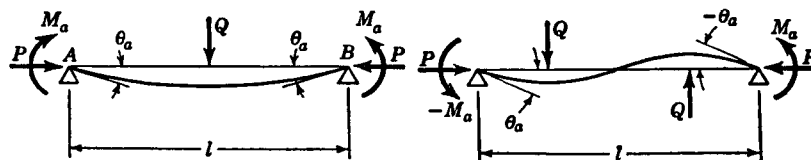


图 2.12

图 2.13

并且方程(2.19)与(2.20)被一个方程所代替, 即

$$-\frac{M_a}{\alpha} = \theta_{0a} + \frac{M_a l}{3EI} \psi(u) + \frac{M_a l}{6EI} \phi(u). \quad (2.22)$$

由这方程解出 M_a , 并令所得的分子为零, 即得临界荷重的方程:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3EI} \psi(u) + \frac{1}{6EI} \phi(u) = 0.$$

将方程(1.27)与(1.28)代入 $\psi(u)$ 与 $\phi(u)$ 的表达式, 并注意到 $\tan u = (1 - \cos 2u) / \sin 2u$, 可将这方程写作

$$\frac{\tan u}{u} = -\frac{2EI}{\alpha l}. \quad (2.23)$$

由这方程所得的 u 系在 $\pi/2$ 与 π 这两界限之内, 值 $\pi/2$ 相应于 $\alpha = 0$, 这意味着杆的两端可自由转动, 而临界荷重由对于基本情形的方程(2.5)给出. 当杆的两端为刚性固定时, 系数 α 为无限大, u 值等于 π , 而临界荷重为 $4\pi^2 EI / l^2$. 对于介乎其间的 α 值,

运用函数 $\tan x/x$ 的表¹⁾容易解出方程(2.23).

若作用于对称支承的杆的荷重是反对称的(图 2.13), 我們得

$$\alpha = \beta, \quad \theta_{0a} = -\theta_{0b}, \quad M_a = -M_b, \quad (d)$$

而临界荷重由方程

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3EI} \psi(u) - \frac{l}{6EI} \phi(u) = 0$$

或

$$\frac{3}{u} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\tan u} \right) = -\frac{6EI}{\alpha l} \quad (2.24)$$

来决定. 由这方程所得的临界荷重值相应于反对称的屈曲形式. 对于任何 α 值, 运用附录中的表 A-1 容易解这方程, 因为左边的表达式为函数 ψ , 只是以 u 代替了 $2u$. 作为一极端情形, 对于铰接端, $\alpha = 0$; 因而 $u = \pi$, $P_{cr} = 4\pi^2 EI/l^2$. 这相应于图 2.6b 所示的反对称屈曲形式. 对于固定端, α 为无限大, $u = 4.493$, 而临界荷重由方程(2.15)给出.

§ 2.4. 框架的屈曲²⁾

因刚结点框架的每一杆的端点条件系弹性约束, 故前节所述

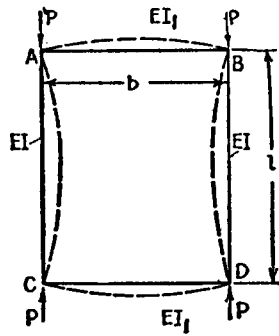


图 2.14

的方法可用以研究框架的屈曲. 作为一个简单的例子, 研究对水平及铅直轴均对称的框架 $ABCD$ (图 2.14). 框架的铅直杆为轴向力 P 所压缩, 并设结点的横向位移为外界约束所阻止. 当荷重 P 达到其临界值时, 铅直杆将屈曲, 如虚线所示. 随同这屈曲, 两水平杆 AB 与 CD 将弯曲. 它们在铅直杆的端点作用有反弯矩以阻碍屈曲. 端点的弯矩与结点的转角成正比, 因

1) *Ibid.*

2) 矩形框架的杆的稳定性问题的讨论, 首先由 F. Engesser 给出, *Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbauwerke*, Berlin, 1893. 并参阅 H. Zimmermann, *Knickfestigkeit der Stabverbindungen*, Berlin, 1925.

而鉛直杆系弹性固定端杆。

計算水平杆在两端作用力偶时的弯曲，可得鉛直杆两端的約束系数。以 EI_1 表示水平杆的弯曲刚度，則系数 α 的表达式为

$$\alpha = \frac{2EI_1}{b} \quad (a)$$

因鉛直杆屈曲成对称形式，可由前一节的方程 (2.23) 得到临界荷重。若以 EI 表示鉛直杆的弯曲刚度，这方程成为

$$\frac{\tan u}{u} = -\frac{Ib}{I_1 l} \quad (b)$$

于是对于任一特殊情形，可由这方程解临界荷重。

若图 2.14 中这框架系由四个相同的杆所組成，方程(b)成为

$$\frac{\tan u}{u} = -1,$$

而这方程的最小根为

$$u = \frac{\pi}{2} = 2.029,$$

因此

$$P_{cr} = \frac{16.47EI}{l^2}.$$

若水平杆为绝对刚性，則方程(b)的右边等于零，因此 $\tan u = 0$ ， $u = \pi$ ，而

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2},$$

这即为固定端杆的情形。最后，若 $I_1 = 0$ 則得 $u = \pi/2$ ，而

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

这为杆两端铰接的情形。

若框架的水平杆承受压力 Q 的作用，如图 2.15 所示，則端点約束系数 α 将减小。代替方程 (a)，必須用表达式

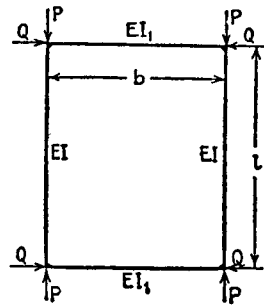


图 2.15

$$\alpha = \frac{2EI_1}{b} \frac{u_1}{\tan u_1}, \quad (c)$$

这系得自方程(1.34)。水平杆的 u_1 值为

$$u_1 = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{Q}{EI_1}}$$

在计算压力 P 的临界值时, 仍用前一节的方程(2.23), 得

$$\frac{\tan u}{u} = - \frac{Ib}{I_1 l} \frac{\tan u_1}{u_1}. \quad (2.25)$$

当这方程右边的量为已知时, 设水平杆并不首先屈曲可得到临界力 P 。

若要决定力 Q 的临界值(图 2.15), 由以上的步骤得方程

$$\frac{\tan u_1}{u_1} = - \frac{I_1 l}{Ib} \frac{\tan u}{u},$$

这与方程(2.25)相同。于是方程(2.25)决定了两轴向力 P 与 Q 的临界值。例如, 若框架为正方形且各杆的弯曲刚度相同, 方程(2.25)成为

$$\frac{\tan u}{u} = - \frac{\tan u_1}{u_1}. \quad (2.26)$$

在图 2.16 中绘出了这方程。若 P 与 Q 的值位于图中曲线上的点, 则会发生屈曲。可以看出, 当 Q 增加时 P 的临界值减小; 正如可以预料到的, 反之亦然。若 P 与 Q 的值所定出的点系在曲线之下, 则不会发生屈曲。因此, 在曲线之下的部分表示稳定区域。

图 2.14 中的框架也可能有其他形式的屈曲; 例如, 图 2.17 所示的屈曲形式, 各杆在其中点均有一反曲点。这情形相当于前一节的反对称屈曲形式, 其临界荷重可将

$$\alpha = \frac{6EI_1}{b} \quad (d)$$

代入方程(2.24)而得。式(d)表示端点约束系数。图 2.17 所示的屈曲形式的临界荷重, 比图 2.14 所示的对称形式的要大, 因而通常并不重要。

若图 2.14 中框架的两水平杆其弯曲刚度并不相同, 于是受压

鉛直杆的端点条件并不相同，而临界荷重将由前一节的方程(2.21)得到。

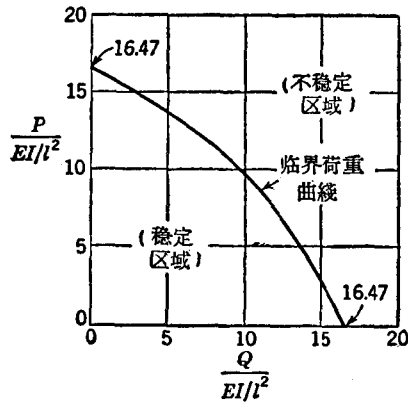


图 2.16

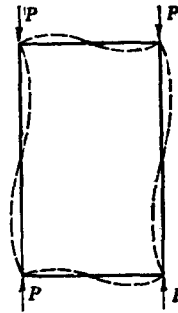


图 2.17

对于图 2.18a 所示的情形，鉛直杆的下端刚性固定于基础，而顶端为弹性支承。于是 $\beta = \infty$ ， α 为有限值¹⁾，而方程(2.21)成为

$$4 \left[\frac{3EI}{\alpha l} + \psi(u) \right] \psi(u) = [\phi(u)]^2. \quad (2.27)$$

对于每一特定情形，运用附录中函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$ 的表 A-1, 这方程可以很容易地以试算法来解。

对于图 2.18b 所示的情形， $\beta = 0$ ， α 为有限值。当方程(2.21)中的 β 趋近于零时，因子

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{l}{3EI} \psi(u) \quad (c)$$

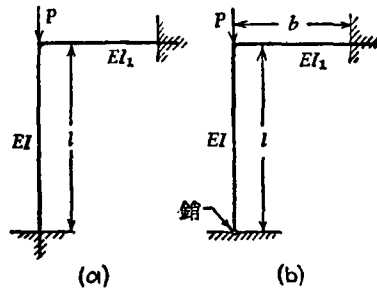


图 2.18

1) 要使这讨论精确，必须假定压力 P 之作用于鉛直杆是在两杆刚接之前，所以在屈曲之前横杆并不弯曲。在屈曲时，此两杆长度的微小改变亦被略去。

亦必趋近于零。使式(e)等于零,得用以计算临界荷重的方程,即

$$\phi(u) = -\frac{3EI}{\alpha l}. \quad (2.28)$$

以水平杆作为一端固定一端铰接的梁,并以 EI_1 记这杆的弯曲刚度,则在方程(2.28)中的 α 值等于 $4EI_1/b$, 而临界荷重的方程成为

$$\phi(u) = -\frac{3bI}{4I_1}. \quad (2.29)$$

若假设 $b=l, I=I_1$, 由方程(2.29)得

$$\phi(u) = -\frac{3}{4}, \quad 2u = kl = 3.83, \quad P_{cr} = \frac{14.7EI}{l^2}.$$

对于 $\alpha = \infty$ 这极限情形,方程(2.28)就与方程(2.11)相同,而得到图 2.7 所示的一端固定一端铰接柱的解。

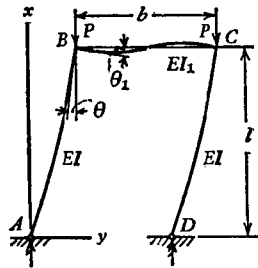


图 2.19

在前述讨论中,曾假设压杆的两端无横向位移。现在我们来研究图 2.19 所示的情形: 有两铅直压杆的框架, 其顶部可以自由地作横向移动。如果这框架有一铅直对称轴, 每一铅直杆可以分别作为一下端自由而上端为弹性固定的压杆。取坐标轴如图, 杆 AB 的挠度曲线

的微分方程为

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py.$$

这方程适合下端条件的解为

$$y = A \sin kx. \quad (f)$$

在顶端的角 θ 及 θ_1 必须相等; 因水平杆 BC 为两个等于 $P(y)_{x=l}$ 的力偶所弯曲, 在顶端的条件为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = P \frac{b}{6EI_1} (y)_{x=l},$$

或运用表达式(f),

$$k \cos kl = \frac{Pb \sin kl}{6EI_1}. \quad (g)$$

若水平杆是绝对刚硬的, 即 $EI_1 = \infty$, 我們得到

$$\cos kl = 0, \quad kl = \frac{\pi}{2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

在一般情况下, 方程(g)可由以下形式表示:

$$kl \tan kl = 6 \frac{I_1 l}{Ib}, \quad (h)$$

对于任何 $I_1 l / Ib$ 的比值, 可以很容易地得到荷重 P 的临界值. 若假设框架的三杆相同, 我們得到

$$kl \tan kl = 6,$$

由此

$$kl = 1.35, \quad P_{cr} = \frac{1.82 EI}{l^2}.$$

§ 2.5. 連續梁的屈曲

我們仍可用梁-柱公式来计算連續梁的临界压力. 前面, 我們推演了連續梁在纵向压力及横向荷重作用下弯曲的公式 (參閱 §1.10). 压力的临界值可这样地得到, 即压力达到这值时, 很小的横向荷重就会产生无限大的挠度. 正如在 §1.10 中那样, 设在連續梁每一跨度内的压力为常量, 但在不同跨度内可以各不相同.

考虑在几个支座上的杆的两相邻跨度 (图 1.14), 在三个相繼的支座上方的截面内, 三个弯矩之间的关系由方程(1.44)给出:

$$M_{n-1} \phi(u_{n-1}) + 2M_n \left[\psi(u_{n-1}) + \frac{l_n I_{n-1}}{l_{n-1} I_n} \psi(u_n) \right] + M_{n+1} \frac{l_n}{l_{n-1}} \frac{I_{n-1}}{I_n} \phi(u_n) = - \frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}} (\theta_{0n} + \theta'_{0n}). \quad (a)$$

若連續梁的两端为簡支, 这一类方程的个数, 与中間靜不定弯矩的数目相等. 若两端为固定, 則除方程(a)外, 須补充两个表达两端固定条件的方程. 这些方程中的系数含有函数 $\phi(u)$ 及 $\psi(u)$, 且与压力 P 的值有关. 由方程(a)所解得的弯矩变为无限大时, 压力达到临界值. 这要求方程(a)左边的行列式等于零. 这样, 就得到

了一个计算压力的临界值的方程¹⁾。

我们来研究一被三个支座所支承的、两端铰接且受压力 P 作用的杆(图 2.20)。在这种情形下,只有一个未知弯矩 M_2 , 方程(a)变为

$$2M_2 \left[\psi(u_1) + \frac{l_2 I_1}{l_1 I_2} \psi(u_2) \right] = -\frac{6EI_1}{l_1} (\theta_{02} + \theta'_{02}).$$

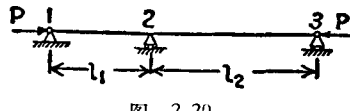


图 2.20

压力的临界值现在可得自 M_2 为无限大这条件。这意味着

$$\psi(u_1) + \frac{l_2 I_1}{l_1 I_2} \psi(u_2) = 0. \quad (b)$$

假定这杆的两跨度的横截面相同,于是得到

$$u_1 = \frac{k_1 l_1}{2} = \frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad u_2 = \frac{k_2 l_2}{2} = \frac{l_2}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}};$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

方程(b)可写作如下形式:

$$\frac{\psi(u_1)}{\psi\left(\frac{u_1 l_2}{l_1}\right)} = -\frac{l_2}{l_1}, \quad (c)$$

这方程可运用附录中表 A-1 的函数 $\psi(u)$ 的值来解。若 $l_2 = 2l_1$, 方程(c)成为

$$\frac{\psi(u_1)}{\psi(2u_1)} = -2,$$

从表 A-1 我们得到 $2u_1 = 1.93$, 由此

$$P_{cr} = \frac{(1.93)^2 EI}{l_1^2} = \frac{3.72 EI}{l_1^2} = \frac{14.9 EI}{l_2^2}.$$

1) 有这样的特殊情况: 诸支座上方的截面内的弯矩均等于零而发生屈曲。这发生于当所有跨度内的杆的大小及压力是这样的, 致使 $u_1 = u_2 = u_3 = \dots$ 。在这种情形下, 每一跨度的屈曲并不受相邻跨度的影响, 而计算每一跨度的压力的临界值, 与计算两端铰接杆的临界值相同。

可以看出，临界荷重是在以各跨度作为铰接杆所计算得的临界值之间，即在 $\pi^2 EI/l_1^2$ 与 $\pi^2 EI/l_2^2$ 之间。由于较长跨度的作用，较短跨度的稳定性减小了，而较长跨度的稳定性增加了。

当长度 l_2 趋近于 l_1 时， u_2 就趋近于 u_1 ，而方程 (c) 的根趋近于数值 $2u_1 = 2u_2 = \pi$ 。在这种情况下，中间支座上方截面内的弯矩等于零，而每一跨度可视为两端铰接的杆（参阅上一个注）。当 u_2 趋近于 u_1 时，方程 (c) 的下一个根为 $2u_1 = 2u_2 = 4.492$ ，于是

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{l_1^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l_1)^2}$$

屈曲杆的这两种形式如图 2.21 所示。只有相应于最小压力的第一种形式有实际意义。

作为第二个例，让我们研究一为四个支座所支承的杆（图 2.22），并假定 $l_1 = l_3$ ， $I_1 = I_3$ 。这连续梁的第一及第三跨度受轴向压力 P ，并可认为是一端为简支而另一端为弹性固定的杆。可以看出，屈曲了的杆的形式将近似地如图 2.22b 所示。于是由于

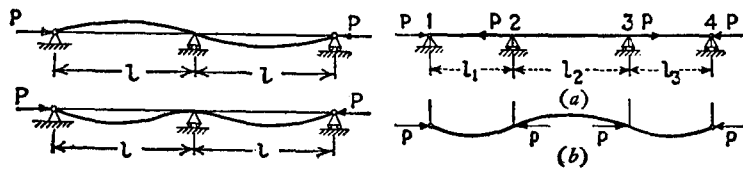


图 2.21

图 2.22

对称，在支座 2 与 3 上方横截面内的弯矩将相等。因第二跨度的压力等于零，我们得到

$$\phi(u_2) = \psi(u_2) = 1,$$

而由方程 (a)，

$$2\phi(u_1) + \frac{3l_2 I_1}{l_1 I_2} = 0. \quad (d)$$

这方程与前一节的方程 (2.28) 相同，如果我们以 $\alpha = 2EI_2/l_2$ 代入方程 (2.28)。

作为最后一例，让我们研究图 2.23 所示的情形。压杆 AB 在

点C刚结于柱,因此,杆的任何横向屈曲必将与柱的弯曲同时发生。

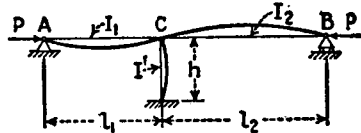


图 2.23

在解这问题时,必须运用

§1.10 的方程(1.48)与(1.49)。

若 M_c, M'_c 为支座 C 的左右两

边的两相邻截面内的弯矩,且

如果并无横向荷重,这两个方

程将成为

$$2M_c\psi(u_1) + 2M'_c \frac{l_2}{l_1} \frac{I_1}{I_2} \psi(u_2) = 0, \quad (e)$$

$$\frac{h}{3EI'} (M'_c - M_c) = \frac{M_c l_1}{3EI_1} \psi(u_1), \quad (f)$$

式中的 EI' 及 h 为柱的弯曲刚度和长度。压力 P 的临界值可由方

程(e)与(f)的行列式等于零来决定。于是我们得到

$$\psi(u_1) + \psi(u_2) \frac{l_2}{l_1} \frac{I_1}{I_2} \left[1 + \frac{l_1}{h} \frac{I'}{I_1} \psi(u_1) \right] = 0. \quad (g)$$

对于每一特殊情形,可运用表 A-1 解这方程。在 $l_1=l_2, I_1=I_2$ 的

特殊情况下,方程(g)成为

$$\psi(u_1) \left[2 + \frac{l_1}{h} \frac{I'}{I_1} \psi(u_1) \right] = 0,$$

由此

$$\psi(u_1) = 0 \quad \text{或} \quad \psi(u_1) = -\frac{2hI_1}{l_1I'}.$$

这两个解的第一个解所给出的临界荷重 P_{cr} , 与图 2.7 所示杆的相同。

这相应于对 C 对称的挠度曲线,而柱并不弯曲。给出较小临界

荷重的第二个解,相应于图 2.23 中的屈曲杆的非对称形式。只有

第二个解是有实际意义的。对于任何特定情形,这解可以很容易

地从表 A-1 得到。例如取 $2hI_1/l_1I' = 1$, 从表得到 $2u_1 = \kappa l_1 =$

3.73, 而 $P_{cr} = 13.9EI/l_1^2$ 。

§ 2.6. 弹性支座上的连续梁的屈曲

受压杆可能在中间几个点被几个不是完全刚性的支座所支承。例如,一

桁架的压杆可在一个或几个中间点处为这桁架的其他杆所在向支承¹⁾。解这样的问题的一般方法，要运用支座不在同一直线上的连续杆的方程(1.46)。作为一个例子，我们来研究一为三个支座所支持的杆，且中间支座是弹性的(图 2.24)。如果这杆在压力的作用下而屈曲，则中间的反力 R_2 将与挠度

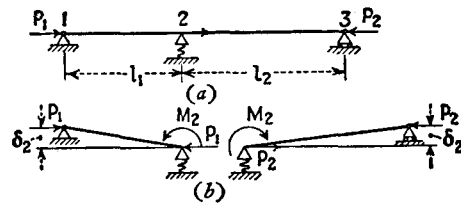


图 2.24

δ_2 成正比。令 α_2 为支座的弹簧常数，即使支座产生单位挠度所须的荷重，于是

$$R_2 = \alpha_2 \delta_2. \quad (a)$$

所有的支座的构造都可使支座上方的梁的截面能在梁弯曲时自由地转动。把两相邻跨度视作两个为力 P_1, P_2 及力偶 M_2 所作用的简支梁(图 2.24b)。由静力学，反作用力 R_2 为

$$R_2 = \frac{P_1 \delta_2}{l_1} + \frac{P_2 \delta_2}{l_2} - \frac{M_2}{l_1} - \frac{M_2}{l_2}. \quad (b)$$

由(a)与(b)，我们得到

$$\alpha_2 \delta_2 = \frac{P_1 \delta_2}{l_1} + \frac{P_2 \delta_2}{l_2} - \frac{M_2}{l_1} - \frac{M_2}{l_2}. \quad (c)$$

对于支座 2 的另一个方程由一般方程(1.46)得到。注意到对于支座 1, 3 的弯矩 M_1 及 M_3 为零，且中间支座的角 β_2 (参阅图 1.15)为

$$\beta_2 = \frac{\delta_2}{l_1} + \frac{\delta_2}{l_2},$$

1) 本节所讨论的这种性质的第一个问题是由 Jasinsky 所解的，他研究了桁架的斜压杆的横向屈曲。参阅“Scientific Papers of F. S. Jasinsky”, vol. 1, p. 145, St. Petersburg, 1902. Jasinsky 这极为重要的关于柱屈曲的论文，曾被译成法文，参阅 *Ann. ponts chaussées*, 1894. 并参阅 H. Zimmermann, Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung, W. Ernst und Sohn, Berlin, 1906, 以及他发表于 *Sitzb. Berlin Akad. Math. Physik. Kl.*, 1905, p. 898; 1907, pp. 235 及 236; 1909, pp. 180 及 348 的诸论文。

于是方程(1.46)成为

$$2M_2 \left[\phi(u_1) + \frac{l_2}{l_1} \frac{I_1}{I_2} \phi(u_2) \right] = \frac{6EI_1}{l_1} \left(\frac{\delta_2}{l_1} + \frac{\delta_2}{l_2} \right). \quad (d)$$

当方程(c)与(d)对于 M_2 及 δ_2 有非零解时, 杆的屈曲即为可能。所以 P_1 与 P_2 的临界值可由这两方程的行列式等于零而得到。如是,

$$2 \left[\alpha_2 - \frac{P_1}{l_1} - \frac{P_2}{l_2} \right] \left[\phi(u_1) + \frac{l_2}{l_1} \frac{I_1}{I_2} \phi(u_2) \right] = - \frac{6EI_1}{l_1} \frac{(l_1 + l_2)^2}{I_1^2 I_2}. \quad (e)$$

在这方程内, P_1 与 P_2 为未知。如果它们之间的比值为已知, 则它们的数值可由表 A-1 得到。在 $P_1 = P_2$, $I_1 = I_2$ 的特殊情况下, 方程(e)可运用式 $\phi(u)$ 得以简化[参阅方程(1.28)], 而最后可由以下形式来表示:

$$\begin{aligned} \sin 2u_1 \sin 2u_2 = \\ = 2(u_1 + u_2) \sin 2(u_1 + u_2) \left[\frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_2)^2} - \frac{P}{\alpha_2 (l_1 + l_2)} \right]. \end{aligned} \quad (f)$$

在有几个中间弹性支座的更一般的情况下, 对于每一个支座, 我们可以写出与(c), (d)相似的两个方程; 使这一方程组的行列式等于零, 即可决定诸压力的临界值。

若截面不变, 且所有跨度的压力均相等, 则运用方程(1.50)来计算压力的临界值较运用方程(1.46)更为相宜。让我们再来研究在三个支座上的梁(图2.24), 以说明这解法。对于这情形, 方程(1.50)成为

$$\begin{aligned} \frac{q(l_1 + l_2)^4}{16EIu^4} \left[\frac{\cos \left(1 - \frac{2l_1}{l_1 + l_2} \right) u}{\cos u} - 1 \right] - \frac{q(l_1 + l_2)^2}{8EIu^2} l_1 l_2 - \\ - \frac{\sin kl_1}{Pk \sin k(l_1 + l_2)} R_2 \sin kl_2 + \frac{l_1 l_2}{P(l_1 + l_2)} R_2 = \frac{R_2}{\alpha_2}. \end{aligned} \quad (g)$$

当压力使挠度(从而使反作用力 R_2) 开始无限地增大时, 这压力的数值即为临界值¹⁾。这要求式(g)中 R_2 的系数为零。于是, 在计算临界荷重时, 我们得到以下这方程:

$$- \frac{\sin kl_1 \sin kl_2}{Pk \sin k(l_1 + l_2)} + \frac{l_1 l_2}{P(l_1 + l_2)} - \frac{1}{\alpha_2} = 0. \quad (h)$$

因 $kl_1 = 2u_1$, $kl_2 = 2u_2$, 我们发现, 方程(h)与前面用另一方法所得的方程(f)相同。

我们首先以几个简单的例子来讨论方程(f)的解。若 $\alpha_2 = \infty$, 则方程

1) 若两跨度相等, 可能发生 $R_2 = 0$ 的屈曲。在这情况下, 每一跨度的屈曲情形与两端铰接的杆相同, 而并不需要研究这连续杆。

(c)[方程(f)是由(e)作为一特例而得出]与前一节对于在三个刚性支座上的杆所得的方程(b)相同。所以我们可以用由该节所得的解。

若 α_2 趋近于零,则在方程(f)右边括号内的第二项趋近于无限大,而当 $\sin 2(u_1 + u_2)$ 同时趋近于零时这方程才能满足。于是由方程

$$\sin 2(u_1 + u_2) = \sin k(l_1 + l_2) = 0$$

得到临界荷重为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l_1 + l_2)^2}.$$

这与两端铰接而长度为 $l_1 + l_2 = l$ 的杆的临界荷重相同。

若两个跨度相等,我们有 $u_1 = u_2$, $l_1 = l_2 = l/2$, 而方程(f)可写成较简单的形式:

$$\sin 2u_1 \left[-\sin 2u_1 + 8u_1 \cos 2u_1 \left(\frac{1}{4} - \frac{P}{\alpha_2 l} \right) \right] = 0. \quad (i)$$

假设中间支座绝对刚硬 ($\alpha_2 = \infty$), 就得到压力的临界值的上限。在这情况下, 屈曲杆的形状如图 2.25a 所示, 而从方程

$$2u_1 = \pi$$

得到压力的临界值为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_1^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \quad (j)$$

假设中间支座绝对柔软 ($\alpha_2 = 0$), 就得到临界荷重的下限。于是屈曲杆的挠度曲线的形式如图 2.25b 所示, 而我们得到

$$2u_1 = \frac{\pi}{2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (k)$$

对于刚度介于以上两者之间的弹性支座, 我们得到

$$\frac{\pi}{2} < 2u_1 \leq \pi. \quad (l)$$

使式(i)的左边等于零有两个可能, 或者是 $\sin 2u_1 = 0$, 这即为(j)所给的临界荷重; 或者是括号内的表达式为零。从不等式(l)可以得到结论: $\sin 2u_1$ 为正而 $\cos 2u_1$ 为负。所以, 如果

$$\frac{P}{\alpha_2 l} \geq \frac{1}{4},$$

则括号内的表达式可为零, 而相应的最小 P 值为

$$P = \frac{\alpha_2 l}{4}. \quad (m)$$

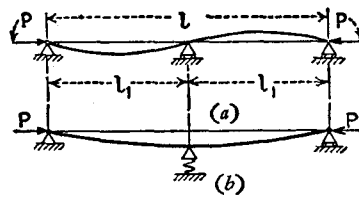


图 2.25

如果这数值比(j)的大,则 $\sin 2u_1 = 0$ 这条件决定了荷重的临界值,而屈曲杆的形状如图 2.25a 所示,发生这屈曲形状时的支座刚度的极限值,可以(i)的值代方程(m)中的 P 而得到。于是

$$\frac{4\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\alpha_2 l}{4},$$

由此

$$\alpha_2 = \frac{16\pi^2 EI}{l^3}. \quad (n)$$

对于较小的 α_2 值,则必须考虑中间支座的柔软性;而 P_{cr} 的值为当方程(i)的括号中的表达式为零时的 P 值。

在图 2.26 中所绘的曲线,表明临界荷重随中间支座的刚度的变化。在这曲线中,以比值 $P_{cr}:\pi^2 EI/l^2 = P_{cr}:P_e$ 作为纵坐标,以比值

$$\alpha_2 l: \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\alpha_2 l}{P_e}$$

为横坐标。这曲线与一直线只稍有出入,所以临界荷重近似地与支座刚度成比例地增加。

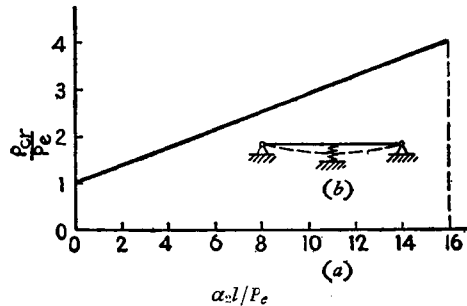


图 2.26

如果跨度并不相等,则必须从一般方程(f)来计算临界荷重。与以前一样, P_{cr} 的下限由方程(k)确定。要决定上限,我们假设 $\alpha_2 = \infty$ 。于是方程(f)的右边为零,当

$$2(u_1 + u_2) = 2\pi. \quad (o)$$

同时,因两角度 $2u_1$ 及 $2u_2$ 之中一个角度大于 π , 而另一个小于 π , 所以式(f)的左边为负。取 $2(u_1 + u_2)$ 为一略小于 2π 的值,我们可使方程(f)的两边相等(即可以得到 P 的上限)。这表明: 对于刚性支座,中间支座离开梁的中点向旁边的任何位移,都将减少临界荷重的值。

由 $\alpha_2 = \infty$ 及 $\alpha_2 = 0$ 得到了 P 的上限及下限以后,对介于两者之间的

任何 α_2 值的临界压力, 可由试算法解方程(f)而得到. 如果我们注意到, 当

$$\alpha_2 = \frac{P(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \quad (p)$$

时, 方程(f)的右边为零, 则解得以简化. 设 $l_1 > l_2$, 使方程左边为零的最小 P 值, 可由方程 $\sin 2u_1 = 0$ 得到, 于是 $2u_1 = \pi$ 及 $2(u_1 + u_2) = \pi l/l_1$. 如果取 α_2 小于 (p) 的, 则 $2(u_1 + u_2)$ 的值必小于以上所得的 $\pi l/l_1$, 同时必大于当 $\alpha_2 = 0$ 时的值 π . 因此, 方程(f)的根必在下列界限之间:

$$\pi < 2(u_1 + u_2) < \frac{\pi l}{l_1}. \quad (q)$$

若 α_2 大于 (p) 所给的值, 则 $2(u_1 + u_2)$ 将大于 $\pi l/l_1$, 并且正如以前所说明的, 同时必小于 2π . 所以方程(f)的根的界限为

$$\frac{\pi l}{l_1} < 2(u_1 + u_2) < 2\pi. \quad (r)$$

运用 (q) 及 (r), 对于任何特定的 α_2 值, 我们可用试算法解方程 (f).

作为弹性支座上杆稳定性的另一问题, 我们研究一等截面的连续梁. 梁的两端简支于刚性支座, 两端之间为几个等距离且刚度相等的弹性支座所支承. 有时候必须选择中间支座有这样的共同刚度, 使它们在杆屈曲时并无挠度, 因而相当于绝对的刚性支座¹⁾. 我们已讨论过一个中间支座的情形, 并得到方程(a)以决定当这支座表现为绝对刚性时的 α_2 的值.

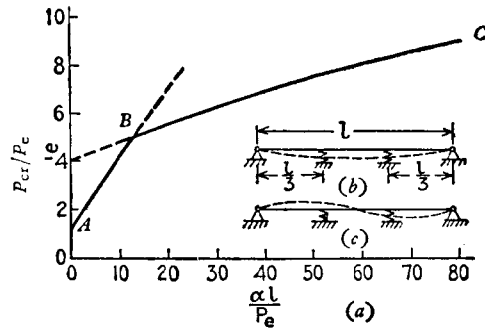


图 2.27

1) 这问题首先为 J. G. Boobnov 所讨论, Theory of Structure of Ships, vol. 1, p. 259, St. Petersburg, 1913. 并参阅 W. B. Klemperer 及 H. B. Gibbons 的论文, Z. angew. Math. u. Mech., vol. 13, p. 251, 1933; 及 M. A. Lazard, Ann. inst. tech. bâtiment et trav. publ., No. 88, September, 1949.

运用方程 (1.50), 可以很容易地解有任何个中间支座的一般情形的问题。设一连续梁具有两个中间支座, 它们的弹簧常数均为 α (图 2.27b)。对于三个长各为 $l/3$ 的相等跨度, 方程(1.50)成为

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sin \frac{2kl}{3}}{Pk \sin kl} R_3 \sin \frac{kl}{3} + \frac{2}{3P} R_3 \frac{l}{3} - \frac{\sin \frac{kl}{3}}{Pk \sin kl} R_2 \sin \frac{kl}{3} + \\
 & \quad + \frac{1}{3P} R_2 \frac{l}{3} = \frac{R_3}{\alpha}, \\
 & -\frac{\sin \frac{kl}{3}}{Pk \sin kl} R_2 \sin \frac{kl}{3} - \frac{\sin \frac{kl}{3}}{Pk \sin kl} R_2 \sin \frac{2kl}{3} + \\
 & \quad + \frac{1}{3P} \left(R_3 \frac{l}{3} + R_2 \frac{2l}{3} \right) = \frac{R_2}{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{s}$$

如果支座是绝对刚性的, 则各支座将为屈曲杆的反曲点, 而每一跨度将与长为 $l/3$ 而两端铰接的杆相同。于是压力的临界值得自方程

$$\frac{kl}{3} = \pi,$$

由上式,

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}.$$

现假设支座是弹性的, 并且它们的刚度趋近于支座仿佛表现为绝对刚性时的极限值。这时, 压力的临界值趋近于以上所得的关于绝对刚性支座时的值, 而我们可以假设

$$\frac{kl}{3} = \pi - \Delta, \tag{t}$$

其中 Δ 为小量。将式(t)代入方程(s)并略去小量, 我们最后得到

$$\begin{aligned}
 & \frac{l}{9P} R_2 + \left(\frac{2l}{9P} - \frac{1}{\alpha} \right) R_3 = 0, \\
 & \left(\frac{2l}{9P} - \frac{1}{\alpha} \right) R_2 + \frac{l}{9P} R_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{u}$$

临界荷重趋近于绝对刚性支座时的临界荷重时, α 的值可由使方程(u)的行列式为零而得到。于是

$$\left(\frac{2l}{9P} - \frac{1}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{l}{9P} \right)^2 = 0,$$

由此

$$\alpha = \frac{9P}{l}, \tag{v}$$

其中

$$P = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}.$$

由于支座的刚度增加所引起的临界荷重的变化,可以用与对于一个弹性支座一样的方法去处理。这研究的结果¹⁾示于图 2.27a 中,在这图中绘出了比 P_{cr}/P_e 与 $\alpha l/P_e$ 的关系,其中 $P_e = \pi^2 EI/l^2$ 。当支座的刚度很小时,屈曲杆的挠度曲线并无反曲点(图 2.27b)。在图 2.27a 中的曲线 AB 相应于这情形。对于较大刚性的支座,在中点将发生一反曲点(图 2.27c)。这情形在图 2.27a 中由曲线 BC 所表示。当 α 趋近于式 (v) 所给的值时,临界荷重就趋近于 $9\pi^2 EI/l^2$,而支承点成为反曲点。再增加支座的刚度,对于杆的屈曲并无影响。

对于 m 个长为 l/m 的等跨度这情形,按照相同的方法进行,我们可得到弹性支座表现为绝对刚性时所必须的刚度的表达式

$$\alpha = \frac{mP}{\gamma l}, \quad (2.30)$$

式中的 m 为跨度的个数, γ 为与跨度个数有关的数值因子,而 $P = m^2 \pi^2 EI/l^2$ 为根据长为 l/m 的一个跨度的两端为铰接的杆而计算的临界荷重。系数 γ 的几个数值列于下列表中。

表 2.3 方程(2.30)内因子 γ 的值

m	2	3	4	5	6	7	9	11
γ	0.500	0.333	0.293	0.276	0.268	0.263	0.258	0.255

可以看出,当跨度的个数增加时, γ 减小并趋近于值 $\gamma = 0.250$ 。

§ 2.7. 屈曲杆的大挠度(弹性线)

在本章前几节的讨论中,了解到在临界荷重时杆的挠度是不定的。这表明在临界荷重下,若挠度保持很小,则杆可以有任意的挠度,所以得到这样的结论,是由于用以计算临界荷重的微分方程的性质。这些方程是以屈曲杆的曲率的近似表达式 d^2y/dx^2 为基础的。如果用了曲率的精确表达式,挠度就有确定的值。由精确

1) 参阅 Klemperer 及 Gibbons 的论文, *loc. cit.*

的微分方程所得的弹性曲线的形状,称为**弹性线**(elastica)¹⁾.

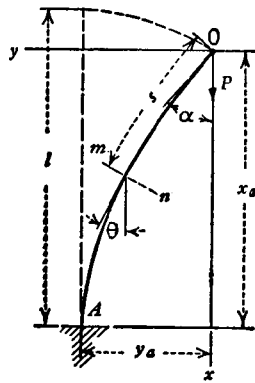


图 2.28

首先研究图 2.28 中的细杆, 其下端固定而顶端自由. 若荷重 P 稍大于临界值[方程(2.4)], 杆将产生大挠度. 取坐标轴如图所示, 并由原点 O 沿杆轴线量距离 s , 则杆的曲率的精确表达式为 $d\theta/ds$. 因杆的弯矩等于弯曲刚度乘曲率, 故挠度曲线的精确微分方程为

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -Py. \quad (a)$$

与以前的讨论相同, 由于压缩而引起的柱长度的改变已予略去²⁾.

将方程(a)对 s 求导数, 并运用 $dy/ds = \sin\theta$ 这关系, 我们得

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -P \sin\theta. \quad (b)$$

如是, 挠度曲线的微分方程与摆振动的微分方程的形式相同. 在摆的方程中, EI 由摆对于转轴的转动惯量来代替, s 由时间 t 代替, P 由摆的重量乘以重心至转轴的距离代替. 端点受荷重作用的细长杆的变形与刚体绕定轴转动之间的比拟, 系由克希霍夫³⁾ (Kirchhoff)所创, 故称为**克希霍夫动力比拟**.

解方程(b)时, 先在两边乘以 $d\theta$ 然后积分, 得

$$\int \frac{d^2\theta}{ds^2} \frac{d\theta}{ds} ds = -k^2 \int \sin\theta d\theta,$$

- 1) 弹性线这问题首先由 Euler 所研究, *loc. cit.*, 并由 Lagrange 所研究, *Sur la figure des colonnes*, *Misc. Taurinensia*, vol. 5, 1770—1773. Lagrange 的工作重印于“Oeuvres de Lagrange”, vol. 2, pp. 125—170, Gauthier-Villars, Paris, 1868. 关于历史性的讨论, 参阅 Timoshenko, “History of Strength of Materials”, pp. 30—40, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.
- 2) 对于通常的结构材料, 这假设是合理的.
- 3) G. R. Kirchhoff, *J. Math. (Crelle)*, vol. 56, 1859. W. Hess 把这比拟作了进一步的发展, *Math. Ann.*, vol. 25, 1885.

式中的 $k^2 = P/EI$ 。这方程可写作

$$\frac{1}{2} \int \frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds = -k^2 \int \sin \theta d\theta,$$

积分后我們得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = k^2 \cos \theta + C,$$

其中 C 为积分常数, 可由杆的頂端条件决定。在頂端因弯矩为零, 故 $d\theta/ds = 0$; 并且 $\theta = \alpha$, 由这些条件得

$$C = -k^2 \cos \alpha,$$

因此

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2k^2 (\cos \theta - \cos \alpha),$$

或

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}.$$

因由图 2.28 可以看出 $d\theta/ds$ 永为負, 故去掉方程中的正号。解出 ds 得

$$ds = - \frac{d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}.$$

将积分的上下限交换后, 得杆的全长为

$$\begin{aligned} l = \int ds &= \int_0^\alpha \frac{d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \end{aligned} \quad (c)$$

运用記号 $p = \sin(\alpha/2)$ 及引入新的变量 φ , 即

$$\sin \frac{\theta}{2} = p \sin \varphi = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi, \quad (d)$$

这积分可得到簡化。由此可見, 当 θ 自 0 变至 α 时, $\sin \varphi$ 由 0 变至 1, 而 φ 由 0 变至 $\pi/2$ 。从 (d) 經微分后我們还得到

$$d\theta = \frac{2p \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2p \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (e)$$

代入方程(c)并注意到

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = p \cos \varphi, \quad (f)$$

得

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k} K(p). \quad (g)$$

方程(g)中的积分称为**第一类完全椭圆积分**，并以 $K(p)$ 来表示。积分 K 的值只与 p 有关，并在很多工程手册中对于不同的 $p = \sin(\alpha/2)$ 值列成了数值表。有了这样的表，对于荷重 P 的任何值，很容易得出 p 的值(从而得杆顶端角 α 的值)。

当杆的挠度很小时， α 与 p 亦很小，于是 $p^2 \sin^2 \varphi$ 这项与方程(g)中的 1 相比可以略去。于是得

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{P}}$$

和

$$P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

这就是方程(2.4)所给出的临界荷重值。

当 α 值增大时，积分 K 及荷重 P 亦增大。例如，对 $\alpha = 60^\circ$ ， $p = \sin(\alpha/2) = 1/2$ 。从椭圆积分表我们得到 $K(1/2) = 1.686$ ，于是

$$l = 1.686 \sqrt{\frac{EI}{P}}, \quad P = 2.842 \frac{EI}{l^2};$$

并且 P 与临界荷重之比为

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{4(2.842)}{\pi^2} = 1.152.$$

要使压杆的挠度曲线顶端的切线与铅直线成 60° 角(图 2.28)，作用的荷重必须比开始屈曲时的欧拉荷重约大 15%。在下列表中列出了对于不同 α 值时 P/P_{cr} 的比值。

表 2.4 屈曲杆的荷重-挠度数据(图 2.28)

α	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
P/P_{cr}	1	1.015	1.063	1.152	1.293	1.518	1.884	2.541	4.029	9.116
x_a/l	1	0.970	0.881	0.741	0.560	0.349	0.123	-0.107	-0.340	-0.577
y_a/l	0	0.220	0.422	0.593	0.719	0.792	0.803	0.750	0.625	0.421

在計算杆的挠度时,我們注意到

$$dy = \sin \theta ds = - \frac{\sin \theta d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}},$$

于是杆頂端在水平方向的总挠度(图 2.28)为

$$y_a = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (h)$$

从方程(d),我們有 $\sin(\theta/2) = p \sin \varphi$, 因此

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}.$$

运用关系 $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$, 得

$$\sin \theta = 2p \sin \varphi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}. \quad (i)$$

将表达式(e), (f) 及 (i) 代入 (h) 并适当地改变积分限, 得

$$y_a = \frac{2p}{k} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{2p}{k}. \quad (j)$$

如是, 要計算杆的挠度, 可先选择 α (或 p) 值, 然后由方程(g) 决定 k (从而 P), 最后由方程(j) 得到 y_a . 例如, 仍取 $\alpha=60^\circ$ 及 $p=1/2$, 得 $kl = K(1/2) = 1.686$, 于是

$$y_a = \frac{l}{1.686} = 0.593l.$$

对于不同 α 值所得的数字結果, 列于表 2.4 的末行.

挠度 y_a 与 P 之間的关系, 由图 2.29 中的曲綫 AB 表示. 这曲綫在挠度为零的点 A 与 $P = P_{cr}$ 这水平綫相切. 因此, 相应于挠

度的微小增量，荷重 P 的增量为二阶小量。这说明了为什么用了曲率的近似式挠度的大小是不确定的。应当注意到，曲线 AB 只能用于材料的比例极限之内。超过了这极限，杆对弯曲的抵抗下降，而得到与虚线 BC 相似的曲线。

纵坐标距离 x_a (图 2.28) 可以同样地计算，其结果为

$$x_a = \frac{2}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - l = \frac{2}{k} E(p) - l, \quad (k)$$

式中的 $E(p)$ 为**第二类完全椭圆积分**。从这方程所得的数字结果，列于表 2.4 内。

运用椭圆积分，亦可计算沿挠度曲线中间部分各点的坐标。图 2.30 给出了对于不同 α 值的挠度曲线的形状。显然，

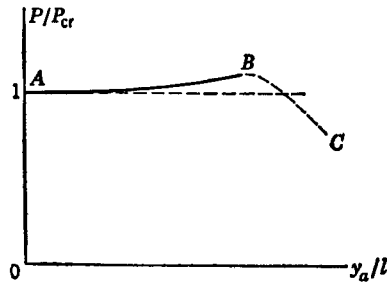


图 2.29

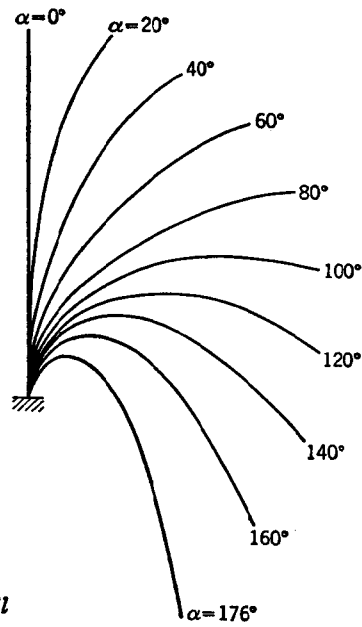


图 2.30

荷重增加得稍微超过临界值，就足以使杆产生大挠度¹⁾。

1) 除以上所讨论的以外，很多研究者都曾研究过弹性线问题。A. Clebsch 在他的书中给出了 Kirchhoff 理论的修改以包括有初弯曲的杆，Theorie der Elasticität fester Körper, Leipzig, 1862 (由 Saint-Venant 译成法文, 1883)。大挠度的许多特殊情形，曾由 L. Saalschütz 所研究，Der belastete Stab, Leipzig, 1880。并参阅 E. Collignon, *Ann. ponts et chaussées*, vol. 17, p. 98, 1889; C. Kriemler, *Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren*, Dissertation,

在以上的討論中，我們假定了杆的一端固定而另一端自由，所得的結果亦可用于两端鉸接的杆。對於這情形，圖 2.30 中的曲綫只表示了杆長的一半。圖 2.31 中的曲綫，表明了一細金屬絲的可能的平衡形式。這可由圖 2.30 中的曲綫組合而得。如是，要產生這樣的彎曲所須的力，可得自表 2.4。若兩端鉸接杆的撓度保持很小，則中點的撓度 δ 與荷重之間的关系可用下述近似公式¹⁾表示：

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}} - 1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{P}{P_{cr}} - 1 \right) \right]. \quad (1)$$

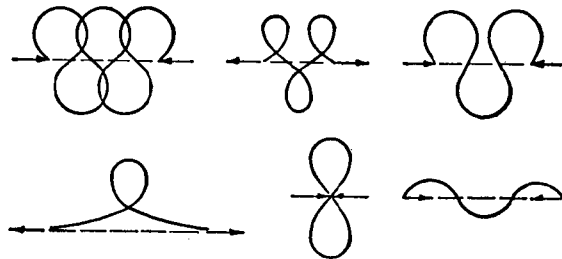


圖 2.31

§ 2.8. 能量法

從以前的討論中可以看出，若中心施加的壓力小於臨界值，則壓杆保持為直的，並且這直的平衡位置是穩定的。如果我們使荷重稍大於臨界值，則在理論上有兩種可能的平衡位置：這杆可能保持為直的，或可能橫向屈曲。實驗證明，直的位置是不穩定的，而當一杆在大於臨界值的荷重作用之下，總要向橫向屈曲。

壓杆的各種不同的平衡方式的穩定性問題，可以用研究剛體系統平衡的穩定的方法來研究。例如，考慮圖 2.32 中的球的三種平衡情況。我們即可得到結論：位於凹球面上的球 (a) 處於**穩定平衡**，而位於凸球面上的球 (b) 處於**不穩定平衡**。在水平面上的

Karlsruhe, 1902; M. Born, Dissertation, Göttingen, 1909; 以及 A. N. Krylov, Sur les formes d'équilibre des pièces chargées debout, *Bull. Acad. sci. USSR*, 1931, p. 963.

1) 這公式可得自將杆中點的撓度用級數表示，並只取為首的幾項。

球(c)处于**中性平衡**状态。平衡的类型可由考察系统的能量而确定。在第一种情形中(图 2.32a), 球离开其平衡位置的任何位移, 将使重心升高。要产生这样的位移, 须作一定量的功; 如是, 任何离开平衡位置的位移将使这系统的势能增加。在第二种情形中(图 2.32b), 任何离开平衡位置的位移, 将使球的重心降低, 即使这系统的势能减少。如是, 对于稳定平衡, 系统的能量为**最小**, 而对于不稳定平衡, 系统的能量为**最大**。对于中性平衡(图 2.32c), 位移并不引起能量的改变。

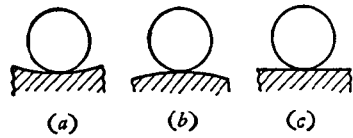


图 2.32

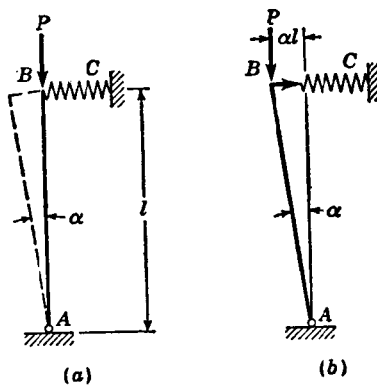


图 2.33

对于图 2.32 所示的每一系统, 稳定与否只与支承面的形状有关, 而与球的重量无关。在研究受压的柱时(参阅 §§2.1, 2.2), 我们觉察到, 柱的稳定与否, 与轴向荷重的大小有关。表明这样条件的模型如图 2.33 所示。认为是刚体的直杆 AB 下端铰接, 顶端为一弹簧 BC 所支承, 并承受中心施加的荷重 P 。当这荷重很小时, 杆的铅直位置是稳定的; 如果有一干扰力使点 B 向旁边有一位移, 这杆将在弹簧的作用下回到它的铅直位置。荷重 P 的临界值, 可由考虑系统的能量而得到。假设 B 端向旁边有一很小的位移, 使这杆对于铅直线有一小倾斜角 α , 图 2.33a。由于这位移, 荷重 P 下降的距离为

$$l(1 - \cos \alpha) \approx \frac{l\alpha^2}{2}, \quad (a)$$

而荷重 P 的势能的减少, 等于 P 所作的功, 即

$$\frac{Pl\alpha^2}{2}.$$

同时, 弹簧将伸长 αl , 弹簧的应变能的增加为

$$\frac{\beta(\alpha l)^2}{2},$$

式中的 β 为弹簧常数. 如果

$$\frac{\beta(\alpha l)^2}{2} > \frac{Pl\alpha^2}{2},$$

这系统是稳定的; 如果

$$\frac{\beta(\alpha l)^2}{2} < \frac{Pl\alpha^2}{2},$$

系统将是不稳定的. 因此, 荷重 P 的临界值可得自条件

$$\frac{\beta(\alpha l)^2}{2} = \frac{Pl\alpha^2}{2},$$

由此

$$P_{cr} = \beta l.$$

上述结论可由另一途径得到, 即考虑作用于杆的力的平衡. 若由于某种扰动杆处于稍微倾斜的位置 (图 2.33b), 于是将有两力作用于杆端 B : 铅直力 P 与弹簧的水平力 $\beta\alpha l$. 若弹簧内的力对于点 A 的力矩大于 P 的力矩, 即若

$$\beta\alpha l^2 > Pal,$$

则平衡将是稳定的; 弹簧内的力将使杆回到铅直位置. 相反地, 如果

$$\beta\alpha l^2 < Pal,$$

则铅直位置将是不稳定的; 在微小扰动之下系统将遭破坏. P 的临界值可得自方程

$$\beta\alpha l^2 = Pal,$$

与以前相同得 $P_{cr} = \beta l$. 于是有两种方法得到力的临界值: 由能量的考虑或由静力学平衡方程.

在用能量法时, 首先设这系统有一微小横向挠曲. 这挠曲意味着系统的应变能有一增量 ΔU . 同时, 荷重 P 将移动一小距离

并作功 ΔT 。如果

$$\Delta U > \Delta T,$$

则该系统在未挠曲时是稳定的; 如果

$$\Delta U < \Delta T,$$

则是不稳定的。于是, P 的临界值可得自方程

$$\Delta U = \Delta T, \quad (2.31)$$

它表明了平衡形式自稳定变为不稳定的条件。

作为运用能量法的第二个例子, 研究长 $l/3$ 的三等长杆所组成的系统, 如图 2.34a 所示。设杆为刚体且在支座处铰接。支座 A 与 D 为刚性支座, 而支座 B 与 C 为由弹簧常数为 β 的弹簧所组成。若轴向压力足够大, 这系统将屈曲并在支座 B 与 C 处产生挠度 δ_1 与 δ_2 (图 2.34a)。挠度很小时, 杆 AB 的倾角 $\alpha_1 \approx 3\delta_1/l$, 倾角 $\alpha_2 \approx 3\delta_2/l$, 而杆 BC 与水平线间的角度为 $(3\delta_2 - 3\delta_1)/l$ 。对于每杆用方程(a), 得 P 力的位移 λ 为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \frac{l}{3} \left[\left(\frac{3\delta_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{3\delta_2 - 3\delta_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{3\delta_2}{l} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{3}{l} (\delta_1^2 - \delta_1\delta_2 + \delta_2^2), \end{aligned}$$

而力 P 所作的功为 $\Delta T = P\lambda$ 。

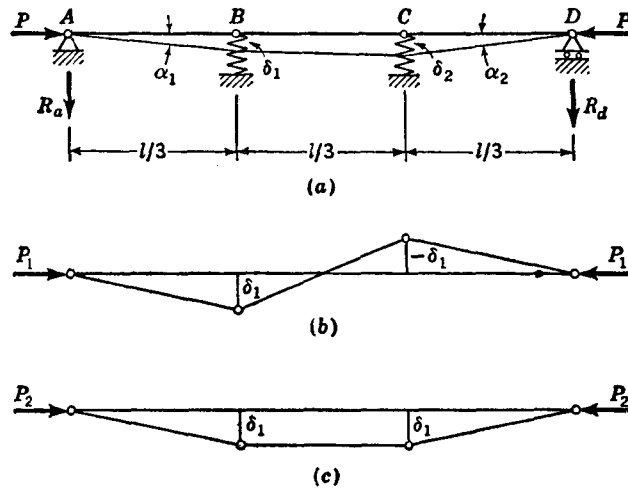


图 2.34

在屈曲时储藏在弹性支座内的应变能为

$$\Delta U = \frac{\beta}{2} (\delta_1^2 + \delta_2^2).$$

由方程(2.31), 临界条件为

$$\frac{3P}{l} (\delta_1^2 - \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2) = \frac{\beta}{2} (\delta_1^2 + \delta_2^2),$$

于是

$$P = \frac{\beta l}{6} \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{\delta_1^2 - \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2} = \frac{\beta l N}{6 D}, \quad (b)$$

其中 N 与 D 表示式中分数的分子与分母。要自方程(b)得 P 的临界值, 应调整未知量 δ_1 与 δ_2 , 使 P 取最小值。最小值条件由方程

$$\frac{\partial P}{\partial \delta_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \delta_2} = 0 \quad (c)$$

表示。由方程(c)的第一式得

$$\frac{\partial P}{\partial \delta_1} = \frac{\beta l}{6} \frac{1}{D^2} \left[D \frac{\partial N}{\partial \delta_1} - N \frac{\partial D}{\partial \delta_1} \right] = 0,$$

或

$$\frac{\partial N}{\partial \delta_1} - \frac{N}{D} \frac{\partial D}{\partial \delta_1} = 0.$$

将最后这方程与方程 (b) 组合, 得

$$\frac{\partial N}{\partial \delta_1} - \frac{6P}{\beta l} \frac{\partial D}{\partial \delta_1} = 0; \quad (d)$$

同样, 由方程(c)的第二式得

$$\frac{\partial N}{\partial \delta_2} - \frac{6P}{\beta l} \frac{\partial D}{\partial \delta_2} = 0, \quad (e)$$

将方程(b)的 N 与 D 值代入方程(d)与 (e), 得以下决定挠度 δ_1 与 δ_2 的两方程:

$$\delta_1 \left(1 - \frac{6P}{\beta l} \right) + \delta_2 \left(\frac{3P}{\beta l} \right) = 0, \quad (f)$$

$$\delta_1 \left(\frac{3P}{\beta l} \right) + \delta_2 \left(1 - \frac{6P}{\beta l} \right) = 0.$$

除了平凡解 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ 外, 只当方程(f)的行列式为零时才可能有解, 即要

$$\left(1 - \frac{6P}{\beta l} \right)^2 - \left(\frac{3P}{\beta l} \right)^2 = 0.$$

对于临界荷重 P 这方程有两个解, 即

$$P_1 = \frac{\beta l}{9} \quad \text{及} \quad P_2 = \frac{\beta l}{3}. \quad (g)$$

若在方程(ε)中用临界荷重 P_1 , 则挠度 $\delta_1 = -\delta_2$. 这相应于图 2.34b 所示的屈曲形式. 临界荷重 P_2 给出 $\delta_1 = \delta_2$, 而屈曲形式如图 2.34c 所示.

这问题亦可由平衡方程来解. 考虑整个系统 AD 的平衡(图 2.34a), 并注意及 B, C 处的弹簧的反力各为 $\beta\delta_1$ 与 $\beta\delta_2$, 得两端的反力为

$$R_a = \frac{2}{3} \beta\delta_1 + \frac{1}{3} \beta\delta_2,$$

$$R_d = \frac{1}{3} \beta\delta_1 + \frac{2}{3} \beta\delta_2.$$

解 R_a 的另一方程, 得自杆 AB 对点 B 取矩, 即

$$P\delta_1 = \frac{R_a l}{3};$$

同样, 对于 CD , 得

$$P\delta_2 = \frac{R_d l}{3}.$$

将这四个方程组合, 得

$$\delta_1 \left(2 - \frac{9P}{\beta l} \right) + \delta_2 = 0,$$

$$\delta_1 + \delta_2 \left(2 - \frac{9P}{\beta l} \right) = 0.$$

由上两式得 $P_1 = \beta l/9$ 及 $P_2 = \beta l/3$.

稳定性问题的上述两个一般方法, 可应用于弹性杆的屈曲. 在本章的前几节中, 临界荷重是由表达屈曲杆平衡条件的微分方程来计算的. 现将能量法用于这些情形并用方程(2.31). 在这方程中的量 ΔU 表示当杆横向挠曲时添加给杆的弯曲应变能¹⁾, 而 ΔT 表示压力 P 所作的功.

首先研究图 2.1b 所示的柱, 其下端固定, 顶端自由. 这稍微屈曲的杆的挠度曲线方程[参阅方程(2.2)]为

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right). \quad (h)$$

1) 压缩应变能是有改变的, 但更精细的研究表明可以略去这能量的微小的改变, 并可杆作为不可伸长的; 参阅 Timoshenko, *Z. Math. u. Physik*, vol. 58, p. 337, 1910, 及 A. Pflüger, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer-Verlag, Berlin, 1950.

任一截面处的弯矩为

$$M = P(\delta - y) = P\delta \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad (2.32)$$

而相应的弯曲应变能为¹⁾

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 \delta^2 l}{4EI}. \quad (i)$$

由方程(1.55), 杆屈曲时荷重 P 的铅直位移为

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\delta^2 \pi^2}{16l},$$

而 P 所作的相应的功为

$$\Delta T = \frac{P \delta^2 \pi^2}{16l}. \quad (j)$$

将(i)及(j)代入方程(2.31), 我們得到与方程(2.4)所給出的相同的临界荷重值。我們得到了临界荷重的精确的值, 这是由于我們运用了由解微分方程所得的正确結果作为挠度曲綫的表达式 [方程(h)]。

同样, 对于基本情形(参閱图 2.6), 屈曲形式的挠度曲綫为

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l},$$

而弯矩为

$$M = Py = PA \sin \frac{\pi x}{l},$$

于是

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 A^2 l}{4EI},$$

还有

$$\Delta T = P\lambda = \frac{P\pi^2 A^2}{4l}$$

使 ΔU 与 ΔT 相等, 得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

1) 参閱 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part I, p. 317, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1955.

这就是铰接端柱的欧拉荷重。再次看到，若已知挠度曲线的真正形状，能量法给出临界荷重的精确值。但在很多情况下，并不知道屈曲杆的真正形状，于是正如下一节所讨论的，能量法可用以得到临界荷重的近似值。

§ 2.9. 以能量法计算近似的临界荷重

能量法在屈曲问题中的主要用途，在于当挠度曲线的微分方程的精确解为未知或过于复杂时，决定临界荷重的近似值。在这些情况下，我们首先对挠度曲线假设一适当的形状。虽然对于近似解所设的曲线并不要求完全满足杆的端点条件，但至少应满足有关挠度与斜率的条件。



图 2.35

作为第一个例子，仍研究下端固定顶端自由的杆(图 2.1b)，并设挠度曲线的真实形状为未知。我们可用在自由端作用荷重的悬臂梁的挠度曲线(图 2.35)，作为挠度曲线形状的近似。这曲线的方程为

作为第一个例子，仍研究下端固定顶端自由的杆(图 2.1b)，并设挠度曲线的真实形状为未知。我们可用在自由端作用荷重的悬臂梁的挠度曲线(图 2.35)，作为挠度曲线形状的近似。这曲线的方程为

$$y = \frac{Qx^2}{6EI}(3l - x) = \frac{\delta x^2}{2l^3}(3l - x). \quad (a)$$

这曲线与上节方程(h)所给的真实的曲线不相同，但它符合所需的端点条件，即它在固定端的切线是铅直的，而在顶端的曲率为零。屈曲杆的弯曲应变能为[参阅方程(2.32)]

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l (\delta - y)^2 dx.$$

现代入式(a)，我们得到

$$\Delta U = \frac{17}{35} \frac{P^2 \delta^2 l}{2EI}.$$

荷重 P 的铅直位移为

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{3}{5} \frac{\delta^2}{l}.$$

使 ΔU 等于 ΔT ，得

$$\frac{17}{35} \frac{P^2 \delta^2 l}{2EI} = \frac{3P\delta^2}{5l},$$

由此得

$$P_{cr} = \frac{42}{17} \frac{EI}{l^2} = 2.4706 \frac{EI}{l^2}.$$

临界荷重的准确值为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2} = 2.4674 \frac{EI}{l^2}.$$

因此,近似解的误差仅 0.13%.

如果所假定的曲线适当地接近于精确的曲线,则能量法能给出临界荷重的很好的近似值.要得好的结果,所设的曲线须满足杆的端点条件,这通常是特别重要的.有时候,即使对于曲线的形状作了很粗略的假定,但仍旧能得到良好的结果.例如,我们可假定上例的挠度曲线为一抛物线,它的方程为

$$y = \frac{\delta x^2}{l^2}, \quad (b)$$

于是

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 \delta^2}{2EI} \int_0^l \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 dx = \frac{8}{15} \frac{P^2 \delta^2 l}{2EI}.$$

在这情形,屈曲杆顶端的铅直位移为

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{2}{3} \frac{\delta^2}{l}.$$

由方程(2.31)得

$$\frac{8}{15} \frac{P^2 \delta^2 l}{2EI} = \frac{2}{3} \frac{P \delta^2}{l},$$

由此

$$P_{cr} = 2.50 \frac{EI}{l^2}.$$

这近似解的误差约为 1.3%.虽然所假设的抛物线很差地表达了真实的曲线,但仍能得到临界荷重的良好的近似值.抛物线并不满足端点条件,因沿曲线的长度它的曲率为一常量,但对于真实的曲线,在杆的顶端曲率为零而在固定端为最大.

在計算弯曲应变能时,在以上的討論中,我們用了表达式

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^l \frac{P^2(\delta - y)^2 dx}{2EI}; \quad (2.33)$$

这表达式的另一形式为

$$\Delta U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (2.34)$$

如果我們是以真实的挠度曲綫而进行計算,則(2.33)与(2.34)两式都是精确的。但当我们运用假設的曲綫时,則式(2.33)較好,因为用式(2.33),近似解的准确性与 y 的准确性有关;若用式(2.34),則解的准确性与 $d^2 y/dx^2$ 的准确性有关。在选择挠度曲綫时, y 的准确度通常要比 $d^2 y/dx^2$ 为好¹⁾。

除非所設的挠度曲綫恰为真实的曲綫,否則所得的临界荷重值总比真正的值偏高。这是由于只有真实的挠曲形式才意味着杆的每一微段都处于平衡,对不正确的屈曲形状而要使这杆平衡,

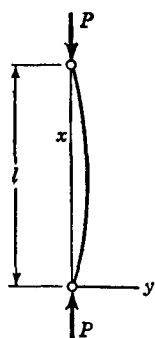


图 2.36

就須要引入附加的約束来維持这形状。附加的約束只会使杆的刚度增大,因而临界荷重就比真实的值要大。于是,如果用了几条假設的曲綫,从所設的曲綫得出的最小的临界荷重将是最准确的。

取所設的挠度曲綫表达式包含几个参数,可将能量法加以改进。改变参数的值,即可改变挠度曲綫的形状。使 P 为最小值的参数值,将导致临界荷重 P 的最准确的结果²⁾。

作为一例,研究一两端铰接的稜柱杆(图 2.36),并設在軸向压

1) 关于应用方程(2.33)所得的结果比用方程(2.34)更为准确,其数学上的证明可参阅 H. A. Lang, *Quart. Appl. Math.*, vol. 5, p. 510, 1947.

2) 参阅 Timoshenko, *Bull. Polytech. Inst.*, Kiev (俄文), 1910; 及 *Sur la stabilité des systèmes élastiques, Ann. ponts et chaussées*, Paris, 1913. 后一论文刊于 *The Collected Papers of Stephen P. Timoshenko*, pp. 92—224, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.

力 P 的作用下杆已屈曲。杆的挠度曲线任何形式，可以由三角级数来表示(参阅 §1.11):

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (c)$$

改变参数 a_1, a_2, \dots ，我们可以得到各种形状的挠度曲线。屈曲杆的弯曲应变能为

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l y^2 dx,$$

以级数(c)代 y ，并积分(参阅 §1.11)，得

$$\Delta U = \frac{P^2 l}{4EI} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

在杆屈曲时， P 作功[参阅方程(1.56)]

$$\Delta T = P\lambda = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 P}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2.$$

于是方程(2.31)成为

$$\frac{P^2 l}{4EI} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{\pi^2 P}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2,$$

于是我们得到

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}. \quad (d)$$

要得到压力 P 的临界值，我们必须这样地调整这些参变数 a_1, a_2, \dots ，使得式(d)为最小。根据以下的讨论，对于现在这种情形这是很容易做到的。想象有一列系数:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \dots, \quad (e)$$

其中每一数值 a, b, c, \dots 均为正。如果我们将这些分数的分子相加，并将分母相加，我们就得到分数

$$\frac{a + c + e + \dots}{b + d + f + \dots}. \quad (f)$$

这分数的值显然介于(e)中諸分数的最大值与最小值之間。式(d)与分数(f)相似。由此可得到結論：如果我們要使式(d)为最小，必須只取分母及分子的級数中的一項，即除了一个参数以外必須使所有其余的参数 a_1, a_2, a_3, \dots 均等于零。我們也可以看出，不等于零的参数必定是 a_1 ，因为它具有最小的系数。于是方程(d)給出

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

而相应的挠度曲綫为

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

这样，我們就得到与以前由积分所得的相同的結果(参閱 §2.1)。

两端铰接的屈曲杆的挠度曲綫的表达式(c)，可以用于更复杂的情形：杆是变截面的，或压力系沿着杆的长度而分布。于是，挠度曲綫不再是一正弦曲綫，而取級数(c)的为首几項，可以得到一良好的近似解。例如，設用了級数(c)的头兩項。于是很容易算得由 a_1 与 a_2 表达的 ΔU 与 ΔT 。使 ΔU 等于 ΔT ，即得一以 a_1 与 a_2 表达 P 的方程。最后，必須如此地决定 a_1 与 a_2 的值，使 P 为最小。因而得方程

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial a_2} = 0. \quad (g)$$

方程(g)决定了荷重 P 的临界值，并給出了比值 a_1/a_2 ，以确定近似挠度曲綫的形状。在随后几节中将以例說明这方法。

对于更为一般的情形，可设屈曲曲线由方程

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \dots \quad (h)$$

所表示，式中的 $f_1(x), f_2(x), \dots$ 为满足杆端点条件的 x 的函数，而 a_1, a_2, \dots 为确定各项幅度的常数。例如，对于两端铰接的杆(图 2.36)，每一函数 $f_i(x)$ 应满足的端点条件为¹⁾

$$f_i(x) = f_i'(x) = 0, \quad \text{当 } x = 0 \text{ 和 } x = l. \quad (i)$$

1) 撇表示对 x 的导数。即 $f_i'(x) = df_i(x)/dx$, $f_i''(x) = d^2 f_i(x)/dx^2$, \dots ; $y' = dy/dx$, $y'' = d^2 y/dx^2$, \dots .

设当屈曲时外力所作的功及应变能的改变由以下表达式给出:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx, \quad \Delta U = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l y^2 dx.$$

由方程(2.31)得

$$P = \frac{EI \int_0^l (y')^2 dx}{\int_0^l y^2 dx}. \quad (2.35)$$

要得 P_{cr} 的值,须选择表达式(h)中的系数 a_1, a_2, \dots , 使式(2.35)为最小. 这要求式(2.35)对每一系数 a_i 的导数必须等于零, 于是得到如下形式的方程:

$$\int_0^l y^2 dx \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l (y')^2 dx - \int_0^l (y')^2 dx \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l y^2 dx = 0,$$

或用了方程(2.35),

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l (y')^2 dx - \frac{P}{EI} \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l y^2 dx = 0. \quad (j)$$

注意到,由方程(h),

$$\frac{\partial y}{\partial a_i} = f_i(x), \quad \frac{\partial y'}{\partial a_i} = f'_i(x),$$

由方程(j)得

$$\int_0^l y' f'_i(x) dx - \frac{P}{EI} \int_0^l y f_i(x) dx = 0. \quad (k)$$

若以式(h)代方程中的 y 并积分,得到 a_1, a_2, \dots 的齐次线性方程. 方程(k)的数目与系数 a_1, a_2, \dots 的数目相同. $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$ 可以满足这些方程,但挠度(h)将等于零而并不发生屈曲. 要发生屈曲, a_1, a_2, \dots 等量中至少有一个异于零. 仅当方程(k)的行式为零时这才可能. 于是令这行列式为零便得计算 P_{cr} 的方程.

由分部积分,可将方程(k)的第一项转换为

$$\int_0^l y' f'_i(x) dx = [y' f_i(x)]_0^l - \int_0^l y'' f_i(x) dx. \quad (l)$$

注意到因杆铰接端的条件(i), 在杆的两端 $f_i(x)$ 等于零, 因而方程(l)左边的第一项为零. 于是方程(k)可表成形式

$$\int_0^l \left(y'' + \frac{P}{EI} y \right) f_i(x) dx = 0. \quad (m)$$

屈曲杆(图 2.36)的挠度曲线的微分方程为

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0. \quad (n)$$

y 的精确表达式必须满足这方程。但若由形如(h)的 y 得到近似解, 系数 a_1, a_2, \dots 必须如此地选择, 以使方程(m)的左边为零。将近似式(h)代入方程(m)并用记号

$$k^2 = \frac{P}{EI},$$

得到决定 a_1, a_2, \dots 的如下形式的线性方程:

$$a_1 \int_0^l [f_1''(x) + k^2 f_1(x)] f_1(x) dx + a_2 \int_0^l [f_2''(x) + k^2 f_2(x)] f_2(x) dx + \dots = 0. \quad (o)$$

令这方程组的行列式等于零, 得到决定 P_{cr} 的近似值的方程。

两端铰接的稜柱杆的屈曲方程(n)是很简单的, 并容易得到 P_{cr} 的精确值。但往往微分方程会较复杂。例如, 若图 2.36 中的杆的横截面是变化的, 则方程(n)中的 I 不再是常量。方程的严格解就很复杂。于是可用 y 的近似表达式(h), 并如上所述地计算 P_{cr} 的近似值¹⁾。

§ 2.10. 在弹性基础上的杆的屈曲

如果有许多等距离的且刚度相等的弹性支座, 它们对于屈曲杆的作用(图 2.37), 可以用连续的弹性介质来代替。杆每一横截面处的反作用力与该横截面的挠度成正比。若 α 为每一支座的弹簧常数, 而 a 为支座的间距, 则等效弹性介质的刚度可用量

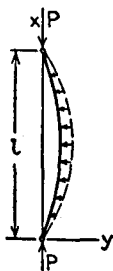


图 2.37

$$\beta = \frac{\alpha}{a} \quad (a)$$

来表示。量 β 称为**基础模量**, 其量纲为力除以长度平方。它表示当挠度等于 1 单位

时杆每单位长度内的基础反力的大小。

在计算压力的临界值时, 可运用能量法²⁾。两端铰接杆挠度曲

1) 这一得到微分方程近似解的方法, 系由瑞士科学家 Walter Ritz 所创。参阅他的著名的论文, *Z. reine u. angew. Math.*, vol. 135, pp. 1—61, 1908, 及 *Ann. Physik*, vol. 28, p. 737, 1909。并参阅他的“*Gesammelte Werke*”, Paris, 1911。

2) 参阅作者的论文, *Bull. Polytech. Inst.*, St. Petersburg, 1907。解这个问题的另一方法, 为 H. Zimmermann 所作, *Zentr. Bauverwaltung*, 1906。杆的部分长度为弹性基础所支承这问题, 曾为 H. Granholm 所讨论, *On the Elastic Stability of Piles Surrounded by a Supporting Medium*, Stockholm, 1929。

綫的一般表达式,可用級数

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (b)$$

来表示. 杆的弯曲应变能¹⁾为[方程(1.53)]

$$\Delta U_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2. \quad (c)$$

在計算弹性基础的应变能时,我們注意到,在杆 dx 长度內的横向反作用力为 $\beta y dx$, 而相应的能为 $(\beta y^2/2) dx$. 于是弹性基础的总的应变能为

$$\Delta U_2 = \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx,$$

以級数(b)代 y , 有

$$\Delta U_2 = \frac{\beta l}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \quad (d)$$

由方程(1.56), 压力 P 所作的功为

$$\Delta T = \frac{P \pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2. \quad (e)$$

将(c), (d)及(e)代入方程(2.31), 我們得到

$$\frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 + \frac{\beta l}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{P \pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2, \quad (f)$$

由上式得

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 + \frac{\beta l^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2}. \quad (2.36)$$

要决定 P 的临界值, 必須得到級数(b)的諸系数間这样的关系, 使得表达式(2.36)为最小. 除一个系数外, 使其他系数均为

1) 为便利計, 这里用方程(2.34)而沒用方程(2.33). 这分析的结果是精确的, 因而不涉及相对准确度问题.

零,即可得到这结果。这表示杆的挠度曲线为一简单的正弦曲线。
若 a_m 为不等于零的系数,我们得到

$$y = a_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (g)$$

于是临界荷重为¹⁾

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(m^2 + \frac{\beta l^4}{m^2 \pi^4 EI} \right), \quad (2.37)$$

式中的 m 为一整数。方程 (2.37) 给出临界荷重 P 为 m (在屈曲时杆形成的半正弦波的个数) 及杆与地基的性质的函数。于是,最低的临界荷重可能发生于 $m = 1, 2, 3, \dots$ 时,视其他常数的值而定。

要决定使方程 (2.37) 为最小的 m 值,首先研究 $\beta = 0$ 这特殊情形。当 $\beta = 0$,即无弹性基础存在,于是由方程 (2.37), m 必须等于 1。这就是我们所熟悉的两端铰接杆的屈曲情形。如果 β 很小,式 (2.37) 内的 m 仍必须为 1。如是,对于极为柔软的弹性基础,杆在屈曲时并无反曲点。使 β 逐渐地增加,我们最后会达到这样的情况,即式 (2.37) 中的 P 在 $m = 2$ 时要比在 $m = 1$ 时为小。这表明对于这种刚度的弹性基础,这屈曲杆将在中点有一反曲点。从 $m = 1$ 过渡到 $m = 2$ 基础模量 β 的极限值,可由这条件得到: β 值在这极限时,由式 (2.37) 用 $m = 1$ 或 $m = 2$ 均应得到同样的 P 。于是,我们得到

$$1 + \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} = 4 + \frac{\beta l^4}{4\pi^4 EI},$$

由上式得

$$\frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} = 4. \quad (h)$$

对于比方程 (h) 所给的为小的 β 值,屈曲杆的挠度曲线并无反曲点,即 $m = 1$ 。对于比方程 (h) 所给的略大的 β 值,在杆的中点将有一反曲点,而这杆将被分为两个半波长 ($m = 2$)。

1) 注意,对于这情形,能量法给出精确的结果。

使 β 增加, 半波长的个数将是 3, 4, ... 等。要得到半波长的个数自 m 改变为 $m + 1$ 时的 β 值, 我们可以和以前讨论从 $m = 1$ 到 $m = 2$ 同样地进行。这样, 我们得到方程

$$m^2 + \frac{\beta l^4}{m^2 \pi^4 EI} = (m + 1)^2 + \frac{\beta l^4}{(m + 1)^2 \pi^4 EI}$$

由上式得

$$\frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} = m^2(m + 1)^2. \quad (2.38)$$

已知杆的大小及 β 值, 这方程可用以决定 m , 即半波长的个数。将 m 代入方程 (2.37), 即得临界荷重值。可以看出, 在所有的情形中, 式(2.37)可以由形式

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.39)$$

来表示, 式中用折合长度 L 代替杆的原长 l 。对于不同的 $\beta l^4/16EI$ 的值, 从方程(2.37)及(2.38)所计算得的一系列 L/l 值, 列在表 2.5 内。

表 2.5 在弹性基础上的杆的折合长度 $L^{1)}$

$\frac{\beta l^4}{16EI}$	0	1	3	5	10	15	20	30	40	50	75	100
$\frac{L}{l}$	1	0.927	0.819	0.741	0.615	0.537	0.483	0.437	0.421	0.406	0.376	0.351
$\frac{\beta l^4}{16EI}$	200	300	500	700	1000	1500	2000	3000	4000	5000	8000	10000
$\frac{L}{l}$	0.286	0.263	0.235	0.214	0.195	0.179	0.165	0.149	0.140	0.132	0.117	0.110

1) 注意, 这表是根据 $\beta l^4/16EI$ 的值而不是 $\beta l^4/EI$ 的值而计算的。

当 β 增大时, 半波长的个数也增加。于是与 m 相比可略去 1, 方程(2.38)成为

$$\frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} = m^4 \text{ 或 } \frac{l}{m} = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{\beta}}. \quad (2.40)$$

将波长值 m/l 代入式(2.37), 我們得到

$$P_{cr} = \frac{2m^2\pi^2 EI}{l^2}. \quad (2.41)$$

于是, P_{cr} 值两倍于长 l/m 两端铰接的杆的临界值. 铎接的鋼軌即为弹性基础支承的长杆的例子. 在高温下, 鋼軌內可能产生很大的压应力. 所以如果基础对横移动的阻力不够, 則鋼軌将发生横向屈曲.

在以上的討論中, 我們假定横向反作用力是連續分布的. 如果杆的大小和支座的横向刚性使在屈曲杆的一个半波长內包括不少于三个支座, 則对于不連續的弹性支座, 上述公式亦甚准确. 如果在每半波长之內的支座少于三个, 則荷重的临界值須如 §2.6 所述去計算.

§ 2.11. 在中間压力作用下杆的屈曲

在压杆設計中, 我們有时候遇到受中間軸向力作用的压杆. 这

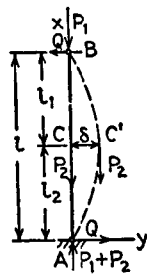


图 2.38

种类型的一个简单的例子如图 2.38 所示. 一两端铰接的杆在两端受压力, 并且有一 P_2 作用在一中間截面¹⁾. 如果压力超过它們的临界值极少, 杆将如图 2.38 的虛綫所示而屈曲. 令 δ 为 P_2 所作用的点 C 的挠度, 于是支座处的横向反作用力 Q 为

$$Q = \frac{\delta P_2}{l}.$$

为一般化起見, 假設杆上下两部分的截面慣性矩并不相同, 而各为 I_1 及 I_2 , 于是杆这两部分的挠度曲綫的微分方程为

$$EI_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -P_1 y_1 - Q(l-x) = -P_1 y_1 - \frac{\delta P_2}{l}(l-x); \quad (a)$$

1) 这問題曾为 F. S. Jasinsky 所討論, *loc. cit.* 其他的情形曾由 W. J. Duncan 所討論, *Engineering*, p. 180, 1952. 有初弯曲的杆这情形, 曾由 S. I. Sergev 所討論, *Univ. Wash. Eng. Expt. Sta. Bull.* 113, 1945.

$$\begin{aligned}
 EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= -P_1 y_2 - Q(l-x) + P_2(\delta - y)_2 = \\
 &= -P_1 y_2 - \frac{\delta P_2}{l}(l-x) + P_2(\delta - y_2). \quad (b)
 \end{aligned}$$

运用以下的記号:

$$k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1}, \quad k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}, \quad k_3^2 = \frac{P_1 + P_2}{EI_2}, \quad k_4^2 = \frac{P_2}{EI_1},$$

方程(a)和(b)的通解为

$$\begin{aligned}
 y_1 &= C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x - \frac{\delta}{l} \frac{k_4^2}{k_1^2} (l-x), \quad l_2 \leq x \leq l; \\
 y_2 &= C_3 \sin k_3 x + C_4 \cos k_3 x + \frac{\delta}{l} \frac{k_2^2}{k_3^2} x, \quad 0 \leq x \leq l_2.
 \end{aligned}$$

积分常数 C_1, \dots, C_4 决定于屈曲杆两部分的端点条件:

$$(y_1)_{x=l} = 0, \quad (y_1)_{x=l_2} = \delta; \quad (y_2)_{x=l_2} = \delta, \quad (y_2)_{x=0} = 0.$$

由以上諸式得

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{\delta(k_1^2 l + k_4^2 l_1) \cos k_1 l}{k_1^2 l \sin k_1 l_1}, & C_2 &= -C_1 \tan k_1 l; \\
 C_3 &= \frac{\delta(k_3^2 l - k_2^2 l_2)}{k_3^2 l \sin k_3 l_2}, & C_4 &= 0.
 \end{aligned}$$

将以上各值代入点 C 的連續条件

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=l_2} = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=l_2},$$

我們得到計算临界荷重的下列方程:

$$\frac{k_4^2}{k_1^2} - \frac{k_1^2 l + k_4^2 l_1}{k_1 \tan k_1 l_1} = \frac{k_2^2}{k_3^2} + \frac{k_3^2 l - k_2^2 l_2}{k_3 \tan k_3 l_2}. \quad (2.42)$$

在每一特殊情况中,知道了比值

$$\frac{P_1 + P_2}{P_1} = m, \quad \frac{I_2}{I_1} = n, \quad \frac{l_2}{l_1} = p, \quad (c)$$

我們可以用試算法得到适合方程(2.42)的荷重 $P_1 + P_2$ 的最小值.

这就是压力的临界荷重,它总可用公式

$$(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{L^2} \quad (2.43)$$

来表示, 式中的 L 为杆的折合长度. 对于设计时常遇到的特殊情况 $l_1 = l_2$, 其 L 值可自表 2.6 得到.

表 2.6 图 2.38 所示柱的 L/l 值 ($l_1 = l_2$)

$n \backslash m$	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	3.00
1.00	1.00	0.95	0.91	0.89	0.87	0.82
1.25	1.06	1.005	0.97	0.94	0.915	
1.50	1.12	1.06	1.02	0.99	0.96	
1.75	1.18	1.11	1.07	1.04	1.005	
2.00	1.24	1.16	1.12	1.08	1.05	

上述计算压力临界值的方法, 亦可用于有多个轴向力作用在几个中间横截面内. 在任何两个相邻压力之间的挠度曲线的微分方程, 可以很容易地写出. 但是要得到与方程(2.42)相似的决定临界荷重的最终判据, 所需的计算工作将随中间荷重个数的增加而大大地增加. 在这种情况下, 运用近似法之一是相宜的.

现在应用能量法解以上这例子(图 2.38), 并假设挠度曲线为一正弦曲线, 作为一级近似,

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l},$$

对于 $l_1 = l_2 = l/2$ 这情形, 这曲线的两部分的弯矩为

$$M_1 = P_1 y + \frac{\delta P_2}{l} (l - x),$$

$$M_2 = (P_1 + P_2) y - \frac{\delta P_2 x}{l}.$$

代入弯曲应变能的表达式, 我们得到

$$\begin{aligned} \Delta U = & \int_{l/2}^l \frac{M_1^2 dx}{2EI_1} + \int_0^{l/2} \frac{M_2^2 dx}{2EI_2} = \frac{\delta^2}{2EI_1} \left(P_1^2 \frac{l}{4} + P_2^2 \frac{l}{24} + P_1 P_2 \frac{2l}{\pi^2} \right) + \\ & + \frac{\delta^2}{2EI_2} \left[(P_1 + P_2)^2 \frac{l}{4} + P_2^2 \frac{l}{24} - P_2 (P_1 + P_2) \frac{2l}{\pi^2} \right]. \end{aligned} \quad (d)$$

屈曲时 P_1 与 P_2 所作的功为

$$\Delta T = \frac{P_1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \frac{P_2}{2} \int_0^{l/2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\delta^2 \pi^2}{4l} \left(P_1 + \frac{1}{2} P_2 \right). \quad (e)$$

将(d)及(e)代入方程(2.31), 并运用记号(c), 我们得到

$$(P_1 + P_2)_{cr} =$$

$$= \frac{\frac{\pi^2 EI_2}{l^2} (m+1)}{m + \frac{m}{6} \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 - \frac{8}{\pi^2} (m-1) + n \left[\frac{1}{m} + \frac{m}{6} \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 + \frac{8}{\pi^2} \frac{m-1}{m} \right]} \quad (2.44)$$

将不同的 m 与 n 代入这公式并将其结果与表 2.6 内的相比较,我们发现: 在所有的情况中,这公式的误差小于 1%。这样的准确度对于实用需要是足够的了。

§ 2.12. 在分布轴向荷重作用下杆的屈曲

若轴向压力沿杆连续地分布, 则屈曲杆的挠度曲线的微分方程不再是一常系数方程。它的解通常需要应用无穷级数或近似方法, 例如能量法。这两种方法都将以例说明。

现研究棱柱杆由于本身重量而屈曲的问题¹⁾ (图 2.39)。杆的下端铅直地固定而顶端自由。重量沿杆均匀地分布。若杆如虚线所示而屈曲, 挠度曲线的微分方程为

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_x^l q(\eta - y) d\xi, \quad (a)$$

方程右边的积分表示强度为 q 的均布荷重在任一横截面 mn 所产生的弯矩。将方程 (a) 对 x 计算导数, 我们得到方程

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -q(l-x) \frac{dy}{dx}. \quad (b)$$

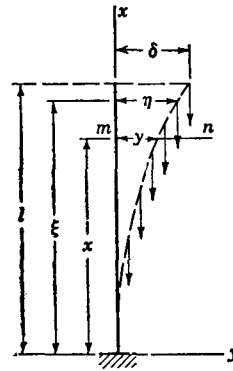


图 2.39

1) 这问题首先为 Euler 所讨论, 但他并未得到满意的解; 参阅 J. Todhunter 及 K. Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. I, pp. 39—50, Cambridge, 1886. 这问题最后为 A. G. Greenhill 所解决, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 4, 1881. 在他的论文中, Greenhill 指出了能由贝塞尔函数解的各种屈曲问题。上述问题, 也独立地被 F. S. Jasinsky 很详细地讨论过, *loc. cit.* 并参阅 J. Dondorff, *Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit Veränderlichem Querschnitt und Veränderlichem Druck, ohne und mit Querstützen*, Dissertation, Düsseldorf, 1907, 及 N. Grishcoff, *Bull. Acad. Sci.*, Kiev, 1930.

为了简化讨论,引入一新的变量 z 代替 x ,

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EI}} (l-x)^3. \quad (c)$$

于是由计算导数,我们得到

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dz} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{qz}{EI}}, \quad (d)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{3}{2} \frac{q}{EI}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{3} z^{-1/3} \frac{dy}{dz} + z^{2/3} \frac{d^2y}{dz^2}\right), \quad (e)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{2} \frac{q}{EI} \left(\frac{1}{9} z^{-1} \frac{dy}{dz} - \frac{d^2y}{dz^2} - z \frac{d^3y}{dz^3}\right), \quad (f)$$

代入方程(b),并令

$$\frac{dy}{dz} = u \quad (g)$$

得

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right) u = 0. \quad (h)$$

这是贝塞尔微分方程,它的解可由贝塞尔函数表示¹⁾. 这些函数是以无穷级数为这方程的解而算出的,即

$$u = z^m [a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots]. \quad (i)$$

将这级数及其导数代入方程(h),得到

$$\begin{aligned} z^m \left\{ a_0 \left(m^2 - \frac{1}{9} \right) z^{-2} + a_1 \left[(m+1)^2 - \frac{1}{9} \right] z^{-1} + \right. \\ \left. + \left(a_0 + a_2 \left[(m+2)^2 - \frac{1}{9} \right] \right) + \right. \\ \left. + \left(a_1 + a_3 \left[(m+3)^2 - \frac{1}{9} \right] \right) z + \dots \right\} = 0. \quad (i) \end{aligned}$$

要满足这方程, z 的各次幂的系数必须等于零. 由第一项得

$$m^2 - \frac{1}{9} = 0, \quad m = \pm \frac{1}{3};$$

1) 例如参阅 T. V. Kármán 与 M. A. Biot, *Mathematical Methods in Engineering*, chap. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940.

由第二項得 $a_1 = 0$, 由第四項得 $a_3 = 0$, 等等. 可以看出, 在級数 (i) 中的 z 的奇数幂項必为零. 由方程 (i) 的第三項, 得

$$a_2 = - \frac{a_0}{(m+2)^2 - \frac{1}{9}},$$

而考虑到其他的項, 得一般关系

$$a_n = - \frac{a_{n-2}}{(m+n)^2 - \frac{1}{9}}. \quad (k)$$

与两个 m 值相应, 有两个满足方程 (h) 的級数. 由方程 (k) 将这些級数中的系数算出, 可将方程 (h) 的通解写成如下形式:

$$u = C_1 z^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} z^2 + \frac{9}{320} z^4 - \dots \right) + C_2 z^{1/3} \left(1 - \frac{3}{16} z^2 + \frac{9}{896} z^4 - \dots \right). \quad (l)$$

在这方程中的 C_1 与 C_2 为积分常数. 除常数因子外, 这两个級数分别为 $-\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$ 阶的第一类貝塞尔函数. 常数 C_1 与 C_2 必須由杆的端点条件来决定. 由于杆的頂端自由, 其条件为

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=l} = 0;$$

注意到当 $x = l$ 时 $z = 0$, 并用方程 (e) 与 (g), 可将这条件表示为

$$\left(\frac{1}{3} z^{-1/3} u + z^{2/3} \frac{du}{dz} \right)_{z=0} = 0.$$

将 u 的方程 (l) 代入这方程, 得 $C_2 = 0$, 因此

$$u = C_1 z^{-1/3} \left(1 - \frac{3}{8} z^2 + \frac{9}{320} z^4 - \dots \right). \quad (m)$$

在杆的底部, 条件为

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0;$$

用了方程 (c), (d) 与 (g), 这条件表达为形式

$$u = 0 \quad \text{当} \quad z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}}.$$

使 $u = 0$ 的 z 值可由试算法由方程(m), 或由 $-1/3$ 阶的贝塞尔函数表的值来得到. 给出贝塞尔函数零点的表亦可利用¹⁾. 使 $u = 0$ 的 z 的最小值系与最小屈曲荷重相对应, 并得其值为 $z = 1.866$, 于是

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EI}} = 1.866,$$

或

$$(ql)_{cr} = \frac{7.837EI}{l^2}, \quad (n)$$

这就是图 2.39 所示杆的均布荷重的临界值.

用同样的方法, 可研究均布压荷重 ql 及两端压力 P 联合作用的情形. 若端点状况如图 2.39 所示, 且假设并无均布荷重 q , 则作用于顶端的荷重 P 的临界值为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

这均布荷重 ql 减小了荷重 P 的临界值, 我们可写

$$P_{cr} = \frac{mEI}{l^2}, \quad (2.45)$$

其中, 系数 m 小于 $\pi^2/4$, 并当荷重 ql 增加时逐渐减小, 当 ql 趋近于方程(n) 所给的值时, m 趋近于零. 运用记号,

$$n = ql \div \frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

对于不同的 n 值, 可计算方程(2.45)中的系数 m 并列于表 2.7²⁾内.

表 2.7 方程(2.45)中的 m 值

n	0	0.25	0.50	0.75	1.0	2.0	3.0	3.18	4.0	5.0	10.0
m	$\pi^2/4$	2.28	2.08	1.91	1.72	0.96	0.15	0	-0.69	-1.56	-6.95

在计算 ql 对 P_{cr} 值的影响时, 若假设均布荷重 ql 的影响相当于一荷重 $0.3ql$ 作用于杆端, 即得一良好的近似. ($0.3ql$ 这值系由表 2.7 中的数据算

1) 例如参阅 Jahnke 及 Emde, *op. cit.*, p. 167.

2) 参阅 Grishcoff, *loc. cit.*

得.)于是临界荷重为

$$P_{cr} \approx \frac{\pi^2 EI}{4l^2} - 0.3ql.$$

当均布荷重大于方程 (n) 所给的值时, P_{cr} 变为负的, 而必须用拉力 P 来阻止杆的屈曲。

在计算均布压荷重的临界值时, 运用能量法甚为得宜。例如图 2.39 所示的情形, 我们可以用下列方程作为挠度曲线的一级近似:

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right). \quad (o)$$

这是当压荷重作用在顶端而发生屈曲时的真实曲线 [参阅方程 (2.2)]。对于均布的轴向荷重, 正如以前的讨论所示, 真实的曲线要更为复杂。但曲线 (o) 符合端点的几何条件, 所以在近似计算中可以作为一合宜的曲线。任何截面 mn (图 2.39) 的弯矩为

$$M = \int_x^l q(\eta - y) d\xi. \quad (p)$$

以方程 (o) 代这表达式中的 y , 并注意及

$$\eta = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi \xi}{2l} \right),$$

我们得到

$$M = \delta q \left[(l - x) \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{2l}{\pi} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2l} \right) \right].$$

将这式代入弯曲应变能的表达式, 得到

$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{\delta^2 q^2 l^3}{2EI} \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^3} \right). \quad (q)$$

然后计算分布轴向荷重在杆横向屈曲时所作的功。由于挠度曲线的微元 ds 在截面 mn (图 2.39) 处的倾斜, 在这截面以上的荷重有了一向下的位移, 这位移等于

$$ds - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx,$$

而这荷重所作的相应的功为

$$\frac{1}{2} q(l - x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

因此,运用方程(o),在屈曲时荷重所作的总功为

$$\Delta T = \frac{1}{2} q \int_0^l (l-x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 \delta^2 q}{8} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right). \quad (r)$$

将方程(q)及(r)代入方程(2.31),我們得到重量的临界值的一級近似值

$$(ql)_{cr} = \frac{7.89EI}{l^2}.$$

将这結果与由微分方程积分所得的式(n)相比較,可以看出,这一級近似的誤差小于1%。所以对于实际应用这是足够准确的了。

取 y 为几个参数的函数,然后校正它们,使 $(ql)_{cr}$ 为最小,可以得到一较好的近似。为了说明这方法,我们再研究图 2.39 中的柱并假设

$$y = \delta_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) + \delta_2 \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2l} \right). \quad (s)$$

这方程适合杆端的几何条件,并有着两个参变数 δ_1 及 δ_2 。代入弯矩的表达式(p),我們得到

$$M = q\delta_1 \left[(l-x) \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{2l}{\pi} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2l} \right) \right] + q\delta_2 \left[(l-x) \cos \frac{3\pi x}{2l} + \frac{2l}{3\pi} \left(1 + \sin \frac{3\pi x}{2l} \right) \right].$$

代入弯曲应变能的表达式(q)并积分,我們得到

$$\Delta U = \frac{q^2 l^3}{2EI} (\delta_1^2 \alpha + 2\delta_1 \delta_2 \beta + \delta_2^2 \gamma), \quad (t)$$

式中

$$\alpha = \frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^3} = 0.04650, \quad \beta = \frac{32}{9\pi^3} - \frac{1}{12\pi^2} = 0.10622,$$

$$\gamma = \frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{32}{27\pi^3} = 0.30621.$$

将表达式(s)代入式(r),得

$$\Delta T = \frac{q\pi^2}{8} (\delta_1^2 \alpha' + 2\delta_1 \delta_2 \beta' + \delta_2^2 \gamma'), \quad (u)$$

式中

$$\alpha' = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} = 0.14868, \quad \beta' = \frac{3}{\pi^2} = 0.30396,$$

$$\gamma' = \frac{9}{4} - \frac{1}{\pi^2} = 2.14868.$$

将(t)与(u)代入方程(2.31),我们得到

$$(ql)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \frac{\delta_1^2 \alpha' + 2\delta_1 \delta_2 \beta' + \delta_2^2 \gamma'}{\delta_1^2 \alpha + 2\delta_1 \delta_2 \beta + \delta_2^2 \gamma}. \quad (v)$$

使 $(ql)_{cr}$ 为最小的条件为

$$\frac{\partial (ql)_{cr}}{\partial \delta_1} = 0, \quad \frac{\partial (ql)_{cr}}{\partial \delta_2} = 0,$$

或

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \frac{\partial}{\partial \delta_1} (\delta_1^2 \alpha' + 2\delta_1 \delta_2 \beta' + \delta_2^2 \gamma') - \\ & - (ql)_{cr} \frac{\partial}{\partial \delta_1} (\delta_1^2 \alpha + 2\delta_1 \delta_2 \beta + \delta_2^2 \gamma) = 0, \\ & \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \frac{\partial}{\partial \delta_2} (\delta_1^2 \alpha' + 2\delta_1 \delta_2 \beta' + \delta_2^2 \gamma') - \\ & - (ql)_{cr} \frac{\partial}{\partial \delta_2} (\delta_1^2 \alpha + 2\delta_1 \delta_2 \beta + \delta_2^2 \gamma) = 0. \end{aligned}$$

计算偏导数以后,得到

$$\begin{aligned} \delta_1 \left[\frac{\pi^2 EI}{2l^2} \alpha' - 2(ql)_{cr} \alpha \right] + \delta_2 \left[\frac{\pi^2 EI}{2l^2} \beta' - 2(ql)_{cr} \beta \right] &= 0, \\ \delta_1 \left[\frac{\pi^2 EI}{2l^2} \beta' - 2(ql)_{cr} \beta \right] + \delta_2 \left[\frac{\pi^2 EI}{2l^2} \gamma' - 2(ql)_{cr} \gamma \right] &= 0. \end{aligned}$$

当这两方程给出非零解 δ_1, δ_2 时,才可能发生屈曲.这要求这两方程的行列式必须等于零,即

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\pi^2 EI}{2l^2} \alpha' - 2(ql)_{cr} \alpha \right] \left[\frac{\pi^2 EI}{2l^2} \gamma' - 2(ql)_{cr} \gamma \right] - \\ & - \left[\frac{\pi^2 EI}{2l^2} \beta' - 2(ql)_{cr} \beta \right]^2 = 0, \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} & 4(ql)_{cr}^2 (\alpha\gamma - \beta^2) - 2(ql)_{cr} \frac{\pi^2 EI}{2l^2} (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta') + \\ & + (\alpha'\gamma' - \beta'^2) \left(\frac{\pi^2 EI}{2l^2} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

解这 $(ql)_{cr}$ 的二次方程,并代入诸常数的数值,我们得到

$$(ql)_{cr} = \frac{7.84EI}{l^2}.$$

这数值实际上是与式(n)的相同.

运用能量法,我们也可以研究除压力 P 作用于两端外,并承受它本身重

量 ql 作用的两端铰接的铅直杆(图 2.40)。 P 的临界值可由方程

$$P_{cr} = \frac{mEI}{l^2} \quad (2.46)$$

表示,其中数值系数 m 与比值

$$n = ql \div \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

有关。在表 2.8 中列出了几个 m 值。

表 2.8 方程(2.46)中的 m 值

n	0	0.25	0.50	0.75	1.0	2.0	3.0
m	π^2	8.63	7.36	6.08	4.77	-0.657	-4.94



图 2.40

如果假设杆的重量 ql 的一半作用于杆的顶端,就可得到临界荷重 P 的近似值,即

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} - \frac{ql}{2}$$

对于大的 n 值, P_{cr} 为负。这表示在这种情况下须在两端作用拉力 P , 以阻止杆的横向屈曲。

能量法可以很有利地应用于分布压力作用于杆的各种情形。这样,需要用无穷级数来积分的变系数微分方程,被计算某一表达式(例如上述方程(v)的右边)的最小值这简单问题所代替。增多挠度曲线表达式中的项数,例如上述方程(s),就可以提高解的准确度,虽然在实际的应用中一级近似通常已是足够准确的了。

§ 2.13. 弹性基础上的杆在分布轴向荷重作用下的屈曲

在这一节内,将讨论图 2.41a 所示杆的屈曲。这杆承受分布轴向荷重 q , 并被连续的弹性基础所支承。设轴向荷重 q 的分布如图 2.41a 与 b 所示,即分布荷重的强度在两端为 q_0 , 而方向指向杆的中点。荷重 q 线性地向中点减小,在中点为零。这样分布的荷重近似地表示桥梁桁架顶部弦杆的压应力的变化;以后将指明这一点。以 β 表示弹性基础的基础模量 [参阅 §2.10 式(a)], 并且,当乘以挠度 y 后,即得基础对于杆每单位长度的反力。

图 2.41a 的梁可由解屈曲杆的挠度曲线的微分方程来分析。如前一节所述,这方程可用无穷级数进行积分。但由能量法可更容易地得到相同的结果。两端铰接的屈曲杆的挠度曲线可由级数

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (a)$$

来表示。设杆的横截面为一常数，杆的弯曲应变能¹⁾连同基础的应变能(参阅 § 2.10)为

$$\Delta U = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 + \frac{\beta l}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \quad (b)$$

在计算弯曲时分布压荷重所作的功时，我们必须注意，离左端为 x (图 2.14b) 的任何横截面处的荷重强度为

$$q = q_0 \left(1 - \frac{2x}{l}\right), \quad (c)$$

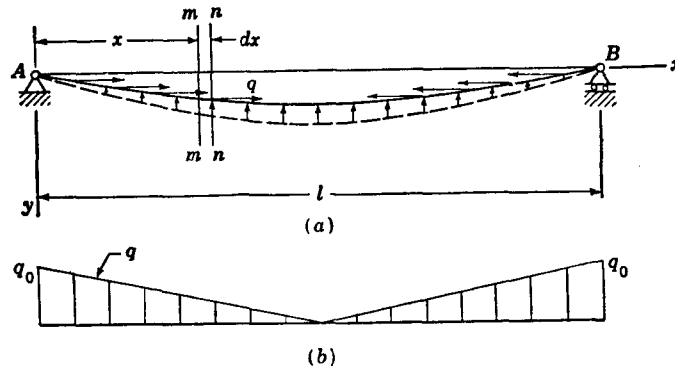


图 2.41

式中的 q_0 为在两端的荷重强度。考虑到杆的两相邻截面 mm 及 nn 间的微段，则由于在屈曲时这微段稍有倾斜，在截面 mm 右边的轴向荷重将向固定支座 A 有一位移 $(1/2)(dy/dx)^2 dx$ ，于是将作功

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \int_x^l q_0 \left(1 - \frac{2x}{l}\right) dx = \frac{q_0}{2l} x(l-x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

在弯曲时压荷重所作的总功为

$$\Delta T = \frac{q_0}{2l} \int_0^l x(l-x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

以级数(a)代这表达式中的 y ，并运用公式

1) 为便利计，用了方程(2.34)而没用方程(2.33)。因若仅用级数(a)的一项，这将使准确度很低，故还须考虑两项及三项的近似。

$$\int_0^l x \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l^2}{4}; \quad \int_0^l x^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{4m^2\pi^2};$$

$$\int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0, \quad \text{当 } m+n \text{ 为偶数};$$

$$\int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = -\frac{2l^2}{\pi^2} \frac{m^2+n^2}{(m^2-n^2)^2}, \quad \text{当 } m+n \text{ 为奇数};$$

$$\int_0^l x^2 \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2l^3}{\pi^2} \frac{m^2+n^2}{(m^2-n^2)^2} (-1)^{m+n};$$

我们最后得到

$$\Delta T = \frac{q_0 l}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{n^2\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \right) - 4 \sum_n \sum_m a_n a_m \frac{nm(m^2+n^2)}{(m^2-n^2)^2} \right], \quad (d)$$

在括号中的双重级数只包括 $(m+n)$ 为偶数且 n 不等于 m 的诸项。将 (b) 与 (d) 代入方程 (2.31), 我们得到压力的表达式

$$\frac{q_0 l}{4} = \frac{\frac{\pi^4 E I}{8 l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 + \frac{\beta l^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{n^2\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \right) - 4 \sum_n \sum_m a_n a_m \frac{nm(m^2+n^2)}{(m^2-n^2)^2}}. \quad (e)$$

量 $q_0 l/4$ 表示杆中点的压力。现在的问题是要找出系数 a_1, a_2, a_3, \dots 之间的关系, 使式 (e) 为最小。与前一节一样, 使这式对于 a_1, a_2, \dots 等的导数为零, 我们最后得到如下形式的 a_1, a_2, a_3, \dots 的齐次线性方程组:

$$\left[(n^4 + \gamma)\pi^2 - 2\alpha \left(\frac{n^2\pi^2}{3} - 1 \right) \right] a_n + 16\alpha \sum_m a_m \frac{nm(m^2+n^2)}{(m^2-n^2)^2} = 0, \quad (f)$$

为简单计, 我们用了以下记号:

$$\alpha = \frac{q_0 l}{4} \div \frac{\pi^2 E I}{l^2}, \quad \gamma = \frac{\beta l^4}{\pi^4 E I}. \quad (g)$$

式 (f) 的第二项须对所有使 $(m+n)$ 为一偶数且 n 不等于 m 的项求和。如是, 式 (f) 可分为两组, 第一组所有系数 a_m 的 m 均为奇数, 第二组的 m 均为偶数。

第一组的方程为

$$\left[(1 + \gamma)\pi^2 - 2\alpha \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \right] a_1 + \alpha \left(\frac{15}{2} a_3 + \frac{65}{18} a_5 + \right. \\ \left. + \frac{175}{72} a_7 + \dots \right) = 0,$$

$$\frac{15}{2} \alpha a_1 + [(3^4 + \gamma)\pi^2 - 2\alpha(3\pi^2 - 1)] a_3 + \\ + \alpha \left(\frac{255}{8} a_5 + \frac{609}{50} a_7 + \dots \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{65}{18} \alpha a_1 + \frac{255}{8} \alpha a_3 + \left[(5^4 + \gamma) \pi^2 - 2\alpha \left(\frac{25}{3} \pi^2 - 1 \right) \right] a_5 + \\ & \quad + \alpha \left(\frac{1295}{18} a_7 + \dots \right) = 0, \\ & \frac{175}{72} \alpha a_1 + \frac{609}{50} \alpha a_3 + \frac{1295}{18} \alpha a_5 + \\ & \quad + \left[(7^4 + \gamma) \pi^2 - 2\alpha \left(\frac{49}{3} \pi^2 - 1 \right) \right] a_7 + \dots = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{h}$$

第二组的方程为

$$\begin{aligned} & \left[(2^4 + \gamma) \pi^2 - 2\alpha \left(\frac{4}{3} \pi^2 - 1 \right) \right] a_2 + \alpha \left(\frac{160}{9} a_4 + \frac{15}{2} a_6 + \dots \right) = 0, \\ & \frac{160}{9} \alpha a_2 + \left[(4^4 + \gamma) \pi^2 - 2\alpha \left(\frac{16}{3} \pi^2 - 1 \right) \right] a_4 + \alpha \left(\frac{1248}{25} a_6 + \dots \right) = 0, \\ & \frac{15}{2} \alpha a_2 + \frac{1248}{25} \alpha a_4 + \left[(6^4 + \gamma) \pi^2 - 2\alpha \left(\frac{36}{3} \pi^2 - 1 \right) \right] a_6 + \dots = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{i}$$

当由以上两方程组之一得出系数 a_m 的非零解时，即方程组(h)或(i)的行列式等于零时，弦杆的屈曲才为可能。方程组(h)相应于杆的对称形状的屈曲；方程组(i)相应于杆的反对称形状的屈曲。

我们先讨论弹性基础的刚度很小的情形。在这种情况下，屈曲杆的挠度曲线只有一个半波（参阅 §2.10）且对于中点对称。因此应该用方程组(h)。只取级数(a)的第一项而令 $a_3 = a_5 = \dots = 0$ ，就得到第一级近似。于是，如果

$$(1 + \gamma) \pi^2 - 2\alpha \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) = 0,$$

即

$$\alpha = \frac{\pi^2(1 + \gamma)}{2 \left(\frac{1}{3} \pi^2 - 1 \right)},$$

或者运用了记号(g)，

$$\left(\frac{q_0 l}{4} \right)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{\pi^2(1 + \gamma)}{2 \left(\frac{1}{3} \pi^2 - 1 \right)}, \tag{i}$$

则(h)的第一个方程给出 a_1 的非零解。若无横向弹性基础的抵抗，且如果杆被如图 2.41b 所示的轴向分布荷重所压，则在方程(i)中的 γ 为零 [参阅记号

(g)], 而我们得到

$$\left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{cr} = 2.15 \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (k)$$

如是, 临界荷重为荷重只作用于杆两端时的两倍多。

要得到临界压力的较好近似值, 我们在式 (a) 中取系数为 a_1 及 a_3 的两项。由方程组 (h), 两个相应的方程为

$$\left[(1 + r)\pi^2 - 2\alpha\left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right)\right] a_1 + \frac{15}{2} \alpha a_3 = 0,$$

$$\frac{15}{2} \alpha a_1 + [(3^4 + r)\pi^2 - 2\alpha(3\pi^2 - 1)] a_3 = 0.$$

使 $r = 0$, 并使以上两方程的行列式为零, 我们得到

$$\left[\pi^2 - 2\alpha\left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right)\right] [81\pi^2 - 2\alpha(3\pi^2 - 1)] - \left(\frac{15}{2}\right)^2 \alpha^2 = 0.$$

从这方程解出 α , 我们得到

$$\alpha = 2.06, \quad \left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{cr} = 2.06 \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (l)$$

取级数 (a) 中系数为 a_1, a_3, a_5 的三项及 (h) 的三个方程, 可计算三级近似。这样的计算证明, 由方程 (l) 所得的二级近似误差小于 1%, 所以再进一步的近似计算已无必要, 而我们可取

$$\left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{cr} = 2.06 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.696l)^2}.$$

于是, 对这种情形的折合长度为

$$L = 0.696l.$$

当弹性基础给杆以较大约束时, 杆的屈曲形状可能有两个半波, 于是在杆的中点有一反曲点。要计算这情况下的临界荷重, 须用方程组 (i)。再继续增大 β , 屈曲杆就有三个半波, 而我们必须再用方程组 (h) 以计算压荷重的临界值。在所有这些情况中, 临界荷重可以用方程

$$\left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.47)$$

来表示, 式中的折合长度 L 与弹性基础的刚度有关。表 2.9 中列出了几个 L/l 的比值。从这表中可以看出, 当弹性基础的刚度增大时, 比值 L/l 趋近于以前所得到的关于均匀受压杆的值 (参阅表 2.5)。

以上对于图 2.41a 中的杆所得的结果, 可用于低桁架桥 (图 2.42a 与 b) 的上部弦杆的稳定性问题。当没有上部弦杆支撑时, 顶部弦杆的横向屈曲 (参阅图 2.42b) 为铅直杆及斜杆的弹性反作用力所抵抗。在支座处通常有刚度

很大的框架或支柱,所以弦杆的两端可认为不能在横向有所移动。如是,上部弦杆可视作是两端铰接杆,沿其长度受分布压力而在中间诸点被弹性支座所支承。计算这一类问题的一般的方法已在 §2.6 中讨论过。

表 2.9 方程(2.47)中的折合长度 L

$\frac{\beta l^4}{16EI}$	0	5	10	15	22.8	56.5	100	162.8	200	300	500	1000
$\frac{L}{l}$	0.696	0.524	0.443	0.396	0.363	0.324	0.290	0.259	0.246	0.225	0.204	0.174

但要得到压力的临界值所须的计算工作,随支座个数的增多而大大地增加¹⁾。受压弦杆的稳定性可由增加横向支座的刚度来增加。对于等截面的弦杆及压力为常数时,支座开始表现为绝对刚性那样时的最小刚度,可得自方程(2.30)。如果桥梁的受压弦杆及铅直杆(图 2.42)的大小使屈曲了的弦杆的半波长比桥梁的一个节间要大(例如半波长的长度不小于三个节间),则问题将大大地简化:可用一等效弹性基础代替弹性支座,并以连续分布的荷重代替作用于结点的集中压力。假设这桥梁承受均布荷重,则斜杆传递给弦杆的压力与离跨度中点的距离成正比,于是等效压力分布如图 2-41b 的阴线面积所示。

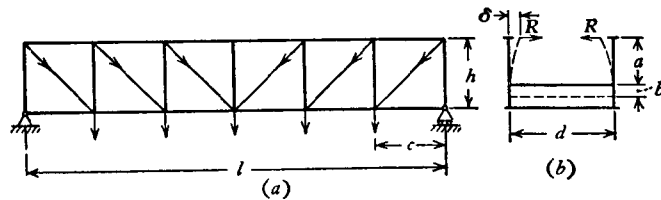


图 2.42

在计算等效于铅直杆²⁾弹性抗力的弹性基础的模量 β 时,必须建立作用于铅直杆顶端的力 R (图 2.42b) 与假如顶部弦杆除去后会产生

- 1) 受压弦杆的稳定性作为在弹性支座上的杆来计算的几个数字例子,可得自 H. Müller-Breslau 的书, *Graphische Statik*, vol. 2, p. 336. 并参阅 A. Ostendorf 的论文, *Beton und Eisen*, vol. 15, 1916. 用力矩分配法来分析,为 F. Kerekes 及 C. L. Hulsbos 所作, *Elastic Stability of Top Chord of a Three-span Continuous Pony Truss Bridge*, *Iowa Eng. Expt. Sta. Bull.* 177, 1954.
- 2) 因斜杆为拉力杆,它们的刚度与压杆相比很小,所以可予略去。

的关系。若只考虑铅直杆的弯曲,则

$$\delta = \frac{Ra^3}{3EI_1},$$

式中的 I_1 为一个铅直杆的截面惯性矩。将横梁的弯曲考虑在内并运用图中所示的记号,我们得到

$$\delta = \frac{Ra^3}{3EI_1} + \frac{R(a+b)^2d}{2EI_2},$$

式中的 I_2 为横梁的截面惯性矩。于是,产生挠度 δ 等于一单位时所需的力为

$$R_0 = \frac{1}{\frac{a^3}{3EI_1} + \frac{(a+b)^2d}{2EI_2}},$$

而等效弹性基础的模量为

$$\beta = \frac{R_0}{c},$$

c 为铅直杆之间的距离。

若桁架有平行弦杆且节间甚多,由静力学可知,轴向荷重的最大强度 q_0 为

$$q_0 = \frac{Q}{2h},$$

式中的 Q 为作用于桁架的总荷重, h 为桁架的高度。

如此决定了 β 与 q_0 后,就可按照以上所述计算上部弦杆的临界荷重¹⁾。

对于弹性模量为常数的弹性介质所支承的等截面杆所建立的方法,可以推广到变截面的弦杆,以及弹性支承的刚度沿梁长而变化的情形²⁾。

§ 2.14. 变截面杆的屈曲

从屈曲杆的弯矩图可以看出,等截面杆并不是最经济的承担

1) 低桁架桥的稳定性问题,首先由 Jasinsky 以这种形式作了讨论, *Scientific Papers of F. S. Jasinsky*, vol. 1, p. 145, St. Petersburg, 1902. Timoshenko 以能量法讨论了 Jasinsky 所得结果的某些修正, *Bull. Polytech. Inst., Kiev* (俄文), 1910, 及 *Sur la stabilité des systèmes élastiques, Ann. ponts et chaussées*, Paris, 1913. 并参阅 Timoshenko, *Problems Concerning Elastic Stability in Structures, Trans. ASCE*, vol. 94, 1930.

2) S. Kasarnowsky 及 D. Zetterholm 的论文中给出了以能量方法设计低桁架桥的几个例子, *Der Bauingenieur*, vol. 8, p. 760, 1927. 并参阅 A. Hrennikoff 及 K. Kriso 的论文, *Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, vol. 3, 1935.

压荷重的形式。显然,例如承受轴向压力的两端铰接的杆,如减少两端附近部分的材料以增大中间部分的横截面(参阅图 2.43b),即可增加杆的稳定性。在金属的结构中,这样的杆是常被采用的。截面常常是突然改变的,因为截面的增大是由沿柱的部分铆接或焊接附加的板或角钢而做成的。这种柱的一简单例子已在 §2.11 讨论过。另一例如图 2.43a 所示。要决定在这种情况下荷重 P 的临界值,必须对于柱的每一段分别列出挠度曲线的微分方程。如果 I_1 及 I_2 各为柱上下两部分的截面惯性矩,这些方程为

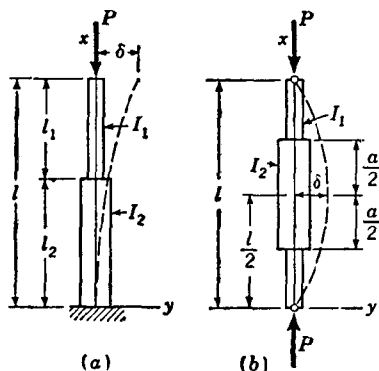


图 2.43

$$\begin{aligned} EI_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= P(\delta - y_1), \\ EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= P(\delta - y_2). \end{aligned} \quad (a)$$

运用记号

$$k_1^2 = \frac{P}{EI_1}, \quad k_2^2 = \frac{P}{EI_2},$$

并考虑到柱的固定端的条件,方程(a)的解为

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta + C \cos k_1 x + D \sin k_1 x, \\ y_2 &= \delta(1 - \cos k_2 x). \end{aligned}$$

积分常数 C 与 D , 可由柱顶端的挠度为 δ , 及当 $x = l_2$ 时这两段柱的挠度相等的条件而得到, 因此,

$$\begin{aligned} \delta + C \cos k_1 l + D \sin k_1 l &= \delta, \\ \delta + C \cos k_1 l_2 + D \sin k_1 l_2 &= \delta(1 - \cos k_2 l_2), \end{aligned}$$

由以上两式得

$$C = -D \tan k_1 l, \quad D = \frac{\delta \cos k_2 l_2 \cos k_1 l}{\sin k_1 l_1}.$$

因这两部分的挠度曲线在 $x = l_2$ 处有公切线, 我们得到方程

$$\delta k_2 \sin k_2 l_2 = -C k_1 \sin k_1 l_2 + D k_1 \cos k_1 l_2.$$

将以上的 C, D 值代入, 我们最后得到超越方程

$$\tan k_1 l_1 \tan k_2 l_2 = \frac{k_1}{k_2} \quad (b)$$

以计算临界荷重。知道了比值 I_1/I_2 及 l_1/l_2 , 对于每一特定情形, 这方程的解可由试算法得到。

以 $a/2$ 代替 l_2 , 以 $l/2$ 代替 l , 由方程 (b) 所得的结果还可用于两端铰接而对于中间横截面对称的柱 (图 2.43b)。在这种情况下, 荷重的临界值可用式

$$P_{cr} = \frac{mEI_2}{l^2} \quad (2.48)$$

来表示, 式中的系数 m 与比值 a/l 及 I_1/I_2 有关。从方程 (b) 所计算得的这系数的几个数值列在下面表 2.10 内¹⁾。

表 2.10 方程 2.48 中的系数 m 的值

$I_1/I_2 \backslash a/l$	0.2	0.4	0.6	0.8
0.01	0.15	0.27	0.60	2.26
0.1	1.47	2.40	4.50	8.59
0.2	2.80	4.22	6.69	9.33
0.4	5.09	6.68	8.51	9.67
0.6	6.98	8.19	9.24	9.78
0.8	8.55	9.18	9.63	9.84

若杆的横截面改变的次数比以上所研究的还多, 我们仍可用上述方法计算临界值。自然, 改变的次数增多后, 计算临界荷重方

1) 表 2.10 系 A. N. Dinnik 所计算, Design of Columns of Varying Cross Section, 由 M. Maletz 译自俄文, Trans. ASME, vol. 54, 1932. 在这论文中亦给出了对于固定端杆的相类似的表。

程的推演及这方程的解变得更为复杂¹⁾,所以使用一种近似方法是得宜的。

用能量法解 仍研究图 2.43a 所示的情形,并运用能量法,我们可用

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) \quad (c)$$

作为挠度曲线的一级近似。与以前一样地进行,我们得到弯曲应变能及屈曲时压力 P 所作功的表达式:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_0^{l_2} \frac{M^2 dx}{2EI_2} + \int_{l_2}^l \frac{M^2 dx}{2EI_1} = \frac{P^2 \delta^2}{2EI_2} \left(\int_0^{l_2} \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_2}{I_1} \int_{l_2}^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx \right) = \\ &= \frac{P^2 \delta^2}{2EI_2} \left[\frac{l_2}{2} + \frac{I_2}{I_1} \frac{l_1}{2} + \frac{l}{2\pi} \left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) \sin \frac{\pi l_2}{l} \right], \quad (d) \end{aligned}$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{\pi^2 P \delta^2}{16l}, \quad (e)$$

将(d)与(e)代入方程(2.31),得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{4l^2} \frac{1}{\frac{l_2}{l} + \frac{I_2}{I_1} \frac{l_1}{l} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \sin \frac{\pi l_2}{l}}. \quad (2.49)$$

对于两端铰接的杆(图 2.43b),以 $a/2$ 代替 l_2 , $l/2$ 代替 l , 方程(2.49)成为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{\frac{a}{l} + \frac{l-a}{l} \frac{I_2}{I_1} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \sin \frac{\pi a}{l}}. \quad (2.50)$$

由方程(2.50)所得的结果与表 2.10 中的 m 相比较表明,如果比值 I_2/I_1 并不很大,这近似解给出了很好的结果。例如 $I_1/I_2 = 0.4$, $a/l = 0.2$ 及 0.6 , 自方程(2.50)所得的 m 值分别为 5.14 及 8.61, 表 2.10 中的数值为 5.09 及 8.51。这对于所有的实际应用是足够准确的了²⁾。

上述方法可用于由几个不同截面的部分所组成的杆。在这种情况下,在方程(d)中出现更多的积分。对于杆的每一部分就有一个积分。但这些积分

1) 几个这种类型问题的例曾为 A. Franke 所讨论过, *Z. Math. Physik*, vol. 49, 1901. 并参阅 Timoshenko 的论文, 发表于 *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1908, 及 S. Falk, *Ingr-Arch.*, vol. 24, p. 85, 1956.

2) 在 E. Elwitz 的书中有几个这类例子的解, *Die Lehre von der Knickfestigkeit*, vol. 1, p. 222, Düsseldorf, 1918.

的数值计算是很容易的。

用逐次逼近法解这类屈曲问题,将在下一节内讨论。

§ 2.15. 用逐次逼近法决定临界荷重

对于精确解为未知或过于复杂的情形,逐次逼近法可用以决定临界荷重。能量法所给出的临界荷重值总较真值偏高(参阅 96 页),而逐次逼近法却是能提供获得临界荷重的上限和下限的方法,于是可以知道近似解的准确度,并可继续进行逐次逼近计算,直至得到所需的准确度。

在用这种方法决定临界荷重时,首先假设屈曲杆的挠度曲线。以所设的挠度为基础,杆的弯矩可以由轴向力 P 计算。然后,知道了弯矩,就可用任一材料力学的标准方法(例如共轭梁法或重积分法)确定杆的挠度。使原先所设的挠度与计算得的值相等,即得一计算临界荷重的方程。以第一次计算所得的挠度,作为真实挠度值的一个新的近似,重复这样的计算步骤。二级近似的结果将给出临界荷重的另一方程。所给出的值比第一个方程更为准确。继续计算,直到所设的与所计算得的挠度相差很小为止。在这种情况下,临界荷重就接近于精确的了。

为了得临界荷重的方程,使所设的挠度与相应的计算值在杆轴线上某一点处相等即可。这样所得的临界荷重的最低值即为下限,而最高值表示上限。如是,在每一计算步骤中,可知临界值系在某上下限内。运用挠度的平均值,正如在以后的例子中所述¹⁾,可得临界荷重的较准确的值。

为了说明逐次逼近法,先讨论两端铰接杆(图 2.44a)这简单情

1) 本节所述的决定临界荷重的方法,等价于屈曲杆的微分方程的逐次近似积分。以这方法解微分方程已被广泛地运用。这是由 H. A. Schwarz 所创, *Gesammelte Werke*, vol. 1, pp. 241—265. 并参阅 P. Funk, *Mitt. Hauptvereines deut. Ingr. Tschechoslowaki*, Nos. 21 及 22, Brünn, 1931. 将这方法用于屈曲问题系由 F. Engesser 所作, *Z. Österr. Ingr. u. Architek. Vereines*, 1893. 图解法系由 L. Vianello 所创, *Z. Ver. deut. Ingr.*, vol. 42, p. 1436, 1898. 这方法收敛性的数学证明系由 E. Trefftz 所作, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 3, p. 272, 1923; 并参阅 A. Schleusner 所著的书, *Zur Konvergenz des Engesser-Vianello-Verfahrens*, Berlin, 1938.

形; 对这问题的精确解是已知的。作为一级近似, 设屈曲杆的挠度曲线为一抛物线:

$$y_1 = \frac{4\delta_1 x(l-x)}{l^2}. \quad (a)$$

这方程给出了所设的挠度曲线, 在其两端挠度为零, 在中点的挠度

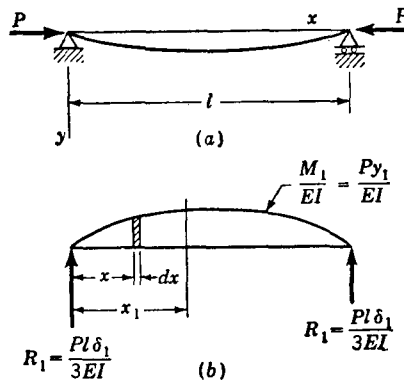


图 2.44

为最大且等于 δ_1 。杆的任一横截面的弯矩为 $M_1 = Py_1$, 并且由共轭梁法¹⁾可以很容易地得到这弯矩所产生的挠度。图 2.44b 中示出了这共轭梁, 它承受假想的荷重 M_1/EI 。所需的挠度在数值上等于共轭梁的弯矩。共轭梁的假想的反力为

$$R_1 = \frac{Pl\delta_1}{3EI}, \quad (b)$$

而任一离梁左端为 x_1 的横截面的弯矩为

$$R_1 x_1 - \int_0^{x_1} \frac{Py_1}{EI} (x_1 - x) dx. \quad (c)$$

将方程(a)与(b)代入(c), 得挠度的二级近似为

$$y_2 = \frac{Pl\delta_1 x}{3EI} \left(1 - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right). \quad (d)$$

1) 例如参阅 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part I, p. 155, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1955.

使梁的某一截面的挠度 y_2 与 y_1 相等, 即得临界荷重; 例如取梁的中点, 得

$$(y_1)_{x=l/2} = \delta_1, \quad (y_2)_{x=l/2} = \delta_2 = \frac{5P l^2 \delta_1}{48EI}. \quad (e)$$

使这两式相等, 得

$$P_{cr} = \frac{48EI}{5l^2} = \frac{9.6EI}{l^2},$$

这比真实的临界荷重约小 2.7%。要得到更准确的结果, 可计算挠度 y_1 与 y_2 的平均值如下:

$$(y_1)_{av} = \frac{1}{l} \int_0^l y_1 dx = \frac{2}{3} \delta_1, \quad (2.51)$$

$$(y_2)_{av} = \frac{1}{l} \int_0^l y_2 dx = \frac{P l^2 \delta_1}{15EI}. \quad (2.52)$$

使 y_1 与 y_2 的平均值相等, 得

$$P_{cr} = \frac{10EI}{l^2},$$

这比正确值约大 1.3%。最后, 如需决定 P_{cr} 的上限与下限, 则需要求出比 y_1/y_2 的最大值与最小值。由方程(a)与(b), 得

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{12EI}{P l^2} \cdot \frac{l^2(l-x)}{l^3 - 2x^2l + x^3},$$

它在 $x=0$ 有最大值, 在 $x=l/2$ 有最小值; 它们各为

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)_{max} = \frac{12EI}{P l^2}, \quad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)_{min} = \frac{9.6EI}{P l^2}.$$

于是临界荷重系在这两值之间, 即

$$\frac{9.6EI}{l^2} < P_{cr} < \frac{12EI}{l^2}.$$

现在可以方程(d)的 y_2 作为所设的挠度重复逐次逼近的循环。 y_2 的表达式可写作形式

$$y_2 = \frac{16\delta_2 x}{5l} \left(1 - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right),$$

其中 δ_2 为杆中点的挠度 [参阅方程(e)]。杆(图 2.44a) 的弯矩为

$P y_2$, 而共轭梁上的荷重为 $M_2/EI = P y_2/EI$. 计算共轭梁的弯矩, 给出挠度的三級近似为

$$y_3 = \frac{8P l^2 \delta_2}{75EI} \left(3 \frac{x}{l} - 5 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5} - \frac{x^6}{l^6} \right).$$

使挠度 y_2 与 y_3 在梁的中点相等, 得

$$\delta_2 = \frac{61P l^2 \delta_2}{600EI},$$

由此

$$P_{cr} = \frac{9.836EI}{l^2},$$

这比正确值約小 0.35%. 如果是令 y_2 与 y_3 的平均值相等, 我們得

$$P_{cr} = \frac{9.882EI}{l^2},$$

这比上述眞值約大 0.12%. 两挠度之比为

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{30EI}{P l^2} \frac{l^2(l^3 - 2x^2l + x^3)}{3l^5 - 5x^2l^3 + 3x^4l - x^5}.$$

计算这比的最大值与最小值导致結果

$$\frac{9.836EI}{l^2} < P_{cr} < \frac{10EI}{l^2}.$$

如是, 用逐次逼近法可得临界荷重的上限与下限. 并可連續运用这方法, 直至結果达到所需的准确度为止. 可以看出, 以挠度的平均值所得的临界荷重, 通常比任选杆的一截面的挠度(例如在杆中点)所得的要准确.

数值方法 当杆的横截面沿跨度而变化时, 逐次逼近的数值方法是有用的. 不去假设挠度 y 为 x 的某一函数, 而将梁分成小段并沿梁的每一分点假设一挠度值. 然后用表格形式进行计算, 计算 M/EI 图的纵坐标及共轭梁的每一分点的挠度. 与以前所述一样, 将最终的挠度与开始所设的相比较, 即可决定临界荷重.

现以图 2.46 所示的铰接端柱的临界荷重的计算为例来说明这一方法¹⁾.

1) N. M. Newmark 以很完整的形式提出了数值方法, Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments and Buckling Loads, *Trans. ASCE*, vol. 108, p. 1161, 1943. 文中亦讨论了其他端点条件的杆的例子. 这方法亦可用于任何变截面杆及变轴量力杆.

图中只表出杆左边这一半,因为杆对中点对称。比值 $l_1/l_2=0.4$, $a/l=0.6$, 其中 a 为杆截面较大的中间部分的长度(参阅图 2.43b)。杆共分为 10 段,每段的长度为 $l/10$, 且以数字表示分点。

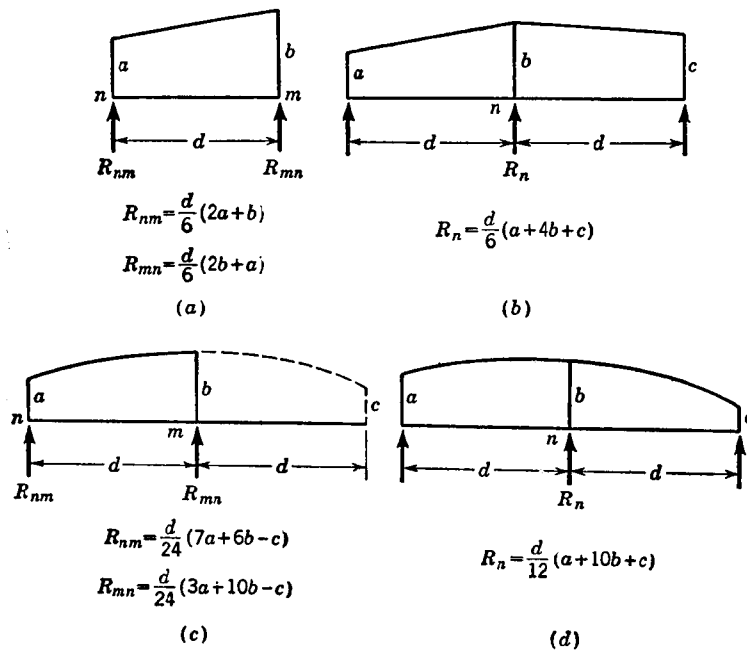


图 2.45

第一步设一组表示一级近似的挠度 y_1 。在图 2.46 中所选的值为正弦曲线的纵坐标。为了在计算时的便利,数值均乘以 100 而除以杆中点的挠度 δ_1 。图中附表的右边一列示出了对于每一情形的此公共因子。第二行列出了 M_1/EI 的值,它们表明共轭梁分点处的荷重强度。这些值等于 $P y_1/EI$ 并以列在右边的公共因子表出。

共轭梁上的假想荷重是以一不规则的荷重图表示的,因此,以作用于分点处的一组集中荷重代替真正的荷重是方便的。在表中以 R 表示的集中荷重的值,系由图 2.45 中的公式来计算¹⁾。若在两分点之间的假想荷重(M/EI 图)

1) *Ibid.*

按线性变化,或假设为线性的,则就可用图 2.45a 与 b 中的公式。在这些图中, d 为分点间的距离,而 a 与 b 为 M/EI 图的纵坐标。图 2.45b 用于当假想荷重在分点处是连续的。若 M/EI 图在分点处有突变,则必须对于分点两侧的荷重分别运用图 2.45a 的公式。

若 M/EI 图由一光滑曲线表示,正如常有的情形,则以二次抛物线为基础来计算假想的集中荷重,将得一适当的近似。这抛物线可这样来确定,要它通过假想荷重 M/EI 曲线的三个相继的点(参阅图 2.45b 与 c),并给出对于真实曲线的良好近似。图 2.45c 中的公式,给出了只在分点 n 与 m 间的分布荷重的等效集中荷重。因此,这些公式用于当荷重在分点处有突变时。 M/EI 图中注明 c 的纵坐标可能为一外插值,因有时由于某种原因真实值并不存在。图 2.45d 中的公式用于当曲线在分点处是连续的。

现在回到图 2.46,在分点 1 处的集中荷重 R_1 的值,根据图 2.45d 来确定,我们得到

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{d}{12} (a + 10b + c) = \\ &= \frac{0.1l}{12} [0 + 10(78) + 148] \frac{P\delta_1}{100EI_2} = 7.7 \frac{P\delta_1 l}{100EI_2}. \end{aligned}$$

在分点 2 处, M/EI 图有一突变,故对于分点 2 两边的分段须用图 2.45c。具体计算如下:

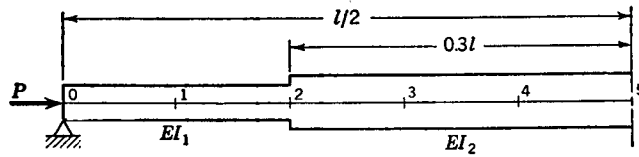
$$\begin{aligned} R_{21} &= \frac{d}{24} (7a + 6b - c) = \\ &= \frac{0.1l}{24} [7(148) + 6(78) - 0] \frac{P\delta_1}{100EI_2} = 6.3 \frac{P\delta_1 l}{100EI_2}, \\ R_{23} &= \frac{d}{24} (7a + 6b - c) = \\ &= \frac{0.1l}{24} [7(59) + 6(81) - 95] \frac{P\delta_1}{100EI_2} = 3.3 \frac{P\delta_1 l}{100EI_2}, \\ R_2 &= R_{21} + R_{23} = 9.6 \frac{P\delta_1 l}{100EI_2}. \end{aligned}$$

在分点 3, 4 与 5 处仍用图 2.45d 的公式,而结果示于表内。在梁端点的集中荷重值并未计算,因为它对共轭梁的假想弯矩并无影响。

下一步是计算共轭梁的假想剪力。这些剪力在分点之间为常量,它们表示实际梁的平均斜率值。表中的第一个值表示共轭梁的假想反力,并由以下计算得到:

$$7.7 + 9.6 + 8.0 + 9.4 + \frac{1}{2}(9.9) = 39.65.$$

这值记录在表内作为假想梁第一分段内的假想剪力, 或实际杆的平均斜率。由前一分段内的剪力减去集中荷重值, 即得下一段内的剪力。这种计算过程



分点号	0	1	2	3	4	5	公因子
y_1	0	31	59	81	95	100	$\frac{\delta_1}{100}$
$\frac{M_1}{EI}$	0	78	148	59	81	95	$\frac{P\delta_1}{100EI_1}$
R		7.7	9.6	8.0	9.4	9.9	$\frac{P\delta_1 l}{100EI_1}$
平均斜率		39.6	31.9	22.3	14.3	4.9	$\frac{P\delta_1 l}{100EI_1}$
y_2	0	3.96	7.15	9.38	10.81	11.30	$\frac{P\delta_1 l^2}{100EI_1}$
$\frac{y_1}{y_2}$		7.83	8.25	8.64	8.79	8.85	$\frac{EI_1}{Pl^2}$
y_3	0	35.0	63.3	83.0	95.7	100	$\frac{\delta_2}{100}$
$\frac{M_2}{EI}$	0	87.5	158.2	63.3	83.0	95.7	$\frac{P\delta_2}{100EI_2}$
R		8.61	10.32	8.24	9.50	9.93	$\frac{P\delta_2 l}{100EI_2}$
平均斜率		41.63	33.02	22.70	14.46	4.96	$\frac{P\delta_2 l}{100EI_2}$
y_4		41.63	7.465	9.735	11.181	11.677	$\frac{P\delta_2 l^2}{100EI_2}$
$\frac{y_3}{y_4}$		8.407	8.480	8.526	8.559	8.564	$\frac{EI_2}{Pl^2}$

图 2.46

一直继续到杆的中点为止。

注意到分点 1 处的挠度等于第一分段内的平均斜率乘以分点间的距离，杆的挠度可直接由平均斜率值来计算；分点 2 处的挠度等于分点 1 处的挠度与下一个平均斜率值乘分点间距离之和，依此类推。最后，可决定所设的挠度 y_1 与新的值 y_2 之比。由这比值的最大值和最小值，得 P_{cr} 的上下限为

$$\frac{7.83EI_2}{l^2} < P_{cr} < \frac{8.85EI_2}{l^2}.$$

要计算临界荷重的近似值，以求和来代替方程(2.51)与(2.52)中的积分，得

$$(y_1)_{av} = \frac{1}{l} \sum y_1 \Delta x, \quad (f)$$

$$(y_2)_{av} = \frac{1}{l} \sum y_2 \Delta x. \quad (g)$$

$(y_1)_{av}$ 与 $(y_2)_{av}$ 之比等于挠度 y_1 之总和与挠度 y_2 之总和之比，因为分段的长度 Δx 为常量。在计算 y_1 与 y_2 值之总和时，必须计及梁的两个半长。于是，对于挠度总和之比，我们得

$$\frac{(y_1)_{av}}{(y_2)_{av}} = \frac{2(31 + 59 + 81 + 95) + 100}{2(3.96 + 7.15 + 9.38 + 10.81) + 11.30} \frac{EI_2}{Pl^2} = 8.55 \frac{EI_2}{Pl^2},$$

而临界荷重近似地为

$$P_{cr} = \frac{8.55EI_2}{l^2}.$$

精确值(参阅表 2.10)为 $P_{cr} = 8.51 \frac{EI_2}{l^2}$ ；于是可以看出，逐次近似计算只重复一次即得很准确的结果。

多次重复计算，结果可被改进，如图 2.46 的表中所示。第二次重复从与第一组计算所得的挠度 y_2 成比例的挠度 y_2 开始。这些值可乘以任一常数因子，以调整数字的数量级。对于现在这情形，它们被乘以 $100/11.3$ ，以使 δ_2 成为中点的挠度。第二次重复的结果表明，荷重 P_{cr} 系介于下列两数之间：

$$\frac{8.407EI_2}{l^2} < P_{cr} < \frac{8.564EI_2}{l^2},$$

而由挠度总和之比所得的值为

$$P_{cr} = \frac{8.52EI_2}{l^2},$$

这与精确值基本上相同。

图解法 我们亦可用逐次逼近的图解法来计算临界荷重。与以前一样，这方法的第一步系假设屈曲杆的挠度曲线的形状。这曲线亦表示杆的弯矩图，只是比例尺度不同，因为 $M = Py$ 。将弯矩图被 EI 所除作为假想的横向荷重，并绘相应的索曲线 (funicular curve)，就得到新的挠度曲线。如果调整 P 的值，使新的曲线与所假设的曲线完全重合，这就表示所假定的曲线即为真实的挠度曲线，而相应的 P 为正确的临界荷重值。通常以上两条曲线是不相同的；调整 P 值，我们可以使在一点的挠度(例如杆的中点)相等。这样，我们就得到了临界荷重的一近似值。要得到较好的近似值，我们以所绘的索多边形作为挠度曲线的二级近似，然后再象以上所述重复地绘索多边形曲线。

不由两相继的曲线在某一点的挠度相等这条件来计算临界荷重，可以与以前一样用挠度的平均值，并取两挠度曲线之下的面积之比。使这比值等于 1，即可算出临界荷重。如上地连续绘出相继的索曲线，并在每一次重复后计算临界荷重，即可越来越接近于临界荷重¹⁾。

为了说明图解法，仍研究图 2.46 所示的柱，其 $I_1/I_2 = 0.4$ ， $a/l = 0.6$ 。在图 2.47 中示出了临界荷重的作图解。因这柱对 midpoint G 对称，所以只绘出

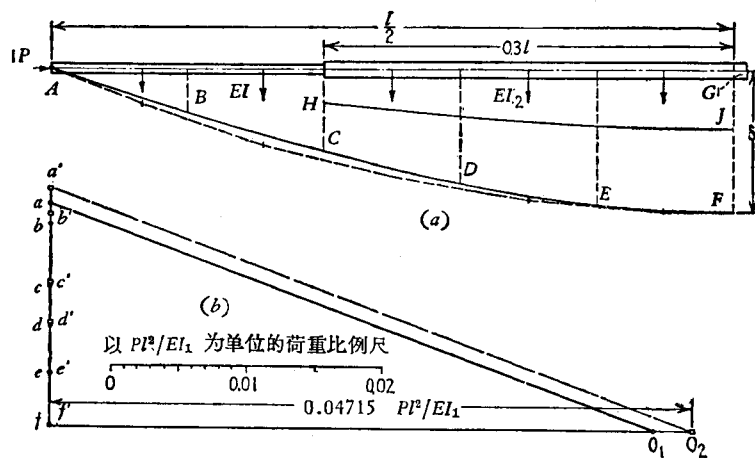


图 2.47

1) 这叙述的数字证明已有人讨论过: R. v. Mises, *Monatsschr. Math. Physik*, vol. 22, p. 33, 1911, 及 E. Trefftz, *Z. angew. Math. u. Mech.* vol. 3, p. 272, 1923. 并参阅 A. Pflüger, *Stabilitäts-probleme der Elastostatik*, p. 200, Springer-Verlag, Berlin, 1950.

了一半。

选择正弦曲线的一部分 $ABCDEF$ 作为尝试用的挠度曲线。纵坐标乘 P 后的面积 $AB \cdots FGA$, 即为对于任何压力 P 的弯矩图。共轭梁上的荷重为弯矩图除以 EI , 所以面积 $ACHJGA$ 的纵坐标乘以 P/EI_1 , 即为当柱的中间部分的弯矩图的纵坐标按比 l_1/l_2 减小后的这荷重。

这荷重可以用图所示的虚线划分为几部分。每一部分可用一大小相等而作用于形心的集中荷重代替, 如图中的箭头所示¹⁾。这些荷重绘于荷重图 $abcdej$ (图 2.47b) 中。

点 O_1 为力多边形的极点的位置。对于这极点, 相应的索多边形通过点 A , 并水平地通过点 F 。与这索多边形相切的曲线, 为对于所假设的弯矩图的挠度曲线。由于这两曲线并不完全重合, 可用这新的曲线作第二次尝试。新的荷重图为 $a'b'c'd'e'f'$, 而 O_2 为所得的新的极点。相应的索多边形与前一次所绘的实际上重合, 这表明第二次尝试的曲线与屈曲的真实曲线是非常接近的。

要得到保持这柱处于这挠曲位置所须的 P 值, 可使中点的挠度相等。所假设的挠度为 δ , 而由作图法所得的挠度等于极距 $O_2f' = 0.04715 Pl^2/EI_1$ 与力多边形的纵坐标 δ 的乘积。于是

$$0.04715 \frac{Pl^2}{EI_1} \delta = \delta,$$

而有

$$P_{cr} = 21.2 \frac{EI_1}{l^2} = 8.48 \frac{EI_2}{l^2}.$$

这与精确值很接近。

在这问题中, 系用正弦曲线作为第一次尝试的曲线, 虽然可以看出, 由于这是等截面杆屈曲时的真实曲线, 在曲线的 AC 部分没有足够的曲率。如果有意地将正弦曲线改变, 使这部分的曲线有较大的曲率, 则一次近似即可得到良好的 P_{cr} 值。例如, 以一抛物线作为尝试的曲线, 则由此所得的第一次的极距为

$$O_1f = 0.0472 \frac{Pl^2}{EI_1},$$

由此, 临界荷重为

$$P_{cr} = 8.48 \frac{EI_2}{l^2}.$$

1) 荷重亦可置于 A, B, C, D, E 与 F 诸点, 正如在数值解中所作的, 只要对它们适当地加以估算。

如是,所设的抛物线的一级近似的准确度与用正弦曲线的二级近似的准确度相等。这两曲线互相很好地校核这事实(以抛物线作为开始)表明,第二次尝试是不必要的。

§ 2.16. 横截面連續变化的杆

要減輕压杆的重量,有时运用截面渐变的柱。这种情形的挠度曲线的微分方程为欧拉所得,他討論了各种形状的柱,包括平頂圓錐体及角錐体形的柱¹⁾。二次旋轉面所成的柱的稳定性問題,曾为拉格朗日所討論²⁾。

截面慣性矩沿杆距离按照幂次規律而变化的情形是有很大实用价值的,这情形亦曾被討論过³⁾。我們来研究一个下端固定而頂端自由的杆(图 2.48a)。假設截面慣性矩按照离定点 O 的距离的幂次而变化,所以任一截面 mn 的慣性矩可表为

$$I_x = I_1 \left(\frac{x}{a} \right)^n, \quad (a)$$

式中的 I_1 为杆頂端截面的慣性矩。取各种不同的 n 值,我們得到各种形状的柱。当 $n = 1$, 則所得柱的形式为一厚度等于常数 t 而寬为一变量的板(图 2.48b)。假設 $n = 2$, 这足够准确地表示由四个角鋼所組成,并以斜杆相連接的下端固定的柱(图 2.48c)。对于这情形,柱的横截面积为一常数,而慣性矩近似地与角鋼的形心到截面的对称軸的距离的平方成比例。取 $n = 4$, 則得到实心的平頂圓錐体或角錐体。

- 1) 这一工作的德文翻译可来自 Ostwald 的 "Klassiker der exakten Wissenschaften", No. 175, Leipzig, 1910.
- 2) *Loc. cit.* 这类型的別的问题曾为 A. N. Dinnik 所讨论, *Phil. Mag.*, vol. 10, p. 785, 1930.
- 3) 参阅 A. N. Dinnik, *Izvest. Gornogo Inst.*, Ekaterinoslav, 1914, 及 *Vestnik Ingenerov*, Moscow, 1916. 这些论文的主要结果已被译成英文: Design of Columns of Varying Cross Section, 原著 A. N. Dinnik (M. Maletz 译), *Trans. ASME*, vol. 51, 1929, 及 vol. 54, 1932. 上述问题曾由 A. Ono 独立地研究过, *Mem. Coll. Eng., Kyushu Imp. Univ.*, Fukuoka, Japan, vol. 1, 1919. 并参阅 L. Baird 及 E. W. Stedman, *Engineering*, vol. 98, p. 403, 1914, 及 A. Morley, *Engineering*, vol. 97, p. 566, 1914, 及 vol. 104, p. 295, 1917.

在討論屈曲杆的撓度曲綫时，取如图 2.49 所示的坐标軸。于是这撓度曲綫的微分方程为

$$EI_1 \left(\frac{x}{a} \right)^n \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py. \quad (b)$$

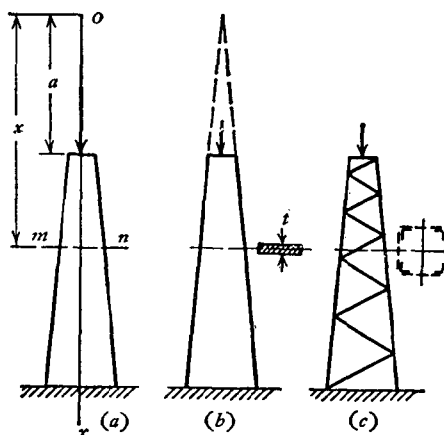


图 2.48



图 2.49

对于任何的 n 值，这方程可用貝塞尔函数来解。但对于 $n = 2$ 这特殊情形，这解可以用很簡單的方法得到。对 $n = 2$ ，方程 (b) 成为

$$\frac{EI_1}{a^2} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py, \quad (c)$$

代入

$$\frac{x}{a} = e^z, \quad (d)$$

这方程归结为常系数方程。由方程 (d) 得 $dz/dx = 1/x$ ，于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}, \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dz} \right) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \right) + \frac{dy}{dz} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}. \end{aligned} \quad (f)$$

式(f)可写作

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}, \quad (\text{g})$$

将(g)代入方程(c),得下列常系数微分方程:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + \frac{P a^2}{EI_1} y = 0. \quad (\text{h})$$

方程(h)的通解为

$$y = \sqrt{e^z} (A \sin \beta z + B \cos \beta z), \quad (\text{i})$$

式中的 A 与 B 为积分常数,并设量

$$\beta = \sqrt{\frac{P a^2}{EI_1} - \frac{1}{4}} \quad (\text{j})$$

为正实数. 用了方程(d),解(i)可表示为

$$y = \sqrt{\frac{x}{a}} \left[A \sin \left(\beta \ln \frac{x}{a} \right) + B \cos \left(\beta \ln \frac{x}{a} \right) \right]. \quad (\text{k})$$

由杆顶端的条件 ($y = 0$, 当 $x = a$), 得 $B = 0$. 在杆的下端, 其条件为

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{当 } x = a + l,$$

由以上条件得

$$\tan \left(\beta \ln \frac{a+l}{a} \right) + 2\beta = 0. \quad (\text{l})$$

知道了对于每一特殊情形的 a 与 l , 可由试算法得到满足方程(l)的最小 β 值. 于是由方程(j)可得最小临界荷重. 这值可由一般公式

$$P_{cr} = \frac{mEI_2}{l^2} \quad (2.53)$$

来表示, 式中的 I_2 为柱下端 ($x = a + l$) 的截面惯性矩. 系数 m 只与比值 a/l 有关, 其值列于表 2.11 内. 注意, 当 I_1/I_2 趋近于 1 时, 系数 m 趋近于 $\pi^2/4$.

表 2.11 方程(2.53)中系数 m 的值($n=2$)

I_1/I_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
m	0.250	1.350	1.593	1.763	1.904	2.023	2.128	2.223	2.311	2.392	$\pi^2/4$

对于实心锥形杆,令方程(b)中的 $n = 4$, 于是屈曲杆的微分方程为

$$\frac{EI_1}{a^4} x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = -Py. \quad (m)$$

若作代换 $x = 1/t$, 这方程将成为

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{Pa^4}{EI_1} y = 0, \quad (n)$$

这是贝塞尔微分方程的一种形式,其解为

$$y = t^{-1/2} [A_1 J_{-1/2}(\alpha t) + B_1 Y_{-1/2}(\alpha t)], \quad (o)$$

式中的 A_1 与 B_1 为积分常数, $J_{-1/2}(\alpha t)$ 与 $Y_{-1/2}(\alpha t)$ 分别表示第一类与第二类的 $-1/2$ 阶贝塞尔函数,而

$$\alpha = \sqrt{\frac{Pa^4}{EI_1}}. \quad (p)$$

$-1/2$ 阶贝塞尔函数可表为如下形式:

$$J_{-1/2}(\alpha t) = \frac{\cos(\alpha t)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \alpha t}},$$

$$Y_{-1/2}(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \alpha t}}$$

因此方程(n)的解为

$$y = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} [A_1 \cos(\alpha t) + B_1 \sin(\alpha t)],$$

而方程(m)的通解为

$$y = x \left[A_1 \cos \frac{\alpha}{x} + B_1 \sin \frac{\alpha}{x} \right], \quad (q)$$

式中的 A 与 B 为积分常数.

运用杆两端的条件,得方程

$$\tan \frac{\alpha l}{a(a+l)} = -\frac{\alpha}{a+l},$$

或

$$\frac{\tan \gamma}{\gamma} = -\frac{a}{l}, \quad (2.54)$$

式中

$$\gamma = \frac{al}{a(a+l)} = \frac{l}{a+l} \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_1}} \quad (2.55)$$

运用 $\tan x/x$ 的表¹⁾, 对于任何特定的 a/l 值, 由方程(2.54)可以很容易地解出 γ . 知道了 γ , 临界荷重可由方程(2.55)得到, 并由方程(2.53)这形式表示. 在表 2.12 内给出了对于这情形的几个 m 值.

表 2.12 方程(2.53)中系数 m 的值($n=4$)

I_1/I_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
m	1.202	1.505	1.710	1.870	2.002	2.116	2.217	2.308	2.391	$\pi^2/4$

以 $l/2$ 代替方程(2.53)中的 l , 可由以前的结果得到两端铰接且对中间截面对称的杆(图 2.50a)的临界荷重.

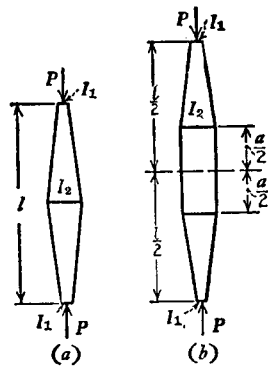


图 2.50

将方程(b)的解与稜柱杆的微分方程的解相结合, 可得到更一般的情形. 这样, 可得到如图 2.50 b 所示两端铰接杆的临界荷重, 这杆的中间部分是稜柱杆的. 相应于方程(a)中的不同指数值 n , 两端部分可以是各种形式的. 临界荷重仍可以方程(2.53)表示. 对于这种情形的系数 m 的值列于表 2.13 内.

取各种比值 I_1/I_2 及 a/l , 并取各种 n 值, 用了这表²⁾可以解有实际重要性的各种情形.

分布轴向力作用的柱 若一变截面柱承受分布轴向荷重, 则挠度曲线的微分方程总可以用贝塞尔函数来积分, 倘若弯曲刚度及分布荷重的强度可以

1) 参阅 Jahnke 与 Emde 的补篇第 32 页, *op. cit.*

2) 这表为 Dinnik 所计算, *loc. cit.* 说明这表运用的例子见这论文, 并见 Timoshenko, *Strength of Materials*, 3d ed., part II, p. 169, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1956.

表 2.13 方程(2.53)中系数 m 的值(对于图 2.50b 这杆)

I_1/I_2	n	a/l					
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.1	1	6.48	7.58	8.63	9.46	9.82	π^2
	2	5.40	6.67	8.08	9.25	9.79	
	3	5.01	6.32	7.84	9.14	9.77	
	4	4.81	6.11	7.68	9.08	9.77	
0.2	1	7.01	7.99	8.91	9.63	9.82	π^2
	2	6.37	7.49	8.61	9.44	9.81	
	3	6.14	7.31	8.49	9.39	9.81	
	4	6.02	7.20	8.42	9.38	9.80	
0.4	1	7.87	8.59	9.19	9.70	9.84	π^2
	2	7.61	8.42	9.15	9.63	9.84	
	3	7.52	8.38	9.12	9.62	9.84	
	4	7.48	8.33	9.10	9.62	9.84	
0.6	1	8.61	9.12	9.55	9.76	9.85	π^2
	2	8.51	9.04	9.48	9.74	9.85	
	3	8.50	9.02	9.46	9.74	9.85	
	4	8.47	9.01	9.45	9.74	9.85	
0.8	1	9.27	9.54	9.69	9.83	9.86	π^2
	2	9.24	9.50	9.69	9.82	9.86	
	3	9.23	9.50	9.69	9.81	9.86	
	4	9.23	9.49	9.69	9.81	9.86	
1.0		π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2

表示为

$$EI = EI_2 \left(\frac{x}{l} \right)^n, \quad (r)$$

$$q = q_2 \left(\frac{x}{l} \right)^p,$$

其中 I_2 及 q_2 为柱底部固定端的惯性矩及荷重的强度 (参阅图 2.51)。压力的临界值总可用下列方程表示:

$$P_{cr} = \int_0^l q_2 \left(\frac{x}{l} \right)^p dx = \frac{mEI}{l^2}. \quad (2.56)$$

对于方程 (r) 中各种 n 与 p 的值, 系数 m 的值列于表 2.14 内¹⁾。

表 2.14 方程(2.56)中系数 m 的值(对于图 2.51 这柱)

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	7.84	16.1	27.3	41.3		
1	5.78	13.0	23.1	36.1	52.1	
2	3.67	9.87	18.9	30.9	45.8	63.6
3		6.59	14.7	25.7	39.5	

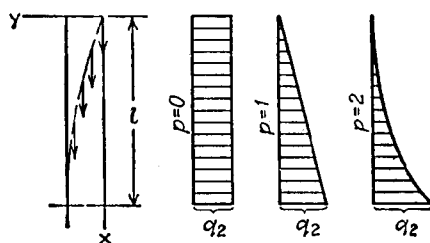


图 2.51

以 $l/2$ 代替方程(2.56)中的 l , 我们得到对中间截面对称的、两端铰接的杆在对称荷重作用下的临界压力。

最小重量的柱 对于一定的临界荷重, 找一重量为最小的实心柱的形式, 有时候是有实际意义的。拉格朗日为从事这问题的第一个人²⁾。他是这样地叙述这问题的: 将曲线绕在其平面内的一轴旋转, 求曲线的形状, 使这旋转体所成的柱的效率为最大。他的结论为: 等圆截面柱是效率最大的柱(这是不正确的)。克拉森³⁾(Clausen)对这问题作了进一步的研究。他让横截面的形式未定, 而只假设它们是相似的并有相同的方位。他的研究结果为: 效率最大的柱其体积为 $\sqrt{3}/2$ 乘以强度相同的圆截面柱的体积。用了方程(b)中各种不同的指数 n 的值, 渥诺⁴⁾(A. Ono)大体上也得到了相同的结论。对

1) 这表为 A. N. Dinnik 所计算, *loc. cit.*

2) Lagrange, *loc. cit.*

3) *Bull. Phys.-Math. Acad.*, St. Petersburg, vol. 9, pp. 368—379, 1851. 并参阅 E. L. Nicolai, *Bull. Polytech. Inst.*, St. Petersburg, vol. 8, p. 255, 1907, 及 H. Blasius, *Z. Math. u. Physik*, vol. 62, pp. 182—197, 1914.

4) Ono, *loc. cit.*

于杆的最小体积,他得到 n 值等于 0.93, 而相应的体积为强度相同的稜柱杆的体积的 87%.

当无精确的结果可用时,可用前一节所述的逐次逼近法来确定变横截面杆的临界荷重.

§ 2.17. 剪力对临界荷重的影响

在前面推演临界荷重的方程时, 在所用的挠度曲线的微分方程内略去了剪力对挠度的影响. 但当屈曲发生时, 将有剪力作用于杆的横截面. 现以图 2.52a 所示的柱, 讨论剪力对临界荷重的影响. 图 2.52b 表明作用于两横截面 m 与 n 之间的微段 dx 的剪力 Q . 这剪力的大小¹⁾为(参阅图 2.52c)

$$Q = P \frac{dy}{dx}. \quad (a)$$

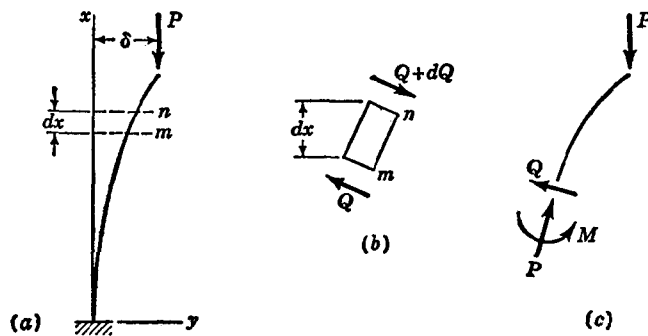


图 2 52

这剪力使挠度曲线的斜率的改变为 nQ/AG , 其中 A 为横截面积, G 为剪切模量, n 为与截面形状有关的系数. 对于矩形截面, $n=1.12$, 对于圆形截面, $n=1.11$. 对于绕横截面短轴而弯曲(即在翼缘平面内弯曲)的工字梁, 系数 $n \approx 1.2A/A_f$, 式中的 A_f 为两翼缘的面积. 这时 n 值在通常工字梁截面的 1.4 与板梁截面的 2.8 之间. 若工字梁在腹板平面内弯曲(即绕长轴而弯曲), 系数 $n \approx$

1) 注意到, 剪力 Q 作用于与杆轴线垂直的横截面.

A/A_w , 式中的 A_w 为腹板的面积。对于这情形, 典型的型钢的 n 值在 2 至 6 这范围内。

剪力 Q 所产生的斜率的改变率, 系由于剪切而引起的附加曲率, 并等于

$$\frac{n}{AG} \frac{dQ}{dx} = \frac{nP}{AG} \frac{d^2y}{dx^2}$$

挠度曲线的总的曲率等于弯矩所产生的曲率与剪力所产生的曲率之和。于是, 对于图 2.52 所示的柱, 挠度曲线的微分方程成为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(\delta - y)}{EI} + \frac{nP}{AG} \frac{d^2y}{dx^2}$$

或者

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI \left(1 - \frac{nP}{AG}\right)} (\delta - y). \quad (b)$$

这方程与方程 (2.1) 的不同之处, 只在于右边分母中的因子 $[1 - (nP/AG)]$ 。如在 §2.1 中那样进行计算, 得到临界荷重 P 的方程

$$\frac{P}{EI \left(1 - \frac{nP}{AG}\right)} = \frac{\pi^2}{4l^2}$$

由此

$$P_{cr} = \frac{P_c}{1 + \frac{nP_c}{AG}}, \quad (2.57)$$

式中 $P_c = \pi^2 EI / 4l^2$ 表示对于这情形的欧拉临界荷重。如是, 由于剪力的作用, 临界荷重按比值¹⁾

$$\frac{1}{1 + \frac{nP_c}{AG}} \quad (c)$$

1) 这结果首先为 F. Engesser 所得, *Zentr. Bauverwaltung*, vol. 11, p. 483, 1891. 并参阅 F. Nussbaum, *Z. Math. u. Physik*, vol. 55, p. 134, 1907. 将泊松比计入以改进式(c), 系由 R. Gran Olsson 所作, *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandling*, vol. 10, No. 21, p. 79, 1937 (德文).

而减小。对于实心柱，例如矩形或工字形截面，这比值与 1 很接近。所以这时剪力的影响可以略去。但对于以缀条或缀板联结的组合柱，剪力的影响有实际重要性，并将在 §2.18 中作进一步的研究。方程(2.57)的图线绘于图 2.54。

运用与方程(b)相似的挠度曲线的相应的微分方程，可对任何其他端点条件的压杆研究剪力的影响。

能量法 在研究剪力对临界荷重的影响时，亦可用能量法。例如有一两端铰接的杆(图2.36)。挠度曲线的一般表达式为

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

计及剪切应变能，我们得到

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_0^l \frac{nQ^2}{2AG} dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l y^2 dx + \frac{nP^2}{2AG} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \\ &= \frac{P^2 l}{4EI} \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m^2 + \frac{n\pi^2 P^2}{4AGl} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^2 a_m^2. \end{aligned} \quad (d)$$

在屈曲时力 P 所作的功为

$$\Delta T = \frac{\pi^2 P}{4l} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^2 a_m^2. \quad (e)$$

代入方程(2.31)，得到

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{\sum m^2 a_m^2}{\sum \left(1 + \frac{n\pi^2 EI m^2}{AGl^2}\right) a_m^2}. \quad (f)$$

P 的最小值可由只取级数(f)的首项而得到。于是

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{nP_e}{AG}}, \quad (2.58)$$

其中

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

如是，倘若以 P_e 为两端铰接杆的欧拉荷重，由于剪力，临界荷重将按比值(c)而减小。

修正的剪力方程 在以上的剪力影响的讨论中，用了方程(a)以计算剪力 Q 。考虑自图 2.52 所示柱截取的微段 mn 的变形(图 2.53)，可得另一表达式。图中的角度 $d\theta$ 表示由于弯矩 $M = P(\delta - y)$ 而形成的斜率的改变， θ 由铅直的 x 轴方向量至横截面的法线 N 。由于剪应变 γ ，将有一自法线 N 量

至挠曲柱的轴线的切线 T 的附加斜率。于是挠度曲线的斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \theta + \gamma = \theta + \frac{nQ}{AG}. \quad (g)$$

轴向力 P 在 N 方向的分量等于 $P \cos \theta \approx P$, 而另一分量 $Q = P \sin \theta \approx P\theta$. 代入方程(g), 斜率成为

$$\frac{dy}{dx} = \theta + \frac{nP\theta}{AG} = \theta \left(1 + \frac{nP}{AG} \right). \quad (h)$$

注意及 $d\theta/dx = M/EI = P(\delta - y)/EI$, 由方程(h)得下述曲率的表达式:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(\delta - y)}{EI} \left(1 + \frac{nP}{AG} \right). \quad (i)$$

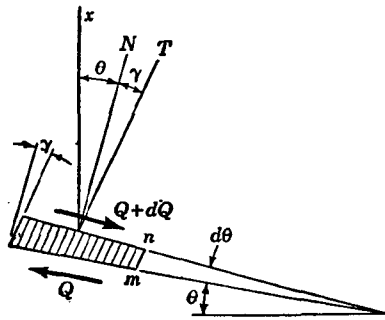


图 2.53

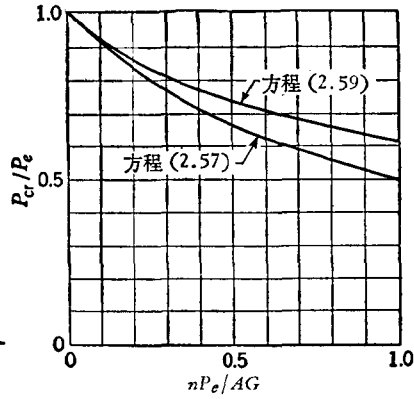


图 2.54

方程(i)与以前的方程(b)之间的差异, 是由于在推演方程(b)时剪力是由挠度曲线的总斜率 dy/dx [参阅方程(a)] 而计算的, 而在推演方程(i)时只用了横截面的转角。与以前一样解这方程(参阅 §2.1), 得临界荷重为

$$P_{cr} = \frac{\sqrt{1 + 4nP_e/AG} - 1}{2n/AG}, \quad (2.59)$$

式中的 $P_e = \pi^2 EI / 4l^2$. 对于实心柱, 由方程(2.57)与(2.59)所得的结果, 其差异是可以忽略的。但对于剪力影响异常大的情形, 例如螺旋弹簧的屈曲(参阅 §2.19), 方程(2.59)可能更为准确, 虽然用方程(2.57)更为安全些。对于两端铰接的柱, 倘若取 P_e 为两端铰接杆的临界荷重, 也可用方程(2.59)。图 2.54 中绘出了方程(2.57)与(2.59)的图线以作比较。

§2.18. 组合柱的屈曲

组合柱 组合柱的临界荷重总小于截面及细长比 l/r 相同的

实心柱的临界荷重。这临界荷重的降低主要是由于：对于缀合柱，剪力对于挠度的影响远比实心柱时大。临界荷重的实际值，与缀条的具体排列和大小有关。

如果缀合柱有甚多的节间（图 2.55a），则对于实心柱所推得的方程(2.57)可用来计算临界荷重。可将方程(2.57)写成形式

$$P_{cr} = \frac{P_c}{1 + \frac{P_c}{P_d}}, \quad (2.60)$$

式中的 P_c 为欧拉临界荷重，而对于缀合柱的量 $1/P_d$ 相当于对于实心柱的 n/AG 。于是，为了得到由于剪力所引起的挠度曲线的附加斜率 γ ，用 $1/P_d$ 乘剪力 Q 。于是有

$$\gamma = \frac{Q}{P_d}, \quad (a)$$

而为了对于每一特定情形确定量 $1/P_d$ ，必须研究剪力所产生的横向位移。

首先研究图 2.55a 所示的缀合柱。剪切位移是由于每一节间的缀条的伸长和缩短而引起的（图 2.55b 及 c）。当只考虑弯矩所

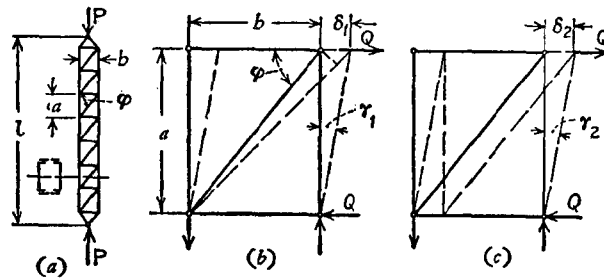


图 2.55

产生的挠度时，这些杆件的变形是被略去的。设诸结点为铰接，则由剪力 Q 所引起的斜杆的伸长为（图 2.55b）

$$\frac{Qa}{A_d E \sin \varphi \cos \varphi}, \quad (a)$$

式中的 φ 为水平杆与斜杆间的夹角， $Q/\cos \varphi$ 为斜杆内的拉力，

$a/\sin \varphi$ 为斜杆的长度，而 A_d 为位于柱两边的两斜杆的横截面积 (图 2.55a)。相应的横向位移为

$$\delta_1 = \frac{Qa}{A_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi}. \quad (b)$$

接下来考虑板条或水平缀条的缩短 (图 2.55c)，得相应的横向位移为

$$\delta_2 = \frac{Qb}{A_b E}, \quad (c)$$

式中的 b 为两铰之间板条的长度， A_b 为各位于柱一边的两板条的横截面积。

由方程(b)与(c)，得剪力 Q 所产生的总的角位移为

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{a} = \frac{Q}{A_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi} + \frac{Qb}{a A_b E}. \quad (d)$$

由方程(a)，得

$$\frac{1}{P_d} = \frac{1}{A_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi} + \frac{b}{a A_b E}. \quad (e)$$

将这值代入方程(2.60)，两端铰接缀条柱 (图 2.55a) 的临界荷重为¹⁾

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(\frac{1}{A_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi} + \frac{b}{a A_b E} \right)}. \quad (2.61)$$

在这表达式中， I 为柱的横截面的惯性矩。若横截面积 A_b 与 A_d 与槽钢的截面积 (图 2.55a) 或其他主杆的截面积相比为小量时，由方程(2.61)所得的临界荷重将远小于欧拉荷重值。于是，缀合柱的强度将远小于 EI 值相同的实心柱；但由于所用的材料较少，故缀合柱会较为经济。

1) 方程(2.61)首先为 F. Engesser 所推得, *Zentr. Bauverwaltung*, vol. 11, p. 483, 1891. 联系到 Quebec 桥的损坏, 对这问题的进一步的讨论, 参阅以下论文: F. Engesser, *ibid.*, vol. 27, p. 609, 1907, 及 *Z. Ver. deut. Ingr.*, p. 359, 1908; L. Prandtl, *Z. Ver. deut. Ingr.*, 1907; 及 Timoshenko, *Buckling of Bars of Variable Cross Section*, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1908.

当每节間中有两根斜綴杆时(图 2.56a), 可得到与方程(2.61)相似的方程. 在剪力作用下, 一斜杆被拉而另一斜杆被压. 板条并不传递剪力, 而这系統相当于图 2.56b 所示的. 略去方程(2.61)中含 A_b 的項并将截面积 A_d 加倍, 即得对于这情形的临界荷重. 于是

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{A_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi}}, \quad (2.62)$$

式中的 A_d 表示四个斜杆的横截面积, 它們在柱的同一节間內, 柱的每边各有两个. 方程(2.62)亦可用于单个的斜杆系統(图 2.56c), 而其中的 A_d 为两斜杆的横截面积之和, φ 如图所示.

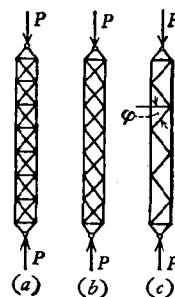


图 2.56

板条綴合柱 对于只用板条組成的柱(图 2.57), 要得到剪力 Q 所产生的横向位移, 必須考虑由截面 mn 及 m_1n_1 所截出的柱的微段的变形. 設这两截面为两槽鋼的挠度曲

綫的反曲点, 这一部分的弯曲如图 2.57b 所示. 横向挠度由两部分組成: 由于板条的弯曲而产生的位移 δ_1 ; 及由于槽鋼的弯曲所产生的 δ_2 . 在板条的两端有力偶 $Qa/2$ 作用, 板条每端的轉角为

$$\theta = \frac{Qab}{12EI_b},$$

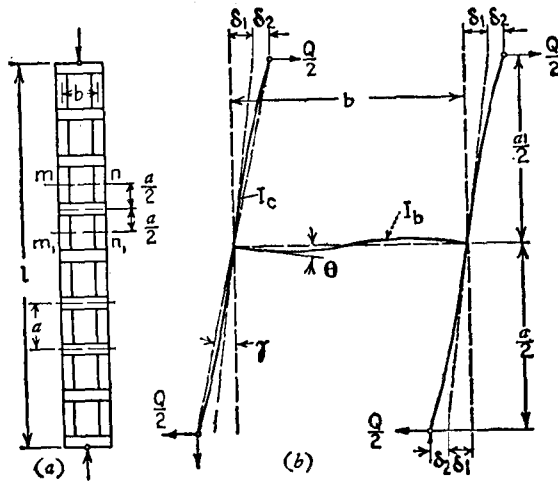
其中 b 为板条之长, EI_b 为其弯曲刚度. 由于板条的弯曲所产生的横向位移 δ_1 为

$$\delta_1 = \frac{\theta a}{2} = \frac{Qa^2b}{24EI_b}. \quad (f)$$

位移 δ_2 可由悬臂梁的挠度表达式得到, 其值为

$$\delta_2 = \frac{Q}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^3 \frac{1}{3EI_c} = \frac{Qa^3}{48EI_c}, \quad (g)$$

式中的 EI_c 为一个直立槽鋼的横截面的弯曲刚度. 如是, 剪力 Q 所产生的总的角位移为



II

图 2.57

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{\frac{1}{a}} = \frac{Qab}{12EI_b} + \frac{Qa^2}{24EI_c} \quad (h)$$

于是由方程(a), 得到

$$\frac{1}{P_d} = \frac{ab}{12EI_b} + \frac{a^2}{24EI_c}$$

将 $1/P_d$ 代入方程(2.60), 得到

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(\frac{ab}{12EI_b} + \frac{a^2}{24EI_c} \right)}, \quad (2.63)$$

式中的因子 $\pi^2 EI/l^2$ 为将整个柱作为实心柱所计算得的临界荷重。可以看出, 当板条的弯曲刚度很小时, 临界荷重远小于欧拉公式所给的值¹⁾。

1) 在 162 页给出了板条缀合柱的临界荷重的另一式子。

在計算角位移 γ 时，还要考虑到板条中的剪切，从图 2.57b 可以看出，板条内的剪力为

$$\frac{Qa}{b},$$

而相应的剪应变为

$$\frac{nQa}{bA_bG}, \quad (i)$$

式中的 A_b 为两个板条的横截面积，且因板条的横截面为矩形， n 等于 1.2。将式(i)加入以前的方程(h)，代替方程(2.63)，我們得到

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(\frac{ab}{12EI_b} + \frac{a^2}{24EI_c} + \frac{na}{bA_bG} \right)}. \quad (2.64)$$

若图 2.57 所示的組合柱的豎立槽鋼刚度非常小，或板条間的距离很大，則柱可能由于两相邻板条間槽鋼的局部屈曲而破坏。考虑及这样屈曲的可能性，我們来研究在两板条之間的如图 2.58 所示的柱微段的屈曲。設板条的刚度很大，在发生所設的屈曲时压力的临界值为(參閱图 2.4)

$$P = \frac{2\pi^2 EI_c}{a^2}. \quad (i)$$

要計及軸向荷重 $P/2$ 对于鉛直槽鋼弯曲的影响，可将方程(g)写成形式[參閱§1.11 的方程(a)]

$$\delta_2 = \frac{Qa^3}{48EI_c} \frac{1}{1 - \alpha}, \quad (k)$$

式中

$$\alpha = \frac{P_{cr}}{\frac{2\pi^2 EI_c}{a^2}}. \quad (l)$$

运用 δ_2 的表达式(k)，可将图 2.57 中的支柱的临界荷重 P_{cr} 表达为

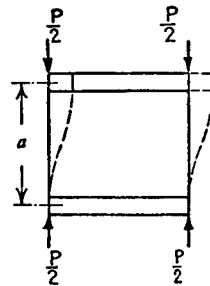


图 2.58

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \times \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left[\frac{ab}{12EI_b} + \frac{a^2}{24EI_c} \frac{1}{1-\alpha} + \frac{na}{bA_bG} \right]}. \quad (2.65)$$

因 α 与 P_{cr} 有关, 所以这方程只能用试算法来解. 还应注意, 由于板条并非刚体, 在两板条之间的柱(图 2.58)的临界荷重总小于方程(i)所给者. 这意味着 α 的真值大于方程(1)所给者, 因而真正的临界荷重小于由方程(2.65)所得者. 但这些差异无关紧要, 因为方程(2.65)的分母中包含 I_c 的项比包含 I_b 的项小得多.

当节间(图 2.57a)的数目大于六时, 所作的实验¹⁾与方程 (2.65) 都很符合. 组合柱的设计将在 §4.6 中讨论.

具有穿孔盖板的柱²⁾ 在图 2.59a 中示出了具有穿孔盖板的典型柱的横截面. 在计算柱的横截面积及惯性矩时, 实用上可足够准确地用净面积(截面 nm). 在决定由剪力 Q 所引起的横向位移时, 仍研究柱的一小段(图 2.59b). 除了以两孔间的部分盖板代替狭缀板而外, 这小段与板条缀合柱(图 2.57b)的小段相似. 这样, 就得到图 2.59c 中的理想化了的小段, 其中水平的横杆可视为刚体. 作为悬臂梁的铅直凸出部分的长度, 介乎 $c/2$ 与 $a/2$ 之间. c 为孔长. $3c/4$ 这值是合理的, 由它所得的结果与实验相符³⁾.

现对此情形将板条缀合柱的方程加以修改. 因横杆(与板条相似)为刚体, 可将 $I_b = \infty$ 代入方程(f)并得到 $\delta_1 = 0$. 位移 δ_2 可作为悬臂梁[方程(g)]的挠度来决定, 并得到

$$\delta_2 = \frac{Q}{2} \left(\frac{3c}{4} \right)^3 \frac{1}{3EI_f} = \frac{9Qc^3}{128EI_f}, \quad (m)$$

式中的 I_f 表示柱的“翼缘”, 即在 z 轴一边的柱的全部有效面积, 对于翼缘形心轴 1-1 的惯性矩. 由于 Q 角位移为

1) 参阅 Timoshenko, *Ann. ponts et chaussées*, series 9, vol. 3, p. 551, 1913.

2) 关于这类柱的一个完整的报告, 为 M. W. White 及 B. Thürlimann 所作, Study of Columns with Perforated Cover Plates, *AREA Bull.* 531, 1956.

3) *Ibid.*

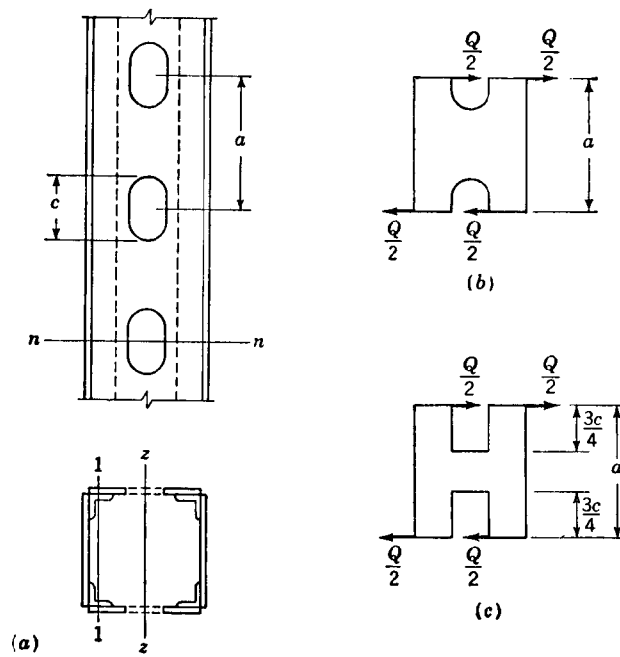


图 2.59

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{\frac{1}{2}a} = \frac{9Qc^3}{64aEI_f}$$

因此

$$\frac{1}{P_d} = \frac{9c^3}{64aEI_f} \quad (n)$$

由此得具有穿孔盖板的柱的临界荷重

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{9c^3}{64aEI_f}} \quad (2.66)$$

§ 2.19. 螺旋弹簧的屈曲

$$P_{cr} = \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2\alpha_0/l^2\beta_0} - 1}{2l_0/\beta_0 l}. \quad (c)$$

考虑及弹簧的压缩,得

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{P_{cr}}{\gamma_0} \quad \text{或} \quad l = l_0 \left(1 - \frac{P_{cr}}{\gamma_0}\right). \quad (d)$$

将式(d)的 l 代入方程(c),得对于临界荷重的方程:

$$\left(\frac{P_{cr}}{\gamma_0}\right)^2 \left(\frac{\gamma_0}{\beta_0} - 1\right) + \frac{P_{cr}}{\gamma_0} - \frac{\pi^2\alpha_0}{l_0^2\gamma_0} = 0,$$

由上式得

$$\frac{P_{cr}}{\gamma_0} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\pi^2\alpha_0}{l_0^2\gamma_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\beta_0}\right)}}{2 \left(1 - \frac{\gamma_0}{\beta_0}\right)}. \quad (2.67)$$

由于只是较小的 P_{cr}/γ_0 值才有实际意义,故在方程(2.67)中应取负号。于是由方程(d)可得屈曲了的弹簧的受压后的长度。

对于圆截面金属丝所做成的弹簧,其弯曲刚度与剪切刚度为¹⁾

$$\alpha_0 = \frac{EI l_0}{\pi R n_0} \frac{1}{1 + \frac{E}{2G}}, \quad (e)$$

$$\beta_0 = \frac{EI l_0}{\pi R^3 n_0}, \quad (f)$$

式中的 I 为圆截面对于直径的惯性矩。压缩刚度为²⁾

$$\gamma_0 = \frac{GI l_0}{\pi R^3 n_0}. \quad (g)$$

将方程(e)至(g)代入方程(2.67),并取 $E/G = 2.6$ (这相应于泊松比 0.3),得临界荷重的表达式:

$$\frac{P_{cr}}{\gamma_0} = 0.8125 \left[1 \pm \sqrt{1 - 27.46 \left(\frac{R}{l_0}\right)^2} \right]. \quad (2.68)$$

图 2.60 表示 P_{cr}/γ_0 为 l_0/R 的函数的曲线。实线是在 (2.68) 中取负号而得的,而虚线是取正号得到的。这曲线表明,当 $l_0/R = 5.24$ 存在着—临界值,小于这值时弹簧并不屈曲。若圈数并不很少并且在屈曲发生之前圈与

1) 参阅 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part II, 式 (264), p. 297, 及式 (o), p. 298, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.

2) *Ibid.*, part I, 式 (162), p. 293, 1955.

圈并不接触,这些计算与实验很相符合¹⁾。

§ 2.20. 杆系的稳定性

在 §2.18 中,以某些简化假设为基础,讨论了组合柱屈曲的几个问题。要得到这些问题的更满意的解,必须用弹性杆系稳定性的一般理论²⁾。首先研究铰接的桁架,并以只由这样两杆所组成的简单系统(图 2.61)作为所研究的第一个问题,即在铅直荷重 P 的作用下,这系统的铅直杆受压,而倾斜杆不受力。

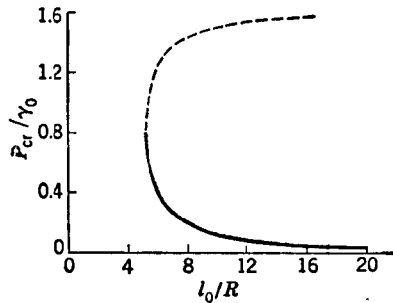


图 2.60

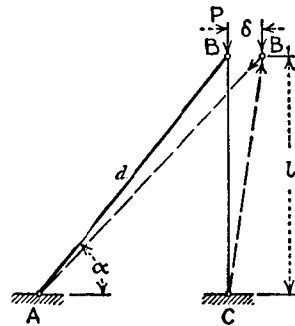


图 2.61

假设这铅直杆为刚体,而倾斜杆为弹性的,则可用能量法或平衡法(参阅 89 页)很容易地得到压力 P 的临界值。设在铅直荷重的作用下,这系统的平衡位置如虚线所示,运用平衡法决定保持这系统于这位置所需荷重之大小。若 δ 为结点 B 的小位移,倾斜杆内的拉力为 $A_d E \delta \cos \alpha / d$, 其中 d 为倾斜杆的长度, α 为倾角, A_d 为倾斜杆的截面积。结点 B_1 (图 2.61) 在水平方

- 1) 关于实验结果以及考虑弹簧的其他端点条件及其他截面形状的分析,参阅 Haringx, *loc. cit.*
- 2) 这样的理论为 R. v. Mises 所创, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 3, p. 407, 1923. R. v. Mises 及 J. Ratzersdorfer 应用这方法于各种缀合柱, *ibid.*, vol. 5, p. 218, 1925 及 vol. 6, p. 181, 1926. 亦曾讨论过其他情形: H. Müller-Breslau, *Die Neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*, 4th ed., p. 398, Leipzig, 1913, 及 5th ed., p. 380, Leipzig, 1924; L. Mann, *Z. Bauwesen*, vol. 59, p. 539, 1909; K. Ljungberg, *Der Eisenbau*, p. 100, 1922; M. Grüning, *Die Statik des ebenen Tragwerkes*, Berlin, 1925; Wilhelm Wenzel, *Über die Stabilität des Gleichgewichtes ebener elastischer Stabwerke*, Dissertation, University of Berlin, 1929.

向的平衡方程为

$$A_d E \frac{\delta \cos^2 \alpha}{d} = P \frac{\delta}{l},$$

由这方程,

$$P_{cr} = A_d E \sin \alpha \cos^2 \alpha. \quad (a)$$

要得到这问题的更准确的解,必须考虑铅直杆的弹性。在荷重 P 的作用下,这杆将被压缩。如果以原来未变形的系统为基础来计算杆内的力,如通常计算杆内的力那样,则倾斜杆并不受力。因此,铅直杆的任何压缩,将使这系统产生横向位移,并在荷重开始作用时,结点 B 即开始横向移动。在这样的情况下,并无使横向位移成为可能的明确的临界荷重值。要免除考虑上述横向位移,我们设铅直杆先被荷重 P 压缩;而只是当这变形发生以后,倾斜杆才与结点 B 相联结。如是,在压力 P 的作用下,杆 BC 的位置系铅直,而倾斜杆内并无应力。要计算临界荷重 P ,我们与以前一样地设结点 B 有一微小横向位移。由于这位移,倾斜杆内将产生力,并且将改变铅直杆内的压力。所以,由于铅直杆内压力的改变,结点 B 的任何横向位移 δ ,将同时引起这结点的垂直位移 δ_1 。若以 X 表示倾斜杆中所产生的张力,则在铅直杆内压力相应地增加 $X \sin \alpha$,而其缩短为

$$\delta_1 = \frac{Xl \sin \alpha}{A_v E},$$

其中 A_v 为铅直杆的横截面积。倾斜杆的总伸长等于 $\delta \cos \alpha - \delta_1 \sin \alpha$ 。于是力 X 可由方程

$$\frac{Xd}{A_d E} = \delta \cos \alpha - \frac{Xl \sin^2 \alpha}{A_v E},$$

得到,于是

$$X = \frac{A_d E \delta \cos \alpha}{d \left(1 + \frac{A_d}{A_v} \sin^3 \alpha \right)}.$$

将结点 B 的平衡方程写为

$$X \cos \alpha = \frac{P\delta}{l},$$

并代入上述 X 的表达式,得到

$$P_{cr} = \frac{A_d E \sin \alpha \cos^2 \alpha}{1 + \frac{A_d}{A_v} \sin^3 \alpha}. \quad (b)$$

将这表达式与以前所得的式(a)相比较,可以看出,公式(b)分母中的第二项

给出了铅直杆受压缩的影响。

由方程(b)所计算得的临界荷重, 只当它小于将这系统的铅直杆作为两端铰接杆的临界荷重时, 才有实际意义, 因为否则这系统的损坏将由于铅直杆的屈曲而并不是由于横向位移的结果(图 2.61)。如是, 可以写出方程

$$\frac{A_d E \sin \alpha \cos^2 \alpha}{1 + \frac{A_d}{A_v} \sin^3 \alpha} \leq \frac{\pi^2 E A_v r_v^2}{l^2},$$

式中 l/r_v 为铅直杆的细长比。设两杆的 E 相同, 上述方程可写成以下的形式:

$$A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \leq \frac{\pi^2 A_v r_v^2}{l^2} + \frac{A_d r_v^2 \pi^2 \sin^3 \alpha}{l^2}.$$

因 $(r_v/l)^2$ 通常为一很小的量, 所以可得结论: 只是当 A_d 远比 A_v 为小或角 α 很小时, 图 2.61 所示这种不稳定性才会发生。在这两种情况下, 式 (b) 的分母的第二项很小, 可以略去不计; 于是对于实用, 式 (a) 是足够准确的了。

在以上的讨论中, 曾设铅直杆先被荷重 P 所压缩, 然后才联结倾斜杆。如果这系统是在无应力的条件下联接起来的, 则正如以上所述, 任何铅直荷重 P 的作用将产生一横向位移。这情况与杆为稍微偏心的力所压的情形类似。从被压一开始, 这样的杆就开始弯曲, 但这弯曲是很小的, 而仅当荷重趋近于中心受压杆的临界值时, 弯曲才开始很快地增加。对于以上这系统情况也一样, 仅当 P 力趋近于算式 (b) 的值时, 横向位移才开始迅速地增加。

我们现在来研究铰接桁架的一般情形, 并且为简单计, 设所有的结点均都在同一平面内。若 l_{ik} 为在两节点 i 与 k 之间的杆的原长, 而在荷重作用后, 这杆的长度为 a_{ik} , 于是这荷重所产生的杆内的力为 $A_{ik}E(a_{ik} - l_{ik})/l_{ik}$, 其中 A_{ik} 为杆的横截面积。对于任何结点 k 的平衡方程可写作通常的形式:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{A_{ik}E(a_{ik} - l_{ik}) \cos \alpha_{ik}}{l_{ik}} - X_k &= 0, \\ \sum_i \frac{A_{ik}E(a_{ik} - l_{ik}) \sin \alpha_{ik}}{l_{ik}} - Y_k &= 0, \end{aligned} \quad (c)$$

其中, α_{ik} 表示桁架变形以后杆 ik 与 x 轴所夹的角; X_k 及 Y_k 为作用于结点 k 的任何荷重的分量, 而这总和须包括交于结点 k 的所有杆。在计算荷重的临界值时, 我们与以前一样地进行: 假设这系统离开其平衡位置有一无限小的位移, 并计算保持这系统在这位移后的位置平衡所须的荷重值。这值就是临界荷重。以 δx_k 及 δy_k 表示结点 k 的小位移的分量, 而以 δx_i 及 δy_i 为结点 i 的位移分量。于是由简单的几何关系(图 2.62)可以看出, 相应于以

上的小的位移, 杆 ik 长度的微小改变 δa_{ik} , 及角度 α_{ik} 的微小改变 $\delta \alpha_{ik}$ 各为

$$\delta a_{ik} = (\delta x_k - \delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\delta y_k - \delta y_i) \sin \alpha_{ik},$$

$$\delta \alpha_{ik} = \frac{1}{a_{ik}} [-(\delta x_k - \delta x_i) \sin \alpha_{ik} + (\delta y_k - \delta y_i) \cos \alpha_{ik}]. \quad (d)$$

以 $a_{ik} + \delta a_{ik}$ 及 $\alpha_{ik} + \delta \alpha_{ik}$ 代方程 (c) 中的 a_{ik} 及 α_{ik} , 即得到这系统的新位置的平衡方程。由于位移 δx 及 δy 系无限小, 并运用方程 (c), 上述方程成为

$$\sum_i \frac{A_{ik} E}{l_{ik}} \cos \alpha_{ik} \delta a_{ik} - \sum_i \frac{A_{ik} E (a_{ik} - l_{ik})}{l_{ik}} \sin \alpha_{ik} \delta \alpha_{ik} = 0,$$

$$\sum_i \frac{A_{ik} E}{l_{ik}} \sin \alpha_{ik} \delta a_{ik} + \sum_i \frac{A_{ik} E (a_{ik} - l_{ik})}{l_{ik}} \cos \alpha_{ik} \delta \alpha_{ik} = 0. \quad (c)$$

对于所有的结点写出这样的方程¹⁾, 并将方程 (d) 中 δa_{ik} 及 $\delta \alpha_{ik}$ 的值代入, 即得到与独立位移 δx , δy 数目相等的齐次线性方程以决定 δx 与 δy 。当这些方程给出位移 δx 与 δy 的非零解时, 所设的离开平衡位置的位移是可能的。于是我们得到结论: 使这些方程的行列式等于零, 就能得到荷重的临界值。

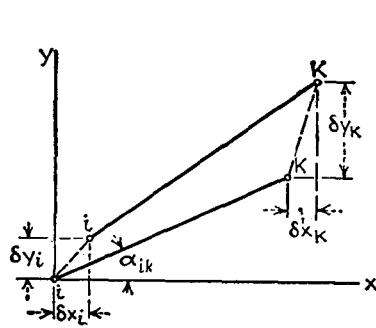


图 2.62

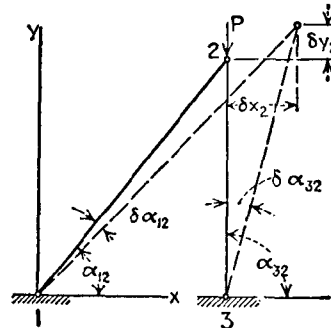


图 2.63

现将这方法应用于以上所讨论的问题 (图 2.63)。因铰 1 与 3 为固定, 所以只有两个独立的位移 δx 及 δy 。由方程 (d), 长度 a_{12} 与 a_{32} 的改变及角 α_{12} 及 α_{32} 的改变各为

1) 对于固定支座处的结点, δx 与 δy 均为零。对于在滚轴上的结点, 则位移 δx 与 δy 中只有一个是独立的。

$$\begin{aligned} \delta a_{12} &= \delta x_2 \cos \alpha_{12} + \delta y_2 \sin \alpha_{12}, & \delta a_{32} &= \delta y_2; \\ \delta \alpha_{12} &= \frac{1}{a_{12}} (-\delta x_2 \sin \alpha_{12} + \delta y_2 \cos \alpha_{12}), & \delta \alpha_{32} &= -\frac{\delta x_2}{a_{32}}. \end{aligned}$$

代入方程(c), 得到

$$\begin{aligned} \left(-\frac{P}{a_{32}} + \frac{A_{12}E}{a_{12}} \cos^2 \alpha_{12}\right) \delta x_2 + \frac{A_{12}E \sin \alpha_{12} \cos \alpha_{12}}{a_{12}} \delta y_2 &= 0, \\ \frac{A_{12}E \sin \alpha_{12} \cos \alpha_{12}}{a_{12}} \delta x_2 + \left(\frac{A_{12}E \sin^2 \alpha_{12}}{a_{12}} + \frac{A_{32}E}{a_{32}}\right) \delta y_2 &= 0. \end{aligned}$$

使这两方程的行列式等于零, 即得荷重 P 的临界值; 这值与以前所给的值(b) 相同。

现将这方法应用于图 2.64 所示的情形, 并以 l 与 A 表示水平杆的长度及横截面积, 而以 l_1 及 A_1 表示倾斜杆的相应的值, 则荷重 P 的临界值为¹⁾

$$P_{cr} = \frac{AE}{\cot^2 \alpha \left(3 + \frac{2l_1 A}{l A_1 \cos^2 \alpha}\right)}. \quad (f)$$

倾斜杆的刚度非常大时, P_{cr} 成为

$$P_{cr} = \frac{AE}{3 \cot^2 \alpha}. \quad (g)$$

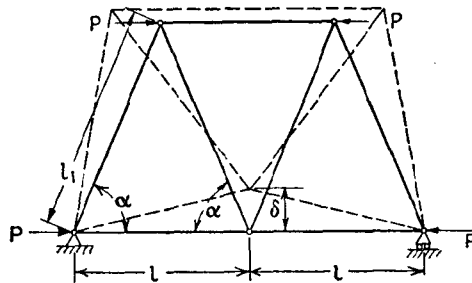


图 2.64

这结果可由简单地考虑图 2.64 中虚线所示的变位后的平衡而得。若由于这系统的所设的位移在顶部的水平杆内压力减少了 X , 则在底部水平杆内的压力将增加 $X/2$, 并且这些杆的附加的缩短为 $Xl/2EA$ 。考虑了这缩短及下部弦杆的中间结点的挠度 δ , 则顶部水平杆的伸长等于

1) 参阅 R. v. Mises 及 J. Ratzersdorfer, *Z. Math. u. Physik*, vol. 5, p. 227, 1925.

$$2 \left(\frac{\delta l_1 \sin \alpha}{l} - \frac{Xl}{4AE} \right),$$

而力 X 可由方程

$$\frac{l_1 \delta \sin \alpha}{l} - \frac{Xl}{4AE} = \frac{Xl}{2AE}$$

得到, 由此得出

$$X = \frac{4AE l_1 \delta \sin \alpha}{3l^2}.$$

将这代入系统在变位后的平衡方程

$$P\delta = Xl_1 \sin \alpha,$$

即得临界荷重值 (g). 用一截面将桁架截开, 并以变位后的下部弦杆的中间结点为矩心取矩, 即得上述这平衡方程.

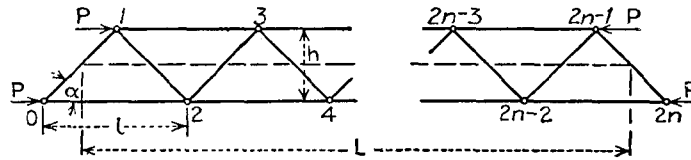


图 2.65

若桁架有许多节间(图 2.65), 则假设斜杆为刚体, 我们得到压力的临界值为¹⁾

$$(2P)_{cr} = m \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (2.69)$$

式中,

$$m = \frac{(4n-2)^2}{\pi^2} \tan^2 \frac{\pi}{4n-2} \quad (n = \text{节间的个数}),$$

$$L = \left(n - \frac{1}{2}\right) l, \quad I = \frac{Ah^2}{2} = \frac{A}{2} \left(\frac{l \tan \alpha}{2}\right)^2,$$

A = 弦杆的横截面积.

可以看出, 当 n 增加时, 系数 m 趋近于 1, 而轴向压力 $2P$ 的临界值趋近于一长为 L 而 $I = Ah^2/2$ (图 2.65) 的实心杆的欧拉值.

在另一极端情况下, 即弦杆的刚度远较斜杆为大, 且 n 亦很大时, 则精确计算的结果与以前用近似法得到的式 (2.62) 完全相同. 当斜杆与弦杆的刚

1) 参阅 R. v. Mises 及 J. Ratzersdorfer, Z. angew. Math. u. Mech., vol. 5, p. 218, 1925. 及 vol. 6, p. 181, 1926.

度同数量级时¹⁾,亦得到相同的结果。

以上的结果是假设了所有的结点均为理想的铰而得到的。若设弦杆为连续杆而只有斜杆是铰接的,精确的计算指出²⁾,这附加的刚度可以用推演方程(2.63)的方法近似地去计算。因此,如果节间的数目较多时,例如不少于六个,则在实际计算中总可用近似方程(2.62)与(2.63)。

在讨论框架结构时,我们首先讨论图2.66所示的单个框架。设 I 与 l 为铅直杆的截面的惯性矩及长度,而 I_1 与 b 为水平杆的相应的量。设在铅直荷重 P 的作用下,这框架发生如图所示的侧向屈曲,并以 M 表在刚结点处的弯矩,则铅直

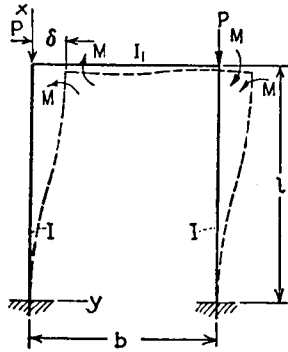


图 2.66

杆的挠度曲线的微分方程为

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = P(\delta - y) - M, \quad (h)$$

这方程的解为

$$y = A \cos kx + B \sin kx + \delta - \frac{M}{P},$$

式中

$$k^2 = \frac{P}{EI}.$$

由固定端条件决定常数 A 及 B 后,得到

$$y = \left(\delta - \frac{M}{P} \right) (1 - \cos kx). \quad (i)$$

铅直杆的顶端的条件为

$$(y)_{x=l} = \delta, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{Mb}{6EI_1}, \quad (j)$$

代入 y 的方程(i),得到

$$\begin{aligned} \delta \cos kl + \frac{M}{P} (1 - \cos kl) &= 0, \\ k\delta \sin kl - \frac{M}{P} \left(k \sin kl + \frac{bP}{6EI_1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (k)$$

1) *Ibid.*

2) 参阅 Wenzel, *loc. cit.*

使这两方程的行列式为零,得到下列计算荷重 P 的临界值的方程:

$$\frac{kl}{\tan kl} = -\frac{6I_1}{bl}. \quad (1)$$

若水平杆为刚体,于是 $I_1 = \infty$, 并得到

$$kl = \pi; \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (m)$$

在另一极端情况下,即 $I_1 = 0$, 由方程(1)得到

$$kl = \frac{\pi}{2}; \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \quad (n)$$

对于在这两者之间的所有的情况, P_{cr} 的值可由解方程(1)而得到.

在以上的讨论中,我们略去了铅直杆在屈曲时长度的改变. 从图 2.66 可以看出,由于弯矩 M 的作用,在左边的铅直杆内将产生拉力,在右边的铅直杆内将产生压力,其值均为 $2M/b$. 相应的长度的改变为 $2Ml/AEb$, 而水平杆的转角为 $4Ml/AEb^2$. 因此(i)的第二个条件为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{Mb}{6EI_1} + \frac{4Ml}{AEb^2}.$$

在方程(k)中作相应的更改,我们最后得到决定荷重 P 的临界值的式

$$\frac{kl}{\tan kl} = -\frac{6I_1}{bl} \frac{1}{1 + \frac{24I_1}{Ab^3}}. \quad (o)$$

这方程右边最后的因子表示铅直杆的轴向变形对临界荷重的影响. 因 I_1 通常远较 Ab^2 为小,这影响很小,通常可略去不计.

若框架(图 2.66)并不是对称的或荷重并不对称,则决定临界荷重值变得更为复杂,因为必须考虑顶部两结点的位移和转动¹⁾.

对于各杆相同且同样地受压的正方形框架(图 2.67),将发生如图所示的屈曲. 每杆的条件与两端铰接的杆相同,所以临界压力由式(2.5)给出. 对于各杆相同且同样地受压的 n 条边的任意正多边形(图 2.68),诸杆的临界力由下列方程给出²⁾:

$$\begin{aligned} \text{对 } n > 3, \quad P_{cr} &= \left(\frac{4\pi}{n}\right)^2 \frac{EI}{l^2}; \\ \text{对 } n = 3, \quad P_{cr} &= (1.23\pi)^2 \frac{EI}{l^2}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

1) R. v. Mises 及 J. Ratzersdorfer 讨论了好几个这类例子, *loc. cit.*

2) *Ibid.*

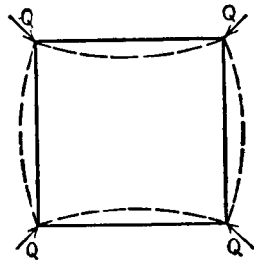


图 2.67

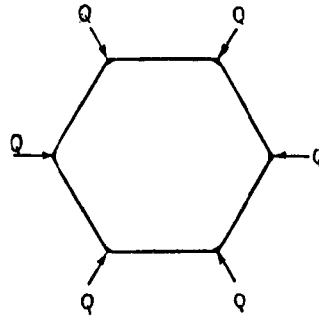


图 2.68

对于更复杂的框架结构, 已创有稳定性的一般理论¹⁾。运用与以上用于铰接桁架类似的方法, 令表示微小挠曲下系统结点的平衡条件的齐次线性方程的行列式为零, 即得到荷重的临界值。

将这方法应用于板条缀合柱(图 2.57), 并用与 §2.18 中同样的记号, 即得板条的刚度很大时的临界荷重的表达式:

$$P_{cr} = \frac{2z^2 EI_c}{a^2}. \quad (2.71)$$

数值系数 z 得自超越方程

$$\frac{4I_c}{A_c b^2} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n} \frac{\sin z}{z}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos z}, \quad (p)$$

式中 $n = l/a$ 表示柱的节间的数目, A_c 为一个槽钢的横截面积, b 为板条的长度, 等于两槽钢中心线间的距离, I_c 为一个槽钢的截面惯性矩。计算表明, 近似方程(2.64)与更精确解(2.71)很相符合。

作为一数字的例题²⁾, 取

$$\begin{aligned} \frac{A_c b^2}{4I_c} &= 180, & n &= 10, \\ I &= 2I_c + \frac{A_c b^2}{2} = 362I_c. \end{aligned}$$

1) *Ibid.*

2) 这些数据取自 Timoshenko 在他自己实验中所用的钉有板条缀合柱试件的尺寸, 参阅 *Ann. ponts et chaussées*, series 9, vol. 3, p. 551, 1913.

将这些数据代入方程(ρ),得到

$$z = 2.583,$$

由方程(2.71),临界荷重为

$$P_{cr} = 0.369 \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

当 $I_b = \infty$, $A_b = \infty$ 时,近似方程(2.64)给出

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 I a^2}{24 I_c l^2}} = 0.403 \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

于是,对于这极端情形,即当板条缀合柱的临界荷重仅为相应实心柱的40%时,近似方程的误差约为9%。当板条缀合柱的临界荷重与实心柱的相差不大时,方程(2.64)将是一较好的近似,并可以足够准确地用于实际设计及当板条的弯曲刚度不很大的情形。

刚结点框架的稳定性亦可用力矩分配法来研究。在运用这方法时,假设一组外力的值,并设桁架结点为铰接而定出杆内相应的轴向力;然后在框架的一结点施以一任意的弯矩,并按通常的方法将框架的弯矩进行分配。但在力矩分配计算中所用的劲度与传递系数须加以修正,以包括轴向荷重的影响¹⁾。若在力矩分配计算中最终的端弯矩收敛于一定的值,则这框架一般是稳定的。将作用于框架的荷重增大,但保持它们之间的原有比例不变,重复计算。若荷重已超过临界荷重值,则力矩分配计算一般不会收敛到杆的端弯矩的确定值。于是,连续运用这计算,可决定临界荷重²⁾。

§ 2.21. 非保守力的情形

在前面许多节中,我们的分析是从柱的稍微屈曲形式出发的,但从未提及自原先直的形式到最终屈曲形式的变形过程。由于我们只处理保守力,这是可以的。对于保守力,在位移时力所作的功只与始末位置有关,而与力作用点的途径无关。例如,重力或重量所作的功只与物体重心的下降有关。在以能量法计算临界荷重时,我们利用了这一事实,即外力所作的功为 $\Delta T = P\lambda$, 式中 λ 表示力 P 作用点始末位置间沿力方向的距离。又如,当用平衡微分方程时,我们设屈曲的形式是存在的,而由端点条件决定维持杆处于

1) B. W. James 确定了这些系数的修正值, *NACA Tech. Note* 534, 1935.

2) 这方法的正确性系由 N. J. Hoff 所建立, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 8, No. 3, pp. 115—119, 1941. 并参阅 N. J. Hoff, B. A. Boley, S. V. Nardo 及 S. Kaufman, *Trans. ASCE*, vol. 116, p. 958, 1951.

这形式所需的最小的力。这临界力与杆到达所设的屈曲形状的过程无关。

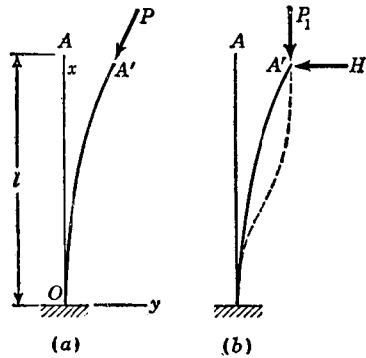


图 2.69

对于非保守力的情形，以上这两个方法(称为静力方法)可能都不适用，而必须运用稳定性的动力准则¹⁾。在图 2.69a 中示出了非保守力作用于柱的例子。设一常值压力 P 作用于柱，且在屈曲时这力总作用在柱的挠度曲线在端点的切线方向。在这样的情况下，就不可能只以初始位置 A 及终了位置 A' 为基础来计算力 P 在柱屈曲时所做的功，而还须知道在每一中间位置的切线的方向。为了指明这一点，将

力 P 分解为铅直分量 P_1 及水平分量 H (图 2.69b)。若挠度很小，铅直分量可取作与 P 相等。若在屈曲时点 A 的切线保持铅直(如虚线所示)，并且只在达到点 A' 后才允许转动，则水平分量 H 将不作功。如是，所作的总功与铅直荷重作用于柱的通常情形相同。若在点 A 的切线与力 P 在屈曲时连续地转动，则将得出不同的结果，因那时水平分量 H 亦做功。显然，仅当对柱在屈曲时的挠度曲线有更多的资料可用时，才可以得到力 P 做功的值。这表明，对于这情形不能用能量法来计算 P_{cr} 。

如果企图用微分方程(2.9)来决定 P_{cr} ，我们看到，柱的下端为固定(图 2.69a)，故条件为

$$y = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{当 } x = 0; \quad (a)$$

在柱的顶端，弯矩为零，而剪力 V 为 $-H$ (它等于 $-P dy/dx$)。于是由 §1.2 的方程(1.3)与(1.4)，得到条件

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad \text{当 } x = l. \quad (b)$$

用这些条件以决定通解[方程(2.10)]的四个积分常数，可知仅当取所有常数均为零时才能满足这些条件。由此可得出结论：在弹性范围内，只可能有直的平衡形式。这是由静力学观点所得出的结论。我们再从动力学观点来研

1) 参阅 H. Ziegler 的论文, *Advances in Appl. Mech.*, vol. 4, pp. 357—403, 1956; 及 *Ingr.-Arch.*, vol. 20, No. 1, p. 49, 1952.

究柱的稳定性。

在论及动力稳定准则时,首先设为荷重作用的柱受到一初始扰动而产生小振动。若这振动随时间而减小,则柱的直的平衡形式是稳定的。由于总有阻尼作用,这初始振动逐渐消失,经过一段时间后,柱回复其原来的直的形式。另一方面,如果外力作用于柱时振幅无限地增大,则柱的直的平衡形式是不稳定的。

在以前讨论保守力的情形时会指明(参阅 89 页):若荷重低于临界值,柱离开原来直的任何挠曲,相应于系统的总势能(杆的应变能加荷重的势能)的增加。若由一起始能量给柱以小量的动能,并且随之发生振动,则由能量守恒原理可得结论:振动没有增长的趋势。因此,由静力方法所决定的临界荷重亦将符合稳定性的动力准则。对于非保守力,情况就不同。若杆已开始微小的振动,力可能产生正的功,结果振幅不断增大。这种情况表明了不稳定性。

回到前面承受非保守力的杆的例子(图 2.69),并运用稳定性的动力准则,我们必须研究柱的微小振动¹⁾。运用达朗倍尔原理,以惯性力代横向力,可由方程(1.5)得到振动的方程。这样,我们得到

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (c)$$

式中的 q/g 为柱单位长度的质量。除以 EI 并运用记号

$$k^2 = \frac{P}{EI}, \quad a = \frac{q}{gEI}, \quad (d)$$

得到

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (e)$$

这常系数微分方程的解可取为

$$y = A_0 f(x) e^{i\omega t}, \quad (f)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$ 。代入方程 (e), 得对于 $f(x)$ 的常微分方程

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - a\omega^2 f(x) = 0,$$

这方程的通解为

$$f(x) = A \cosh \lambda_1 x + B \sinh \lambda_1 x + C \cos \lambda_2 x + D \sin \lambda_2 x, \quad (g)$$

1) 这研究系由 Max Beck 所作, *Z. angew. Math. u. Physik*, vol. 3, p. 225, 1952. 这同一问题曾独立地由 K. S. Dejneko 与 M. J. Leonov 所研究, *Appl. Math. Mech.* (俄文), vol. 19, p. 738, 1955.

式中

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left(\sqrt{a\omega^2 + \frac{k^4}{4} - \frac{k^2}{2}} \right)^{1/2}, \\ \lambda_2 &= \left(\sqrt{a\omega^2 + \frac{k^4}{4} + \frac{k^2}{2}} \right)^{1/2}.\end{aligned}\quad (h)$$

为了决定解(g)中的常数,我们有由(a)与(b)所给出的四个端点条件.将方程(g)代入这些条件,得四个对 A, B, C, D 的齐次线性方程.要满足这些方程,可使 $A = B = C = D = 0$,这给出了柱的直的平衡形式.要得另一个解,这些方程的行列式必须等于零,于是得到频率方程

$$2a\omega^2 + k^4 + 2a\omega^2 \cosh \lambda_1 l \cos \lambda_2 l + k^2 \sqrt{a\omega^2} \sinh \lambda_1 l \sin \lambda_2 l = 0, \quad (2.72)$$

由上式可算出对于任何 P 值的圆频率 ω .可以看出,对于 $\omega = 0$,即对于柱的静力情形,并无异于零且满足方程(2.72)的 k^2 值.这意味着,并不存在使柱处于微小屈曲形式的 P 值,于是得到先前以静力方法作计算时所得的相同结论.

现考虑 ω 异于零并令 $P = 0$,得

$$k^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt[4]{a\omega^2},$$

方程(2.72)成为

$$\cosh (l\sqrt[4]{a\omega^2}) \cos (l\sqrt[4]{a\omega^2}) = -1, \quad (i)$$

这即为熟知的稜柱悬臂杆的频率方程¹⁾,在表 2.15 中给出了为首的两频率 ω_1 与 ω_2 .

表 2.15 受压柱的频率[根据方程 2.72]

$\frac{Pl^2}{\pi^2 EI}$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.001
$\omega_1^2 \frac{al^4}{\pi^4}$	0.125	0.26	0.30	0.46	0.96	0.98
$\omega_2^2 \frac{al^4}{\pi^4}$	4.86	4.2	3.3	2.6	1.02	0.99

若考虑 P 增大的值并在方程(2.72)中取逐渐增大的 k^2 值,得到为首的两个频率 ω_1 与 ω_2 的平方,如表 2.15 中第二、三两行所示. ω^2 的值均为正;

1) 参阅 Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, 3d ed. (与 D. H. Young 合作), p. 338, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1955.

在将相应的 ω 值代入方程(g)与(f)后,得方程(e)的如下形式的解:

$$y = f(x) \sin \omega t \quad \text{及} \quad y = f(x) \cos \omega t.$$

这两方程表示常振幅简谐振动,故可知这柱是稳定的。但存在着一定的值 P ,在该值时柱的振动特性将改变。由表 2.15 可以看出,当 P 增加时, ω_1^2 与 ω_2^2 的值互相接近,而更精确的计算表明,当

$$\frac{Pl^2}{\pi^2 EI} = 2.008 \quad (i)$$

时,这两值相同;即频率方程(2.72)有一重根。 P 值再增大时,根变为复根,其形式为 $\omega = m + in$, 式中的 m 与 n 为实数。代入方程 (f), 得解的形式为

$$y = f(x)e^{(n+im)t} \quad \text{及} \quad y = f(x)e^{(-n+im)t}.$$

因 n 与 $-n$ 有一为正数,相应的 y 值随时间无限地增大,这表示柱不稳定。于是,由方程(i)得力 P 的临界值为

$$P_{cr} = \frac{2.008\pi^2 EI}{l^2}. \quad (2.73)$$

于是,用了动力稳定性的概念,对于切向力 P , 得到了一个确定的临界值;这在用静力学来考虑时是得不到的。关于这结果的实际价值,目前尚不能作肯定的结论,因为尚无方法可将切向力作用于在弯曲的柱。

如果设压力沿柱的轴线而分布,且永远指向挠度曲线的切线方向,则将引起类似的问题。

受压与受扭的轴 作为在非保守力作用下屈曲的另一例子,我们研究在轴向压力 P 与扭矩 M_t 作用下的轴(图 2.70)。设轴的两端以理想的球铰或万向接头与支座相连接,故能在任何方向自由地转动。并设在屈曲时力 P 与扭矩 M_t 保持它们的原有方向。在这些条件下,扭矩 M_t 系非保守的,因为它所作的功与杆屈曲时杆端的切线如何移动有关。要证明这一点,我们来研究杆的下端 A 。在微屈曲轴点 A 处的切线,可由绕 y 与 z 轴转动角度 dz/dx 与 dy/dx , 而到达其倾斜位置。在这转动中,总在水平面内的扭矩 M_t 并不作任何功。但也可用另一方法使切线到达倾斜位置。例如可将切线绕 y 或 z 轴转动角度 $\sqrt{dy^2 + dz^2}/dx$, 然后绕 x 轴

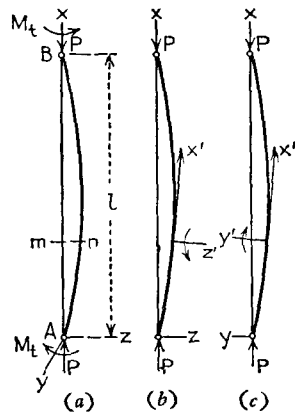


图 2.70

转动使它到达最终的位置。在后一转动中, 扭转将作功。因而很明显, 我们有着一个非保守的荷重系统。设扭转的性状已指定, 我们以静力方法由屈曲轴的平衡方程来决定临界荷重。

对于这情形, 挠度曲线将不是一平面曲线, 而必须考虑这曲线的两投影, 如图 2.70b 及 c 所示。我们并设横截面的主惯性矩相等, 因此在横截面内的任意两根通过中心而互相垂直的轴均可作为主轴¹⁾。考虑杆的任一横截面 mn , 并取主轴平行于 y 及 z , 屈曲以后这两轴的方向将为 y' 与 z' 。在推演挠度曲线的微分方程时, 我们考虑杆的上面这部分, 并计算作用于这部分杆上的力对于 y' 及 z' 轴的力矩。以如图所示的力矩为正, 则压力 P 对于 y' 及 z' 轴的力矩各为 Pz 及 $-Py$ 。扭矩 M_t 对于以上两轴的力矩各为 $-M_t dy/dx$ 及 $-M_t dz/dx$ 。在每一平面内挠度曲线的微分方程为

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2z}{dx^2} &= -Pz + M_t \frac{dy}{dx}; \\ EI \frac{d^2y}{dx^2} &= -Py - M_t \frac{dz}{dx}. \end{aligned} \quad (k)$$

这两方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= A \sin(m_1x + \alpha_1) + B \sin(m_2x + \alpha_2); \\ z &= A \cos(m_1x + \alpha_1) + B \cos(m_2x + \alpha_2); \end{aligned} \quad (l)$$

式中的 A, B, α_1 及 α_2 为积分常数, 而 m_1 及 m_2 为二次方程

$$Elm^2 + M_tm - P = 0 \quad (m)$$

的两根。将(1)代入方程(k), 可证明这两方程得到满足。

为了决定常数 A, B, α_1 及 α_2 , 我们有以下诸端点条件:

$$(y)_{x=0} = 0, \quad (y)_{x=l} = 0; \quad (z)_{x=0} = 0, \quad (z)_{x=l} = 0. \quad (n)$$

将 y 与 z 的表达式 (1) 代入, 得到:

$$\begin{aligned} A \sin \alpha_1 + B \sin \alpha_2 &= 0, & A \cos \alpha_1 + B \cos \alpha_2 &= 0, \\ A \sin(m_1l + \alpha_1) + B \sin(m_2l + \alpha_2) &= 0, \\ A \cos(m_1l + \alpha_1) + B \cos(m_2l + \alpha_2) &= 0. \end{aligned}$$

利用为首两方程在后两方程中消去 $B \sin \alpha_2$ 及 $B \cos \alpha_2$, 我们得到

$$\begin{aligned} A[\sin(m_1l + \alpha_1) - \sin(m_2l + \alpha_1)] &= 0, \\ A[\cos(m_1l + \alpha_1) - \cos(m_2l + \alpha_1)] &= 0, \end{aligned}$$

由以上两式可知, m_1l 及 m_2l 相差 2π 的倍数。使产生屈曲的 M_t 及 P 的最小

1) 具有两不同弯曲刚度的轴这情形曾由 R. Grammel 所讨论, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 3, p. 262, 1923.

值得自条件

$$m_1 l - m_2 l = \pm 2\pi,$$

或运用方程(m),

$$\frac{M_t^2}{4EI} + P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (2.74)$$

当 M_t 等于零时,这方程给出了熟悉的临界荷重的欧拉公式. 当 P 等于零时,我们得到扭矩单独作用时使轴屈曲的扭矩值¹⁾. 若轴承受拉力,则方程(2.74)中的 P 的符号必须改变. 因此,如果作用了拉力,则轴抵抗扭矩产生屈曲的稳定性增大.

上述问题亦曾以稳定性的动力概念来讨论,并由研究轴的横振动而得相同的表达式(2.74)²⁾. 有好几个作者曾研究了具有其他端点条件的轴的稳定性问题³⁾,但对于非保守力的情形,怎样用力学方法应用这些力仍是个悬而未决的问题. 因此,目前这些结果尚未得到实验证实. 在弹性范围内的结构理论中,通常我们遇到恒定的保守荷重,并且稳定性问题的静力方法是良好的;但另一方面,在分析力随时间而变化的问题时,稳定性的动力概念是根本的. 在下一节中将讨论几个这类的例子.

§ 2.22. 在变化轴向力作用下棱柱杆的稳定性

我们首先讨论两端铰接的等截面杆受轴向压力

$$P + S \cos \Omega t \quad (a)$$

作用的这简单情形(图 2.71). 这力由不变部分 P 及周期性变化部分 $S \cos \Omega t$ 组成,其中 S 为幅度, Ω 为圆频率. 于是总的轴向压力在 $P + S$ 与 $P - S$ 之间变化. 经验表明,细长的杆可以承担大于欧拉荷重 $P_e = \pi^2 EI/l^2$ 的最大力 $P + S$,而并不屈曲. 并且在脉动力的某些频率值时,杆将产生剧烈的横振动,因而在这些频率时杆将不稳定⁴⁾. 在研究这问题时,要用稳定性的动力概念. 设杆是直的且完全弹性,并由某脉动力产生了微小的横向振动. 在振

1) 式(2.74)为 A. G. Greenhill 所得, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, London, 1883, 在 E. L. Nicolai 的论文 [Dissertation, St. Petersburg, 1916 (俄文) 及 *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 6, p. 30, 1926] 中,对这个问题作了更进一步的讨论.

2) 参阅 H. Ziegler, *Z. angew. Math. u. Phys.*, vol. 2, p. 265, 1951, 及 A. Troesch, *Ingr.-Arch.*, vol. 20, p. 258, 1952.

3) 在 H. Ziegler 的论文中,给出了对于这些情形的一个评述, *Advances in Appl. Mech.*, vol. 4, pp. 357—403, 1956.

4) 由在一弦上作用一脉动张力,可以证实相似的现象. 在力的某一频率时,弦将产生剧烈的横向振动.

动时,杆的顶端稍微上下移动,而在某一频率值时脉动力将产生正功,于是使振幅增大。这表明了不稳定性条件¹⁾。

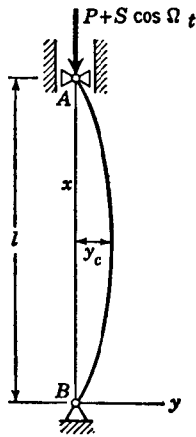


图 2.71

在研究横振动时,将用前一节的微分方程(c)。

对于脉动荷重(a),这方程成为²⁾

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (P + S \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (b)$$

取方程的解为

$$y = Af(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (c)$$

这解满足杆铰接端的端点条件,并表示半个正弦波形式的挠度。将方程(c)代入方程(b),得以下决定函数 $f(t)$ 的方程:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{g\pi^2}{ql^2} \left(\frac{\pi^2 EI}{l^2} - P \right) f(t) - \left(\frac{g\pi^2}{ql^2} S \cos \Omega t \right) f(t) = 0. \quad (d)$$

对于 $S = 0$ 及 $P < \pi^2 EI/l^2$ 的特殊情形,将有一小于欧拉荷重的静荷重,而方程(d)将给出一简谐振动,其频率为

$$\omega^2 = \frac{g\pi^2}{ql^2} \left(\frac{\pi^2 EI}{l^2} - P \right). \quad (e)$$

对于 $P = 0$, 得到

$$\omega_0^2 = \frac{g\pi^4 EI}{gl^2}. \quad (f)$$

这是无轴向荷重时两端铰接柱杆在横振动时的圆频率的平方³⁾。由方程

- 1) 这问题首先由 N. M. Belajev 解决, Engineering Structures and Structural Mechanics, Collection of Papers, pp. 149—167, Leningrad, 1924. 并参阅 E. Mettler, Mitt. Forsch. Anst. GHH-Konz., vol. 8, p. 1, 1940, 及 Klotter, Forsch. Ing-Wesen, vol. 12, p. 209, 1941. F. Weidenhammer 曾讨论过固定端杆这类的问题, Ingr-Arch., vol. 19, p. 162, 1951. 在 B. B. Bolotin 的书中,叙述了许多在脉动荷重作用下结构的稳定性问题, Dynamic Stability of Elastic Systems, Moscow, 1956 (俄文)。
- 2) 在这里设脉动力的周期与杆的基本纵振动的周期相比很大,因而沿杆的长度轴向力可作为常量。
- 3) 参阅 Timoshenko, Vibration Problems in Engineering, 3d ed. (与 D. H. Young 合作), p. 332, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1955.

(e)可以看出,增大荷重 P 将使频率 ω 减小,并且当荷重达到欧拉值时,频率变为零.在这荷重下将无任何振动,杆在稍微挠曲的形状下而平衡.因而当 $s = 0$, 方程(d)将给出与以前由静力方法所得的相同的临界荷重.

现研究 s 不为零这情形,即杆承受脉动荷重的作用.为使方程(d)书写简单计,引入以下记号:

$$p = \frac{P}{P_e}, \quad s = \frac{S}{P_e}, \quad (g)$$

于是方程(d)成为

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \omega_0^2(1-p)f(t) - \omega_0^2(s \cos \Omega t)f(t) = 0, \quad (h)$$

现以一新变量 τ 代替 t , τ 与 t 的关系为

$$\tau = \Omega t. \quad (i)$$

由于

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d^2f}{d\tau^2}, \quad (j)$$

于是方程(h)成为

$$\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2} + (a + b \cos \tau)f(\tau) = 0, \quad (k)$$

式中

$$a = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}(1-p), \quad b = -\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}s. \quad (l)$$

对于每一特定情形,可以很容易用方程(f)和(g)计算量 a 与 b . 研究表明¹⁾, 方程(k)的解的特性与 a 和 b 的数值有关. 在这些量的某些值下,解给出随时间而增长的振动,因而表示不稳定状态. 这示于图 2.72 中;在无阴影的面积内的点的坐标 a 与 b 的值表示不稳定状态,而阴影面积表示稳定区域²⁾.

从微小的 s 值开始,我们必须研究在水平轴邻近的点,并且可以看出,不稳定发生于当 $a = \frac{1}{4}, 1, 2\frac{1}{4}, \dots$. 如果取 $p = 0$, 则当 $\Omega = 2\omega_0$ 时达到 a 的第一个临界值;这表明:一微小的周期性变化的轴向力可产生杆的剧烈

1) 这一研究系由 M. J. O. Strutt 所作, *Z. Physik*, vol. 69, p. 597, 1931, 及 *Ergeb. Math.*, vol. 1, p. 24, 1932.

2) 方程(k)称为 Mathieu 方程. 在 S. Lubkin 及 J. J. Stoker 的论文中给出了关于这方程的另外的参考文献, *Quart. Appl. Math.*, vol. 1, No. 3, p. 215, 1943.

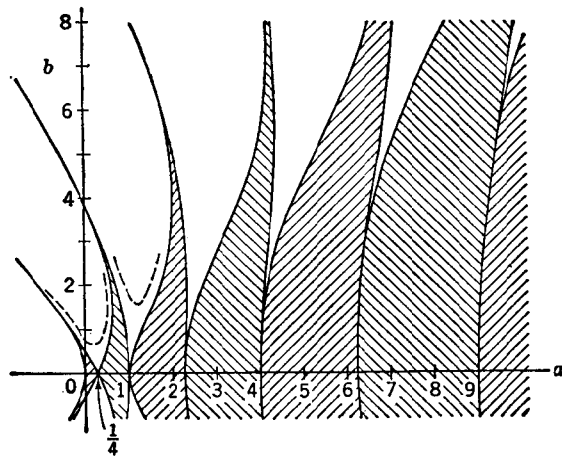


图 2.72

的横振动, 如果其频率两倍于杆横振动的基本频率的话¹⁾。下一个临界状态相应于 $a = 1$ 或 $\Omega = \omega_0$ 。当 p 逐渐地由 0 增至 1 时, Ω 的临界值减小。例如取 $P = 1/2$, 对于第一个临界频率得 $\Omega = \sqrt{2} \omega_0$ 。当荷重的可变部分的振幅增大时, b 亦增加; 于是图 2.72 中的不稳定区变宽, 并且代替诸临界点, 对于 Ω 将得到逐渐变宽的范围。

在前面的讨论中, 并未计及阻尼的影响。若将这考虑在内, 则在图 2.72 中的曲线定然稍有改变, 如虚线所示。不稳定区域减小了, 并且在临界点的区域内产生横振动需要有非零的 s 值。并且, 可以看出, 所需的 s 值随临界频率的次序而增大, 因而较高次的频率没有实际重要性。

由图 2.72 还可以看出, 与稳定性一致的最大压力 $P + S$, 可能会远大于欧拉荷重。作为一例, 取数值 $P = 0$ 和 $1/4 < a < 1$ 。可以看出, 在这些 a 值之间, 在稳定区域内 b 的值有大于 2 者。这意味着, 最大压力可以大于欧拉荷重的两倍而杆不发生横向屈曲。我们假设杆充分细长, 故最大应力保持低于材料的比例极限。

作为力的作用随时间而变化的另一个例子, 仍研究图 2.71 所示的杆, 并

1) 这是很明显的, 如果注意到当脉动荷重为压力时, 且当振动的杆由中间位置向边缘位置运动时, 将作正功。同样, 当杆受到拉力, 且当由边缘位置向中间位置运动时, 则脉动荷重亦作正功。

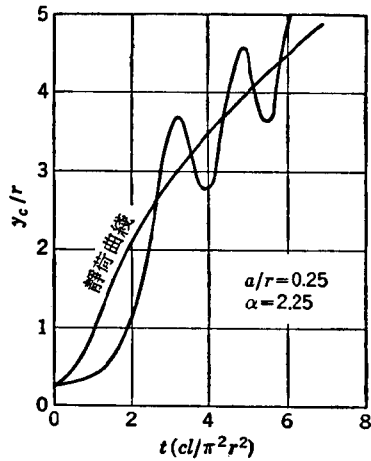


图 2.73

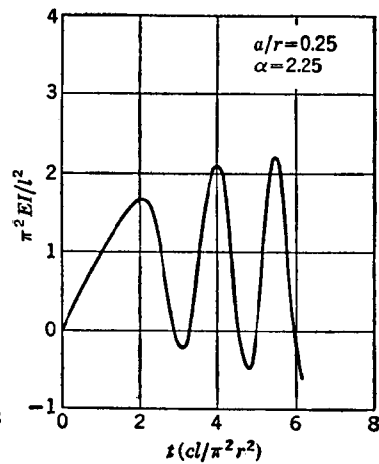


图 2.74

设想杆的下端固定,而顶端 A 以等速 c 向下运动¹⁾。设杆的初弯曲线为

$$y_0 = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (m)$$

从而推演出在加载时杆中点的横向位移 y_c 的微分方程,并进行积分。在图 2.73 中绘出了对于一特定情形进行积分的结果。图的铅直轴表明无量纲量 y_c/r 的值, y_c 为杆中点的挠度, r 为横截面的迴转半径。水平轴表示时间,且系以无量纲形式表示。这曲线是对比值 $a/r = 0.25$ 的初弯曲线及参数值

$$\alpha = \frac{\pi^2 EI r^4 g}{c^2 l^6 q} = 2.25$$

而绘的。

为了比较,图中亦绘出了杆顶端 A 具有相同位移时的静挠度。由于惯性力,在荷重开始作用时杆的动荷挠度滞后于静荷作用时的值。随着时间的增长,杆就有足够的加速度致使挠度很快地增大。最后,挠度超过静荷时的值,并随之发生杆的横振动。图 2.74 中示出了相应的轴向压力值。在这例中,杆顶端的速度 c 约为 10 厘米/秒。

一不变压力 P 在很短的时间内作用于有初弯曲线的细杆的横向屈曲问题,

1) 这问题曾由 N. J. Hoff 研究过, *J. Appl. Mech.*, vol. 18, p. 68, 1951. 并参阅 N. J. Hoff, S. V. Nardo, 及 B. Erickson, *Proc. 1st U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, ASME, New York, 1952.

亦曾被研究过¹⁾。仍设力 P 作用的时间与杆纵振动的周期相比为很长，我们可以认为沿杆长压力为一常量。于是杆的横振动的方程成为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2}{\partial x^2} (y + y_0) + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

式中的 y_0 表示杆轴线对直线偏离的初始挠度，而 $y + y_0$ 表示总挠度。仍设两端铰接杆的挠度为

$$y_0 = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad y = Af(t) \sin \frac{\pi x}{l},$$

我们得到关于 $f(t)$ 的一个常系数的微分方程。对于每一特定情形可以很容易地解这方程。这样就可以证明：如果力作用的时间充分短，杆就可以安全地承担比欧拉临界荷重大的压力 P 。

对于弹性薄板的屈曲，亦讨论过类似的问题。并且亦得到证明：如果外力作用的时间很短²⁾，则板在中面内可以承担比临界值大的应力。

1) 参阅 C. Koning 及 J. Taub 的论文, *Luftfahrt-Forsch*, vol. 10, p. 55, 1933. 英文翻译发表于 *NACA Tech. Mem.* 748, 1934. 并参阅 J. H. Meier 的论文, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 12, p. 433, 1945.

2) 参阅 G. A. Zizicas 的论文, *Trans. ASME*, vol. 74, p. 1257, 1952.

第三章 桿的非彈性屈曲

§ 3.1. 非彈性彎曲

在討論非彈性屈曲之前，我們先重溫當應力超過比例極限時梁的彎曲理論¹⁾。這理論以下述假定為基礎：在彎曲時梁的橫截面保持為平面，因而縱向纖維的應變與它們離中性面的距離成比例。並設應力與應變之間的關係與單向拉伸與壓縮相同，如圖 3.1 的應力-應變曲線所示。

首先研究矩形截面梁(圖 3.2)，並設由彎矩 M 所產生的中性面的曲率半徑等於 ρ 。於是離中性面為 y 的纖維，其單位伸長為

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (a)$$

分別以 h_1 與 h_2 表示梁的上下表面至中性軸的距離，即得最外緣纖維的應變各為

$$\epsilon_1 = \frac{h_1}{\rho}, \quad \epsilon_2 = -\frac{h_2}{\rho}. \quad (b)$$

可以看出，若已知中性軸的位置及曲率半徑 ρ ，即可得任何纖維的伸長與縮短*。中性軸的位置與曲率半徑，可由下述兩個靜力學方

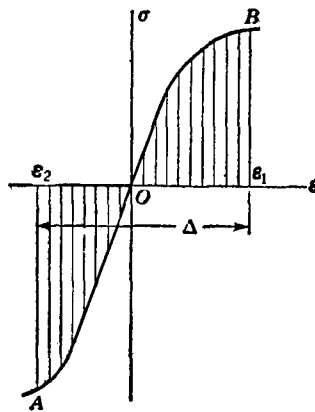


圖 3.1

1) 對於非彈性彎曲更詳細的討論，參閱 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part II, chap. 9, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.

* 指張應變與壓應變——譯者注。

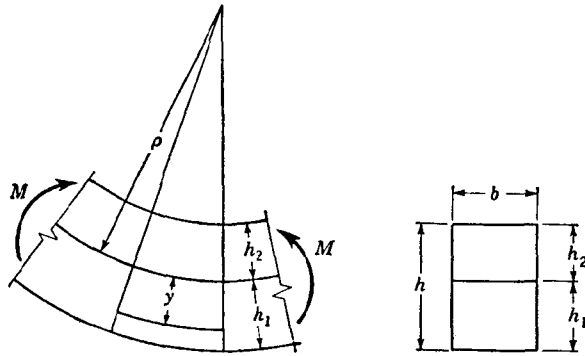


图 3.2

程得到:

$$\int_A \sigma dA = b \int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = 0, \quad (c)$$

$$\int_A \sigma y dA = b \int_{-h_2}^{h_1} \sigma y dy = M. \quad (d)$$

第一个方程说明,作用于梁任何横截面上的法向力之和等于零,因为这些力代表一力偶。第二个方程说明,这些力对于中性轴的力矩等于弯矩 M 。

方程 (c) 就可用以决定中性轴的位置。由方程 (a) 得

$$y = \rho \varepsilon, \quad dy = \rho d\varepsilon. \quad (e)$$

代入方程 (c), 得

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = \rho \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon = 0. \quad (f)$$

因此,中性轴的位置系使积分 $\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$ 等于零。要决定这位置,可用图 3.1 中的曲线 AOB 。这曲线表示梁的材料的拉伸-压缩试验图。以 Δ 表示最大张应变与最大压应变的绝对值之和,即

$$\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{h_1}{\rho} + \frac{h_2}{\rho} = \frac{h}{\rho}. \quad (g)$$

为了解方程 (f), 只须在图 3.1 中的水平轴上这样划出长度 Δ , 使两块阴影面积相等。这样就得到边缘纤维的应变 ε_1 与 ε_2 。于是

方程 (b) 给出

$$\frac{h_1}{h_2} = \left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right|, \quad (h)$$

它就决定了中性轴的位置。注意到应变 ϵ 与离中性轴的距离成比例，可知曲线 AOB 亦表示弯曲应力沿梁高度的分布只要以 h 代替 Δ 。

我们用方程 (d) 来计算曲率半径 ρ 。代入方程 (e) 所给出的 y 与 dy 值，可将方程 (d) 表示为以下的形式：

$$b\rho^2 \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon = M. \quad (i)$$

注意到，由方程 (g)， $\rho = h/\Delta$ ，并经简单变换后可将方程 (i) 写作

$$\frac{bh^3}{12} \frac{1}{\rho} \frac{12}{\Delta^3} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon = M. \quad (j)$$

将这结果与符合胡克定律的梁的弯曲方程

$$\frac{EI}{\rho} = M \quad (k)$$

比较，可得结论：超过比例极限以后，弯矩 M 所产生的曲率可由方程

$$\frac{E'I}{\rho} = M \quad (3.1)$$

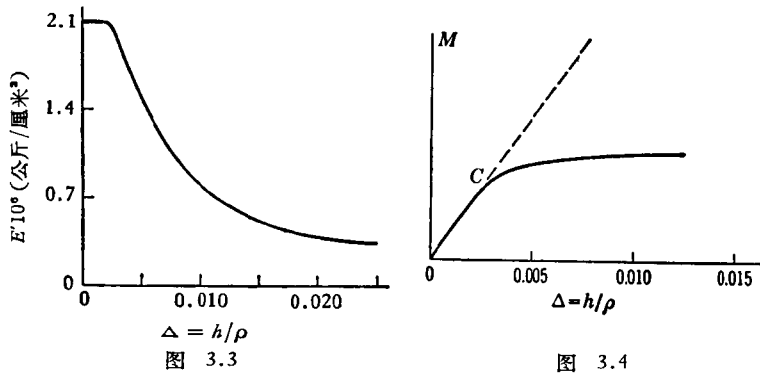
来计算，式中的 E' 由表达式

$$E' = \frac{12}{\Delta^3} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon \quad (3.2)$$

所定义。这表达式中的积分表示图 3.1 的阴影面积对于通过原点 O 的铅直轴的弯矩。因图中曲线的纵坐标表示应力，而横坐标表示应变，故积分及 E' 的量纲为公斤/厘米²。这与弹性模量 E 的量纲相同。

相应于图 3.1 的一已知曲线的材料的 E' 值，为 Δ 或 h/ρ 的函数。取几个 Δ 的值，并用如以前所说明的图 3.1 中的曲线，对于每个 Δ 值可决定相应的边缘应变 ϵ_1 与 ϵ_2 ，再由方程 (3.2) 决定相应的 E' 值。这样，可得一表示 E' 为 $\Delta = h/\rho$ 的函数的曲线。在图

3.3 中，示出了结构钢的这种曲线；结构钢的 E 为 2.1×10^6 公斤/厘米²，比例极限为 2100 公斤/厘米²。此时若 $\Delta < 0.002$ ，则 E' 为一常量且等于 E 。有了这样的曲线，相应于任一所设的曲率即可由方程(3.1)计算弯矩，于是可绘出一表示弯矩 M 为 Δ 的函数的曲线(图 3.4)。对于小的 Δ 值，材料遵从胡克定律，而曲率与弯矩 M 成比例，如图 3.4 中的直线 OC 所示。超过比例极限后，曲率的改变率随弯矩的增大而增大。



若应力-应变图的拉伸与压缩部分相同，中性轴将通过横截面的形心，于是得到以下的简化了的表达式：

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2},$$

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{\Delta}{2},$$

$$E' = \frac{24}{\Delta^3} \int_0^{\Delta/2} \sigma \epsilon d\epsilon.$$

又，在弹性极限内， $\sigma = E\epsilon$ ，于是

$$E' = \frac{24}{\Delta^3} E \int_0^{\Delta/2} \epsilon^2 d\epsilon = E,$$

因而方程(3.1)归结为通常的弹性弯曲的方程。

若不是矩形而是任何别的对称形状的横截面，横截面的宽度 b 为一变量，而方程(c)与(d)必须写作以下形式：

$$\int_{-h_2}^{h_1} b\sigma dy = \rho \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} b\sigma d\epsilon = 0, \quad (1)$$

$$\int_{-h_2}^{h_1} b\sigma y dy = \rho^2 \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} b\sigma \epsilon d\epsilon = M. \quad (m)$$

取图 3.5 中的 T 形截面作为一例, 若以 ϵ' 表示腹板与翼缘交接处的纵向应变, 则方程 (1) 与 (m) 可写作以下形式:

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon'} \sigma d\epsilon + \int_{\epsilon'}^{\epsilon_1} \frac{b_1}{b} \sigma d\epsilon = 0, \quad (n)$$

$$b\rho^2 \left(\int_{\epsilon_2}^{\epsilon'} \sigma \epsilon d\epsilon + \int_{\epsilon'}^{\epsilon_1} \frac{b_1}{b} \sigma \epsilon d\epsilon \right) = M. \quad (o)$$

对于这情形, 拉伸试验曲线 OAB 的纵坐标(图 3.6), 在横截面的翼缘区域内须按比值 b_1/b 而放大. 中性轴位置的确定, 仍与以前一样地进行. 用拉伸-压缩试验图

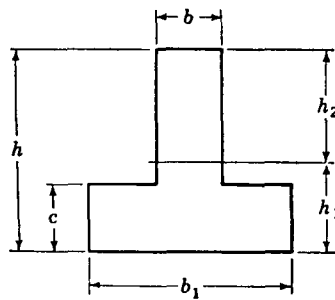


图 3.5

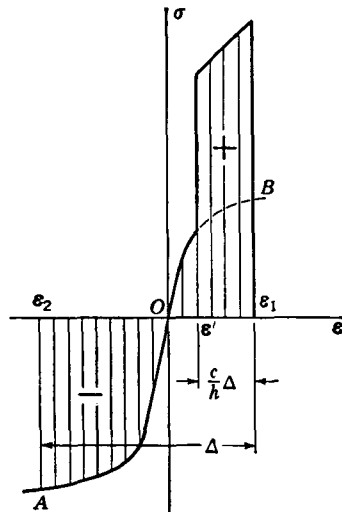


图 3.6

3.6, 并在水平轴上这样刻出所设的长度 $\Delta = h/\rho$, 使两块阴影面积在数值上相等. 这样, 就得到最外缘纤维的应变 ϵ_1 与 ϵ_2 . 在翼缘与腹板交接处的应变, 可得自方程

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon'}{\Delta} = \frac{c}{h},$$

式中 c 为翼缘的厚度(图 3.5). 决定了中性轴的位置, 并注意到在方程 (o) 的括号内的表达式表示图 3.6 的阴影面积对于通过原点

O 的鉛直軸的力矩，就可由方程 (o) 計算出對於所設的 $\Delta = h/\rho$ 值的彎矩 M 。這樣，就可對於一 T 形截面梁繪出與圖 3.4 相似的曲綫。工字梁亦可同樣地處理。

§ 3.2. 在軸向荷重聯合作用下的非彈性彎曲

對於梁的彎曲與壓縮同時作用的情形，例如由一偏心軸向壓力所引起，我們仍可用與前一節所述的同樣的方法來分析梁的彎曲。現研究一矩形截面梁，並仍分別以 ϵ_1 與 ϵ_2 表示梁的凸出及凹進的兩邊最邊緣纖維的應變。又，運用記號 $\Delta = \epsilon_1 - \epsilon_2$ ，可由前一節的方程 (g) 來決定曲率半徑 ρ 。

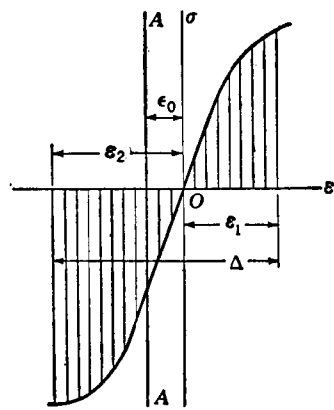


圖 3.7

中性軸的位置可由 ϵ_1 與 ϵ_2 的值來決定，並自純彎曲時的位置移動了由應變 ϵ_0 所決定的一距離。 ϵ_0 係由軸向力 P 所引起(參閱圖 3.7)。

作用於梁任何橫截面上的力，可以化為作用於橫截面形心的壓力 P 及彎矩 M 。在每個特定情形下， P 與 M 的值可利用應力-應變曲綫(圖 3.7)按靜力學計算而得。設 y 為自中性軸至梁的任何纖維的距離

(圖 3.2)，則任一點的應變為

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{y}{\rho}. \quad (a)$$

方程 (a) 可重寫為 $y = \rho(\epsilon - \epsilon_0)$ ，因而 $dy = \rho d\epsilon$ 。壓力 P 的大小為

$$P = -b \int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = -b\rho \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = -\frac{bh}{\Delta} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon.$$

除以橫截面積 bh ，得平均壓應力

$$\sigma_c = \frac{P}{bh} = -\frac{1}{\Delta} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon. \quad (3.3)$$

式中的積分表示應力-應變曲綫下的面積，即圖 3.7 的陰綫面積。

与压力相应的面积为负，与张力相应的面积为正。若已知轴向力 P ，可由方程(3.3)计算相应于任何所设的 ϵ_1 值的 ϵ_2 值。或者可以设 ϵ_1 与 ϵ_2 而计算相应的 P 值。

弯矩的表达式为

$$M = b \int_{-h_2}^{h_1} \sigma_y dy = b\rho^2 \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma(\epsilon - \epsilon_0) d\epsilon,$$

或者，因 $\Delta = h/\rho$ 及 $I = bh^3/12$ ，

$$M = \frac{12I}{\rho\Delta^3} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma(\epsilon - \epsilon_0) d\epsilon. \quad (b)$$

这表达式中的积分，表示应力-应变图的阴影面积(图 3.7)对于铅直轴 AA 的静力矩。这样，对于任何所设的 ϵ_1 与 ϵ_2 ，可以计算 M 值。方程(b)可表为如下形式：

$$M = \frac{E''I}{\rho}, \quad (3.4)$$

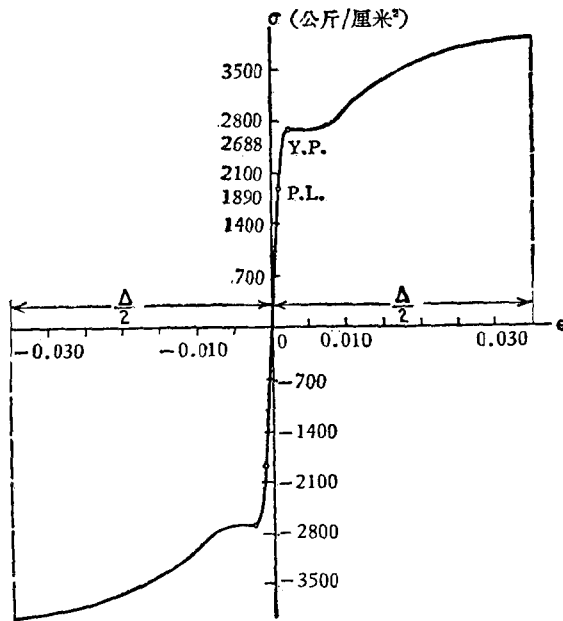


图 3.8

式中

$$E'' = \frac{12}{\Delta^3} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma(\epsilon - \epsilon_0) d\epsilon. \quad (3.5)$$

这些方程与方程(3.1)及(3.2)的形式相同,并且,若压荷重为零(从而 $\epsilon_0 = 0$), 将化为方程(3.1)与(3.2)。这样地改变 ϵ_1 与 ϵ_2 , 使 σ_c 保持不变, 即对于任一给定的 σ_c 值得 E'' 为 $\Delta = \epsilon_1 - \epsilon_2 = h/\rho$ 的函数。所得的关系可由图 3.9 中的曲线表示; 这是对于应力-应变曲线如图(3.8)所示的结构钢而绘的¹⁾。运用这些曲线与方程(3.4), 对于每一 σ_c 的值, 弯矩 M 可表示为 Δ 的函数, 如图 3.10 所示。(在图 3.10 中, 介于 $\sigma_c = 0$ 与 $\sigma_c = 2600$ 公斤/厘米² 的曲线的 σ_c 值与图 3.9 中的相同。)

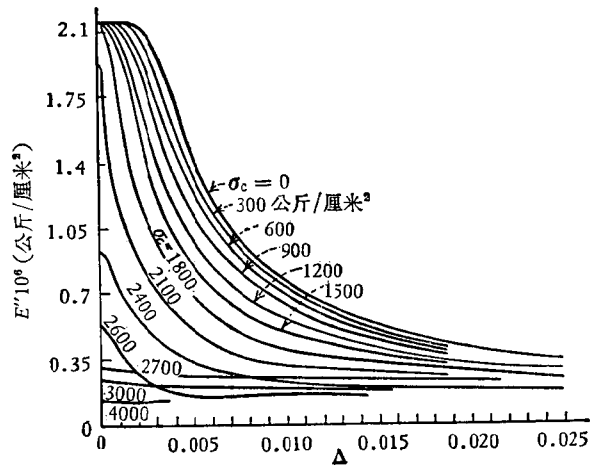


图 3.9

运用图 3.10 中的曲线, 并用图解或数值积分等近似方法²⁾, 可得受偏心荷重作用的杆的挠度曲线的形状, 例如研究如图 3.11

- 1) 图 3.9 中的曲线系取自 M. Roš 的论文, *Proc. 2d Intern. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, p. 368, 1926. $\sigma_c > 2590$ 公斤/厘米² 的曲线系由假定弯曲发生于在压力下产生了屈服之后所得。
- 2) 在 T. V. Kármán 的论文中讨论了几个积分方法, *Forschungsarb.*, No. 81, Berlin, 1910.

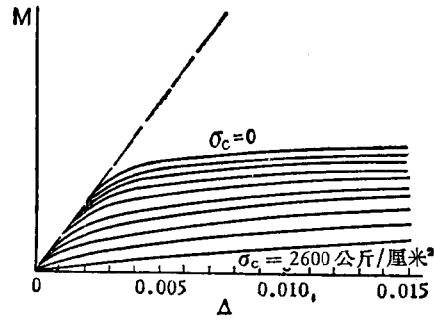


图 3.10

所示的鋼杆。杆系对中心 O 对称，并且鋼的应力-应变曲线如图 3.8 所示。先对于中间这截面的 ϵ_1 与 ϵ_2 假设一定的值，并由方程 (3.3) 计算相应的 P 与 σ 的值。然后，用图 3.10 的曲线，我们得到相应于以上的 σ_c 的 M 。如是，杆中间横截面的压力与弯矩都确

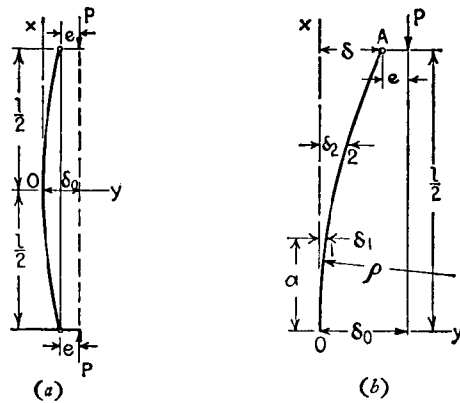


图 3.11

定了；而距离 $\delta_0 = M/P$ 决定了压力的作用线(图 3.11 b)。然后我们运用对于杆的中点所计算得的半径 $\rho = l/\Delta$ ，作出长等于 a 的小段挠度曲线 0-1。横截面 1 的挠度，近似地与一平坦的圆弧的相同。于是得到挠度 $\delta_1 = a^2/2\rho$ ，而弯矩为 $M_1 = P(\delta_0 - \delta_1)$ 。用这

弯矩 (M_1), 由图 3.10 得到相应的 Δ 等于 Δ_1 并算出 $\rho_1 = h/\Delta_1^3$. 用这新的半径, 我们作曲线的第二部分 1-2, 并计算挠度 δ_2 . 继续这样的计算, 我们最后到达压杆的 A 端, 并决定该端的挠度 δ 及相应于所假定的 ε_1 与 ε_2 的荷重 P 的偏心距 e . 对于几个数值 ε_1 及 ε_2 作这样的计算, 并在每一情形选择这些数值使 P 永远不变, 于是我们最后就得到对于此 P 的挠度 δ 为偏心距 e 的函数.

以上对于挠度曲线的计算, 可以使它一般化并表达为无量纲的形式, 而与柱的特殊的矩形横截面的 b 和 h 无关. 首先, 可以看出, 使柱产生某一挠度的力 P 与横截面的宽 b 成正比. 因此, 如果这宽度改变了, 力 P 必须依相同的比例而改变, 以保持挠度曲线不变. 要使我们的结果与高 h 无关, 我们以无量纲比值 ρ/h , δ/h 及 l/h 代替 ρ , δ , l 而进行计算.

按照这步骤, 首先假设 ε_1 及 ε_2 的一定的数值, 然后决定量

$$\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{h}{\rho},$$

并由方程(3.3)得到平均压应力 σ_c , 由方程(3.4)决定弯矩, 即

$$M = \frac{E''}{12} \frac{h}{\rho} b h^2. \quad (c)$$

力 P 的作用线的位置 (图 3.11b) 决定于距离 δ_0 , 对于这 δ_0 我们得到

$$\delta_0 = \frac{M}{P} = \frac{M}{\sigma_c b h},$$

或运用方程 (c),

$$\frac{\delta_0}{h} = \frac{E''}{12 \sigma_c} \frac{h}{\rho}.$$

对于小段 a 末端的挠度 δ_1 (图 3.11b), 我们有

$$\delta_1 = \frac{a^2}{2\rho}$$

1) 如果我们在进入第二段之前, 对于第一段采用半径 $(\rho_1 + \rho_2)/2$ 而重复计算, 可得较好的近似结果.

或

$$\frac{\delta_1}{h} = \frac{a^2/h^2}{a(\rho/h)}$$

如是，按这样的方式进行，就可以用无量纲的项作计算。并且，对于特定的 σ_c 及偏心距 e/h 的值，我们最后得到挠度 δ/h 为柱长 l/h 的函数。这函数可由一曲綫来表示。根据不同的数值 σ_c 及 $e = 0.005h$ ，在图 3.12 中表示出所计算得的几条这类的曲綫¹⁾。在

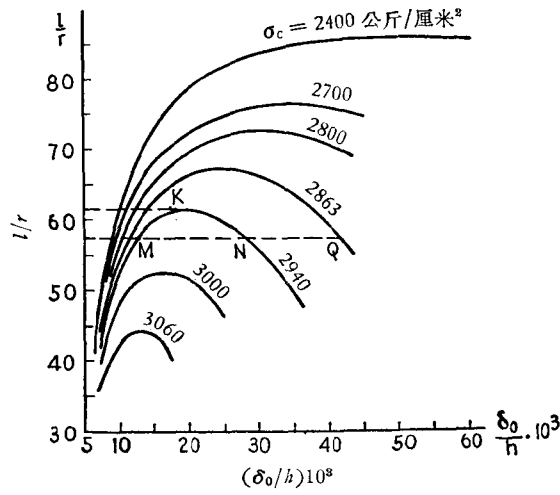


图 3.12

这图中，用细长比 l/r 作为纵坐标以代替 l/h 。可以看出，每条曲綫有一 l/r 的最大值。对于小于这最大值的 l/r 值，我们得到两个不同的挠度值，如图中 $\sigma_c = 2940$ 公斤/厘米² 这曲綫上的两点 M 与 N 所示。相应于较小的挠度的点 M ，表示当荷重 P 由零逐渐增加至最后数值 $bh\sigma_c$ 时实际达到的挠度。

要得到相应于点 N 的挠度，我们必须对柱加以横向力。若以这样的力使弯曲后的柱成为点 N 所决定的形状，我们又达到了一平衡位置。但这平衡是不稳定的，因为挠度再增加并不需要增加

1) 这些曲线为 Th. V. Kármán 所计算，*op. cit.*，而钢的屈服点应力约为 3150 公斤/厘米²。

荷重,相反,而随着挠度的增加荷重反而减少。例如要得到相应于点Q的挠度,所须的平均压应力为2863公斤/厘米²,而不是2940公斤/厘米²。对于每一最高点,例如点K,以上所讨论的两种平衡方式合而为一,而相应的 l/r 值是当偏心距等于 $0.005h$ 而柱能负担的荷重为 $P = bh\sigma_c$ 时最大的细长比。如是,运用类似于如图3.12中的曲线,可以建立对于某一特定的偏心距时柱的细长比与柱所能负担的最大荷重之间的关系。

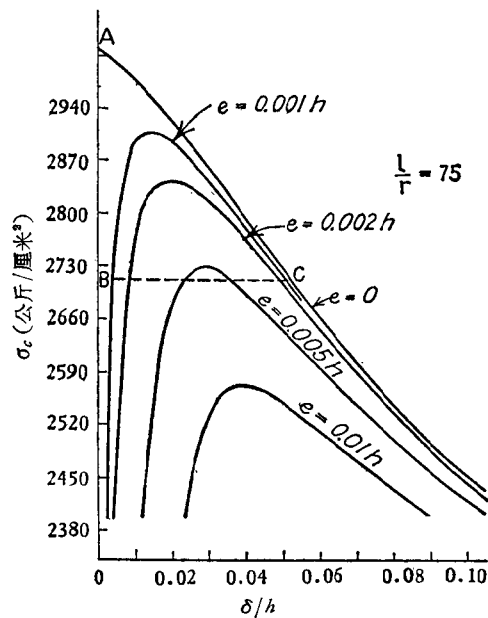


图 3.13

这压力的极限值可由另一方法得到。由图3.12可以看出,对于给定柱的细长比 l/r 及一假设的偏心距 e ,水平线与曲线的交点(如M, N, Q)给出了压应力 σ_c 与挠度 δ 之间的关系。这关系可用另一曲线来表示。根据不同的初始偏心距的值及细长比 $l/r = 75$ 所计算¹⁾得的几条曲线,示于图3.13中。我们可以看出,

1) *Ibid.*

对于任何的初始偏心距,在开始时要使挠度增大须增加荷重,而当超过相应的曲线的最大值时,随着挠度的增加荷重反而减小。如是,对于给定的细长比及所假定的偏心距,图 3.13 中的诸曲线的最大值点表明了柱所能负担的荷重的极限值。

极限荷重值的决定,可假设¹⁾图 3.11 中的柱的挠度曲线由方程

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right)$$

给出而得以简化。于是,由通常的挠度曲线的曲率的近似式²⁾,我们得到柱中点的曲率,

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = \frac{\pi^2 \delta}{l^2},$$

由上式,

$$\delta = \frac{l^2}{\pi^2 \rho} = \frac{l^2 \Delta}{\pi^2 h}. \quad (3.6)$$

对于在中点的任何 ϵ_1 及 ϵ_2 的值,我们可从方程(3.3)得到压力,并从方程(3.6)得到挠度 δ 。

现假设如此地去选择 ϵ_1 及 ϵ_2 , 使得压力 P 保持常数,同时使 $\Delta = \epsilon_1 - \epsilon_2$ 在增加。于是 M 及 $\delta_0 = M/P$ (图 3.11) 亦在增加。若 δ_0 的增长率比 δ 的大,则所假定的挠度曲线只能由增加荷重的偏心距 e 而产生(图 3.11)。若我们有着相反的情形,则只有减小偏心距 e , 所假设的挠度曲线才会是平衡曲线;否则荷重 P 虽保持不变而柱将继续挠曲。如是,对于给定数值的压力 P , 在偏心距 e 的极限值时, δ 与 δ_0 的改变率相等。这表明

$$\frac{d\delta_0}{d\Delta} = \frac{d\delta}{d\Delta}.$$

1) 这近似解法系 M. Roš 及 J. Brunner 所建议,参阅 M. Roš, *loc. cit.*

2) F. Chwalla (*Sitzber. Akad. Wiss., Wien*, vol. 137, IIa, p. 469, 1928) 的更准确的计算指出,对于较小的偏心距 ($e/h < 1/6$), 产生破坏的极限压力是在最大挠度小于 $0.5h$ 时达到的。在这挠度时,弹性线是一平坦的曲线,并且通常的近似的曲率表达式可以充分准确地被应用。

代入 $\delta_0 = M/P$ 并运用公式(3.6), 我們得到

$$\frac{dM}{d\Delta} = \frac{l^2 P}{\pi^2 h} \quad (3.7)$$

因此, 要决定对于所設的 P 值的 e 的极限值, 我們只須在图 3.10 中相应的曲綫上找出一點, 該点的斜率等于方程(3.7)的右边. 知道了这点的横坐标 Δ 及弯矩 M , 可以很容易地得到 $\delta_0 = M/P$ 与由方程(3.6)所給的值 δ , 以及 $e = \delta_0 - \delta$. 对于几个 P 值重复这样的計算, 即可定出对于給定 e 值的柱的承载能力.

这决定产生破坏的压力的近似方法, 亦可用于有初弯曲的柱. 例如假设柱中心线的初始形状(图 3.14)如方程

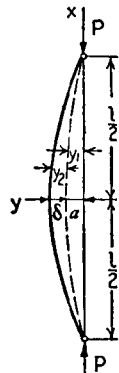


图 3.14

$$y_1 = a \cos \frac{\pi x}{l} \quad (d)$$

所示, 并且在压力 P 的作用之下, 产生了附加的挠度

$$y_2 = \delta \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (e)$$

于是, 柱中点的曲率的改变为

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = -\left(\frac{d^2 y_2}{dx^2}\right)_{x=0} = \delta \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (f)$$

假定在柱中点的最外缘纤维的应变为 ϵ_1 与 ϵ_2 , 我們得到 $\Delta = \epsilon_1 - \epsilon_2$, 而相应的曲率的改变等于

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\Delta}{h}. \quad (g)$$

由方程(f)与(g), 可得到与方程(3.6)等价的用以计算 δ 的方程. 相应的压力可得自方程(3.3), 而中点的弯矩 M 可自图 3.10 中的曲线得到. 于是, 为了使力 P 实际产生所假定的弯曲, 这柱应有的初始挠度 a 可得自方程

$$P(a + \delta) = M.$$

为了得到荷重 P 使柱损坏的极限条件, 我們必須恰与对于一偏心荷重的柱一样地进行计算, 并运用方程(3.7). 这样所得到的结果, 可用曲线来表示. 每一曲线相应于一給定的初始挠度 a , 并给出产生损坏的压应力值 σ_c 为柱的细长比 l/r 的函数.

§ 3.3. 杆的非弹性屈曲. 基本情形

由前一节的討論(參閱图 3.13)可知, 随着軸向荷重的偏心距的减小, 柱能承载的最大荷重就增大. 逐渐地减小偏心距, 最后将

达到完全直的中心受压柱的非弹性屈曲。为了得到在图 3.13 中的点 A 所表示的相应的临界应力，曾应用了恩格赛-卡門 (Engesser-Kármán) 理論¹⁾。

在这理論中假設了：直到临界状态，柱保持直的形式；使柱离开其直的平衡位置而有一微小弯曲所須的力，即为临界荷重 P_{cr} 。

在討論相应于这微小挠曲的弯曲应力时，发现由于这弯曲，在柱的凹的这面压应力将有一微小的增加，而在柱的凸的这面应力将有所减小。若图 3.15 中的曲线 OBC 表示柱的材料的压缩試驗图，而点 C 相应于临界状态，則当微小挠曲时在柱凹的这面应力-应变关系由切綫 CC' 的斜率，称为切綫模量 E_t 所决定。在凸的这面，由于弯曲，应力将减小，而应力-应变关系由 CC'' 綫的斜率所决定，即由材料原来的弹性模量 E 所决定。設在弯曲时横截面保持为平面，則迭加于这压应力的微小的弯曲应力将沿着横截面的高度如图 3.16 而分布。若以 ρ 表示挠度曲线的曲率半径，則最大的张应力和压应力将各为

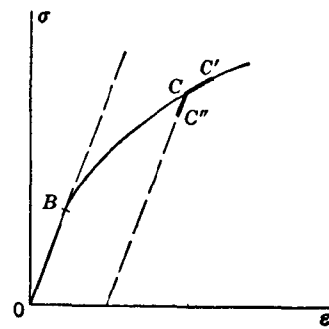


图 3.15

小的，而应力-应变关系由 CC'' 綫的斜率所决定，即由材料原来的弹性模量 E 所决定。設在弯曲时横截面保持为平面，則迭加于这压应力的微小的弯曲应力将沿着横截面的高度如图 3.16 而分布。若以 ρ 表示挠度曲线的曲率半径，則最大的张应力和压应力将各为

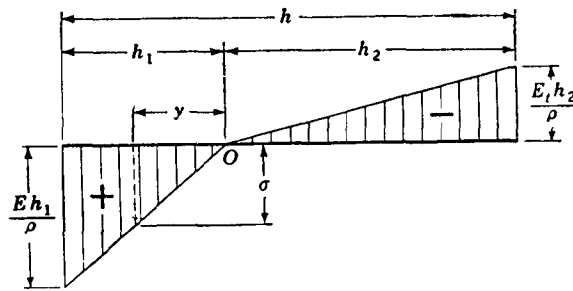


图 3.16

1) F. Engesser, Z. Ver. deut. Ingr., vol. 42, p. 927, 1898; T. V. Kármán, loc. cit.

Eh_1/ρ 及 E_1h_2/ρ , 而中性轴 O 的位置可由张力与压力的合力必须相等这条件得到. 对于高为 h 的矩形截面, 这条件要求

$$Eh_1^2 = E_1h_2^2 \quad (a)$$

并注意到

$$h_1 + h_2 = h,$$

我們得到

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}}, \quad h_2 = \frac{h\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}} \quad (b)$$

如果 b 为矩形截面的宽, 则图 3.16 所示的应力所代表的弯矩为

$$M = \frac{Eh_1}{\rho} \frac{bh_1}{2} \frac{2}{3} h = \frac{bh^3}{12\rho} \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2} \quad (c)$$

引进了称为**折合弹性模量**的

$$E_r = \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2} \quad (3.8)$$

这量, 就可使这方程与通常的挠度曲线方程(1.3)相同. 有了这记号, 即得

$$M = \frac{E_r I}{\rho} \quad (3.9)$$

或

$$Py = -E_r I \frac{d^2y}{dx^2} \quad (3.10)$$

由折合模量的表达式(3.8)的推演, 显见, E_r 的值不仅与柱的材料力学的性质有关, 而且与横截面的形状有关.

现以理想的工字截面作为第二个例子. 设横截面积的一半集中于每个翼缘, 而腹板的面积忽略不计(图 3.17). 由于弯曲, 翼缘内的力为

$$\frac{Eh_1}{\rho} \frac{A}{2} \quad \text{及} \quad \frac{Eh_2}{\rho} \frac{A}{2},$$

因此

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{E_1}{E}.$$

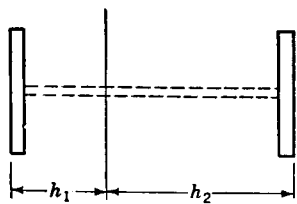


图 3.17

仍用 $h_1 + h_2 = h$ 这关系,得到

$$h_1 = \frac{hE_t}{E + E_t}, \quad h_2 = \frac{hE}{E + E_t}.$$

因内力所组成的矩为

$$M = \frac{Ah^2}{4\rho} \frac{2EE_t}{E + E_t},$$

最后得到

$$E_r = \frac{2EE_t}{E + E_t}. \quad (3.11)$$

对于柱的其他形状的横截面,同样可得到 E_r 的表达式。当 E_t 为常量且等于 E 时,方程(3.8)与(3.11)的 E_r 值均化为弹性系数 E 。

现在再回到方程(3.10),可以看出,它与弹性屈曲的方程(2.1)的形式相同,只是以 E_r 代替了 E 。将这方程积分,得铰接端杆的临界荷重

$$(P_r)_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{l^2}, \quad (3.12)$$

而相应的临界应力为

$$(\sigma_r)_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}. \quad (3.13)$$

因此可以看出,以前对符合胡克定律的材料所得的欧拉柱公式,亦可用于非弹性材料,只须以折合模量 E_r 代替¹⁾弹性模量 E 。

在以前的讨论中,曾设先作用轴向压力 $(P_r)_{cr}$,然后在保持这值为常量的同时,使柱有一微小的横向屈曲。在作实际的柱试验时,轴向力系与横向挠曲同时在增加。在这种情况下,当柱在开始弯曲时,柱的凸的这面的应力的减少,由于轴向压力不断地增加,可能被增加的压应力所补偿。因此实际变形可能是在柱的凸的这面的纤维应力并不减小的情况下进行的,如在图3.16中所设,而整个柱的应力-应变关系由切线模量 E_t 所确定。于是挠度曲线的微

1) 这屈曲理论称为折合弹性模量理论。

分方程成为

$$P y = -E_t I \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (3.14)$$

而对于一个两端铰接的柱, 临界荷重为

$$(P_t)_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{l^2}, \quad (3.15)$$

而临界应力为

$$(\sigma_t)_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}. \quad (3.16)$$

临界荷重(3.15)与临界应力(3.16)的表达式与方程(3.12)及(3.13)不同, 因为它们包含切线模量 E_t , 而 E_t 较折合模量为小, 且与横截面的形状无关. 由这讨论¹⁾可知: 随着荷重不断增加, 当达到数值(3.15)时, 柱就开始屈曲. 由实心圆截面的铝合金杆所得的试验结果²⁾, 与切线模量理论很为符合. 图 3.18 所示的结果表明: 对于较大的细长比值, 实验所得的点位于欧拉曲线上, 而对于较短的杆, 这些点与由切线模量所得的曲线一致. 要绘出这一曲线, 我们

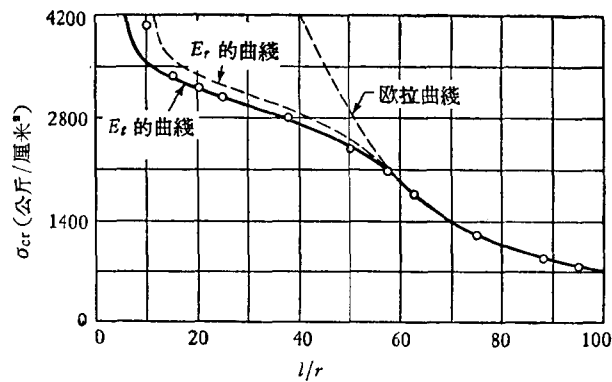


图 3.18

1) 这理论 (称为切线模量理论) 系由 F. R. Shanley 所创, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 14, p. 261, 1947.

2) R. L. Templin, R. G. Sturm, E. C. Hartmann 及 M. Holt, Aluminum Research Laboratories, Aluminum Company of America, Pittsburgh, 1938.

取几个 σ_{cr} 的值,并由压缩试验图对于每一个值决定相应的 E_t 值,然后将 σ_{cr} 与 E_t 的值代入方程(3.16),得相应的细长比值 l/r 。

对于不符合胡克定律而为完全弹性的材料,公式(3.14)至(3.16)显然可用以计算临界荷重。对于这种情形,若发生微小的弯曲,则弯曲应力系由切线模量 E_t 所决定。

前面已叙述过,屈曲的柱在凸的这面的应力并不减少这假定,只是在屈曲刚开始时才是正确的。如果我们要研究两端铰接柱超过方程(3.15)所给的荷重值的挠曲,则必须计及在凸的这面的应力的减少。这应力的减少主要发生在弯曲应力最大的柱的中间部分,并当柱的挠度增至超出屈曲开始时的微小初始挠曲时发生。在这条件下柱的挠度的计算是个复杂的问题¹⁾,而在这里我们只给出这类研究的一些最终结果。若压缩试验图可用分析表达式来表示,从而可由求微商得到切线模量的表达式,则解可以简化。对于象结构钢这种具有明显的屈服点应力 $\sigma_{Y.P.}$ 的材料,将用表达式²⁾

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = E_t = E \frac{\sigma_{Y.P.} - \sigma}{\sigma_{Y.P.} - c\sigma} \quad (3.17)$$

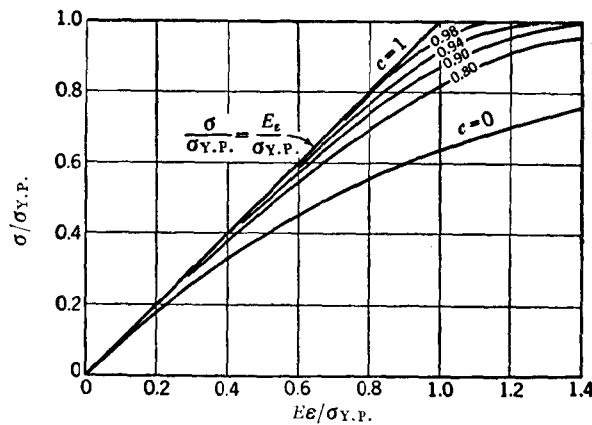


图 3.19

- 1) 参阅 J. F. Duberg 与 T. W. Wilder 的论文, *NACA Tech. Note* 2267, 1951; U. Müllersdorf, *Der Bauingenieur*, vol. 27, p. 57, 1952; A. Pflüger, *Ingr-Arch.*, vol. 20, p. 291, 1952; L. Hannes Larsson, *J. Aeronaut. Sci.* vol. 23, p. 867, 1956. 以下讨论中所给出的结果系取自最后这论文。
- 2) 这切线模量的表达式系 Arvo Ylinen 所建议, *Teknillinen Aikakauslehti*, vol. 38, p. 9, 1948 (芬兰). 并参阅他的论文, *Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, vol. 16, p. 529, 1956.

作为切线模量。当 $\sigma = 0$ 由这式得 $E_t = E$, 当 $\sigma = \sigma_{Y.P.}$ 得 $E_t = 0$ 。对于参数 c 的几个值, 相应的压缩试验图如图 3.19 所示。注意, $c = 1$ 相应于胡克定律, 即 $\sigma = E\varepsilon$ 。对于结构钢, 可很准确地取 c 值等于 0.96 至 0.99, 以方程(3.17)作为切线模量, 对于一理想的工字截面计算了¹⁾使柱发生破坏的最大荷重 P_{max} 。对于参数 c 的各个不同的值, 计算的结果示于图 3.20 中。这

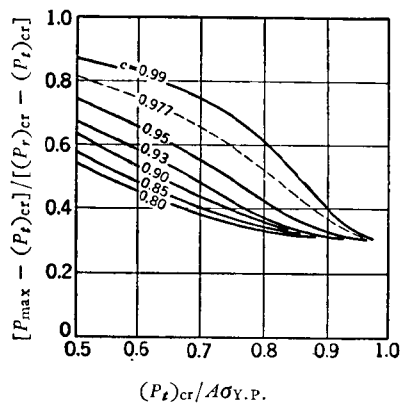


图 3.20

图中的虚线, 用以绘制图 3.21 中的虚线。在图 3.21 中, 还给出了对于两种钢材 ($\sigma_{Y.P.} = 3600$ 公斤/厘米²及 $\sigma_{Y.P.} = 2400$ 公斤/厘米²) 由方程(3.13)与(3.16)所得的 $(\sigma_r)_{cr}$ 与 $(\sigma_t)_{cr}$ 曲线。可以看出, 根据 P_{max} 所计算得的应力与 $(\sigma_t)_{cr}$ 十分接近, 因而后者可推荐于实际应用。对于矩形截面柱亦得出了相似的结果, 并且可得结论: 对于如结构钢那样有明显的屈服点的材料, 从 E_r 改变为 E_t 并不使 σ_{cr} 的大小有多大的改变。

当方程(3.17)用于没有明显的屈服点的材料时, 则须以 σ_{ult} 代替 $\sigma_{Y.P.}$ 。对于松木和混凝土, 建议用参数 c 各等于 0.875 与 0。

最后, 注意及弹性与非弹性(或塑性)的典型的荷重-挠度曲线之间的差别是十分重要的。对于在弹性范围内屈曲的细长杆, 理想的荷重-挠度曲线的形状如图 2.29 所示。若有缺陷存在, 则曲线的形状如图 4.3 所示。但在所有的情况中, 挠度的增加要求荷重

1) 参阅 L. Hannes Larsson, *loc. cit.*

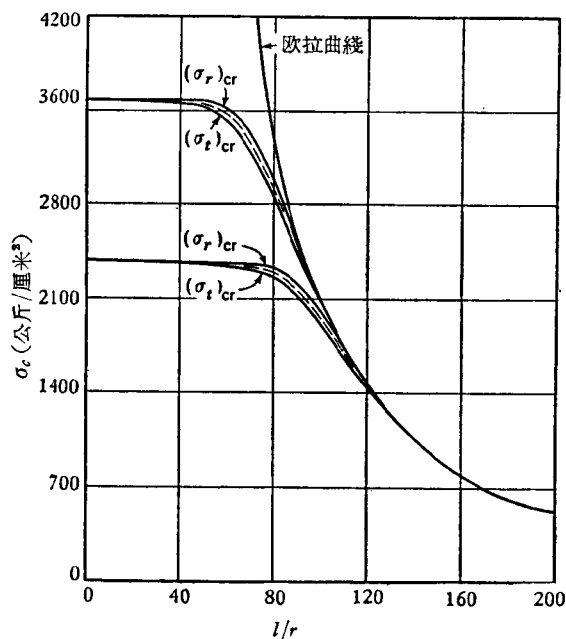


图 3.21

也增加。因而屈曲并非为一突然发生的现象；并且如果减少缺陷，就可能由实验准确地确定 P_{cr} 。

对于非弹性屈曲，现象很不相同。由图 3.13 的曲线显见，当荷重达到了临界值或最大值，随着挠度的增加荷重将很快地减少。这说明非弹性屈曲是突然发生的。并且也可以看出，微小的缺陷对于柱所能负担的荷重 P_{max} 的值有相当大的影响。此外，对于每一个荷重值，有两个平衡位置，相应于图 3.13 中的点 B 与点 C 。因而当逼近最大荷重时，一个偶然的力可能使柱从稳定位置 B 突然跳到不稳定位置 C 。所有这些因素说明了为什么在塑性范围内实验结果是分散的。在本书的后面部分将看到，对于壳屈曲的某些情形，在弹性范围内亦得到与图 3.13 相似的曲线。一旦发生了这种情况，我们即可预料到屈曲现象的突然性这特点，并且实验结果将是分散的。

§ 3.4. 具有其他端点条件的杆的非弹性屈曲

在前一节中用于两端铰接杆这基本情形的方法，亦可用于其他端点条件的杆。在 §§ 2.1, 2.2 中讨论了各种端点条件杆的弹性屈曲。由于在这许多情形中，压应力沿杆的长度为一常量，当压应力超过比例极限时，稍微屈曲杆的挠度曲线的微分方程将与在弹性范围内的方程的形式一样，所不同的只是以切线模量 E_t 代替了常数模量 E 。端点条件的数学表达亦保持不变。因此，在以前对于弹性状况所得公式中以 E_t 代替 E ，即得在超出比例极限的临界荷重的表达式。以前所得的折合长度仍保持不变。

若杆的两端系弹性固定，问题较为复杂，并且在超出比例极限后的折合长度不仅与两端的固定度有关，而且与 l/r 的大小有关。例如以图 2.14 的矩形框架为例。在弹性极限以内时，压力 P 的临界值系得自方程 [参阅 § 2.4 的方程 (b)]

$$\frac{\tan u}{u} = -\frac{EIb}{EI_1l}, \quad (a)$$

式中

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

超过了比例极限，铅直压杆的弯曲刚度成为 $E_t I$ ，而水平杆的弯曲刚度保持不变。因此，方程 (a) 右边这因子随 σ_{cr} 值而变，因而这方程的根 (这根定出折合长度) 亦在变更。

例如取一正方形的框架， $I = I_1$ 。在弹性极限以内时，对于这情形的方程 (a) 为

$$\frac{\tan u}{u} = -1,$$

由这方程得

$$u = 2.029,$$

于是

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.774l)^2},$$

因此折合长度 $L = 0.774l$ 。

超过了比例极限,上述正方形框架的方程 (a) 成为

$$\frac{\tan u}{u} = -\frac{E_t}{E}, \quad (b)$$

其中

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{E_t I}} = \frac{l}{2r} \sqrt{\frac{\sigma}{E_t}}$$

因 E_t 小于 E , 这决定临界荷重的方程的根系大于前面对于弹性状况所得的; 而相应的折合长度小于以上对于弹性条件所得的。取一组 σ_{cr} 值及相应的 E_t 值, 我们可自方程 (b) 计算相应的 l/r 值, 并可用一曲綫表示 σ_{cr} 值与细长比 l/r 之间的关系。这样即可证明: 对于这情形的折合长度在 $E_t = E$ 时的 $L = 0.774l$ 与 $E_t = 0$ 时的 $L = 0.5l$ 之间变化。这是可以料想到的, 因为 σ_{cr} 增大时, E_t 及铅直杆的弯曲刚度减小, 而水平杆的弯曲刚度保持不变。因此, 两端的相对固定度增大了, 并且当 σ_{cr} 趋近于屈服点应力时, 端点状况趋近于 $L = 0.5l$ 的刚性固定端的状况。

对于在弹性支座上的連續压杆及在弹性基础上的压杆, 我们有着同样的情形。超过了比例极限, 支座及基础的相对刚度将比在弹性极限以内的为大, 而折合长度将小于以前根据胡克定律所计算得的(参阅 §§ 2.5, 2.6, 2.10)。

当一稜柱杆为沿其长度而分布的力所压缩时, 沿杆长压应力并不是一常量。因此对于超过比例极限的屈曲, 在整个长度内, 切綫模量 E_t 亦不是常量, 于是将得到一变弯曲刚度的杆。以图 2.38 所示的这柱为例。如果在杆底端的应力超过了比例极限, 则在杆上面部分的应力仍保持在弹性极限以内。要计算这情形的临界应力, 必须认为杆的下部具有变弯曲刚度 $E_t I$, 而上部具有不变的弯曲刚度 $E I$ 。因此, 对这情形, 计算超过比例极限时的临界荷重问题就成为非常复杂了。作为临界荷重的近似计算, 我们运用在弹性条件下所得的公式 [参阅方程 (2.43)], 而对杆底端所计算得的 E_t 代替 E 。这等于假设超过了比例极限后这杆继续有不变的弯曲刚度, 并且这刚度与承受最大压应力的底端的相同。很自然,

这样的假设将给出过低的临界荷重值,而在运用这值时,我们总是偏于安全方面。

对于变横截面杆我们将遇到相似的问题。如果压应力沿杆的长度而变化,则超过弹性极限的临界荷重的准确计算,对于非弹性部分的受压杆须引用切线模量 E_t 。如果如图 2.38 中所示,沿这些部分的 E_t 为常量,则可以不太困难地准确计算临界荷重。但若 E_t 为变量,问题就较为复杂。如果在这种情况下,我们用对于弹性条件所得的公式,而以由最大压应力的横截面所计算得的切线模量 E_t 代替公式中的 E ,则将总是偏于安全方面。

对于组合柱,亦可引用 E_t 代替 E 以计算超过比例极限后的临界荷重。取图 2.57 中所示的情形为例。在轴向荷重的作用下,柱的诸弦杆将均匀受压而板条内并无应力。因此,我们可用公式 (2.64) 来计算超过比例极限时的临界荷重。我们只须在与弦杆有关的诸项中以 E_t 代替 E ,而保留在与板条有关的项中的 E 和 G 。因此,如果柱受超过比例极限的压缩,板条的刚度相对地增大了,而组合柱的性质趋近于实心柱。

第四章 实验与设计公式

§ 4.1. 柱的实验

慕欣勃洛克¹⁾ (Musschenbroek) 为中心受压的棱柱杆屈曲实验的创始人, 他发现这种杆的屈曲荷重与长度的平方成反比; 这结果在三十年以后由欧拉从理论上推算得到。工程师们当初并不承认慕欣勃洛克的实验结果及欧拉的理论; 例如, 甚至库仑²⁾ (Coulomb) 这样的人士仍坚持柱的强度与其横截面积成正比而与其长度无关。这种见解是被较短的木头及生铁柱的实验所支持的。这种实验常常指明, 柱在远小于欧拉临界荷重下即行破坏, 并且破坏的原因主要是由于材料被压坏, 而并非由于横向屈曲。拉马尔³⁾ (E. Lamarle) 对于理论与实验的分歧首先给出了一满意的解释; 他指出: 如果符合了关于材料为完全弹性及理想的端点条件的基本假设, 则欧拉的理论实验是相符的。

后来的实验家们⁴⁾ 肯定了欧拉公式的正确性。在这些实验中, 十分小心地体现了理论所设的端点条件, 并达成压缩荷重的中心施加⁵⁾。试验证明, 如果柱的细长比值使屈曲在应力小于材料的比

1) P. Van, Musschenbroek, *Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum*, Lugduni, 1729. 并参阅 P. Massuet 的法文翻译, *Essai de physique*, Leyden, 1739.

2) 参阅在 “*Mémoires... par divers savans*” Paris, 1776 中的库仑的传记。

3) E., Lamarle, *Ann. trav. publics de Belg.*, vol. 3, pp. 1—64, 1845; 及 vol. 4, pp. 1—36, Brussels, 1846.

4) I., Bauschinger, *Mitt. mech.-tech. Lab. tech. Hochschule, München*, No. 15, 1889; A. Considère, *Congr. intern. des procédés de construct.*, Paris, vol. 3, p. 371, 1889; L. Tetmajer, *Die Gesetze der Knickung- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe*, 3d ed., Leipzig and Vienna, 1903.

5) A. Considère 为最早于柱的两端引用一可供调整用的装置, 以使荷重作用于柱时能稍加改变荷重的作用点。

例极限时发生，则 σ_{cr} 的实验值与欧拉曲线相符。图 4.1 表示由各种形状横截面的结构钢试件所得的试验结果¹⁾。可以看出，当 $l/r > 105$ 时，所得的结果与欧拉曲线十分相符。欧拉公式可以应用的最低 l/r 值与材料的比例极限有关；而对于用于桥梁的高强度钢，这值约为 75。

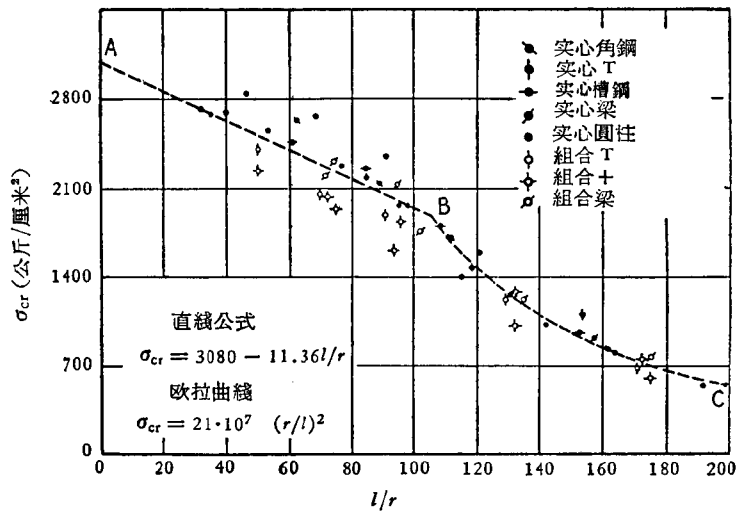


图 4.1

屈曲問題在实验方面的进一步研究是卡門²⁾所完成的。在他的試驗中，他以比例极限为 2450 公斤/厘米²及屈服点为 3220 公斤/厘米²的矩形截面鋼杆作試驗。他利用刀口施加荷重以保証柱两端的自由轉动，实验結果与欧拉公式之間的相差不超过 1½%。卡門并将他的实验扩充到塑性变形的范围内。用压缩試驗图計算出折合模量(如 § 3.3 中所述)，他証明了欧拉公式亦可用于临界应力超过材料的比例极限的較短的杆。图 4.2 中上面这曲綫給出了 σ_{cr} 值为細长比的函数，它是用了折合模量由欧拉公式算出的。图中下面这曲綫給出了当荷重的偏心矩为 0.005h 时(参閱图 3.13)

1) 根据 Tetmajer, *op. cit.*

2) T. V. Kármán, *Forschungsarb.*, No. 81, 1910, Berlin.

的极限¹⁾应力, h 为横截面的高度。可以看出, 以小圆所表示的大部分的实验结果均在两曲线之间的范围内。当 $l/r > 90$ 时, 实验结果与欧拉曲线极为符合。在比例极限与屈服点之间, 实验结果与在理论中用折合模量所得的结果很相符合。对于 $l/r < 40$, 临界应力大于材料的屈服点, 而 σ_{cr} 的曲线很快地上升。只当特别谨慎以避免在屈服点应力时发生屈曲, 才能由实验得到这样的临界应力值; 因此, 在设计柱时它们并无实际意义。

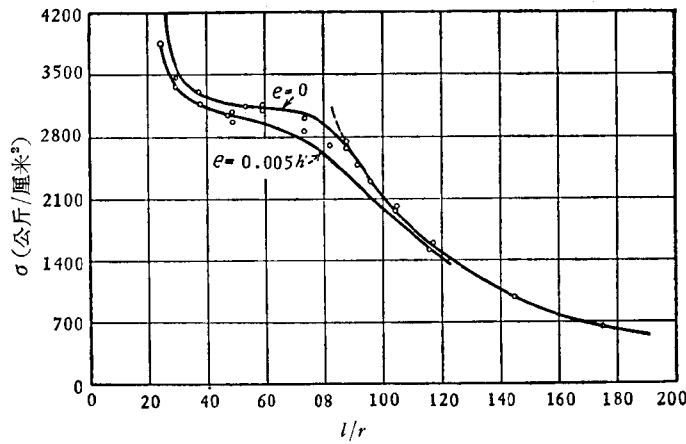


图 4.2

在作柱的屈曲实验时, 通常将柱的挠度表示为中心施加的荷重的函数。在理想的情况下, 直到达到荷重的临界值并无挠曲发生; 超过了临界点后, 荷重-挠度曲线将如图 2.29 所示。由于各种各样的缺陷, 例如柱的不可避免的初弯曲、荷重作用的偏心以及材料的非均质, 所以在开始加荷重时柱即开始挠曲, 并在未达到欧拉荷重之前即破坏。荷重-挠度曲线的形状与体现在理论上所作的假设的准确性有关。在图 4.3 中示出了为几个实验家在弹性阶段内作实验所得的几条曲线。由于实验技术的进步而使端点条件更接近于理论上的假设, 这些荷重-挠度曲线愈来愈接近于与临界荷

1) 相应于最大荷重的应力。

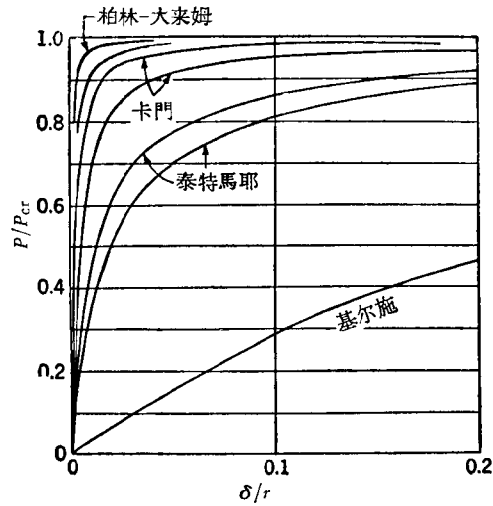


图 4.3

重相应的水平线。

目前，很准确的试验已为柏林-大来姆 (Berlin-Dahlem) 材料实验室所作，试验是用专门的构造作为柱的端支座而做的¹⁾。图 4.4

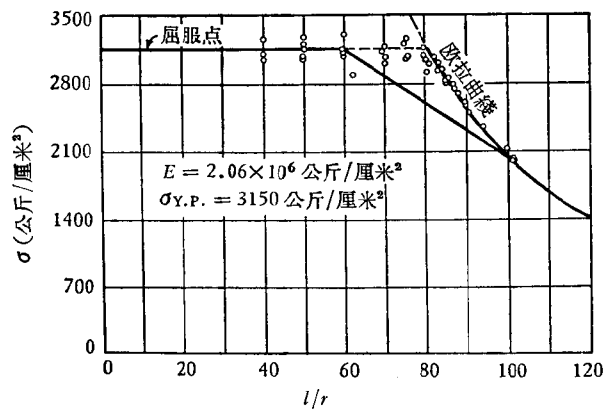


图 4.4

1) 参阅 K. Memmler 的论文, *Reports 2d Intern. Cong. Appl. Mech.*, Zürich, p. 357, 1926, 以及 W. Rein 的书, *Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle*, Springer-Verlag, Berlin, 1930.

中示出了在这实验室所得的一些试验结果。作试验用的材料为有明显的屈服点应力(约为 3150 公斤/厘米²)的结构钢。可以看出,当 $l/r > 80$ 时,这结果与欧拉曲线极为相符。对于较短的杆,须将屈服点应力作为临界应力。因此,对于短柱,用屈服点高的材料是经济的;但对于细长的柱,由于钢的弹性模量无甚改变,故并不有利。

ASCE 钢柱研究特别委员会的试验亦表明了在此的试验中屈服点应力的意义¹⁾。在这研究中,运用了特殊的球轴承垫座以得到铰接端条件。对于承载不易用刀口来传递的大轴向荷重的大

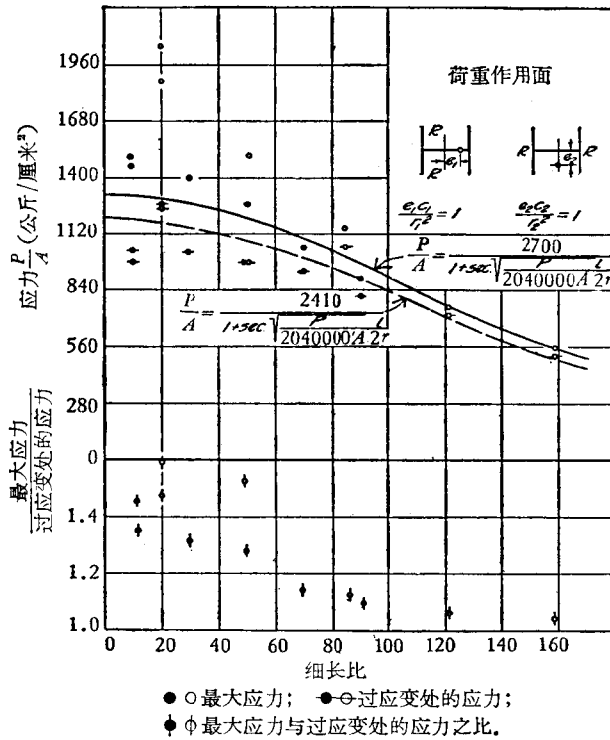


图 4.5

1) 参阅 *Trans. ASCE*, vol. 89, p. 1485, 1926; vol. 95, p. 1152, 1931; 及 vol. 98, p. 1376, 1933.

柱，这种装置是非常有用的。图 4.5 表明了这委员会在试验 H 形截面柱受偏心荷重时所得的一些结果。在一组试验中，偏心系位于腹板平面内，在另一组试验中，偏心位于垂直于腹板的平面内。在这两情况下，偏心距与核心半径之比 e/s 均取为 1。图中绘出了产生破坏的平均压应力 $\sigma_c = P/A$ 与细长比 l/r 的关系。黑色小圆表明当柱在腹板平面内弯曲时的极限强度，而空白的小圆表明在垂直于腹板平面内弯曲时的极限强度。为了比较，图中还绘出了表明最外层纤维开始屈服时的平均压应力的曲线。这曲线的纵坐标是由 § 1.13 的方程 (d) 而计算的，并取屈服点的平均值 $\sigma_{y,p} = 2700$ 公斤/厘米²。这 $\sigma_{y,p}$ 值系自柱的各部分取试件作张力试验而得。可以看出，当 $l/r > 60$ 时，平均压应力的最大值与最外层的纤维开始屈服时的应力值很相近。对于在腹板平面内弯曲的较短的柱，极限强度略高于产生屈服时的荷重，但两者相差并不大于最大荷重的 10%。当一短柱在垂直于腹板的平面内弯曲时，则最大荷重远大于开始屈服时的荷重。如果考虑屈服点以外的弯曲，这结果应该可以预料到的，正如在 § 3.2 曾说明过的。罗司¹⁾ (M. Rös) 亦曾得到相似的结果。钢的宽翼缘柱偏心受压的一系列广泛的试验，曾由杰斯登 (Johnston) 与彻乃 (Chenney)²⁾ 在里海 (Lehigh) 大学以及卡普斯 (Campus) 与麦叔乃脱 (Massonnet) 所作³⁾。

当由实验已得到了与图 4.3 中的曲线相似的荷重-挠度曲线，通常可由绘这曲线的水平渐近线而得到临界荷重的大小。苏司韦尔⁴⁾ (Southwell) 建议了一极有用的方法，可从在弹性阶段内的实验数据来决定临界荷重。设在一小于临界值的荷重作用下，柱的

- 1) M. Rös, *Proc. 2d Intern. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, p. 368, 1926.
- 2) B. Johnston 及 L. Cheney, *Steel Columns of Rolled Wide Flange Section*, *AISC Progr. Repts.* 1 与 2, 1942.
- 3) F. Campus 及 C. Massonnet, *Compt. rend. recherches*, I. R. S. I. A., No. 17, Brussels, April, 1956.
- 4) R. V. Southwell, *Proc. Roy. Soc., London*, series A, vol. 135, p. 601, 1932.

挠度是由于柱的初弯曲而产生的，则可用三角级数 (1.61) 作为挠度的表达式。当荷重趋近于临界值时，级数 (1.61) 中的第一项占最重要的地位，并可以假设当荷重渐增时所量得的柱中点的挠度 δ 可由方程

$$\delta = \frac{a_1}{\frac{P_{cr}}{P} - 1} \quad (a)$$

充分地表示出，式中的 a_1 为相应于级数 (1.61) 的第一项的初挠度。从这方程得到

$$\frac{\delta}{P} P_{cr} - \delta = a_1, \quad (b)$$

这方程指明，如果绘出比值 δ/P 与所量得的挠度 δ 的关系，则这些点将位于一直线上(图 4.6)¹⁾。这直线与水平轴 ($\delta/P = 0$) 相截于离原点 a_1 ，而这线的斜率的倒数即为临界荷重。

如果设柱的弯曲是由于荷重 P 作用的偏心而不是所设的初弯曲，则柱中点的挠度将充分地由 § 1.11 的方程 (e) 表示，即

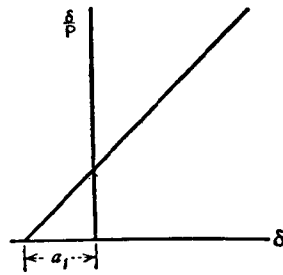


图 4.6

$$\delta = \frac{4e}{\pi} \frac{1}{\frac{P_{cr}}{P} - 1}. \quad (c)$$

考虑到初弯曲及荷重作用偏心的联合影响这一般的情形，柱中点的挠度为

$$\delta = \left(a_1 + \frac{4e}{\pi} \right) \frac{1}{\frac{P_{cr}}{P} - 1}, \quad (d)$$

并仍得到一与方程 (b) 相似的方程。因此，对于初曲率及荷重作

1) 这图通常称为苏司韦尔图。它亦被用于量测得的应变；参阅 M. S. Gregory, *Civil Eng. (London)*, vol. 55, No. 642, 1960, 及 *Australian J. Appl. Sci.* vol. 10, pp. 371—376, 1959.

用偏心的任何組合，临界荷重可得自如图 4.6 所示的直綫的斜率的倒数。

从方程 (d) 可以看出，取 $e = -\pi a_1/4$ ，就可消除小于临界值的荷重在柱中点所产生的挠度。这說明了为什么在柱两端用了可以調整的支座就可得到很准确的 P_c 值。在这种实验中，偏心矩的大小由調整荷重的作用点以抵消初弯曲的影响而决定。

应当注意，在推演方程 (d) 时曾用了由于偏心而产生的挠度的近似值。如果用了挠度的精确值[参閱方程 (1.33)]，可以証明：当荷重开始作用时，这柱可能在一个方向挠曲，而随后突然在相反的方向屈曲¹⁾。

对于临界应力超过比例极限的較短的杆，荷重-挠度曲綫具有图 3.13 所示的形状。可以看出，当挠度很小时，荷重就达到了它的最大值，随之这柱即突然地屈曲；因为当挠度增大时，保持这渐增的挠度所需的荷重却很快地減小了。在这实验中所达到的最大荷重即被取作临界荷重。可以看出，当荷重作用的偏心距趋近于零时，这最大荷重趋近于用了切綫模量由欧拉方程所計算得的临界值。对于这种情形，屈曲杆的挠度曲綫的形状不再是正弦曲綫，而永久变形主要集中在弯矩最大的杆的中部。

从这一节的討論可以看出，由于各种缺陷，在荷重作用下实际柱的性状与理想柱很不相同。若在决定費用应力时将这一点考虑在內，則对于结构中柱的设计可有三个颇为不同的方法：(1) 以理想柱的公式作为柱设计的基础，而用一适当的安全系数来补偿各种缺陷；(2) 将一安全系数用于一經驗公式，而这公式中的那些常数已被調整得使此公式与試驗結果相符合；(3) 一开始就假設这柱有某些缺陷，而取安全荷重为小于使材料开始屈服的荷重的某一值。在以下数节中将討論这几个设计柱的方法。

1) 这种挠曲方向反转的现象曾为 H. Zimmermann 所研究过，*Sitzber. Akad. Wiss., Berlin*, vol. 25, p. 262, 1923；并参閱他的书，*Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage*, Berlin, 1930。实验与这理论是很相符的；参閱 K. Memmler, *loc. cit.*

§ 4.2. 以理想柱的公式作为设计柱的基础

前一节所讨论的实验指出, 对于中心受压的直柱, 如果已知柱的材料压缩试验图, 就可以充分准确地计算压应力的临界值。在弹性范围内时必须用欧拉公式作这种计算, 而在比例极限以外时必须用修正了的欧拉公式, 即以切线模量 E_t 代替 E 。由于这种计算, 即可得到一表示 σ_{cr} 为细长比的函数的曲线。在图 4.7 中绘出了对于两种不同的结构钢 ($\sigma_{Y.P.} \approx 3500$ 公斤/厘米² 的 54 号钢及 $\sigma_{Y.P.} \approx 2400$ 公斤/厘米² 的 37 号钢) 所计算得的曲线¹⁾。对于每一情形, 在比例极限以前用欧拉曲线, 超过了比例极限则用根据折合模量所绘的曲线。在 $l/r \approx 50$ 时, 临界应力曲线转向上升, 而 σ_{cr} 开始随细长比的减小而增大。在实际设计中不应考虑 σ_{cr} 增加得超过屈服点应力。因为仅当特别谨慎以防止柱在屈服点应力时发生屈曲, 才能得到比屈服点应力大的临界应力。

对于实际应用, 以上每一曲线的非弹性部分均可用两根直线来代替: 对于超过屈服点应力的部分用一水平线; 在屈服点与比

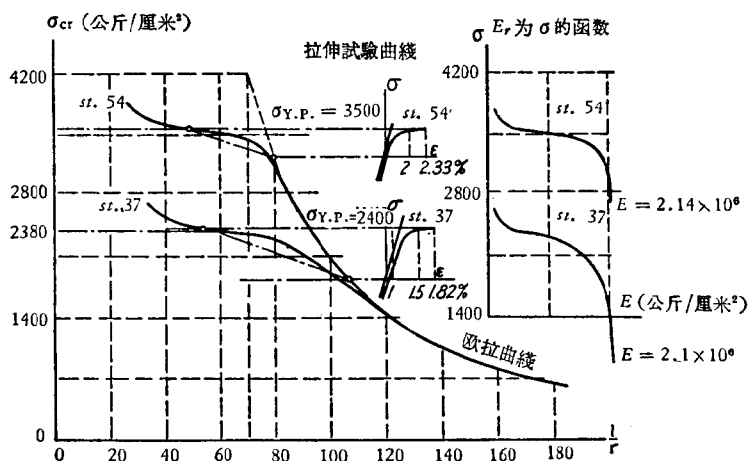


图 4.7

1) 这两根曲线系取自 W. Gehler 的论文, *Proc. 2d Intern. Cong. Appl. Mech.*, Zürich, p. 364, 1926. 在这些计算中用了 E_t 而不是 E_t ; 并给出了压缩试验图的必要部分以及表示折合模量作为压应力的函数的曲线。

例极限之間的部分用一斜綫。这样，如果从实验决定了材料的屈服点和比例极限，就可得到完全的临界应力图。这样的近似图綫在图 4.7 中用点划綫表示。

知道了临界应力曲綫，对于任何細长比的許可应力可由 σ_{cr} 被一安全系数所除而得。在设计柱时，选择一恰当的安全系数是相当困难的事。这困难的主要原因在于，受压柱的性状与在欧拉理論中所假設的并不相同，而主要由各种缺陷的大小所决定，例如柱的初弯曲，荷重作用的偏心及材料的非均质。这种缺陷亦存在于别的結構（例如承受横向荷重作用的梁），但对于这些情形缺陷的影响是可以忽略的，而对于柱这些缺陷对变形有很大的影响。在实际結構中所遇到的这种缺陷的大小是不清楚的，因而常选用一較大的安全系数来补偿。

选择安全系数的最簡單的方法，是設各种缺陷对于柱的变形及所产生的最大纖維应力的影响与細长比无关系。于是安全系数对于所有的 l/r 值为一常数。例如，对于图 4.7 中下面这曲綫所示的鋼材，取安全系数为 2.5，于是，若材料的比例极限为 2100 公斤/厘米²，屈服点为 2370 公斤/厘米²，則当 $l/r < 60$ 时許可应力为 960 公斤/厘米²，而当 $l/r = 100$ 时，許可应力为 840 公斤/厘米²。

如設柱的如初弯曲等缺陷随細长比的增加而增大，則引用一随細长比而增大的变安全因数是合理的。例如在有的国家的规范中，安全系数自 $l/r = 0$ 时的 1.7 增至大 l/r 值时的 2.5。

为了簡化計算，这些规范給出了一不变的与簡單拉伸时一样的許可应力，而将作用于构件的力乘以一**放大因数** ω 以补偿柱的作用。这因数等于拉伸的許可应力与相应的 l/r 值的柱的許可应力之比。有了这 ω 值的表，就可用試算法簡便地选择柱的适当的横截面。

在以上的討論中，我們假設了两端铰接的柱的屈曲这基本情形。对于这情形所建立的費用应力亦可用于其他情形，只要以折合长度代替柱的实际长度。这折合长度的大小与柱的端点条件、

压荷重沿柱的长度的分布情形以及柱的形状（如果横截面是变化的）有关系。本书第二章中曾讨论了各种情形，并给出了计算当材料在弹性阶段内时的折合长度所必须的数据。在讨论超过比例极限后柱的屈曲时（参阅 § 3.3）曾指出：如将弹性阶段内的折合长度用于塑性阶段，且这折合长度系以最大压应力的截面为根据而计算，则设计将永偏于安全。

以上的讨论中曾设柱是实心的，但如果柱系由型钢适当地铆接或焊接在一起而组成¹⁾，则以上所得的结果仍旧可以用。铆钉孔的存在几乎并不减少柱的弯曲刚度，并且在计算细长比 l/r 和横截面积时，习惯上常略去铆钉孔²⁾。

§ 4.3. 设计柱的经验公式

在设计柱时有时用经验算式，而不用前一节中所讨论的临界应力曲线。

这类公式中的最早的一个系特莱哥德³⁾ (Tredgold) 所创，后来戈登 (Gordon) 采用了这公式以表示霍特金生 (Hodgkinson) 的实验结果，而兰金 (Rankine) 给出了这公式的最终形式，因此，被称为**兰金公式**或**兰金-戈登公式**。这公式所给出的许可平均压应力为

$$(\sigma_c)_w = \frac{a}{1 + b\left(\frac{l}{r}\right)^2}, \quad (a)$$

式中的 a 表示应力而 b 为数值系数，对于一定的材料两者均为常数。泰特马耶⁴⁾ (Tetmajer) 指出：要使这方程与实验相符，系数 b

- 1) 铆钉间所须的距离这问题将在 § 4.6 中讨论。
- 2) A. Föppl 曾研究过铆钉孔对临界荷重大小的影响这问题，*Mitt. Mech-Tech. Lab. Tech. Hochschule, München*, No. 25, 1897. 并参阅 Timoshenko 的论文，*Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1908.
- 3) 关于此公式的发展史，参阅 E. H. Salmon, *Columns*, London, 1921; Todhunter 及 Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 1, p. 105, Cambridge, 1886; Timoshenko, *History of Strength of Materials*, p. 208, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.
- 4) Tetmajer, *loc. cit.*

不能为常数而必须随 l/r 的增加而减小。这事实常被忽视，而方程 (a) 仍常用于柱的设计。适当地选择常数，可使这公式在一定范围内满意地与实验结果相符合。例如，美国钢结构协会 (AISC) 在它的 1949 年的规范中规定：当 $120 < l/r < 200$ 时，次要压杆的毛截面的安全应力 (公斤/厘米²) 为

$$(\sigma_c)_w = \frac{1273}{1 + \frac{l^2}{18000r^2}}.$$

纽约市房屋建筑规程 (1945 年) 对于 $60 < l/r < 120$ 的主要杆件及 $60 < l/r < 200$ 的次要杆件，亦给出了这一公式。对于 $l/r < 60$ ，规定许可应力为 1050 公斤/厘米²。

直线公式给出许可平均压应力的形式为

$$(\sigma_c)_w = a - b \frac{l}{r}, \quad (b)$$

式中的常数 a 与 b 与材料的性质及安全系数有关。芝加哥房屋建筑规程用了这样的一个公式：

$$(\sigma_c)_w = 1130 - 4.95 \frac{l}{r}, \quad (c)$$

对于主要杆件，这公式用于 $30 < l/r < 120$ ；对于次要杆件，用于 $30 < l/r < 150$ 。对于 $l/r < 30$ ，用 $(\sigma_c)_w = 980$ 公斤/厘米²。

以上这公式是由泰特马耶与包辛¹⁾由两端铰接的结构钢柱试验所得。这些试验启示我们用公式 (公斤/厘米²)

$$\sigma_{cr} = 3393 - 14.8 \frac{l}{r} \quad (d)$$

来计算平均压应力的临界值。

泰特马耶推荐这公式用于 $l/r < 110$ 。公式 (c) 系由公式 (d)

1) 参阅 F. S. Jasinsky, "Scientific Papers", vol. 1, St. Petersburg, 1902, 及 *Ann. ponts chaussées*, 7. série, vol. 8, p. 256, 1894. 并参阅 J. M. Moncrieff 对实验结果所作的广泛的分析, *Proc. ASCE* vol. 45, 1900, 以及他的书 "The Practical Column under Central or Eccentric Loading", New York, 1901.

用安全系数 3 而得。美国铝业公司 (ALCOA)¹⁾ 规定：当 l/r 值小于某一极限值时用柱的直线公式；而当 l/r 大于这极限值时用欧拉公式。

约翰逊²⁾ (J. B. Johnson) 所提出的抛物线公式亦是常用的。这公式给出平均压应力的许可值为：

$$(\sigma_{cr})_w = a - b \left(\frac{l}{r} \right)^2, \quad (e)$$

式中的常数 a 与 b 与材料性质及安全系数有关。例如，AISC 规定 $l/r < 120$ 时的公式为

$$(\sigma_{cr})_w = 1202 - 0.0373 \left(\frac{l}{r} \right)^2.$$

美国铁路工程协会 (AREA) 及美国国家公路职员协会 (AASHO) 规定，当 $l/r < 140$ 时用

$$(\sigma_{cr})_w = 1060 - 0.0192 \left(\frac{l}{r} \right)^2.$$

运用修正了的欧拉公式[方程(3.13)]，并以折合模量 E_r 作为临界压应力的函数，曾得到了多种其他的柱公式。这类公式曾由斯德莱特³⁾ (Strand) 和弗兰逊⁴⁾ (Frandsen) 所得。

§ 4.4. 以所設的缺陷作为設計柱的根据

在討論將欧拉公式应用于柱的设计时 (§ 4.2)，曾指出主要的

- 1) Alcoa Structural Handbook, Aluminum Company of America, Pittsburgh, Pa., 1956. 对于铝合金柱的试验结果，及与诸公式的比较，参阅 R. L. Tempelin, R. G. Sturm, E. G. Hartmann 及 M. Holt, Column Strength of Various Aluminum Alloys, *Tech. Paper 1*, Aluminum Research Laboratories, Aluminum Company of America, 1938; H. N. Hill 及 J. W. Clark, Straightline Column Formulas for Aluminum Alloys, *Tech. Paper 12*, Aluminum Company of America, 1955.
- 2) 参阅 C. E. Fuller 及 W. A. Johnston, *Applied Mechanics*, vol. 2, p. 359, 1919. 并参阅 A. Ostfeld 的论文, *Z. Ver. deut. Ingr.*, vol. 42, p. 1462, 1898.
- 3) Strand, Torbjörn, *Zentr. Bauverwaltung*, p. 88, 1914. 并参阅 R. Mayer, *Die Knickfestigkeit*, p. 74, Springer-Verlag, Berlin, 1921.
- 4) P. M. Frandsen, *Pub. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, Zürich, vol. 1, p. 195, 1932. 并参阅 W. R. Osgood 的论文, *Natl. Bur. Standard Research Paper 492*, 1932.

困难在于恰当地选择安全系数，以补偿柱的各种缺陷。在这种情况下，一开始就设柱有些缺陷而并不去考虑理想的情形是合乎逻辑的。于是可导出一公式，这公式不仅包括柱的大小与材料的机械性质，并且还包括所设的缺陷的值。将这些缺陷明显地表现于设计公式内，就可以在较合理的基础上去选择安全系数。

使实际柱的性状不同于理想柱的主要缺陷为：(1) 在作用压荷重时的不可避免的偏心；(2) 柱的初弯曲；(3) 材料的非均质性。在讨论由柱的实验得到的荷重-挠度曲线时曾指明(参阅 205 页)，荷重作用的偏心对挠度的影响可由设一适当选择的柱的初弯曲而得以补偿。材料的非均质性亦可以类似的方式来补偿。为简单起见，设柱由模量不同的两平行杆组成。要使这样的柱均匀受压而不发生横向弯曲，必须使荷重不作用于截面的形心而作用于另外的一点；该点的位置不仅与横截面的形状有关，且与两模量之比亦有关。因此，材料不均质性的影响相当于某一偏心的影响，并亦可用一恰当选择的初弯曲来补偿。

许多研究者曾试图由分析受压柱的挠度的已有实验资料来确立荷重作用的偏心的多少。这些计算通常设在柱两端有一不变的偏心距及某一屈服点应力值；然后从产生破坏的荷重的大小计算偏心距的值。这样地分析了泰特马耶的实验，马斯登¹⁾ (Marston) 和琴生²⁾ (Jensen) 先后发现偏心距与核心半径之比的平均值为 $e/s = 0.06$ 及 $e/s = 0.07$ 。从分析列雷³⁾ (Lilly) 的实验亦曾得到相同的值。不設偏心距与核心半径成比例，而設偏心距与柱的长度⁴⁾ 有关似乎更为合理。根据对实验资料的研究比较，例如沙尔蒙 (Salmon) 推荐

$$e = 0.001l. \quad (a)$$

1) A. Marston, *Trans. ASCE*, vol. 39, p. 108, 1897.

2) C. Jensen, *Engineering*, London, vol. 85, p. 433, 1908.

3) W. E. Lilly, *Trans. ASCE*, vol. 76, p. 258, New York. E. H. Salmon 搜集了很多关于柱的缺陷的资料, *Columns*, London, 1921. 并参阅他的讨论, *Trans. ASCE*, vol. 95, p. 1258, 1931.

4) Salmon 给出了几个表示比 e/s 为细长比的函数的经验公式, *op. cit.*

初弯曲問題亦被許多实验家研究过。沙尔蒙¹⁾搜集了这些研究結果并把它們表示在图 4.8 中。图中繪了初挠度 a (中心綫上的任一点至联結两端面形心的直綫的最大距离) 与柱的长度的关系。可以看出,实际上所有的点均低于直綫

$$a = \frac{1}{750}l, \quad (b)$$

这直綫被建議用以計算实际柱可能有的初挠度。

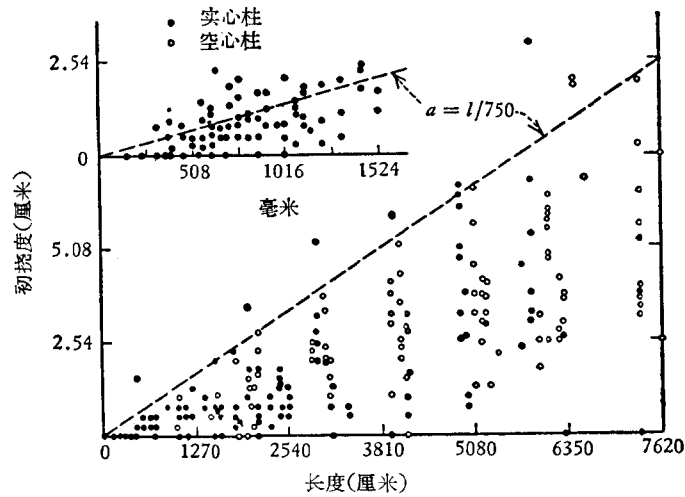


图 4.8

除了荷重作用的偏心与初弯曲的影响外,亦应考虑材料不均質性及柱横截面的不可避免的不尽相同的影响。

所有这些缺陷可以用柱的等效的初挠度来代替。要从实验得到这挠度,必須研究荷重-挠度曲綫。从初弯曲杆的受压的討論 (§ 1.12)我們知道:当荷重很小时,应預料到柱的横向挠曲的不規則性狀。許多实验家亦曾証实了这一結論。当荷重趋近于临界值时,表示挠度曲綫的級数 [参閱方程 (1.61)] 的第一項起了主要作

1) *ibid.*

用;繪出如图 4.6 所示的直綫,我們可以得到等效的初撓度. 由于这类实验資料很少,在选择等效的初撓度值时,必須依赖于所討論过的实验資料,設所有的缺陷均与柱的长度成比例地增大,并考虑如方程 (a) 所示的偏心距及如方程 (b) 所示的初撓度,我們最后取下式作为初撓度:

$$a = \frac{1}{400}l, \quad (c)$$

这初撓度将足以补偿柱的所有可能的缺陷¹⁾.

如采用这設計方法,柱的设计可归结为如图 3.14 所示的初弯曲杆的受压問題. 对于这情形的解,曾由以富氏級数表示初始与最終的撓度而获得²⁾. 对于屈服点应力为 2520 公斤/厘米²,比例极限为 2100 公斤/厘米²的鋼材,分析的结果表示于图 4.9 中. 对于几个初曲率值 a/s , 那些曲綫給出了产生破坏的平均压应力 σ_c 的极限值. 这些曲綫表明,对于弯曲与压缩的联合作用(特别是偏心距微小时)的情形,屈服荷重与破坏荷重要比受横向荷重而弯

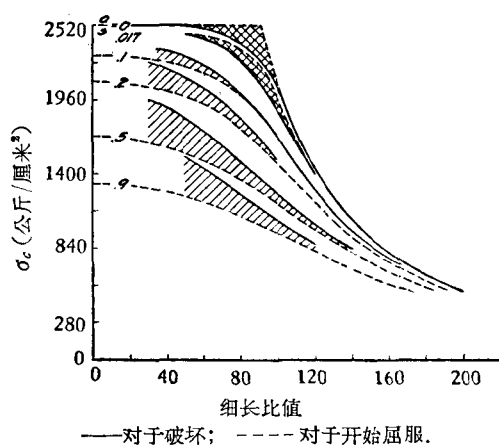


图 4.9

1) H. Kayser 在 *Bautechnik*, Berlin, vol. 8, 1930 的论文中,从试验结果推算上去以找出必须有的初撓度的大小,发现 a 的值在 $l/400$ 到 $l/1000$ 间,他推荐用 $a = l/400$.

2) H. M. Westergaard 及 W. R. Osgood, *Trans. ASME*, vol. 50, 1928.

曲这情形接近得多。因此，取使柱产生屈服点应力的荷重作为决定许可应力的基础（参阅 § 1.13），是合乎逻辑的。这方法可避免在研究比例极限外的弯曲所必须的繁重计算。

若已知杆的初挠度，自与图 4.9 相似的曲线，可充分准确地得到使最外缘纤维达到屈服点应力时的平均压应力值 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 。从这些曲线还可以得到一组以初挠度 a 与柱的长度¹⁾ l 之比为参数的曲线。由于核心半径 s 与迴转半径之比与截面的形状有关，故上述曲线亦与截面的形状有关。在图 4.10 与图 4.11 中绘出了两组这类的曲线²⁾；它们系分别对一实心矩形截面及设所有材料集中于翼缘的一理论截面而计算的。结构钢的屈服点应力设为 2520 公斤/厘米²，而设柱的缺陷相当于在其中点有一初挠度 a ， a/l 具有图中所示的值。这些曲线亦表明了 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 如何随柱的缺陷的增大而变化。

有了这些曲线，即可得到对于任何细长比值 l/r 的最外缘纤维开始屈服的平均压应力 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 。以上曾指明，产生屈服的荷重

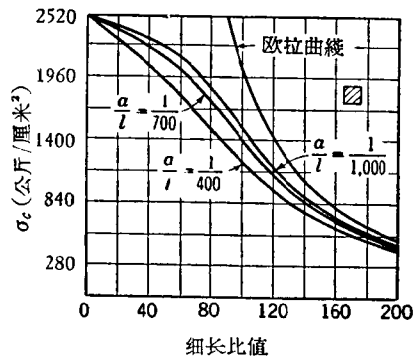


图 4.10

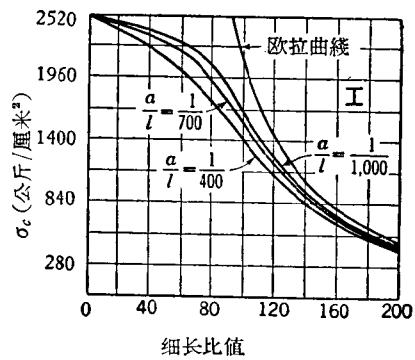


图 4.11

- 1) 在这情况下，初挠度 a 随细长比而增大；因此， $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 比图 4.9 所示的曲线减少得快。
- 2) 这些曲线取自 D. H. Young 的论文，*Proc. ASCE*, vol. 101, 1936。根据设柱的缺陷由与柱长成比例的偏心所补偿而计算得的相似的曲线给予 Timoshenko 的论文中，*Trans. ASME, Applied Mechanics Division*, vol. 1, p. 173, 1933。

与发生破坏的荷重并无很大差别，并当细长比增大时两者互相趋近（参阅图 4.9）。取 $(\sigma_c)_{y.p.}$ 作为计算许可压应力 $(\sigma_c)_w$ 的基础，并用一常数安全系数，在所有的实际情形中都将偏于安全¹⁾。对于较小的细长比值，对于完全破坏的安全余裕将稍大些。

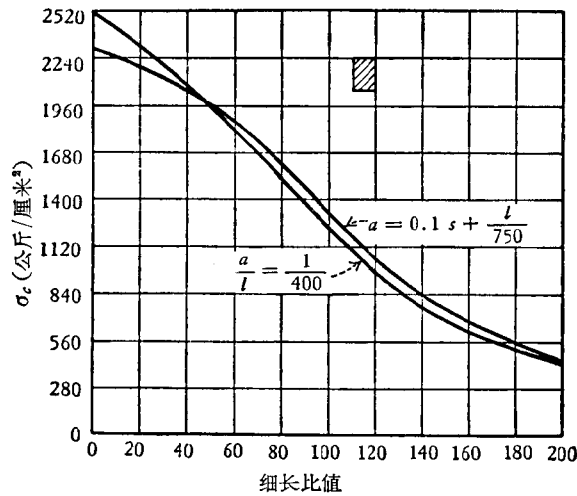


图 4.12

在前面的讨论中，我们设柱的缺陷与柱的长度成比例，从而当细长比很小时缺陷亦就很小。有些作者建议将缺陷分为两类，一类与柱的长度无关，并可用一与核心半径 s 成比例的初挠度来补偿；而另一类可用与柱的长度成比例的初挠度来补偿²⁾。用了图 4.9 中所示的曲线，即可得到对于以上两种缺陷的任何值的 $(\sigma_c)_{y.p.}$ 的曲线。图 4.12 与图 4.13 中示出了两条这类的曲线，它们是设所有的缺陷可由公式

- 1) 其实，对于很小的 a/s 值，以屈服点应力为基础所得的荷重，可能比破坏荷重稍大。这一差异将引起不安全，但并无关系，因为在柱的实际设计中系设较大的 a/s 值。
- 2) F. S. Jasinsky 首先作出这样的建议，*loc. cit.* 并参阅 H. S. Prichard 的论文，*Proc. Eng. Soc. Western Penn.*, Pittsburgh, Pa., vol. 23, p. 325, 1908, 及 O. H. Basquin 的论文，*Jour. Western Soc. Eng.*, Chicago, vol. 18, p. 457, 1913.

$$a = 0.1s + \frac{1}{750}l$$

所示的初挠度来补偿而计算的。其一系设横截面为一实心的矩形，另一系设所有的材料均集中于翼缘的理论截面。为了便于比较，在图中亦绘出了以前对 $a = l/400$ 而计算的曲线（取自图 4.10 及图 4.11）。

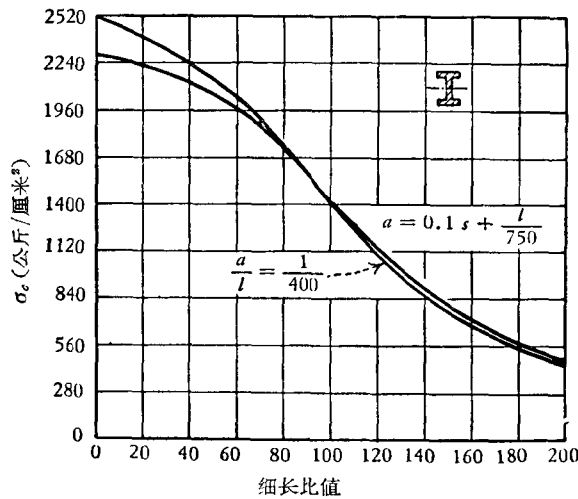


图 4.13

§ 4.5. 各种端点条件

在前一节的讨论中，曾设受压的柱的两端是可以自由转动的。有些情形是接近于这假设的，但通常所遇到的柱，其两端在某种程度上是受到约束而不能自由转动的。在这种情况下，荷重的临界值与约束系数的大小有关，并当两端完全固定时荷重的临界值为最大。我们首先来讨论这极端情形。如果在受压时柱的两端不能自由转动，压力作用的任何偏心并不使柱弯曲，而直柱将只均匀受压。因此，在讨论两端固定的柱的缺陷时，只有初弯曲是须要考虑的。由于初弯曲所引起的弯曲应力，自然与柱的初弯曲的形状有关。例如，设初弯曲为正弦曲线 $y = a \sin \pi x / l$ (图 4.14)，可得结

論：对于微小的荷重 P ，由于弯曲所产生的挠度与初挠度相比可以被忽略，于是在两端的偏心距必等于 $2a/\pi$ 。这偏心距是由考虑

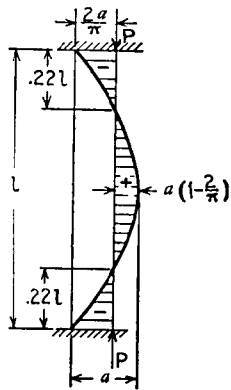


图 4.14

图中有阴影的总弯矩图面积而得的。这总面积必须为零，才能使柱的一端对另一端的转动为零。

随压荷重的增大，必须考虑由于弯曲所产生的附加挠度。运用 § 1.12 的方程 (1) 和 (m)，得到两端的弯矩 M_1 及中点的弯矩 M_2 各为：

$$M_1 = -\frac{aP}{(1-\alpha)} \frac{\pi\alpha}{2u \tan u},$$

$$M_2 = \frac{aP}{1-\alpha} \left(1 - \frac{\pi\alpha}{2u \sin u}\right), \quad (a)$$

式中

$$\alpha = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}, \quad u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (b)$$

对于微小的荷重 P 值，可设 $u \approx \sin u \approx \tan u$ ，且与 1 相比可略去 α 。于是

$$M_1 = -\frac{2aP}{\pi}, \quad M_2 = aP \left(1 - \frac{2}{\pi}\right), \quad (c)$$

如以上所述，这要求荷重作用的偏心距为 $2a/\pi$ 。可以看出，两端的弯矩大于中点的弯矩，而这两弯矩之比¹⁾为

$$\frac{M_1}{M_2} \approx -1.75.$$

这结果对于短柱是正确的，其极限荷重常远较欧拉荷重为小。

随荷重 P 的增大，弯矩 M_1 及 M_2 亦增大，但它们的比值却减小。例如取 $P = \pi^2 EI/l^2$ ，即压荷重等于两端固定的柱的临界荷重的 $1/4$ 。于是由方程 (a) 得到

1) 应注意这比值与初弯曲的形状有关。例如设初始曲线为一对杆中点对称的抛物线，则得到 $M_1/M_2 = -2$ 。

$$M_1 = -\frac{\pi a P}{4}, \quad M_2 = \frac{a P}{2};$$

并且

$$\frac{M_1}{M_2} \approx -1.57.$$

对于較細长的柱，有微小初弯曲的柱的极限荷重趋近于 $4\pi^2 EI/P^2$ 这值，而方程(a)中的 u 趋近于 π 。在 u 值趋近于 π 时，弯矩 M_1 及 M_2 将无限地增大，而它们的比值趋近于 1。

柱弯曲的情况趋近于初曲率的方程为

$$y = \frac{a}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

的柱的弯曲。在这种情况下（参阅图 4.15），在两端及在中点的弯矩数值总相等，而最大应力与一长为 $l/2$ ，初弯曲由中点的挠度为 $a/2$ 的正弦曲线所表示的两端铰接柱的最大应力相同。对于这种情形，最大弯矩的表达式为[参阅方程 (1.60)]

$$M = \frac{aP}{2 \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right)}.$$

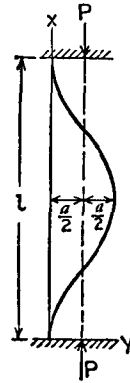


图 4.15

弯矩 M_1 [由方程 (a)] 的绝对值与弯矩 M 之比为

$$\frac{M_1}{M} = \frac{2\sqrt{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right)}{(1 - \alpha) \tan(\pi\sqrt{\alpha}/2)}.$$

对于微小的 α 值，这比趋近于 $4/\pi$ 。随荷重 P 的增大， α 增大而这比值减小。当 $\alpha = 1$ 时，这比值等于 $3\pi/8$ 。当 α 趋近于 4（相应于两端固定的柱的欧拉荷重），这两弯矩之比值趋近于 $8/3\pi$ 。

从这讨论可得结论：若如图 4.14 中所示的柱为一细长柱，其破坏主要是由于弯曲应力，则取柱的折合长度等于原长之半，并运用以两端铰接的柱所计算得的曲线（图 4.10 与 4.11），将是偏于安全的。对于短柱，最大弯曲应力将稍大于用以上步骤所计算得的，但这种柱被破坏时的弯曲应力通常远较轴向应力为小；因此，

在这种情况下运用折合长度 $l/2$ 及图 4.10 与 4.11 中的曲线似乎也是合适的。若注意及在讨论两端铰接柱时，选择初弯曲的大小使补偿柱的弯曲及荷重作用的偏心，并且对于两端固定这情形这偏心是没有的，则这样的步骤将更是有理。因此，根据所设的缺陷讨论两端固定的柱的设计时，正如当我们用临界应力图以决定实用应力一样，对于折合长度我们得到相同的结论。

到现在为止，我们只研究了两种极端情形，即两端铰接的柱及两端固定的柱。在结构中的压杆通常系介于以上两者之间，两端的约束与相邻接的杆件的刚度有关。两端的固定程度只能根据整个结构的稳定性研究来决定。本书的第二章中曾讨论过这种研究的几个例子，并曾指出，对于每一特定情形，结构的压杆的临界荷重可作为有某一折合长度的铰接柱而计算。有了这个折合长度，可运用如图 4.12 与 4.13 的曲线来设计压杆。

只有对于最简单的结构才可以不太困难地建立稳定性的条件。一般地，在设计结构的压杆时，这些杆的折合长度是近似地决定的。例如，在讨论桁架的受压顶部弦杆的稳定性时，可以看出，御风联杆及位于桁架平面内的杆并不产生多大的约束以阻碍相关节间内的弦杆作各种方向的横向屈曲。所以通常将这些杆在横向屈曲时作为铰接柱，并对于这情形应用在两理想铰之间的实际长度。对于桁架的受压斜杆及铅直杆的横向屈曲亦可作相同的结论。

当考虑在桁架平面内的压杆的屈曲时，应注意，由于结点的刚度，在这些杆的两端将产生弯矩。这些弯矩的大小可用分析桁架次应力的方法来计算。在这分析中，通常略去了¹⁾轴向力对桁架杆件的弯曲的影响，因此弯矩与荷重成正比。在这种情况下，每一压杆可视为两端的偏心大小已知的偏心受压柱，而许可的平均压应

1) 如果我们注意到弦杆的细长比通常很小，所以作用的压力与欧拉荷重相比很小，这是有理由的。斜杆及铅直杆的细长比可能很大，但它们常常被弯成 S 形。在这样的条件下，轴向力对挠度的影响很小，正如可由 § 1.11 中的一般讨论可知。

力可由插入法得自图 1.28 至 1.31 的曲线。压杆的初弯曲的存在将增加弯曲应力，从而应该将一相当的偏心距 e 加在两端的上述实际偏心距，这实际偏心距系由次应力计算而得。这些修改后的偏心距将用以自图 1.28 至 1.30 的曲线计算实用应力。同样，引入某一附加的偏心距，可补偿由于本身重量而产生的压杆的挠度。

§ 4.6. 组合柱的设计

在 § 2.18 中讨论组合柱的屈曲时，我们得到了计算缀合柱的临界荷重的方程 (2.61) 及板条缀合柱的方程 (2.64)。在运用这些方程时，我们用一长为折合长度的等效柱代替实际的组合柱，此折合长度待定。对于如图 2.55 a 所示的缀合柱，折合长度由方程

$$L = l \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI}{P^2} \left(\frac{1}{A_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi} + \frac{b}{A_b E a} \right)} \quad (4.1)$$

决定；对于如图 2.57 所示的板条缀合柱，折合长度由方程

$$L = l \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI}{P^2} \left(\frac{ab}{12 EI_b} + \frac{a^2}{24 EI_c} + \frac{na}{b A_b G} \right)} \quad (4.2)$$

决定。将公式中柱的弯曲刚度 EI 及一弦杆的弯曲刚度 EI_c 的弹性模量以切线模量 E_t (参阅 § 3.3) 代替，则这两个得自弹性范围内的公式亦可用于弹性极限以外。

当组合柱的折合长度已被决定，则取了一适当的安全系数即可自图 4.10 与 4.11 中的曲线定出对于相应的 L/r 值的许可应力。将这些曲线用于组合柱等于假设诸缺陷为折合长度 L 的函数，而不是实际长度的函数。这意味着对于组合柱用了一稍大的安全系数，这看来是良好的。

对于组合柱曾做过大量的实验¹⁾，但只有少数实验是为验证理论而做的。彼德门²⁾ (Petermann) 及开塞³⁾ (J. Kayser) 所做的板

1) 在 ASCE Special Committee on Steel Column Research 的报告中曾讨论了几个这种实验，*loc. cit.* 并参阅 R. Mayer, Die Knickfestigkeit, p. 387, Berlin, 1921, 及 D. Rühl, Berechnung gegliederter Knickstäbe, Berlin, 1932.

2) *Bauingenieur*, vol. 4, p. 1009, Berlin, 1926, 及 vol. 9, p. 509, 1931.

3) *Bauingenieur*, vol. 8, p. 200, 1930.

条綴合柱的實驗具有特殊的重要性。这种柱在与板条平行的平面内的易弯性，与板条的大小及板条間的距离有很大的关系。由实验得到的临界荷重的值与由方程(4.2)計算得的价值很相符合。

在設計組合柱时，选择綴条及板条的恰当尺寸极为重要。我們將和以前一样地进行計算，設柱的某些缺陷，例如初弯曲或荷重作用的偏心，作为决定构件中的应力的基础。当这一步确定以后，即可計算为任何压荷重 P 所引起的最大剪力 Q_{max} 。这最大剪力是由使柱的最外緣纖維开始屈服的荷重 P 而計算的。根据这最大剪力来設計綴条和板条是合理的，因为这样将使它們和柱的最外緣纖維同时开始屈服。

我們所設的柱的缺陷应使剪力处于最不利的地位。图 4.16 中表明了初弯曲或荷重作用的初始偏心距等組成的可能的缺陷。初挠度 a 或初始偏心距 e 的值将取为与长度成正比，在这里这长度用由方程(4.1)或(4.2)所計算得的柱的折合长度。若初弯曲由正弦曲綫的半个波所表示(图 4.16a)，則在柱的两端剪力为最大。对于通常实际中的小挠度，可取 $Q_{max} = P\theta$ 。若初弯曲为 S 形(图 4.16b)，柱的每一半可作为以上这类型的柱，但其长度为 $l/2$ ，挠度为 $\delta/2$ 。在两端的初始剪力将与上述这情形相同，但在柱破坏时的

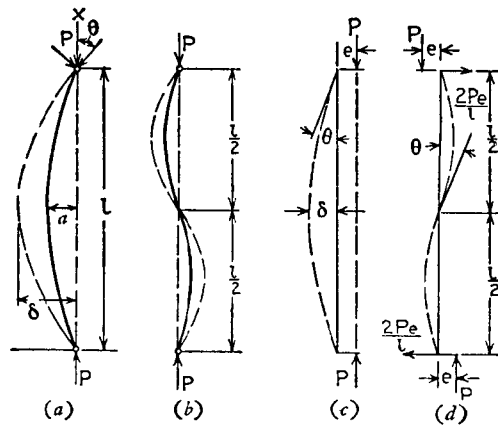


图 4.16

剪力較小,因为不管它的初始形状如何,在对于长度为 l 的临界荷重下这柱将屈曲成一个半波,而这临界荷重系小于长度为 $l/2$ 时的临界荷重。

在同一方向有两个相等的偏心距这情形(图 4.16c),亦較在图 4.16a 这情形有利。設偏心距 e 使两柱在相同的荷重 P 的作用下而屈曲,則对于这两种情形在破坏时中点的弯矩相等;因此对于情形(c)的 δ , θ 及 Q_{\max} 的值較情形(a)的相应的量为小。若相等的偏心距位于相反的方向(图 4.16d),則在两端将有等于 $2Pe/l$ 的水平反力;在中点的剪力为最大并等于 $2Pe/l + P\theta$ 。在某些条件之下,这情形可能比情形(a)更为不利。因此,情形(a)与(d)应詳細地加以研究¹⁾。

首先研究情形(a),并用方程(1.60)作为挠度曲綫,我們得到两端的轉角 θ 为

$$\theta = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\pi a}{l(1-\alpha)}, \quad (a)$$

式中 $\alpha = Pl^2/\pi^2 EI$; 于是得到最大剪力为

$$Q_{\max} = P \frac{\pi a}{l(1-\alpha)}.$$

将这方程的两边除以橫截面积 A , 并用当柱的最外緣纖維开始屈服时的平均压应力的記号 $(\sigma_c)_{Y.P.}$, 則在屈服开始时单位橫截面积上的最大剪力值为

$$\frac{Q_{\max}}{A} = (\sigma_c)_{Y.P.} \frac{\pi a}{l(1-\alpha)}. \quad (4.3)$$

对于任何的細长比 l/r 及已知的初挠度 a , 以一适当的安全系数从图 4.10 与 4.11 中的曲綫可得到 $(\sigma_c)_{Y.P.}$ 。于是从方程(4.3)算得 Q_{\max} 。如果由 § 1.13 的方程(i)解出 a , 并将 a 的值代入方程(4.3), 則計算可得到簡化, 于是我們得到:

$$\frac{Q_{\max}}{A} = \frac{\pi s}{l} [\sigma_{Y.P.} - (\sigma_c)_{Y.P.}]. \quad (4.4)$$

1) 这問題曾为 D. H. Young 所讨论, *Proc. ASCE*, December, 1934, 以及 *Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, Zürich, vol. 2, p. 480, 1934.

知道了 $\sigma_{y.p.}$ 并用一安全系数，由图 4.10 与 4.11 中的曲线可决定 $(\sigma_c)_{y.p.}$ ，对于任何初挠度 a 的值我们可以将 Q_{\max}/A 表示为细长比 l/r 的函数，在图 4.17 中示出了对 $a/l=1/400$ 及 $a/l=1/700$ 而计算得的两条这种曲线。设柱的材料均集中在翼缘，因而 $s = r$ 。

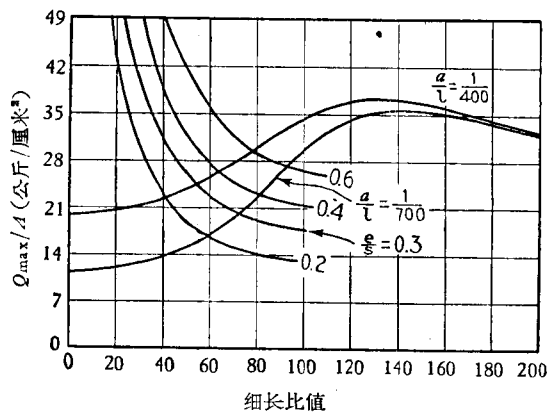


图 4.17

对于情形(d)，柱中间横截面的转角 θ 是将柱的每一半作为两端简支而长为 $l/2$ 的受压的梁并用力偶 Pe 所弯曲而得到的。于是由方程(1.25)，

$$\theta = \frac{e}{l} \left(\frac{kl}{\sin \frac{kl}{2}} - 2 \right),$$

式中

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

于是最大的剪力为

$$Q_{\max} = \frac{2Pe}{l} + P\theta = \frac{Pe}{l} \frac{kl}{\sin \frac{kl}{2}}. \quad (b)$$

对于短柱，当荷重远较欧拉荷重为小时即开始破坏；因而 $kl/2$ 很

小, 而可設 $\sin kl/2 \approx kl/2$. 在这情况下, 方程 (b) 給出

$$Q_{\max} = \frac{2Pe}{l},$$

这表明最大剪力等于在每一端的横向反力 (图 4.16d). 对于細长的柱, 在最大纖維应力达到屈服点应力之前, 荷重可能就已达到欧拉荷重; 于是 $kl/2$ 趋近于值 $\pi/2$. 且从方程 (b) 可以看出: 最大剪力可能比横向反力 $2Pe/l$ 大 57%.

以橫截面积除方程 (b), 得到最外緣纖維开始屈服时每单位面积上的最大剪力:

$$\frac{Q_{\max}}{A} = (\sigma_c)_{y.p.} \frac{e}{l} \frac{kl}{\sin \frac{kl}{2}}. \quad (4.5)$$

对于任何偏心距 e/l 及細长比 l/r , 从图 1.31 中的曲綫可得到 $(\sigma_c)_{y.p.}$ 的值. 于是, 利用方程 (4.5), 可計算对于各种 e/l 及 l/r 值的 Q_{\max}/A 值. 这种計算表明: 假設了初弯曲, 一般地得到了較大的 Q_{\max} 值, 并应以所假設的初弯曲作为設計組合柱的各部分的根据, 如果由 a 或 e 所表示的缺陷与长度 l 成正比的話. 若在情形 (d) 中的偏心距为某一常量以代替假設与 l 成正比, 則对于小的細长比 l/r , 由方程 (4.5) 将得到更大的剪力. 在图 4.17 中繪出了 $e/s = 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$ 諸值时的曲綫.

图 4.17 中的曲綫只考虑了由于初始缺陷所产生的剪力. 当一桁架中的压杆承受了如在 22 頁所討論的二次端点弯矩时, 剪力可能很大; 这种压杆的配件应設計得可以抵抗由于两端弯矩实际上所会引起的剪力¹⁾, 这是合理的.

有了如图 4.17 中所示的曲綫, 設計組合柱的步驟将如下: 設出柱的橫截面的尺寸及柱的配件的大小. 于是由方程 (4.1) 或 (4.2) 可計算柱的折合长度, 并用一得当的安全系数由图 4.10 与 4.11 中的曲綫得到許可的平均压应力. 用这試算法可以决定必須的橫截面的尺寸. 綴条或板条的必須強度及在結点处的必須的鉚

1) D. H. Young 的论文中讨论了这问题, *loc. cit.*

釘个数，可用图 4.17 中的曲綫加以校核。这曲綫亦可用以校核铆接柱的铆釘間的距离。

在这討論中，我們設柱的屈曲发生在与板条或綴条相平行的平面內。有时候，应考虑組合柱的橫截面的变形的可能性。例如，

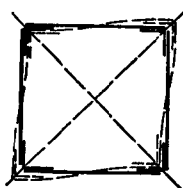


图 4.18

一由四根纵向杆所組成并以綴条相联結的柱(图 4.18)，可能发生如图中虛綫所示的变形。要避免这种变形，必須在柱橫截面內使用联条或膜片。在两个有系杆或膜片的橫截面之間，每一纵向的杆均可作为两端鉸接的支柱，沿其长度为綴条弹性地支承。运用能量法，

可校核加联条的橫截面間所須的距离。

对于由較薄的板所組成的組合柱，如果这些板的未被支承的寬度超过了某一极限值，由于受压板的屈曲可能发生局部的破坏。关于板的未被支承的寬度的要求及用加劲肋以加强板的方法，将在第九章內討論。

第五章 扭轉屈曲

§ 5.1. 引言

在前面关于屈曲的討論中，均設柱由于在橫截面的对称面內的弯曲而屈曲。但在有些情况中，或者是由于扭轉，或者是由于弯曲与扭轉的組合而使柱发生屈曲。如果截面的扭轉刚度很小，例如开口薄壁截面，就会发生扭轉屈曲破坏。在本章的以下两节內，将討論开口薄壁杆件的扭轉問題。在后續的諸节中，将提出扭轉屈曲理論。

§ 5.2. 开口薄壁杆件的純扭轉

如果一杆为作用于杆两端并位于垂直于杆軸綫的平面內的力偶所扭轉，并且杆的两端可自由地翘曲，于是得到純扭轉这情形。对于这情形，在杆的每一橫截面內只产生剪应力。剪应力的分布与橫截面的形状有关，且对于所有的橫截面是一样的。对于开口薄壁截面梁，可以相当准确地假設任一点的剪应力平行于橫截面的中綫的相应的切綫，且与到这綫的距离成正比。

每单位长度的扭轉角为

$$\theta = \frac{M_t}{C}, \quad (5.1)$$

式中 M_t 表示扭矩， C 为杆的**扭轉刚度**。扭轉刚度可表示为形式

$$C = GJ, \quad (5.2)$$

式中 G 为剪切弹性模量， J 为**扭轉常数**。对于等厚度 t 的开口薄壁杆，可取扭轉常数为¹⁾

$$J = \frac{1}{3} m t^3, \quad (5.3)$$

1) 参阅 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part II, pp. 240—246, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.

式中 m 为横截面的中线的长度。若横截面由不同厚度的几部分所组成, 我们可设

$$J = \frac{1}{3} \sum m_i t_i^3, \quad (5.4)$$

式中的和号应包括横截面的所有部分。附录中的表 A-3 给出了几种形状的横截面的 J 的公式。

在扭转时, 杆的原来是直的纵向纤维将变成螺旋线; 对于微小的扭转角, 这些螺旋线可作为倾斜于旋转轴的直线。如以 ρ 表示纤维与旋转轴之间的距离, 则纤维与轴线之间的倾角为 $\rho\theta$ 。

如果注意到沿截面的中线并无剪应力, 就可以很容易地想象到开口薄壁截面的翘曲。这表明在扭转后中线的微段仍然垂直于纵向纤维。例如, 图 5.1 中示出了被扭的工字梁的横截面的翘曲¹⁾。在对于 z 轴扭转时, 离 z 轴为 $h/2$ 的翼缘的中心纤维, 对 z 轴的倾角为 $\theta h/2$ 。因此翼缘横截面的中线与 x 轴的夹角相同,

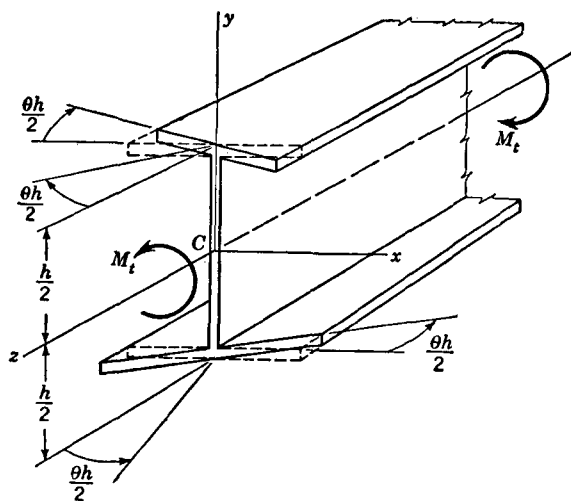


图 5.1

1) 并未表示出横截面的旋转。

如图所示。

其次研究横截面中綫为任意形状的一般情形(图 5.2)。設在扭轉时杆的横截面繞通过点 A 且平行于纵向軸的一軸而旋轉，因而在壁的中面內的任一纵向纖維 N ，将与旋轉軸成傾角 $\rho\theta$ 。纖維 N 由沿横截面中綫的量度距离 s 定出。中綫在 N 处的切綫仍与这纵向纖維垂直，且經扭轉后与 xy 平面成一小角度 $\rho\theta \cos \alpha = r\theta$ 。 r 为点 N 处的切綫至旋轉軸的距离。若沿切綫并指向 s 增加的方向的一矢量对于旋轉軸成正的矩，則 r 取为正。于是在图 5.2a 中所示的 r 为一正的量。以 w 表示横截面中綫上的点在 z 方向的位移，并考虑到图 5.1 中的扭矩为正，即得关系

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -r\theta. \quad (a)$$

由积分,得到

$$w = w_0 - \theta \int_0^s r ds, \quad (5.5)$$

式中 w_0 表示度量 s 的起点在 z 方向的位移。因图 5.2 a 中的阴影三角形的面积为 $rds/2$ ，可以看出，方程(5.5)的右边这积分表示矢径 ρ 沿横截面的中心綫自点 $s = 0$ 至所研究的点 N 所扫过的扇形面积的两倍。所扫过的面积取为正，如果 ρ 按正方向而轉，即繞 A 逆时針而轉。对于 $s = m$ 时的积分值，由图 5.2 b 中的三块阴影面

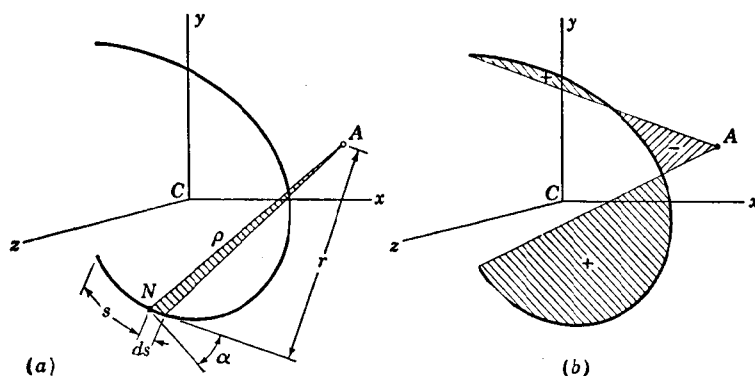


图 5.2

积的代数和的两倍所表示。

在以上的討論中，我們設橫截面繞一任選的點 A 而旋轉。現在

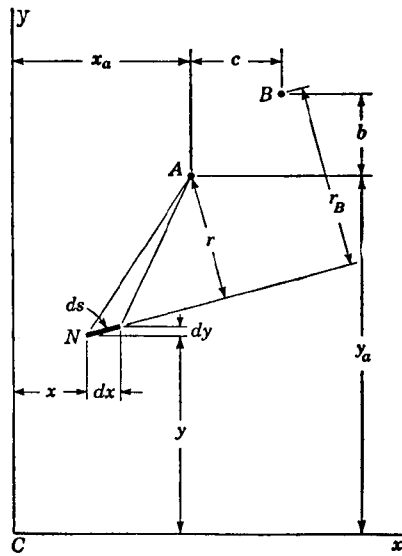


图 5.3

在我們來研究旋轉中心的位移对翘曲的影响。例如，設旋轉中心由 A 移至 B ，图 5.3。

考慮截面的中綫的一微段 ds ，并以 x, y 表示點 N 的坐标，以 x_a, y_a 表示旋轉中心 A 的坐标。由图可看出

$$r ds = (y_a - y) dx - (x_a - x) dy.$$

如果旋轉中心自 A 移至 B ，則旋轉中心的坐标变为 $x_a + c, y_a + b$ 。于是

$$r_B ds = r ds + b dx - c dy.$$

要計算繞 B 的旋轉所产生的翘曲，須以 $r_B ds$ 代替方程 (5.5) 中的 $r ds$ 。于是得到

$$\begin{aligned} \int_0^s r_B ds &= \int_0^s r ds + \int_0^s (b dx - c dy) = \\ &= \int_0^s r ds + bx - cy + a, \end{aligned}$$

其中 a 为一常量。可以看出，旋轉中心位置的改变，将使以前所計算得的位移 [方程 (5.5)] 改变一量

$$\theta (bx - cy + a).$$

因这位移为 x 与 y 的綫性函数，所以不要求杆有任何附加的变形，而只須将杆作为刚体一样地移动。这表明对于两端自由的杆的純扭轉，旋轉軸的选择是沒有关系的，任何与杆的形心軸綫平行的綫均可作为旋轉軸。

运用方程 (5.5)，可計算翘曲位移的平均值 \bar{w} 如下：

$$\bar{w} = \frac{1}{m} \int_0^m w ds = w_0 - \frac{\theta}{m} \int_0^m \left[\int_0^s r ds \right] ds. \quad (b)$$

自方程(5.5)給出的位移中減去这值, 得到以平均翘曲面为基准的横截面的翘曲. 仍旧用記号 w 表示对于这新的基准面的位移, 得到

$$w = \theta \left(\frac{1}{m} \int_0^m \left[\int_0^s r ds \right] ds - \int_0^s r ds \right). \quad (c)$$

为了簡化书写, 引入記号

$$\begin{aligned} \omega_s &= \int_0^s r ds, \\ \bar{\omega}_s &= \frac{1}{m} \int_0^m \omega_s ds. \end{aligned} \quad (5.6)$$

量 ω_s 称为**翘曲函数**, 它表示相应于横截面中綫的弧 s 的扇形面积的两倍, 而 $\bar{\omega}_s$ 为 ω_s 的平均值. 运用記号(5.6), 得翘曲的表达式为

$$w = \theta(\bar{\omega}_s - \omega_s). \quad (5.7)$$

由这方程, 可計算任何开口薄壁截面純扭轉的翘曲位移.

作为运用方程(5.7)的一例, 我們研究槽形截面(图 5.4). 設旋轉系統通过剪心 O 的纵向軸, 对于翘曲函数得以下諸式:

$$\begin{aligned} \omega_s &= \int_0^s r ds = \int_0^s \frac{h}{2} ds = \frac{sh}{2}, \quad 0 \leq s \leq b; \\ \omega_s &= \frac{bh}{2} - \int_0^s e ds = \frac{bh}{2} + be - se, \quad b \leq s \leq b+h; \\ \omega_s &= \frac{bh}{2} - he + \int_{b+h}^s \frac{h}{2} ds = \\ &= -he - \frac{h^2}{2} + \frac{sh}{2} \quad b+h \leq s \leq 2b+h. \end{aligned}$$

用以上的 ω_s , 得翘曲函数的平均值为

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_s &= \frac{1}{m} \int_0^m \omega_s ds = \\ &= \frac{1}{m} \left[\int_0^b \frac{sh}{2} ds + \int_b^{b+h} \left(\frac{bh}{2} + be - se \right) ds + \right. \end{aligned}$$

1) 关于剪心的讨论, 参阅 Timoshenko, op. cit., part I, p. 235.

$$+ \int_{b+h}^{2b+h} \left(-he - \frac{h^2}{2} + \frac{sh}{2} \right) ds \Big].$$

$$= \frac{1}{m} \left[\frac{h}{2} (b-e)(2b+h) \right];$$

而由于 $m = 2b + h$, 得

$$\bar{w}_s = \frac{h(b-e)}{2};$$

代入方程(5.7), 对于翘曲位移得以下诸式:

$$w = \theta \frac{h}{2} (b-e-s), \quad 0 \leq s \leq b; \quad (d)$$

$$w = \theta e \left(-b - \frac{h}{2} + s \right), \quad b \leq s \leq b+h; \quad (e)$$

$$w = \theta \frac{h}{2} (b+e+h-s), \quad b+h \leq s \leq 2b+h. \quad (f)$$

w 沿横截面中线的变化, 由图 5.4 中的阴影面积所示.

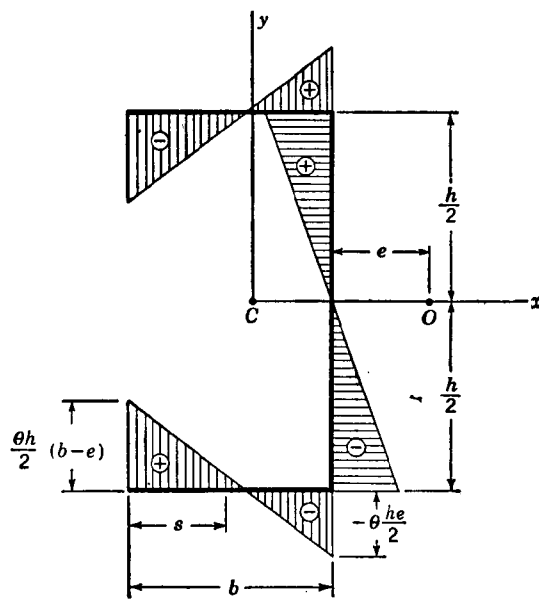


图 5.4

如果横截面系由相交于一公共点的狭长矩形所组成(图 5.5), 并且如果取旋转轴通过剪心 O , 于是对于中线的所有点距离 r 为零, 因此在扭转时这线无翘曲。

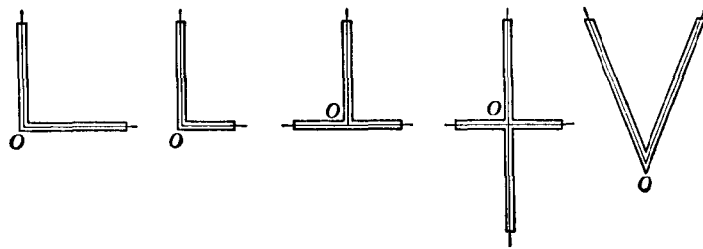


图 5.5

§ 5.3. 开口薄壁杆件的非均匀扭转

在前一节所讨论的纯扭转中, 曾设扭矩作用于杆的两端, 并且杆的横截面可以自由地翘曲。在这些条件下, 所有横截面的翘曲均相同, 且不引起纵向纤维的任何轴向应变。若任一横截面都不能自由地翘曲, 或扭矩沿杆的长度而变化, 则即发生**非均匀扭转**。在这些情形下, 在扭转时翘曲沿杆而变化, 因此将引起纵向纤维的拉伸或压缩。此外, 扭转角 θ 的变化率不再是常量, 而将沿杆轴而变化。

我们首先讨论对称工字梁(图 5.6)的非均匀扭转这简单情形。设梁的一端为刚性固定, 因而在该端的横截面不能翘曲。扭矩 M_t 作用于自由端。显然, 当梁的一端为固定时, 梁对于扭转的抵抗比端面可以自由翘曲时为大, 因为对于前一情形, 扭转将引起翼缘的弯曲。扭矩 M_t 的一部分, 为前节所讨论的由于纯扭转所引起的剪应力所平衡, 另一部分为翼缘对于弯曲的抵抗所平衡。这两部分的扭矩各以 M_{t1} 与 M_{t2} 来表示。扭矩 M_{t1} 与扭转角沿梁轴线的变化率成比例。以 φ 表示这角度并用方程(5.1), 得

$$M_{t1} = C \frac{d\varphi}{dz}. \quad (a)$$

在这方程中, 角度 φ 按右手螺旋规则为正; 即正的转向与 M_t 的正

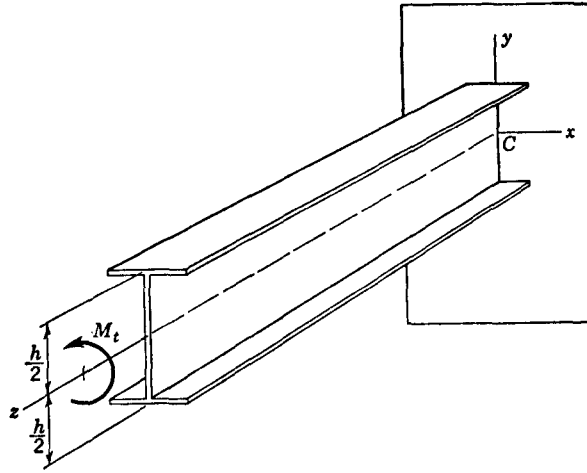


图 5.6

向相同,如图 5.6 所示.

扭矩的第二部分可由考虑翼缘的弯曲而得到. 由对称性可知,每一梁的横截面绕形心轴 z 而旋转,因此梁的底部翼缘的横向挠度为

$$u = \frac{1}{2} \varphi h.$$

底部翼缘的弯矩为

$$M_f = EI_f \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{EI_f h}{2} \frac{d^2 \varphi}{dz^2}, \quad (b)$$

式中 I_f 为一个翼缘对于 y 轴的惯性矩. 因此底部翼缘的剪力为

$$V_f = \frac{dM_f}{dz} = \frac{EI_f h}{2} \frac{d^3 \varphi}{dz^3}.$$

在顶部翼缘,剪力的大小与前者相同,但方向相反. 这两剪力所组成的力偶,为扭矩的第二部分,即

$$M_{t2} = -V_f h = -\frac{EI_f h^2}{2} \frac{d^3 \varphi}{dz^3}. \quad (c)$$

于是,工字梁的非均匀扭转的方程为

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} = C \frac{d\varphi}{dz} - \frac{EI_1 h^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dz^3} \quad (5.8)$$

如果 M_t 为 z 的已知函数，可将这方程积分而得扭转角 φ 。于是，知道了 φ ，可得扭矩的两部分 M_{t1} 与 M_{t2} ，最后可计算得每一部分在梁内所产生的应力。

应注意，在分析工字梁翼缘的弯曲时，我们用了方程(b)。这意味着略去了翼缘内的剪应力对于曲率的影响，而只计及正应力 σ_x 的影响。这是在分析梁的弯曲时常用的方法。

上述工字梁非均匀扭转的分析方法，可用于任何开口截面薄壁杆件的分析。设杆为任意形状(图 5.7)，其一端为固定，而在自由端承受扭矩 M_t 。若一横向力作用于自由端的横截面的剪心 O' ，则这杆只产生弯曲而并无扭转。于是，根据互换定理可知，作用于自由端的扭矩 M_t 在点 O' 不产生挠度。因此扭转时剪心轴线 OO' 保持为直线，而杆的横截面绕这轴而旋转。仍以 φ 表示任何横截面的转角，则方程(a)给出了产生纯扭转应力的扭矩 M_{t1} 这部分。

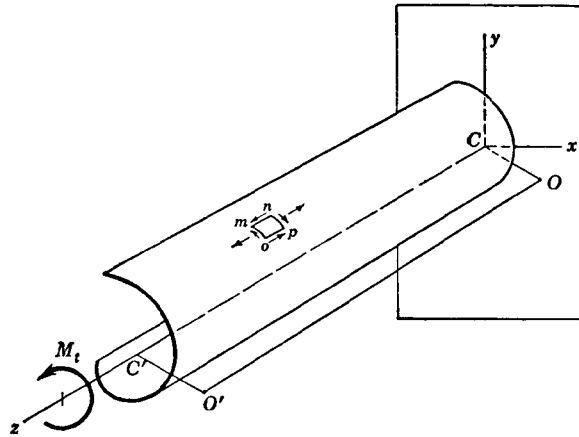


图 5.7

在计算扭矩的第二部分 M_{t2} (对于工字梁，相应于两翼缘的弯曲所形成的扭矩)，我们与以前一样地进行，略去剪应力对杆中面的变形的影响。于是确定横截面翘曲的轴向位移 w 将与纯扭转一

样地得到[参阅方程(5.7)], 但对于非均匀扭转, 为常量的单位长度的扭转角 θ , 被扭转角的变化率 $d\varphi/dz$ 所代替. 于是得到

$$w = (\bar{\omega}_s - \omega_s) \frac{d\varphi}{dz}. \quad (5.9)$$

由于 $d\varphi/dz$ 沿杆的长度而变化, 相邻的横截面有不同的翘曲, 这将使杆的纵向纤维发生轴向应变 ϵ_z . 注意到方程(5.9)中的 $\bar{\omega}_s$ 和 ω_s 与 z 无关, 我们得到

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = (\bar{\omega}_s - \omega_s) \frac{d^2\varphi}{dz^2}. \quad (d)$$

设诸纵向纤维间无挤压, 由胡克定律得到非均匀扭转所产生的正应力为

$$\sigma_z = E\epsilon_z = E(\bar{\omega}_s - \omega_s) \frac{d^2\varphi}{dz^2}. \quad (5.10)$$

这式表明, 任何横截面上的正应力与翘曲位移 w 成比例. 因此, 表示沿中綫翘曲变化的图形, 亦按适当的比例表明了应力 σ_z 的分布. 例如, 图 5.4 中的图形表示槽形截面在非均匀扭转时轴向应力的变化.

为了证明 σ_z 并不形成轴向合力且对 x 与 y 轴无力矩, 可运用互换定理. 设强度为 p 的正应力均匀地分布在图 5.7 的杆的端截面内. 这样的应力不使杆产生转动, 所以扭矩 M_t 并不作功. 因此, 由互换定理, 应力 p 对扭转所产生的位移 w 所作的功必为零. 于是得到

$$\int_0^m w p t ds = p \frac{d\varphi}{dz} \int_0^m (\bar{\omega}_s - \omega_s) t ds = 0,$$

因此

$$\int_0^m (\bar{\omega}_s - \omega_s) t ds = 0, \quad (e)$$

这表明正应力(5.10)的轴向合力为零. 现将强度为 $p_{\max}y/c$ 的弯曲应力施于杆端, 式中的 y 为横截面的任一点至 x 轴的距离, 而 c 为至边缘纤维的距离. 于是应力与离 x 轴的距离成比例, 且最大值为 p_{\max} . 这样的应力产生纯弯曲, 而并不使杆对于 z 轴发生旋

[8]

轉。因杆在这样弯曲时扭矩 M_t 并不做功, 故在扭轉时弯曲应力所作的功亦必为零, 因此

$$\int_0^m \omega \frac{p_{\max} y}{c} t ds = \frac{p_{\max}}{c} \frac{d\varphi}{dz} \int_0^m (\bar{\omega}_s - \omega_s) y t ds = 0.$$

这結果表明, 应力(5.10)对 x 軸的力矩为零。以同样的方法可以証明, 軸向应力对 y 軸的力矩为零。

正应力 σ_x 产生的剪应力与工字梁翼緣弯曲时产生的剪应力相同。这些剪应力組成扭矩的第二部分 M_{t2} 。要計算此剪应力, 可考虑自图 5.7 中杆壁截

出的一微元 mno (参閱图 5.8)。若杆壁很薄, 可設剪应力 τ 沿厚度 t 系均匀地分布, 且与橫截面的中綫的切綫相平行。沿中綫应力随离截面边缘的距离 s 而变

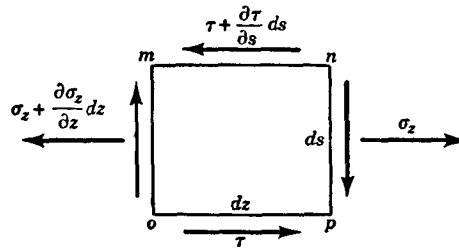


图 5.8

化, 并可由微元 mno (图 5.8) 的靜力平衡方程而計算。将所有的力投影于 z 軸, 并注意及厚度 t 可能随 s 而变化但与 z 无关, 于是得到方程

$$\frac{\partial(\tau t)}{\partial s} ds dz + t \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} ds dz = 0,$$

或者

$$\frac{\partial(\tau t)}{\partial s} = -t \frac{\partial \sigma_x}{\partial z}. \quad (f)$$

将 σ_x 的表达式(5.10)代入方程(f), 得

$$\frac{\partial(\tau t)}{\partial s} = -Et(\bar{\omega}_s - \omega_s) \frac{d^3 \varphi}{dz^3}. \quad (g)$$

将(g)对 s 积分, 并注意到 φ 与 s 无关并且当 $s = 0$ 时 $\tau = 0$, 于是得到

$$\tau t = -E \frac{d^3 \varphi}{dz^3} \int_0^s (\bar{\omega}_s - \omega_s) t ds. \quad (5.11)$$

計算沿截面的中綫的微剪力 $\tau t ds$ 对于剪心的矩的总和, 即得扭矩的第二部分 M_{t2} . 于是得到

$$M_{t2} = \int_0^m \tau t r ds = -E \frac{d^3 \varphi}{dz^3} \int_0^m \left[\int_0^s (\bar{\omega}_s - \omega_s) t ds \right] r ds. \quad (h)$$

如果注意到方程(5.6)的第一式, 即

$$r ds = d\omega_s,$$

或者因 $\bar{\omega}_s$ 与 s 无关,

$$r ds = - \frac{d(\bar{\omega}_s - \omega_s)}{ds} ds, \quad (i)$$

則式(h)可被簡化. 由式(i)得

$$\begin{aligned} \int_0^m \left[\int_0^s (\bar{\omega}_s - \omega_s) t ds \right] r ds &= - \int_0^m \left[\int_0^s (\bar{\omega}_s - \omega_s) t ds \right] \times \\ &\times \frac{d(\bar{\omega}_s - \omega_s)}{ds} ds. \end{aligned}$$

用分部积分法将等式右边的进行积分并运用方程(e), 得到

$$\int_0^m \left[\int_0^s (\bar{\omega}_s - \omega_s) t ds \right] r ds = \int_0^m (\bar{\omega}_s - \omega_s)^2 t ds.$$

代入方程(h), 得到 M_{t2} 的下述表达式:

$$M_{t2} = -E \frac{d^3 \varphi}{dz^3} \int_0^m (\bar{\omega}_s - \omega_s)^2 t ds. \quad (j)$$

引入記号

$$C_1 = E \int_0^m (\bar{\omega}_s - \omega_s)^2 t ds, \quad (5.12)$$

可将方程(j)写作

$$M_{t2} = -C_1 \frac{d^3 \varphi}{dz^3}, \quad (k)$$

这就是由于非均匀扭轉和橫截面非均匀翘曲所引起的这部分扭矩, 并将称之为**翘曲扭矩**. 常数 C_1 称为**翘曲刚度**, 并且为方便計可表为

$$C_1 = EC_w \quad (5.13)$$

这形式, 式中的量 C_w 称为**翘曲常数**, 且由表达式¹⁾

$$C_w = \int_0^m (\bar{\omega}_s - \omega_s)^2 t ds \quad (5.14)$$

给出。可以看出, C_w 的单位为长度的六次方。

将方程(i)与(k)结合, 得非均匀扭转的微分方程为

$$M_t = C \frac{d\varphi}{dz} - C_1 \frac{d^3\varphi}{dz^3} \quad (5.15)$$

这方程可用于任意开口截面薄壁杆件。工字梁的方程(5.8)为方程(5.15)的一特例²⁾, 其翘曲刚度为 $C_1 = EI_y h^2/2$ 。当方程(5.15)已被解出, 得到了扭转角 φ 的表达式, 我们可分别自方程(a)与(k)得到 M_{t1} 和 M_{t2} 。 M_{t1} 所产生的应力可如纯扭转那样来计算。 M_{t2} 所产生的正应力和剪应力可分别得自方程(5.10)及(5.11)。

作为计算翘曲常数 C_w 的一例, 仍研究图 5.4 所示这槽形截面。该图中示出了方程(5.7)所给出的翘曲位移值。量 $\bar{\omega}_s - \omega_s$ 的值可由 § 5.2 的方程(d), (e)与(f)以 θ 除 w 的表达式而得。这样, 我们得 C_w 的表达式³⁾为

$$\begin{aligned} C_w &= \int_0^b \frac{h^2}{4} (b - e - s)^2 t ds + \int_b^{b+h} e^2 \left(-b - \frac{h}{2} + s\right)^2 t ds + \\ &\quad + \int_{b+h}^{2b+h} \frac{h^2}{4} (b + e + h - s)^2 t ds = \\ &= \frac{tk^2}{12} [he^2 + 2b^3 - 6eb(b - e)]. \end{aligned}$$

将附录中表 A-3 的 e 的表达式代入, 得

$$C_w = \frac{th^2b^3}{12} \frac{3b + 2h}{6b + h}.$$

1) 在文献中曾用 C_{BT} , C_{BD} , C_s 及 Γ 等记号表示翘曲常数。

2) 这特殊情况的方程系由 Timoshenko 所得, *Bull. Polytech. Inst., St. Petersburg*, 1905. C. Weber 将这方程推广及两翼缘不相等的工字梁, *Z. Angew. Math. u. Mech.*, vol. 6, p. 85, 1926. H. Wagner 将方程进一步推广到所有的开口薄壁截面, *Tech. Hochschule, Danzig, 25th Anniv. Publ.*, 1929; 翻译于 *NACA Tech. Mem.* 807, 1936.

3) 注意, 在这 C_w 的具体表达式中, 第一个与最后一个的积分值相同。

对于由相交于一公共点的几个狭长矩形所组成的横截面 (参阅图 5.5), 可取翘曲常数 C_w 等于零。附录中给出了其他形状横截面的 C_w 的公式。

§ 5.4. 扭转屈曲

承受均匀轴向压缩的薄壁杆件有时候会发生扭转屈曲, 而杆的纵轴仍保持为直线。为了表明轴向压荷重如何会引起纯扭转屈曲, 我们来研究一双重对称的杆 (图 5.9)。杆的横截面为十字形, 它的四个相同的翼缘宽为 b 厚为 t , x 与 y 轴为截面的对称轴。在压力作用下, 可能发生如图 5.9 所示的扭转屈曲。杆轴线保持为直线, 而每一翼缘绕 z 轴转动而屈曲。为了确定产生

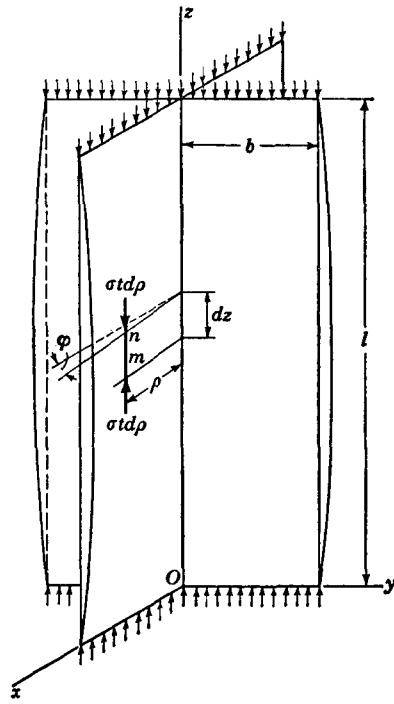


图 5.9

扭转屈曲的压力, 必须研究屈曲时翼缘的挠曲。

我们回到两端铰接支柱屈曲这简单情形 (图 5.10) 以说明在分析翼缘时所用的方法。柱原来是直的, 承受中心施加的力 P 作用。现设这力 P 已达到它的临界值, 因而这杆可以有一稍微弯曲

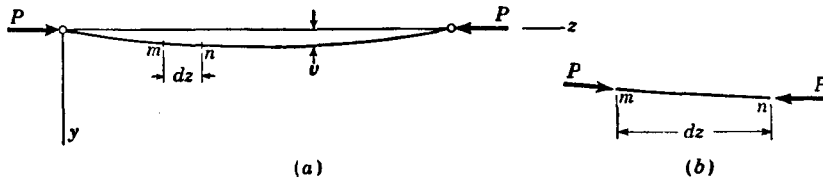


图 5.10

的平衡形式。由于这挠曲，将有某些弯曲应力迭加于原有的均布压应力。同时，原有的压应力将作用于經稍微轉动的横截面上，如图 5.10 *a* 与 *b* 的 *m* 与 *n*。这时挠度曲綫的微分方程，可将 $q = 0$ 代入方程(1.5)而得。以 v 表示柱在 y 方向的挠度，可将方程(1.5)写作形式

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} = -P \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (5.16)$$

在 § 2.2 中曾用这方程計算压力 P 的临界值。由方程 (5.16) 可以看出，若設这柱承受强度为 $-P \frac{d^2 v}{dz^2}$ 的假想荷重，即可得出这柱的挠度曲綫及相应的弯曲应力。

在图 5.9 中的柱的扭轉屈曲問題的近似討論中，我們可以这样叙述，即在临界条件之下，屈曲的平衡形式系为作用于諸纵向纖維旋轉后的横截面上的压应力所維持的。我們研究一微段 mn (图 5.9)。这是长 dz 的一薄条，离 z 軸的距离为 ρ ，横截面积为 $t d\rho$ 。由于扭轉屈曲，这微段在 y 方向的挠度为

$$v = \rho \varphi, \quad (a)$$

式中的 φ 为横截面的微小的扭轉角¹⁾。作用于微段 mn 轉动后的端部的压力为 $\sigma t d\rho$ ，其中 $\sigma = \frac{P}{A}$ 表示原来的压应力。这些压力与强度为

$$-(\sigma t d\rho) \frac{d^2 v}{dz^2}$$

的横向荷重靜力等效，并可写作形式[參閱方程(a)]

$$-\sigma t \rho d\rho \frac{d^2 \varphi}{dz^2}.$$

于是作用于微段 mn 的假想横向荷重对于 z 軸的力矩为

$$-\sigma \frac{d^2 \varphi}{dz^2} dz t \rho^2 d\rho.$$

1) 设在扭轉时横截面的形状不变。

計算整个横截面上这些矩的总和，我們得到作用于两相邻横截面間的屈曲杆微段上的扭矩。这扭矩为

$$-\sigma \frac{d^2\varphi}{dz^2} dz \int_A \rho^2 d\rho = -\sigma \frac{d^2\varphi}{dz^2} dz I_0,$$

式中 I_0 为杆的横截面对于剪心的极惯性矩。对于現在这情形，剪心与横截面的形心重合。最后，以記号 m_x 表示杆每单位长度的扭矩，我們得到

$$m_x = -\sigma \frac{d^2\varphi}{dz^2} I_0. \quad (b)$$

如果剪心与横截面的形心重合，表达式(b)对于任意横面均适用。

要建立扭轉屈曲的微分方程，可用开口薄壁杆件的非均匀扭轉的方程(5.15)。将这方程对 z 計算导数，得

$$\frac{dM_t}{dz} = C \frac{d^2\varphi}{dz^2} - C_1 \frac{d^3\varphi}{dz^3}. \quad (c)$$

M_t 与 m_x 的正向由右手螺旋規則所定；作用于受扭杆的微段上的正扭矩方向，如图 5.11 所示。由这微段的平衡得

$$m_x = -\frac{dM_t}{dz}, \quad (d)$$

于是方程(c)成为

$$C_1 \frac{d^4\varphi}{dz^4} - C \frac{d^2\varphi}{dz^2} = m_x. \quad (5.17)$$

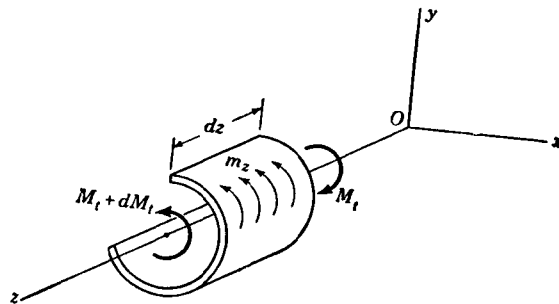


图 5.11

将式(b)給出的 m_x 值代入,得到

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - (C - \sigma I_o) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0. \quad (5.18)$$

由方程(5.18)可計算压应力的临界值,从而得临界荷重。只要剪心与形心重合,这方程可用于任意形状的横截面。

对于图 5.9 所示的柱,翘曲刚度 C_1 等于零。因此,要滿足扭轉屈曲方程(5.18),要求

$$C - \sigma I_o = 0,$$

于是得到

$$\sigma_{cr} = \frac{C}{I_o} = \frac{\frac{4}{3} b t^3 G}{\frac{4}{3} b^3 t} = \frac{G t^2}{b^2}. \quad (e)$$

上述结果表明,对这情形压应力的临界值与杆的长度无关。所以得到这结果,是由于在上述推导中略去了翼缘对于在垂直于翼缘方向的弯曲的抵抗。要得较准确的结果,須将每一翼缘作为一均匀受压的板,三边简支而第四边完全自由。由这较准确的研究¹⁾得到临界应力为

$$\sigma_{cr} = \left(0.456 + \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{\pi^2}{6(1-\nu)} \frac{G t^2}{b^2}. \quad (f)$$

括号中的第二项表明杆的长度对临界应力的影响。对于相当长的杆,这项可以略去。于是得到

$$\sigma_{cr} = \frac{0.75}{1-\nu} \frac{G t^2}{b^2}. \quad (g)$$

若 $\nu = 0.3$, 这值比由式(e)所計算得的价值约大 7%。

对于 C_1 不等于零的情形,临界压应力可得自方程(5.18)的解。引入記号

$$p^2 = (\sigma I_o - C)/C_1, \quad (5.19)$$

得到这解为

$$\varphi = A_1 \sin pz + A_2 \cos pz + A_3 z + A_4. \quad (5.20)$$

积分常数 A_1, A_2, A_3 与 A_4 可由杆的端点条件得到。例如,若压杆

1) 参阅 Timoshenko, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1907, 及 *Z. Math. u. Physik*, vol. 58, p. 337, 1910.

的两端不能繞 z 軸而旋轉, 得端点条件为

$$\varphi = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l. \quad (5.21)$$

若杆的两端可以自由地翘曲, 則在两端的应力 σ_x 等于零, 于是条件为[参閱方程(5.10)]

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l. \quad (5.22)$$

对于固定端, 翘曲位移 w 必須为零, 因此由方程(5.9), 得到

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l. \quad (5.23)$$

作为第一个例子, 研究簡支端杆这情形. 杆的两端不能繞 z 軸轉动, 但可以自由地翘曲. 将条件(5.21)与(5.22)用于通解(5.20), 得

$$A_2 = A_3 = A_4 = 0,$$

还有

$$\sin pl = 0,$$

由此

$$pl = n\pi.$$

将式(5.19)的 p 值代入, 得到¹⁾

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{I_0} \left(C + \frac{n^2\pi^2}{l^2} C_1 \right). \quad (5.24)$$

取 $n = 1$ 得最小临界应力, 这相应于屈曲形式

$$\varphi = A_1 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

方程(5.24)給出了端点不能轉动但可以自由地翘曲的柱的扭轉屈曲的临界应力.

作为第二个例子, 研究杆的两端刚性地固定而不能翘曲这情形. 于是两端的条件由(5.21)与(5.23)給出, 并得

$$A_4 = -A_2, \quad A_1 = A_3 = 0, \\ pl = 2n\pi.$$

1) 这解系 Wagner 所得, *loc. cit.*,

对于这情形的临界压应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{I_o} \left(C + \frac{4n^2\pi^2}{l^2} C_1 \right). \quad (5.25)$$

应当記着,亦可能由于应力达到了欧拉公式所給出的值,使柱因繞 x 或 y 軸的横向弯曲而屈曲. 于是将有三个軸向荷重的临界值,而只是最小的那个值有实际意义. 一般地說,对于有寬翼緣的短柱,扭轉屈曲是重要的.

§ 5.5. 由于扭轉与弯曲的屈曲

对于开口截面薄壁柱的一般情形, 屈曲破坏通常是由于扭轉与弯曲的联合作用而引起的. 为了研究这种类型的屈曲, 我們研究图 5.12 所示的非对称横截面. x 与 y 軸为横截面的中心主軸, 而 x_o 与 y_o 为剪心 O 的坐标. 在屈曲时, 横截面将平移与轉动. 平移分别由剪心在 x 与 y 方向的挠度 u 与 v 确定. 于是, 当横截面平移时, 点 O 移动到 O' , 点 C 移动到 C' . 与以前一样, 以 φ 表示横截面繞剪心的轉角, 而形心的最終位置为 C'' . 于是, 屈曲时形心 C 的最終挠度为¹⁾

$$u + y_o\varphi,$$

$$v - x_o\varphi.$$

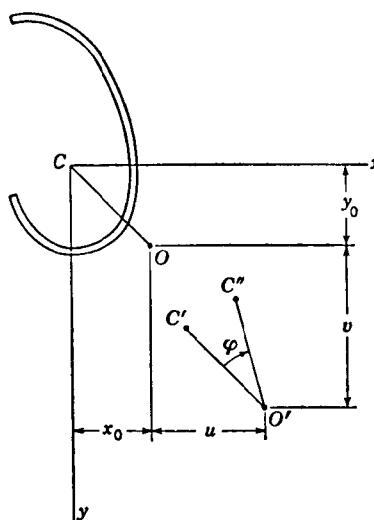


图 5.12

設只有中心压力 P 作用在两端, 如同一铰支端柱一样, 則在任一横截面对于主軸的弯矩为

$$M_x = P(v - x_o\varphi),$$

$$M_y = -P(u + y_o\varphi).$$

1) 角度 φ 认为是小量.

弯矩 M_x 与 M_y 的正负规则如图 5.13 所示, 图中示出了正的弯矩作用于杆的微段 dz . 剪心轴的挠度曲线的微分方程成为

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = + M_y = - P(u + y_o \varphi), \quad (5.26)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = + M_x = - P(v - x_o \varphi). \quad (5.27)$$

这两个关于杆弯曲的方程, 包含未知量 u , v 与 φ . 第三个方程可由考虑杆的扭转而得到.

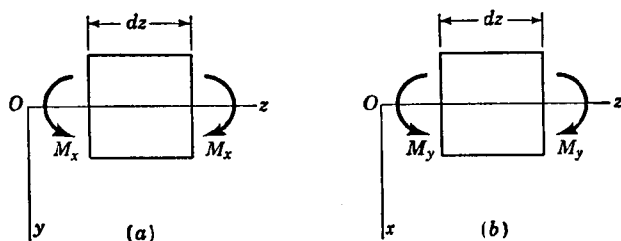


图 5.13

要写出扭转角 φ 的方程, 我们与在前一节中一样地进行, 即取横截面为 tds 的一纵向小条, 这小条在横截面的平面内由坐标 x 与 y 所确定. 当屈曲时这小条在 x 与 y 方向的挠度的分量各为

$$u + (y_o - y)\varphi, \quad v - (x_o - x)\varphi.$$

将这两式对 z 求二阶导数并仍考虑一微段 dz , 得到, 作用在微段 dz 的稍微转动后的端面的压力 $\sigma t ds$ 在 x 与 y 方向给出力的强度为

$$-\sigma t ds \frac{d^2}{dz^2} [u + (y_o - y)\varphi] dz, \quad (a)$$

$$-\sigma t ds \frac{d^2}{dz^2} [v - (x_o - x)\varphi] dz. \quad (b)$$

计算以上两力对于剪心轴的矩, 我们得到一纵向小条所提供的杆每单位长度内的扭矩

$$\begin{aligned} dm_x = & -(\sigma t ds) \left[\frac{d^2 u}{dz^2} + (y_o - y) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right] (y_o - y) + \\ & + (\sigma t ds) \left[\frac{d^2 v}{dz^2} - (x_o - x) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right] (x_o - x). \end{aligned}$$

对于整个横截面积分并注意及

$$\begin{aligned} \sigma \int_A t ds &= P, \quad \int_A yt ds = 0, \quad \int_A xt ds = 0, \\ \int_A y^2 t ds &= I_x, \quad \int_A x^2 t ds = I_y, \\ I_o &= I_x + I_y + A(x_o^2 + y_o^2), \end{aligned}$$

我們得到

$$m_z = \int_A dm_z = P \left[x_o \frac{d^2 v}{dz^2} - y_o \frac{d^2 u}{dz^2} \right] - \frac{I_o}{A} P \frac{d^2 \varphi}{dz^2}, \quad (c)$$

式中的 I_x 与 I_y 为横截面的中心主惯性矩, I_o 为对于剪心 O 的极惯性矩. 将表达式(c)代入非均匀扭转的方程(5.17), 得到

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_o}{A} P \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - P x_o \frac{d^2 v}{dz^2} + P y_o \frac{d^2 u}{dz^2} = 0. \quad (5.28)$$

方程(5.26), (5.27)与(5.28)为由于弯曲和扭转而屈曲的三个联立的微分方程¹⁾, 并可用来决定临界荷重. 可以看出, 在所有三个方程中都有扭转角, 因此, 在一般情况下, 扭转屈曲与轴线的弯曲系同时发生.

在剪心与形心重合的特殊情况下, $x_o = y_o = 0$, 于是方程(5.26)至(5.28)成为

$$\begin{aligned} EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} &= -Pu, \\ EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} &= -Pv, \end{aligned}$$

1) 与方程(5.26)至(5.28)等效的一组方程, 系首先由 R. Kappus 所得; 参阅 "Jahrbuch der Deutschen Luftfahrt-Forschung", 1937, 及 *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 14, p. 444, 1937 (译于 *NACA Tech. Mem.* 851, 1938). 扭转屈曲亦曾由 J. N. Goodier 所讨论, *Cornell Univ. Eng. Expt. Sta. Bull.* 27, December, 1941, 及 28, January, 1942; 并参阅 V. Z. Vlasov 所著的书, "Thin walled Elastic Bars", Moscow, 1940, 及 Timoshenko, *J. Franklin Inst.*, vol. 239, Nos. 3, 4 及 5, April 与 May, 1945. 关于扭转屈曲的实验, 参阅 A. S. Niles, *NACA Tech. Note* 733, 1939, 及 H. Wagner 与 W. Pretschner, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 11, p. 174, 1934 (译于 *NACA Tech. Mem.* 784, 1936).

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_o}{A} P \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0.$$

每一个方程只有一个未知量,而可以分别地处理,因此扭轉屈曲与由于弯曲的屈曲相互之間无关。头两个方程给出了在两个主平面內屈曲的欧拉临界荷重。第三个方程与方程(5.18)相同,給出在前节中曾討論过的純扭轉屈曲的临界荷重。在三个临界荷重值中,只有最小的具有实际意义。

回到一般情形[方程(5.26)至(5.28)],設杆的两端为簡支,因此杆的两端可以自由地翘曲和繞 x 与 y 軸轉动,但不能繞 z 軸轉动或在 x 与 y 方向挠曲。在这情况下,端点条件为

$$\begin{aligned} u = v = \varphi = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l, \\ \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l. \end{aligned}$$

这些端点条件可得到滿足,如取方程(5.26)至(5.28)的解的形式为

$$u = A_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad v = A_2 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (d)$$

将表达式(d)代入方程(5.26)至(5.28),得到以下方程以計算常数 $A_1, A_2,$ 及 A_3 :

$$\begin{aligned} \left(P - EI_y \frac{\pi^2}{l^2} \right) A_1 + P y_o A_3 &= 0, \\ \left(P - EI_x \frac{\pi^2}{l^2} \right) A_2 - P x_o A_3 &= 0, \\ P y_o A_1 - P x_o A_2 + \left(-C_1 \frac{\pi^2}{l^2} - C + \frac{I_o}{A} P \right) A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

这些方程的一个解为 $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, 这相应于直的平衡形式。要得到屈曲的平衡形式,常数 A_1, A_2, A_3 必須不同时等于零,这只有当方程(5.29)的行列式等于零时才可能。为了簡化书写,引用記号

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}, \quad P_\varphi = \frac{A}{I_o} \left(C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2} \right), \quad (5.30)$$

式中的 P_x 与 P_y 为各对于 x 与 y 轴屈曲的临界荷重, 而 P_φ 为純扭轉屈曲的临界荷重 [参閱方程(5.24)]. 于是使方程(5.29)的行列式为零, 得到

$$\begin{vmatrix} P - P_y & 0 & y_o P \\ 0 & P - P_x & -x_o P \\ y_o P & -x_o P & \frac{I_o}{A}(P - P_\varphi) \end{vmatrix} = 0.$$

将这行列式展开, 得到以下这三次方程以計算 P 的临界值:

$$\frac{I_o}{A}(P - P_y)(P - P_x)(P - P_\varphi) - P^2 y_o^2 (P - P_x) - P^2 x_o^2 (P - P_y) = 0, \quad (5.31)$$

或

$$\frac{I_c}{I_o} P^3 + \left[\frac{A}{I_o} (P_x y_o^2 + P_y x_o^2) - (P_x + P_y + P_\varphi) \right] P^2 + (P_x P_y + P_x P_\varphi + P_y P_\varphi) P - P_x P_y P_\varphi = 0, \quad (5.32)$$

式中 $I_c = I_x + I_y$ 为横截面对于形心 C 的极慣性矩.

要得到对于每一特定情形的临界荷重, 我們先計算方程(5.32)中的系数的数值. 解这三次方程, 我們將得到三个临界荷重 P 值, 而最小的为实际应用所需. 将三个临界荷重值代入方程(5.29), 对于相应的三个屈曲形式之一, 得比值 A_1/A_3 与 A_2/A_3 . 这些比值建立了横截面的旋轉与平移之間的关系, 并定出剪心轴的挠曲形状.

由方程(5.31), 可得到关于这三个临界荷重相对大小的一个重要結論. 将这方程的左边作为 P 的函数 $f(P)$, 对于各个 P 值我們希望决定这函数的正負, 以了解使 $f(P)$ 为零的 P 值. 对于很大的 P 值, 多項式 $f(P)$ 的正負与最高次幂項相同. 这项为 $P^3 I_o/A$ 且为正. 若 $P = 0$, $f(P)$ 的值为 $-P_x P_y P_\varphi I_o/A$, 且为負. 現設 $P_x < P_y$, 即較小的欧拉荷重相应于在 yz 平面內的弯曲. 若 $P = P_x$, 得

$$f(P) = -P_x^2 x_o^2 (P_x - P_y),$$

它为正, 而若 $P = P_y$, 得到

$$f(P) = -P_y^2 y_o^2 (P_y - P_x),$$

它为负。于是可以看出,方程(5.31)与(5.32)有三个正根:一个根小于 P_x , 一个根大于 P_y , 一个在 P_x 与 P_y 之间。如果设 $P_x > P_y$, 将得相同的結果。还可以証明,最小的 P 值小于 P_ϕ , 因为如果 P_ϕ 小于 P_x 与 P_y , 則当 $P = P_\phi$ 时 $f(P)$ 为正。同样,最大的根必大于 P_ϕ 。于是可得結論:在所有情况下,一个临界荷重小于 P_x, P_y 或 P_ϕ , 一个則較 P_x, P_y 或 P_ϕ 大,第三个临界荷重总介于 P_x 与 P_y 之間。这意味着,当考虑及在屈曲时有发生扭轉的可能性时,我們得到的临界荷重永远小于欧拉荷重或純扭轉屈曲荷重。

若杆的翼緣很寬而长度 l 很短,則与 P_x 和 P_y 相比 P_ϕ 可能很小。在这情况下,方程(5.32)的最小根趋近于值 P_ϕ 。将这根代入方程(5.29),可知 A_1 和 A_2 与轉动位移相比很小,这表明屈曲趋近于純扭轉屈曲。对于狭翼緣的长杆,与 P_x 和 P_y 相比 P_ϕ 很大,而方程(5.32)的最小根趋近于 P_x 或 P_y 。在这情况下,扭轉对临界荷重的影响很小,而欧拉柱公式給出良好的結果。

以上所作的討論是以解(d)为根据的。并不引起复杂性,我們可取較一般形式的解,并設

$$u = A_1 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad v = A_2 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (c)$$

这相当于設在屈曲时杆将分为 n 个半正弦波。我們的以前的結論对于这情形也是适合的,只須在(5.30)中以 $n^2\pi^2/l^2$ 代替 π^2/l^2 。相应的临界荷重大于 $n = 1$ 时所得的,且只当杆在两端之間有等间距的橫向支承时,这些临界值才有实际意义。

固定端杆 若杆的两端为固定,端点条件为

$$u = v = \varphi = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l;$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l.$$

因当屈曲时,在杆的两端将出现弯矩,所以代替方程(5.26)与(5.27),將有以下諸方程:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -P(u + y_o \varphi) + EI_y \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=0}, \quad (5.33)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -P(v - x_0 \varphi) + EI_x \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=0}. \quad (5.34)$$

这两个方程连同方程(5.28)¹⁾一起, 将决定杆的屈曲形式及相应的临界荷重. 这三个方程及端点条件均将适合, 如取解为

$$u = A_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right), \quad v = A_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right),$$

$$\varphi = A_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right).$$

将这些表达式代入方程(5.28), (5.33)及(5.34), 我们仍得到三次方程(5.32)以计算临界荷重; 只须在记号(5.30)中用 $4\pi^2/l^2$ 代替 π^2/l^2 .

有一对称轴的横截面 设 x 轴为对称轴, 如图(5.14)中的槽钢所示. 这时 $y_0 = 0$, 而方程(5.26)至(5.28)成为

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -Pu, \quad (5.35)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -P(v - x_0 \varphi), \quad (5.36)$$

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_0}{A} P \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - Px_0 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \quad (5.37)$$

第一个方程不包含 φ , 表明在对称面内的屈曲与扭转无关, 而相应的临界荷重由欧拉公式给出. 垂直于对称面的屈曲伴随有扭转, 且由方程(5.36)与(5.37)给出.

设杆的两端为简支, 即可以自由地翘曲及绕 x 轴转动, 但不能绕 z 轴转动. 端点条件为

$$v = \varphi = 0,$$

$$\text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l;$$

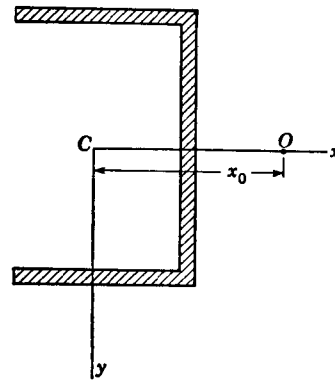


图 5.14

1) 方程(5.28)系由考虑杆的两相邻横截面之间的微段而得, 且不受端点条件改变的影响.

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l.$$

与以前一样地进行, 取解的形式为

$$v = A_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi = A_2 \sin \frac{\pi z}{l},$$

得计算临界荷重的方程为

$$\begin{vmatrix} P - P_x & -P x_0 \\ -P x_0 & \frac{I_0}{A} (P - P_\varphi) \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\frac{I_0}{A} (P - P_x)(P - P_\varphi) - P^2 x_0^2 = 0, \quad (5.38)$$

或

$$\frac{I_c}{I_0} P^2 - (P_x + P_\varphi)P + P_x P_\varphi = 0. \quad (5.39)$$

这二次方程给出临界荷重的两个解, 一个小于 P_x 或 P_φ , 而另一个

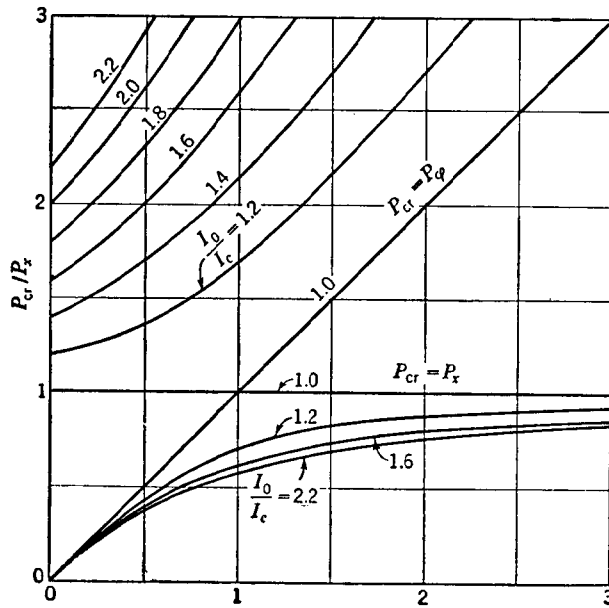


图 5.15

比 P_x 或 P_φ 都大。这些根中的较小的，或在对称平面内屈曲的欧拉荷重，即为柱的临界荷重。在图(5.15)中示出了由方程(5.39)所得的两临界荷重图。应注意，当 P_φ/P_x 很小时，较小的临界荷重很接近于 P_φ ，且屈曲的形式主要是扭转型的，而较大的临界荷重表示主要由弯曲所引起的屈曲。对于很大的 P_φ/P_x ，则较小的临界荷重相应于主要由弯曲所引起的屈曲形式。对于等边角钢 I_o/I_c 值为 1.6，在图 5.15 中的相应的曲线可以用于这情形。对于有一对称轴的其他截面，例如槽钢，则必须对于每一情形计算 I_o/I_c 。

§ 5.6. 具有連續弹性支承的杆由于扭转与弯曲的屈曲

我们来研究中心受压且沿全长弹性支承的杆的稳定性。在屈曲时横向反力将与挠度成比例。设这些反力沿一平行于杆轴的轴 N 而分布，轴 N 由坐标 h_x 与 h_y 所决定，图(5.16)。与以前一样，以 u 与 v 表示剪心轴的挠度分量，以 φ 表示绕这轴的转角(参阅图 5.12)，得到分布着反力的轴 N 的挠度分量为

$$u + (y_o - h_y)\varphi, \quad v - (x_o - h_x)\varphi.$$

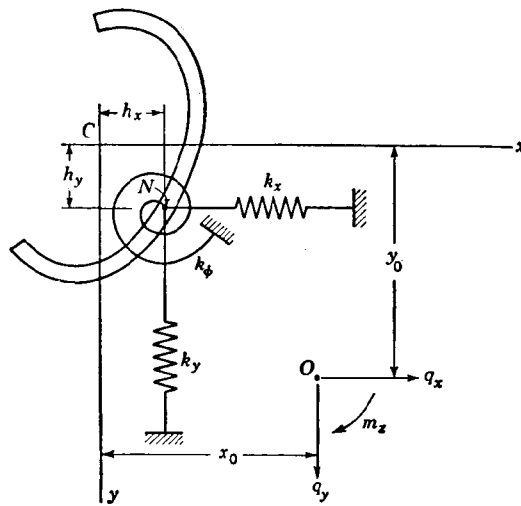


图 5.16

在每单位长度内的相应的反力(设在 x 与 y 轴的正向为正)为

$$-k_x[u + (y_o - h_y)\varphi], \quad -k_y[v - (x_o - h_x)\varphi], \quad (a)$$

式中的 k_x 与 k_y 为决定弹性支承在 x 与 y 方向的刚度的常数。这些常数(或模量)表示当挠度等于一单位时在每单位长度内的反力,其量纲为力除以长度的平方。在以上这些反力上,必须加上由原来的压力的作用所引起的横向力,这压力系作用在纵向纤维的稍微旋转了的横截面上。这些力所引起的每单位长度内的反力[参阅 § 5.5 的式(a)与(b)]等于

$$-\int_A \sigma_t ds \left[\frac{d^2u}{dz^2} + (y_o - y) \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right]$$

和

$$-\int_A \sigma_t ds \left[\frac{d^2v}{dz^2} - (x_o - x) \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right].$$

将以上两式积分,并注意及

$$\sigma \int_A t ds = P, \quad \int_A xt ds = \int_A yt ds = 0,$$

得横向力分布的强度的下述表达式:

$$-P \left(\frac{d^2u}{dz^2} + y_o \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right), \quad (b)$$

$$-P \left(\frac{d^2v}{dz^2} + x_o \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right). \quad (c)$$

杆对于 y 与 x 轴的弯曲的方程为

$$EI_y \frac{d^4u}{dz^4} = q_x, \quad (5.40)$$

$$EI_x \frac{d^4v}{dz^4} = q_y, \quad (5.41)$$

运用分布荷重的强度的式(a),(b)与(c),得到

$$EI_y \frac{d^4u}{dz^4} + P \left(\frac{d^2u}{dz^2} + y_o \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + k_x[u + (y_o - h_y)\varphi] = 0, \quad (5.42)$$

$$EI_x \frac{d^4v}{dz^4} + P \left(\frac{d^2v}{dz^2} - x_o \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + k_y[v - (x_o - h_x)\varphi] = 0. \quad (5.43)$$

因横向荷重 q_x 与 q_y 并不沿剪心轴分布,故除弯曲外杆将受扭。沿剪心轴分布的扭矩强度 m_x , 等于由式(a),(b)与(c)给出的荷重所生的偶矩加上弹性支承所生的反扭矩。以 k_φ 表示弹性支承的扭转模量,得后一扭矩为

$$-k_\varphi\varphi \quad (d)$$

由于作用于点 N 的横向反力(a)所引起的扭矩为

$$-k_x[u + (y_o - h_y)\varphi](y_o - h_y) + k_y[v - (x_o - h_x)\varphi](x_o - h_x). \quad (c)$$

式(b)与(c)给出的力所引起的扭矩,已在前一节中算出并由§5.5的方程(c)所给出。将这值与以上的(d)与(e)相加,得总扭矩

$$m_x = P \left(x_o \frac{d^2v}{dz^2} - y_o \frac{d^2u}{dz^2} \right) - \frac{I_o P}{A} \frac{d^2\varphi}{dz^2} - k_x[u + (y_o - h_y)\varphi](y_o - h_y) + k_y[v - (x_o - h_x)\varphi](x_o - h_x) - k_\varphi\varphi. \quad (f)$$

将 m_x 的表达式(f)代入非均匀扭转的方程(5.17),得以下扭转角的方程:

$$C_1 \frac{d^4\varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_o P}{A} \right) \frac{d^2\varphi}{dz^2} - P \left(x_o \frac{d^2v}{dz^2} - y_o \frac{d^2u}{dz^2} \right) + k_x[u + (y_o - h_y)\varphi](y_o - h_y) - k_y[v - (x_o - h_x)\varphi](x_o - h_x) + k_\varphi\varphi = 0. \quad (5.44)$$

方程(5.42), (5.43)与(5.44)为三个联立的微分方程,以决定沿全长弹性支承的杆的屈曲¹⁾。

若杆的两端为简支,即可以自由翘曲及绕 x 与 y 轴转动,但不能绕 z 轴转动,则可取方程(5.42)至(5.44)的解的形式为

$$u = A_1 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad v = A_2 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{n\pi z}{l}. \quad (g)$$

将这些表达式代入微分方程,与前一节所述的一样,将得对临界荷重的一个三次方程。解出这三次方程的最小根,即得最小临界荷重。现在来研究几个特例。

有两对称轴的横截面 对于横截面有两对称轴的特殊情形,形心与剪心重合,即 $x_o = y_o = 0$ 。又设弹性反力沿杆的形心轴分布。于是 $h_x = h_y = 0$, 而方程(5.42)至(5.44)成为如下的简单形式:

$$EI_y \frac{d^4u}{dz^4} + P \frac{d^2u}{dz^2} + k_x u = 0, \quad (5.45)$$

$$EI_x \frac{d^4v}{dz^4} + P \frac{d^2v}{dz^2} + k_y v = 0, \quad (5.46)$$

$$C_1 \frac{d^4\varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_o P}{A} \right) \frac{d^2\varphi}{dz^2} + k_\varphi\varphi = 0. \quad (5.47)$$

这些方程表明,杆在对称面内的屈曲与扭转无关,因而这三种屈曲可以分别

1) 这些方程首先为 Vlasov 所得, *loc. cit.*

地处理。

取(g)为解的形式,由第一个方程得

$$EI_y \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - P \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + k_x = 0$$

或

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \left(n^2 + \frac{l^4 k_x}{n^2 \pi^4 EI_y} \right). \quad (5.48)$$

这结果与以前对弹性基础上的杆所得的值相符 [参阅方程(2.37)]。由方程(5.46)也可得一相似的结果。三个方程中的最后一个方程,给出扭转屈曲的临界荷重为

$$P_{cr} = \frac{(n^2 \pi^2 / l^2) C_1 + C + (l^2 / n^2 \pi^2) k_\varphi}{I_o / A}. \quad (5.49)$$

对于每一特定情形, C_1 和 k_φ 已知, 则须选择 n 的整数值, 使式(5.49)为最小。当 $k_\varphi = 0$, 取 $n = 1$ 可得最小临界荷重, 而式(5.49)给出以前由纯扭转屈曲所得的值 [参阅方程(5.24)]。

有一对称轴的横截面 若取 x 轴为对称轴, 则 $y_o = 0$ 。再设弹性反力沿剪心轴而分布, 因而 $h_y = 0$, $h_x = x_o$ 。于是方程(5.42)至(5.44)成为

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + k_x u = 0, \quad (5.50)$$

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} + k_y v - P x_o \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (5.51)$$

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_o}{A} P \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + k_\varphi \varphi - P x_o \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \quad (5.52)$$

由第一个方程可以看出, 在对称面内的屈曲与扭转无关, 而可分别处理。后两个为联立的方程, 因此在 y 方向的屈曲伴有扭转。

若端点条件使能取式(g)为微分方程的解, 则自方程(5.51)及(5.52)可得计算临界荷重的下列行列式:

$$\begin{vmatrix} EI_x \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - P \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + k_y & P x_o \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \\ P x_o \frac{n^2 \pi^2}{l^2} & C_1 \frac{n^4 \pi^4}{l^4} + \left(C - \frac{I_o}{A} P \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + k_\varphi \end{vmatrix} = 0. \quad (5.53)$$

这方程为 P 的二次式, 对于每个特定情形, 可自这方程解得两个临界荷重值; 通常只是其中较小的值才有重要性。若 k_φ 与 k_y 均等于零, 则当 $n = 1$ 时得较小的荷重, 并且方程(5.53)给出与以前所得的相同的结果 [参阅方程

(5.39)].

有已定旋转轴的杆 运用微分方程(5.42)至(5.44),我们可研究杆的这种屈曲情形,即在屈曲时横截面绕着转动的这轴为已定.要使绕着转动的这轴为一刚性轴,只须设 $k_x = k_y = \infty$. 于是轴 N (图 5.16) 在杆屈曲时保持为直线,而各横截面绕着这轴而旋转. 对这情形,方程(5.42)与(5.43)给出

$$u + (y_o - h_y)\varphi = 0, \quad v - (x_o - h_x)\varphi = 0,$$

于是得到

$$u = -(y_o - h_y)\varphi, \quad v = (x_o - h_x)\varphi.$$

计算这些表达式的导数,得

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -(y_o - h_y) \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad \frac{d^4u}{dz^4} = -(y_o - h_y) \frac{d^4\varphi}{dz^4}; \quad (\text{h})$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = (x_o - h_x) \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad \frac{d^4v}{dz^4} = (x_o - h_x) \frac{d^4\varphi}{dz^4}. \quad (\text{i})$$

由方程(5.42)与(5.43),还有关系式

$$k_x[u + (y_o - h_y)\varphi] = -EI_y \frac{d^4u}{dz^4} - P\left(\frac{d^2u}{dz^2} + y_o \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \quad (\text{j})$$

$$k_y[v - (x_o - h_x)\varphi] = -EI_x \frac{d^4v}{dz^4} - P\left(\frac{d^2v}{dz^2} - x_o \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right). \quad (\text{k})$$

将(h)与(i)代入(j)与(k),然后将(j)与(k)代入方程(5.44),得转角 φ 的方程为

$$\begin{aligned} & [C_1 + EI_y(y_o - h_y)^2 + EI_x(x_o - h_x)^2] \frac{d^4\varphi}{dz^4} - \\ & - \left[C - \frac{I_o}{A} P + P(x_o^2 + y_o^2) - P(h_x^2 + h_y^2) \right] \frac{d^2\varphi}{dz^2} + k_\varphi\varphi = 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

取这方程的解的形式如(g),可对于每一特定情形计算临界荷重.

若杆有两个对称面,则 $x_o = y_o = 0$, 于是方程(5.54)成为

$$(C_1 + EI_y h_y^2 + EI_x h_x^2) \frac{d^4\varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_o}{A} P - P h_x^2 - P h_y^2 \right) \frac{d^2\varphi}{dz^2} + k_\varphi\varphi = 0. \quad (5.55)$$

取解的形式为 $\varphi = A_3 \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right)$ 并代入方程(5.55),得到

$$P_{cr} = \frac{(C_1 + h_y^2 EI_y + h_x^2 EI_x) \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2}\right) + C + k_\varphi \left(\frac{l^2 k_\varphi}{n^2 \pi^2}\right)}{(I_o/A) + h_x^2 + h_y^2}. \quad (5.56)$$

对于每一特定情形,须取这样的 n 值,使式(5.56)为最小.

若固定的旋转轴为剪心轴,则 $h_x = x_o, h_y = y_o$, 于是方程(5.54)成为给了

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_o P}{A} \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + k_\varphi \varphi = 0. \quad (5.57)$$

仍取解的形式为 $\varphi = A_3 \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right)$, 得到

$$P_{cr} = \frac{C_1(n^2\pi^2/l^2) + C + k_\varphi(l^2/n^2\pi^2)}{I_o/A}. \quad (5.58)$$

只要使剪心轴无挠度,这表达式对于对称或不对称形状的截面均适用.当 $k_\varphi = 0$, 则 $n = 1$ 时 P_{cr} 值为最小,并且正如预料到的,方程(5.58)给出与方程(5.24)相同的结果.

作为另一特例,设固定的转动轴在离杆无限远处.例如若 h_y 为无限大,则方程(5.54)化为

$$EI_y \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + P \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0,$$

这方程对于 P_{cr} 给出杆在 xz 平面内屈曲的熟悉的欧拉荷重.

有已定挠曲平面的杆 在柱的实际设计中,会遇到这样的情形,即在屈

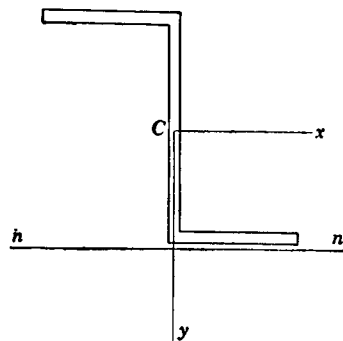


图 5.17

曲时杆的某些纤维必须在一定的方向挠曲.例如,一杆焊接在薄板上,如图(5.17).与薄板接合处杆的纤维,在屈曲时不能在板平面内挠曲.沿接触面 mn 的纤维只能在垂直于板的方向挠曲.

在讨论这种问题时,取通过形心的轴 x, y 分别平行及垂直于薄板是有利的.通常这两轴将不是主轴,而相应的挠度曲线的微分方程其形式必定有所改变.对于 x 与 y 轴并非主轴的

较一般的情形,杆的弯矩由以下表达式给出¹⁾

$$M_x = EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + EI_{xy} \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad (1)$$

1) 关于当两轴不是主轴时的不对称杆的弯曲,参阅 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part I, pp. 230, 231, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1955.

$$M_y = EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + EI_{xy} \frac{d^2v}{dz^2}. \quad (m)$$

在这些表达式中, I_{xy} 表示横截面的惯性积, 并且所设正的弯矩 M_x 与 M_y 如图 5.13 所示. 注意到

$$q_x = \frac{d^2M_y}{dz^2}, \quad q_y = \frac{d^2M_x}{dz^2}$$

(正的 q_x 与 q_y 与 x 及 y 轴的正向相同), 由方程(1)和(m)得弯曲的微分方程为:

$$q_y = EI_x \frac{d^4v}{dz^4} + EI_{xy} \frac{d^4u}{dz^4}, \quad (5.59)$$

$$q_x = EI_y \frac{d^4u}{dz^4} + EI_{xy} \frac{d^4v}{dz^4}. \quad (5.60)$$

研究横截面为任意形状的杆(图 5.18), 并设坐标为 h_x, h_y 的纤维 N 不能在 x 方向挠曲. 仍以 u 与 v 表示剪心轴 O 在 x 与 y 方向的挠度, 得纤维 N 的挠度的表达式为:

$$u_N = u + \varphi(y_0 - h_y) = 0, \quad (n)$$

$$v_N = v - \varphi(x_0 - h_x). \quad (o)$$

由于纤维 N 受到约束, 将有强度为 q_0 的反力沿 N 连续地分布, 且作用于与 x 轴平行的方向(图 5.18). 将 q_0 与作用于纵向纤维的转动后的横截面上的压力(即杆内的压力)所引起的横向力相加, 即得方程(5.60)中 q_x 这量. 此横向力的值可得自式(b), 于是得到

$$q_x = -P \left(\frac{d^2u}{dz^2} + y_0 \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + q_0.$$

由式(c)得到在 y 方向的力的强度为

$$q_y = -P \left(\frac{d^2v}{dz^2} - x_0 \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right).$$

代入方程(5.59)与(5.60), 得到

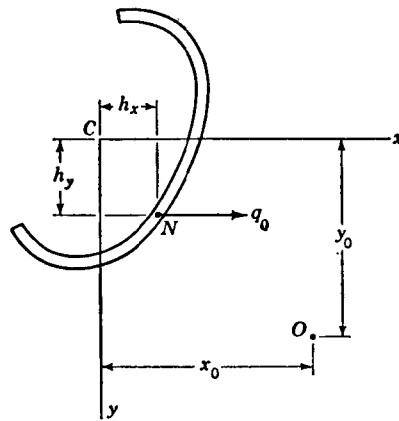


图 5.18

$$q_0 = P \left(\frac{d^2 u}{dz^2} + y_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right) + EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + EI_{xy} \frac{d^4 v}{dz^4}, \quad (p)$$

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + EI_{xy} \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - Px_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0. \quad (q)$$

由方程(n)解 u , 并代入方程(q)以消去 u , 得到

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - EI_{xy}(y_0 - h_y) \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - Px_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0. \quad (5.61)$$

由考虑杆的扭转可得 v 与 φ 的第二个方程。为了这目的, 用方程(5.44)。设并无扭转反力矩及在 y 方向无反力, 并将表达式

$$\begin{aligned} k_y &= k_\varphi = 0, \\ -k_x[u + (y_0 - h_y)\varphi] &= q_0 \end{aligned}$$

代入方程(5.44), 得

$$\begin{aligned} C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_0 P}{A} \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \\ - P \left(x_0 \frac{d^2 v}{dz^2} - y_0 \frac{d^2 u}{dz^2} \right) - q_0(y_0 - h_y) = 0. \end{aligned}$$

将方程(n)的 u 值及方程(p)的 q_0 值代入以上这方程, 得到

$$\begin{aligned} [C_1 + EI_y(y_0 - h_y)^2] \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - \frac{I_0 P}{A} + Py_0^2 - Ph_y^2 \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \\ - EI_{xy}(y_0 - h_y) \frac{d^4 v}{dz^4} - Px_0 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \quad (5.62) \end{aligned}$$

方程(5.61)及(5.62)可用以计算临界屈曲荷重¹⁾。

作为一例, 仍研究简支这情形, 并取解的形式为

$$v = A_2 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

代入方程(5.61)与(5.62), 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{EI_x \pi^2}{l^2} - P \right) A_2 - \left[EI_{xy}(y_0 - h_y) \frac{\pi^2}{l^2} - Px_0 \right] A_3 = 0, \\ - \left[EI_{xy}(y_0 - h_y) \frac{\pi^2}{l^2} - Px_0 \right] A_2 + \left\{ [C_1 + EI_y(y_0 - h_y)^2] \frac{\pi^2}{l^2} + \right. \\ \left. + C - P \left(\frac{I_0}{A} + h_y^2 - y_0^2 \right) \right\} A_3 = 0. \end{aligned}$$

使这两方程的行列式等于零, 得到一个 P 的二次方程, 由这方程可计算对每

1) 这些方程系 Goodier 所得, *Cornell Univ. Eng. Expt. Sta. Bull.* 27, December, 1941.

一特定情形的临界荷重。

如果杆对 y 轴对称,如槽钢这情形(图 5.19),则 x 与 y 轴为主轴; 因此 $I_{xy} = 0, x_o = 0$, 以上两方程成为

$$\begin{aligned} & (EI_x \frac{\pi^2}{l^2} - P) A_2 = 0, \\ & \left\{ [C_1 + EI_y(y_o - h_y)^2] \frac{\pi^2}{l^2} + \right. \\ & \quad \left. + C - P \left(\frac{I_o}{A} + h_y^2 - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - y_o^2 \right) \right\} A_3 = 0. \end{aligned}$$

由第一个方程, 得到在对称面内屈曲的欧拉荷重。由第二个方程得到

$$P_{cr} = \frac{[C_1 + EI_y(y_o - h_y)^2] \pi^2 / l^2 + C}{I_o / A + h_y^2 - y_o^2}, \quad (5.63)$$

它表示扭转屈曲荷重。转动轴系在薄板平面内。将

$$x_o = h_x = k_\varphi = 0, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{\pi z}{l}$$

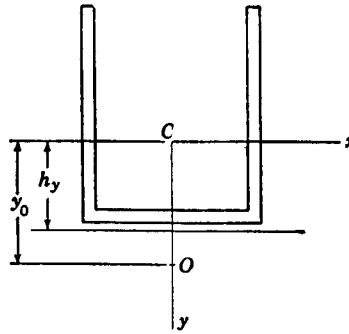


图 5.19

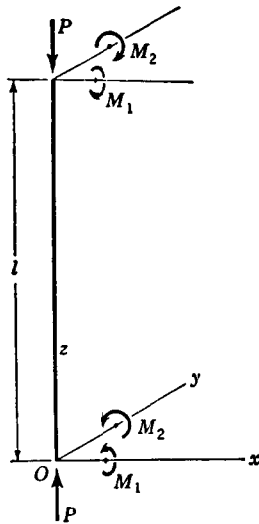


图 5.20

代入方程(5.54), 亦可得到方程(5.63)。

§ 5.7. 在压力与端弯矩作用下的扭转屈曲

在前几节中, 我们只研究了中心受压柱的屈曲。现在我们来研究杆在两端承受中心压力 P 外还受弯曲力偶 M_1 与 M_2 作用这情形(图 5.20)。正的 M_1 与 M_2 的方向如图所示, 即使杆内的弯矩为正(参阅图 5.13)。

在分析中我们设 P 对弯曲应力的影响可被略去。在这情况下, 在任一点的正应力与 z 无关并由方程

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M_1 y}{I_x} - \frac{M_2 x}{I_y} \quad (5.64)$$

给出, 式中的 x 与 y 为横截面的中心主轴。我们设由于力偶 M_1 与 M_2 所引起的杆的初挠度非常小。在研究这挠曲的平衡形式的稳定性时, 仍设剪心轴将产生附加的挠度 u 与 v 及横

截面将对于这轴转动角 φ 。于是挠度 u 与 v 及转角 φ 将使杆的轴线具有稍不同于力偶 M_1 与 M_2 所产生的初弯曲的新形状。在写出杆的新形状的静力平衡方程时,略去由于 M_1 与 M_2 所引起的微小的初挠度,而与以前对于杆的轴线原来是直的这情形一样地进行。于是由坐标 x 与 y 所确定的杆的任一纵向纤维的挠度分量为

$$u + (y_0 - y)\varphi, \quad v - (x_0 - x)\varphi.$$

由于纤维内的原有压力作用于纤维的稍微转动后的横截上,所得的假想横向荷重及分布扭矩的强度,仍可与 § 5.5 一样地得到。它们由下列方程给出:

$$\begin{aligned} q_x &= - \int_A (\sigma_t ds) \frac{d^2}{dz^2} [u + (y_0 - y)\varphi], \\ q_y &= - \int_A (\sigma_t ds) \frac{d^2}{dz^2} [v - (x_0 - x)\varphi], \\ m_z &= \int_A (\sigma_t ds)(y_0 - y) \frac{d^2}{dz^2} [u + (y_0 - y)\varphi] + \\ &\quad + \int_A (\sigma_t ds)(x_0 - x) \frac{d^2}{dz^2} [v - (x_0 - x)\varphi]. \end{aligned}$$

将式(5.64)的 σ 代入并积分,得到

$$\begin{aligned} q_x &= -P \frac{d^2 u}{dz^2} - (Py_0 - M_1) \frac{d^2 \varphi}{dz^2}, \\ q_y &= -P \frac{d^2 v}{dz^2} + (Px_0 - M_2) \frac{d^2 \varphi}{dz^2}, \\ m_z &= - (Py_0 - M_1) \frac{d^2 u}{dz^2} + \\ &\quad + (Px_0 - M_2) \frac{d^2 v}{dz^2} - (A^2_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 + P \frac{I_0}{A}) \frac{d^2 \varphi}{dz^2}, \end{aligned}$$

其中引入了以下的记号:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{I_x} \left(\int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right) - 2y_0, \\ \beta_2 &= \frac{1}{I_y} \left(\int_A x^3 dA + \int_A x y^2 dA \right) - 2x_0. \end{aligned} \quad (5.65)$$

于是杆的弯曲与扭转的三个方程[方程(5.40),(5.41)及(5.17)]成为

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + (Py_0 - M_1) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (5.66)$$

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - (Px_0 - M_2) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (5.67)$$

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - M_1 \beta_1 - M_2 \beta_2 - P \frac{I_0}{A} \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + (P y_0 - M_1) \frac{d^2 u}{dz^2} - (P x_0 - M_2) \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \quad (5.68)$$

以上这三个方程即为杆的屈曲形式的平衡方程。由这些方程,对于任何已知的端点条件,可计算外力的临界值。

偏心压缩 我们首先研究力 P 偏心作用的情形(图 5.21)。以 e_x 与 e_y 表示压力 P 的作用点的坐标,于是得到

$$M_1 = P e_y, \quad M_2 = P e_x,$$

而方程(5.56)至(5.58)成为

$$E I_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + P(y_0 - e_y) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (5.69)$$

$$E I_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - P(x_0 - e_x) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (5.70)$$

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \left(C - P e_y \beta_1 - P e_x \beta_2 - P \frac{I_0}{A} \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + P(y_0 - e_y) \times \frac{d^2 u}{dz^2} - P(x_0 - e_x) \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \quad (5.71)$$

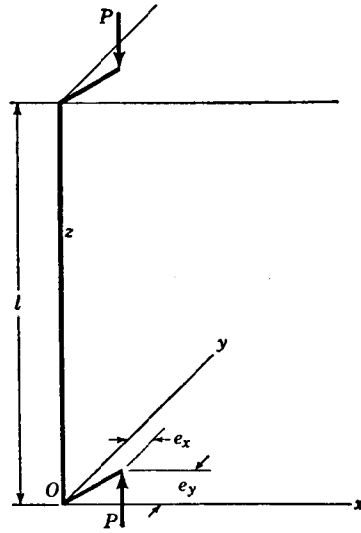


图 5.21

对于简支端,端点条件为

$$u = v = \varphi = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 和 } z = l;$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 和 } z = l.$$

这些条件均可满足,若取 u, v 与 φ 为

$$u = A_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad v = A_2 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

代入方程(5.69),(5.70)和(5.71),得到

$$\left(E I_y \frac{\pi^2}{l^2} - P \right) A_1 - P(y_0 - e_y) A_3 = 0, \quad (5.72)$$

$$\left(EI_x \frac{\pi^2}{l^2} - P\right) A_2 + P(x_o - e_x) A_3 = 0, \quad (5.73)$$

$$-P(y_o - e_y) A_1 + P(x_o - e_x) A_2 + \left(C_1 \frac{\pi^2}{l^2} + C - Pe_y \beta_1 - Pe_x \beta_2 - P \frac{I_o}{A}\right) A_3 = 0. \quad (5.74)$$

令这三个方程的行列式等于零，得到一个三次方程以计算 P_{cr} 。从这些方程可以看出，一般地，杆的屈曲系由于弯曲与扭转的组合而引起。对于每一特定情形，可计算方程(5.72)至(5.74)的系数的值，并由这三次方程解临界荷重的最小值。

若压力 P 沿剪心轴作用，则方程就变得很简单。此时我们有

$$e_x = x_o, \quad e_y = y_o,$$

并且方程(5.69)至(5.71)互不相关。在这种情况下，在两个主平面内的横向屈曲与扭转屈曲可能独立地发生。为首的两个方程给出对于临界屈曲荷重的通常的欧拉公式，而第三个方程给出相应于柱纯扭转屈曲的临界荷重。

如果杆有一个对称平面，则得另一特殊情形。设 yz 平面为对称平面，且压力 P 系作用在这平面内。于是 $e_x = x_o = 0$ ，而方程(5.72)至(5.74)成为

$$\begin{aligned} \left(EI_y \frac{\pi^2}{l^2} - P\right) A_1 - P(y_o - e_y) A_3 &= 0, \\ \left(EI_x \frac{\pi^2}{l^2} - P\right) A_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$-P(y_o - e_y) A_1 + \left(C_1 \frac{\pi^2}{l^2} + C - Pe_y \beta_1 - P \frac{I_o}{A}\right) A_3 = 0.$$

从第二个方程可以看出，在对称平面内的屈曲系独立地发生，并且相应的临界荷重即为欧拉荷重。在 xz 平面内的横向屈曲与扭转屈曲相耦合，并且相应的临界荷重可由(5.75)的第一与第三两方程的行列式等于零而得到。于是

$$\begin{vmatrix} EI_y \frac{\pi^2}{l^2} - P & -P(y_o - e_y) \\ -P(y_o - e_y) & \left(C_1 \frac{\pi^2}{l^2} + C - Pe_y \beta_1 - P \frac{I_o}{A}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

运用记号

$$P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}, \quad P_\phi = \frac{A}{I_o} \left(C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2}\right),$$

并将行列式展开，得到以下这二次方程以计算临界荷重：

$$(P_y - P) \left[\frac{I_o}{A} P_\varphi - P \left(e_y \beta_1 + \frac{I_o}{A} \right) \right] - P^2 (y_o - e_y)^2 = 0. \quad (5.76)$$

应当注意,对于很小的 P 值,这方程的左边为正,而当 $P = P_y$ 时,这方程的左边为负。因此方程(5.76)有一小于 P_y 的根,即小于在 xz 平面内屈曲的欧拉荷重。

若压力系作用在剪心,则 $e_y = y_o$, 而方程(5.76)成为

$$(P_y - P) \left[\frac{I_o}{A} P_\varphi - P \left(e_y \beta_1 + \frac{I_o}{A} \right) \right] = 0.$$

这方程的两个根为

$$P = P_y, \quad P = \frac{P_\varphi}{1 + e_y \beta_1 \left(\frac{A}{I_o} \right)}.$$

第一个根相应于在 xz 平面内的弯曲屈曲;第二个根相应于纯扭转屈曲。

因当 P 很小时方程(5.76)的左边为正,并当 P 增大时逐渐地减小,我们可得结论:令最后项为零,即取 $e_y = y_o$, 将使这方程的最小根增大。因此,如果压力作用在剪心,临界荷重将达到最大值。

如果荷重作用于形心,即 $e_y = 0$, 则方程(5.76)成为

$$\frac{I_o}{A} (P - P_y)(P - P_\varphi) - P^2 y_o^2 = 0,$$

这方程与以前对中心受压杆所得的方程(5.38)相同。

若横截面有两个对称轴,因而剪心与形心重合,于是必须以 $y_o = \beta_1 = 0$ 代入方程(5.76),并得

$$(P - P_y)(P - P_\varphi) - P^2 \frac{A e_y^2}{I_o} = 0,$$

或

$$P^2 \left(1 - \frac{A e_y^2}{I_o} \right) - P(P_y + P_\varphi) + P_y P_\varphi = 0. \quad (5.77)$$

当 $P = 0$ 时,这方程的左边为正;当 $P = P_y$ 或 $P = P_\varphi$ 时,方程的左边为负。因而有一个临界荷重系小于 P_y 或 P_φ 。若 $A e_y^2 / I_o < 1$, 则对于很大的 P 值,方程的左边为正,这表明第二个临界荷重大于 P_y 或 P_φ 。若偏心距 e_y 趋近于零,这两个临界荷重就趋近于 P_y 与 P_φ 值。若 $A e_y^2 / I_o > 1$, 则对于很大的正与负的 P 值方程的左边为负,这表明方程有一个正根有一个负根。这负根表明,若偏心距很大这杆可能在偏心拉伸下屈曲。当 $A e_y^2 / I_o = 1$, 方程(5.77)的一个根为

$$P = \frac{P_y P_\varphi}{P_y + P_\varphi},$$

而另一个根将为无限大。

以上所讨论的偏心受压，系适用于简支端杆。若端点为刚性固定，则条件为

$$u = v = \varphi = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l;$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l.$$

以上的端点条件可以满足，如取

$$u = A_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right), \quad v = A_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right),$$

$$\varphi = A_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right).$$

代入方程(5.69)至(5.71)，并令所得方程的行列式等于零，即得一计算临界荷重的方程。这方程与对简支端所得的方程相似，所不同的只是以 $4\pi^2/l^2$ 代替了 π^2/l^2 。

纯弯曲 若轴向力 P 为零(图 5.20)，即得到在杆端作用力偶 M_1 与 M_2 的纯弯曲情形。将 $P = 0$ 代入方程(5.66)至(5.68)，得以下三方程：

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} - M_1 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (5.78)$$

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + M_2 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (5.79)$$

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - (C - M_1 \beta_1 - M_2 \beta_2) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - M_1 \frac{d^2 u}{dz^2} + M_2 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \quad (5.80)$$

对于 u 、 v 与 φ 取了适当的三角表达式，即可很容易地得到一方程以计算弯矩 M_1 与 M_2 的临界值。

设杆的一个主平面内的弯曲刚度较另一主平面内的弯曲刚度大好几倍，且在刚度较大的平面内弯曲，这情形具有特殊意义。例如设 yz 平面为刚度较大的平面，并且杆在这平面内为力偶 M_1 所弯曲(图 5.22 a 及 b)。使横向屈曲发生的 M_1 的临界值，可得自方程(5.78)和(5.80)。以 $M_2 = 0$ 代入这些方程，得

$$EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} - M_1 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \quad (5.81)$$

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - (C - M_1 \beta_1) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - M_1 \frac{d^2 u}{dz^2} = 0. \quad (5.82)$$

若杆的两端为简支，则仍可取 u 与 φ 的表达式为

$$u = A_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

将这些表达式代入方程(5.81)与(5.82), 并令所得方程的行列式等于零, 即得以下这方程以计算弯矩 M_1 的临界值:

$$\frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \left(C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2} - M_1 \beta \right) - M_1^2 = 0. \quad (a)$$

仍用记号

$$P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \quad P_\varphi = \frac{A}{I_o} \left(C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2} \right),$$

我们可将方程(a)写作形式

$$M_1^2 + P_y \beta_1 M_1 - \frac{I_o}{A} P_y P_\varphi = 0, \quad (5.83)$$

由上式得

$$(M_1)_{cr} = -\frac{P_y \beta_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_y \beta_1}{2} \right)^2 + \frac{I_o}{A} P_y P_\varphi}. \quad (5.84)$$

对于每一特定情形, 可由这方程得弯矩 M_1 的两个临界值.

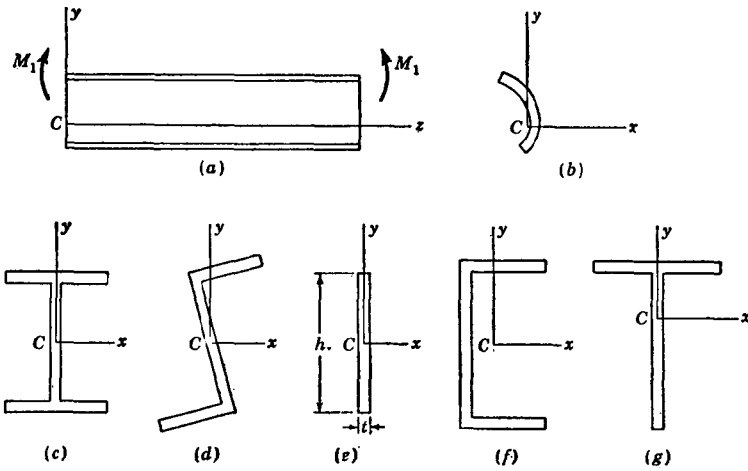


图 5.22

若杆的横截面有两对称轴, 如工字梁(图 5.22 c), 则 β_1 为零, 而临界弯矩为

$$(M_1)_{cr} = \pm \sqrt{P_y P_\varphi \frac{I_o}{A}} = \pm \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y \left(C_1 \frac{\pi^2}{l^2} + C \right)}. \quad (5.85)$$

若杆的横截系中心对称,例如图 5.22 *d* 中的 Z 形截面,则因对于这情形 $\beta_1 = 0$, 故以上这方程亦适用。

若杆的横截面为一狭长的矩形(图 5.22 *e*), 其厚度为 t 而高为 h , 则翘曲刚度 $C_1 = 0$, 而扭转刚度近似地为

$$C = GJ = \frac{Ght^3}{3}.$$

因此由方程(5.85), 临界弯矩为

$$(M_1)_{cr} = \pm \frac{\pi}{l} \cdot \frac{th^3}{6} \sqrt{EG}.$$

若杆的横截面有一对称轴, 且若弯曲力偶作用在垂直于此对称轴的平面内(图 5.22 *f*), 则 β_1 仍等于零而方程(5.85)仍能运用。如果弯曲力偶作用在对称平面内, 如图 5.22 *g*, 则 β_1 不等于零, 而必须用方程(5.84)来计算 M_1 的临界值。

在以上纯弯曲的讨论中, 曾设 EI_y 远较 EI_x 为很小。如果 C 与 C_1 亦很小, 则在小的 M_1 值时即发生屈曲, 即在弯曲应力很小时即发生屈曲。若 EI_x 与 EI_y 同数量级, 则只当 C 与 C_1 为很小时才在小的应力时发生横向屈曲。如果横截面为十字形(参阅图 5.9), 这条件即可符合, 因对于这情形 C_1 等于零, 并且如果翼缘厚度很小 C 亦非常小。

在这讨论中, 我们研究了作用于两端的力偶所弯曲的杆。只有对于这情形, 正应力 [参阅方程(5.64)] 才与 z 无关, 所以我们得到一组常系数的微分方程 [参阅方程(5.66)至(5.68)]。如果杆为横向力所弯曲, 则弯曲应力随 z 而改变, 于是将得到一组变系数的方程。横向荷重作用于梁的临界值, 将在下一章中讨论。

第六章 梁的横向屈曲

§ 6.1. 横向屈曲的微分方程

在前一节中曾指明,在最大弯曲刚度平面内弯曲的梁,当荷重达到某一临界值时可能发生横向屈曲。若梁在弯曲平面内的弯曲刚度远大于横向的弯曲刚度,则在设计无横向支承的梁时横向屈曲是十分重要的。只要作用于这种梁上的荷重小于临界值,这梁是稳定的。但随着荷重的增大,将达到这样的情况,即可能发生微小的挠曲与扭转的平衡形式。这时候梁的平面位置是不稳定的,而使发生这临界状态的最小荷重即为这梁的临界荷重。

我们首先研究具有两个对称面的梁,如图 6.1 所示。设这梁承受任意的荷重,作用于 yz 平面内;该平面即为最大刚度平面。设在这些荷重作用下发生了微小的横向挠曲,于是

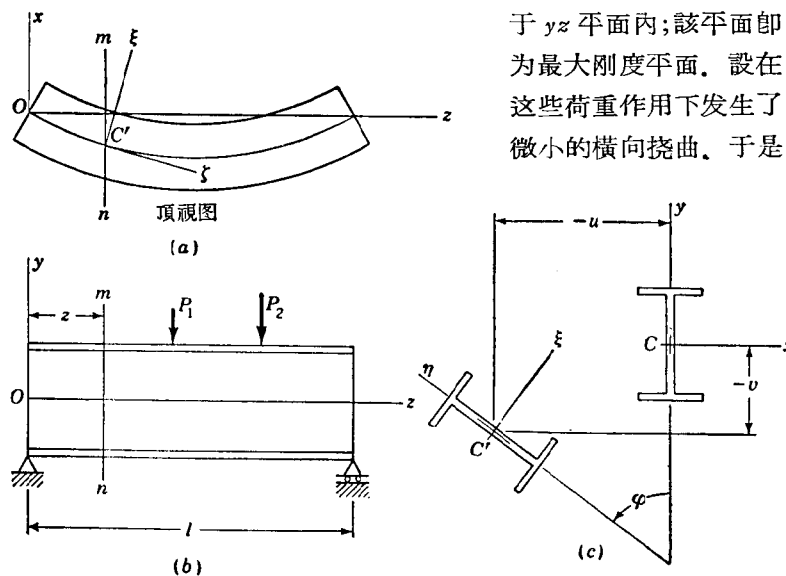


图 6.1

由挠曲梁的平衡微分方程，可得荷重的临界值。在推导这些方程时，我们用固定的坐标轴 x, y, z ，如图所示。此外，在任何横截面 mn 的形心处取坐标轴 ξ, η, ζ 。轴 ξ 与 η 为对称轴，因而为横截面的主轴，而 ζ 系在梁屈曲后挠曲轴线的切线方向。梁的挠度决定于横截面形心在 x 与 y 方向的位移 u 与 v ，以及横截面的转角 φ 。绕 z 轴正的转角 φ ，按照右手规则来定，而正的 u 与 v 由相应轴的正向所定。于是图 6.1 中的 C' 的位移 u 与 v 为负。

在以后的讨论中，将需要坐标轴 x, y, z 与 ξ, η, ζ 间夹角余弦的表达式。当 u, v, φ 均认为是小量时，坐标轴正向间夹角的余弦值列于表 6.1 内。

表 6.1 图 6.1 中坐标间夹角的余弦

	x	y	z
ξ	1	φ	$-\frac{du}{dz}$
η	$-\varphi$	1	$-\frac{dv}{dz}$
ζ	$\frac{du}{dz}$	$\frac{dv}{dz}$	1

对于小挠度，梁的挠曲轴线（图 6.1）在 xz 与 xy 平面内的曲率，可各取为 $\frac{d^2u}{dz^2}$ 及 $\frac{d^2v}{dz^2}$ 。对于微小的扭转角 φ ，可设在 $\xi\zeta$ 与 $\eta\zeta$ 平面内的曲率具有同样的值。

于是梁弯曲的微分方程为

$$EI_{\xi} \frac{d^2v}{dz^2} = M_{\xi}, \quad (6.1)$$

$$EI_{\eta} \frac{d^2u}{dz^2} = M_{\eta}, \quad (6.2)$$

在这些方程中， I_{ξ} 与 I_{η} 为横截面分别对于 ξ 与 η 轴的主惯性矩。 M_{ξ} 与 M_{η} 表示对于上述轴的弯矩，而所设的正向如图 6.2 所示。

屈曲杆扭转的方程[参阅方程(5.15)]为

$$C \frac{d\varphi}{dz} - C_1 \frac{d^3\varphi}{dz^3} = M_{\zeta}, \quad (6.3)$$

式中 $C = GJ$ 为扭转刚度，而 $C_1 = EC_w$ 为翘曲刚度¹⁾。图 6.3 中所示的方向为正的扭矩 M_{ζ} ，这图表明了作用于梁微段的扭转力

1) J 与 C_w 的公式于附录中给出。

偶。

方程(6.3)对于薄壁开口截面梁是正确的, 例如图 6.1 中的工字梁。(6.1), (6.2)及(6.3)这三个方程表示屈曲梁的平衡微分方程, 由这些方程可得荷重的临界值。在以下几节中, 我们将研究各种特殊的荷重的情形。

§ 6.2. 純彎曲梁的橫向屈曲¹⁾

工字梁 若力偶 M_0 作用于一工字梁的两端(图 6.4a 与 b), 在任一橫截面的弯矩与扭矩, 可由取 M_0 对 ξ , η 及 ζ 軸的分量而得。

于是, 用表 6.1 的第一列的值, 并考虑及諸力矩的正向(图 6.2 与 6.3), 得到

$$M_\xi = M_0, \quad M_\eta = \varphi M_0,$$

$$M_\zeta = -\frac{du}{dz} M_0.$$

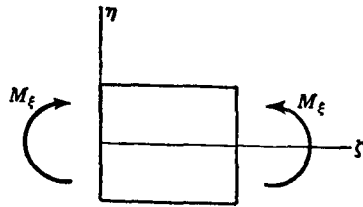


图 6.2

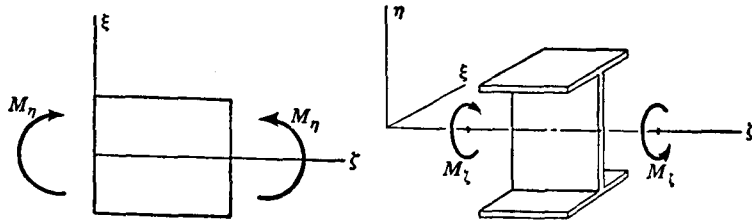


图 6.3

将这些表达式代入方程(6.1), (6.2)及(6.3), 得 u , v 与 φ 的方程如下:

$$EI_\xi \frac{d^2 v}{dz^2} - M_0 = 0, \quad (6.4)$$

$$EI_\eta \frac{d^2 u}{dz^2} - \varphi M_0 = 0, \quad (6.5)$$

1) 工字梁的橫向屈曲的各种情形, 曾由 Timoshenko 所研究, *Bull. Polytech. Inst., St. Petersburg*, 1905. 进一步的发展系由于 V. Z. Vlasov, *Thin-walled Elastic Bars*, Moscow, 1940, 及 J. N. Goodier, *Cornell Univ. Eng. Expt. Sta. Bull.* 27, December, 1941, 及 28, January, 1942.

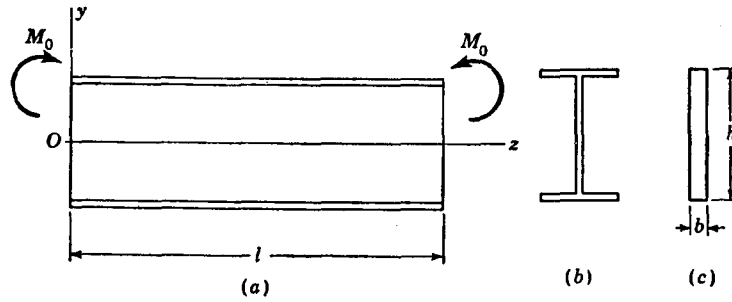


图 6.4

$$C \frac{d\varphi}{dz} - C_1 \frac{d^3\varphi}{dz^3} + \frac{du}{dz} M_0 = 0, \quad (6.6)$$

計算最后一式对 z 的导数, 并与方程(6.5)合并以消去 d^2u/dz^2 , 得以下这扭转角 φ 的方程:

$$C_1 \frac{d^4\varphi}{dz^4} - C \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{M_0^2}{EI_y} \varphi = 0$$

或

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - 2\alpha \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \beta\varphi = 0, \quad (6.7)$$

式中

$$\alpha = \frac{C}{2C_1}, \quad \beta = \frac{M_0^2}{EI_y C_1}. \quad (6.8)$$

方程(6.7)的通解为

$$\varphi = A_1 \sin mx + A_2 \cos mx + A_3 e^{nx} + A_4 e^{-nx}, \quad (a)$$

式中的 m 与 n 为正实数:

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}, \quad n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}. \quad (b)$$

积分常数 A_1, A_2, A_3 与 A_4 須由梁的端点条件来决定. 設梁的两端不能繞 z 軸而轉动(图 6.1), 但可以自由地翘曲, 則端点的条件为[參閱式(5.21)及(5.22)]

$$\varphi = \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 及 } z = l. \quad (c)$$

由 $z = 0$ 的条件可知

$$A_2 = 0, \quad A_3 = -A_4,$$

因而扭轉角 φ 可表示为

$$\varphi = A_1 \sin mz - 2A_4 \sinh nz.$$

現在运用 $z = l$ 的条件, 得方程

$$\begin{aligned} A_1 \sin ml - 2A_4 \sinh nl &= 0, \\ A_1 m^2 \sin ml + 2A_4 n^2 \sinh nl &= 0. \end{aligned} \quad (d)$$

使这些方程的行列式等于零, 得

$$(\sin ml)(n^2 \sinh nl + m^2 \sinh ml) = 0.$$

因 m 与 n 为非零正数, 得知

$$\sin ml = 0, \quad (e)$$

由方程(d)还得 $A_4 = 0$. 因此屈曲形式由方程

$$\varphi = A_1 \sin mz$$

給出, 梁屈曲成正弦波的形状.

滿足方程(e)的最小的 m 值为

$$m = \frac{\pi}{l},$$

或利用表达式(b), 即

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

代入表达式(6.8), 并由上式解力矩 M_0 的临界值, 得¹⁾

$$(M_0)_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_7 C \left(1 + \frac{C_1 \pi^2}{C l^2}\right)}. \quad (6.9)$$

这临界荷重的表达式可表示为如下形式:

$$(M_0)_{cr} = \gamma_1 \frac{\sqrt{EI_7 C}}{l}, \quad (6.10)$$

式中 γ_1 为一无量綱因子, 其值为

$$\gamma_1 = \pi \sqrt{1 + \frac{C_1 \pi^2}{C l^2}}. \quad (6.11)$$

1) 在 §5.7 中曾得到了相同的结果[参阅方程(5.85)].

在表 6.2 中给出了 γ_1 的值。

取方程(e)的较大的根, 即得较方程(6.9)为大的临界弯矩值。这些临界弯矩相应于有一个或更多个反曲点的屈曲形状, 如梁有横向支承时所发生的情况那样。

由方程(6.9)给出的临界弯矩值, 与梁在铅直平面内的弯曲刚度 EI_ξ 无关。这结论是由于假设铅直平面内的挠度很小的结果。当弯曲刚度 EI_ξ 远大于刚度 EI_η 时, 这假设是合理的。若这两刚度同数量级, 则在 yz 这铅直平面内的弯曲的影响可能是重要的, 并应加以考虑¹⁾。在 § 6.3 内将给出对于狭长矩形截面梁计及这影响而计算得的几个数值结果。

表 6.2 对纯弯曲工字梁的因子 γ_1 的值 [方程(6.11)]

$\frac{I^2 C}{C_1}$	0	0.1	1	2	4	6	8	10	12
γ_1	∞	31.4	10.36	7.66	5.85	5.11	4.70	4.43	4.24
$\frac{I^2 C}{C_1}$	16	20	24	28	32	36	40	100	∞
γ_1	4.00	3.83	3.73	3.66	3.59	3.55	3.51	3.29	π

在由方程(6.10)决定了力矩的临界值之后, 可由弯曲正应力的公式得到临界应力, 即

$$\sigma_{cr} = \frac{(M_0)_{cr}}{Z_\xi}, \quad (f)$$

式中 Z_ξ 为梁的横截面对于 ξ 轴的截面模量。只当由方程(f)所计算得的应力小于材料的比例极限时, 才表示临界应力的真正值。

狭长矩形截面梁 对于狭长矩形截面梁²⁾(图 6.4c), 可取翘曲

1) 这问题曾由 H. Reissner 研究过, *Sitzber. Berlin Math. Ges.*, 1904, p. 53. 并参阅 A. N. Dinnik, *Bull. Don. Polytech. Inst., Novotcherkassk*, vol. 2, 1913; 及 K. Federhofer, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien.*, vol. 140, Abt. IIa, p. 237, 1931.

2) 这问题曾为 L. Prandtl 研究过, *Kipperscheinungen*, Dissertation, Munich, 1899, 及 A. G. M. Michell, *Phil. Mag.*, vol. 48, 1899.

刚度 C_1 为零(参阅 239 页), 并且代替方程(6.7), 得方程

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{M_0^2}{EI_\eta C} \varphi = 0. \quad (6.12)$$

由这方程可以很容易地解出 φ , 又由于在梁的两端角 φ 必须为零, 得超越方程

$$\sin l \sqrt{\frac{M_0^2}{EI_\eta C}} = 0$$

以解临界荷重. 这方程的最小根给出最小临界荷重

$$(M_0)_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_\eta C}. \quad (6.13)$$

在这方程中, 狭长矩形的扭转刚度 C , 通常可以充分精确地得自公式

$$C = GJ = \frac{1}{3} hb^3 G. \quad (g)$$

§ 6.3. 悬臂梁的横向屈曲

工字梁 我們首先研究一悬臂梁, 力 P 作用于端截面的形心(图 6.5). 随着 P 逐渐增加, 最后将达到一临界状况, 于是在 yz 平面内的挠曲形状是不稳定的, 并且将发生如图所示的横向屈曲. 要决定临界荷重, 仍用方程(6.1)至(6.3)的三个平衡方程. 考虑截面 mn 右边部分悬臂梁的平衡(图 6.5 b), 得铅直力 P 对于通过截面 mn 的形心且平行于坐标轴 x , y 与 z 轴的力矩为

$$M_x = -P(l-z), \quad M_y = 0, \quad M_z = P(-u_1 + u). \quad (a)$$

u_1 这量表示梁的自由端的挠度, 并设沿 x 轴的正向为正. 用表 6.1 中的坐标轴间夹角的余弦, 计算弯矩(a)对于 ξ , η 及 ζ 轴的分量, 并略去高于一级的小量, 得到

$$M_\xi = -P(l-z), \quad M_\eta = -P\varphi(l-z),$$

$$M_\zeta = P(l-z) \frac{du}{dz} - P(u_1 - u).$$

将这些弯矩代入方程(6.1)至(6.3), 得以下三个微分方程:

$$EI_\xi \frac{d^2v}{dz^2} + P(l-z) = 0, \quad (6.14)$$

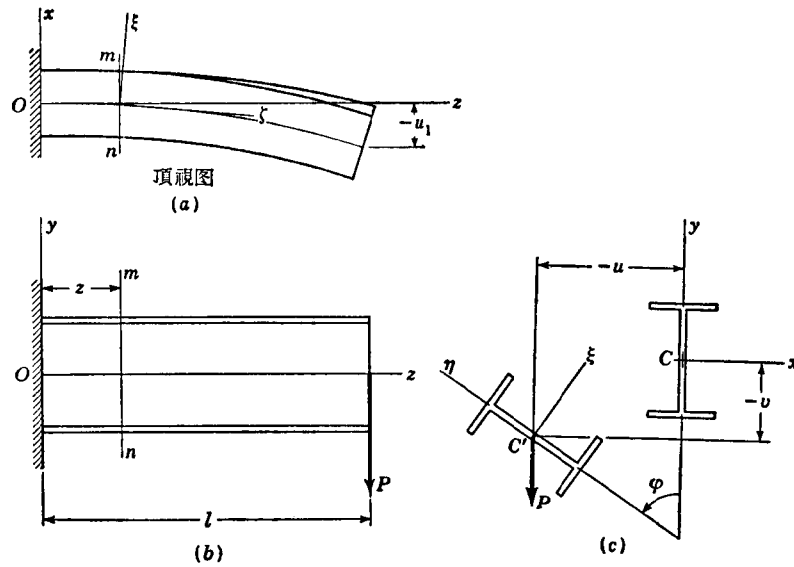


图 6.5

$$EI_{\eta} \frac{d^2 u}{dz^2} + P\varphi(l-z) = 0, \quad (6.15)$$

$$C_1 \frac{d^3 \varphi}{dz^3} - C \frac{d\varphi}{dz} + P(l-z) \frac{du}{dz} - P(u_1 - u) = 0. \quad (6.16)$$

計算方程(6.16)对 z 的导数, 并与方程(6.15)合并以消去 $\frac{d^2 u}{dz^2}$, 可得扭轉角 φ 的一方程. 此方程为

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - C \frac{d^3 \varphi}{dz^3} - \frac{P^2}{EI_{\eta}} (l-z)^2 \varphi = 0. \quad (b)$$

引入一新变量

$$s = l - z,$$

于是方程(b)可写作

$$\frac{d^4 \varphi}{ds^4} - \frac{C}{C_1} \frac{d^3 \varphi}{ds^3} - \frac{P^2}{EI_{\eta} C_1} s^2 \varphi = 0. \quad (6.17)$$

可以无穷級数形式解出这方程(參閱 § 2.12). 于是由端点条

件,可得一超越方程,以計算荷重 P 的临界值. 这些計算的結果可表示为如下这形式¹⁾:

$$P_{cr} = \gamma_2 \frac{\sqrt{EI_1 C}}{l^2}, \quad (6.18)$$

式中 γ_2 为与比值 $\frac{l^2 C}{C_1}$ 有关的无量綱因子. 在表 6.3 中給出了 γ_2 的几个值. 当比值 $\frac{l^2 C}{C_1}$ 增大时, 因子 γ_2 趋近于极限值 4.013, 这相应于狭长矩形截面 ($C_1 = 0$) 梁的临界荷重, 如在下一节将討論的. 对于很大的 $\frac{l^2 C}{C_1}$ 值, γ_2 的近似值由方程

$$\gamma_2 = \frac{4.013}{(1 - \sqrt{C_1/l^2 C})^2} \quad (6.19)$$

給出. 例如 $l^2 C/C_1 = 40$, 由方程(6.19)所得的 γ_2 为 5.66, 而精确值为 5.64.

表 6.3 对悬臂工字梁的因子 γ_2 的值[方程(6.18)]

$\frac{l^2 C}{C_1}$	0.1	1	2	3	4	6	8
γ_2	44.3	15.7	12.2	10.7	9.76	8.69	8.03
$\frac{l^2 C}{C_1}$	10	12	14	16	24	32	40
γ_2	7.58	7.20	6.96	6.73	6.19	5.87	5.64

由方程(6.18)决定了临界荷重的值, 相应的临界应力值可得自方程

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr} l}{z \xi}. \quad (c)$$

这应力必須小于比例极限, 因为这时方程(6.18)才成立.

狭长矩形截面梁 若图 6.5 中的梁的横截面由寬为 b 高为 h

1) 这計算系 Timoshenko 所作, *Z. Math. u. Physik*, vol. 58, pp. 337—385, 1910. 这论文亦搜集在 "The Collected Papers of Stephen P. Timoshenko", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.

的狭长矩形組成,則代替方程(b),得扭轉角的方程为:

$$C \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{P^2}{EI_\eta} (l-z)^2 \varphi = 0. \quad (d)$$

仍引入新变量 $s = l - z$, 并用記号

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{P^2}{EI_\eta C}}, \quad (6.20)$$

于是方程(d)成为

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \beta_1^2 s^2 \varphi = 0. \quad (6.21)$$

方程(6.21)的通解为

$$\varphi = \sqrt{s} \left[A_1 J_{\frac{3}{4}} \left(\frac{\beta_1}{2} s^2 \right) + A_2 J_{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\beta_1}{2} s^2 \right) \right], \quad (6.22)$$

式中的 $J_{\frac{3}{4}}$ 与 $J_{-\frac{3}{4}}$ 各为 $\frac{1}{4}$ 与 $-\frac{1}{4}$ 阶的第一类貝塞尔函数.

通解(6.22)中的常数 A_1 与 A_2 可由端点条件得到. 在固定端扭轉角为零, 于是第一个条件为

$$\varphi = 0, \quad \text{当 } s = l; \quad (e)$$

在自由端扭矩 M_c 为零, 因而第二个条件[参閱方程(6.3)]为

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \text{当 } s = 0. \quad (f)$$

将条件(f)用于通解(6.22), 得 $A_1 = 0$; 然后由条件(e)得

$$J_{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\beta_1}{2} l^2 \right) = 0. \quad (g)$$

这方程的最小根为¹⁾

$$\frac{\beta_1}{2} l^2 = 2.0063,$$

由此得²⁾

$$P_{cr} = \frac{4.013}{l^2} \sqrt{EI_\eta C}. \quad (6.23)$$

1) 例如参閱貝塞尔函数的零点表, Jahnke 及 Emde, Table of Functions, 4th ed., p. 167, Dover Publications, New York, 1945.

2) 这结果系 Prandtl 所得, *loc. cit.*

图 6.5 中所示的屈曲相应于这荷重的值。取方程(g)的较大的根, 得到的挠度曲线将有一个或多个反曲点。除非梁的某些中间点有横向支承, 否则这些不稳定平衡的较高形式是无实际意义的。

只当在弹性范围以内, 公式(6.23)才给出临界荷重的正确值。超过弹性极限以后, 发生屈曲的荷重系小于这公式所给的值。要建立可以运用公式(6.23)的悬臂梁的尺寸, 我们来计算悬臂梁的最大弯曲应力。注意及最大弯矩为 $P_{cr}l$ 及截面模量为 $2I_{\xi}/h$, 得到

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}lh}{2I_{\xi}} = 2.006 \frac{h}{lI_{\xi}} \sqrt{EI_{\eta}C},$$

或者, 代入 $I_{\eta} = b^3h/12$, $I_{\xi} = bh^3/12$, 并用 § 6.2 的表达式(g), 取泊松比为 0.3, 得

$$\sigma_{cr} = 2.487 \frac{b^2}{hl} E. \quad (h)$$

由这结果可以看出, 对于钢这样的材料, 只当 b^2/hl 这量为很小时, 才会在弹性范围内发生屈曲。

通常, 只对于 b/h 为小量的狭长矩形横截面的情形, 才必须考虑横向屈曲。从理论上来说[参阅方程(h)], 若 b/h 并不很小但长度 l 很大, 亦可能发生屈曲。对于这情形, 在横向屈曲发生之前, 在腹板平面内将产生大的挠度, 在推导平衡方程时须将这挠度考虑在内。更精细的研究¹⁾ 指明: 对于这情形, 式(6.23)中的常数不是 4.013, 而是一与比值 b/h 有关的变系数。取 b/h 等于 1/10, 1/5 及 1/3, 得到这系数的值各为 4.085, 4.324 及 5.030。

在前面的讨论中曾设荷重 P 作用在横截面的形心。荷重的作用点位于端截面的形心之上或下对于临界荷重的影响, 亦已被研究过²⁾。若 a 表示荷重的作用点在形心正上方的距离(图 6.5), 于是计算临界荷重的近似公式可写作

$$P_{cr} = \frac{4.013 \sqrt{EI_{\eta}C}}{l^2} \left(1 - \frac{a}{l} \sqrt{\frac{EI_{\eta}}{C}} \right). \quad (6.24)$$

可以看出, 荷重作用点在形心之上将使临界值减小。式(6.24)亦可用于荷重

1) 参阅 Dinnik 及 Federhofer, *loc. cit.*

2) 参阅 Timoshenko, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1910, 及 A. Koroboff, *ibid.*, 1911.

作用点在形心之下,只须改变位移 a 的符号。

若有一分布荷重作用于悬臂梁,当荷重趋近于某一临界值时,可能发生上述横向屈曲现象。设强度为 q 的均布荷重沿着悬臂梁的中心线而分布,则得自屈曲悬臂梁的平衡方程的这荷重的临界值为¹⁾

$$(ql)_{cr} = \frac{12.85 \sqrt{EI_\eta C}}{l^2} \quad (6.25)$$

将这结果与式(6.23)相比较,可得结论:这总均布荷重的临界值约三倍于作用于端点的荷重的临界值。

若分布荷重的强度由方程

$$q = q_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right)^n \quad (i)$$

表示,则总荷重的临界值仍可以用与式(6.25)相似的公式来表示²⁾,只须将数字因子 12.85 改为另一因子,其大小与方程(i)中的指数 n 有关。当 $n=1/4$, $1/2$, $3/4$ 及 1 时,这些因子各为 15.82, 19.08, 22.64 及 26.51。

横截面的高度按

$$h = h_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right)^n \quad (j)$$

规律而变化的狭长矩形横截面的悬臂梁的屈曲问题亦已被解出³⁾。对于所有的情形,总荷重的临界值可用公式

$$Q_{cr} = \frac{\gamma_3 \sqrt{EI_\eta C}}{l^2} \quad (k)$$

来表示,式中因子 γ_3 的值与荷重作用的种类及方程(i)中的 n 值有关。 EI_η 与 C 为悬臂梁固定端的弯曲刚度与扭转刚度。表 6.4 内列出了几个 γ_3 的值。

表 6.4 方程(k)中的因子 γ_3 的值

n	0	1/4	1/2	3/4	1
均布荷重	12.85	12.05	11.24	10.43	9.62
集中荷重作用于自由端	4.013	3.614	3.214	2.811	2.405

从这表可以看出,对于高度均匀地减小至自由端为零[在方程(i)中的 $n=1$]的悬臂梁,在自由端的集中荷重的临界值及均布荷重的临界值,分别

1) 这结果系 Prandtl 所得, *loc. cit.*

2) A. N. Dinnik 及 K. Federhofer 曾研究过这类型的几个情形, *loc. cit.*

3) 参阅 K. Federhofer, *Repts. Intern. Congr. Appl. Mech.*, Stockholm, 1930.

近似地为由等截面悬臂梁[在方程(i)中的 $n = 0$]所计算得的 60% 与 75%。

§ 6.4. 简支工字梁的横向屈曲

中点作用一集中荷重 若一简支梁受作用于梁中点截面形心的荷重 P 而在 yz 平面内弯曲(图 6.6), 当荷重到达某一临界值时梁将发生横向屈曲。我们设当变形时两端可以自由地绕平行于 x 及 y 轴的惯性主轴而转动, 但对于 z 轴的转动为某些约束所阻止(图 6.6)。于是横向屈曲将与梁的扭转同时发生。在计算临界荷重值时, 设已发生一微小的横向屈曲, 然后从平衡微分方程及端点条件决定保持梁有这微小屈曲形状所需的最小荷重。

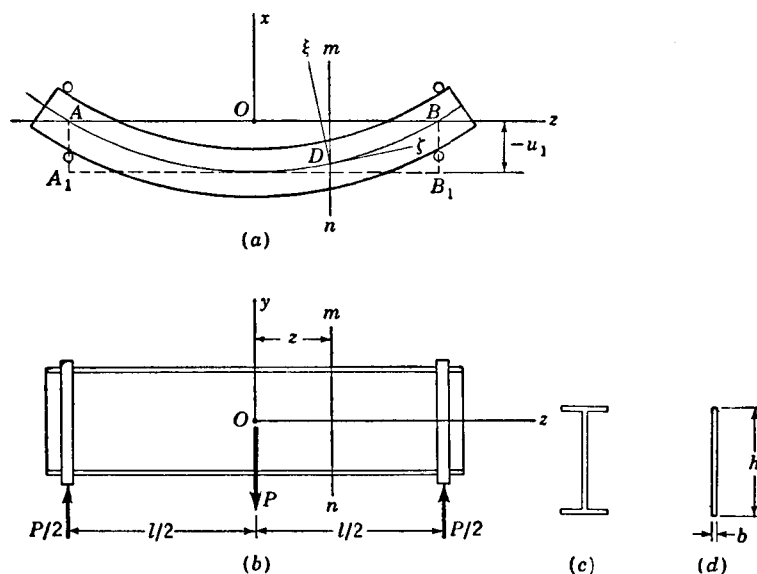


图 6.6

当考虑在任何横截面 mn 的右边部分的梁时, 可以看出, 作用在这部分梁的外力归结为一作用于点 B_1 的铅直力 $P/2$ 。这力对于通过横截面 mn 的形心而与 x , y 及 z 轴相平行的诸轴的力矩为:

$$M_x = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right), \quad M_y = 0, \quad M_z = -\frac{P}{2} (-u_1 - u). \quad (a)$$

在 M_x 的表达式中, u_1 表示梁中点横截面的形心的横向挠度, 而 u 为任一横截面 mn 的横向挠度. 这两个量当在 x 的正方向时均作为正. 用与前一节一样的坐标系 ξ, η 及 ζ , 并运用余弦表 (参阅表 6.1) 将力矩(a)对这些轴投影, 得到

$$\begin{aligned} M_\xi &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right), & M_\eta &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \varphi, \\ M_\zeta &= -\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{du}{dz} + \frac{P}{2} (u_1 - u). \end{aligned} \quad (b)$$

将表达式(b)代入方程(6.1)至(6.3), 即得屈曲梁 (图 6.6) 的平衡微分方程如下:

$$EI_\xi \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) = 0, \quad (6.26)$$

$$EI_\eta \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \varphi = 0, \quad (6.27)$$

$$C \frac{d\varphi}{dz} - C_1 \frac{d^3 \varphi}{dz^3} + \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{du}{dz} - \frac{P}{2} (u_1 - u) = 0. \quad (6.28)$$

由第二与第三个方程消去 u , 得到

$$C_1 \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - C \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{P^2}{4EI_\eta} \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 \varphi = 0. \quad (6.29)$$

用无穷级数法对这方程进行积分, 并用梁的端点条件, 可以证明¹⁾, 临界荷重值仍可表示为式(6.18)的形式. 在表 6.5 的第二行内给出了因子 γ_2 的几个值.

不用积分微分方程来决定梁横向屈曲的临界荷重, 对于许多情形运用应变能法是有利的²⁾. 现将这方法用于图 6.6 这梁. 当梁横向屈曲时, 应变能将增加, 因在腹板平面内的弯曲上又加上了横向弯曲及绕纵向轴的扭转. 同时, 荷重 P 的作用点将下降, 于是

1) 参阅 Timoshenko, *Z. Math. u. Physik*, vol. 58, pp. 337—385, 1910.

2) 运用这方法的几个例子为 Timoshenko 所给出, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1910 (俄文); *Sur la stabilité des systèmes élastiques, Ann. Ponts et Chaussées*, Paris, 1913.

表 6.5 集中荷重作用于簡支工字梁中点的因子 γ_2 的值
[方程(6.18)]

荷重作用于	$l^2 C / C_1$						
	0.4	4	8	16	24	32	48
上翼緣	51.5	20.1	16.9	15.4	15.0	14.9	14.8
形心	86.4	31.9	25.6	21.8	20.3	19.6	18.8
下翼緣	147	50.0	38.2	30.3	27.2	25.4	23.5

荷重作用于	$l^2 C / C_1$						
	64	80	96	160	240	320	400
上翼緣	15.0	15.0	15.1	15.3	15.5	15.6	15.8
形心	18.3	18.1	17.9	17.5	17.4	17.2	17.2
下翼緣	22.4	21.7	21.1	20.0	19.3	19.0	18.7

荷重作了某些功，荷重的临界值現可由这条件决定：这功等于横向弯曲的应变能与扭轉的应变能之和 [参閱方程(2.31)]。在应用这能量法时，可以略去当屈曲发生时梁在其腹板平面內弯曲能的微小改变。这相当于以前所作的假設：在腹板平面內的曲率为无限小，而在推导平衡微分方程时可被略去。若梁在腹板平面內的刚度为无限大，这样所得的结果是精确的。对于在腹板平面內的刚度远大于横向刚度的梁，这假設將給出在实用上足够准确的结果。

在計算弯曲与扭轉应变能时，我們用应变能的一般表达式

$$U = \frac{EI_y}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + \frac{C_1}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)^2 dz, \quad (6.30)$$

式中的三項分別表示由于梁的横向弯曲、扭轉及翘曲的应变能¹⁾。考虑到梁的屈曲形式的对称性(图 6.6)，由于横向屈曲而造成的应变能的增加为

1) 方程(6.30)中的最后一项，可将方程(5.10)的 σ_z 代入应变能的表达式 $U = \int \frac{1}{2} \sigma_z^2 dV$ ，并对梁的体积进行积分而得。

$$\Delta U = EI_{\eta} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + C \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + C_1 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)^2 dz. \quad (6.31)$$

为了决定在横向屈曲时荷重 P 的下降，我們考虑在梁纵向轴上点 D 处的一微段 dz (图 6.6 a)。由于这微段在 $\xi\zeta$ 平面内的弯曲，并以横截面 mn 作为固定，梁的 B 端在 $\xi\zeta$ 平面内划出一无限小的弧

$$\frac{d^2 u}{dz^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz,$$

这无限小弧的铅直分量为

$$\varphi \frac{d^2 u}{dz^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz. \quad (c)$$

由于梁的横向屈曲引起的荷重 P 的作用点的下降，可由 $z = 0$ 至 $z = l/2$ 之间的梁诸小段的铅直分量(c)的总和而得。于是得在横向屈曲时荷重 P 所作的功的表达式：

$$\Delta T = P \int_0^{\frac{l}{2}} \varphi \frac{d^2 u}{dz^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz. \quad (6.32)$$

于是计算临界荷重的方程成为[参阅方程(2.31)]

$$P \int_0^{\frac{l}{2}} \varphi \frac{d^2 u}{dz^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz = EI_{\eta} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + C \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + C_1 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)^2 dz$$

或将方程(6.27)中的 $d^2 u/dz^2$ 代入，

$$\frac{P^2}{4EI_{\eta}} \int_0^{\frac{l}{2}} \varphi^2 \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 dz = C \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + C_1 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)^2 dz. \quad (6.33)$$

要计算荷重的临界值，須取符合梁端点条件的 φ 的一适当的表达式，并代入方程(6.33)。取这表达式包含一个或更多的参数，并调整这些参数，使由方程(6.33)所得的 P 的表达式为最小，即可很准确地计算出 P_{cr} 值。

若约束条件如图 6.6 所示，可取扭转角 φ 为三角级数的形式：

$$\varphi = a_1 \cos \frac{\pi z}{l} + a_2 \cos \frac{3\pi z}{l} + \dots, \quad (d)$$

式中的每一項及其二阶导数在梁的两端为零,如約束条件所要求。取級数(d)的一、二或更多的項,由方程(6.33)計算相应的 P_{cr} 值,并与由积分(6.26)至(6.28)諸方程所得的結果相比較,即可研究能量法的准确性。这样就可以証明:当只取級数(d)的第一項时,由方程(6.33)所得的临界荷重的誤差仅为 0.5%。如取級数(d)的两項,所得的临界荷重的誤差将小于 0.1%。因此,能量法大大地簡化了临界荷重的計算,且給出对实用足够准确的結果。正如在 § 2.9 中所說明的,由能量法所得的临界荷重的近似值,总是比精确值大¹⁾。

在以前的推演中,設荷重 P 作用在梁的中点横截面的形心。显然,将荷重的作用点升高,荷重的临界值将减小;而当荷重的作用点下降时,临界荷重值将增大。这影响的大小可由能量法来得到;我們只須考虑及当梁横向屈曲时由于中間这截面的旋轉而使荷重 P 額外地升降。若 φ_0 为这轉角而 a 为荷重的作用点离截面形心的鉛直距离(在形心之上为正),于是荷重的額外降低为

$$a(1 - \cos \varphi_0) \approx \frac{a\varphi_0^2}{2}.$$

于是,代替方程(6.33),我們得到

$$\begin{aligned} \frac{Pa\varphi_0^2}{2} + \frac{P^2}{4EI_y} \int_0^{\frac{l}{2}} \varphi^2 \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 dz = \\ = C \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + C_1 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2} \right)^2 dz. \end{aligned} \quad (6.34)$$

取 φ 为級数(d)的形式,可由这方程解出 P 的临界值。表 6.5 给出了对于下列两种情形的計算結果:(1) 荷重作用于梁的上翼緣及

1) 在研究梁的横向屈曲时,亦可以成功地用类似于在柱这章內所讨论(参阅 § 2.15)的逐次逼近法,参阅 F. Stüssi, *Schweiz. Bauzsg.*, vol. 105, p. 123, 1935 及 *Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, vol. 3, p. 401, 1935.

(2)荷重作用于下翼缘。可以看出,当 P^2C/C_1 这量很小时,荷重作用点的上升与下降对临界荷重的影响最大。

均布荷重 上述对于一集中力作用于中点的方法,当梁(图 6.6)承担均匀分布的荷重时亦可运用。荷重的临界值可表达为形式

$$(ql)_{cr} = \gamma_4 \frac{\sqrt{EI_y C}}{l^2}, \quad (6.35)$$

式中 γ_4 的数值与比值 P^2C/C_1 和荷重的位置有关。对于荷重沿上翼缘,形心轴及下翼缘这几种情形的 γ_4 值,均列于表 6.6 中。

表 6.6 受均布荷重的简支工字梁的因子 γ_4 值[方程(6.35)]

荷重作用于	P^2C/C_1													
	0.4	4	8	16	24	32	48	64	80	128	200	280	360	400
上翼缘	92.9	36.3	30.4	27.5	26.6	26.1	25.9	25.9	25.8	26.0	26.4	26.5	26.6	26.7
形心	143	53.0	42.6	36.3	33.8	32.6	31.5	30.5	30.1	29.4	29.0	28.8	28.6	28.6
下翼缘	223	77.4	59.6	48.0	43.6	40.5	37.8	36.4	35.1	33.3	32.1	31.3	31.0	30.7

§ 6.5. 简支狭长矩形截面梁的横向屈曲

若有一狭长矩形截面梁,被作用于中点横截面形心的荷重 P 所弯曲(参阅图 6.6 d),我们可用前一节的方程(6.26)至(6.29)来研究横向屈曲,只须略去这些方程中包含翘曲刚度 C_1 的项。于是扭转角 φ 的方程为

$$C \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{P^2}{4EI_y} \left(\frac{l}{2} - z\right)^2 \varphi = 0. \quad (a)$$

引入新变量 $t = \frac{l}{2} - z$, 并用记号

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{P^2}{4EI_y C}}, \quad (b)$$

于是方程(a)成为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \beta_2^2 t^2 \varphi = 0, \quad (c)$$

这方程的通解为

$$\varphi = \sqrt{t} \left[A_1 J_{\frac{3}{4}} \left(\frac{\beta_2}{2} t^2\right) + A_2 J_{-\frac{3}{4}} \left(\frac{\beta_2}{2} t^2\right) \right], \quad (d)$$

式中 $J_{\frac{3}{4}}$ 与 $J_{-\frac{3}{4}}$ 分别为 $\frac{1}{4}$ 与 $-\frac{1}{4}$ 阶的第一类贝塞尔函数。对于两端简支的梁,边条件为

$$\varphi = 0, \text{ 当 } t = 0; \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \text{ 当 } t = \frac{l}{2}.$$

由第一个条件得 $A_2 = 0$, 并注意及

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_1 \beta_2 t^{\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\beta_2}{2} t^2\right),$$

由第二个条件得

$$J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\beta_2 l^2}{8}\right) = 0.$$

由 $-\frac{3}{4}$ 阶贝塞尔函数的零点表¹⁾, 得

$$\frac{\beta_2 l^2}{8} = 1.0585$$

或[参阅记号(b)]

$$P_{cr} = \frac{16.94 \sqrt{EI_n C}}{l^2}. \quad (6.36)$$

荷重的临界值亦可由能量法得到,如前一节中所述。曾指明²⁾, 取 § 6.4 的级数(d)一项作为一级近似,误差约为 1.5%。若取级数的两项,则误差小于 0.1%。

若荷重作用于梁中点横截面形心之上距离为 a , 我们可用方程(6.34)而令 C_1 为零。如距离 a 很小,则方程左边的第一项与其他项相比为小量,而可足够准确地以(6.36)的 P 值代入此项。于是,用 § 6.4 的级数(d)的一项,得以下这近似公式:

$$P_{cr} = \frac{16.94 \sqrt{EI_n C}}{l^2} \left(1 - \frac{1.74a}{l} \sqrt{\frac{EI_n}{C}}\right). \quad (6.37)$$

当荷重 P 不作用于跨度的中点而离开一个支座的距离为 c , 则临界荷重可由公式

$$P_{cr} = \gamma_5 \frac{\sqrt{EI_n C}}{l^2} \quad (6.38)$$

1) 这样的表给予“Tables of Bessel Functions of Fractional Order”, vol. 1, p. 384, Columbia University Press, New York, 1948.

2) 参阅 Timoshenko, *loc. cit.*

来表示, 式中的数值因子 γ_5 与比值 c/l 有关. 在表 6.7 内列出了 γ_5 的值¹⁾. 可以看出, 当荷重的作用点离跨度中央较远时, 荷重的临界值增大. 但只要荷重在跨度的中部三分之一范围内时, 这影响并不大.

表 6.7 式(6.38)中因子 γ_5 的值

$\frac{c}{l}$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
γ_5	112	56.0	37.9	29.1	24.1	21.0	19.0	17.8	17.2	16.94

若简支梁承载沿形心线均匀分布的荷重, 则总荷重的临界值由下述公式给出²⁾

$$(ql)_{cr} = \frac{28.3 \sqrt{EI_{\eta} C}}{l^2}. \quad (6.39)$$

§ 6.6. 横向屈曲的其他情形

具有中间横向支承的梁 要增大梁抵抗横向屈曲的稳定性, 可用各种横向约束. 这些约束对于临界应力大小的影响, 可用与前几节一样的方法来研究. 现讨论由于附加约束梁的中点截面不能绕梁的中心线而旋转这情形. 将两个平行的梁在中点联结起来(如图 6.7a 所示), 即得到这种情形. 由于这联结, 横向屈曲梁的挠度曲线必有一反曲点, 如图 6.7b 梁的顶视图所示. 设这梁在 yz 平面内承受纯弯曲, 且其横截面为狭长矩形, 则由方程(6.12)可得到弯矩的临界值. 要将横向约束考虑在内, 在讨论最后得出的超越方程时, 必须取根 $kl = 2\pi$, 以代替在以前当梁中点无横向约束时所取的最小根 $kl =$

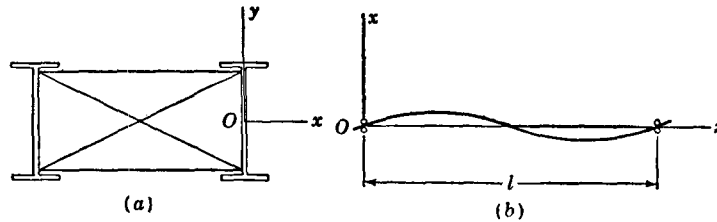


图 6.7

1) 参阅 Koroboff, *loc. cit.*, 及 A. N. Dinnik, *Bull. Don. Polytech. Inst., Novotcherkassk*, vol. 2, 1913.

2) 这解系 Prandtl 所得, *loc. cit.*

π . 这样,我们得到

$$(M_0)_{cr} = \frac{2\pi\sqrt{EI\eta C}}{l}. \quad (a)$$

因此,由于横向约束,对于这情形弯矩的临界值大了一倍. 以类似的方法,可以对于工字截面及其他类型的荷重作用情形,处理中央有约束的梁的横向屈曲问题.

若一荷重 P 作用于工字梁中点横截面的形心,如图 6.7 所示,则必须用方程(6.18)来计算荷重的临界值. 在这方程中的数值因子 r_2 的值大于无横向约束的梁这情形; r_2 的值列于表 6.8 内.

表 6.8 中点有横向支承并有集中力作用的简支工字梁的因子 r_2 的值[方程(6.18)]

$\frac{P^2 C}{C_1}$	0.4	4	8	16	32	96	128	200	400
r_2	466	154	114	86.4	69.2	54.5	52.4	49.8	47.4

若梁承受均布荷重,则总荷重的临界值由方程(6.35)给出,对于荷重分别沿梁的上翼缘、形心轴及下翼缘均匀分布的情形,因子 r_4 的值列于表 6.9 内.

表 6.9 中点有横向支承的受均布荷重简支工字梁的因子 r_4 的值[方程(6.35)]

荷重作用于	$P^2 C / C_1$							
	0.4	4	8	16	64	96	128	200
上翼缘	587	194	145	112	91.5	73.9	71.6	69.0
形心	673	221	164	126	101	79.5	76.4	72.8
下翼缘	774	251	185	142	112	85.7	81.7	76.9

两端有横向约束的梁 现研究在屈曲时梁的两端不能绕铅直的 y 轴转动的情形,此时挠度曲线在横向有两个反曲点(参阅图 6.8). 这里设并无约束来阻止两端绕水平的 x 轴转动;因此,当考虑在 yz 平面内弯曲时,梁是简支的.

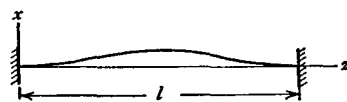


图 6.8

对于荷重 P 作用于工字梁中点横截面形心这情形, 荷重的临界值系由方程(6.18)给出。表 6.10 给出了因子 γ_2 的值。将这表内的数值与表 6.5 的相比较可知, 端部的横向约束对于短梁的影响比长梁大。

表 6.10 两端有横向约束(图 6.8)中点有集中力的工字梁的因子 γ_2 的值[方程(6.18)]

$\frac{l^2 C}{C_1}$	0.4	4	8	16	24	32	64	128	200	320
γ_2	268	88.8	65.5	50.2	43.6	40.2	34.1	30.7	29.4	28.4

表 6.11 中给出了沿形心轴受均布荷重而横向约束如图 6.8 所示的工字梁的数据。

对于狭长矩形截面梁, 并且荷重 P 作用于中点横截面的形心, 则荷重的临界值为¹⁾

$$P_{cr} = \frac{26.6\sqrt{EI_y C}}{l^2}. \quad (6.40)$$

表 6.11 两端有横向约束的受均布荷重的工字梁的因子 γ_4 的值[方程(6.35)]

$\frac{l^2 C}{C_1}$	0.4	4	8	16	32	96	128	200	400
γ_4	488	161	119	91.3	73.0	58.0	55.8	53.5	51.2

若有力偶 M_0 作用于梁两端并位于 yz 平面内, 则在离两端 $l/4$ 处将有反曲点。于是长 $l/2$ 的梁的中间部分, 其情况与图 6.4 所示的梁相同。对于这情形, 以 $l/2$ 代替式(6.13)中的 l , 即得力偶 M_0 的临界值:

$$(M_0)_{cr} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{EI_y C}. \quad (6.41)$$

在以上的每一讨论中, 均设梁内的最大应力小于材料的比例极限; 否则须研究非弹性横向屈曲, 如下节所述。

§ 6.7. 工字梁的非弹性横向屈曲

若工字梁的应力超过了材料的比例极限, 临界荷重可用随应

1) 参阅 *ibid.*

力而变化的切线模量 E_t 来计算, 而不用常数弹性模量 E 。这方法与以前用以研究超过弹性极限后的柱的屈曲的方法相似(参阅第三章)。前几节中已证明, 在弹性范围以内, 横向屈曲的临界荷重与横向的弯曲刚度 EI_y 及扭转刚度 C 有关; EI_y 与杨氏模量 E 成比例, C 与剪切模量 G 成比例。超过了比例极限, 横向弯曲刚度按 E_t/E 的比例而减小。在以下的讨论中, 我们设扭转刚度亦按这一比例而减小¹⁾, 于是比值 I^2C/C_1 保持不变。

我们首先研究纯弯曲。由于对于这情形, 翼缘内的应力沿跨度为常量, 因此对于这弯曲到超过比例极限的梁的所有的截面, 切线模量是相同的, 并且可用与在弹性范围内相同的平衡微分方程, 只须将梁的弯曲与扭转刚度以由切线模量所得的相应值来代替。于是弯矩的临界值由方程

$$(M_0)_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{E_t I_y C_1 \left(1 + \frac{C_1}{C} \frac{\pi^2}{l^2}\right)} \quad (6.42)$$

给出, 这方程与方程(6.9)的形式相同, 只是 E_t 代替了 E , 并且引入了记号

$$C_1 = C \frac{E_t}{E}. \quad (a)$$

因超过比例极限时比值 $C_1/C l^2$ 保持不变, 由方程(6.42)可得结论: 弯矩的临界值按照 E_t/E 比值而小于根据完全弹性这假设所计算得的弯矩。如果对于每一应力值这比值为已知, 则用试算法即可很容易地计算出对于每一应力值的临界弯矩。我们设某一 $(M_0)_{cr}$ 值, 而计算最大弯曲应力值, 并取相应的切线模量 E_t 的值。有了这模量, 由方程(6.42)可得到弯矩的临界值。若由这方法所计算得的值与所假设的相同, 这就是 $(M_0)_{cr}$ 的真值。否则须重设 $(M_0)_{cr}$ 并重复计算。这样的计算必须多次重复, 直到所设的 $(M_0)_{cr}$

1) 这假设可认为是倾向于安全的。横向弯曲刚度主要是由于翼缘的刚度; 因此超过比例极限后它将按比值 E_t/E 而减小。扭转刚度与翼缘及腹板的刚度都有关, 并且由于部分腹板总保持为弹性, 并保持其原有刚度, 可以预料到, 扭转刚度的减小将小于 E_t/E 这比例。

值与自方程(6.42)所计算得值满意地符合为止。

对于为集中的或均布的荷重所弯曲的梁，在翼缘内的弯矩和应力系沿梁的跨度而变化。因此，超过了比例极限，切线模量 E_t 亦沿跨度而变化，于是横向屈曲的平衡微分方程将与变截面梁的同类型。为了简化这问题以得到临界应力的近似值，我们取 E_t 为一常数值，即取相应于最大弯矩的值，并将它代入屈曲梁的平衡微分方程。这样将得到与以前形式相同的临界荷重 [参阅方程 (6.18) 与 (6.35)]，只需用弯曲刚度 $E_t I_y$ 与扭转刚度 C_t 。显然，以这样的方法计算临界应力，永远偏于安全，因为我们将横向和扭转刚度沿梁跨度按常数比例 E_t/E 而减小，但这缩减量实际上只存在于最大弯矩的截面内。在其他的应力超过比例极限的截面内，缩减量将小些；而在应力小于比例极限的部分将无缩减。用了以上所作的假设，可用试算法得到荷重的临界值，如对于纯弯曲所述的一样。

在实际应用中，用临界应力作计算而不用临界荷重更为合宜。设以横截面的截面模量除最大弯矩可相当准确地得到超过弹性极限后工字梁的翼缘内的应力。这假设将永远偏于安全这方面，因为超过了比例极限后，翼缘内的实际应力及梁的横向和扭转刚度的实际缩减量均将小于所假设的。

现用一例说明超过比例极限后 σ_{cr} 的计算。取一由三个狭长矩形所组成的工字梁。设横截面的尺寸比例为

$$\frac{t_f}{t_w} = 2, \quad \frac{b}{t_f} = 10, \quad \frac{h}{b} = 3, \quad (b)$$

式中

t_f = 翼缘的厚度，

t_w = 腹板的厚度，

b = 翼缘的宽度，

h = 梁的高度。

扭转与翘曲刚度近似地为(参阅附录的表 A-3)

$$C = \frac{C}{3} (2bt_f^3 + ht_w^3), \quad C_1 = \frac{Et_f h^2 b^2}{24}.$$

将尺寸的比值(b)代入这些公式，并设 $G/E = 0.4$ ，得

$$\frac{l^2 C}{C_1} = 0.076 \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

表 6.12 受均布荷重作用的工字梁的数据

($t_f/t_w = 2, b/t_f = 10, h/b = 3, E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $G = 0.4 E$)

$\frac{l}{h}$	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\frac{l^2 C}{C_1}$	1.22	2.74	4.86	7.60	10.9	14.9	19.5	24.6	30.4
σ_{cr} (公斤/厘米 ²)	12800	6052	3690	2573	1958	1562	1301	1124	983

表 6.12 给出了对于几个比 l/h 的值的这量的数值。如果设梁承担沿形心轴线均布的荷重, 当屈曲发生于弹性极限以内时, 我们可自方程(6.35)得荷重的临界值。运用这方程, 可将临界应力的表达式写成形式

$$\sigma_{cr} = (ql)_{cr} \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{h}{2I_\xi} = \gamma_4 \frac{h \sqrt{EI_\eta C}}{16I_\xi} \quad (c)$$

式中的 γ_4 可得自表 6.6。注意及横截面的主惯性矩为

$$I_\eta = \frac{1}{6} b^3 t_f, \quad I_\xi = \frac{1}{12} h^3 t_w + \frac{t_f}{2} (b - t_w)(h - t_f)^2,$$

并运用尺寸比例(b), $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米²及 $G = 0.4 E$, 则表达式(c)成为

$$\sigma_{cr} = 595 \gamma_4 \frac{h}{l} \quad (d)$$

由方程(d)所得的 σ_{cr} 值列于表 6.12 内, 并在图 6.9 中绘成曲线 I。

与以上所述的曲线 I 类似, 在图 6.9 中的曲线 II 与 III 系各按 $h/b = 4$ 及 5 而计算的。这些曲线表明, 若 h/b 为常量, 则工字梁的临界应力随比值 l/h 的增大而减小; 而若 l/h 为常量, 则临界应力还随 h/b 的增大而减小。比值 l/b 为常量的点在图中由虚线联结, 并且表明, 对于常值 l/b , 临界应力随 l/h 的减小而减小。

若将表 6.12 用于比例极限为 2100 公斤/厘米²的结构钢, 可以看出, 对于 $l/h \leq 10$ 计算得的临界应力值大于比例极限。要将材料的塑性变形考虑在内, 必须给出关于切线模量 E_t 的资料。对于这个数值例子, 设当压应力为 2650 及 3180 公斤/厘米²时 E_t/E 的比值各为 36/49 及 4/9¹⁾。要决定临界应

1) 比值 E_t/E 的真正值只可由应力-应变曲线获得, 如 § 3.3 中所说明的。

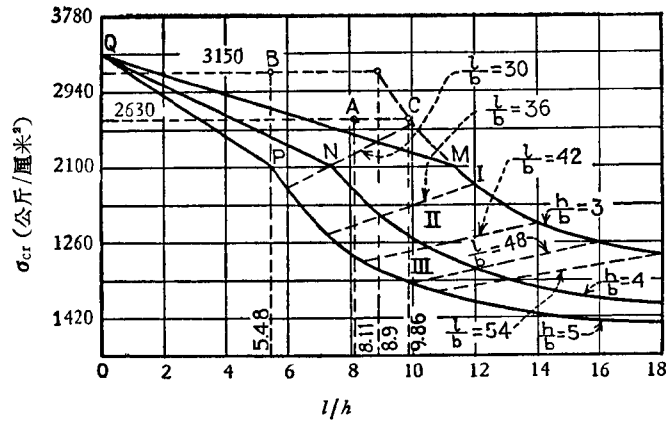


图 6.9

力为 2650 公斤/厘米²时比值 l/h 应该是何值, 我们注意曲线 I (图 6.9) 的点 C 系相应于这应力, 于是由图得 $l/h = 9.86$ 。但已经知道, 超出弹性极限后曲线 I 给出的 σ_{cr} 值偏大。对 $l/h = 9.86$ 的真正的 σ_{cr} 值将小于 2650 公斤/厘米², 而与 $\sigma_{cr} = 2650$ 公斤/厘米² 相应的比值 l/h 将小于 9.86; 它的值现将由试算法得到。例如设真正的值为 $l/h = 8$, 于是由表 6.12 取弹性屈曲的临界应力并乘以比值 E_t/E , 得临界应力为

$$\sigma_{cr} = 3690 \left(\frac{36}{49} \right) = 2711 \text{ 公斤/厘米}^2。$$

这应力稍大于所设的应力 2650 公斤/厘米²。因此, 比值 l/h 的真值大于所设的值 8。作为第二次试算, 设 $l/h = 8.2$, 并由表 6.12 用内插法, 得

$$\sigma_{cr} = 3535 \left(\frac{36}{49} \right) = 2597 \text{ 公斤/厘米}^2。$$

这应力略小于所设的应力 2650 公斤/厘米²。因此, 比值 l/h 的真值小于 8.2。由这两次试算可得结论: 比值 l/h 的真值系在 8 与 8.2 之间。用线性内插法, 得到 $l/h = 8.11$ 。这结果由图 6.9 中的点 A 表示。点 A 远在以完全弹性假设为基础的临界应力的曲线 I 之下。

作为第二个例子, 我们设临界应力等于 3181 公斤/厘米² 而对于上述梁作计算; 对于这情形 $E_t/E = 4/9$ 。由曲线 I (图 6.9), 对于这情形得到 $l/h = 8.9$ 。由于塑性变形, 这比值的真值要小得多。设 $l/h = 5.6$, 并与以前一样地进行计算, 得 $\sigma_{cr} = 3047$ 公斤/厘米², 这较所假设的值为小; 因此比

值 l/h 的真值小于 5.6。作为第二次试算，取 $l/h = 5.4$ 我们得到临界应力的值为 3260 公斤/厘米²。由这两次试算，用内插法得到 $l/h = 5.48$ 。这结果在图 6.9 中由点 B 表示。

对于超过弹性极限的其他的所设的临界应力值，可以同样地得到 l/h 值。因此，如果对于任何应力 σ_{cr} 值已知 E_t/E 的比值，即可绘出表示 σ_{cr} 与比 l/h 之间的关系曲线。

在实际应用中，为了简化超过比例极限的临界应力的计算，可以用一直线代替表示 σ_{cr} 与比 l/h 间的关系曲线。于是，亦可将与用于柱的直线公式(参阅 § 4.3)类似的直线公式用于梁的横向屈曲。设结构钢的弹性极限为 2100 公斤/厘米²，我们发现：图 6.9 中的曲线 I, II, III 只在 M, N, P 诸点以下才可以应用。对于较高的应力，应该用直线 MQ, NQ 与 PQ。这些直线是由取最高应力(当 $\frac{l}{h} = 0$) 等于 3393 公斤/厘米² 而得到的；这是柱的直线公式中所用的值[参阅 § 4.3 的方程(d)]。

对于任何截面的工字梁，用了表 6.5 和 6.6 即可很容易地作出与图 6.9 相类似的曲线。于是对于任何比值 l/h ，决定临界应力的问题均可解决。

代替图 6.9 中的直线 MQ, NQ 与 PQ，可绘出图 6.10 所示形式的图线。要得到这样的图形，假设为完全弹性，我们先作出临界应力的曲线 NS。这曲线可以用到相应于材料的比例极限的点 N。然后我们绘一相应于材料的屈服点的直线 QM，它给出对于短梁的临界应力。对于中等长度的梁，我们用斜线 MN 来计算临界应力。这斜线联结了上述的点 N 及在屈服点水平线上

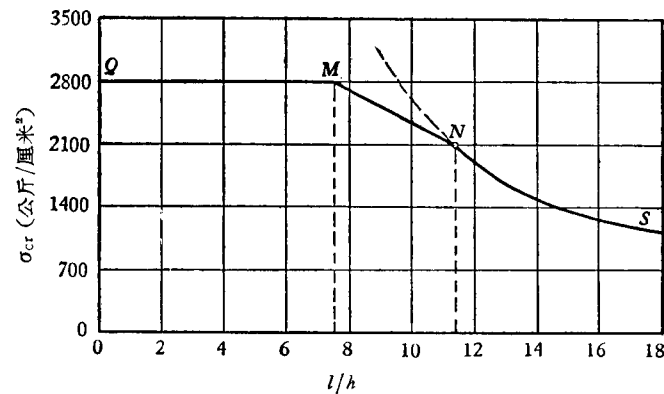


图 6.10

任选的一点 M 。在图 6.10 中，这点取得使梁的相应跨度等于临界应力为材料的比例极限时的跨度的 0.6。有了这样的图形并用一变安全系数，如对于柱的情形，对给定横截面的任何跨度的梁，即可很容易地得到安全应力¹⁾。

1) Stüssi 曾以所设的工字梁的初始横向弯曲为基础作了许可荷重的计算, *loc. cit.*

第七章 圓环、曲杆与拱的屈曲

§ 7.1. 圓形細曲杆的弯曲

我們研究曲杆 AB (图 7.1) 在它的初曲率平面內微弯曲, 并設这平面为杆的对称面. 以 R 表示杆的中心綫的初曲率半径, 而以 ρ 表示在变形后中心綫上任一点 (該点的位置由角度 θ 所决定) 的曲率半径, 于是对于細杆, 曲率的改变与弯矩 M 的大小的关系由方程

$$EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) = -M \quad (a)$$

来表示, 式中 EI 为杆在它的初曲率平面內的弯曲刚度. 方程右边的負号是随弯矩的符号而来的, 使杆的初曲率減小的弯矩取为正.

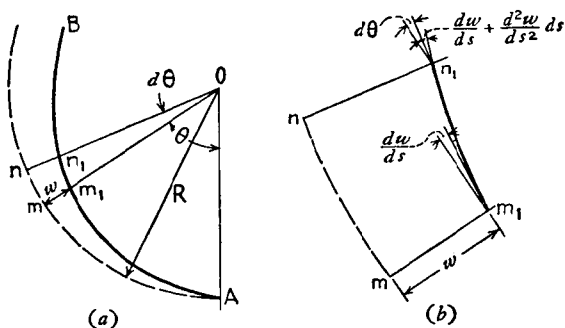


图 7.1

弯曲时杆的曲率的改变, 可由考虑夹角为 $d\theta$ 的两半径之間的小环的微段 mn 的变形而得到. 这微段的原长及其初曲率为

$$ds = R d\theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}. \quad (b)$$

以 w 表示弯曲时点 m 的径向位移, 并以向圆心的位移为正。设 w 为小量。点 m 在切向亦将有位移, 但我们将它略去不计, 而设小段 mn 在变形后的曲率与在原来半径 mO 及 nO 之间的小段 m_1n_1 的曲率相同。 m_1n_1 的曲率可由方程

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta + \Delta d\theta}{ds + \Delta ds} \quad (c)$$

表示, 式中的 $d\theta + \Delta d\theta$ 表示变形杆法向截面 m_1 及 n_1 间所夹的角, 而 $ds + \Delta ds$ 为小段 m_1n_1 的长度。在计算小角 $\Delta d\theta$ 时, 应注意在 m_1 的中心线的切线与半径 mO 的垂线间的夹角为 dw/ds (图 7.1 b)。在横截面 n_1 的相应的角为

$$\frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} ds,$$

因此

$$\Delta d\theta = \frac{d^2w}{ds^2} ds. \quad (d)$$

在比较微段 m_1n_1 及 mn 的长度时, 略去 dw/ds 这小角度而取 m_1n_1 的长度等于 $(R - w)d\theta$ 。于是

$$\Delta ds = -w d\theta = -\frac{w}{R} ds. \quad (e)$$

将式(d)与(e)代入方程(c), 得到

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta + (d^2w/ds^2) ds}{ds(1 - w/R)},$$

或略去高级微量, 得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{w}{R} \right) + \frac{d^2w}{ds^2}.$$

将这代入方程(a), 得

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} = -\frac{M}{EI} \quad (f)$$

或

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{MR^2}{EI}. \quad (7.1)$$

这是中心綫为圓形的細杆的挠度曲綫的微分方程¹⁾。若 R 为无限大, 这方程与直杆的方程相同。

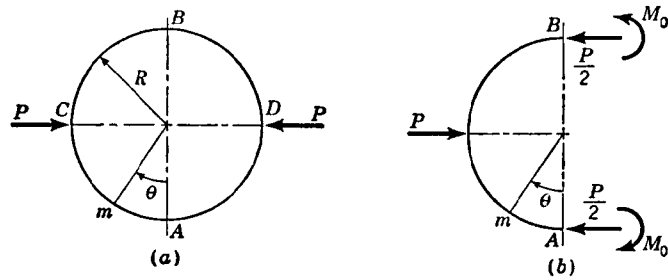


图 7.2

作为方程(7.1)的应用的一例, 研究为对径压缩力 P 所压的圓环(图7.2a)。环的半径为 R 。以 M_0 表示在 A 与 B 处的弯矩, 于是在任何截面 m 的弯矩为(参閱图7.2b)

$$M = M_0 + \frac{PR}{2}(1 - \cos\theta), \quad (g)$$

而方程(7.1)成为

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{M_0R^2}{EI} - \frac{PR^3}{2EI}(1 - \cos\theta). \quad (h)$$

方程(h)的通解为

$$w = A_1 \sin\theta + A_2 \cos\theta - \frac{M_0R^2}{EI} - \frac{PR^3}{2EI} + \frac{PR^3}{4EI}\theta \sin\theta. \quad (i)$$

积分常数可由对称性条件决定:

$$\frac{dw}{d\theta} = 0, \text{ 当 } \theta = 0 \text{ 与 } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

由这些方程, 得

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{PR^3}{4EI}. \quad (j)$$

1) 这方程为 J. Boussinesq 所建立, *Compt. rend.*, vol. 97, p. 843, 1883. 并参閱 H. Lamb, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 19, p. 365, 1888, 及 R. Mayer, *Z. Math. u. Physik*, vol. 61, p. 246, 1913.

弯矩 M_0 可由卡斯提也努 (Castigliano) 定理得到¹⁾。细环的应变能 U 可得自与直杆相同的公式; 于是对于图 7.2 这环, 得

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{M^2 R d\theta}{2EI} = \frac{2R}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M^2 d\theta.$$

由卡斯提也努定理, 应变能对弯矩 M_0 的偏导数, 等于环的横截面 A 的转角(图 7.2b)。对于这一情形转角为零, 于是方程成为

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{2R}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2M \frac{\partial M}{\partial M_0} d\theta = 0,$$

或

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{\partial M}{\partial M_0} d\theta = 0.$$

将 M 的表达式(g)代入并积分, 得到

$$M_0 = \frac{PR}{2} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right). \quad (k)$$

将式(j)与(k)代入(i), 得径向位移的表达式为

$$w = \frac{PR^3}{4EI} \left(\cos \theta + \theta \sin \theta - \frac{4}{\pi} \right).$$

由这表达式可得任意点的径向位移。例如, 当 $\theta = 0$ 及 $\theta = \pi/2$, 得

$$(w)_{\theta=0} = -\frac{PR^3}{4EI} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right), \quad (w)_{\theta=\pi/2} = \frac{PR^3}{4EI} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right);$$

直径 AB 的伸长为

$$\frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right), \quad (7.2)$$

而直径 CD 的缩短为

$$\frac{PR^3}{2EI} \left(\pi - \frac{8}{\pi} \right). \quad (7.3)$$

对于长圆管的弯曲, 如果荷重沿管轴綫不变, 则亦可得与方程 (7.1) 相似的一方程。对于这情形, 我們研究由两个垂直于管轴并

1) 参阅 Timoshenko, Strength of Materials, 3d ed., part I, pp. 328—330, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1955.

相距单位长的两横截面自管截出的一圆环。因这圆环为长管的一部分，在弯曲时环的矩形横截面无变形，这不同于单独的圆环。因此，必须以 $E/(1-\nu^2)$ 代替方程(7.1)中的 E ，式中的 ν 为泊松比。以 h 表示管的厚度，环的横截面积的惯性矩为 $h^3/12$ ，于是对于这样的环挠曲的微分方程为

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{12(1-\nu^2)MR^2}{Eh^3}. \quad (7.4)$$

在研究长圆管的弯曲时，必须用这方程而不用方程(7.1)。对此情形 M 表示管每单位长度的弯矩。

§ 7.2. 应用三角级数分析薄圆环的弯曲

在讨论圆环在其平面内的小挠度时，可将中心线上任一点 m 的位移分解为两个分量：径向位移 w 及切向位移 v 。径向位移以向圆心为正，切向位移以 θ 增加的方向为正(图 7.3)。对于最一般的情形，径向位移 w 可由三角级数的形式来表示：

$$w = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots \quad (a)$$

切向位移的形式将取得使环的中心线没有伸长。这样，实际的环为一中心线不能伸长的假想的环所代替。环及壳的不可伸长的变形的研究系雷莱¹⁾(Lord Rayleigh)所创。他注意到：对于薄环的弯曲，由于环的中心线的伸长而产生的位移与由于弯曲所产生的位移相比是很小的，并且通常可以略去的。

在弯曲时，环的中心线的单位伸长一般地由两部分所组成：(1) 由于切向位移 v 的部分等于 dv/ds ，(2) 由于径向位移的部分等于 $-w/R$ 。因此得到

$$\epsilon = \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\theta} - w \right).$$

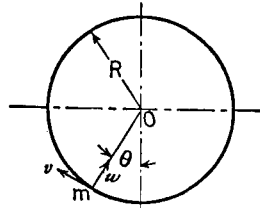


图 7.3

1) Lord Rayleigh, Theory of Sound, 2d ed., chap. XA, 1894. 并参阅 Timoshenko, Bull. Polytech. Inst., Kiev, 1910 (俄文)。

环的无伸长变形这条件为

$$\frac{dv}{d\theta} - w = 0, \quad (b)$$

用方程(a)由上式得到

$$v = a_1 \sin \theta + \frac{1}{2} a_2 \sin 2\theta + \cdots - b_1 \cos \theta - \frac{1}{2} b_2 \cos 2\theta - \cdots, \quad (c)$$

因此, 环的弯曲问题归结为计算表达式 (a) 及 (c) 中的系数 a_1, a_2, \cdots 及 b_1, b_2, \cdots . 为了计算这些系数, 将用对于直梁所用的相同的方法(参阅 § 1.11). 先求出环在弯曲时的应变能的表达式, 再用虚位移原理来决定上述级数的系数.

薄环弯曲的应变能可应用与直杆相同的公式而得到; 于是运用方程(7.1),

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{M^2 R d\theta}{2EI} = \frac{EI}{2R^3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right)^2 d\theta.$$

将 w 的级数(a)代入并积分, 得到

$$U = \frac{\pi EI}{2R^3} \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (a_n^2 + b_n^2). \quad (7.5)$$

这级数并不包含系数 a_1 及 b_1 的项, 因为相应的位移

$$\begin{aligned} w &= a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta, \\ v &= a_1 \sin \theta - b_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (d)$$

表示环在其平面内象刚体一样的位移. 容易看出, 如果 a_1 及 b_1 为这刚体位移的铅直及水平分量, 表达式(d)表示任一点 m (图 7.3) 的径向及切向位移.

有了应变能的表达式 (7.5), 对于每一特定情形均可容易地计算系数 $a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$. 现以图 7.2 所示这情形为例. 由对称性可知, 表达式(a)中的系数 b_1, b_2, \cdots 为零. 在计算任何系数 a_n 时, 我们设这系数增加了 δa_n . 由方程 (a), 环的相应的挠度为 $\delta a_n \cos n\theta$, 而对于这位移, 力 P 作了功

$$P \delta a_n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{3n\pi}{2} \right).$$

当 n 等于奇数时, 这功等于零; 当 n 为偶数时, 得到

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \cos \frac{3n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}},$$

于是以上这功的表达式为

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2P \delta a_n. \quad (e)$$

应用虚功原理, 决定系数 a_n (n 为偶数) 的方程为

$$\frac{\partial U}{\partial a_n} \delta a_n = (-1)^{\frac{n}{2}} 2P \delta a_n.$$

将 U 的表达式(7.5)代入, 得到

$$a_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} 2PR^3}{\pi(n^2 - 1)^2 EI}. \quad (f)$$

同样可以证明, 所有 n 为奇数的系数均等于零¹⁾. 于是表示环中心线的挠度的级数(a)与(c)只包含系数 a_n ($n = 2, 4, 6, \dots$) 的项. 从(a)得径向位移为

$$w = \frac{2PR^3}{\pi EI} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cos n\theta}{(n^2 - 1)^2}. \quad (7.6)$$

两力 P 所作用的点 C 与点 D 将互相接近一距离

$$\delta = (w)_{\theta=\pi/2} + (w)_{\theta=3\pi/2} = \frac{4PR^3}{\pi EI} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2}. \quad (7.7)$$

可以证明, 这级数所给的结果与以前所得的公式(7.3)相同.

作为第二个例子, 我们来研究圆环为静水压力所引起的弯曲(图 7.4). 环的中心被力 P 保持在不变的深度 d . 设环在垂直于图平面方向的宽度为一单位长, 并以 γ 表示流体每单位体积的重量, 则在任一点 m 的静水压力的强度为

$$\gamma(d + R \cos \theta).$$

1) 这结论得自环对于水平直径的对称性条件.

由靜力平衡方程，力 P 等于 $\pi R^2 \gamma$ 。再运用虚位移原理，并注意靜水压力只对于径向位移 w 才作功，于是計算級数 (a) 及 (c) 中的系数 a_n 的方程为

$$\frac{\partial U}{\partial a_n} \delta a_n = \delta a_n \left[P \cos n\pi + R\gamma \int_0^{2\pi} (d + R \cos \theta) \cos n\theta d\theta \right] = \\ = \delta a_n P (-1)^n, \quad \text{对 } n > 1.$$

对于 $n = 1$ (这相应于环的刚体位移)，方程的右边等于零。将 U 的表达式(7.5)代入，得到

$$a_n = \frac{(-1)^n P R^3}{\pi(n^2 - 1)^2 EI}, \quad \text{对 } n > 1; \quad a_1 = 0.$$

由于对称性，級数(a)与(c)中所有的系数 b_n 均为零。因此，得到

$$w = \frac{P R^3}{\pi EI} \sum_{n=2,3,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\theta}{(n^2 - 1)^2}, \\ v = \frac{P R^3}{\pi EI} \sum_{n=2,3,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\theta}{n(n^2 - 1)^2}.$$

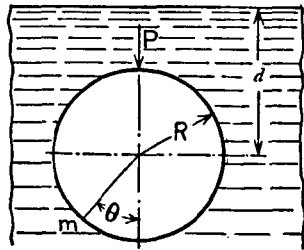


图 7.4

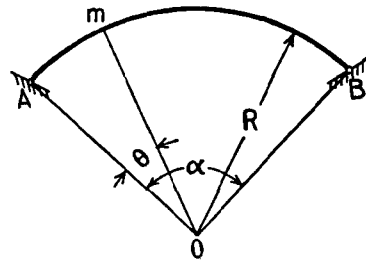


图 7.5

由这两方程可計算对于任何 θ 值的位移。在这分析中，环中的压力对于弯曲的影响完全被略去，这当此压力較使环屈曲的临界压力为小量时才是合理的。这問題将在下一节作进一步的討論。

若有一中心綫为圓形而两端鉸接的曲杆(图 7.5)而不是整个的圓环，則前面所討論的方法仍可应用。以 α 表示拱的中心角，径向位移 w 可取为級数的形式：

$$w = a_1 \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} + a_2 \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha} + a_3 \sin \frac{3\pi\theta}{\alpha} + \dots \quad (g)$$

可以看出,这級数及其二阶导数在杆两端均等于零,符合于铰接点位移与弯矩为零的条件。由方程(b),切向位移 v 为

$$v = -\frac{\alpha}{\pi} \left(a_1 \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} + \frac{1}{2} a_2 \cos \frac{2\pi\theta}{\alpha} + \frac{1}{3} a_3 \frac{3\pi\theta}{\alpha} + \dots \right). \quad (h)$$

这位移一般地在两端不等于零。

在級数(g)及(h)中只取第偶次項,得到

$$(v)_{\theta=0} = (v)_{\theta=\alpha} = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_4 + \dots \right).$$

对于这情形,在杆两端的切向位移相等。我們可以使这些位移等于零,只須对級数所表示的变形迭加上杆以 O 为中心的一刚体轉动,其轉角为

$$\frac{\alpha}{\pi R} \left(\frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_4 + \dots \right).$$

于是,满足所有端条件的两端铰接圓拱的无伸长变形为

$$w = a_2 \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha} + a_4 \sin \frac{4\pi\theta}{\alpha} + \dots,$$

$$v = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2} a_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\alpha} \right) + \frac{1}{4} a_4 \left(1 - \cos \frac{4\pi\theta}{\alpha} \right) + \dots \right]. \quad (i)$$

这些級数中的每一項相应于在杆中点有一反曲点的无伸长的挠度曲綫。以后我們將用这挠度曲綫討論受压曲杆的稳定性(参閱 § 7.6)。

若在級数(g)中只取系数为 a_1, a_3, \dots 的第奇次項,挠度曲綫将对杆的中点对称。从級数(h)可看出,相应于以上每一項的位移 v 在两端并不等于零。因此我們只能取在系数 a_1, a_3, a_5, \dots 之間有一定关系的一級数,以符合铰接端条件。

由无伸长变形的一般要求[方程(b)]可知,只当

$$\int_0^{\alpha} w d\theta = 0 \quad (j)$$

时,在两端的切向位移 v 才等于零。由这积分可知,若挠度曲綫对

屈曲杆的中点对称, 則諸半波不可能相等。取三个半波, 即得最簡單的这种曲綫。于是由 (j), 中間半波的面积必比其余的每一个都大; 若将 w 表示为 θ 的函数, 即得图 7.6 中的曲綫。这曲綫的中間这半波的面积等于其他两半波的面积之和。



图 7.6

§ 7.3. 均匀压力对圆环弯曲的影响

在前几节中, 我們略去了环内的压力或拉力对环弯曲的影响。例如, 在討論图 7.4 所示的問題时, 完全略去了由于靜水压力而产生的环的压缩, 虽然对于薄环这压缩可能是很重要的; 对薄环可能由于均匀压力的单独作用而发生屈曲。为了計及均匀压力对环的变形的影响, 我們仍只研究无伸长的变形, 并設在环的任一横截面的內力可归结为一常量軸向力 S 及一弯矩。例如研究单位寬的环受靜水压力作用(图 7.4), 我們首先設强度为 γd 的均匀压力, 它在环内产生均匀压缩力 $S = \gamma d R$ 。在这均匀压缩上迭加上由非均匀压力 $\gamma R \cos \theta$ 所产生的弯曲, 并設这弯曲是无伸长的。因此軸向压力 S 保持不变而只产生弯矩。

力 S 对环弯曲的影响, 可用一等效的径向分布荷重的作用来代

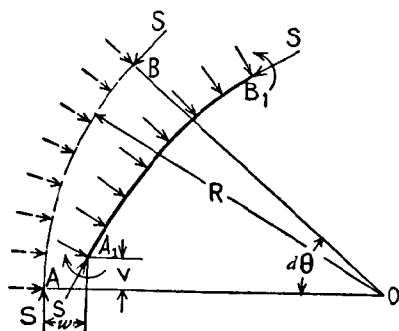


图 7.7

替, 其强度可得自研究一均匀受压的环的微段 AB (图 7.7)。軸向压力 S 平衡了作用在这微段上的均布压力。現設环为无伸长变形, 并使微段 AB 的位置达到了 A_1B_1 。在横截面 A_1 及 B_1 内将产生弯矩; 如 w 为已知, 这弯矩的大小可

由方程 (7.1) 得到。由于 § 7.1 方程 (f) 的左边所表示的曲率的变

化,环的横截面 B 对于横截面 A 轉了一角度

$$Rd\theta \left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right).$$

由于这轉角,軸向力 S 不复与均布压力平衡,而产生了离圓心 O 的附加径向力,其大小为

$$SRd\theta \left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right).$$

于是为了計入压力 S 对环弯曲的影响,必須在給定的外荷重上加上一分布的假想荷重,其强度为

$$s \left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) = \frac{S}{R^2} \left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + w \right). \quad (a)$$

現将这一般性的理解应用于图 7.2 所示的情形,并研究在环內产生压缩力 S 的均布外压力对环的挠度的影响. 用前一节的三角級数 (a) 作为位移 w , 并考虑一虚位移 $w = \delta a_n \cos n\theta$. 当 n 为偶数时,决定系数 a_n 的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_n} \delta a_n &= 2P \delta a_n (-1)^{\frac{n}{2}} - \\ &- \frac{S}{R} \delta a_n \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + w \right) \cos n\theta d\theta. \end{aligned} \quad (b)$$

这方程的右边第二項表示假想荷重 (a) 对虚位所作的功. 因荷重与 w 的正方向相反,所以这功为負.

将前一节的級数 (a) 代入方程 (b) 并积分,得到

$$a_n = \frac{2PR^2(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi EI(n^2 - 1)^2 [1 - SR^2/(n^2 - 1)EI]}, \quad (c)$$

式中的 n 为偶数. 对于图 7.2 所示的对称荷重,級数 w 中 n 为奇数的系数 a_n 及所有的系数 b_n 均为零. 于是得到

$$w = \frac{2PR^3}{\pi EI} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cos n\theta}{(n^2 - 1)^2 [1 - SR^2/(n^2 - 1)EI]}. \quad (7.8)$$

将这結果与以前所得的不受压环的方程 (7.6) 相比,可以看出,由于压力 S ,級数 w 的每一系数按比值

$$\frac{1}{1 - SR^2/(n^2 - 1)EI}$$

而增大。可以看出,当压力 S 趋近于值

$$S = \frac{(n^2 - 1)EI}{R^2}. \quad (d)$$

时,挠度将无限地增大。取 $n = 2$, 即得到使挠度无限增大的力的最小值,它给出压力的**临界值**为

$$S_{cr} = \frac{3EI}{R^2}. \quad (7.9)$$

当 S 趋近于 S_{cr} 时,级数(7.8)中的第一项变为首要,于是只取第一项,得径向位移的表达式为

$$w = - \frac{2PR^3 \cos 2\theta}{9\pi EI (1 - S/S_{cr})}, \quad (7.10)$$

由上式可得到与§ 1.11的受压的直梁在横向荷重作用下的方程(a)类似的方程。

对于一受均布外压的长圆管,我们可考虑一单位宽的环;以 $E/(1 - \nu^2)$ 代替 E 并取 $I = h^3/12$, 可得到这环内的压力的临界值 S_{cr} 。这样,由方程(7.9)得到

$$S_{cr} = \frac{Eh^3}{4(1 - \nu^2)R^2}. \quad (7.11)$$

注意到单位宽的环内的压力等于 qR , 其中 q 为均布压力。由方程(7.11)得到这压力的临界值为

$$q_{cr} = \frac{E}{4(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^3. \quad (7.12)$$

§ 7.4. 在均布外压下圆环及管的屈曲

在讨论由外力所引起的圆环的均匀受压及弯曲的组合时,在前一节中我们了解到:若均匀压力趋近于由方程(7.9)所计算的临界值时,挠度将无限地增大。这一临界压力值可用另一方法得到。我们研究一理想的均匀受压环,并设它对其圆形平衡位置有了微小的挠曲。于是保持这环在所设的微变形下而平衡的均布压力,即为均布压力的临界值。

在图 7.8 中示出了半个圆环。虚线表示环的原来的圆形，实线表示在均布压力作用下稍微挠曲的环。设 AB 与 OD 为屈曲环的对称轴；于是截去的下半部分环对于上半部分的作用，可由作用在截面 A 及 B 的纵向力 S 及弯矩 M_0 来表示。以 q 表示环中心线每单位长度内的均匀正压力，而 w_0 为在 A 与 B 的径向位移。于是在 A 与 B 的压力为¹⁾

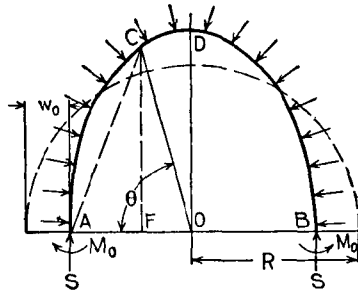


图 7.8

$$S = q(R - w_0) = q\overline{AO},$$

而屈曲环的任何截面 C 的弯矩为

$$M = M_0 + q\overline{AO} \cdot \overline{AF} - \frac{q}{2} \overline{AC}^2. \quad (a)$$

由三角形 ACO ,

$$\overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{AO} \cdot \overline{AF}$$

或

$$\frac{1}{2} \overline{AC}^2 - \overline{AO} \cdot \overline{AF} = \frac{1}{2} (\overline{OC}^2 - \overline{AO}^2).$$

将这代入弯矩的表达式(a), 得到

$$M = M_0 - \frac{1}{2} q(\overline{OC}^2 - \overline{AO}^2). \quad (b)$$

注意到 $\overline{AO} = R - w_0$, 而 $\overline{OC} = R - w$, 并略去微量 w 及 w_0 的平方, 得弯矩为

$$M = M_0 - qR(w_0 - w). \quad (c)$$

有了这弯矩的表达式, 挠度曲线的微分方程(7.1)为

1) 这里考虑了 S 由于屈曲的改变, 而在前一节的例中设 S 为一常量。更精细的研究(参阅 Timoshenko, *op. cit.*)表明, 对于图 7.8 这问题, 必须考虑 S 的微小改变, 以得到 S_{cr} 的正确结果。

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2}{EI} [M_0 - qR(w_0 - w)], \quad (d)$$

均布压力的临界值现在可由积分这方程而得到。将这方程写成形式

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \left(1 + \frac{qR^3}{EI}\right) = \frac{-M_0 R^2 + qR^3 w_0}{EI},$$

并运用记号

$$k^2 = 1 + \frac{qR^3}{EI}, \quad (e)$$

得其通解为

$$w = A_1 \sin k\theta + A_2 \cos k\theta + \frac{-M_0 R^2 + qR^3 w_0}{EI + qR^3}. \quad (f)$$

现考虑屈曲环的横截面 A 及 D 的条件。由对称性, 可得结论

$$\left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0, \quad \left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\theta=\pi/2} = 0.$$

从第一个条件得到 $A_1 = 0$, 而从第二个条件得到

$$\sin \frac{k\pi}{2} = 0. \quad (g)$$

这方程异于零的最小根为 $k\pi/2 = \pi$, 即 $k = 2$ 。将这代入 (e), 得到临界压力值为¹⁾

$$q_{cr} = \frac{3EI}{R^3}. \quad (7.13)$$

可以看出, 环中相应的压力即为以前所得的公式(7.9)所给出的。

由方程(f), 屈曲环的径向位移为

$$w = \frac{1}{4} \left(\frac{M_0 R^2}{EI} + w_0\right) \cos 2\theta - \frac{M_0 R^2}{4EI} + \frac{3}{4} w_0. \quad (h)$$

于是, 由无伸长条件[参阅 § 7.2 的方程(b)], 得

1) 这结果系 Bresse 所得; 参阅他的 "Cours de mécanique appliquée", 2d ed., p. 334, 1866. 并参阅 M. Lévy, *J. Math. pure et appl. (Liouville)*, series 3, vol. 10, p. 5, 1884, 及 A. G. Greenhill, *Math. Annal.* vol. 52, p. 465, 1889.

$$v = \frac{1}{8} \left(\frac{M_0 R^2}{EI} + w_0 \right) \sin 2\theta + \left(-\frac{M_0 R^2}{4EI} + \frac{3}{4} w_0 \right) \theta. \quad (i)$$

由对称性条件, 当 $\theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 位移 v 必为零. 因此

$$-\frac{M_0 R^2}{4EI} + \frac{3}{4} w_0 = 0$$

或

$$M_0 = \frac{3w_0 EI}{R^2} = q_c w_0 R. \quad (i)$$

将这代入(h)及(i), 得到

$$w = w_0 \cos 2\theta, \quad v = \frac{1}{2} w_0 \sin 2\theta. \quad (7.14)$$

从方程(j)可以看出, 在 A 及 B 作用偏心矩为 w_0 的压力 S (参阅图 7.8) 即可产生 M_0 . 在这情况下, 图 7.8 中虚线所绘的圆可作为均布压力所形成的索曲线, 而这曲线与屈曲环的中心线之间的面积表示这环的弯矩图. 将式(j)代入式(c), 亦可得到相同的结果. 当 $\theta = \pm\pi/4$ 及 $\theta = \pm 3\pi/4$ 时, 径向位移 w 为零, 于是弯矩为零.

以上我们只讨论了由方程(d)所得的式(g)的最小根. 取 $k = 4, 6, \dots$, 我们得到屈曲环有更多个波的可能形状.

在以上讨论中所引入的另一限制为: 屈曲环对于水平轴与铅直轴为对称. 由于这原因, 我们得到的 k 仅为偶数. 若只有一对对称轴, 如水平轴 AB (图 7.8), 并且在铅直轴两端的弯矩为零, 我们就得到 k 为奇数的解, 即 $k = 3, 5, \dots$. $k = 1$ 这情形以前已讨论过 [参阅 § 7.2 的方程(d)]; 它表明环象刚体一般的移动, 因而在环屈曲的讨论中不应该加以考虑. 因此, $k = 2$ 为最小的根, 相应的荷重 [方程(7.13)] 为临界荷重. 相应于较大根的高次屈曲形状, 只是在引入某些附加约束后才能得到. 如没有这些约束, 屈曲将永远如图 7.8 所示¹⁾.

1) 在更一般的荷重作用下环的屈曲, 曾为 C. B. Biezeno 与 J. J. Koch 所研究, *Konink. Ned. Akad. van Wetenschap. Proc.*, vol. 48, pp. 447—468 1945.

对于圆环所得的结果，亦可用于研究承受均布外压力作用的长¹⁾圆管的屈曲²⁾。要得到管的 q_{cr} ，只须将 $E/(1 - \nu^2)$ 代替公式 (7.13) 中的 E ，以 $h^3/12$ 代替 I ；这样，就得到公式 (7.12)。

仅当相应的压应力不超过材料的比例极限，这公式才可用以计算压力 q 的临界值。比 $2R/h$ 的极限值 (大于这比值时可用这公式) 可由单位宽的环的横截面积除方程 (7.11) 而得到。于是

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{2R} \right)^2. \quad (7.15)$$

例如取 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米² 及 $\nu = 0.3$ 的钢，并绘出 σ_{cr} 与 $2R/h$ 的关系，我们得到曲线 AB (图 7.9)。只当临界应力不超过

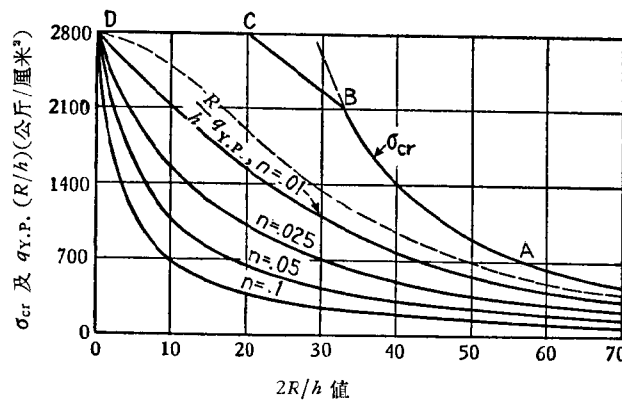


图 7.9

比例极限时，这曲线才给出实际的临界应力。超过了这极限，这曲线给出偏大的临界应力值。要得到这应力的真实的值，必须象对柱的情形那样地进行计算 (§3.3)，并在方程 (7.15) 中用切线模量 E_t 而不用 E 。如已知材料的压缩试验图，对于任何 σ_{cr} 值即可计算出 E_t ，于是相应的 $2R/h$ 的值可得自方程

$$\sigma_{cr} = \frac{E_t}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{2R} \right)^2. \quad (7.16)$$

1) 对于较短的管将在 § 11.5 中讨论。

2) 参阅 G. H. Bryan, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 6, p. 287, 1888.

这样就得到了超过比例极限的临界应力曲线。作为实际应用，这曲线可用两条直线来代替。若材料有明显的屈服点，则对较厚的管必须将屈服点应力作为临界应力。例如取屈服点应力 $\sigma_{Y.P.} = 2800$ 公斤/厘米² 及比例极限 $\sigma_{P.L.} = 2100$ 公斤/厘米² 的钢，得到方程(7.15)可被运用的 $2R/h$ 的最小值约为 33 (参阅图 7.9)。这相应于曲线 AB 上的点 B 。对于较厚的管，可用 $\sigma_{cr} = \sigma_{Y.P.}$ 的水平线 DC 。对于 $20 < 2R/h < 33$ 的中等厚度的管，可用斜线 BC 来决定临界应力。于是线 $ABCD$ 给出了对于各种厚度管的临界压应力，并且如果已选定了安全系数，则不难对每一特定情形得到管的安全厚度。

有时候用一连续的曲线以代替折线 $ABCD$ 是有用的，例如下列方程所给出的曲线¹⁾：

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_{Y.P.}}{1 + \frac{\sigma_{Y.P.}(1 - \mu^2) 4R^2}{E h^2}} \quad (7.17)$$

这曲线由图中的虚线所示。公式(7.17)与柱的兰金(Rankine)公式 [§ 4.3 的方程(a)] 类似。对于厚管，这公式给出接近于 $\sigma_{Y.P.}$ 的临界应力，对于薄管，临界应力接近于方程(7.16)所给的值。对于普通厚薄的管，这曲线给出的应力远小于 $ABCD$ 线所给的。由方程(7.17)所引入的额外的安全，可作为用以补偿在实际中常遇到的管的原始椭圆率的影响。

§ 7.5. 以所设的缺陷为根据设计受均布外压作用的管子

因管在均布外压力作用下的损坏与管的各种缺陷有很大的关系，使与缺陷有关的量明显地出现于管的设计公式中是十分合理的。管的最通常的缺陷是原始椭圆率，其极限值对于每一种形式的管子通常是由许多的检查测定而知道的。管的形状对完善的圆形的偏离，可由原始径向挠度 w_i 来表明。为了使研究简化，设这挠度由方程²⁾

1) 这曲线系 R. V. Southwell 所建议，*Phil. Mag.*, vol. 29, p. 67, 1915.

2) 参阅 Timoshenko, *Trans. ASME, Applied Mechanics Division*, vol. 1, p. 173, 1933.

$$w_i = w_1 \cos 2\theta \quad (a)$$

表示, 式中的 w_1 为对于圆的最大原始径向偏离, 而 θ 为如图 7.10 所示的中心角.

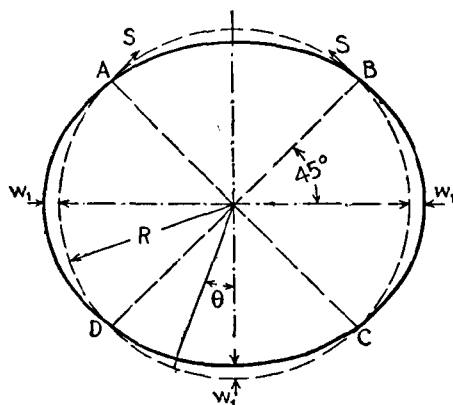


图 7.10

在均布外压 q 的作用之下, 管将又要扁平一些. 相应的径向位移记为 w . 我们用微分方程(7.4). 因正的弯矩将使原始曲率减小, 故可得结论: 在 AB 及 CD 部分, 均布外压将产生正的弯矩, 而在 AD 及 BC 部分产生负弯矩. 在 A, B, C 及 D 诸点, 弯矩为零, 而管各部分间的作用由与虚线圆相切的力 S 来表示, 这虚线圆表示管的理想形状. 这圆可视为外压力的索曲线[参阅 311 页]. 沿这曲线的压缩力保持为常量并等于 S . 于是在任何横截面的弯矩, 可由 S 乘以在这截面的总的径向位移 $w_i + w$ 而得, 即

$$M = qR(w + w_1 \cos 2\theta). \quad (b)$$

代入方程(7.4), 得到

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = - \frac{12(1 - \nu^2)}{Eh^3} qR^3(w + w_1 \cos 2\theta),$$

或

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \left[1 + \frac{12(1 - \nu^2)}{Eh^3} qR^3 \right] = - \frac{12(1 - \nu^2)}{Eh^3} qR^3 w_1 \cos 2\theta.$$

这方程的符合 A, B, C, D 诸点的连续条件的解为

$$w = \frac{w_1 q}{q_{cr} - q} \cos 2\theta, \quad (7.18)$$

式中的 q_{cr} 为方程(7.12)所给的均布压力的临界值. 可以看出, 在 A, B, C, D 诸点的 w 及 $d^2 w / d\theta^2$ 为零. 因此, 正如以上所设的,

在这些点的弯矩为零，最大弯矩系在 $\theta = 0$ 及 $\theta = \pi$ 的截面，在该截面的弯矩为

$$M_{\max} = qR \left(w_1 + \frac{w_1 q}{q_{cr} - q} \right) = qR \frac{w_1}{1 - q/q_{cr}}. \quad (7.19)$$

从方程(7.19)可以看出，对于小的比值 q/q_{cr} ，由压力 q 引起的管的椭圆率的改变可以略去，而最大弯矩可由压力 qR 乘原始挠度 w_1 而得。当比值 q/q_{cr} 不小时，应考虑到管的原始椭圆率的改变，且必须用方程(7.19)来计算 M_{\max} 。

现将由压力 qR 所产生的应力及 M_{\max} 所产生的最大压应力相加而得最大的压应力，于是得到

$$\sigma_{\max} = \frac{qR}{h} + \frac{6qR}{h^2} \frac{w_1}{1 - q/q_{cr}}. \quad (c)$$

设这方程可足够准确地一直用到材料的屈服点应力，我们得到以下这方程：

$$\sigma_{Y.P.} = \frac{q_{Y.P.} R}{h} + 6q_{Y.P.} \frac{R^2 w_1}{h^2 R} \frac{1}{1 - q_{Y.P.}/q_{cr}}, \quad (d)$$

由上式可计算当最外缘纤维开始屈服时的均布压力 $q_{Y.P.}$ 的值。用记号 $m = R/h$ 及 $w_1/R = n$ ，计算 $q_{Y.P.}$ 的方程成为

$$q_{Y.P.}^2 - \left[\frac{\sigma_{Y.P.}}{m} + (1 + 6mn)q_{cr} \right] q_{Y.P.} + \frac{\sigma_{Y.P.}}{m} q_{cr} = 0. \quad (e)$$

应注意，这样所决定的压力 $q_{Y.P.}$ 系小于管破坏时的压力，而只当管为理想的圆形时两者才相等。因此，用由方程(e)所计算得的 $q_{Y.P.}$ 值作为压力的最大值，将是偏于安全这方面的¹⁾。图 7.9 中绘出了几条曲线，给出了在屈服开始时的平均切向压应力 $q_{Y.P.}R/h$ 。这是由方程(e)并取 $n = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$ ，及 $\sigma_{Y.P.} = 2800$ 公斤/厘米² 计算而得的。如果已知管的椭圆率并选了一适当的安全系数，可用这些曲线计算作用于管的安全压力。

1) R. T. Stewart 曾做了长管在均布外压作用下的实验。Trans. ASME., vol. 27, 1906. 并参阅 H. A. Thomas, Bull. Am. Petroleum Inst., vol. 5, p. 79, 1924, 及 B. V. Bulgakov, Nauch-Tehn. Upravl. V. S. N. H., Moscow, No. 343, 1930.

§ 7.6. 均匀受压圆拱的屈曲

如果一两端铰接而中心线为一圆弧的曲杆承受均匀分布的压力 q 的作用，它会屈曲成

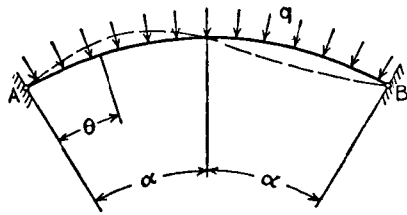


图 7.11

如图 7.11 中的虚线所示的形状。发生屈曲的压力 q 的临界值，可由解屈曲杆挠度曲线的微分方程而得到。与以前一样，将原来的圆弧作为均布压力的

索曲线，方程(7.1)成为

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2Sw}{EI}, \quad (a)$$

式中的 $S = qR$ 为轴向压力，而 w 为向心的径向位移。

用以前的记号

$$k^2 = 1 + \frac{qR^3}{EI}, \quad (b)$$

得到

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + k^2w = 0.$$

这方程的通解为

$$w = A \sin k\theta + B \cos k\theta.$$

要符合左端 ($\theta = 0$) 的条件，必须取 $B = 0$ ；如令

$$\sin 2\alpha k = 0, \quad (c)$$

右端 ($\theta = 2\alpha$) 的条件亦可满足。这方程的符合杆中心线无伸长这条件[参阅 § 7.2 的方程(j)]的最小根为

$$k = \frac{\pi}{\alpha},$$

于是由(b)得到¹⁾

1) 这解由 E. Hurlbrink 所得, *Schiffbau*, vol. 9, p. 517, 1908; 并参阅 Timoshenko, *Buckling of a Uniformly Compressed Circular Arch*, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1910.

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right). \quad (7.20)$$

取 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 方程 (7.20) 给出与整个圆环同样的 q_{cr} [方程 (7.13)]. 这结果是可以预料得到的, 因为在这 α 值时, 图 7.11 中的杆恰与在两相对反曲点间的半个屈曲环 (图 7.8) 的状况相同。

当 α 趋近于 π 时, 即当弧趋近于一完整的环时, 由方程 (7.20), q_{cr} 的值趋近于零。这是可以解释的, 如果注意到当 $\alpha = \pi$ 时两铰相重合, 而这环将可以自由地绕这公共的铰象刚体一样地转动。

当 α 远比 π 为小时, 公式 (7.20) 括号中的 1 与 π^2/α^2 相比可被略去。于是临界压力 $q_{cr}R$ 将等于一两端铰接而长为 $R\alpha$ 的稜柱杆的临界荷重。

在推导公式 (7.20) 时, 曾设这屈曲拱在中点具有反曲点 (图 7.11)。由弧的无伸长挠曲的一般讨论 (§ 7.2) 可知, 亦可以有对杆中点对称的无伸长挠度曲线。最简单的这种曲线有两个反曲点。若以这样的曲线作为计算临界荷重的根据, 将得到大于方程 (7.20) 所给的临界值¹⁾。因此应用 (7.20) 这方程来计算 q_{cr} 。

如果不是圆拱而是扁平的抛物线形的拱, 并且铅直荷重均匀地分布于跨度 AB (图 7.11), 则压力沿拱长度的变化可以略去, 而可取拱的半长并应用两端铰接杆的欧拉公式来计算压力的临界值²⁾。

在推导方程 (7.20) 时, 曾设曲杆在屈曲之前的中心线为一圆弧。只当在杆的两端未固结于支座之前杆的中心线就有着均匀的单位缩短 $q_{cr}R/AE$, 这条件才能满足, 否则在均布压力一开始作用

1) 这类计算曾为 E. Chwalla 所作, *Sitzber. Akad. Wiss., Wien., Abt. IIa*, vol. 136, p. 645, 1927.

2) 实验结果与这计算很相符合。参阅 R. Mayer, *Der Eisenbau*, vol. 4, p. 361, 1913, 及他的书 “Die Knickfestigkeit”, Berlin, 1921。在这书中研究了三铰拱, 并讨论了拱的中心线的压缩及中间铰的下降对于临界荷重的影响。E. Garber 做了一系列均匀受压的三铰拱的试验, *Bautechnik*, 1934, p. 646。试验结果与方程 (7.20) 相符。E. Chwalla 讨论了在非对称荷重作用下三铰拱的屈曲, *Der Stahlbau*, No. 16, 1935。

时就将发生某些弯曲。只要压力 q 远比 q_{cr} 为小，这弯曲是很小的，而状况与柱由于各种缺陷而发生的弯曲类似。

以 $E/(1 - \nu^2)$ 代替方程(7.20)中的 E 并以 $h^3/12$ 代替 I ，即得方程

$$q_{cr} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)R} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right), \quad (7.21)$$

这方程可用以计算沿 $\theta = 0$ 及 $\theta = 2\alpha$ 边铰支(图 7.11)，并受均匀压力作用的柱形壳的临界荷重。

若均匀受压拱的两端为固定¹⁾(图 7.12)，屈曲的形状将如虚线所示。屈曲以后，在中点 C 不仅有水平压力 S ，并有铅直剪力 Q 作用。仍将原来的圆弧作为均匀压力的索曲线，并以 w 表示向心的径向位移，则在由角 θ 所确定的任一横截面的弯矩为

$$M = Sw - QR \sin \theta,$$

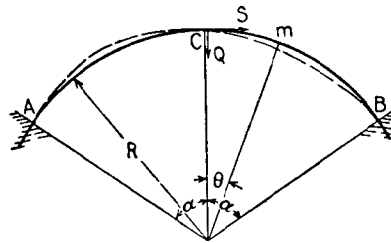


图 7.12

于是微分方程(7.1)成为

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2}{EI} (Sw - QR \sin \theta),$$

或用了记号(b)，

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + k^2 w = \frac{QR^3 \sin \theta}{EI}.$$

这方程的通解为

1) 仍设在两端固定之前拱被均匀地压缩。

$$w = A \sin k\theta + B \cos k\theta + \frac{QR^3 \sin \theta}{(k^2 - 1)EI}. \quad (d)$$

决定常数 A, B 及剪力 Q 的条件为

$$w = \frac{d^2 w}{d\theta^2} = 0, \quad \text{当 } \theta = 0; \quad (e)$$

$$w = \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad \text{当 } \theta = \alpha. \quad (f)$$

取解(d)中的 B 为零可符合条件(e), 于是从条件(f)得到

$$A \sin k\alpha + Q \frac{R^3 \sin \alpha}{(k^2 - 1)EI} = 0, \quad (g)$$

$$Ak \cos k\alpha + Q \frac{R^3 \cos \alpha}{(k^2 - 1)EI} = 0.$$

使方程 (g) 的行列式等于零, 即得计算均匀压力 q 的临界值的方程, 即

$$\sin k\alpha \cos \alpha - k \sin \alpha \cos k\alpha = 0$$

或

$$k \tan \alpha \cot k\alpha = 1. \quad (h)$$

k 值及压力 q 的临界值与角度 α 有关. 表 7.1 中列出了对于不同的 α 值的方程(h)的几个解¹⁾.

表 7.1

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
k	8.621	4.375	3	2.364	2.066	2

将 k 代入方程(b), 得均匀压力的临界值为

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3} (k^2 - 1). \quad (7.22)$$

这 q_{cr} 值总大于由方程(7.20)所得的值.

1) 这解为 E. L. Nicolai 所得, *Bull Polytech. Inst., St. Petersburg*, vol. 27, 1918; 并参阅 *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 3, p. 227, 1923.

2) 参阅 A. N. Dinnik, *Vestnik Inzhenerov*, No. 6, 1934; 并参阅他的书 "Buckling and Torsion", pp. 160—163, Moscow, 1955.

对于对称的三铰拱及一铰拱，亦曾解得均匀受压的等截面圆弧形拱的屈曲问题。对于三铰拱，有一种形式的屈曲与两铰拱的屈曲形式相同(图 7.11)。对这情形，在拱顶部的铰的存在，并不改变临界荷重。另一种可能的屈曲形式是对称的，并且中间铰随之下降，如图 7.13 所示。对于较小的 h/l 值，第二种屈曲形式要求较小的荷重，因而给出 q_{cr} 的极限值。

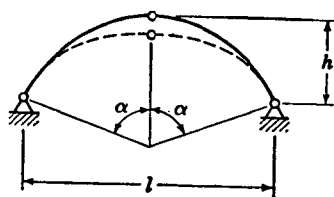


图 7.13

对于所研究的四种情形，临界压力 q_{cr} 可表达为形式

$$q_{cr} = \gamma_1 \frac{EI}{R^3}. \quad (7.23)$$

对于中心角 2α 的各种值，因子 γ_1 的值列于表 7.2 内。对于无铰及两个铰时的值，系分别得自方程(7.22)与(7.20)；其余的值系提尼克 (Dinnik) 所计算¹⁾。

表 7.2 对于均匀受压等截面圆拱的因子 γ_1 的值 [方程 (7.23)]

2α (度)	无 铰	一个铰	两个铰	三个铰
30	294	162	143	108
60	73.3	40.2	35	27.6
90	32.4	17.4	15	12.0
120	18.1	10.2	8	6.75
150	11.5	6.56	4.76	4.32
180	8.0	4.61	3.00	3.00

将临界压力表示为拱的跨度 l 与拱高 h 的函数，对于实际应用是合宜的(参阅图 7.13)。于是 q_{cr} 的公式的形式成为

$$q_{cr} = \gamma_2 \frac{EI}{l^3}, \quad (7.24)$$

1) *Ibid.*

其中的 γ_2 与比值 h/l 及铰的个数有关。表 7.3 中给出了 γ_2 的数值。由表 7.2 与 7.3 可以看出，随铰的个数的增加，临界荷重将减小。只有 $2\alpha = 180^\circ$ (或 $h/l = 0.5$) 为例外；对于这情形，两个铰与三个铰的拱的临界荷重相同，因为这两种拱的临界屈曲形式相同(参阅图 7.11)。

表 7.3 对于均匀受压等截面圆拱的因子 γ_2 的值 [方程(7.24)]

h/l	无 铰	一个铰	两个铰	三个铰
0.1	58.9	33	28.4	22.2
0.2	90.4	50	39.3	33.5
0.3	93.4	52	40.9	34.9
0.4	80.7	46	32.8	30.2
0.5	64.0	37	24.0	24.0

在前面的圆拱屈曲的讨论中，曾设屈曲时外力保持垂直于屈曲了的拱的轴线，与静水压力的情形相同。有时候，会遇到屈曲时外力保持其原来方向的情形。对于这问题的研究表明，在屈曲时力方向的稍微改变，对临界压力的值只有很小的影响¹⁾。

对于某些变截面的拱，亦可以解图 7.11 中所示的拱的弹性稳定问题，例如设对称拱左边部分的截面惯性矩沿弧长的变化规律为

$$I = I_0 \left[1 - \left(1 - \frac{I_1}{I_0} \right) \frac{\theta}{\alpha} \right], \quad (7.25)$$

式中的 I_0 及 I_1 分别为 $\theta = 0$ 及 $\theta = \alpha$ 的惯性矩，我们得到临界压力为

$$q_{cr} = \gamma_3 \frac{EI_0}{\alpha^2 R^3}, \quad (7.26)$$

其中 γ_3 为一与角度 α 及 I/I_0 的比值有关的数值因子。在表 7.4 中列出了这因子的几个值²⁾。这表的第一行 ($\alpha = 0$) 给出了变截面直杆的系数 γ_3 的值，这杆屈曲时在杆的中点有反曲点。表中的最后一行给出了等截面拱的 γ_3 [参阅方程(7.20)]。

1) *Ibid.*, pp. 163—165.

2) 参阅 A. N. Dinnik, *Vestnik Inzhenerov*, Nos. 8 及 12, 1933; 并参阅 I. J. Steurman, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1929, 及 “Stability of Arches”, *Kiev*, 1929.

表 7.4 对于均匀受压的变截面圆弧形双铰拱, 因子 γ_3 的值

2α (度)	l_1/l_0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0		4.67	5.41	6.68	7.80	8.85	π^2
60		4.54	5.20	6.48	7.58	8.62	9.60
120		4.16	4.82	5.94	6.94	7.89	8.77
180		3.53	4.08	5.02	5.86	6.66	7.40

§ 7.7. 其他形式的拱

在前一节中, 我们研究了轴线为圆形的均匀受压的拱。对于几个其他形式的拱, 其屈曲问题已被解出; 它们的某些结果将在下面叙述¹⁾。

抛物线形拱 若一抛物线形拱承受沿跨度均匀分布的荷重 q 的作用(图 7.14), 则将有轴向压缩但无弯曲, 因为抛物线为均布荷重的索曲线。逐渐地增大荷重强度, 将使抛物线形式的平衡成为不稳定, 而拱将屈曲成如圆弧形拱那样的形状。研究没有铰及有一个、两个、三个铰的等截面对称拱, 我们可由公式

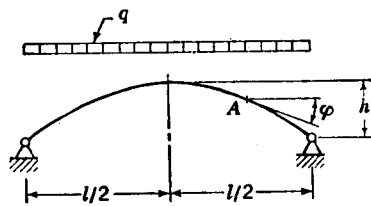


图 7.14

$$q_{cr} = \gamma_4 \frac{EI}{l^3} \quad (7.27)$$

表示荷重强度的临界值。数值因子 γ_4 与比值 h/l 有关, 其中 h 为拱高, l 为跨度(图 7.14)。表 7.5 给出了

因子 γ_4 的值²⁾。可以看出, 对于扁平的抛物线形拱 ($h/l < 0.2$), γ_4 的值与表 7.3 的圆拱的值相差无几。

在图 7.15 中, 以曲线表示数值因子 γ_4 为 h/l 的函数。曲线的虚线部分相应于对称的屈曲形式。在这些情形中, 会出现非对称屈曲, 于是我们必须用无中间铰的拱的曲线以得 γ_4 的值。例如, 对于 $h/l > 0.3$ 的三铰拱, γ_4 的值系取自两铰拱的曲线。以拱的模型所作的实验, 与以上的理论值很相符

1) 参阅 K. Federhofer, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, 1934, 及 *Bautechnik*, No. 41, 1936, A. N. Dinnik, *Vestnik Inzhenerov*, Nos. 1 及 12, 1937, 及 "Buckling and Torsion", pp. 171—193, Moscow, 1955.

2) 这些值系 Dinnik 所计算, *op. cit.*

合¹⁾。

表 7.5 在均布荷重下等截面抛物线形拱的因子 γ_1 的值 [方程(7.27)]

h/l	无 铰	一个铰	两个铰	三个铰
0.1	60.7	33.8	28.5	22.5
0.2	101	59	45.4	39.6
0.3	115	...	46.5	46.5
0.4	111	96	43.9	43.9
0.5	97.4	...	38.4	38.4
0.6	83.8	80	30.5	30.5
0.8	59.1	59.1	20.0	20.0
1.0	43.7	43.7	14.1	14.1

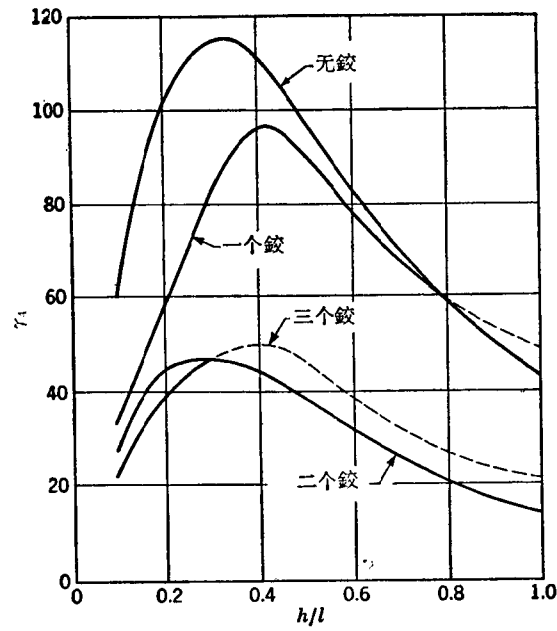


图 7.15

1) 参阅 E. Gaber, *Bautechnik*, 1934, pp. 646—656; C. F. Kollbrunner, *Schweiz. Bauztg.*, vol. 120, 1942, p. 113; 及 Kollbrunner and M. Meister, *Knicken*, pp. 191—200, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

对于横截面为矩形（矩形的宽为常量而高与 $\sec \varphi$ 成比例，其中 φ 为拱轴的任一点 A 的切线与水平线之间的夹角，图 7.14）的抛物线形拱，我们仍可用公式 (7.27)。对于这情形， l 表示拱顶点 ($\varphi = 0$) 的截面惯性矩。在表 7.6 中给出了因子 γ_4 的值¹⁾。

表 7.6 在均布荷重下变截面抛物线形拱的因子 γ_4 的值 [方程 (7.27)]

h/l	无 铰	一个铰	两个铰	三个铰
0.1	65.4	36.5	30.7	24
0.2	134	75.8	59.8	51.2
0.3	204	...	81.1	81.1
0.4	277	187	101	101
0.6	444	332	142	142
0.8	587	497	170	170
1.0	700	697	193	193

悬链线形拱 设荷重沿拱的轴线均匀地分布，如对于等截面拱的自重的情形。于是悬链线为这荷重的索曲线，并且对于这样形状的拱将不产生弯曲²⁾。当荷重强度达到临界值时，屈曲即发生；这临界值仍可由公式 (7.27) 表示。表 7.7 给出了因子 γ_4 的值³⁾。比较表 7.7 与 7.5 知，对于扁平的曲线，对于这两种形式的拱 γ_4 的差异很小。

表 7.7 在沿拱轴线均匀分布的荷重下等截面悬链线形拱的因子 γ_4 的值 [方程 (7.27)]

h/l	无 铰	两个铰
0.1	59.4	28.4
0.2	96.4	43.2
0.3	112.0	41.9
0.4	92.3	35.4
0.5	80.7	27.4
1.0	27.8	7.06

在设计拱时，必须考虑几种类型的荷重，其中有些类型荷重只使拱受压，

- 1) 参阅 A. N. Dinnik, Buckling and Torsion, Moscow, 1955.
- 2) 与以前的讨论一样，设在加上端点约束之前，拱的轴线已被压缩。
- 3) *Ibid.*

而其他的还将使拱弯曲。只要压力小于其临界值，可略去其对弯曲的影响，于是在决定应力时可不计拱的变形。但对于大跨度的细长拱，轴向压力可能接近临界值。于是轴向力对弯曲的影响变得十分重要，而在作应力分析时必须计入拱的变形。

§ 7.8. 很扁平的曲杆的屈曲¹⁾

在前几节中，只研究了曲杆的无伸长形式的屈曲。对于很扁平的曲杆，在较无伸长屈曲为小的荷重时即发生具有轴向应变的屈曲，所以必须加以研究。作为这种屈曲的一例，我们来研究一承受均布荷重的扁平铰支拱(图 7.16)。这拱的原来的中心线由方程

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad (a)$$

来表示。若拱高 a 很大，在荷重作用下拱的轴向变形可被略去，并设在屈曲时拱的中点有一反曲点(参阅 §7.6)而得到临界荷重。若 a 很小，在荷重作用下拱的轴向变形不能略去，而拱可以屈曲成对称的形式，如图中的虚线所示。

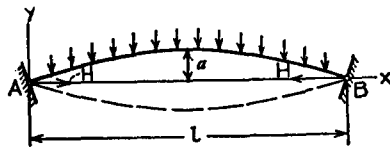


图 7.16

在研究这种拱的变形时，设铰支座之一被置于滚轴上，于是在承受荷重以后拱的中心线可以充分准确地由方程(参阅 29 页)

$$y_1 = \left(a - \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \right) \sin \frac{\pi x}{l} = a(1 - u) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (b)$$

来表示，式中的 q 为均布荷重的强度， EI 为杆在中心线平面内的弯曲刚度，而

$$u = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{Ela} \quad (c)$$

若铰系固定的，荷重作用时将产生横压力 H ，而中心线的最终的方程将为(参阅 § 1.12)

1) 参阅 Timoshenko, *J. Appl. Mech.*, vol. 2, p. 17, 1935.

$$y_2 = \frac{a(1-u)}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (d)$$

式中

$$\alpha = \frac{Hl^2}{\pi^2 EI}. \quad (c)$$

这方程不仅可用于当 $u < 1$, 并且可用于 $u > 1$, 即作为一简单梁所计算得的曲杆的挠度大于拱的原来高度的情形。 α 的值亦可以大于 1, 但必须小于 4。因 $\alpha = 4$ 时, 拱将发生屈曲, 在拱中点形成一反曲点, 于是拱保持对中央对称这假设 [方程(d)] 将不再符合。

首先设 $u < 1$, 由方程(d)可知: 若 $\alpha < 1$, 则 y_2 为正; 若 $\alpha > 1$, 则 y_2 为负。这表明, 若推力小于两端铰接杆的欧拉荷重, 拱的形状为图 7.16 中的实线所示。若作用了大于欧拉荷重的压力, 这拱将向下挠曲, 如图中的虚线所示。当 $u > 1$ 时, 对于 $\alpha > 1$, y_2 为正, 而对于 $\alpha < 1$, y_2 变为负。

在作用荷重后, 只当已经知道了 α 值, 即知道了横压力 H , 才可决定拱的实际形状。计算横压力 H 的方程, 可自由挠曲造成的跨度的改变等于杆由于横压力而产生的压缩而得。设对于扁平的曲线压力沿杆的长度为一常量并等于 H , 我们得到方程

$$\frac{Hl}{AE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_2}{dx} \right)^2 dx, \quad (f)$$

式中 A 为杆的横截面积, 代入 y 及 y_2 的表达式(a)和(d)并积分, 得到

$$(1-u)^2 = (1-m\alpha)(1-\alpha)^2, \quad (g)$$

式中

$$m = \frac{4I}{Aa^2}. \quad (h)$$

对于已知的拱, m 的值可以很容易地算得; 并且如果已知荷重 q , 从方程(c)可决定 u 值。于是相应的 α 值从而横压力 H 可自方程(g)得到。因这方程系非线性, 在某种条件下可得到一个以上的 α 的实根。这表明可能有几个平衡形式, 而必须研究这些形式的稳定性。

将方程(g)的右边作为 α 的函数, 对于 $m < 1$, 这函数在 $\alpha = 1$ 时有一等于零的极小值, 而当 $\alpha = (2 + m)/3m$ 时有一极大值. 这极大值为

$$\frac{4}{27} \frac{(1 - m)^3}{m^2}. \quad (i)$$

在图 7.17 中, 以曲线表示了 $m = 1/2$ 时的方程 (g) 的右边. 对于这 m 值, 最大值发生在 $\alpha = 5/3$, 并由 (i), 这最大值等于 $2/27$. 若荷重 q 的大小使方程 (g) 的左边大于上述这最大值, 则将只得到一个 α 的实根. 这表明只可能有一个平衡形式, 因此这平衡是稳定的. 如果方程 (g) 的左边小于值 (i), 则将得到如图 7.17 中的交点 s , r 及 t 所示的三个 α 的解, 于是必须研究相应的平衡形式的稳定性问题. 将这些结论应用于以上数字例子, 发现如果

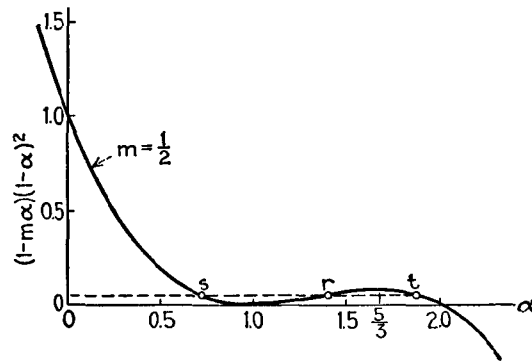


图 7.17

$$(1 - u)^2 > \frac{2}{27},$$

则平衡永为稳定. 上述条件等价于条件

$$\begin{cases} u < 1 - \sqrt{\frac{2}{27}}, \\ u > 1 + \sqrt{\frac{2}{27}}. \end{cases} \quad (j)$$

这两条件中的第一个条件相应于如图 7.16 中实线所示的向上凸

的平衡形式，而第二个条件相应于图中虚线所示的向下凸的平衡形式。

对于任何小于 1 的 m 值，与条件(j)等价的稳定条件为

$$u < \left(1 - \sqrt{\frac{4}{27} \frac{(1-m)^3}{m^2}}\right), \quad (k)$$

$$u > \left(1 + \sqrt{\frac{4}{27} \frac{(1-m)^3}{m^2}}\right).$$

因此，使可能有一个以上的平衡形式的条件(对于这些条件必须作稳定性研究)为

$$u > \left(1 - \sqrt{\frac{4}{27} \frac{(1-m)^3}{m^2}}\right), \quad (l)$$

$$u < \left(1 + \sqrt{\frac{4}{27} \frac{(1-m)^3}{m^2}}\right).$$

若 $m \geq 1$ ，方程(g)只有一个实根。这可以自图 7.18 看出，图中用 $m = 1$ 及 $m = 2$ 的曲线表示方程 (g) 的右边。可以看出，对于任何正的 $(1-u)^2$ 值我们只得到一个 α 值，并且这值小于 1。因此，当 $m \geq 1$ 时，只有一个可能的平衡形式，且这平衡形式是稳定的。

只当 $m < 1$ ，且当荷重在条件 (l) 所示的范围内时，才发生不稳定性问题。

在研究拱的稳定性时，以曲线表示拱高为荷重的函数或为 u 的函数是有利的。运用方程(d)，拱高为

$$a_1 = \frac{a(1-u)}{1-\alpha}. \quad (m)$$

对于每一特定情形，取了一系列的 α 值，从方程 (g) 即可计算相应的 u 值，并从方程 (m) 计算拱高 a_1 。在图 7.19 中，绘出了 a_1/a 对

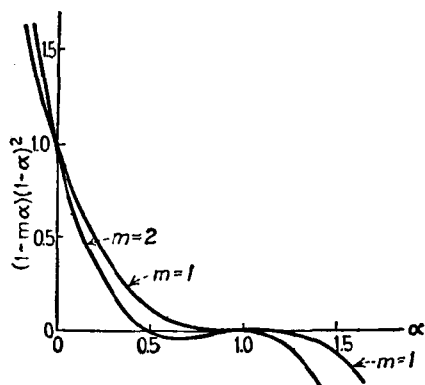


图 7.18

u 的关系曲线。实线表示 $m = 1/2$ 这情形，而两虚线表示 $m = 1/4$ 及 $m = 1$ 两个情形。研究 $m = 1/2$ 这情形，自曲线可以看出：挠度随荷重的增大而逐渐增大直至点 A 为止。点 A 相应于图 7.17 中的曲线的最大值（当 $\alpha = 5/3$ ）。自这点开始，随挠度的增加 u 将减小，即荷重 q 将减小，这事实表明，在点 A ，即当

$$(1 - u)^2 = \frac{2}{27},$$

图 7.16 中以实线所示的拱的平衡形式变成不稳定，拱将向下屈曲如虚线所示。这新的平衡形式的垂度由图 7.19 中的点 B 的位置

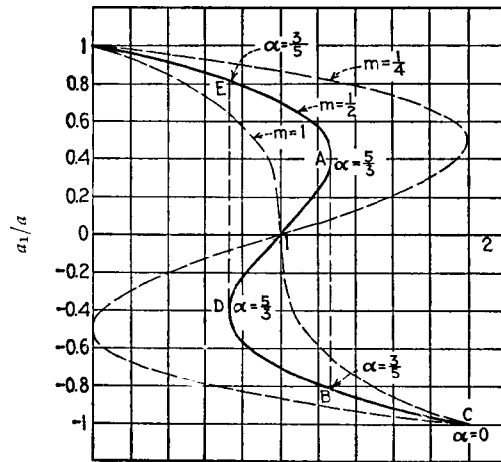


图 7.19

所示，这新的平衡形式是稳定的，荷重的任何进一步增加将使挠度渐增，如图 7.19 中的曲线的 BC 部分所示。在施加这荷重过程中，横压力 H 将减小，并在点 C 等于零；再增加荷重，横压力 H 变为负。若自点 B 起我们开始减少荷重，则拱的挠度逐渐减小直至点 D 为止。到了点 D ，这荷重将不足以保持拱向下凸的挠曲，而将向上屈曲至图 7.19 中的点 E 的位置。由以上的讨论可以看出：在与条件(j)相应的两垂线 \overline{ED} 与 \overline{AB} 的范围内可能有一个以上的平衡形式。对于一般的情形，这范围为条件(1)所决定，并可得结论：

拱向下凸而屈曲的临界荷重可由下列方程决定¹⁾：

$$u = 1 + \sqrt{\frac{4(1-m)^3}{27m^2}}. \quad (7.28)$$

由图 7.19 中的曲线可得结论：随着 m 的增大，可有一个以上平衡形式的范围愈变愈小，并当 $m = 1$ 时，(1) 所给出的两界限重合；因此，从这 m 值开始，将永远只有一个可能的平衡形式。

在以上的讨论中，我们设均布荷重作用于拱。但所得的结果可用于所有这种情形，即拱的挠度可作为梁一样用正弦级数的首项充分精确地表示（参阅 § 1.11）。例如，一铅直集中荷重作用在拱的中点，由方程 (7.28) 可得这荷重的临界值²⁾，只须在这方程中代入

$$u = \frac{Pl^3}{48EI} \frac{1}{a}. \quad (n)$$

若荷重 P 不作用在中点，亦可用类似的方法解这问题。只须以梁中点的相应的挠度代替方程 (n) 中的 $Pl^3/48EI$ 。

§ 7.9. 两种金属组合小条的屈曲

前一节的结果亦可以用来研究由两种金属组合成的小条在温度变化下的屈曲。这种小条可用于恒温器以调节温度。现研究一简单情形：单位宽度的两种金属的小条，由等厚度且弹性模量相同但热膨胀系数 ϵ_1 与 ϵ_2 相异的两金属所组成（图 7.20）。若 $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ，则温度由原来的温度 t_0 升至 t 将使小条向下凸而弯曲。如果考虑及由于膨胀不同在两金属的接触面处（图 7.20 c）形成的相互作用力 P ，即可计算相应的曲率。将这些力以轴向力及力偶 $M = Ph/4$ 来代替，如图 7.20 d 所示，则每一金属条的曲率可得自熟悉的方程

- 1) 本节所得的结果与 Dinnik 所作的实验很相符合；参阅 Dinnik, *op. cit.*, p. 231.
- 2) 这特殊问题曾为 Navier 所讨论，Résumé des leçons sur l'application de la mécanique, 2d ed., p. 273, Paris, 1833. 并参阅 C. B. Biezeno, *Konink. Akad. Wetenschap. Amsterdam, Proc.*, vol. 32, p. 990, 1929, 及 *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 18, p. 21, 1938. 拱的中心线不是扁平曲线这情形为 A. Nadai 所研究过，*Tech. Blättern, Prague*, Nos. 3, and 4, 1915.

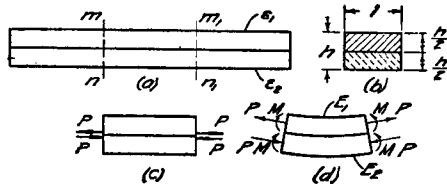


图 7.20

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{24Ph}{Eh^3} \quad (a)$$

决定 ρ 及 P 的另一方程, 可得自在接触面上两金属的纵向纤维的长度相等这条件, 因此

$$\epsilon_1(t - t_0) + \frac{2P}{Eh} + \frac{h}{4\rho} = \epsilon_2(t - t_0) - \frac{2P}{Eh} - \frac{h}{4\rho} \quad (b)$$

自方程(a)及(b)消去 P , 得到

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3(\epsilon_2 - \epsilon_1)(t - t_0)}{2h} \quad (7.29)$$

于是, 这两金属组合成的小条由受热而产生的曲率, 与温度的升高及两者的膨胀系数之差成正比, 而与小条的厚度成反比。方程(7.29)亦可充分地用于两金属的弹性模量稍有不同这情形, 例如莫涅耳 (monel) 合金与镍钢¹⁾。

有了这曲率, 由于温度升高 $t - t_0$, 小条中央的挠度 (两端简支) 可作为一扁平圆弧而得到, 即等于

$$\delta = \frac{l^2}{8\rho} \quad (c)$$

式中 l 为小条的长度, ρ 为由式(7.29)所决定的曲率半径。

现研究一稍有初曲率的两金属组合成的小条, 并设这小条的两端为铰接, 如图 7.16 中的实线所示。如果在凹的一面的金属的热膨胀系数大于在凸的一面的金属的, 则当受热时小条将向下挠曲, 并且由于这挠曲将产生某一横压力 H 。达到某一温度 (这温度决定于小条的尺寸及两金属的热膨胀系数之差) 时, 图 7.16 中以实线所示的小条的形式将变为不稳定, 并将突然向

1) Timosheko 对两种金属组成的小条的弯曲与屈曲作了更一般的研究, *J. Optical Soc. Am.*, vol. 11, p. 233, 1925; 并参阅 A. M. Wahl, *J. Appl. Mech.*, vol. 11, p. 183, 1944. 两种金属的圆板的屈曲曾由 W. H. Wittrick 所研究, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 6, 1953.

下屈曲如虚线所示。在屈曲发生之际，在恒温器内的热源即被截断而降温即行开始，结果又使小条向上方屈曲，于是热源又接通。这现象与前一节所讨论的扁平拱在加荷重及除去荷重时的屈曲相类似。要决定屈曲发生时的温度，我们只须用挠度(c)来代替加荷重所产生的挠度。方程(7.28)成为

$$\frac{l^2}{8\rho a} = 1 + \sqrt{\frac{4}{27} \frac{(1-m)^3}{m^2}}.$$

用曲率的表达式(7.29)，小条向下屈曲时的温度 t_1 可得自方程

$$\frac{3}{16} \frac{l^2}{ah} (\epsilon_2 - \epsilon_1) (t_1 - t_0) = 1 + \sqrt{\frac{4}{27} \frac{(1-m)^3}{m^2}}. \quad (7.30)$$

在降温后，小条向上方屈曲时的温度 t_2 可得自前一节的不等式(k)的第一式。因此我们得到

$$\frac{3}{16} \frac{l^2}{ah} (\epsilon_2 - \epsilon_1) (t_2 - t_0) = 1 - \sqrt{\frac{4}{27} \frac{(1-m)^3}{m^2}}. \quad (7.31)$$

表 7.8 两种金属组成的小条的屈曲数据

m	2/3	1/2	1/3	1/4
a/h	0.707	0.814	1.000	1.154
$t_1 - t_0, ^\circ\text{C}$	104	137	217	307
$t_2 - t_0, ^\circ\text{C}$	83	79	50	0

例如，取 $l/h=100$ ， $\epsilon_2 - \epsilon_1 = 4 \times 10^{-6}$ 及表 7.8 的第一行所给出的 $m = h^2/3a^2$ 的值，在表的第二行内给出了小条拱起的高度 a 与它的厚度的比值。由方程(7.30)所计算得的 $(t_1 - t_0)$ 的值及自方程(7.31)所计算得的 $(t_2 - t_0)$ 的值，分别列于表的第三及第四行内。从这表可以看出，使发生屈曲的温度 t_1 随初曲率的增大而增加，同时 t_2 却减小；因此，为差值 $t_1 - t_2$ 所决定的恒温器的灵敏度很快地随作用温度 t_1 的增大而减小。对此，引用具有弹性支承的两金属组成的小条，可以改进这情况。

若在横压力 H 的作用下，两支座间的距离增大了某一与 H 成比例的量 βH ，于是计算推力的方程成为

$$\frac{Hl}{AE} + \beta H = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_2}{dx} \right)^2 dx,$$

且代替前一节的方程(g)，我们得到

$$(1 - u)^2 = (1 - m_1 \alpha)(1 - \alpha)^2, \quad (d)$$

式中

$$m_1 = m \left(1 + \frac{\beta AE}{l} \right). \quad (c)$$

可以看出,我们可以用与以前一样的方法,研究具有弹性支座的两金属所组成的小条的作用,只须引入一与弹性支座有关的新的量 m_1 以代替 m . 适当地调整支座的弹性,即可得到恒温器所需的灵敏度¹⁾.

§ 7.10. 圓形軸繞曲杆的橫向屈曲

在第六章內,我們曾討論過直杆在其最大剛度平面內彎曲時的橫向屈曲,對於曲杆亦可能發生. 要建立對於這種情形的臨界荷重的公式,我們首先來研究一彎的薄片離開其原來曲率平面的彎曲,並導出對於這樣的彎曲的所必須的微分方程²⁾.

圖 7.21 中示出了一簡單的這類問題. 橫截面為狹長矩形而中心線位於

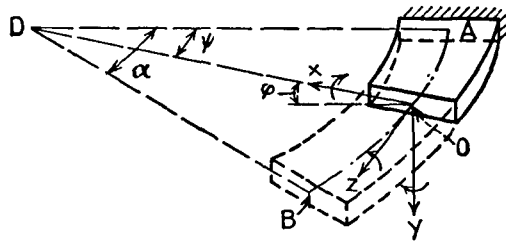


圖 7.21

水平面 DAB 內的曲杆 AB , A 端固定, 並為沿軸線 AB 按任意形式分布的荷重所彎曲. 若撓度很小, 則杆的變形可完全由每一橫截面的形心的位移及各橫截面繞中心線的切線的轉角所決定. 對於為角度 ψ 所定出的杆的任一橫截面, 我們取一直角坐標系, 其原點在形心 O , x 及 y 軸與橫截面的主軸相重合, 而 z 軸與中心線的切線相重合. 設平面 xz 與杆原來的曲率平面相重合; x 的正的方向指向曲率中心, 取 z 的正方向相對於角度 ψ 的增加; 中心線的弧 s 由固定端 A 量起. 形心 O 的位移在 x, y, z 三軸方向的分量為 u, v 及 w . 橫截面對於 z 軸的轉角稱為 φ , 且當旋轉的方向如圖所示時為正. 為兩相鄰的橫截面自彎的薄片所截出的微段的變形, 一般地由在兩主平面 xz 與

1) 參閱 Timoshenko, *loc. cit.*

2) 曲杆的小變形理論為 Saint-Venant 所創; 參閱他的一系列論文, *Compt. rend.*, Paris, vol. 17, 1843. 並參閱 A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., p. 444, 1927.

yz 内的弯曲及绕 z 轴的扭转所组成。设 $1/\rho_1$ 与 $1/\rho_2$ 各为变形后中心线的点 O 在主平面 yz 与 xz 内的曲率，而 θ 为在同一点的每单位长度的扭转角。于是，如果 $1/R$ 表示杆的中心线的初曲率，计算曲率与扭转的方程为

$$\frac{EI_x}{\rho_1} = M_x, EI_y \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{R} \right) = M_y, C\theta = M_z, \quad (a)$$

式中的 M_x, M_y 与 M_z 分别为在点 O 的截面绕 x, y 及 z 轴的力矩，以图中所示的为正； EI_x 与 EI_y 为两个主弯曲刚度，而 C 为杆的扭转刚度。

要得到计算位移 u, v, w 及角度 φ 的微分方程，必须建立曲率与单位扭转角为 u, v, w 与 φ 的函数的表达式，并将这些表达式代入方程 (a)。若位移很小，我们可分别考虑每一位移分量，而将各个分量所产生的结果相加以得到曲率与单位扭转角的总的改变。

分量 u 与 w 表示在杆的初曲率平面内的位移。它们只在 xz 平面内产生曲率的改变。这是在 § 7.1 所讨论过的。由这讨论我们得到

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R} + \frac{u}{R^2} + \frac{d^2u}{ds^2}. \quad (b)$$

现在我们来研究角位移 φ 。很容易看出，这位移产生单位扭转角

$$\theta = \frac{d\varphi}{ds}; \quad (c)$$

它的主平面 yz 内还产生某些弯曲。由于转动 φ ，杆表面变为一锥面，其曲率为

$$\frac{\sin \varphi}{R} \approx \frac{\varphi}{R}. \quad (d)$$

位移 v 在主平面 yz 内产生曲率，其值为

$$-\frac{d^2v}{ds^2}, \quad (e)$$

这与直杆类似。这负号是由关于弯矩与曲率的正号(如图 7.21 与方程 (a) 所给)的假设而来的。从这些可以看出，对于正的 M_x 及正的 $1/\rho_1$ ，在 yz 平面内的弯曲将是向上凹的，而 d^2v/ds^2 的正的值相应于向下凹的弯曲；因此，在表达式 (e) 中用负号。

从图 7.22 还可以看出，位移 v 产生了一些扭转。这图表示相距 ds 的两相邻截面 O 与 O_1 之间的弯杆的微段。由于位移 v ，这微段对于 Ox 轴转了一角度 dv/ds 。由于这转动，相邻的截面 O_1 的轴 O_1x_1 到了 O_2x_2 的位置。 O_1x_1 与 O_2x_2 之间的夹角等于 dv/R 。因此，由于位移 v ，产生每单位长度的扭转角等于

$$\frac{1}{R} \frac{dv}{ds}. \quad (f)$$

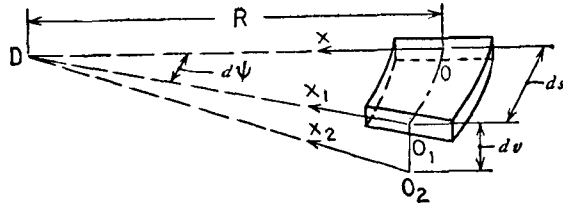


图 7.22

这是设沿杆的长度角 φ 保持为零而得的。

将式(b)至(f)的结果相加, 曲杆在变形后的曲率与单位扭转角在一般的情况下由以下诸方程给出:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{\varphi}{R} - \frac{d^2v}{ds^2}, \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{1}{R} + \frac{u}{R^2} + \frac{d^2u}{ds^2}, \\ \theta &= -\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dv}{ds}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

将这些代入方程(a), 得到决定位移的三个方程。

有了这些方程, 我们来研究轴线为圆形的狭长矩形截面杆, 为大小相等方向相反并作用于薄条平面内的两力偶 M_0 所弯曲的屈曲问题 (图 7.23)¹⁾。

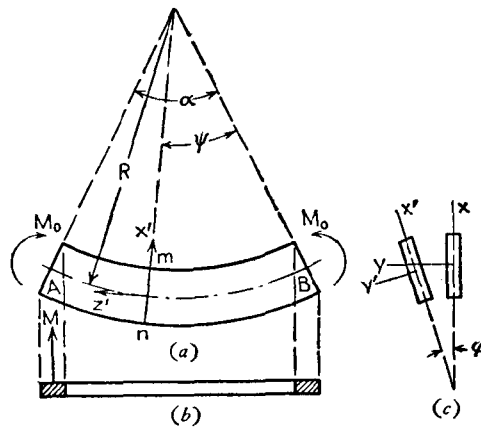


图 7.23

1) 参阅 Timoshenko, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1910.

设杆的两端为简支，即两端可以自由地绕它们的惯性主轴转动，但不能绕在点 A, B 处的中心线的切线而转动。在计算力偶 M_0 的临界值时，我们设有一很小的横向屈曲，而来决定保持这杆的屈曲状态所须的 M_0 值。取任一横截面 mn ，在屈曲时，这截面转了一角度 φ ，如图 7.23c 所示，因此 x, y 与 z 轴达到了 x', y' 与 z' 的方向。考虑在这截面左边这部分薄条，于是作用于薄条左端且垂直于薄条原来平面的矢量 M_0 ，对于 x', y' 及 z' 诸轴的投影分别为

$$M_{x'} = M_0 \varphi, \quad M_{y'} = M_0, \quad M_{z'} = M_0 \frac{dv}{ds}.$$

运用这些表达式连同方程(a)，并用方程(7.32)，得到

$$\begin{aligned} \varphi M_0 &= EI_x \left(\frac{\varphi}{R} - \frac{d^2 v}{ds^2} \right), \\ M_0 &= EI_y \left(\frac{u}{R^2} + \frac{d^2 u}{ds^2} \right), \\ M_0 \frac{dv}{ds} &= C \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dv}{ds} \right). \end{aligned} \quad (g)$$

自这些方程的第一个与第三个方程中消去 v ，得到角 φ 的下列方程：

$$EI_x C \frac{d^2 \varphi}{ds^2} - \left(M_0 - \frac{C}{R} \right) \left(\frac{EI_x}{R} - M_0 \right) \varphi = 0. \quad (h)$$

当 $R = \infty$ ，方程(h)与对狭长矩形截面直杆所得的方程(6.12)相同。用记号

$$k^2 = \frac{1}{EI_x C} \left(M_0 - \frac{C}{R} \right) \left(\frac{EI_x}{R} - M_0 \right), \quad (i)$$

方程(h)成为

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + k^2 \varphi = 0,$$

于是得到

$$\varphi = A \sin ks + B \cos ks. \quad (j)$$

由两端的条件可知：

$$\varphi = 0, \quad \text{当 } s = 0 \text{ 及 } s = \alpha R.$$

由此 $B = 0$ ，并且

$$\sin k\alpha R = 0. \quad (k)$$

由这三角函数方程可得到 M_0 的临界值，这方程的最小的非零根为

$$k\alpha R = \pi,$$

由上式并运用记号(i)，我们得到下列方程以计算 M_{cr} ：

$$M_{cr}^2 - \frac{EI_x + C}{R} M_{cr} + \frac{EI_x C}{R^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{\alpha^2} \right) = 0.$$

这方程的两个实根为

$$M_{cr} = \frac{EI_x + C}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{EI_x - C}{2R}\right)^2 + \frac{EI_x C \pi^2}{R^2 \alpha^2}} \quad (7.33)$$

将 $R = \infty$ 及 $R\alpha = l$ 代入这解, 得到

$$M_{cr} = \pm \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_x C},$$

这与对直杆所得的公式(6.13)相同。

当角度 α 与杆中心线的初曲率(图 7.23) 很小时, 方程(7.33) 中根号内的第一项与第二项相比可以略去。于是代入 $\alpha R = l$, 得到

$$M_{cr} = \frac{EI_x + C}{2R} \pm \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_x C}. \quad (7.34)$$

这公式中的正号相应于图 7.23 中所示的弯矩的方向, 而负号相应于弯矩的相反的方向。因此, 与长度相同的直杆相比, 图中所示方向的小曲率使临界弯矩值增大了。相反方向的曲率使弯矩的临界值减小。

当 $\alpha = \pi$, 公式(7.33) 所给的两弯矩值之一成为零。这结果相应于半圆薄条可自由地绕联结两端的直径而转动。当 $\alpha > \pi$, 由公式(7.33) 所得的两个 M_{cr} 值均为正; 要得到负的 M_{cr} 值, 必须考虑方程(k) 的高次根。

如果圆形轴线杆承受沿中心线连续分布并指向圆心的均布荷重 q (图 7.24), 这杆的横向屈曲问题也已解决¹⁾。若杆的两端为简支, 即两端可以自由地绕它们的主轴转动, 但不能绕杆中心线在点 A 与 B 的切线而转动, 则发生横向屈曲时杆内的压力的临界值由以下这公式给出:

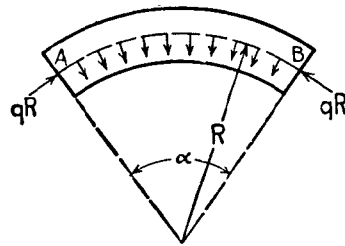


图 7.24

$$q_{cr} R = \frac{EI_x}{R^2 \alpha^2} \frac{(\pi^2 - \alpha^2)^2}{(\pi^2 + \alpha^2 EI_x / C)}. \quad (7.35)$$

在推导这公式时, 我们假设横向屈曲时荷重 q 的方向不变, 认为它们仅在横向有位移并保持平行于它们原来的方向。

当 α 很小时, 并取 $\alpha R = l$, 公式(7.35) 给出

$$q_{cr} R = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2},$$

1) 参阅 Timoshenko, *Z. Angew. Math. u. Mech.*, vol. 3, p. 358, 1923. 有关桥拱的横向稳定的特殊问题, 曾为 L. Östlund 所研究, *Trans. Roy. Inst. Technol. Stockholm*, No. 84, 1954.

即我们得到熟知的欧拉公式。当 $\alpha = \pi/2$, 由(7.35)得到

$$q_{cr}R = \frac{EI_x}{R^2} \frac{9}{4 + EI_x/C}. \quad (7.36)$$

这表明一完整的圆环在径向压力作用下屈曲成为四个半波 (从而每个半波相当于 $\alpha = \pi/2$) 时的临界荷重。当 $\alpha = \pi$, 临界荷重变为零, 因为在这情况下杆可以自由地绕连杆两端的直径而转动。

如果我们设当杆屈曲时荷重 q 略微改变其方向, 而永远指向杆的初曲率的中心, 于是压力的临界值为

$$q_{cr}R = \frac{\pi^2 EI_x}{R^2} \frac{(\pi^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\pi^2 + \alpha^2 EI_x/C)}. \quad (7.37)$$

对于屈曲成四个半波 ($\alpha = \pi/2$) 的一完整的环, 这公式给出¹⁾

$$q_{cr}R = \frac{EI_x}{R^2} \frac{12}{4 + EI_x/C}. \quad (7.38)$$

可以看出, 由于假设荷重方向稍有改变, 环的稳定性有了相当大的增加。若杆 (图 7.24) 两端为固定, 并如在第一种情形中所设在屈曲时荷重的方向保持不变, 则压力的临界值由公式

$$q_{cr} = \gamma_5 \frac{EI_x}{R^3} \quad (7.39)$$

给出, 式中 γ_5 为与角度 α 的大小有关的数值因子。表 7.9 中列出了这因子的几个值。若 α 小于 $\pi/2$, 公式(7.39)可用以下这近似式来代替:

$$q_{cr}R = \frac{EI_x}{R^2} \frac{(4\pi^2 - \alpha^2)^2}{\alpha^2(4\pi^2 + \alpha^2 EI_x/C)}.$$

当 α 很小时, 这公式给出了对于两端固定杆的临界荷重的欧拉值。

表 7.9 在方程(7.39)中因子 γ_5 的值

α/π	0.25	0.5	1	1.063	1.10	1.24	1.50	2
γ_5	60.1	12.6	1.85	1.54	1.40	1.00	0.69	0.60

在处理轴线为圆形的杆的屈曲问题时, 亦可用能量法计算临界荷重。例如, 这方法可用于工字截面杆的近似的稳定性研究。对于这情形, 与微分方程(g)相似的平衡微分方程的积分非常复杂。

1) 这公式为 H. Hencky 所得, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 1, p. 451, 1921.

第八章 薄板的弯曲

§ 8.1. 板的純弯曲

对于稜柱杆的純弯曲，由假设杆的横截面在弯曲时保持为平面且仅绕中性轴旋转而总垂直于挠度曲线，得到了应力分布的精确解。在板的純弯曲中，发生两垂直方向的这样弯曲的组合。我们先来研究矩形板为弯矩所引起的純弯曲；弯矩系均匀分布在板边上，如图 8.1 所示。与板的上下两表面等距离的平面即所谓板的**中面**，我们取这平面为 xy 平面，而沿板的两边为 x 及 y 轴，如图。取 z 轴与中面相垂直，且向下为正。以 M_x 表示与 y 轴平行的边的每单位长度内的弯矩，以 M_y 表示与 x 轴平行的边的每单位长度内的弯矩。使板的上表面受压而下表面受拉的弯矩为正。以 h 表示板厚，它与板的其他尺寸相比为小量。

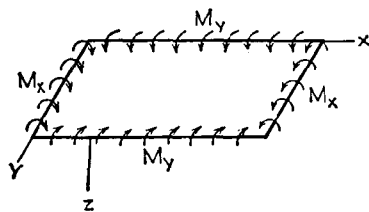


图 8.1

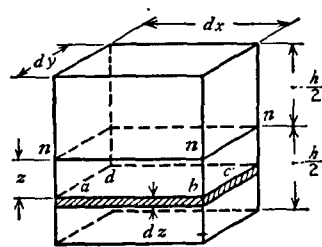


图 8.2

我们来研究由平行于 xz 及 yz 平面的两对平面自板所截出的一体元，如图 8.2 所示。假设当板弯曲时这体元的侧面保持为平面且绕中性轴 $n-n$ 而旋转，以保持与挠度曲面垂直，于是可得结论：在板弯曲时，板的中面并不经受任何变形，因而即为**中性面**。以 $1/\rho_x$ 及 $1/\rho_y$ 分别表示中性面在平行于 xz 及 yz 平面的截面内的曲率，并以向下凸的弯曲的曲率为正。于是距中性面为 z 的薄

层 $abcd$ (图 8.2) 在 x 及 y 方向的单位伸长可与梁的情形一样得到, 于是有

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y}. \quad (a)$$

运用胡克定律,

$$\sigma_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \sigma_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (b)$$

式中的 ν 为泊松比, 于是薄层 $abcd$ 内的相应的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right), \\ \sigma_y &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right). \end{aligned} \quad (c)$$

它们与薄层 $abcd$ 至中性面的距离 z 成正比, 并与弯曲了的板的曲率的大小有关。

这些分布在图 8.2 中的体元侧面上的正应力, 可归结为与外加弯矩相等的力偶。这样, 我们得到方程

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dy dz &= M_x dy, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dx dz &= M_y dx. \end{aligned} \quad (d)$$

代入 σ_x 及 σ_y 的表达式(c), 得到

$$M_x = D \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right), \quad (8.1)$$

$$M_y = D \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right), \quad (8.2)$$

式中

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (8.3)$$

这量称为板的弯曲刚度。

只要板的挠度比板的厚度 h 为小量, 板在弯曲时中面内无应变的假设通常是足够准确的。如果这条件并不符合, 则在板的中

面內通常将产生变形¹⁾，而在研究板內的应力分布时須加以考虑。这較复杂的板的弯曲問題将在以后討論(參閱 § 8.7)。

以 w 表示板的挠度；与梁的曲率的熟知公式类似，板的曲率的近似公式为

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

代入方程(8.1)及(8.2), 得到

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (8.4)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (8.5)$$

当弯矩 M_x 及 M_y 为已知时, 这两方程确定了板的挠度曲面。对于 $M_y = 0$ 的特殊情形, 这矩形板(图 8.1)将象梁一样地弯曲。由方程(8.5), 对于这情形我們得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

这板有两个符号相反的曲率, 因而这板将弯成**互反曲面** (anticlastic surface)。

当 $M_x = M_y = M$, 挠度曲面在两互相垂直方向的曲率相等, 而这曲面为球面, 由方程(8.1), 球的曲率为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{D(1 + \nu)}. \quad (8.6)$$

我們来研究对于弯曲了的板与 z 軸平行而与 x 及 y 軸斜交的截面上的应力。若 acd (图 8.3) 表示由这样的截面自薄层 $abcd$ (图 8.2) 所截出的部分, 則可由靜力平衡方程得到作用在 ac 边上的应力。将这应力分解为正应力 σ_n 及剪应力 τ_{nt} , 这两分量的大小可得自熟知的方程

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha, \\ \tau_{nt} &= \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (e)$$

1) 只当挠度曲面为可展曲面时, 例如柱面或锥面, 才可能挠度相当大而板的中面內无应变。

式中的 α 为法线 n 与 x 轴之间的夹角，或者是 t 的方向与 y 轴之间的夹角(图 8.3a)。这角以顺时针方向为正。

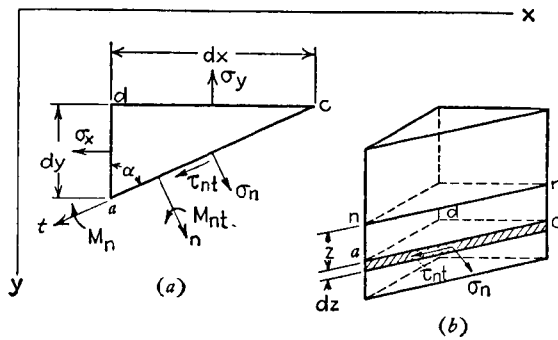


图 8.3

考虑在板的厚度内象 acd 那样的所有的薄层(图 8.3b)，则正应力 σ_n 组成一弯矩作用在板的 ac 截面上，其沿 ac 每单位长度内的大小为

$$M_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n z dz = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha. \quad (8.7)$$

剪应力 τ_{nt} 组成一扭矩，作用在板的 ac 截面上，其沿 ac 每单位长度内的大小为

$$M_{nt} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nt} z dz = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (M_x - M_y). \quad (8.8)$$

M_n 及 M_{nt} 的正负号是这样选择的：如果用如图 8.3a 所示的右手螺旋法则，则以上诸矩的正值由指向 n 与 t 的正的方向的矢量表示。当 α 等于零或 π ，方程(8.7)给出 $M_n = M_x$ 。当 $\alpha = \pi/2$ 或 $3\pi/2$ ，我们得到 $M_n = M_y$ 。对于这些 α 值，扭矩 M_{nt} 等于零。如是，我们得到图 8.1 所示的情形。

方程(8.7)及(8.8)与方程(c)相似，可用以计算任何 α 值时的弯矩和扭矩。我们也可以毫不困难地解这个问题：在两个互相垂直的截面上的 M_n 与 M_{nt} 为已知，求决定主平面（即只有弯矩 M_x 及 M_y 作用而扭矩为零的平面）的两个 α 值。

讓我們將 M_n 及 M_{nt} 表示為板的撓度 w 的函數。由假設，如圖 8.2 所示的微體元的側面在板彎曲時保持為平面而僅繞中性軸 $n-n$ 旋轉，以保持與撓度曲面垂直，所以每一垂直於中間面的綫元當板彎曲時仍保持直綫且垂直於板的撓度曲面。平行於 n 及 t (圖 8.3a) 且離中間面為 z 的纖維的單位伸長，可由兩方程

$$\epsilon_n = \frac{z}{\rho_n}, \quad \epsilon_t = \frac{z}{\rho_t} \quad (f)$$

表示，式中的 ρ_n 及 ρ_t 為撓度曲面在 nz 及 tz 平面內的曲率半徑。方程 (f) 與方程 (a) 類似，運用這兩方程及胡克定律 [參閱方程 (b)]，得到

$$\sigma_n = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_n} + \nu \frac{1}{\rho_t} \right).$$

將上式代入方程 (8.7)，得到

$$M_n = D \left(\frac{1}{\rho_n} + \nu \frac{1}{\rho_t} \right),$$

或運用曲率的近似表达式，

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \quad (8.9)$$

這方程與以前所得的方程 (8.4) 及 (8.5) 類似。若將 M_x 及 M_y 的表达式 (8.4) 與 (8.5) 代入方程 (8.7)，並運用曲面在兩垂直方向的曲率之間的关系，即

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_n} &= \frac{1}{\rho_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\rho_y} \sin^2 \alpha, \\ \frac{1}{\rho_t} &= \frac{1}{\rho_x} \sin^2 \alpha + \frac{1}{\rho_y} \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (g)$$

我們亦可得到同樣的結果。

要得到扭矩 M_{nt} 的表达式，我們可研究離中面為 z 的薄層 $abcd$ (圖 8.4a) 的變形，邊 ab 及 ad 分別與 n 及 t 平行。當板彎曲時， a, b, c, d 諸點將有微小的位移。以 u_1 及 v_1 表示點 a 在 n 與 t 方向的位移分量。於是相鄰的點 d 在 n 方向的位移為 $u_1 + (\partial u_1 / \partial t) dt$ ，而點 b 在 t 方向的位移為 $v_1 + (\partial v_1 / \partial n) dn$ 。由於

这些位移,我們得到剪应变为

$$\gamma_{nt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial n}. \quad (h)$$

相应的剪应力为

$$\tau_{nt} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial n} \right). \quad (i)$$

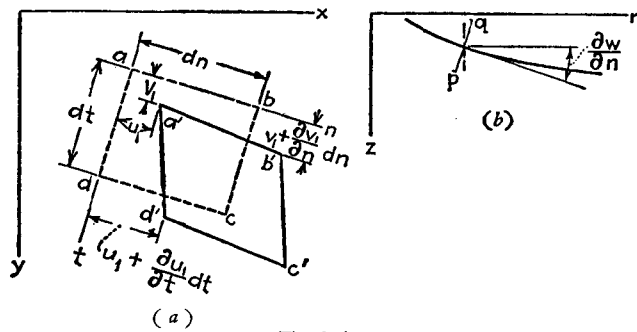


图 8.4

从图 8.4b (表示挠度曲面被一通过 n 轴的铅直平面所截出的面) 可以看出: 原来垂直于 xy 平面的綫元 pq 在这平面内的旋轉角等于 $\partial w / \partial n$. 由于这旋轉, 这綫元上离中性面为 z 的点在 n 方向的位移为

$$u_1 = -z \frac{\partial w}{\partial n}.$$

考虑通过 t 轴的铅直平面所截出的面, 可以証明, 該点在 t 方向的位移为

$$v_1 = -z \frac{\partial w}{\partial t}.$$

将位移 u_1 与 v_1 的这些值代入表达式(i), 我們得到

$$\tau_{nt} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}, \quad (8.10)$$

而扭矩的表达式(8.8)成为

$$M_{nt} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nt} z dz = \frac{Gh^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}. \quad (8.11)$$

弯矩及扭矩的表达式(8.9)及(8.11)将用于以后討論板弯曲的更一

般的情形。

在上述关于板純弯曲的討論中，我們是以沿边界上作用着均匀分布的弯矩的矩形板为开始的。要得到板純弯曲的一般情形，設想以一与板垂直的柱面自上述这板截取一任意形状的部分。这部分板的弯曲状况将保持不变，如果由方程(8.7)及(8.8)所給出的弯矩及扭矩的值分布在所截出的这部分板的周界上。如是，我們得到了任何形状的板的純弯曲情形，并且可得結論：如果弯矩 M_n 及扭矩 M_{nt} 系按照式(8.7)及(8.8)沿板的周界而分布，則板的純弯曲总是可以产生的。若以 $M_x = M_y = M$ 这特殊情形为例，則可自方程(8.7)及(8.8)得到結論：如果沿着周界作用着均匀分布的弯矩 M ，則任何形状的板将弯成一球面。取 $M_x = -M_y = M$ ，可得另一特例。自图 8.1 所示的板截出一矩形板，其边与 x 及 y 軸成 45° 角，并将 $\alpha = \pi/4$ 或 $3\pi/4$ 代入方程(8.7)及(8.8)，我們得到两边上的 $M_n = 0$ ；而在 $\alpha = \pi/4$ ， $M_{nt} = M$ ；在 $\alpha = 3\pi/4$ ， $M_{nt} = -M$ 。所以将扭矩均匀地分布在矩形板的边界上，这矩形板将产生純弯曲。

关于承受純弯曲的板的中应力，自方程(c)的第一式可得到結論：最大正应力作用在与 xz 及 yz 平面相平行的截面上。将 $z = h/2$ 代入并运用方程(8.1)，(8.2)及(8.3)，可自方程(c)得到最大应力值为

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6M_x}{h^2}, \quad (\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_y}{h^2}. \quad (8.12)$$

若以上两应力的正負号相反，則最大剪应力作用在等分 xz 与 yz 两平面夹角的截面内，并等于

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{3(M_x - M_y)}{h^2}.$$

若(8.12)的两应力的正負号相同，則最大剪应力作用在等分 xy 及 xz 两平面夹角的平面内，或作用在等分 xy 与 yz 两平面夹角的平面内，并等于 $(\sigma_y)_{\max}/2$ 或 $(\sigma_x)_{\max}/2$ ，需視两个正应力 $(\sigma_y)_{\max}$ 或 $(\sigma_x)_{\max}$ 那一个較大而定。

§ 8.2. 在分布横向荷重作用下板的弯曲

在研究垂直于板中面的荷重作用下板的弯曲这情形时，我們設这中面系水平且即为 xy 平面，而 z 轴系垂直向下。以 q 表示荷重的强度。一般地， q 可以沿板表面而变化，因此是 x 与 y 的函数。以平行于 xz 及 yz 坐标面的两对平面自板截出一体元（图 8.5），自静力学可得到結論：由于荷重 q 的作用，在这体元的侧面上不仅产生如前一节所述的弯矩和扭矩，而且还产生铅直剪力，其每单位长度的大小由以下公式决定：

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz. \quad (a)$$

τ_{xz} 与 τ_{yz} 沿 dy 与 dx 这些小距离内的变化可以略去，并設合剪力 $Q_x dy$ 与 $Q_y dx$ 系通过体元侧面的形心。对于每单位长度的弯矩和扭矩，我們采用和前一节一样的定义，并設

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz; \quad (b)$$

$$M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz, \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz. \quad (c)$$

剪力(a)，弯矩(b)及扭矩(c)均为坐标 x 与 y 的函数。因此，在对图 8.5 中的体元侧面用記号 Q_x ， M_x 及 M_{xy} 时，則对于体元离左边为 dx 的右边，相应的量等于

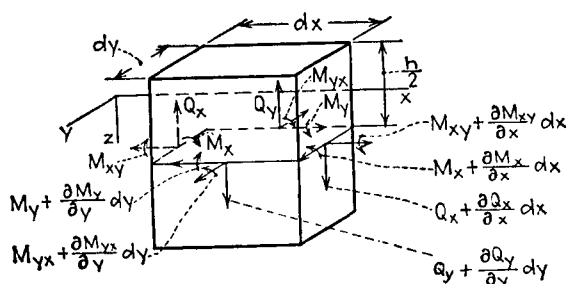


图 8.5

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx, \quad M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx, \quad M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx,$$

如图所示，对于体元的平行于 xz 平面的面，将得到类似的结论。

在研究这体元的平衡条件时，我们注意到，作用在体元上的所有的力均与 z 轴平行，而表示力偶的矢量均垂直于 z 轴。所以我们只有三个静力学方程——所有的力在 z 轴上的投影，以及所有的力对于 x 与 y 轴的力矩。注意及图 8.5 中所示的力的方向，它们在 z 轴上的投影给出方程

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0,$$

化简后，

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (d)$$

板自身的重量可认为已包括在 q 值内。计算作用在体元上的所有的力对于 x 轴的力矩，并注意图中所示的方向，我们得到

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0.$$

在推导这方程时，已略去荷重 q 与剪力 Q_y 的改变所产生的弯矩，因为它们与所保留的各项相比为高阶小量。经化简后，这方程成为

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \quad (e)$$

以同样的方法，对于 y 轴取力矩，得到

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (f)$$

从方程(f)与(e)决定 Q_x 与 Q_y ，并代入方程(d)，得到

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q.$$

由于 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，所以 $M_{yx} = -M_{xy}$ 。我们最后得到以下这平衡方程：

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (g)$$

略去剪力 Q_x 与 Q_y 对于板的曲率的影响¹⁾, 并运用对于纯弯曲情形所推演得的方程(8.9)与(8.11), 我们得到以下的弯矩与扭矩的表达式:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (8.13)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8.14)$$

代入方程(g), 得到

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (8.15)$$

如是, 确定板的挠度曲面将归结于方程(8.15)的积分.

若对于任一特定情形已得到了这方程的解, 则从方程(8.13)及(8.14)可计算弯矩和扭矩, 于是剪力可从方程(e)与(f)得到. 将弯矩与扭矩的表达式(8.13)与(8.14)代入后两方程, 得到

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (8.16)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (8.17)$$

有了弯矩和扭矩, 从方程(8.12)得到正应力 $(\sigma_x)_{\max}$ 和 $(\sigma_y)_{\max}$. 分别取 n 与 t 为 x 及 y 的方向, 由方程(8.10)得到平行于 x 及 y 轴的剪应力. 设剪力 Q_x 与 Q_y 系按照抛物线规律沿板的厚度而分布, 犹如矩形截面梁这情形一样, 即可得到与 z 轴平行的剪应力. 于是有

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{3}{2h} (Q_x)_{\max}, \quad (\tau_{yz})_{\max} = \frac{3}{2h} (Q_y)_{\max}.$$

如是, 若已知板的挠度曲面, 即可计算所有的应力.

1) 我们知道, 对于梁, 如果梁的高度远比跨度为小, 这影响是很小的. 对于板, 如果板的厚度远比其他的尺寸为小, 则可作类似的结论. 考虑及剪应力对于挠度的影响的板弯曲的更精确的理论为以下诸人所创: J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, 1900, 及 A. E. H. Love, *Theory of Elasticity*, 4th ed., p. 465, 1927; 并参阅 E. Reissner 的论文, *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pp. A-68, 1945.

对于每一特定情形,已知荷重 q 的分布及板的边界条件,板的挠度曲面的决定需求偏微分方程 (8.15) 的积分. 在以下的讨论中,将主要讨论矩形板,而现在将研究这种板的各种边界条件.

固定边 如果板的边系固定,则沿这边的挠度为零,并且挠度曲面沿这边的切面与板的中面的原来位置重合. 取在板中面内的 x 及 y 轴沿板的两边,并设与 x 轴重合的边为固定边,则沿这边的边界条件为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \quad (8.18)$$

简支边 如果板的边 $y = 0$ 为简支,则沿这边的挠度必为零. 同时,这边可以绕 x 轴自由地旋转,即沿这边无弯矩 M_y . 这种支承表示在图 8.6 中. 对于这情形,边界条件的分析表达式为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0. \quad (8.19)$$

自由边 如果板的边 $x = a$ (图 8.7) 系完全自由,则很自然地可设想沿这边无弯矩、扭矩及铅直剪力;即

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (M_{xy})_{x=a} = 0, \quad (Q_x)_{x=a} = 0.$$

这样形式的边界条件为泊松¹⁾所提出. 但后来克希霍夫²⁾ (Kirchhoff) 证明,三个边界条件太多了,而两个条件就足以完全决定挠度 w . 他还指明,泊松的关于扭矩和剪力的两个条件可以用一个

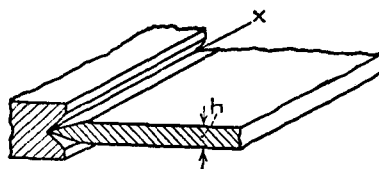


图 8.6

1) 参阅 I. Todhunter 与 K. Pearson 的 "History of the Theory of Elasticity", vol. 1, p. 250 中对于这问题的讨论. 并参阅 Clebsch 的 "Théorie de l'élasticité des corps solides" (1883), § 73 最后一个注释, p. 689, 中 Saint-Venant 的讨论.

2) 参阅 J. de Crelle, vol. 40, 1850.

边界条件来代替。湯姆逊(Thomson)和戴德(Tait)曾解释了边界条件个数减少的物理意义¹⁾。这两位作者指出: 如果以两个相距为 dy 的铅直力 M_{xy} (图 8.7) 代替产生扭矩 $M_{xy}dy$ (作用在边 $x=a$ 的 dy 长度内) 的水平力, 则并不改变板的弯曲。这样的代替并不

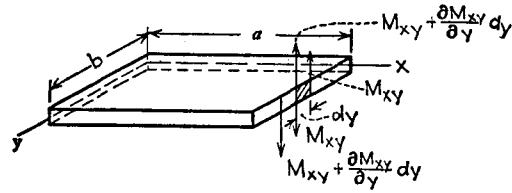


图 8.7

改变扭矩的大小, 只是板边界的应力分布有局部的改变, 而板的其余部分的应力并无改变。如上地代替沿板边的扭矩, 则如由研究图示的两相邻的微面积可以看出的, 扭矩 M_{xy} 的分布静力等效于强度为

$$(Q'_x)_{x=a} = - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a}$$

的剪力的分布, 所以关于扭矩及剪力在 $x = a$ 这边的联合的要求为

$$\left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0. \quad (h)$$

将 Q_x 与 M_{xy} 的表达式(8.16)及(8.14)代入, 对于自由边 $x = a$, 我们最后得到

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \quad (8.20)$$

沿自由边弯矩为零的条件要求

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0. \quad (8.21)$$

方程(8.20)与(8.21)表示沿板自由边 $x = a$ 的两个必须的边界条件。

1) 参阅 "Natural Philosophy", vol. 1, part 2, p. 188, 1883.

如以上的討論所述及如图 8.7 所示将扭矩轉換, 我們不仅得到分布在 $x = a$ 这边的剪力 Q'_x , 并且在这边的两端得到两个集中力, 如图 8.8 所示。这两个集中力的大小等于在板相应的角上的扭矩 M_{xy} 。将沿 $y = b$ 这边的扭矩 M_{yx} 作类似的轉換, 則除分

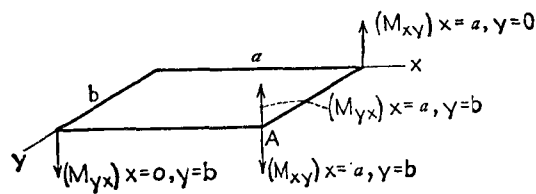


图 8.8

布的剪力外, 在角上又有集中力 M_{yx} 。这表明, 承受横向荷重的沿边界被支承的矩形板, 通常不仅产生沿边界分布的压力, 并且在角上将产生集中压力。如已知挠度曲面的一般形状, 即可定出这集中压力的方向。例如, 对四边简支承受均布荷重的正方形板, 图 8.9a 的虚线表示挠度曲面的一般形状, 它們表示挠度曲面被与 xz 及 yz 坐标面平行的平面截出的线。从这些线可以看出, 表示挠度曲面在 x 方向的斜率的导数 $\partial w / \partial x$ 在角 A 附近为负, 并且当 y 增

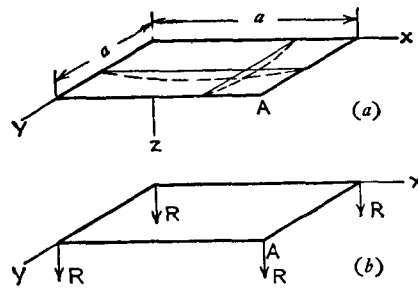


图 8.9

大时在数值上逐渐减小。因此, 在角 A 的 $\partial^2 w / \partial x \partial y$ 为正; 从方程 (8.14) 可得結論: M_{xy} 为正而 M_{yx} 为负。由上述結論及由 M_{xy} 与 M_{yx} 的方向(图 8.5)可知, 表示在图 8.8 中的角点 A 的两集中力均

向下。由对称性可知，板的四个角上的力方向相同大小相等。所以其情况如图 8.9b 所示，其中

$$R = 2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

当一正方形板承受均布荷重时，它的角有翘起的趋势，这被如图所示的角上的集中反作用力所阻止。

弹性支承及弹性固定边 若矩形板的边 $x = a$ 系刚性固结于一梁（图 8.10），则沿这边的挠度不等于零，而等于梁的挠度。并且，这边的转动等于

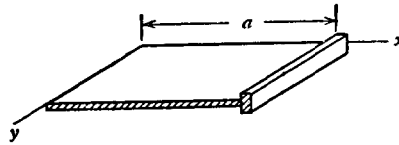


图 8.10

梁的扭转。设 EI 为梁的弯曲刚度，而 C 为梁的扭转刚度。由方程(h)自板传至梁的压力为

$$-\left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a},$$

而梁的挠度曲线的微分方程为

$$EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=a} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a}. \quad (8.22)$$

这方程表示板沿 $x = a$ 这边的边界条件之一。

要得到第二个条件，须考虑梁的扭转。梁的任一横截面的转角为 $-(\partial w / \partial x)_{x=a}$ ，而这角沿边的变化率为

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a},$$

因此梁内的扭矩为 $-C(\partial^2 w / \partial x \partial y)_{x=a}$ 。这力矩沿边而变化，因为刚性结于梁的板将扭矩传递给梁。每单位长度的扭矩值必与板的弯矩 M_x 大小相等而方向相反。因此，由考虑支承梁的扭转，我们得到

$$-C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = -(M_x)_{x=a},$$

或代入 M_x 的表达式(8.13)，

$$-C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a}. \quad (8.23)$$

这就是板在 $x = a$ 这边的第二个边界条件。

§ 8.3. 板受弯曲与拉伸或压缩的联合作用

在前面的讨论中,曾假设板是由横向荷重所弯曲的,并且挠度很小使板的中面的伸长可以略去;所以将这平面作为板的中性面。但如果除横向荷重外,有力作用在板的中面内,则中面将被拉伸并必须考虑相应的应力。我们应区别两种可能的情形:(1)这些应力与临界屈曲应力相比很小,我们

可略去它们对于板的弯曲的影响,并假设将由中面的伸长所引起的应力与由横向荷重所产生的应力相迭加,就可足够准确地得到总的应力;(2)板的中面内的应力并不小,从而必须计入它们对板弯曲的影响。在推演对于第二种情形的相应的挠度曲面的微分方程时,我们仍研究由平行于 xz 与 yz 坐标面的两对平面自板所截出的体元的平衡。除了前一节所计入的力(参阅图 8.5 以外,我们现在将有作用在板中面内的

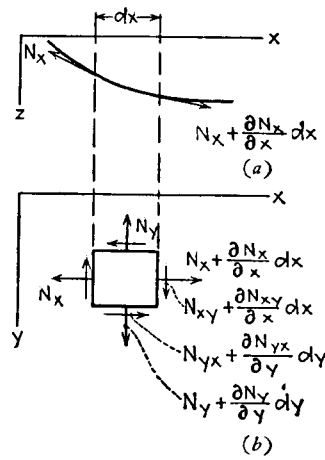


图 8.11

力;每单位长度内的这些力的记号示于图 8.11 中。将这些力投影于 x 及 y 轴,并设在这两个方向无体积力作用,我们得到下列平衡方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

可以看出,这两个方程与前一节所讨论的三个方程完全无关,而正如以后所述(参阅 § 8.7)可以分开来处理。

在计算图 8.11 所示的诸力对于 z 轴的投影时,必须计入板的挠度。由于板在 xz 平面内的曲率(图 8.11a),法向力 N_x 在 z 轴上的投影为

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy.$$

經化簡并略去高阶小量, 这投影将为

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \quad (a)$$

以同样的方法, 法向力 N_y 在 z 轴上的投影为

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (b)$$

在討論剪力 N_{xy} 在 z 轴上的投影时, 我們来研究图 8.12 中所示的

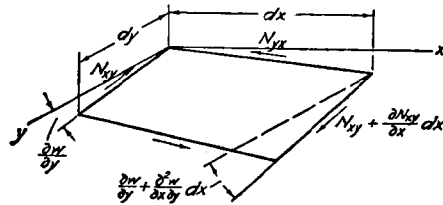


图 8.12

中面的微面积 $dx dy$ 的挠曲。可以看出, 由于角

$$\frac{\partial w}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx,$$

剪力 N_{xy} 在 z 轴上的投影等于

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

对于剪力 $N_{yx} = N_{xy}$ 在 z 轴上的投影, 可得到类似的表达式; 于是所有的剪力在 z 轴上的投影的最終表达式为

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \quad (c)$$

将表达式(a), (b)及(c)加于作用在微面积上的荷重 $q dx dy$ 并运用方程(8.24), 代替前一节的方程(g), 我們得到下列平衡方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = & - \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned}$$

将 M_x , M_y 及 M_{xy} 的表达式(8.13)与(8.14)代入,得到¹⁾

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (8.25)$$

当 N_x , N_y 及 N_{xy} 与这些力的临界值相比并不很小时,必须用这微分方程来代替方程(8.15)以决定板的挠度曲面。

如果有体积力作用于板的中面内,则图 8.11 所示体元的平衡微分方程将为

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (8.26)$$

式中的 X 与 Y 为板中面每单位面积的体积力的两个分量。

与先前一样将表达式(a),(b)及(c)加于荷重 $q dx dy$,并运用方程(8.26),而不用方程(8.24),则代替方程(8.25),我们得到以下这方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X \frac{\partial w}{\partial x} - Y \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (8.27)$$

当须计入体积力时,必须用以上这微分方程以代替方程(8.25)。

§ 8.4. 板弯曲的应变能

在研究薄板的稳定性时,能量法(参阅 § 2.8)常为一有效的途径。这里我们将导出弯曲平板在各种荷重情况下的应变能的表达式。

纯弯曲 若一板被均匀分布的弯矩 M_x 及 M_y 所弯曲(图 8.1),则贮藏在如图 8.2 所示的体元内的应变能,可由计算板弯曲时弯矩 $M_x dy$ 及 $M_y dx$ 对于这体元所作的功而得到。由于体元的侧面保持为平面,所以弯矩 $M_x dy$ 所作的功等于弯矩与板弯曲以后两相应侧面间夹角的乘积之半。因 $-(\partial^2 w / \partial x^2)$ 近似地表示板在 xz 平面内的曲率,所以与 $M_x dy$ 相应的角度为 $-(\partial^2 w / \partial x^2) dx$, 而这些

1) 这微分方程为 Saint-Venant 所得到;参阅 *op. cit.*, p. 704.

弯矩所作的功为

$$-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy.$$

对于弯矩 $M_y dx$ 所作的功，亦可得到类似的表达式。于是与这体元的势能相等的总功为

$$dU = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

代入弯矩的表达式(8.4)及(8.5), 这体元的应变能由以下这表达式表示:

$$dU = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy. \quad (a)$$

于是这板的总的应变能可由式(a)积分而得:

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy, \quad (8.28)$$

这积分必须遍及全部板面积。

由于横向荷重而弯曲的板 再研究板的一体元，如图 8.5 所示，并略去剪力 Q_x 与 Q_y 所产生的应变能，则体元的应变能等于弯矩 $M_x dy$ 与 $M_y dx$ 以及扭矩 $M_{xy} dy$ 与 $M_{yx} dx$ 对于这体元所作的功。因略去了铅直剪力对挠度曲面的曲率的影响，弯矩所产生的应变能将以上由纯弯曲所得的表达式(8.28)相同。

在推演由扭矩 $M_{xy} dy$ 所产生的应变能的表达式时，注意相应的扭转角(图 8.12)为 $(\partial^2 w / \partial x \partial y) dx$ ；所以由于 $M_{xy} dy$ 的应变能为

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = \frac{1}{2} D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy.$$

扭矩 $M_{yx} dx$ 将产生相同的应变能，因此由于这两对扭矩的应变能为

$$D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy.$$

因扭转并不影响弯矩所作的功，板的体元的总应变能可由弯曲能与扭转能相加而得。于是得到

$$dU = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy + \\ + D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy. \quad (b)$$

整个板的应变能由积分而得:

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

或者

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (8.29)$$

板的弯曲与拉伸或压缩的联合作用 对于同时承受横向荷重及作用在中面内的力而弯曲的板, 我们设先施加中面内的力。这样, 我们得到一弹性力学的平面问题。由解这问题可决定力 N_x , N_y 和 N_{xy} (图 8.11) 以及应变分量

$$\varepsilon_x = \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{hE} (N_y - \nu N_x); \\ \gamma_{xy} = \frac{N_{xy}}{hG}.$$

于是, 由于作用在板中面内的力使中面变形而产生的能量为

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = \\ = \frac{1}{2hE} \iint [N_x^2 + N_y^2 - 2\nu N_x N_y + 2(1+\nu) N_{xy}^2] dx dy. \quad (8.30)$$

在进一步讨论板的小挠度时, 我们认为 N_x , N_y 及 N_{xy} 保持不变, 因此在板弯曲时 U_0 这部分应变能保持不变, 所以在以下的讨论中不必考虑它。

现在施以使板弯曲的横向荷重。以 u , v , w 表示在板弯曲时板中面内的任一点在 x , y , z 方向的位移分量。考虑这面内在 x

方向的一綫元(图 8.13),可以看出,这綫元由于位移 u 的伸长等于 $(\partial u/\partial x)dx$. 比較图 8.13 中的綫元 A_1B_1 的长度与其在 x 軸上的投影的长度,可知这綫元由于位移 w 的伸长为 $1/2 (\partial w/\partial x)^2 dx$. 因此在板中面內的綫元在 x 方向的总的单位伸长为

$$\epsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (c)$$

同样,在 y 方向的应变为

$$\epsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (d)$$

由于位移 u 与 v 所产生的剪应变由 § 8.1 的方程(h)得到. 为了决定位移 w 所引起的剪应变,在 x 与 y 方向取两无限小的綫元 OA 及 OB , 如图 8.14 所示. 由于位移 w , 这两綫元达到了 O_1A_1 和 O_1B_1 的位置. 角 $A_1O_1B_1$ 与 $\pi/2$ 之差即为相应于位移 w 的剪应变. 要决定这差值,我們研究直角 $B_2O_1A_1$. 将 $B_2O_1A_1$ 平面繞 O_1A_1 轉

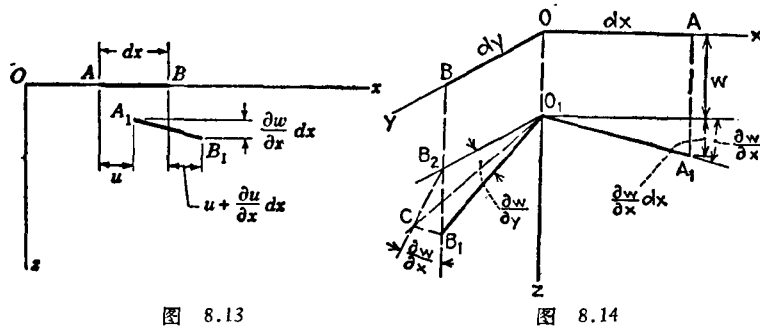


图 8.13

图 8.14

一小角度 $\partial w/\partial y$, 就使平面 $B_2O_1A_1$ 与平面 $B_1O_1A_1$ 重合, 于是点 B_2 达到了 C 的位置. 位移 B_2C 等于 $(\partial w/\partial y) dy$ 且对鉛直綫 B_2B_1 傾斜一小角 $\partial w/\partial x$. 于是由三角形 B_2CB_1 可知, CB_1 等于

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dy,$$

而表示相应于位移 w 的剪应变的角 CO_1B_1 等于 $(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y)$. 将这剪应变与由于位移 u 及 v 所引起的剪应变相加, 得到

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (e)$$

我們設由于弯曲, 中面內的应变 ϵ'_x , ϵ'_y 及 γ'_{xy} 比 ϵ_x , ϵ_y 及 γ_{xy} 为小量. 并設板弯曲时 N_x , N_y 及 N_{xy} 諸力保持不变, 則由于中面的附加拉伸的应变能为

$$\iint (N_x \epsilon'_x + N_y \epsilon'_y + N_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy.$$

將以上这应变能与由方程 (8.29) 所示的弯曲的应变能相加, 并代入 ϵ'_x , ϵ'_y 及 γ'_{xy} 的表达式 (c), (d) 和 (e), 板在弯曲时应变能的总的改变可由以下这形式表示:

$$\begin{aligned} U = & \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy + \\ & + \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \left. \right] dx dy + \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (8.31) \end{aligned}$$

用分部积分法可以証明: 右边第一个积分表示作用在板中面內的力在板弯曲时所作的功. 如取图 8.9a 所示的矩形板, 我們得到

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy = \\ & = \int_0^b \left(\left| N_x u \right|_0^a + \left| N_{xy} v \right|_0^a \right) dy + \\ & + \int_0^a \left(\left| N_y v \right|_0^b + \left| N_{xy} u \right|_0^b \right) dx - \\ & - \int_0^b \int_0^a u \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) dx dy - \\ & - \int_0^b \int_0^a v \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

这方程右边的头两个积分表示作用在板边界上的力及作用在板中面內的力所作的功. 如果方程 (8.24) 成立, 即在板的中面內并无体积力作用, 則后两个积分等于零. 否則, 这两个积分表示板弯曲时体积力所作的功 [参閱方程 (8.26)].

如果表达式(8.31)的第一个积分表示作用在板中面内的力所作的功, 则这式的其余的几个积分必等于垂直于板的荷重所作的功. 运用记号 T_1 和 T_2 表示以上这两力系所作的功, 并设无体积力, 即得:

$$T_1 = \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy, \quad (f)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (g)$$

如果在讨论板的弯曲时, 板中间面的拉伸可以略去, 则由表达式(c), (d)和(e)可得结论:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = - \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

由此可知, 作用在板中面内的力所作的功可以表示为以下的形式:

$$T_1 = - \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (8.32)$$

我们还得到

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (8.33)$$

运用式(8.33)及虚位移原理, 与梁(参阅 § 1.11)一样地可以得到板的挠度. 在以下两节中将讨论这方法的应用的几个例子¹⁾.

1) 方程(8.33)系 G. H. Bryan 所建立, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 22, p. 45, 1891. H. Reissner 对这方程作了进一步的讨论, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 5, p. 475, 1925.

§ 8.5. 簡支边矩形板的挠度

对于簡支边矩形板(图 8.15), 挠度曲面可由双重三角級数

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8.34)$$

来表示。对于 $x = 0$, $x = a$ 以及对于 $y = 0$, $y = b$, 这級数的每一項均为零。所以, 如实际的情况所要求, 沿板的边界挠度为零。計算导数 $\partial^2 w / \partial x^2$ 及 $\partial^2 w / \partial y^2$, 又可以看出, 所計算的級数的每一項在边界上等于零。由此可得結論: 沿板的边界弯矩 [参閱方程 (8.13)] 为零。这对于簡支边是必然的。如是, 表达式 (8.34) 滿足所有的边界条件。对于这情形的弯曲势能的表达式 [参閱式 (8.29)] 为:

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

代入 w 的表达式 (8.34), 可以証明, 在方括号中的項的积分为零, 于是得到

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}^2 dx dy.$$

只有括号中无穷級数的項的平方的积分不等于零(参閱第 31 頁), 并注意

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4},$$

我們得到

$$U = \frac{ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (8.35)$$

有了这 U 的表达式, 与計算梁的挠度完全相同(参閱 § 1.11), 可运用虚位移原理得到受任何荷重作用的板的挠度。例如, 設有

一集中力 Q 作用于坐标为 ξ 及 η 的点 A (图 8.15)。要决定对于这情形的级数(8.34)的任一系数 a_{mn} ，我们使这系数有一微小增量 δa_{mn} 。于是板的相应的虚挠度为

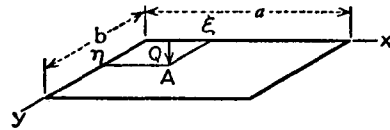


图 8.15

$$\delta a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

荷重 Q 对这位移所作的功为

$$Q \delta a_{mn} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b},$$

由虚位移原理我们得到以下这方程:

$$\begin{aligned} Q \delta a_{mn} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} &= \frac{\partial U}{\partial a_{mn}} \delta a_{mn} = \\ &= \frac{ab}{4} D a_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \delta a_{mn}, \end{aligned} \quad (a)$$

由上式,

$$a_{mn} = \frac{4Q \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{ab D \pi^4 \left(m^2/a^2 + n^2/b^2 \right)^2} \quad (b)$$

将 a_{mn} 代入式(8.34), 即可得到在集中荷重 Q 作用下板的挠度。有了这挠度并运用迭加法, 可决定任何荷重所产生的挠度。

若图 8.15 中的板在 x 方向受均匀压缩, 上述方法仍可用以计算挠度。在应用虚位移原理时, 不仅须计入横向荷重所作之功, 并且须计入压力所作之功[参阅方程(8.33)]。由方程(8.32), 设在边 $x = 0$ 及 $x = a$ 的每单位长度内的压力等于 N_x , 我们得到

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy,$$

代入 w 的表达式(8.34),

$$T_1 = \frac{ab}{8} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2}. \quad (c)$$

使系数 a_{mn} 有一增量 δa_{mn} , 压力所作的相应的功为

$$\frac{\partial T_1}{\partial a_{mn}} \delta a_{mn} = \frac{\pi^2 b N_x}{4a} m^2 a_{mn} \delta a_{mn}.$$

将这功加于方程(a)的左边, 则对于受压板被一集中荷重 Q 所弯曲这情形, 在挠度的一般表达式 (8.34) 中的系数 a_{mn} 由以下公式决定:

$$a_{mn} = \frac{4Q \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{abD\pi^4 [(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2 - m^2 N_x / \pi^2 a^2 D]} \quad (d)$$

将这式与式 (b) 相比较, 可得结论: 由于压力 N_x , 所有的系数都增大. 因此, 受压板的挠度比中面内不受压的同样的板的挠度为大. 并且也可以看出, 压力逐渐增大到某一 N_x 值时, 系数 (d) 中的一个将趋于无限大. 这些 N_x 值中的最小值称为**临界值**. 这值可由方程

$$\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} = 0 \quad (e)$$

决定, 由此

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{n^2}{m} \frac{a^2}{b^2}\right)^2. \quad (f)$$

要得到 N_x 的临界值, 即适合方程 (e) 的最小值, 须取 $n = 1$ 并取 m 为这样的整数, 以使式 (f) 中括号内的值为最小. 例如, 对于正方形板, 要使式 (f) 为最小必须取 $m = 1$. 于是

$$N_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{a^2}. \quad (8.36)$$

这公式与压杆屈曲的欧拉公式相似. 由于 N_{cr} 是板的宽度为一单位的一长条内的压荷重, 而 D 为这条的弯曲刚度, 所以可得结论: 由于板的连续性, 每一纵条可负担的荷重达孤立板条的欧拉荷重的四倍. 受压板的横向屈曲问题将在下一章全面讨论.

在以上的讨论中, 我们设有压力作用于板. 如果不是压力而是拉力 N_x , 系数 a_{mn} 的表达式 (d) 仍旧可用, 而只须以 $-N_x$ 代

替 N_x . 可以看出, 拉力将减小板的挠度.

对于更一般的情形, 即有法向力 N_x, N_y 及剪力 N_{xy} 作用于板的边界, 则上述一般性方法仍可用以计算挠度. 若力沿板的边界均匀分布, 在这样的计算中将并无困难. 如果分布并不均匀, 则在解这相应的平面问题¹⁾, 决定 N_x, N_y 及 N_{xy} 为 x 与 y 的函数时会遇到困难. 但若这平面问题已解得并已决定力 N_x, N_y 及 N_{xy} , 对于板的挠度曲面我们可以用同一表达式 (8.34), 并与上述例题完全一样可应用虚位移原理决定系数 a_{mn} .

§ 8.6. 具有微小初弯曲的板的弯曲²⁾

设板的中面有初翘曲, 因此在任一点有大小为 w_0 的初挠度. 这初挠度与板的厚度相比为小量. 若这样的板承受横向荷重的作用, 则将产生附加的挠度 w_1 , 而板中面的任一点的总挠度为 $w_0 + w_1$. 在计算挠度 w_1 时, 我们用以前对于平板所推得的方程 (8.15). 如果初挠度 w_0 很小, 这样的计算步骤是合理的, 因为我们可认为 w_0 由某一假想的横向荷重所产生, 然后可以运用迭加原理³⁾.

如果除横向荷重外还有力作用在板的中面内, 这些力对弯曲的影响不仅与 w_1 有关, 且与 w_0 亦有关系. 为了在运用方程 (8.25) 时将这因素考虑在内, 在这方程的右边用总的挠度 $w = w_0 + w_1$. 这方程的左边系得自弯矩的表达式, 并因这些弯矩与板的总的曲率无关而仅与板的曲率的改变有关, 所以在方程的左边应用挠度 w_1 而不用 w . 因此, 对于一有初弯曲的板, 方程 (8.25) 成为

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left[q + N_x \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \right]. \quad (8.37)$$

1) 对于平面问题, 参阅 S. P. Timoshenko 与 J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, chap. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1951.

2) 参阅 Timoshenko 的论文, 发表于 *Mem. Inst. Engrs. Ways of Commun.*, St. Petersburg, vol. 89, 1915 (俄文).

3) 对于大挠度, 挠度不再与荷重成比例, 所以不能应用迭加原理.

可以看出,初弯曲对挠度的影响相当于一假想的横向荷重,其强度为

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.$$

如是,如果有初弯曲,则仅在 xy 平面内的力的作用下板就发生弯曲。

现以一简支矩形板(图 8.15)为例,并设板的初挠度由方程

$$w_0 = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (a)$$

确定。如果在这板的 $x = 0$ 及 $x = a$ 的边上作用着均匀分布的压力 N_x , 方程(8.37)成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \\ = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{a_{11} \pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - N_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (b)$$

取这方程的解为

$$w_1 = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (c)$$

将这 w_1 值代入方程(b),得到

$$A = \frac{a_{11} N_x}{\left(\frac{\pi^2 D}{a^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) - N_x}.$$

有了这 A 值, 式(c)即为压力 N_x 所产生的板的挠度。将这挠度与初挠度(a)相加,得到板的总挠度的表达式:

$$w = w_0 + w_1 = \frac{a_{11}}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (d)$$

式中

$$\alpha = \frac{N_x}{\left(\frac{\pi^2 D}{a^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)}. \quad (e)$$

板中心的挠度为最大,并得到

$$w_{\max} = \frac{a_{11}}{1 - \alpha}. \quad (f)$$

这公式与得自有初弯曲梁的挠度公式(a)(§ 1.11)类似。

对于更一般的情形,可取以下级数作为矩形板的初挠度曲面:

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (g)$$

将这级数代入方程(8.37),得到板的任一点的附加挠度为

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (h)$$

式中

$$b_{mn} = \frac{a_{mn} N_x}{\frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{n^2 a^2}{m b^2} \right)^2 - N_x}. \quad (i)$$

可以看出,所有的系数 b_{mn} 随 N_x 的增大而增大。当 N_x 趋近于临界值[参阅上面的式(f)]时,级数(h)中相应于板的横向屈曲的形状的这项将成为最重要的一项。这与有初弯曲的压杆的弯曲(参阅 §1.12)完全相似。因此,在以实验决定压力的临界值时,可用苏司韦尔(Southwell)所建议的方法(参阅 205 页)。

如果在板的中面内作用拉力而不是压力,则问题可以同样地处理,只须改变先前方程中 N_x 的符号。当不仅有 N_x 而且有 N_y 与 N_{xy} 均匀分布在板的边上,我们也可以毫不困难地得到挠度。

§ 8.7. 板的大挠度

如果板的挠度并不很小,则只当挠度曲面为可展曲面时,板的中面无伸长这假设才成立。对于一般的情形,板的大挠度将与中面的拉伸同时发生。为了给出一些关于这拉伸所引起的应力值的概念,我们可提及,当纯弯的圆板的最大挠度等于 $0.6h$ 时,由于中面的拉伸的应力约为最大弯曲应力的 18%¹⁾。对于固定边而承受均布荷重作用的圆板,当最大挠度等于 h 时,由于中面拉伸的最大应力约为略去拉伸所计算得的最大弯曲应力的 23%²⁾。如是,在这些情形中,只当挠度不超过譬如 $0.4h$ 时,才可略去中面的拉伸而并不对最大应力值引起大的误差。

1) 参阅 Timoshenko 的论文,发表在 *Mem. Inst. Engrs. Ways of Commun.*, vol. 89, 1915 (俄文)。

2) 参阅 S. Way, *Trans. ASME*, 1934, p. 627.

在研究板的大挠度¹⁾时,我们仍可用得自体元在板垂直方向的平衡条件的方程(8.25),但力 N_x, N_y, N_{xy} 现在不仅与作用在 xy 平面内的外力有关,并与板中面由于弯曲的拉伸有关。设在 xy 平面内无体积力,在这平面内的平衡方程为[参阅方程(8.24)]

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (a)$$

决定 N_x, N_y 及 N_{xy} 的第三个方程将由考虑板在弯曲时中面的应变而得到。相应的应变分量为(参阅 358 页)

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\quad (b)$$

计算以上诸式的导数,可以证明:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.\quad (c)$$

将诸应变分量由应力分量表示的表达式来代替,即得对 N_x, N_y, N_{xy} 的第三个方程。

引进**应力函数**²⁾可大大地简化这三个方程的解法。可以看出,若取

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\quad (d)$$

式中的 F 为 x 与 y 的函数,则方程(a)恒等地满足。

有了这几个力的表达式,应变分量成为:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_y) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{hE} (N_y - \nu N_x) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{hG} N_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (e)$$

将这些表达式代入方程(c),得到

1) 这系指挠度与板的厚度相比不再很小,但仍足够小以应用板的曲率的简化公式(参阅 341 页)。

2) 参阅 Timoshenko 与 Goodier, *op. cit.*

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (8.38)$$

运用表达式(d), 方程(8.25)成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{h}{D} \left(\frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \quad (8.39)$$

方程(8.38)和(8.39)连同边界条件决定¹⁾两函数 F 与 w 。有了应力函数 F , 可用方程(d)决定板中面内的应力。从决定板的挠度曲面的函数 w , 可用与小挠度板相同的公式得到弯曲应力和剪应力(参阅 § 8.2)。于是大挠度板的研究归结为解(8.38)和(8.39)两个方程。只是对于最简单的情形, 即对受均布荷重的矩形板及受均布荷重的圆板, 得到了这两方程的近似解²⁾。

1) 板的大挠度理论为 G. R. Kirchhoff 所创(参阅他的书“Mechanik”, 2d ed., p. 450, 1877)。应力函数 F 由 A. Föppl 所引入(参阅他的书“Technische Mechanik”, vol. 5, p. 132, 1907)。方程(8.38)与(8.39)这最终的形式为 T. V. Kármán 所给出, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, vol. IV₄, p. 349, 1910。

2) 关于板的大挠度理论的进一步的资料, 参阅“Theory of Plates and Shells”, 2d ed., pp. 415—428, Timoshenko 与 S. Woinowsky-Krieger 合著, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959。

第九章 薄板的屈曲

§ 9.1. 临界荷重的计算方法

计算压杆的临界荷重的方法，可用以计算作用于板中面内的力的**临界值**；当达到这临界值时，板的平的平衡形式变为不稳定而将开始屈曲。

从前一章的讨论（参阅 § 8.5 与 § 8.6）可以看出，要得到作用在板中面内的力的临界值，可先设想这板有些初弯曲或有某些横向荷重作用，于是使板的挠度无限增大的板中面内的力通常即为临界值。

研究这稳定性问题的另一方法，系设在板中面内的力的作用下板将稍微屈曲，然后计算足以保持这板有这微小屈曲形状的力的大小。对于这情形，挠度曲面的微分方程可由令方程(8.25)中的 $q = 0$ 而得到，即设无横向荷重。若无体积力¹⁾，于是屈曲板的微分方程成为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (9.1)$$

当 N_x , N_y 及 N_{xy} 在整块板内为常数时，即得到最简单的情形。设在这些力之间有一定的比， $N_y = \alpha N_x$, $N_{xy} = \beta N_x$ ，并对于已知的边界条件解方程 (9.1)，我们将发现，只有对于某些 N_x 值，这板的所设的屈曲才可能。这些数值中的最小值决定了所需的临界值。

1) 若有体积力作用在板的中面内，则必须用方程(8.27)。

如果力 N_x, N_y, N_{xy} 并不是常量, 这问题将变得较为复杂, 因为对于这情形, 方程 (9.1) 的系数为变数, 但一般性的结论并不改变. 在这些情形中, 我们可设力 N_x, N_y, N_{xy} 的诸表达式中有一公因子 γ , 因此逐渐增大这因子即可使荷重逐渐地增大. 从研究方程 (9.1) 及已知的边界条件可得结论: 只当因子 γ 等于某些值时才可能有弯曲的平衡形式, 而这些数值的最小值将决定临界荷重.

在研究板的屈曲时亦可以用能量法. 当方程 (9.1) 的精确解为未知, 或对于用肋条加固的板只须得到临界荷重的近似值时¹⁾, 能量法是特别有用的. 在应用这方法时, 与处理杆的屈曲一样地进行 (参阅 § 2.8), 我们设为中面内的力所作用的板有一符合于已知边界条件的某一小的横向弯曲. 产生这种小弯曲可以不引起中面的拉伸, 所以我们只须考虑弯曲能及作用在板中面内的力所作的相应的功. 如果这些力所作的功比每一可能的横向屈曲形式的弯曲应变能为小, 则板的平的平衡位置是稳定的. 如果这功比任何形式的横向挠曲的弯曲能为大, 这板是不稳定的而将发生屈曲. 以 ΔT_1 表示上述外力所作的功, 以 ΔU 表示弯曲应变能, 则力的临界值可由下列方程得到:

$$\Delta T_1 = \Delta U. \quad (a)$$

代入功 ΔT_1 的表达式 (8.32) 及 ΔU 的表达式 (8.29), 得到

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = \\ & = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (9.2)$$

设力 N_x, N_y 和 N_{xy} 由有一公因子 γ 的某些表达式表示, 即

$$N_x = \gamma N'_x, \quad N_y = \gamma N'_y, \quad N_{xy} = \gamma N'_{xy}, \quad (b)$$

1) Timoshenko 曾讨论过这类的各种问题; 参阅他的论文 "Sur la stabilité des systèmes élastiques", *Ann. ponts et chaussées*, 1913; *Stability of Rectangular Plates with Stiffeners*, *Mem. Inst. Engrs. Ways of Commun.*, vol. 89, 1915; *Der Eisenbau*, vol. 12, 1921.

增大 τ 就可使这些力同时增大。于是自方程 (9.2) 可得到这因子的临界值, 由这方程

$$\tau = - \frac{D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy}{\iint \left[N'_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N'_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N'_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy} \quad (9.3)$$

对于每一特定情形, 要计算 τ , 必须找出一个 w 的表达式, 这表达式符合已知的边界条件并使 (9.3) 为最小, 即分数 (9.3) 的变分必须等于零。以 I_1 表示分子, 以 I_2 表示分母, 得表达式 (9.3) 的变分为

$$\delta \tau = - \frac{(I_2 \delta I_1 - I_1 \delta I_2)}{I_2^2},$$

令这式等于零, 得到

$$\frac{1}{I_2} (\delta I_1 - \tau \delta I_2) = 0. \quad (c)$$

计算上述变分并设无体积力, 即将得到方程 (9.1)。因此, 能量法将导致为我们以前曾讨论过的方程的积分。

要用能量法近似地计算临界荷重, 我们将与柱一样地进行 (参阅 97 页) 计算, 并设 w 为级数的形式:

$$w = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) + \dots, \quad (d)$$

式中的函数 $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, \dots 符合 w 的边界条件, 并应选择得使适当地表示板的屈曲面。对于每一特定情形, 在选这些函数时, 关于屈曲板的形状的实验资料将是我们的向导。级数的系数 a_1, a_2, \dots 必须选择得使式 (9.3) 为最小。运用这极小条件并与上述导出方程 (c) 一样地进行, 我们得到以下诸方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial a_1} - \tau \frac{\partial I_2}{\partial a_1} &= 0, \\ \frac{\partial I_1}{\partial a_2} - \tau \frac{\partial I_2}{\partial a_2} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (9.4)$$

从方程 (9.3) 可以看出, 积分后表达式 I_1 及 I_2 将为 a_1, a_2, \dots 的二次齐次函数。所以方程 (9.4) 将是 a_1, a_2, \dots 的齐次线性方程组。只当这些方程的行列式等于零时这些方程才可能有 a_1, a_2, \dots 的非零解。令这行列式等于零, 即可得到一方程以决定 τ 的临界值。在以下数节中, 将用几个例子来说明用这方法计算临界荷重。

方程 (9.2) 亦可用另一途径得到, 即设在屈曲时板边在 xy 平

面內的位移被阻止，于是位移 u 与 v 在边界上为零，并且功 ΔT_1 亦为零。在这种情况下，横向屈曲将与板中面的拉伸相关，因而我們須用 §8.4 的方程 (g)。因不存在横向力， T_2 等于零，于是得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \\ & + \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

方程中的第一个积分，表示在屈曲时由于板中面的拉伸所引起的应变能的改变，第二个表示板的弯曲能。方程 (9.5) 与方程 (9.2) 相同，但不是討論功 ΔT_1 (对现在这情形等于零)，而必須这样考虑：当板屈曲时释放的中面的拉伸应变能等于板的弯曲应变能时，板的平的平衡形式成为临界状态。

§ 9.2. 在一个方向均匀受压的簡支矩形板的屈曲¹⁾

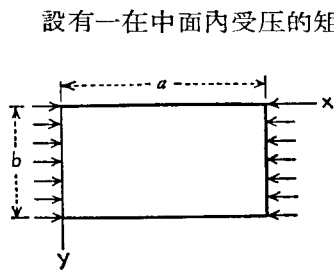


图 9.1

設有一在中面內受压的矩形板 (图 9.1)，压力在 $x = 0$ 及 $x = a$ 的边上均匀地分布。以 N_x 表示边的每单位长度內的压力的大小。逐渐地增大 N_x ，将达到这情况，即受压板的平的平衡形式将变为不稳定而开始屈曲。压力的相应的临界值可由积分方程 (9.1) 而得到²⁾。这一結果亦可由研究这系統的能量而得到。对于簡支的情形，屈曲板的挠度曲面可用双重級数 (8.34) (參閱 §8.5) 来表示：

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

1) 这问题的解为 G. H. Bryan 所得，*Proc. London Math. Soc.*, vol. 22, p. 54, 1891.

2) 參閱 Timoshenko, *Bull. Polytech. Inst., Kiev*, 1907.

由式(8.35),对于这情形的弯曲应变能为

$$\Delta U = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (b)$$

由方程(8.32)及方程(c) (第 363 頁),板屈曲时压力所作的功为

$$\frac{1}{2} N_x \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2. \quad (c)$$

因此,决定压力临界值的方程(9.2)成为

$$\frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2 = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2,$$

由上式,

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2}. \quad (d)$$

与对于压杆的理解相同(参阅 98 頁),可以証明,如除一个系数外取所有的系数均为零,則式(d)将为最小。于是

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2.$$

显然,取 n 等于 1, 将得 N_x 的最小值。其物理意义为: 屈曲板在压方向可以有几个半波, 但在垂直于压的方向只有一个半波。所以,压力的临界值的表达式成为

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2. \quad (e)$$

这表达式中的第一个因子表示长为 a 的单位宽小条 (小条的厚度即板的厚度) 的欧拉荷重。第二个因子表示連續板的稳定性是一单独的小条的稳定性多少倍。这因子的值与比值 a/b 有关, 且与 m 亦有关系; m 值表示板屈曲成几个半波。如 a 小于 b , 則表达式(e)的括号中的第二項将永远小于第一項, 于是取 $m=1$ 即得这表达式的最小值, 即設想这板屈曲成一个半波, 而挠度曲面的形式为

$$w = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (f)$$

如果我们认为最大挠度 a_{11} 为小量并略去屈曲时板中面的伸长, 则最大挠度 a_{11} 为一未定值. 当挠度并不是小量时, 计算这挠度的方法将在以后讨论 (参阅 § 9.13).

临界荷重(表达式(e)中的 $m = 1$)最后可表示为以下的形式:

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2. \quad (g)$$

如果保持板的宽为常量而逐渐改变长度 a , 则表达式(g)的括号前面的因子保持不变, 而括号内的因子随比值 a/b 的改变而变化. 可以看出, 当 $a = b$, 这因子的值达最小, 即对于给定宽度的板, 如板为正方形, 荷重的临界值为最小. 在这情况下,

$$(N_x)_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \quad (h)$$

这与以前在研究弯曲与压缩同时作用于板时所得的结果 [参阅方程 (8.36)] 相同. 对于板的长与宽为别的比例, 表达式(g)可表示成形式

$$(N_x)_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (9.6)$$

式中的 k 为一数值因子, 它的大小与比值 a/b 有关. 在图 9.2 中注有 $m = 1$ 的曲线表示了这因子. 可以看出, 对于小的 a/b 值这因子很大, 当 a/b 增大时这因子减小, 而当 $a = b$ 时这因子为最小, 然后再增大.

现设板屈曲成两个半波, 而挠度曲面由表达式

$$w = a_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

表示. 我们有一反曲线将板等分为二, 而每一半恰与长为 $a/2$ 的简支板的情况相同. 要计算临界荷重, 仍可用方程(g)而以 $a/2$ 代替 a . 于是

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{2b}{a} + \frac{a}{2b} \right)^2. \quad (i)$$

图 9.2 中 $m = 2$ 这曲线表示了式中的第二个因子. 这因子与比值 a/b 有关. 可以看出, 使纵坐标保持不变而将横坐标加倍, 即

可自 $m = 1$ 的曲线得到 $m = 2$ 的曲线。按照同样的方法进行,并设 $m = 3, m = 4$ 等等,便得到图 9.2 所示的一系列曲线。有了这些曲线,即可很容易地得到对于任何比值 a/b 的临界荷重与半波长的个数,只须取横坐标轴上的相应的点并选择对于这点的纵坐标为最小的曲线。在图 9.2 中,确定荷重的临界值的那部分曲线由实线所示。可以看出,对于很短的板, $m = 1$ 这曲线给出最小的纵坐标,即在方程 (9.6) 中最小的 k 值。自曲线 $m = 1$ 与 $m = 2$ 的交点开始,第二条曲线有着最小的纵坐标,即板屈曲成两个半波,并且这情况一直延续到曲线 $m = 2$ 与 $m = 3$ 的交点。从这交点

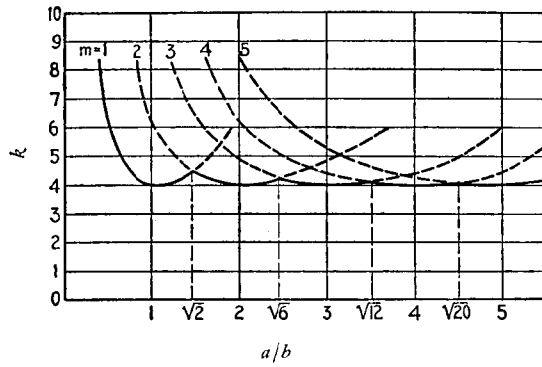


图 9.2

开始,这板屈曲成三个半波,依次类推。自 m 过渡到 $m + 1$ 个半波显然发生于图 9.2 中两相应的曲线有着相等的横坐标时,即当

$$\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} = \frac{(m+1)b}{a} + \frac{a}{(m+1)b}.$$

从这方程得到

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)}. \quad (j)$$

代入 $m = 1$, 得到

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} = 1.41.$$

在这比值时,由一个半波过渡到两个半波。取 $m = 2$, 则由两个半波过渡到三个半波发生于

$$\frac{a}{b} = \sqrt{6} = 2.45.$$

可以看出,半波的个数随 a/b 的比值而增长,而对于很长的板 m 将是个很大的数。于是由(j),得到

$$\frac{a}{b} \approx m,$$

即很长的板所屈曲成的半波的长度约等于板的宽度。因此,这屈曲的板近似地划分成若干个正方形。

板屈曲成的半波的个数 m 既由图 9.2 或方程 (j) 所决定,从方程(g)即可计算临界荷重,只须以半波的长度 a/m 代入方程(g)以代替 a 。

为了简化计算,可用表 9.1;对于各种不同的比值 a/b ,表中列出了方程(9.6)中的因子 k 的值。

从方程(9.6),压应力的临界值为

$$\sigma_{cr} = \frac{(N_x)_{cr}}{h} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2} \quad (9.7)$$

对于给定的比值 a/b ,系数 k 为常数,于是 σ_{cr} 与材料的弹性模量及比 h/b 的平方成正比。表 9.1 中的第三行列出了钢板的临界应力,设 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\nu = 0.3$, $h/b = 0.01$ 。对于弹性模量为 E_1 的任何别的材料以及任何别的比值 h/b ,临界应力可由表中的数值乘以下列因子¹⁾而得:

$$\frac{E_1}{2.1 \times 10^6} \left(\frac{h}{b}\right)^2.$$

以 a 与 b 的尺寸相同的钢板与硬铝板相比,值得注意:与钢板重量一样的硬铝板约有钢板三倍厚,因为硬铝的弹性模量约为钢的 1/3,所以从方程 (9.7) 可得出结论:硬铝板的临界应力及临界荷重分别为重量相同的钢板的三倍和九倍。从这比较可以看出,当结构的重量为首要时,例如飞机结构,运用轻的铝合金板是怎样的重要。

1) 设泊松比 ν 可视作常量。

用表 9.1 所計算得的 σ_x 的临界值, 只当它們小于材料的比例

表 9.1 均匀受压簡支矩形板的方程(9.6)中因子 k 的值

($E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $b/h = 100$,

$\nu = 0.3$; σ_{cr} 以公斤/厘米²计)

a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
k	27.0	13.2	8.41	6.25	5.14	4.53	4.20
σ_{cr}	5124	2506	1604	1183	973	861	798
a/b	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.41
k	4.04	4.00	4.04	4.13	4.28	4.47	4.49
σ_{cr}	770	756	770	784	812	847	854

极限时, 才表示真正的临界应力. 超过这极限时, 公式(9.7)給出偏大的 σ_{cr} 值, 而只当考虑了材料的塑性变形(參閱 § 9.12)才可以得到这应力的真正值. 在每一特定情况中, 設公式(9.7)直至材料的屈服点是足够准确的, 代入 $\sigma_{cr} = \sigma_{Y.P.}$, 即得到比值 h/b 的极限值; 在这极限值以下, 公式(9.7)可以应用. 如以鋼为例, $\sigma_{Y.P.} = 2800$ 公斤/厘米², $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\nu = 0.3$, 并設板足够长, 使 $k \approx 4$, 由方程(9.7)得 $b/h \approx 52$. 小于 b/h 的这比值, 在未达到式(9.7)所給出的临界应力之前材料已开始屈服.

在以上所討論的問題中的边界条件, 体现在均匀受压的正方形截面的薄管(图 9.3). 当压应力等于临界值(9.7)时, 屈曲即开始, 而管的截面弯曲成

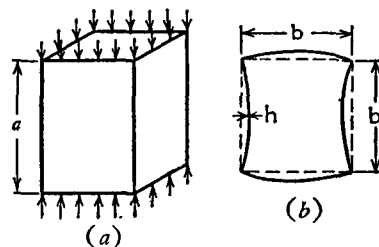


图 9.3

如图 9.3b 所示. 在屈曲管的面与面之間沿稜角处并无弯矩作用, 而每一面所处的情况同一受压的簡支矩形板.

§ 9.3. 在两垂直方向受压的簡支矩形板的屈曲

若一簡支矩形板(图 9.4)承受均匀分布的压力 N_x 及 N_y , 则仍可用前一节所用的挠度 w 的表达式; 且仍可以証明: 在计算 N_x 与 N_y 的临界值时, 只

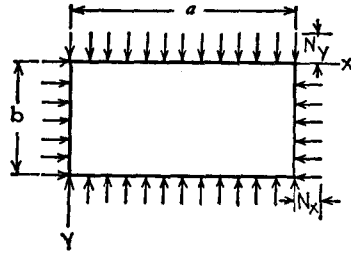


图 9.4

须用 w 的双重级数的一项。应用能量法, 方程(9.2)成为

$$N_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + N_y \frac{n^2 \pi^2}{b^2} = D \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2, \quad (a)$$

式中的 m 决定在 x 方向的半波的个数, n 决定在 y 方向的个数。以板的厚度除方程(a), 并引入记号

$$\frac{\pi^2 D}{a^2 h} = \sigma_e, \quad (b)$$

我们得到

$$\sigma_x m^2 + \sigma_y n^2 \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2. \quad (c)$$

取 m 与 n 为任意整数, 屈曲板的相应的挠度曲面的方程为

$$w_{mn} = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

而相应的 σ_x 与 σ_y 的值须适合方程(c)。以 σ_x 及 σ_y 作为正交坐标, 方程(c)将被表示为一直线。在图 9.5 中, 表示出正方形板 ($a = b$) 对于不同的 m 与 n 值的几条这种直线。 m 与 n 的值注明在这些线上, 同时 σ_x 与 σ_y 的正值系表示压应力。因我们要求使发生屈曲的 σ_x 与 σ_y 的最小值, 我们只须考虑在图中形成多边形 $ABCD$ 这实线部分。对于任何比值 a/b 作出与图 9.5 类似的图形, 就可从这图形得到相应的 σ_x 与 σ_y 的临界值。可以看出, 线 BC 与横坐标轴的交点即为在前节所讨论的当 $\sigma_y = 0$ 时的 σ_x 的临界值。这线与纵坐标轴的交点即为当 $\sigma_x = 0$ 时的 $(\sigma_y)_{cr}$ 。

当 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, 我们自原点 O 绘一与水平轴成 45° 的直线。于是这线与线 BC 的交点决定 σ 的临界值。

在这情形中, 方程(c)成为

$$\sigma = \sigma_e \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right).$$

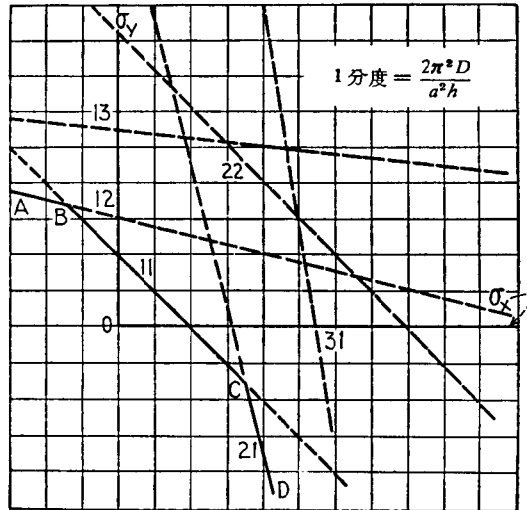


图 9.5

σ 的最小值可由取 $m = n = 1$ 而得到。因此

$$\sigma_{cr} = \sigma_c \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (9.8)$$

对于正方形板这特殊情形,

$$\sigma_{cr} = 2\sigma_c,$$

即对于这情形,临界应力恰巧等于正方形板在一个方向受压时的临界应力的一半。

对于任何 σ_x 值, σ_y 的临界值可由自横坐标轴上的相应的点绘一铅直线而得到。这铅直线与多边形 $ABCD$ 的交点的纵坐标 (图 9.5) 给出 $(\sigma_y)_{cr}$ 的值。对于正方形板,如果 σ_x 大于 $4\sigma_c$,则 $(\sigma_y)_{cr}$ 将变为负的。这表明,如果在垂直方向作用着充分的拉应力,则板可承受大于单向受压时 (§ 9.2) 的临界值的压应力。

在实际应用方程 (c) 时,知道在图 9.5 中表示多边形 $ABCD$ 的顶点的 B 与 C 的坐标是有用的。 σ_x 的最大值 [在这应力以下,我们可用线 BC ($m = 1, n = 1$) 以决定 σ_y 的临界值] 决定于直线 11 与 21 的交点 C 的横坐标。运用方程 (c), 这两直线的方程为

$$\sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_c \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2, \quad m = 1, \quad n = 1;$$

$$4\sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(4 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2, \quad m = 2, \quad n = 1.$$

解这两方程, σ_x 的上限(在这上限以下可用直线11)为

$$\sigma_x = \sigma_e \left(5 + 2\frac{a^2}{b^2}\right). \quad (d)$$

同样, σ_x 的下限可得自以下这两方程:

$$\sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2, \quad m = 1, \quad n = 1;$$

$$\sigma_x + 4\sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(1 + \frac{4a^2}{b^2}\right)^2, \quad m = 1, \quad n = 2,$$

由此,

$$\sigma_x = \sigma_e \left(1 - 4\frac{a^4}{b^4}\right). \quad (e)$$

所以,如果 σ_x 符合不等式

$$\sigma_e \left(1 - 4\frac{a^4}{b^4}\right) < \sigma_x < \sigma_e \left(5 + 2\frac{a^2}{b^2}\right), \quad (f)$$

应该用 $m = 1, n = 1$ 这线来计算 $(\sigma_y)_{cr}$. 取 $a = 0.5b$ 及 $\sigma_x = \sigma_e$, 而来决定相应的 σ_y 的临界值. 将 $a/b = 0.5$ 代入不等式(f), 得到

$$0.75\sigma_e < \sigma_x < 5.5\sigma_e.$$

因所给的 σ_x 值在这些极限之内, 我们将 $m = n = 1$ 代入方程(c). 于是

$$\sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2,$$

取 $a/b = 0.5$ 及 $\sigma_x = \sigma_e$, 得到

$$(\sigma_y)_{cr} = 2.25\sigma_e = 2.25 \frac{\pi^2 D}{a^2 h}.$$

如所给的 σ_x 值大于极限值 (d), 则必须考虑由方程 (c) 并取 $m = 1, n = 2, 3, 4, \dots$ 所得的诸直线. 考虑 $m = 1, n = i$ 这直线. 要用这直线的下限决定于这线和 $m = i - 1, n = 1$ 这线的交点. 从方程(c), 这两线的方程为

$$\sigma_x i^2 + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(i^2 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2;$$

$$\sigma_x (i - 1)^2 + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left[(i - 1)^2 + \frac{a^2}{b^2}\right]^2,$$

由上式, σ_x 的下限为

$$\sigma_x = \sigma_e \left(2i^2 - 2i + 1 + 2\frac{a^2}{b^2}\right).$$

同样, $m = i, n = 1$ 这线与 $m = i + 1, n = 1$ 这线的交点决定了 σ_x 的上限, 即

$$\sigma_x = \sigma_c \left(2i^2 + 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right).$$

因此, 如已知的 σ_x 值在以下两极限之间:

$$\sigma_c \left(2i^2 - 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) < \sigma_x < \sigma_c \left(2i^2 + 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right), \quad (g)$$

则必须用 $m = i, n = 1$ 这线以决定 σ_y 的临界值。同样, 如果 σ_x 小于极限值 (e), 则必须考虑 $m = 1, n = 2, 3, 4, \dots$ 诸线。与以前的情形一样地进行, 可以看出, 如果以下这不等式¹⁾成立:

$$\sigma_c \left[1 - i^2(i-1)^2 \frac{a^4}{b^4} \right] > \sigma_x > \sigma_c \left[1 - i^2(i+1)^2 \frac{a^4}{b^4} \right]. \quad (h)$$

则必须用 $m = 1, n = i$ 这直线。作为一例, 研究 $a/b = 0.5$ 这情形, 并设 $\sigma_x = 7\sigma_c$ 。因 σ_x 大于值 (d), 我们用为 $i = 2$ 所满足的一般的等式 (g)。因此, 将 $m = 2, n = 1$ 代入方程 (c), 在这情形中所要用的直线为

$$4\sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_c \left(4 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2.$$

将 $\sigma_x = 7\sigma_c$ 及 $a = 0.5b$ 代入这方程, 得到

$$(\sigma_y)_{cr} = -39.75\sigma_c.$$

这表明, 必须在 y 方向作用大于 $39.75\sigma_c$ 的拉应力以阻止板在已知的压应力 σ_x 作用下的屈曲。

如果上述板上在 x 方向作用着拉应力 $\sigma_x = -11\sigma_c$, 我们必须用为 $i = 4$ 所满足的不等式 (h)。相应的 σ_y 的临界值将由方程

$$\sigma_x + 16\sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_c \left(1 + 16 \frac{a^2}{b^2} \right)^2$$

来决定。以 $\sigma_x = -11\sigma_c$ 及 $a = 0.5b$ 代入这方程, 得到

$$\sigma_{cr} = 9\sigma_c.$$

§ 9.4. 承受均布压力的矩形板的屈曲: 与压力方向垂直的两对边简支, 而沿其余的两边有各种的边界条件

能量法及挠曲板的微分方程的积分法均可用以讨论这问题²⁾。

1) 这里须视压应力为正。

2) 这问题曾为 Timoshenko 讨论, *Bull. Polytech. Inst. Kiev*, 1907. 并参阅 *Z. Math. Physik*, vol. 58, p. 343, 1910. 能量法的运用发表在 Timoshenko 的论文中, *Sur la stabilité des systèmes élastiques, Ann. ponts et chaussées*, 1913.

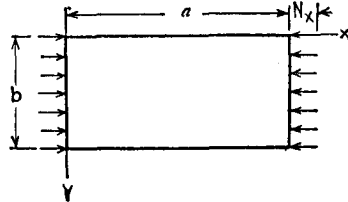


图 9.6

在应用积分法时, 我们用方程(9.1). 对于沿 x 轴的均匀压缩(参阅图 9.6), 并以压缩的 N_x 为正, 方程(9.1)将成为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (a)$$

设在压力作用下板屈曲成 m 个正弦半波, 我们取方程(a)的解为

$$w = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (b)$$

式中的 $f(y)$ 仅为 y 的函数, 这函数待定. 表达式(b)满足板简支边 $x = 0$ 及 $x = a$ 的边界条件, 因为当 $x = 0$ 及 $x = a$ 时,

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

将(b)代入方程(a), 得到以下这常微分方程以决定函数 $f(y)$:

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} \frac{d^2 f}{dy^2} + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} - \frac{N_x}{D} \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) f = 0. \quad (c)$$

注意, 由于沿 $y = 0$ 及 $y = b$ 的边上有约束, 我们总有

$$\frac{N_x}{D} > \frac{m^2\pi^2}{a^2},$$

并运用记号

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{m^2\pi^2}{a^2}}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D} \frac{m^2\pi^2}{a^2}}}, \quad (d)$$

方程(c)的通解可表示为以下形式:

$$f(y) = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y. \quad (e)$$

这解中的积分常数须在每一特定情况下由沿 $y = 0$ 及 $y = b$ 这两边的约束条件决定. 现讨论沿这两边的几种约束的特殊情形.

边 $y = 0$ 简支; 边 $y = b$ 自由 (图 9.6)。由这些条件得到 [参阅方程(8.19)至(8.21)]

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{当 } y = 0; \quad (f)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\ \text{当 } y = b. \quad (g)$$

如果在通解(c)中取

$$C_1 = -C_2, \quad C_3 = 0,$$

即可满足边界条件(f), 于是函数 $f(y)$ 可写作形式

$$f(y) = A \sinh \alpha y + B \sin \beta y,$$

式中的 A 与 B 为常数。从边界条件(g)得到

$$A \left(\alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sinh \alpha b - B \left(\beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \beta b = 0, \\ A \alpha \left[\alpha^2 - (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \cosh \alpha b - \\ - B \beta \left[\beta^2 + (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \cos \beta b = 0. \quad (h)$$

取 $A = B = 0$, 这两方程可得到满足。于是板的每一点的挠度均为零, 而我们得到了板的平的平衡形式。只当方程(h)的 A 与 B 为非零解时, 板才可能有屈曲的平衡形式。这要求这两方程的行列式为零, 即,

$$\beta \left(\alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \tanh \alpha b = \alpha \left(\beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \tan \beta b. \quad (i)$$

因 α 与 β 中包括有 N_x [参阅记号(d)], 所以方程(i)可用以计算 N_x 的临界值, 如已知板的大小及材料的弹性常数。这些计算指明: 取 $m = 1$ 将得到 N_x 的最小值, 即设屈曲的板只有一个半波。相应的临界压应力的值可由公式

$$(\sigma_x)_{cr} = \frac{(N_x)_{cr}}{h} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (j)$$

表示, 式中的 k 为一与 a/b 的比值有关的数值因子。以 $\nu = 0.25$,

由方程(i)所計算得的这因子的几个值列于表 9.2 的第二行.

表 9.2 方程(j)中的 k 值[边 $y = 0$ 简支而边 $y = b$ 自由(图 9.6)]

a/b	0.50	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
k	4.40	1.440	1.135	0.952	0.835	0.755	0.698	0.610	0.564	0.516	0.506
$(\sigma_x)_{cr}$	812	265	209	175	154	139	129	112	104	95	93

对于长板,可以足够准确地取

$$k = \left(0.456 + \frac{b^2}{a^2} \right).$$

在表 9.2 的第三行,列出了根据 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\nu = 0.25$, $h/b = 0.01$ 而計算得的临界应力,以公斤/厘米² 为单位. 对于弹性模量为 E_1 的别的材料及其他的 h/b 的比值,临界应力可由表中的值乘以因子

$$\frac{E_1}{210} \left(\frac{h}{b} \right)^2$$

而得. 与以上所設的相似的边界条件体现在如图 9.7 中受压的角鋼. 当均匀分布在角鋼側面寬度內的压应力等于公式(j)所示的临界应力时,角鋼的纵向自由边将如图所示地屈曲,而綫 AB 保持为直綫. 沿这直綫的边界条件与沿简支边相同. 以受压角鋼¹⁾所作的实验与理論很好地符合. 对于比較短的角鋼,将发生如图 9.7 所示的屈曲. 对于这样的角形截面的长柱,临界压应力可能小于公式(j)所給的. 在这情况下,这压杆将如受压的柱那样地屈曲.

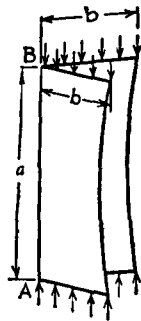


图 9.7

边 $y = 0$ 固定;边 $y = b$ 自由(图 9.6). 对于这情形,决定通

1) 参阅 F. J. Bridget, C. C. Jerome 及 A. B. Vosseller, *Trans. ASME, Applied Mechanics Division*, vol. 56, p. 569, 1934. 并参阅 C. F. Kollbrunner 的学位论文, Zürich, 1935, 及 E. E. Lundquist, *NACA Tech. Note* 722, 1939.

解 (c) 的常数的边界条件为

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{当 } y = 0; \quad (\text{k})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\ \text{当 } y = b. \quad (1)$$

从条件(k)得到

$$C_1 = -\frac{\alpha C_3 - \beta C_4}{2\alpha}, \quad C_2 = -\frac{\alpha C_3 + \beta C_4}{2\alpha},$$

而函数 $f(y)$ 可写作如下形式:

$$f(y) = A(\cos \beta y - \cosh \alpha y) + B \left(\sin \beta y - \frac{\beta}{\alpha} \sinh \alpha y \right).$$

将这表达式代入条件(1), 得到两个 A, B 的齐次线性方程. 使这两方程的行列式等于零, 可决定压应力的临界值. 于是得到

$$2ts + (s^2 + t^2) \cos \beta b \cosh \alpha b = \\ = \frac{1}{\alpha\beta} (\alpha^2 t^2 - \beta^2 s^2) \sin \beta b \sinh \alpha b, \quad (\text{m})$$

式中

$$t = \beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad s = \alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2}.$$

对于既定的比值 a/b 及 ν 值, 从超越方程 (m) 可计算压应力的临界值, 并可用方程 (j) 来表示. 计算的结果表明, 当长度 a 较短时, 板将屈曲成一个半波, 而在计算中必须取 $m = 1$. 对于各种 a/b 比值, 方程 (j) 中的数值因子 k 的几个值列于表 9.3 内. 这些值也由图 9.8 中 $m = 1$ 这曲线所表示. 可以看出, 在开始时, k 的值随比 a/b 的增大而减小. 当 $a/b = 1.635$ 时, 得到 k 的最小值 ($k = 1.328$), 而由这值开始, k 随比 a/b 的增加而增大. 有了 $m = 1$ 这曲线, 如在 § 9.2 所述, 可绘出 $m = 2, m = 3, \dots$ 诸曲线. 运用这些曲线, 即可定出对于每一特定情形的半波的个数. 对于较长的板, 可足够准确地由方程 (j) 中取 $k = 1.328$. 表 9.3 的第三行, 列出了由方程 (j) 所计算得的临界应力 (以公斤/厘米²为单

表 9.3 方程(j)中因子 k 的数值 [边 $y = 0$ 固定;
边 $y = b$ 自由(图 9.6); $\nu = 0.25$]

a/b	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4
k	1.70	1.56	1.47	1.41	1.36	1.34	1.33	1.33	1.34	1.36	1.38	1.45	1.47
$(\sigma_x)_{cr}$	315	288	271	260	251	246	245	245	246	251	254	267	271

位), 設 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\nu = 0.25$, $h/b = 0.01$. 运用这些数字, 即可很容易地計算对于任何弹性模量及任何别的尺寸的板的临界应力。

边 $y = 0$ 弹性固定; 边 $y = b$ 自由 (图 9.6)。在前面的讨论中, 对于沿 $y = 0$ 这边的约束曾研究了两个极端的假设, 即简支边与固定边。在实际情形中, 约束情况常介于这两者之间。如以 T 形截面的压杆为例 (图 9.9), 不

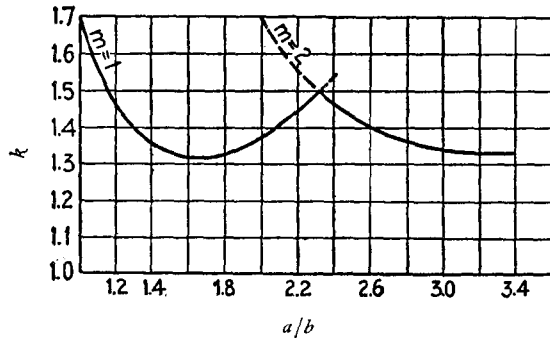


图 9.8

能设想在屈曲时铅直腹板的顶边可以自由地转动, 但亦不能认为它是固定的, 因为当腹板屈曲时水平翼缘将发生转动。在这情况中, 板的顶边可以作为是弹性固定, 因为在屈曲时, 沿这边所出现的弯矩与边上每一点的转角成

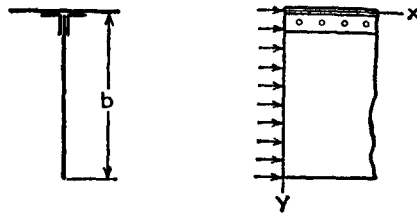


图 9.9

正比。为了要阐明这一点,我们研究图 9.9 所示的杆件的翼缘的扭转。当腹板屈曲时翼缘的转角等于 $\partial w/\partial y$, 而这转角的改变率为 $\partial^2 w/\partial x\partial y$; 因此, 在翼缘的任一横截面内沿 x 轴的扭矩为

$$C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

式中的 C 为翼缘的扭转刚度¹⁾。这扭矩的改变率在数值上等于腹板顶边的每单位长度内的弯矩 M_y , 按照所设的关于 M_y 的正向的规则 (参阅 339 页), 这两力矩的符号也相同。因此, 沿腹板顶边的相应的边界条件为

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = C \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}.$$

运用 w 的表达式 (b), 并注意到沿腹板顶边 $w = 0$ ²⁾, 上述边界条件可写作以下形式³⁾:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = C \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{当 } y = 0. \quad (n)$$

于是如以前所述, 沿屈曲腹板顶边的弯矩 M_y 与转角 $\partial w/\partial y$ 成正比。

由条件 (n) 及当 $y = 0$ 时的条件 $w = 0$, 得到表达式 (e) 中的常数间的以下关系:

$$C_1 = \frac{C_3(\alpha^2 + \beta^2 - r\alpha)}{2r\alpha} + \frac{C_4\beta}{2\alpha},$$

$$C_2 = -\frac{C_3(\alpha^2 + \beta^2 + r\alpha)}{2r\alpha} - \frac{C_4\beta}{2\alpha},$$

式中

$$r = \frac{C}{D} \frac{\pi^2}{a^2}. \quad (o)$$

有了常数之间的这些关系, 我们得到

$$f(y) = C_3 \left(\cos \beta y - \cosh \alpha y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r\alpha} \sinh \alpha y \right) +$$

$$+ C_4 \left(\sin \beta y - \frac{\beta}{\alpha} \sinh \alpha y \right).$$

- 1) 将翼缘的截面视作由几个狭长的矩形所组成, 即可对于每一特定情形足够准确地计算这刚度 (参阅 § 5.2)。设扭转中心与腹板的这边相重合。这里翼缘的翘曲刚度被略去。
- 2) 我们设翼缘在 xz 平面内的弯曲刚度非常大, 从而翼缘在这平面内的挠度可以略去。
- 3) 设 $m = 1$, 即屈曲的腹板只有一个半波。

将上式代入 w 的表达式 (b) 及沿腹板自由边的边界条件 (1), 得到以下两方程:

$$\begin{aligned} & C_3(t \cos \beta b + s \cosh \alpha b + qs \sinh \alpha b) + \\ & + C_4\left(t \sin \beta b + \frac{\beta}{\alpha} s \sinh \alpha b\right) = 0, \\ & C_3(-\beta s \sin \beta b + \alpha t \sinh \alpha b + q\alpha t \cosh \alpha b) + \\ & + C_4(\beta s \cos \beta b + \beta t \cosh \alpha b) = 0, \end{aligned} \quad (p)$$

式中

$$s = \alpha^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2}, \quad t = \beta^2 + \nu \frac{\pi^2}{a^2}, \quad q = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha r}.$$

设翼缘的扭转刚度非常大, 并取 $q = 0$, 于是方程 (p) 与沿 $y = 0$ 这边固定的板的方程相同。

使方程 (p) 的行列式等于零, 即可得到压力的临界值。这样, 我们发现临界压应力的值仍可以用公式 (j) 表示。公式中因子 k 的值显然与**固定系数** r 的大小有关。对 $rb = 2$, $rb = 8$ 及 $\nu = 0.25$ 所计算得的结果列在表 9.4 内。

表 9.4 方程 (j) 中因子 k 的数值 [边 $y = 0$ 弹性固定;
边 $y = b$ 自由; $\nu = 0.25$]

a/b	1	1.3	1.5	1.8	2.0	2.3	2.5	2.7	3.0	4.0
$rb = 2$	1.49	1.13	1.01	0.92	0.90	0.89	0.90	0.93	0.98	0.90
$rb = 8$	1.58	1.25	1.16	1.11	1.12	1.18	1.23	1.30	1.16	1.12

可以看出, 因子 k 随 r 的增大而增大, 而当 $rb = 8$ 时, k 的值接近于表 9.3 所示的对于固定边所计算得的数值。亦可以看出, 随着 r 的增大, k 变为最小时的比值 a/b 减小。这意味着, 对于长的板, 随着 r 的增大, 屈曲时板被分成区间的波长缩短了。运用表 9.4 所列的 k 值, 可绘出与图 9.8 类似的曲线; 由这些曲线, 可以与以前一样地定出在屈曲时板被划分为半波的个数。

边 $y = 0$ 及 $y = b$ 均固定。在这情况下, 边界条件为

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{当 } y = 0 \text{ 及 } y = b.$$

与以前一样地进行, 得到以下这超越方程以计算压力的临界值:

$$2(1 - \cos \beta b \cosh \alpha b) = \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \sin \beta b \sinh \alpha b.$$

压应力的临界值仍由方程(j)给出。表 9.5 内列出了对于各种 a/b 的比值所计算得的数值因子 k 的几个值。

表 9.5 方程(j)中因子 k 的数值 [边 $y = 0$ 及 $y = b$ 均固定; $\nu = 0.25$]

a/b	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
k	9.44	7.69	7.05	7.00	7.29	7.83	7.69

可以看出,当 $0.6 < a/b < 0.7$ 时,得到 k 的最小值;即一长受压板将屈曲成较短的波。绘出与图 9.8 类似的曲线,即可与以前一样地决定半个波的个数。

边 $y = 0$ 及 $y = b$ 均为弹性梁所支承。取如图 9.10 所示的坐标轴,并

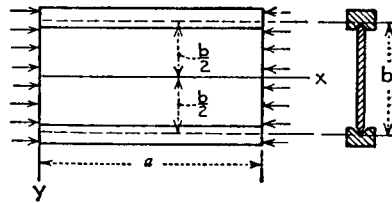


图 9.10

设板的边 $x = 0$ 及 $x = a$ 的边条件与以前相同。沿边 $y = b/2$ 及 $y = -b/2$, 板在屈曲时可以自由转动,但板在这两边的挠度为两相同的弹性梁所阻止。自由转动这条件要求

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{当 } y = \pm b. \quad (q)$$

要得到第二个条件的表达式,须考虑支承梁的弯曲。我们设这两梁的两端为简支,而梁的弹性模量与板的相同,并且梁与板一同受压,所以在每一梁上的压力等于 $A\sigma_x$, 其中 A 为一个梁的截面积。以 EI 表示梁的弯曲刚度,于是梁的挠度曲线的微分方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q - A\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

式中 q 为自板传至梁的荷重强度。由剪力的表达式 (参阅 350 页), 这强度为

$$q = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right], \quad \text{当 } y = \frac{b}{2};$$

$$q = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right], \quad \text{当 } y = -\frac{b}{2}.$$

将这两 q 值代入以上的挠度曲线方程,得到以下的边界条件:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - A \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \text{当 } y = \frac{b}{2}, \quad (r)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - A \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \text{当 } y = -\frac{b}{2}.$$

运用(q)与(r)这四个边界条件以决定表达式(e)中的常数,并使这些方程的行列式为零,即得一超越方程以计算压应力的临界值。设屈曲时,两梁向同一方向挠曲并且板的挠度曲面对 x 轴对称(图 9.10),于是决定临界应力 σ_{cr} 的方程成为¹⁾

$$\beta \left(1 - \nu + \frac{a}{m\pi} \sqrt{\frac{h\sigma_{cr}}{D}} \right)^2 \tan \frac{\beta b}{2} + \alpha \left(1 - \nu - \frac{a}{m\pi} \sqrt{\frac{h\sigma_{cr}}{D}} \right)^2 \tanh \frac{\alpha b}{2} =$$

$$= \frac{2m\pi}{a} \sqrt{\frac{h\sigma_{cr}}{D}} \left(\frac{EI}{D} - \frac{a^2 A \sigma_{cr}}{m^2 \pi^2 D} \right), \quad (s)$$

式中的 α 及 β 与以前一样由公式(d)给出。

如设屈曲时两支承梁向相反的方向挠曲,则得到的超越方程所给出的临界应力 σ_{cr} 总比由对称假设所得的 σ_{cr} 为大。因此,只须研究对称的屈曲情形。

为了简化方程的解,引入以下诸记号:

$$\frac{m\pi b}{a} = \phi, \quad b \sqrt{\frac{h\sigma_{cr}}{D}} = \psi, \quad \frac{EI}{bD} - \frac{A}{bh} \frac{\psi^2}{\phi^2} = \theta.$$

于是这方程成为

$$\sqrt{\psi - \phi} [\psi + (1 - \nu)\phi]^2 \tan \frac{1}{2} \sqrt{\psi\phi - \phi^2} +$$

$$+ \sqrt{\psi + \phi} [\psi - (1 - \nu)\phi]^2 \tanh \frac{1}{2} \sqrt{\psi\phi + \phi^2} = 2\phi^{5/2} \psi \theta. \quad (t)$$

为了更进一步简化这方程的解,图 9.11 中绘出了对于不同的 θ 值时 ψ

1) K. Cališev 首先计算了为弹性梁所支承的受压板的临界应力, *Mem. Inst. Engrs. Ways of Commun.*, St. Petersburg, 1914. 本书中用以计算临界应力 σ_{cr} 的曲线取自 A. J. Miles 在密歇根大学的学位论文, 1935 年 1 月. E. Melan 独立地研究了该问题, *Repts. Intern. Congr. Appl. Mech.*, vol. 3, p. 59, 1930; L. Rendulič 也独立地研究过, *Ingr.-Arch.*, vol. 3, p. 447, 1932.

作为 ϕ 的函数的曲线。于是,对于每一特定情形其计算步骤如下:由板的已知尺寸计算 EI/bD 及 A/bh , 并对于半波的个数 m 作一假设。这样就决定了量 ψ , 并运用图 9.11 中的曲线由试算法求 ϕ 。若梁的刚度很大,作为一级近似,我们可取与为绝对刚硬的梁所支承的板相同的半波的个数及 σ_{cr} 值。为了说明图 9.11 中的曲线的应用,我们来计算图 9.12 中所示的槽钢的临界应

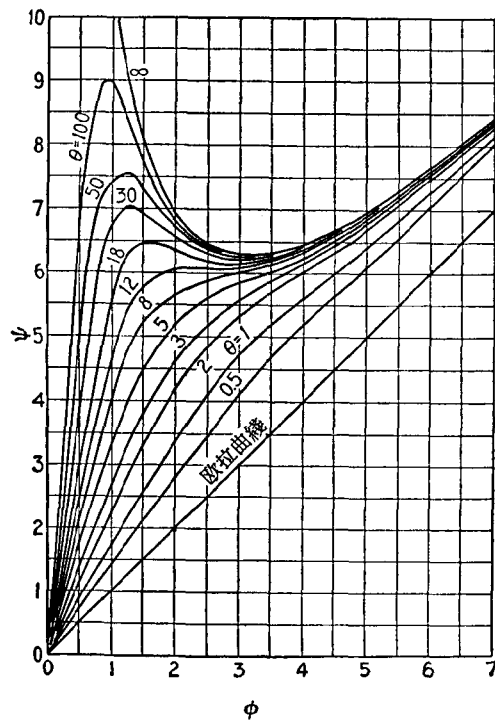


图 9.11

力。将槽钢的腹板作为一受压的矩形板,将两翼缘作为支承梁;改变翼缘的宽度 d ,即可得各种不同的情形。取 $m=1$,并设 $d=25.4, 50.8, 76.2$ (毫米),就得到如图 9.12 所示的纵坐标永是递减的曲线。为了比较,并绘出了 $\theta=0$ 这曲线;它表示板的纵边为自由边这情形。当 $d=101.6$ 毫米时,图 9.12 中的相应的曲线有着更复杂的形式:在 $a/b \approx 1$ 这曲线有一极小值;然后这曲线逐渐上升,在 $a/b \approx 2.5$ 有一极大值;从这以后纵坐标就开始不断地减小。以 $m=2$ 及 $m=3$ 来作计算并在图 9.12 中绘出相应的曲线,可以证明,在

1.5 < a/b < 3.4 的范围内, 这些曲线的纵坐标要比 m = 1 曲线的为小; 因此, 在计算临界应力 σ_{cr} 时, 应该用如图 9.12 中的实线所示的曲线。为了比较, 还绘出了 $\theta = \infty$ 的曲线; 这曲线表示板为两绝对刚硬的梁所支承时的屈曲条件。可以看出, 对于 d = 101.6 毫米且较短的槽钢, 临界应力近似地与刚性支承的板的值相同。当长度较大时, 应该用 m = 1 这曲线以计算 σ_{cr} ; 并且屈曲条件接近于以槽钢作为压杆而计算得的欧拉曲线所给出的结果。

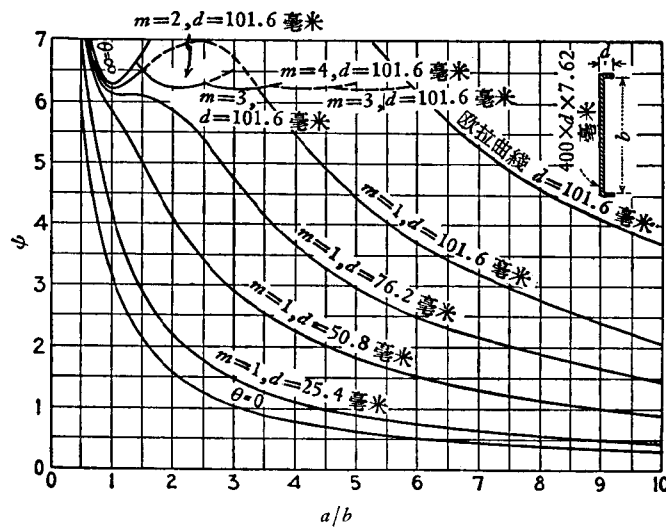


图 9.12

在以上的讨论中, 设腹板屈曲时杆件的翼缘并不抵抗扭转 (参阅图 9.10)。将对于扭转的抵抗计算在内, 将得到包括翼缘的扭转刚度 C 与腹板的弯曲刚度 D 之比的更复杂的超越方程¹⁾, 并可计算扭转刚度对 σ_{cr} 值的影

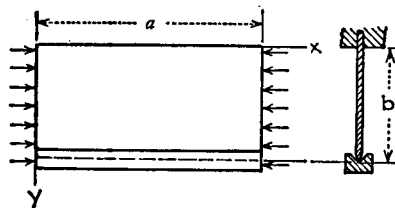


图 9.13

1) 这情形曾为 E. Chwalla 所讨论, *Ingr.-Arch.*, vol. 5, p. 54, 1934.

响。

边 $y = 0$ 固定；边 $y = b$ 为一弹性梁所支承 (图 9.13)。与前面一样地进行,并用与以前一样的记号,对于临界应力我们得到以下这超越方程:

$$\begin{aligned} & \theta \psi \phi^2 (\sqrt{\psi \phi - \phi^2} \tanh \sqrt{\psi \phi + \phi^2} - \sqrt{\psi \phi + \phi^2} \tan \sqrt{\psi \phi - \phi^2}) = \\ & = \sqrt{\psi^2 - \phi^2} \left[\frac{\psi^2 - \phi^2 (1 - \nu)^2}{\cos \sqrt{\psi \phi - \phi^2} \cosh \sqrt{\psi \phi + \phi^2}} + \psi^2 + \phi^2 (1 - \nu)^2 \right] + \\ & + \phi [\psi^2 (1 - 2\nu) - \phi^2 (1 - \nu)^2] \tan \sqrt{\psi \phi - \phi^2} \tanh \sqrt{\psi \phi + \phi^2}. \end{aligned}$$

为了简化这方程的解,图 9.14 中绘出了对于各种 θ 值时表示 ψ 为 ϕ 的函数

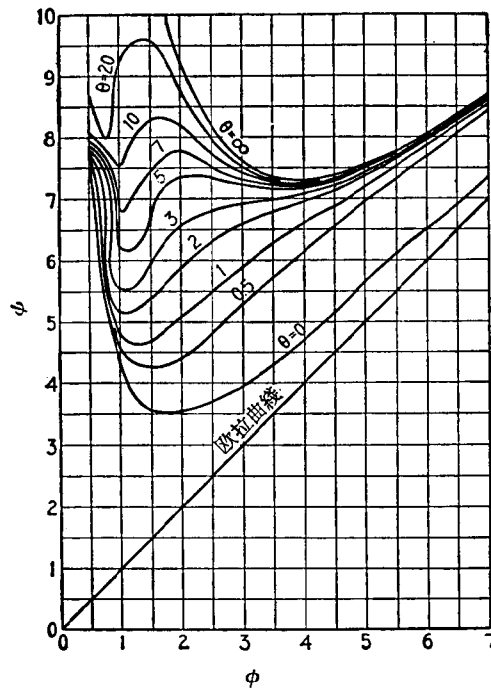


图 9.14

的曲线。为了说明这些曲线的应用,计算了图 9.15 所示的情形。运用图 9.14 中的曲线,在图 9.15 中绘出了对于各种宽度的翼缘表示 ψ 为比值 a/b 的函数的曲线。可以看出,对于 $d = 76.2$ 毫米且较短的板,情况接近于沿边 $y = b$ (图 9.13) 刚性支承 ($\theta = \infty$) 的板。

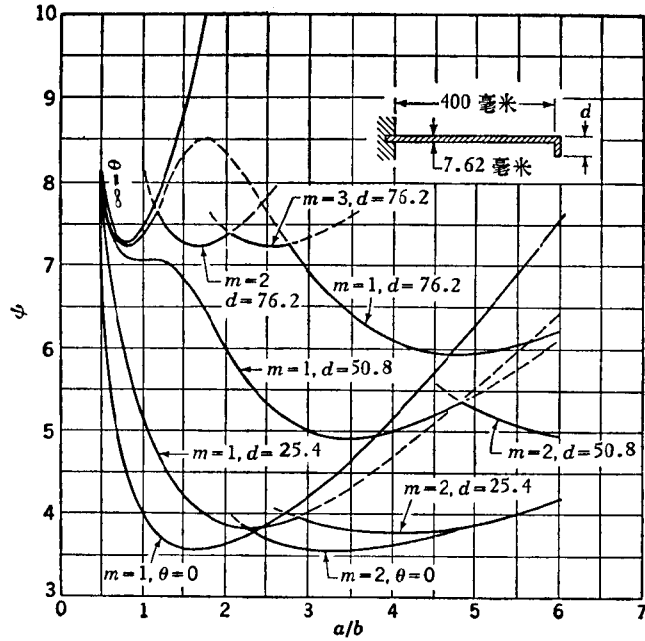


图 9.15

§ 9.5. 两对边简支并在与这两边平行的方向均匀受压的矩形板的屈曲

若板沿 $x = 0$ 及 $x = a$ 简支 (图 9.16), 而在未被支承的其余两边上作用均布压力。屈曲板的方程为:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{N_y}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (a)$$

我們可用与前一节相同形式的解¹⁾。边 $x = 0$ 与 $x = a$ 的边界条件同前。若板屈曲后力 N_y 保持与 y 轴平行 (图 9.16b), 则弯矩为零, 而沿 $y = \pm b/2$ 的剪力为 $N_y (\partial w / \partial y)$ 。于是运用与方程(8.20)类似的方程, 得边 $y = \pm b/2$ 的边界条件为

1) S. Woinowsky-Krieger 曾讨论过这问题, *Ingr.-Arch.*, vol. 19, pp. 200—207, 1951.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -N_y \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (b)$$

从这些边界条件,得计算 $(N_y)_{cr}$ 的一超越方程。研究表明,有两种可能的屈曲形式,如图 9.16b 与 c 所示。对这两种情形的 $(N_y)_{cr}$ 的

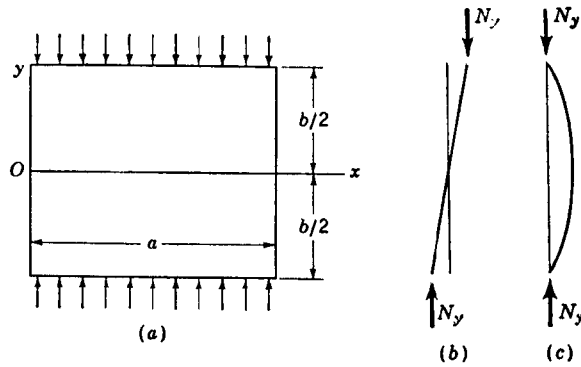


图 9.16

值,均可由方程

$$(N_y)_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (c)$$

表示。对于这两种屈曲形式与两个泊松比值 ($\nu = 0$ 及 $\nu = 0.3$) 的因子 k 的值,由图 9.17 中的曲线给出。在计算任一特定情形的临界力时,应当用给出较小 k 值的曲线。这部分曲线在图中由实线来表示。可以看出,对于 $\nu = 0.3$,直至 $b/a = 1.316$,第一种屈曲形式是反对称的。由 $b/a = 1.316$ 至 $b/a = 2.632$,屈曲形式是对称的。 b/a 再继续增大, k 值将保持在 2.31 邻近。对于 $\nu = 0$ 这情形亦可得相似的结论。

应当注意,对于反对称屈曲的曲线(图 9.17),亦可用于三边简支而在可以自由挠曲(图 9.18)的第四边作用着均布荷重的板。可以看出,屈曲以后的板其状况恰如图 9.16 所示的反对称屈曲板的上半部分,因为沿 x 轴挠度与弯矩均为零。对于图 9.18 所示情形的 k 值,可得自图 9.17 中的对于反对称屈曲的曲线,只须用 $2b/a$

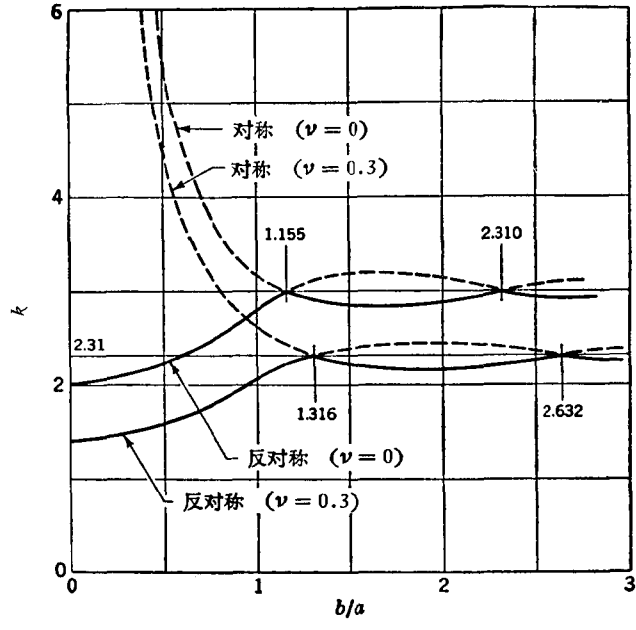


图 9.17

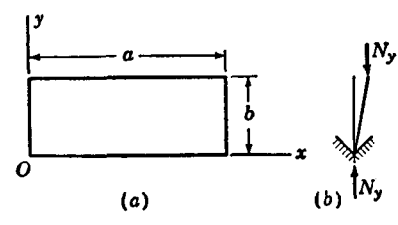


图 9.18

代替 b/a ¹⁾.

§ 9.6. 在弯曲与压缩联合作用下简支矩形板的屈曲²⁾

研究一简支矩形板 (图 9.19), 沿板的 $x = 0$ 及 $x = a$ 两边

- 1) 图 9.18 中的板沿 $y = 0$ 这边为固定的情形, 亦已由 Woinowsky-Krieger 讨论, *op. cit.*
- 2) 参阅 Timoshenko, *loc. cit.* 并参阅 J. Boobnov, *Theory of Structure of Ships*, vol 2, p. 515, St, Petersburg, 1914, 以及 J. H. Johnson 与 R. G. Noel, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 20, p. 535, 1953.

[1]

施以作用于中面内的分布力,其强度由方程

$$N_x = N_0 \left(1 - \alpha \frac{y}{b}\right) \quad (a)$$

给出,式中 N_0 为在 $y = 0$ 这边的压力的强度,而 α 为一数值因子.将 α 改变,可得各种不同的情形.例如取 $\alpha = 0$,我们得到在 § 9.2 所讨论的均布压力这情形.又如对 $\alpha = 2$,得到纯弯这情形.若 α 小于 2,得到如图 9.19 所示的弯曲与压缩的组合.若 $\alpha > 2$,将为弯曲与拉伸的组合.

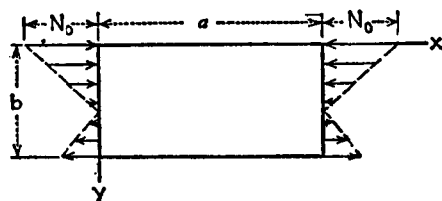


图 9.19

与以前一样,可取双重三角级数为四边简支的屈曲板的挠度:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

我们将用能量法以计算压力 N_0 的临界值.于是,对于由于挠度 (b) 的弯曲应变能,我们用以前所得的表达式 [参阅 § 9.2 的方程 (b)]

$$\Delta U = \frac{D}{2} \frac{ab\pi^4}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (c)$$

在板屈曲时外力所作的功 [参阅方程(8.32)]为

$$\Delta T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_0 \left(1 - \alpha \frac{y}{b}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy. \quad (d)$$

将 w 的表达式(b)代入,并注意到

$$\int_0^b y \sin \frac{i\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy = \frac{b^2}{4}, \quad \text{当 } i = j;$$

$$\int_0^b y \sin \frac{i\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy = 0, \quad \text{当 } i \neq j \text{ 且 } i \pm j \text{ 为偶数};$$

$$\int_0^b y \sin \frac{i\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy = -\frac{4b^2}{\pi^2} \frac{ij}{(i^2 - j^2)^2},$$

当 $i \neq j$ 且 $i \pm j$ 为奇数。

对于外力在屈曲过程中所作的功, 我們得到以下这表达式:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{N_0}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \\ &\quad - \frac{N_0}{2} \frac{\alpha a}{2b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[\frac{b^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i \frac{a_{mn} a_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right], \end{aligned}$$

式中的 i 只取 $n \pm i$ 为奇数者。

使这功与弯曲应变能(c)相等, 得到临界值 N_0 的方程如下:

$$\begin{aligned} (N_0)_{cr} &= \\ &= \frac{\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 - \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i \frac{a_{mn} a_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right]}. \end{aligned} \quad (e)$$

現在必須調整系数 a_{mn} 使所得的 $(N_0)_{cr}$ 为最小。計算这表达式对于每一系数 a_{mn} 的导数并使諸导数等于零[参閱方程(9.4)], 最后得到如下形式的綫性方程組:

$$\begin{aligned} D a_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 &= (N_0)_{cr} \left\{ a_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{2} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[a_{mn} - \frac{16}{\pi^2} \sum_i \frac{a_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (f)$$

搜集所有含有某一 m 值的方程。这些方程将包括系数 a_{m1} , a_{m2} , a_{m3} , \dots 。所有其他的系数均取为零, 即代替一般表达式 (b) 而設板的挠度的表达式为

$$w = \sin \frac{m\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

这相当于假设屈曲板沿 x 轴有 m 个半波¹⁾。

我们可认为在两节綫之間的半波为屈曲成一个半波的简支板。将 $m = 1$ 代入方程(f), 并运用記号

$$\sigma_{cr} = \frac{(N_0)_{cr}}{h},$$

我們得到如下这种方程組:

$$a_{1n} \left[\left(1 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - \sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right] - 8\alpha \sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \sum_i^{\infty} \frac{a_{1i} n i}{(n^2 - i^2)^2} = 0, \quad (g)$$

其中求和时遍取所有使 $n \pm i$ 为奇数的数 i 。

这是 a_{11}, a_{12}, \dots 的齐次綫性方程。取 $a_{11}, a_{12} \dots$ 均等于零就适合这些方程, 这相应于板的平的平衡形式。要得到系数 $a_{11}, a_{12} \dots$ 的非零解(这表示板屈曲的可能性), 方程(g)的行列式必須为零。这样就能得到一方程以計算压应力的临界值。这計算可用逐次逼近法来完成。首先只取方程組(g)的第一个方程, 并設除 a_{11} 外所有的系数均为零。这样, 我們得到

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - \sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

由上式,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2 h} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \frac{1}{1 - \alpha/2} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \frac{1}{1 - \alpha/2}. \quad (h)$$

只是对于小的 α 值, 即只当弯曲应力远比均布压应力为小时[参閱方程(a)], 这一級近似才給出良好的結果。当 $\alpha = 0$, 式(h)与均匀受压板的临界应力的表达式相同[参閱 § 9.2 的方程(g)]。

1) 这假设是合理的, 因为方程組(f)可以分为許多組, 每一組有一确定的 m 值, 这即表明板屈曲成节綫与 y 轴平行的許多半波。如果这些組中有一个行列式为零, 則整个方程組(f)的行列式为零。

要得到二級近似,必須取方程組(g)的两个有系数 a_{11} 与 a_{12} 的方程,于是得到

$$\begin{aligned} a_{11} \left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] - 8\alpha \sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{2}{9} a_{12} &= 0, \\ - 8\alpha \sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{2}{9} a_{11} + \left[\left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] a_{12} &= 0. \end{aligned}$$

令以上方程的行列式等于零,得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{cr} a^2 h}{\pi^2 D}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{8\alpha}{\pi^2} \frac{2}{9}\right)^2 \right] - \frac{\sigma_{cr} a^2 h}{\pi^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \right] + \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 = 0. \quad (i) \end{aligned}$$

从这方程可以計算 σ_{cr} 的二級近似。这近似的准确度随 α 的增大而减小;对于 $\alpha = 2$ 时的純弯曲情形,并且对于正方形板($a = b$),誤差約为 8%,因此要得到更良好的准确度必須进行进一步的近似計算。在方程組(g)中取三个方程,并設 $\alpha = 2$,得到

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{11} - 16\sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{2}{9} a_{12} &= 0, \\ - 16\sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{2}{9} a_{11} + \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{12} - 16\sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{6}{25} a_{13} &= 0, \\ - 16\sigma_{cr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{6}{25} a_{12} + \left(1 + 9 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{13} &= 0. \end{aligned}$$

令这些方程的行列式等于零,即可得到一方程以計算三級近似值。对于純弯曲¹⁾,这近似是足够准确的。

σ_{cr} 的最終表达式又可由方程

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (j)$$

来表示。对于各种比值 a/b 及各种 α 值,数值因子 k 的几个值列于表 9.6 內。对于純弯曲这情形 ($\alpha = 2$),用了三級近似;对于其他情形,用了表示二級近似的方程(i)以計算 σ_{cr} 。

1) 对于純弯曲情形的四级近似計算表明,三級与四级近似之差仅約 1/3%。

表 9.6 方程(j)中因子 k 的数值

$\alpha \backslash a/b$	0.4	0.5	0.6	0.667	0.75	0.8	0.9	1.0	1.5
2	29.1	25.6	24.1	23.9	24.1	24.4	25.6	25.6	24.1
4/3	18.7	—	12.9	—	11.5	11.2	—	11.0	11.5
1	15.1	—	9.7	—	8.4	8.1	—	7.8	8.4
4/5	13.3	—	8.3	—	7.1	6.9	—	6.6	7.1
2/3	10.8	—	7.1	—	6.1	6.0	—	5.8	6.1

从这表可以看出，对于純弯曲，当 $a/b = 2/3$ 时 σ_{cr} 的值为最小。当 α 减小时， σ_{cr} 为最小时的比值 a/b 增大，并趋近于以前对于均匀受压板所得的 1。純弯曲的 k 值由图 9.20 中 $m = 1$ 这曲线所表示。

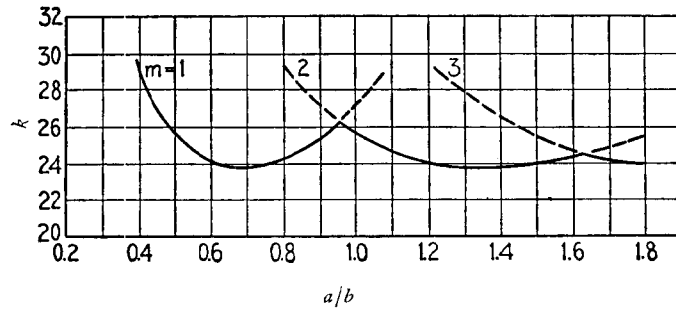


图 9.20

在以上的討論中，我們設板屈曲成一個半波，但所得的結果亦可用于有幾個半波的情形，只須如 § 9.2 所述繪出 $m = 2$ ， $m = 3$ 等等曲綫。要用图 9.20 中的曲綫的实綫部分來計算 σ_{cr} 及決定屈曲板被节綫所劃分的半波的个数。可以看出，长板屈曲成的每一半波长將約等于 $2b/3$ 。对于别的 α 值，即对于压应力和弯曲应力的各种組合，亦可以繪出与图 9.20 中类似的曲綫。

图 9.19 所示板的屈曲问题对于以下几种情形亦已解出：(1) $y = 0$ ， $y = b$ 两边固定；(2) $y = 0$ 这边简支， $y = b$ 这边固定¹⁾。最大压应力的临

1) 参阅 K. Nölke. *Ingr.-Arch.*, vol. 8, p. 403, 1937.

界值仍可由公式(i)表示。在表 9.7 至 9.9 内给出了由能量法所得的以上两

表 9.7 对于纯弯曲的因子 k 的值

(边 $y = 0, y = b$ 固定)

α \ a/b	0.30	0.35	0.40	0.45	0.47	0.48	0.50	0.60	0.70
2	47.3	43.0	40.7	39.7	39.6	39.6	39.7	41.8	45.8

表 9.8 对于三角形分布荷重的因子 k 的值

(边 $y = 0, y = b$ 为固定)

α \ a/b	0.40	0.50	0.60	0.64	0.65	0.66	0.67	0.70	0.80	0.90
1	17.7	14.7	13.7	13.57	13.56	13.57	13.58	13.65	14.3	15.4

表 9.9 对于纯弯曲的因子 k 的值

(边 $y = 0$ 简支; $y = b$ 固定)

α \ a/b	0.40	0.50	0.60	0.65	0.66	0.67	0.70	0.80	0.90	1.00
2	29.5	26.0	24.65	24.48	24.48	24.48	24.6	25.3	26.6	28.3

种情形的 k 值。将表 9.7 中的 k 值与表 9.6 中相应的值相比较,可以看出,当边为固定时,对于较长的板临界应力约增加了 75%,而自 $a/b = 0.667$ 至 $a/b = 0.47$ 波长将减小。将表 9.9 中的值与表 9.6 中相应的值相比较,可以看出,将板受张力的边固定(图 9.19),对于临界应力与波长的影响很小。

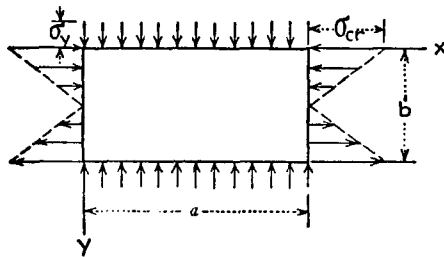


图 9.21

若除弯曲应力外,在垂直方向还有均布压应力 σ_y 作用于板(图9.21),则最大弯曲应力的临界值将减小,并且可以先前的推演为基础来计算,即将压应力 σ_y 所作的功加于弯曲应力所作的功[参阅表达式(d)]. 计算指出, σ_y 对 σ_{cr} 值的影响与比值 $\sigma_y:(4\pi^2 D/b^2 h)$ 及 $a:b$ 有关. 例如取 $(\sigma_y b^2 h/4\pi^2 D) = 1/3$ 及 $a = b$, 则临界应力 σ_{cr} 约比只有弯曲应力作用时的小 25%¹⁾.

§ 9.7. 在剪应力作用下矩形板的屈曲

我們首先討論沿边承受均布剪力 N_{xy} 的簡支矩形板²⁾(图9.22). 我們仍用能量法来计算使板开始屈曲的剪应力 τ_{cr} 的临界值. 取以前用过的双重級数作为屈曲板的挠度曲面的表达式, 則可符合簡支边的边界条件, 即取

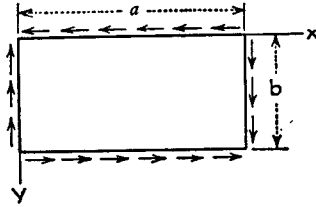


图 9.22

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

于是, 屈曲板的弯曲应变能的表达式为(参阅 361 頁)

$$\Delta U = \frac{D}{2} \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (b)$$

在板屈曲时外力所作的功为[参阅方程(8.32)]

$$\Delta T = -N_{xy} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (c)$$

代入 w 的表达式(a), 并注意到

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = 0, \text{ 若 } m \pm p \text{ 为偶数};$$

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = \frac{2a}{\pi} \frac{m}{m^2 - p^2}, \text{ 若 } m \pm p \text{ 为奇数},$$

我們得到

1) Timoshenko 给出了几个这种计算的例子, *loc. cit.*
 2) 参阅 Timoshenko, *Ann. ponts et chaussées*, p. 372, 1913; *Mem. Inst. Engrs. Ways of Commun.*, vol. 89, p. 23, 1915; *Der Eisenbau*, vol. 12, p. 147, 1921.

$$\Delta T = -8N_{xy} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q a_{mn} a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)}, \quad (d)$$

式中 m, n, p, q 为使 $m \pm p$ 及 $n \pm q$ 为奇数的整数。

令外力所作的功 (d) 等于应变能 (b), 得到以下这表达式以决定剪力的临界值:

$$N_{xy} = -\frac{abD}{32} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}{\sum_m \sum_n \sum_p \sum_q a_{mn} a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)}}. \quad (e)$$

现须选择这样的一组常数 a_{mn} 及 a_{pq} , 使 N_{xy} 为最小。与以前一样地进行, 令式 (e) 对于每一系数 a_{mn}, \dots 的导数为零, 得到 a_{mn}, \dots 的齐次线性方程组。这方程组可分为两组: 一组中常数 a_{mn} 的 $m+n$ 为奇数, 而另一组的 $m+n$ 为偶数。计算表明, 对于较短的板 ($a/b < 2$), 第二组方程将给出 $(N_{xy})_{cr}$ 的最小值。对于较长的板, 这两组方程均须研究¹⁾。

运用记号

$$\beta = \frac{a}{b}, \quad \lambda = -\frac{\pi^2}{32\beta} \frac{\pi^2 D}{b^2 h \tau_{cr}}, \quad (f)$$

可将对于较短板的方程写作以下这形式²⁾:

a_{11}	a_{22}	a_{13}	a_{21}	a_{33}	a_{42}	
$\frac{\lambda(1+\beta^2)^2}{\beta^2}$	$\frac{4}{9}$	0	0	0	$\frac{8}{45}$	= 0
$\frac{4}{9}$	$\frac{16\lambda(1+\beta^2)^2}{\beta^2}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{36}{25}$	0	= 0
0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{\lambda(1+9\beta^2)^2}{\beta^2}$	0	0	$-\frac{24}{75}$	= 0
0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{\lambda(9+\beta^2)^2}{\beta^2}$	0	$\frac{24}{21}$	= 0
0	$\frac{36}{25}$	0	0	$\frac{\lambda(9+9\beta^2)^2}{\beta^2}$	$-\frac{72}{35}$	= 0
$\frac{8}{45}$	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$	$-\frac{72}{35}$	$\frac{\lambda(16+4\beta^2)^2}{\beta^2}$	= 0

1) 参阅 M. Stein 及 J. Neff, *NACA Tech. Note*, 1222, 1947.

2) 为简单起见, 只写出了应与第一行的常数相乘的因子。

于是令以上这方程组的行列式等于零,即得计算 τ_{cr} 的方程。这计算可用逐次逼近法来完成。将计算限于有两个常数 a_{11} 及 a_{22} 的两方程,并使这两方程的行列式为零,得到

$$\lambda = \pm \frac{1}{9} \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)^2},$$

或者,运用记号(f),

$$\tau_{cr} = \pm \frac{9\pi^2}{32} \frac{(1 + \beta^2)^2}{\beta^3} \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (h)$$

这正负两个符号表明这里剪应力的临界值与应力的方向无关。

近似值(h)不够准确,因对于正方形板误差约为 15%,并且这误差将随比值 a/b 的增加而增大。要得到较好的近似,必须考虑方程组(g)中较多的方程。

取五个方程,并令它们的行列式为零,得到

$$\lambda^2 = \frac{\beta^4}{81(1 + \beta^2)^4} \left[1 + \frac{81}{625} + \frac{81}{25} \left(\frac{1 + \beta^2}{1 + 9\beta^2} \right)^2 + \frac{81}{25} \left(\frac{1 + \beta^2}{9 + \beta^2} \right)^2 \right]. \quad (i)$$

计算 λ 并将它代入方程(f),得到

$$\tau_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h}, \quad (j)$$

式中的 k 为与比值 $a/b = \beta$ 有关的一常数。对于一正方形板,我们得到 $k = 9.4$ 。用方程组(g)的更多的方程所作的计算¹⁾表明, k 的精确值约为 9.34,因此方程(i)所示的近似值的误差小于 1%。如果板的形状与正方形相差无几,如 $a/b \leq 1.5$,则方程(i)给出良好的近似解。对于较大的比值 a/b ,必须考虑许多方程。在表 9.10 中列出了这种计算的结果。

要得到对于狭长板的近似解,我们来研究两边简支的无限长板这极端情形。取以下这表达式为板的挠度曲面:

1) 有好几位作者作了这样的计算。例如参阅 S. Bergmann 及 H. Reissner, *Z. Flugtech. Motorluftsch.*, vol. 23, p. 6, 1932; E. Seydel, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, 1933, p. 169; Stein 与 Neff, *loc. cit.*

表 9.10 方程(j)中的因子 k 的值

a/b	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.5	3	4
k	9.34	8.0	7.3	7.1	7.0	6.8	6.6	6.1	5.9	5.7

$$w = A \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y), \quad (k)$$

可得这问题的近似解。对于 $y = 0$, $y = b$ 及沿节线[对于这些节线, $(x - \alpha y)$ 为 s 的倍数], 这表达式给出零挠度。这里 s 为屈曲板的半波长, 而因子 α 为节线的斜率。这问题的精确解¹⁾指出: 节线并非直的, 而屈曲板的挠度曲面的形式如图 9.23 所示。表达式 (k) 并不符合沿板的纵边弯矩为零的边界条件, 因为沿纵边 $\partial^2 w / \partial y^2$ 不等于零; 然而式 (k) 可用作这问题的近似解。将表达式 (k) 代入屈曲板的弯曲应变能的方程(8.29)以及外力所作的功²⁾的方程, 并使这两个量相等, 我们得到

$$\tau_{cr} = \frac{\pi^2 D}{2\alpha b^2 h} \left[6\alpha^2 + 2 + \frac{s^2}{b^2} + \frac{b^2}{s^2} (1 + \alpha^2)^2 \right]. \quad (1)$$

取

$$s = b\sqrt{1 + \alpha^2} \text{ 及 } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

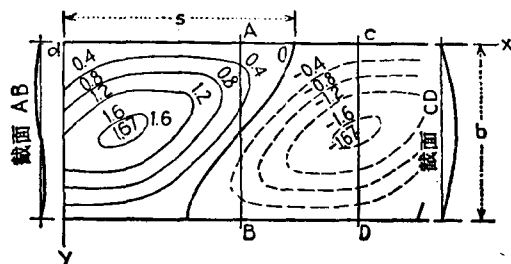


图 9.23

- 1) R. V. Southwell 作出了这问题的精确解, *Phil. Mag.*, vol. 48, p. 540, 1924; *Proc. Roy. Soc., London*, series A, vol. 105, p. 582.
- 2) 应考虑每一波所作的功及应变能。

得到 τ_{cr} 的最小值，于是

$$\tau_{cr} = 5.7 \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (m)$$

对于两边简支的无限长板条，这问题的精确解为

$$\tau_{cr} = 5.35 \frac{\pi^2 D}{b^2 h}, \quad (9.9)$$

因而对这情形近似解的误差约为 6.5%。

有了对于无限长板的方程 (j) 中 k 的精确值及对于正方形板的极为准确的 k 值，由方程 $k = 5.35 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2$ 所定出的并示于图 9.24 中的抛物线可用以决定对别的尺寸的板的 k 的近似值¹⁾。为了比较，相应于表 9.10 中所列数字的点亦一并绘出。可以看出，对于较长的板，表中所列出的 k 值永远在曲线的上方，从这曲线所得的值可供实际应用。

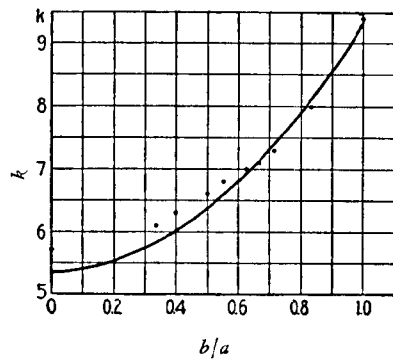


图 9.24

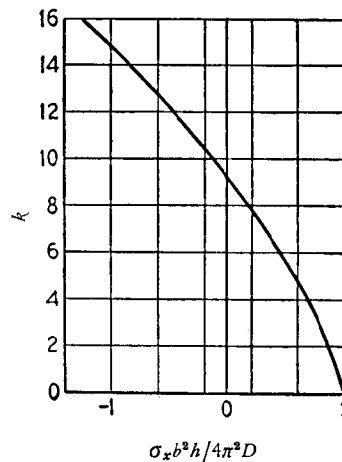


图 9.25

对于两边固定的无限长板在均布剪力作用下的屈曲问题亦已获解，其

1) 这仅为粗略的近似，因为 k 的精确值决定于与图 9.2 中的类似的相交曲线系。

临界应力值为

$$\tau_{cr} = 8.98 \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (9.10)$$

纯剪切与纵向压缩或拉伸 σ_x 的组合亦曾被研究过¹⁾；必须代入方程(i)以决定 τ_{cr} 的相应的 k 值由图 9.25 中的曲线定出。可以看出，任何压应力²⁾将降低受剪切的板的稳定性，而任何拉伸将增进稳定性。当 $\sigma_x = 0$ ，从这曲线得到在以前曾已得到过[参阅方程(9.10)]的 $k = 8.98$ 。

剪应力与弯曲应力组合这情形(图 9.26)亦是有实用意义的，并曾用能

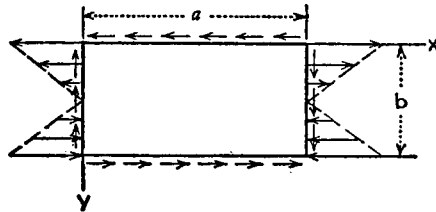


图 9.26

量法且以表达式(a)为挠度曲面而研究了简支板。研究的结果³⁾由图 9.27 中的曲线⁴⁾ I, II, III 及 IV 表示。在绘这些曲线时，以实际剪应力与表 9.10 所

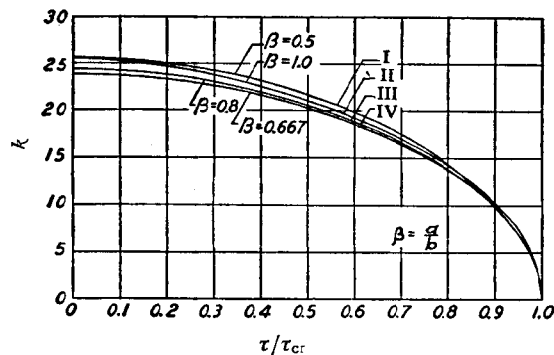


图 9.27 各种 τ/τ_{cr} 下矩形板中的临界弯曲应力

- 1) 参阅 R. V. Southwell *ibid.*
- 2) 压应力 σ_x 作为是正的。
- 3) 参阅 Timoshenko, *Engineering*, vol. 138, p. 207, 1943. 并参阅 O. Stein, *Der Stahlbau*, vol. 7, p. 57, 1934. 在最后一论文中,在式(a)中所取的项数比我们在图 9.27 所示的计算取的项数为少,因而结果的准确度小一些。
- 4) 这些曲线由 S. Way 所计算。在这计算中用了方程组(g)中的八个方程。

决定的临界剪应力之比作为横坐标。因子 k 值为纵坐标, 这 k 值必须代入方程 (i) (参阅 400 页) 以决定弯曲应力的临界值。可以看出, 对于小的比值 τ/τ_{cr} , 譬如 $(\tau/\tau_{cr}) < 0.4$, 剪应力对弯曲应力的临界值的影响很小。当 τ/τ_{cr} 趋近于 1 时, 曲线 I, II, III 及 IV 变得很陡, 这表明某些弯曲应力可加于纯剪切而并不显著地降低剪应力的临界值。

剪应力与两垂直方向的拉伸或压缩的组合曾为 H. 韦葛纳(Wagner) 所研究¹⁾。

在纯剪切作用下矩形板的屈曲问题, 对于其他的边界条件亦已解出²⁾, 即对于: (1) 边 $y = 0, y = b$ 固定 (图 9.22), 而另两边简支; (2) 四边均固定。计算得的方程(i)中的 k 值分别列于表 9.11 与 9.12 中³⁾。

表 9.11 因子 k 的数值
(边 $y = 0, y = b$ 固定; 边 $x = 0, x = a$ 简支)

a/b	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	∞
k	12.28	11.12	10.21	9.81	9.61	8.99

表 9.12 因子 k 的数值(四边为固定)

a/b	1.0	1.5	2.0	2.5	∞
k	14.71	11.50	10.34	10.85	8.99

如果除了 τ 外, 尚有压应力 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ 作用于图 9.22 中的板边, 则 τ_{cr} 的值与比值 σ/τ 有关。在表 9.13 中给出了四边固定的正方形板的方程 (i) 中 k 的几个值。

表 9.13 σ 与 τ 共同作用下正方形板的因子 k 的数值(四边固定)

σ/τ	0	0.5	1.0	1.5	2
k	14.71	7.09	4.50	3.24	2.51

1) H. Wagner, *Jahrb. Wiss. Ges. Luftf.*, 1928, p. 113.

2) 参阅 S. Iguchi, *Ingr.-Arch.*, vol. 9, pp. 1—12, 1938.

3) 在表 9.12 中, 引入了根据 B. Budiansky 与 R. Connor 所计算的几个修正值 (参阅 *NACA Tech. Note*, 1559, 1948)。

§ 9.8. 矩形板屈曲的其他情形

矩形板的两对边固定,另两边简支,沿简支边方向均匀受压¹⁾(图 9.28). 这里,类似于在 § 9.4 所用的方法亦可用于这问题. 压应力的临界值由方程

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (a)$$

给出,式中 k 为与边的比 a/b 有关的数值因子. 这因子的几个值列于表 9.14 内.

表 9.14 方程(a)中因子 k 的值

a/b	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.7	1.73	1.8	2.0	2.5	2.83	3.0
k	13.38	8.73	6.74	5.84	5.45	5.34	5.33	5.33	5.18	4.85	4.52	4.50	4.41

直到值 $a/b = 1.73$, 板将屈曲成一个半波. 从 $a/b = 1.73$ 到 $a/b = 2.83$ 将有两个半波,而屈曲板的形状如图 9.28 所示. 一般地,由 m 个过渡到 $(m + 1)$ 个半波,发生于 $a/b = \sqrt{m(m + 2)}$. 可以看出,当比值 a/b 增大时,固定边

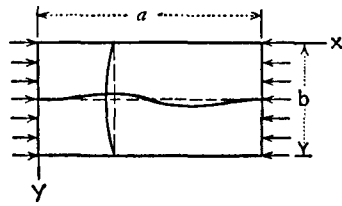


图 9.28

对于 σ_{cr} 的大小的影响减小; 当 $a/b = 3$, 在表 9.14 中的 k 值仅比得自四边简支板的值 4 大 10%.

在两垂直方向受压的四边固定的矩形板. 取坐标系如图 9.28 所示, 并设板的形状近于正方形, 且应力 σ_x 与 σ_y 几相等, 我们可预料到, 屈曲板的挠度曲面可以足够准确地由方程

$$w = \frac{\delta}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)$$

来表示, 这方程满足边界条件. 有了这挠度曲面的表达式, 弯曲应变能为

$$\Delta U = \frac{\pi^4 \delta^2 D}{8} ab \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right).$$

在板屈曲时压力所作的功为

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy + \frac{\sigma_y h}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx dy = \\ &= \frac{3}{32} \pi^2 \delta^2 h \frac{b}{a} \left(\sigma_x + \frac{a^2}{b^2} \sigma_y\right). \end{aligned}$$

1) F. Schleicher, Mitt. Forschungsanstalt, Gutehoffnungshütte Konzerns, vol. 1, 1931.

使这功与弯曲应变能相等,得以下这方程以计算压应力 σ_x 及 σ_y 的临界值:

$$\left(\sigma_x + \frac{a^2}{b^2}\sigma_y\right)_{cr} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2 D a^2}{h} \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right). \quad (9.11)$$

对于正方形板均匀受压这特殊情形,从以上这方程得到 $\sigma_{cr} = 5.33 \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$.

值得注意: 这问题有另一个解¹⁾,它给出 σ_{cr} 的下限

$$\sigma_{cr} = 5.30 \frac{\pi^2 D}{a^2 h}. \quad (9.12)$$

因此,对于这问题近似解是很准确的.

对于仅纵向受压的板,应考虑屈曲板有一条或几条垂直于板长度的节线. 这问题的解曾由几个作者讨论过. 对于四边固定、在纵向受压的板(图 9.28),表 9.15 给出了方程(a)中的因子 k 的值²⁾. 对于很长的板,显然压应力的临界值接近于由表 9.5 对于 $a/b = 0.7$ 所得的值.

表 9.15 对四边固定板的方程 (a) 中因子 k 的值

a/b	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
k	11.69	10.07	9.25	8.33	8.11	7.88	7.63	7.57	7.44	7.37	7.35	7.27	7.24	7.23

为两大小相等而方向相反的力所压的简支矩形板(图 9.29)³⁾. 取以下这级数为屈曲板的挠度曲面的表达式:

$$w = \sin \frac{\pi y}{b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (b)$$

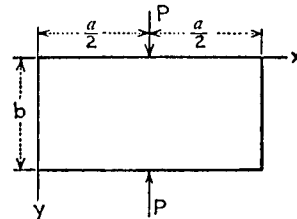


图 9.29

- 1) G. I. Taylor, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 13, p. 147, 1933. 并参阅 A. Weinstein, *Compt. rend.*, 1935.
- 2) 这些值为 S. Levy 所计算, *J. Appl. Mech.*, vol. 9, p. 171, 1942. 这论文还包括以前的作者们所得的结果及关于他们所发表的参考资料.
- 3) 参阅 A. Sommerfeld, *Z. Math. Physik*, vol. 54, 1906 及作者, *Z. Math. Physik*, vol. 58, p. 357, 1910. 对于这问题的进一步的讨论,参阅 D. M. A. Leggett, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 33, p. 325, 1937, 及 H. G. Hopkins 在第七次国际应用力学会议上提出的论文, London, 1948.

可得这问题的近似解，弯曲应变能的表达式成为

$$\Delta U = \frac{abD}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_m^2 \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (c)$$

屈曲时压力所作的功为

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=a/2}^2 dy = \frac{\pi^2 P}{4b} (a_1 - a_3 + a_5 - \dots)^2. \quad (d)$$

使这功等于弯曲应变能(c)，得到压力的临界值为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 Dab^2}{2} \frac{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_m^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}{(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)^2}. \quad (e)$$

令这表达式对于每一系数 a_n 的导数等于零，得到如下形式的线性方程组：

$$a_n = \frac{2P_{cr}}{\pi^2 Dab^2} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}. \quad (f)$$

将每一方程乘以 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ ，并将它们相加，得到

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 Dab^2}{2} \frac{1}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-2}}, \quad (g)$$

或者用记号 $a/b = \beta$ ，

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 D}{2b} \frac{1}{\beta^3 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\beta^2 + n^2)^2}}. \quad (h)$$

为了计算分母中的级数和，我们注意到

$$\frac{e^{\pi z/2} + e^{-\pi z/2}}{2} = (1 + z^2) \left(1 + \frac{z^2}{9} \right) \left(1 + \frac{z^2}{25} \right) \dots$$

将两边取对数并微分，得到

$$\frac{\pi}{4} \tanh \frac{\pi z}{2} = z \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 + z^2}. \quad (i)$$

再微分，得

$$\frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\cosh^2(\pi z/2)} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 + z^2} - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2z^2}{(m^2 + z^2)^2}.$$

将上式乘以 z 并运用方程(i)，得到

$$z^3 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + z^2)^2} = \frac{\pi}{8} \left(\tanh \frac{\pi z}{2} - \frac{(\pi z/2)}{\cosh^2(\pi z/2)} \right).$$

这方程的左边即为在方程(h)中的级数,并且可以看出,对于每一比值 $\beta = a/b$,可运用双曲函数表很容易地计算这级数之和。当 β 增大时,这和很快地趋近于极限值 $\pi/8$ (当 $a/b = 2$, 这和为 $0.973\pi/8$), 而对于长板, 我们可取

$$P_{cr} = \frac{4\pi D}{b}. \quad (9.13)$$

若板的边 $y = 0$ 及 $y = b$ 为固定, 我们取以下这级数为屈曲板的挠度曲面:

$$w = \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a},$$

于是与先前的情形一样进行计算, 对于长板我们得到

$$P_{cr} = \frac{8\pi D}{b}. \quad (9.14)$$

§ 9.9. 圓板的屈曲¹⁾

我們首先研究固定边圓板这简单情形(图 9.30)。要决定沿板边均匀分布的压力 N_r 的临界值, 我們設板已发生微小屈曲, 并运用板的挠度曲面的微分方程。設挠度曲面为一旋轉曲面, 并以 φ 表示旋轉軸与板的任一法綫間的夹角, 則所需要的方程为²⁾

$$r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} - \varphi = -\frac{Qr^2}{D}, \quad (a)$$

式中 r 为自板的中心至任一点的距离, 而 Q 为每单位长度内的剪力, 其正向示于图 9.30。由于无横向荷重作用于板, 我們有

$$Q = N_r \varphi, \quad (b)$$

并运用記号

$$\frac{N_r}{D} = \alpha^2, \quad (c)$$

得到

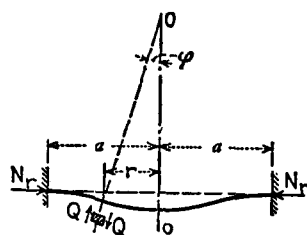


图 9.30

1) 参阅 G. H. Bryan, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 22, p. 54, 1891. 并参阅 A. Nadai, *Z. Ver. deut. Ingr.*, vol. 59, p. 169, 1915.

2) 参阅 Timoshenko, *Strength of Materials*, 3d ed., part 2, p. 94, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.

$$r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} + (\alpha^2 r^2 - 1)\varphi = 0. \quad (d)$$

引入新变量

$$u = \alpha r, \quad (e)$$

运用(e), 方程(d)成为

$$u^2 \frac{d^2\varphi}{du^2} + u \frac{d\varphi}{du} + (u^2 - 1)\varphi = 0. \quad (f)$$

这方程的通解为

$$\varphi = A_1 J_1(u) + A_2 Y_1(u), \quad (g)$$

式中 $J_1(u)$ 与 $Y_1(u)$ 各为第一类与第二类的一阶贝塞尔函数。为满足对称性条件, 在板的中心 ($r = u = 0$), 角 φ 必等于零。因为当 u 趋近于零时 $Y_1(u)$ 成为无限大, 故上述条件要求取 $A_2 = 0$ 。要符合板的固定边的条件, 必须有

$$(\varphi)_{r=a} = 0, \quad (h)$$

因此

$$J_1(\alpha a) = 0. \quad (i)$$

方程(i)的最小根为¹⁾

$$\alpha a = 3.832.$$

代入方程(c), 我們得到

$$(N_r)_{cr} = \frac{(3.832)^2 D}{a^2} = \frac{14.68}{a^2} D. \quad (9.15)$$

为了比較, 我們注意到, 两端固定、寬为一单位长而长度与板的直径相等的一狭条的临界压力为

$$\frac{\pi^2 D}{a^2}.$$

因此, 要使板屈曲, 应施以比狭条的临界应力約大 50% 的压应力。

解(g)亦可用于受压筒支圓板的屈曲。正如前一个例, 常数 A_2 必須为零以满足板中心的条件。第二个条件由沿板边的弯矩为零

1) 例如参阅 E. Jahnke 及 F. Emde, Table of Functions, 4th ed., p. 167, Dover Publications, New York, 1945.

而得;于是¹⁾

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r}\right)_{r=a} = 0. \quad (j)$$

运用导数的公式

$$\frac{dJ_1}{du} = J_0 - \frac{J_1}{u}, \quad (k)$$

式中 J_0 表示零阶贝塞尔函数, 可将边界条件(j)表示为形式

$$\alpha a J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a) = 0. \quad (l)$$

取 $\nu = 0.3$, 并运用 J_0 与 J_1 的函数表, 得到超越方程 (l) 的最小根为 2.05. 于是由方程(c),

$$(N_r)_{cr} = \frac{2.05^2 D}{a^2} = \frac{4.20 D}{a^2}, \quad (9.16)$$

即对于这情形的临界应力约为固定边板的 $1/3.5$.

若板的中心有一圆孔²⁾, 则沿板的外边界均匀分布的力 N_r 所引起的压应力不再为常数, 而须由拉梅 (Lamé) 公式来决定. 设板的屈曲系中心对称, 则板的挠度曲面的微分方程仍可用贝塞尔函数进行积分, $(N_r)_{cr}$ 的表达式为

$$(N_r)_{cr} = k \frac{D}{a^2}, \quad (m)$$

式中 k 为一数值因子, 其大小与比值 b/a 有关, b 为孔的半径. 对于各种 b/a 的值, 固定边板的 k 值示于图 9.31a; 沿外边界简支的板的 k 值示于图 9.31b. 对于以上两种情形, 均设在孔的周界上无力作用³⁾. 可以看出, 对于固定边板, 当 b/a 接近于 0.2 时, 因子 k 的值为最小; 而当 b/a 比值大于 0.2 时, k 随这比值很快地增大, 且 k 值超过无孔板的 k 值. 但必须注意, 在这讨论中我们假设了板的屈曲中心对称, 但当 b/a 趋近于 1 时, 外边界为固定的受压环与一边固定另一边自由的长的受压矩形板类似. 这样的板屈曲成

1) 参阅 Timoshenko, *op. cit.*, p. 93.

2) 这情形为 E. Meissner 所讨论过, *Schweiz, Bauzeitung*, vol. 101, p. 87, 1933.

3) 在这问题中, 取泊松比 $\nu = 1/3$.

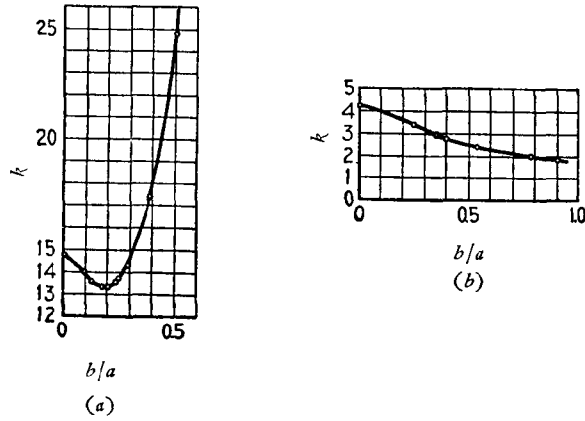


图 9.31

很多个波 (参阅 385 页); 对于狭的环, 我们应预料到, 在屈曲时沿圆周亦将形成好几个波, 而根据对称屈曲这假设所得的 k 值将给出偏大的 $(N_r)_{cr}$ 值。

对于中央有孔或无孔的圆板的屈曲问题, 亦曾讨论过变厚度板的情形¹⁾。并且, 对于中央有孔的圆板, 在内外边界上作用均布剪力这情形亦曾被研究过²⁾。

对于无孔的板, 曾研究过板屈曲成有径向及圆形节线的多个波, 并曾证明, 压力的临界值总可由方程 (m) 表示, 运用这些结果, 可以解沿两半径被支承及沿两同心圆被支承的板的屈曲问题³⁾。

§ 9.10. 其他形状的板的屈曲

均匀受压的固定边斜板⁴⁾。对于沿 x 轴受压的斜板 (图 9.32), 压应力

1) 参阅 R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 9, p. 205, 1938; K. Federhofer, *ibid.*, vol. 11, p. 224, 1940; H. Egger, *ibid.*, vol. 12, 1941; 以及 A. Schubert, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vols 25—27, 1947.

2) 等厚度板这情形曾由 W. R. Dean 研究过, *Proc. Roy. Soc.*, vol. 106, p. 268, 1924. 变厚度板这情形曾由 K. Federhofer 研究过, *Ingr.-Arch.*, vol. 14, p. 155, 1943.

3) Galerkin, B. *Compt. Rend.*, vol. 179, p. 1392, 1924.

4) 参阅 W. H. Wittrick, *Aeronaut. Quart.*, vol. 4, p. 151, 1953.

的临界值由下列公式给出:

$$(\sigma_x)_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (9.17)$$

图 9.33 中的曲线给出了对于三个不同的角度 α 值的因子 k 的值, $\alpha=0$ 这情形相应于矩形板(参阅 410 页).

受纯剪作用的固定边斜板¹⁾. 设剪应力 τ_{xy} 作用于与 x 轴平行的两边(图 9.34). 沿另外两边作用着剪应力与正应力, 它们的大小使得在板内产生纯

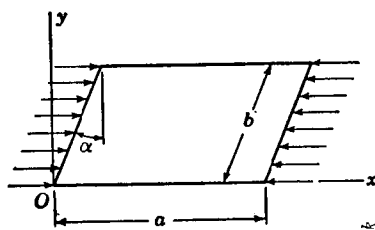


图 9.32

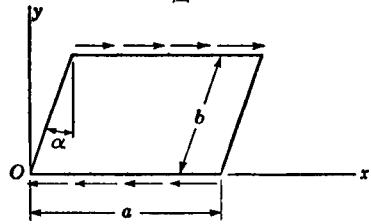


图 9.34

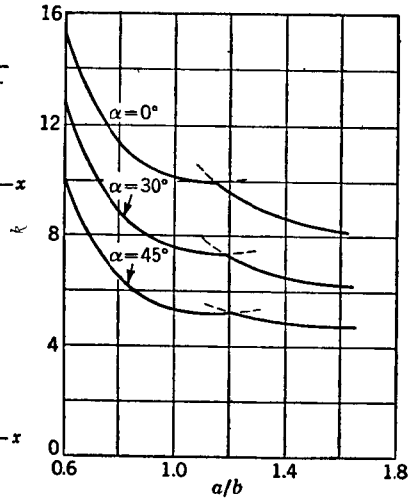


图 9.33

剪应力 τ_{xy} . 计算表明, 如果剪应力作用于如图所示的方向, 即使角 α 增大, 则剪应力 τ_{xy} 的临界值较小. $(\tau_{xy})_{cr}$ 的值可由公式

$$(\tau_{xy})_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{(b \cos \alpha)^2 h}$$

表示. 图 9.35 中给出了对于 $\alpha = 45^\circ$ 的 k 作为比值 a/b 的函数. 为了比较, 亦绘出了对于矩形板($\alpha = 0$)的 k 值; 还绘出了与无限长板相应的一水平渐近线[参阅方程(9.10)].

三角形板. 均匀受压的简支边等边三角形板的屈曲问题, 亦曾被讨论

1) 参阅 *ibid.*, vol. 5, p. 39, 1954.

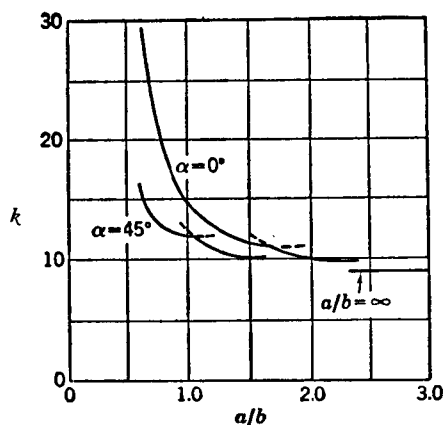


图 9.35

过¹⁾。并且得到压力的临界值为

$$N_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{a^2}, \quad (9.18)$$

式中的 a 为三角形的高。可以看出，对于这情形的临界应力，约与均匀受压的简支圆板的相同，该圆板的周界系内接于这高为 a 的等边三角形。

§ 9.11. 以肋条加强的板的稳定性²⁾

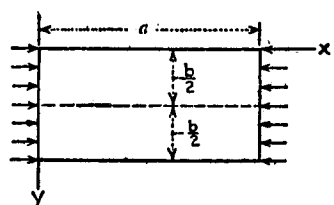


图 9.36

在所有的板的屈曲情形中，法向力或剪力的临界值与板的弯曲刚度成正比。因此，对于给定边界条件及给定比值 a/b 的矩形板，临界应力的大小与 $(h/b)^2$ 成正比。增加板的厚度当可增加板的稳定性，但是

对于所用材料的重量来说，这样的设计是不经济的。较经济的

- 1) 参阅 S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, p. 254, 1933. 对于三角形板的其他资料，参阅 Wittrick, *op. cit.*, vol. 5, p. 131, 1954; 及 J. M. Klitchieff, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 4, p. 257, 1951.
- 2) 参阅 Timoshenko, *Mem. Inst. Engrs. Ways of Commun.*, St. Petersburg, vol. 89, 1915; *Der Eisenbau*, vol. 12, p. 147, 1921. 并参阅 P. Seide, *NACA Tech. Note*, 2873, 1953, 该文中列出了关于这问题的一系列书刊。

办法是保持板的厚度愈小愈好而用加强肋条来增大稳定性。对于如图 9.36 所示的受压板，加上一条平分板宽并有适当横截面的纵向肋条，可使这板的稳定性约增大四倍。这种肋条的重量通常总是远小于由充分地增加板的厚度所增加的重量。在实际设计中，所需要的加强肋条的大小应使临界应力等于材料的屈服点应力。如是则所有的材料的强度已尽其用¹⁾。

与以前一样，可用能量法得到肋条截面的大小与板内的临界应力之间的关系。现将讨论受压和受剪的矩形板的加强的几个例子。

有纵肋的简支矩形板 对于这情形，我们取双重三角级数形式为屈曲板的挠度曲面(图 9.36)：

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

板的相应的弯曲应变能为

$$\Delta U = \frac{\pi^4 D}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (b)$$

设有几个纵向肋条的一般情形，并以 EI_i 表示离边 $y=0$ 为 c_i 的肋条的弯曲刚度²⁾，则这肋条与板一同屈曲时的弯曲应变能为

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= \frac{EI_i}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=c_i}^2 dx = \\ &= \frac{\pi^4 EI_i}{4a^3} \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left(a_{m_1} \sin \frac{\pi c_i}{b} + a_{m_2} \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2. \end{aligned} \quad (c)$$

在屈曲时，作用于板的压力 N_x 所作的功为

$$\Delta T = \frac{N_x}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} a_{mn}^2. \quad (d)$$

在屈曲时，作用于一肋条的压力 P_i 所作的功为

-
- 1) 考虑板在屈曲发生以后的强度的轻结构将在以后讨论(参阅 § 9.13)。
 - 2) 因肋条刚性固结于板，在计算 I_i 时须将部分板计算在内(参阅 422 页)。并参阅 Seide, *op. cit.*

$$\begin{aligned} \Delta T_i &= \frac{P_i}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=c_i}^2 dx = \\ &= \frac{P_i}{2} \frac{\pi^2}{a^2} \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(a_{m1} \sin \frac{\pi c_i}{b} + a_{m2} \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2. \end{aligned} \quad (c)$$

計算临界应力的一般方程为¹⁾

$$\Delta U + \Delta \sum_i U_i = \Delta T + \Delta \sum_i T_i, \quad (f)$$

式中的和号必須对所有的加劲肋条求和。运用記号

$$\frac{a}{b} = \beta, \quad \frac{EI_i}{bD} = \gamma_i, \quad \frac{P_i}{bN_x} = \frac{A_i}{bh} = \delta_i, \quad (g)$$

式中 bh 为板的横截面积, A_i 为一个肋条的横截面积。由方程 (f) 得到

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} \times \\ &\times \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (m^2 + n^2 \beta^2)^2 + 2 \sum_i \gamma_i \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2 + 2 \sum_i \delta_i \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2}. \end{aligned} \quad (h)$$

与以前一样,使这表达式对于系数 a_{mn} 的导数等于零,我們得到如下形式的齐次綫性方程組:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left[a_{mn} (m^2 + n^2 \beta^2)^2 + 2 \sum_i \gamma_i \sin \frac{n\pi c_i}{b} m^4 \sum_{p=1}^{\infty} a_{mp} \sin \frac{p\pi c_i}{b} \right] - \\ - \beta^2 \sigma_{cr} \left(m^2 a_{mn} + 2 \sum_i \delta_i \sin \frac{n\pi c_i}{b} m^2 \sum_{p=1}^{\infty} a_{mp} \sin \frac{p\pi c_i}{b} \right) = 0. \end{aligned} \quad (i)$$

使这方程組的行列式等于零,即得一決定 σ_{cr} 的方程。

我們首先研究一根纵向肋条的情形; 这肋条平分板寬 (图 9.36); 于是 $c_i = b/2$ 。并不限制一般性, 我們可設这加强板屈曲

1) 在这讨论中略去了屈曲发生时肋条的扭转应变能。F. W. Bornscheuer 曾研究过扭转应变能对 σ_{cr} 的影响; 参阅 Dissertation, Darmstadt, 1946.

成半个波, 因而取 $m = 1$. 于是方程(i)可写作以下这简单形式¹⁾:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} [a_1(1 + \beta^2)^2 + 2\gamma(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)] - \\ & \quad - \sigma_{cr}[a_1 + 2\delta(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)] = 0, \\ & \frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} (1 + 4\beta^2)^2 a_2 - \sigma_{cr} a_2 = 0, \\ & \frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} [a_3(1 + 9\beta^2)^2 - 2\gamma(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)] - \\ & \quad - \sigma_{cr}[a_3 - 2\delta(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)] = 0, \\ & \frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} (1 + 16\beta^2)^2 a_4 - \sigma_{cr} a_4 = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (i)$$

我們可注意到, 每一个第偶数个方程只含有一个系数, 相应的 σ_{cr} 的值系相应于肋条为屈曲板的一条节綫, 于是板屈曲时肋条保持为直綫. 要建立肋条的弯曲刚度及压应力的临界值之間的关系, 必須考虑方程組 (i) 中的諸第奇数方程. σ_{cr} 的一級近似值可由方程組的第一个方程, 并設只有系数 a_1 不等于零而得, 即只取表示屈曲板挠度曲面的双重級数(a)的第一項. 于是

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2\gamma}{\beta^2(1 + 2\delta)}. \quad (9.19)$$

下面用方程組(i)中較多的方程的計算表明: 对于較长的板, 譬如 $\beta > 2$, 这一級近似是很准确的. 对于較短的板, 必須用方程組(i)中較多的方程. 取系数 a_1 与 a_3 不等于零的第一个及第三个方程, 并使这两方程的行列式等于零, 得到下列这二次方程以計算 σ_{cr} 的二級近似:

$$\begin{aligned} & (k\beta^2)^2(1 + 4\delta) - k\beta^2[(1 + 2\delta)(c + d) - \\ & \quad - 8\gamma\delta] + cd - 4\gamma^2 = 0, \end{aligned} \quad (k)$$

式中

$$k = \frac{\sigma_{cr} b^2 h}{\pi^2 D}, \quad c = (1 + \beta^2)^2 + 2\gamma, \quad d = (1 + 9\beta^2)^2 + 2\gamma.$$

1) 在以下的推导中, 系数 a_{mn} 的第一个下标省略.

取方程組(j)中系数 a_1, a_3 与 a_5 不等于零的三个方程, 我們得到一个三次方程以計算 σ_{cr} 的三級近似值。这些計算表明, 二級及三級近似相差很小; 因此用方程(k)計算有一根肋条的受压板的临界应力已足够准确。这些应力总可由公式

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (1)$$

来表示, 式中的因子 k 与板的大小及由比值(g)所决定的肋条的大小有关。表 9.16 内列出了这因子的某些值。可以看出, 对于一定的 γ 及 δ 值, 因子 k 随比值 a/b 而变化, 并在某一比值时成为最小。这表明, 长板将常常屈曲成几个半波, 使半波长与板寬之比趋近于当 k 为最小时的值。由这表可以看出, 当肋条的弯曲刚度增大时半波的长度就增长。用 σ_{cr} 的一級近似的表达式(9.19), 即可証明, 当 $\beta^2 = \sqrt{1 + 2\gamma}$ 时 k 为最小。

在表 9.16 中下面划橫綫的 k 值与寬为 $b/2$ 的簡支板的值相同。这表明在板屈曲时使肋条仍保持直綫的肋条与板的大小比例。

对于每一特定情形, 可以由表 9.16 很容易地計算用一根肋条(图 9.36)加劲的板的临界压应力。設一簡支边受压钢板具有下列尺寸及弹性常数: $a = 122$ 厘米, $b = 203.2$ 厘米, $h = 1.43$ 厘米; $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\nu = 0.3$ 。于是 $\beta = a/b = 0.6$, 而对于无加劲肋条的板, 从表 9.1 得到 $\sigma_{cr} = 483$ 公斤/厘米²。现在設有一绝对刚硬的肋条平分板寬。在这情况下, 每一半可作为寬度为 $b/2 = 101.6$ 厘米的板。将这板作为簡支, 由表 9.1 得到 $\sigma_{cr} = 1550$ 公斤/厘米²。我們可用表 9.16 来决定肋条应有的截面积的大小, 使它在板屈曲时保持为直綫。从这表可看出, 对 $a/b = 0.6$, 用 $\gamma = EI/bD = 5$ 及 $\delta = A/bh < 0.2$ 的加劲肋条可达到这样的目的。在計算量 EI 时, 应注意到加劲肋条系铆接或焊接于寬度很大的板, 这将大大地增大肋条的弯曲刚度。以槽形或 Z 截面杆的一翼緣铆接于板而作为肋条, 则由肋条与板所组成的截面的形心将很接近于板面; 所以在計算 EI 时, 須用肋条截面对于与翼緣外表面相重合的这轴的截面惯性矩¹⁾。以高为 10.16 厘米截面积为

1) E. Chwalla 与 A. Novak 曾进一步讨论了这问题, *Der Stahlbau*, Nos. 10 及 12, 1937.

表 9.16 对于用一根纵向肋条加劲的板(图 9.36)的方程(1)中因子 k 的值

β	$\gamma = 5$			$\gamma = 10$			$\gamma = 15$			$\gamma = 20$			$\gamma = 25$		
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$
	0.6	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5
0.8	15.4	14.6	13.0	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8
1.0	12.0	11.1	9.72	16.0	16.0	15.8	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0
1.2	9.83	9.06	7.88	15.3	14.2	12.4	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5
1.4	8.62	7.91	6.82	12.9	12.0	10.3	16.1	15.7	13.6	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1	16.1
1.6	8.01	7.38	6.32	11.4	10.5	9.05	14.7	13.6	11.8	16.1	16.1	14.4	16.1	16.1	16.1
1.8	7.84	7.19	6.16	10.6	9.70	8.35	13.2	12.2	10.5	15.9	14.7	12.6	16.2	16.2	14.7
2.0	7.96	7.29	6.24	10.2	9.35	8.03	12.4	11.4	9.80	14.6	13.4	11.6	16.0	15.4	13.4
2.2	8.28	7.58	6.50	10.2	9.30	7.99	12.0	11.0	9.45	13.9	12.7	10.9	15.8	14.5	12.4
2.4	8.79	8.06	6.91	10.4	9.49	8.15	11.9	10.9	9.37	13.5	12.4	10.6	15.1	13.8	11.9
2.6	9.27	8.50	7.28	10.8	9.86	8.48	12.1	11.1	9.53	13.5	12.4	10.6	14.8	13.6	11.6
2.8	8.62	7.91	6.31	11.4	10.4	8.94	12.5	11.5	9.85	13.7	12.6	10.8	14.8	13.6	11.6
3.0	8.31	7.62	6.53	12.0	11.1	9.52	13.1	12.0	10.3	14.1	13.0	11.1	15.2	13.9	11.9
3.2	8.01	7.38	6.32	11.4	10.5	9.05	13.9	12.7	10.9	14.8	13.5	11.6	15.6	14.3	12.3
3.6	7.84	7.19	6.16	10.6	9.70	8.35	13.2	12.2	10.5	15.9	14.7	12.6	16.2	15.7	13.5
4.0	7.96	7.29	6.24	10.2	9.35	8.03	12.4	11.4	9.8	14.6	13.4	11.6	16.0	15.4	13.3

10.08 厘米²的标准槽钢为肋条,我们得到 $I = (159 + 10.08 \times 5.08^2) = 418$ 厘米⁴, $\gamma = EI/bD \approx 7.7$ 及 $\delta = A/bh \approx 0.034$. 从表 9.16 中的 $\beta = 0.6$ 可以看出,这样大小的肋条可以作为是绝对刚硬的.

如果板长加倍,于是 $a/b = 1.2$. 从表可以看出,要消除加劲肋条的屈曲,比值 γ 必须大于 10. 以高为 12.7 厘米,截面积为 12.6 厘米²的标准槽钢作为加劲肋条,我们得到 $I = (309 + 12.6 \times 6.35^2) = 816$ 厘米⁴, $\gamma = 15$ 及 $\delta = 0.043$. 由表看出,这样大小的肋条可以作为是绝对刚硬的.

若有两根相同的纵向肋条将板宽等分为三部分,则稳定性问题可以用同样的方法来分析. 设屈曲形式对中綫($y = b/2$)对称,作为一級近似可从方程(i)得到

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D (1 + \beta^2)^2 + 3\gamma}{b^2 h \beta^2 (1 + 3\delta)} \quad (9.20)$$

这公式的形式与以前所述的一根肋的公式(1)相同. 在表 9.17 内

表 9.17 方程(1)中因子 k 的值(两个纵向肋条分板为三等分)

β	$\gamma = 10/3$		$\gamma = 5$		$\gamma = 20/3$		$\gamma = 10$	
	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.10$	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.10$	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.10$	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.10$
0.6	26.8	24.1	36.4	33.2	36.4	36.4	36.4	36.4
0.8	16.9	15.0	23.3	20.7	29.4	26.3	37.2	37.1
1.0	12.1	10.7	16.3	14.5	20.5	18.2	28.7	25.6
1.2	9.61	8.51	12.6	11.2	15.5	13.8	21.4	19.0
1.4	8.32	7.36	10.5	9.32	12.7	11.3	17.2	15.2
1.6	7.70	6.81	9.40	8.31	11.1	9.82	14.5	12.8
1.8	7.51	6.64	8.85	7.83	10.2	9.02	12.9	11.4
2.0	7.61	6.73	8.70	7.69	9.78	8.65	11.9	10.6

列出了数值因子 k 的几个值. 运用公式(9.20), 对于每一特定情形, 我們可确定使方程(1)中的因子 k 为最小的 β 值, 并且如果选定了加劲肋条的大小, 可定出在屈曲时板将被划分为几个波. 在图 9.37 中将 k 值用曲线表出. 为了比较, 图中亦繪出了具有两个绝对刚性肋这情形的曲线. 在讨论 a/b 与 γ 的值較小的板时, 应

考虑反对称屈曲形式(即中綫($y = b/2$)为一节綫)¹⁾的可能性。由图 9.37 可以看出, 当 $0.37 < a/b < 0.66$ 及 $\gamma = 5$, σ_{cr} 的最小值

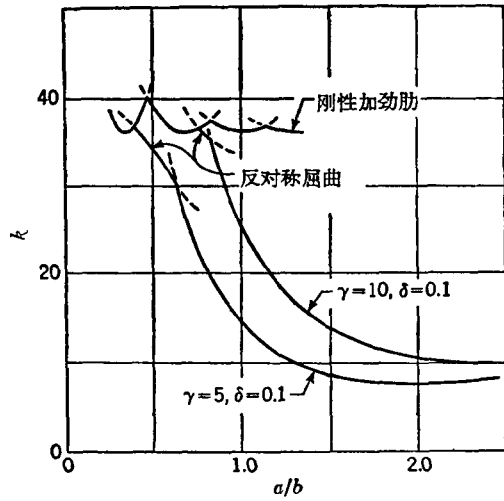


图 9.37

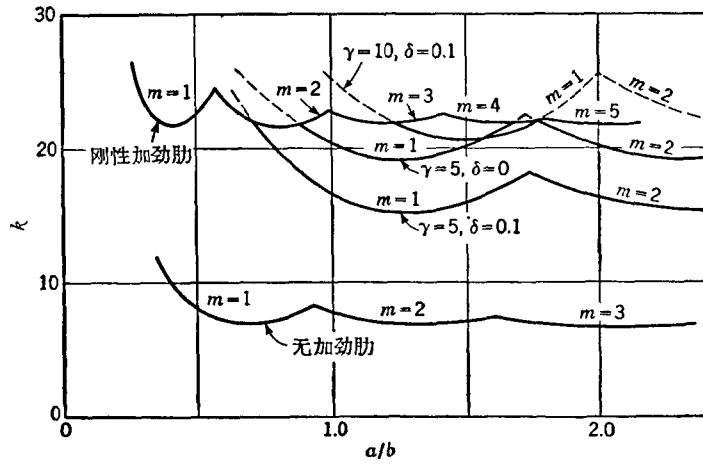


图 9.38

1) R. Barbré 研究过这种屈曲形式, *Ingr.-Arch.*, vol. 8, p. 117, 1937.

即相应于这种屈曲形式。

除能量法外,如 § 9.4 所述的对微分方程进行积分的方法,亦可用以研究加劲板的屈曲¹⁾。在图 9.38 中给出了由积分所得的板的 k 值;这板的纵向边为固定且在中央有一肋条(图 9.36)。为了比较,图中亦绘出了:(1)无肋条这情形;(2)有一绝对刚性肋条这情形。对于后一情形,板的每一半可作为一宽 $b/2$ 的板;其与 x 轴平行的一边固定而另一边简支。

如果等间距的加劲肋条多于两个,且肋条较易弯曲,则由方程(i)的第一式,得临界应力的近似表达式为²⁾

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2 \sum_i \gamma_i \sin^2 \frac{\pi c_i}{b}}{\beta^2 \left(1 + 2 \sum_i \delta_i \sin^2 \frac{\pi c_i}{b} \right)}. \quad (9.21)$$

有横向加劲肋条的简支受压板(图 9.39)。对于这情形,我们取级数³⁾

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (m)$$

作为板的挠度曲面。与以前一样并用记号 (g) ,得到如下形式的齐次线性方程组:

$$\begin{aligned} a_m (m^2 + \beta^2)^2 + \sum_i 2\gamma_i \beta^3 \sin \frac{m\pi c_i}{a} \left(a_1 \sin \frac{\pi c_i}{a} + a_2 \sin \frac{2\pi c_i}{a} + \dots \right) &= \\ &= \sigma_{cr} \frac{b^2 h}{\pi^2 D} \beta^2 m^2 a_m. \end{aligned} \quad (n)$$

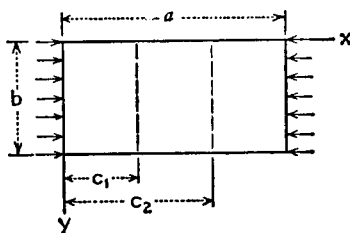


图 9.39

1) A. Lokshin 曾用这方法, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 2, p. 225, 1935 (俄文); Barbré 亦曾用这方法, *op. cit.* 图 9.38 即取自 Barbré 的论文。

2) 关于另一分析方法,参阅第 428 页。

3) 屈曲时,在 y 方向将只形成半个波。

如果有許多等间距且较易弯曲而刚度相同的肋条,以至在屈曲板的每个半波内将有几个肋条,则在式(m)中可以只取一项,并设

$$w = a_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

方程(n)成为

$$a_m(m^2 + \beta^2)^2 + a_m 2r\beta^3 \sum_i \sin^2 \frac{m\pi c_i}{a} = \sigma_{cr} \frac{b^2 h}{\pi^2 D} \beta^2 m^2 a_m.$$

对于这情形,临界应力的近似公式为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{(m^2 + \beta^2)^2 + r\beta^2}{\beta^2 m^2}, \quad (9.22)$$

其中 $(r-1)$ 表示肋条的个数, m 表示半波的个数。对于每一特定情形,必须如此地选择 m ,使式(9.22)为最小。对于较短的板并只有一根横向肋条平分板(图 9.39),我们设在式(m)中只有系数 a_1 不等于零,并作为一级近似自方程组(n)的第一个方程得到

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2r\beta^3}{\beta^2}. \quad (9.23)$$

这公式说明了若板屈曲成一个半波,采用肋条对于临界应力的影响。

取 a_1 与 a_3 不等于零并用方程组(n)中的第一个与第三个方程,将得到较好的近似。逐渐地增大 r ,最后将达到这状况:板屈曲成两个半波,而肋条成为屈曲板的节线。运用方程组(n)的两个方程计算了对于各种不同 β 值的 r 的几个极限值;在这极限值时板屈曲时肋条保持为直线。这些值均列于表 9.18 内¹⁾。

表 9.18 对于一根、两根及三根横向肋条的 r 的极限值

β	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	$\sqrt{2}$
一根肋条	12.8	7.25	4.42	2.82	1.84	1.19	0.435	0
两根肋条	65.5	37.8	23.7	15.8	11.0	7.94	4.43	2.53
三根肋条	177	102	64.4	43.1	30.2	21.9	12.6	7.44

可以看出,肋条对临界压应力的影响与板的大小有关。取一正方形板并用 $r = 1.19$ 的肋条,我们得到两个半波而不是一个半波,并且,与未加肋的板(参阅表 9.1)相比临界压应力按 6.24:4 这比值而增大。如果板的大小

1) 这表系 N. Naerlovich 所计算,并在 1952 年 10 月函告本作者。

系使 $\beta = 1.41$, 则这未加劲的板无论屈曲成一个或两个半波, 其临界应力相同; 因此, 一根平分板的横向肋条对于临界应力毫无影响。

我们可同样地讨论用两或三根相同的、间隔相等的肋条来加劲的板, 并可计算当板屈曲成三个或四个相同的半波时使肋条保持为直线的 γ 的极限值。对于这情形的 γ 的几个极限值列于表 9.18 内。

以上用以计算肋条的加强效能的方法, 如果需要, 亦可用于研究 铆接 (图 9.40) 对于临界应力的影响。这样的问题例如在船舶结构的设计中会遇到¹⁾。

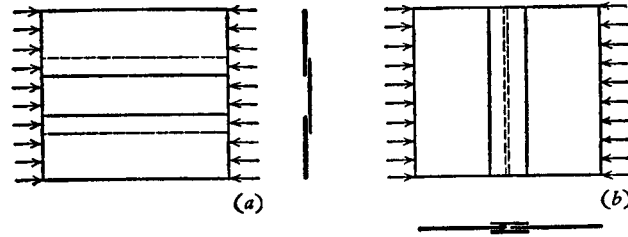


图 9.40

对于有很多相同的、等间隔的肋条平行于受压矩形板的一边的情形, 可认为这加劲板在两垂直方向有不同的弯曲刚度²⁾。如果板承受作用于中面内的力, 这样的板的挠度曲面的一般微分方程为

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.24)$$

在这方程中, $D_1 = (EI)_x / (1 - \nu_x \nu_y)$ 为加劲板相应于弯矩 M_x 的平均弯曲刚度; ν_x 与 ν_y 为相应于 x 及 y 方向的泊松比; $D_2 = (EI)_y / (1 - \nu_x \nu_y)$ 为相应于弯矩 M_y 的平均弯曲刚度; 并且

$$D_3 = \frac{1}{2} (\nu_x D_2 + \nu_y D_1) + 2(GI)_{xy},$$

式中的 $2(GI)_{xy}$ 为平均扭转刚度 [参阅下面的方程 (o)]。将以下诸矩的表达

- 1) 这一类的几个例曾为 G. Schnadel 讨论过, *Werft, Reederei, Hafen*, vol. 11, 1930.
- 2) 这样的板的弯曲为 M. T. Huber 研究过, *Bauingenieur*, p. 354, 1923; *Repts. Intern. Cong. Appl. Mech.*, Zürich, 1926. 并参阅 "Theory of Plates and Shells" 2d ed., Timoshenko 与 S. Woinowsky-Krieger 合著, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

式:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{(EI)_x}{1-\nu_x\nu_y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -\frac{(EI)_y}{1-\nu_x\nu_y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= 2(GI)_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{aligned} \quad (o)$$

代入 § 8.2 的平衡方程 (g), 即可得方程 (9.24)。式 (o) 系得自以下诸方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{M_x}{(EI)_x} + \frac{\nu_y}{(EI)_y} M_y, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M_y}{(EI)_y} + \frac{\nu_x}{(EI)_x} M_x, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} &= \frac{1}{2(GI)_{xy}} M_{xy}. \end{aligned} \quad (p)$$

量 $(EI)_x$, $(EI)_y$, $(GI)_{xy}$, ν_x 及 ν_y 可由加劲板的直接试验决定; 每一次只施以一弯矩或扭矩并测量板的相应的变形。这种实验¹⁾表明, ν_x 与 ν_y 通常可以在计算中取为零。

对于在 x 方向均匀受压的这样的板 (图 9.1), 如以 N_x 表示每单位长度内的平均压力的大小, 由方程 (9.24) 得到

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (9.25)$$

设板屈曲成半个波,

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

并将 w 代入方程 (9.25), 得到

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{b^2 h} \left(D_1 \frac{b^2}{a^2} + 2D_3 + D_2 \frac{a^2}{b^2} \right).$$

当

$$\frac{a}{b} = \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}, \quad (9.26)$$

得到临界应力的最小值为

$$\sigma_{cr} = \frac{2\pi^2}{b^2 h} (\sqrt{D_1 D_2} + D_3). \quad (9.27)$$

1) 例如参阅 E. Seydel 的论文, 发表于 "Jahrbuch 1930 der deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt", p. 235, Berlin, 1930.

由此得出结论：一纵向受压并由互相平行的纵向肋条加劲的长矩形板将屈曲成许多个相等的半波，半波的长度适合方程(9.26)。于是临界应力由方程(9.27)决定。对于各向同性的板 $D_1 = D_2 = D_3$ ，方程(9.27)与 § 9.2 的方程(h)相同。

在剪应力作用下的简支矩形板的加劲。这类问题中几个简单的情形已被研究过。我们首先讨论一承受均布剪应力并由一平分板的肋条所加劲的

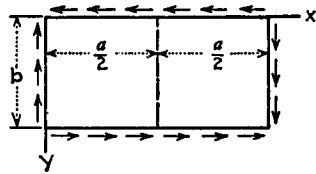


图 9.41

简支矩形板(图 9.41)。与以前一样,可用能量法来研究肋条对于临界剪应力的影响。可以证实,如果加劲肋条的刚度不够,屈曲板的倾斜的波将横过肋条,于是随同板的屈曲,肋条也将发生弯曲。逐渐地增大肋条的刚度,可能达到这样的情况,即板的每一半将如大小为 $(a/2) \times b$

的简支边矩形板那样地屈曲,而肋条保持为直线¹⁾。肋条弯曲刚度 EI 的相应的极限值可由研究板与肋条的弯曲应变能而得到。记这弯曲刚度与板若弯成柱面时的刚度 Da 之比为 γ 。表 9.19 内列出了 γ 的几个数值。

表 9.19 一根肋条时比 γ 的极限值

a/b	1	1.25	1.5	2
$\gamma = EI/Da$	15	6.3	2.9	0.83

如果有两根肋条将板分为三等分,用类似的方法,可决定板屈曲时肋条保持为直线的 γ 的极限值。这样的几个 γ 值列在表 9.20 内。以后(参阅 § 9.16)将指明这些结果对决定板梁加劲肋条的适当大小的某些应用²⁾。

表 9.20 两根肋条时比 γ 的极限值

a/b	1.2	1.5	2	2.5	3
$\gamma = EI/Da$	22.6	10.7	3.53	1.37	0.64

1) 对于这情形,肋条这线并非屈曲板的节线。故肋条将有弯曲,但对 τ_{cr} 的影响可略去;参阅 A. Kromm 的论文, *Der Stahlbau*, Nos. 18 及 20, 1944。

2) 王俊奎曾研究过三根和四根肋条的情形, *J. Appl. Mech.*, vol. 14, p. 269, 1947。并参阅 Vlatka Brčić, *Der Stahlbau*, vol. 25, p. 88, 1956。

如果一长矩形板为几个纵向的肋条所加劲,运用 § 9.7 的表达式 (k) 作为屈曲板的挠度曲面,可以得到临界剪应力的近似值。将诸肋条的弯曲应变能加于屈曲板的弯曲应变能,并使这和等于剪力所作之功,我们得到

$$\tau_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{1}{2\alpha} \left\{ 2 + 6\alpha^2 + \frac{s^2}{b^2} + \frac{b^2}{s^2} [\gamma + (1 + \alpha^2)^2] \right\}, \quad (9.28)$$

式中

$$\gamma = \frac{2 \sum_i (EI)_i \sin^2 \frac{\pi c_i}{b}}{Db}, \quad (q)$$

而 $(EI)_i$ 为离板边为 c_i 的肋条的弯曲刚度, b 为板宽。对于任一所设的 γ 值,须决定 α 与 s 以使表达式 (9.28) 为最小。这样,剪应力的临界值由公式

$$\tau_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (r)$$

表示。在表 9.21 内列出了因子 k 的几个值。为了指明加劲肋条对临界应力

表 9.21 方程 (r) 中 k 的值

γ	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
k	6.98	7.70	8.67	9.36	9.90	10.4	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0

的影响,在这表中所列的 k 值应与对于未加劲的长板所得的近似值 5.7 [参阅 § 9.7 的方程 (m)] 相比较。

例如取一长矩形板, $b = 213$ 厘米, $h = 0.952$ 厘米,以三根等间距的高 10.16 厘米横截面积 10.08 厘米² 的标准槽钢作为肋条而加劲。对于这情形,

$$I = 159 + 10.08 \times 5.08^2 = 419 \text{ 厘米}^4.$$

并从方程 (q) 得到 $r \approx 98$; 因此在方程 (r) 中的 k 约为 12。

长矩形板的剪切屈曲问题,在飞机设计中是很为重要的。在这领域内已进行了大量实验与理论工作¹⁾。

若有很多平行而大小一样且等距离的肋条,这加劲板又可作为在两垂直方向有不同弯曲刚度的板,并且可用方程 (9.24)。波纹板的屈曲曾为倍葛曼 (Bergman) 及赖司纳 (Reissner) 用这种方法讨论过²⁾。设波纹的波平

1) 参阅 H. Crate 与 Hsu Lo, *NACA Tech. Note* 1589, 1948, 及 M. Stein 与 R. W. Fralich, *NACA Tech. Note* 1851, 1949.

2) S. Bergman 及 H. Reissner, *Z. Flugtech. u. Motorluftsch.*, vol. 20, p. 475, 1929. 并参阅 Seydel, *loc. cit.*

行于简支矩形板(图 9.22)的一边,并运用记号

$$\theta = \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{D_3} \quad \text{及} \quad \beta = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}},$$

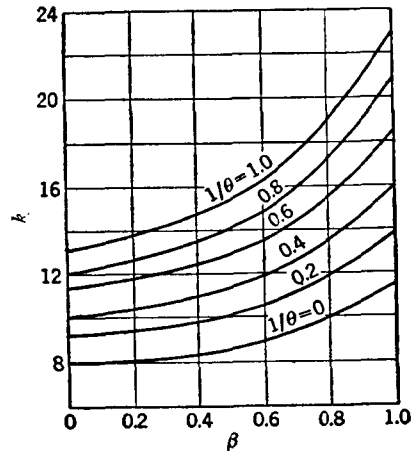


图 9.42

当 $\theta > 1$ 时,剪力 N_{xy} 的临界值可得自方程

$$(N_{xy})_{cr} = 4k \frac{\sqrt[4]{D_1 D_2^3}}{b^2}, \quad (9.29)$$

式中的 k 为与 θ 及 β 值有关的因子;这因子可得自图 9.42 中的曲线¹⁾. 对于无限长的各向同性板, $\beta = 0$, $\theta = 1$, 则从图 9.42 得到的 k 值将使方程 (9.29) 与以前所得的方程(9.9)一致. 当 $\theta < 1$ 时,剪力的临界值系得自方程

$$(N_{xy})_{cr} = 4k \frac{\sqrt{D_2 D_3}}{b^2}. \quad (9.30)$$

在表 9.22 内列出了对于无限长板的几个 k 值.

表 9.22 对于无限长板的方程(9.30)中因子 k 的值

θ	0	0.2	0.5	1.0
k	11.7	11.8	12.2	13.17

方程(9.29)与(9.30)亦可用于固定边长板,这时 k 值必须取自表 9.23.

1) 参阅 E. Seydel, Z. Flugtech, Motorluftsch., vol. 24, p. 78, 1933.

表 9.23 对于两边固定的无限长板的方程(9.29)及(9.30)中因子 k 的值

θ	0	0.2	0.5	1	2	3	5	10	20	40	∞
k	18.6	18.9	19.9	22.15	18.8	17.6	16.6	15.9	15.5	15.3	15.1

加劲矩形板承受在其平面内的弯曲(图9.43)这问题,亦已被研究过。最大压应力的临界值仍由方程(1)给出。方程中的 k 值与比值 a/b 及由式(g)所定义的加劲肋条的横截面积与弯曲刚度有关。所作的计算¹⁾,系对于肋条 AB 位于离受压最大的边为 $b/4$ 这情形(图9.43)。对于各种 γ 与 δ 值所得

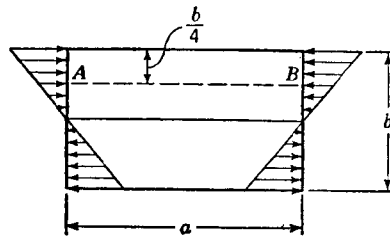


图 9.43

的 k 值,由图 9.44 中的诸曲线表示。为了比较,亦绘出了对于未加劲板(运

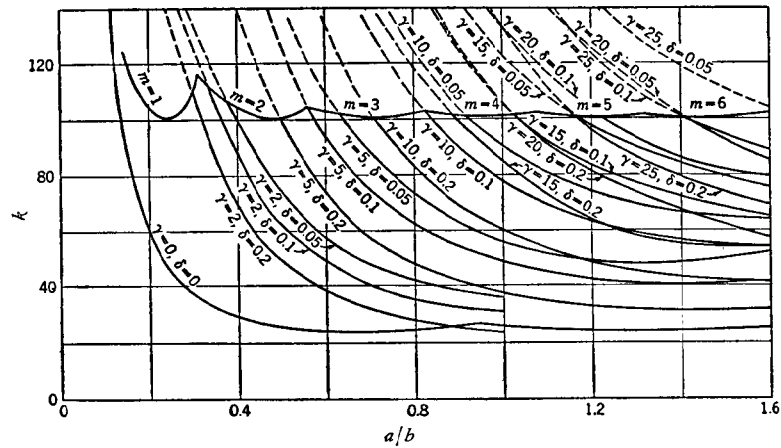


图 9.44

1) 参阅 C. Massonnet, Intern. Assoc. Bridge Structural Eng., vol. 6, p. 233, 1940.

用表 9.6 中的 k 值) 的曲线 ($\gamma = \delta = 0$) 及对于一绝对刚性肋这情形的曲线。运用这些曲线, 就可选择对于每一特定情形的肋条的大小。图 9.45 中

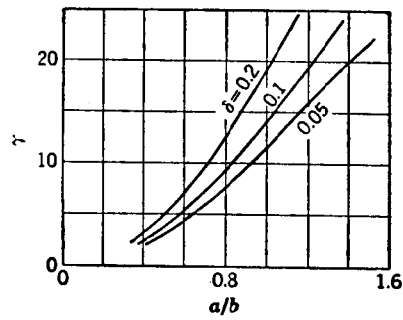


图 9.45

的曲线给出了这样的 γ 值, 相应的 k 值与有一绝对刚性的肋时的值相同。图 9.46 中给出了加劲肋条位于板中央时的 k 值¹⁾。

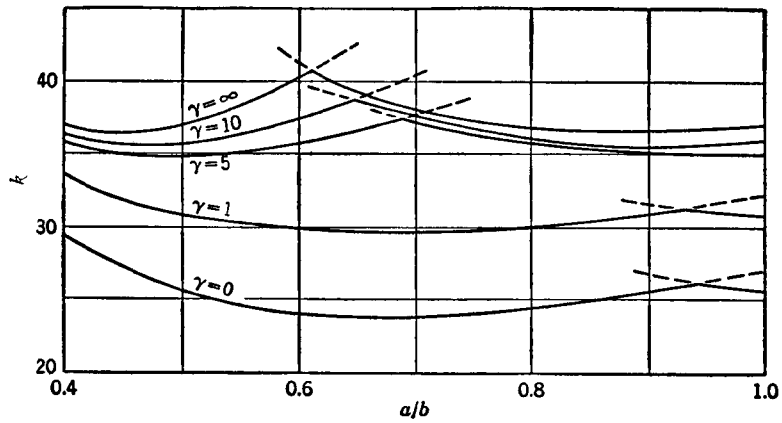


图 9.46

板在肋条弯曲时承受非均匀压缩 (图 9.47) 这问题亦曾被研究过²⁾。并

- 1) 这情形曾由 M. Hampl 所研究, *Der Stahlbau*, vol. 10, p. 16, 1937.
- 2) 参阅 V. Bogunović, *Der Stahlbau*, vol. 24, p. 8, 1955.

且,对于某些所设的结构尺寸,定出了肋条在均布荷重下的临界值 q_{cr} 。

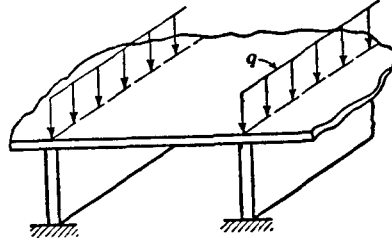


图 9.47

§ 9.12. 超过比例极限的板的屈曲

到现在为止,在板的屈曲的讨论中,我们假设了应力系在弹性范围之内。超过了比例极限,以前所得的公式给出偏大的临界应力值。要得到较满意的结果,必须考虑材料在超过比例极限后的性状。我们首先来研究在沿一个边的方向均匀受压的四边简支矩形板(图 9.1)。在弹性极限以内且屈曲成半个波时,压应力的临界值的公式为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2. \quad (a)$$

当 h/b 的比值为一定时,对于正方形板得到这应力的最小值

$$\sigma_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2 h} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2}. \quad (b)$$

这 σ_{cr} 值亦可用于屈曲成许多个波的长矩形板。以结构钢为例, $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\nu = 0.3$, 我们可用图 9.48 中的曲线 AB 表示应力 σ_{cr} 为比值 b/h 的函数。这曲线可用以得到在弹性范围以内的 σ_{cr} 。

实验证实,当压应力达到材料的屈服点时(对于现在这情形,设屈服点为 2400 公斤/厘米²),对于任何比值 b/h 板都将屈曲。这在图中由水平线 BC 表示。若材料有明显的屈服点并且直到这点为止系符合胡克定律,则水平线 BC 连同曲线 BA 决定了对于任何比值 b/h 的压应力的临界值。对于结构钢这样的材料,在小于屈服点的某一应力时通常发生永久变形。设图中的点 D 相应于

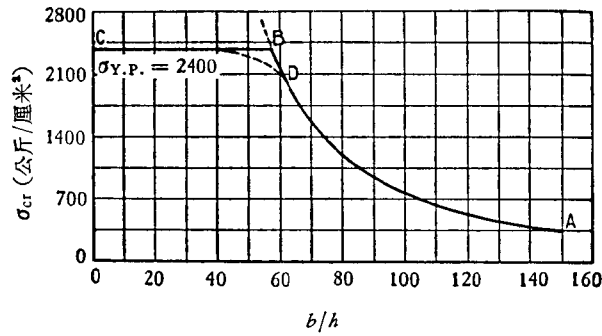


图 9.48

材料的比例极限，则在图中必然有一介于其间的曲线而不是在点 B 有一稜角；这段曲线连接了相应于完全弹性的曲线 AD 及表示塑性流动的水平线。要得到这样的曲线，设板在一个方向受压超过比例极限后，对材料的力学性质的影响在所有其他方向是相同的。于是板保持各向同性¹⁾，并且我们可运用材料的切线模量（参阅 § 3.3），在屈服点与比例极限之间取几个初始应力值，并由板材料的压缩试验图定出相应的 E_t 值。于是将所选的 σ_{cr} 值及相应的 E_t 值（而不是 E ）代入方程 (b)，即可计算 b/h 值并绘出所需的曲线。如不用压缩试验图，可自方程 (3.17) 用恰当的参数 c 以决定 E_t 。

对于受均匀平面应力作用的板的一般情形，屈服点应力由方程²⁾

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_{y.p.}^2$$

决定，式中的 σ_1 与 σ_2 为主应力， $\sigma_{y.p.}$ 为简单拉伸的屈服点应力。要计算在各种均匀应力作用下的板在超过比例极限后的临界应力，我们仍用在弹性范围内所得的公式，只须在公式中以 E_t 代替 E 。若无实验资料以决定合适的 E_t 值，则可采用由式

1) 参阅 E. Chwalla, *Repts. 2d Intern. Congr. Bridge Structural Eng.*, Vienna, p. 322, 1928, 以及 M. Rös 与 A. Eichinger, *Repts. 3d Intern. Congr. Bridge Structural Eng.*, Paris, p. 144, 1932.

2) 参阅 Timoshenko, *Strength of Materials*, 3d ed., part 2, p. 454, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1956.

$$\sigma_e = \sigma_1 \sqrt{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}$$

所定义的等效拉应力这概念。于是对于组合应力状态的 E_t , 可取作等于单向拉应力为 σ_e 时的切线模量。

铝合金板的超过剪切比例极限的实验表明¹⁾, 如在计算中用比值 G_s/G 而不用 E_t/E , 其中 G 为剪切模量, 而 G_s 为剪切的割线模量, 则所得的结果与计算得的 τ_{cr} 值很为符合。后一量的值对于每一 τ 值系由剪切试验图(图 9.49)作为比 τ/γ 而确定。

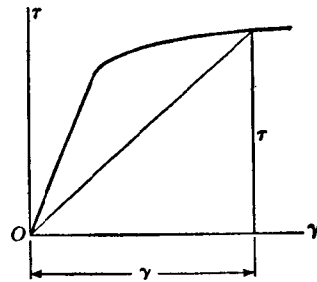


图 9.49

§ 9.13. 屈曲板的大挠度

到现在为止, 在计算对于各种板屈曲情形的临界应力时, 我们假设挠度很小, 并且由于屈曲而产生的板中面的应变可以略去。经验表明, 屈曲后的板的情况颇不同于屈曲后的压杆。对于压杆, 临界荷重可作为它的极限荷重, 但屈曲了的薄板可以负担比屈曲开始时的临界荷重大得多的荷重。在飞机结构中, 结构的重量是首要的, 板屈曲后的额外强度常需利用, 于是在使用条件下板可能发生很大的屈曲。要研究当应力大于临界值时板的弯曲, 必须考虑中面内的应变。将一般方程 (8.38), (8.39) 应用于这问题是极为困难的, 因为这些方程非常复杂。要得到近似解, 我们运用屈曲板的应变能的表达式并用这能量为最小这条件决定板的挠度²⁾。

我们首先讨论一在 y 方向受压的简支板, 这板在 x 方向的横向伸长为刚性框架所阻止(图 9.50)。取坐标原点如图所示, 符合边界条件的屈曲板的挠度曲面的近似表达式为

$$w = f \cos \frac{\pi x}{2b} \cos \frac{\pi y}{2a}. \quad (a)$$

1) 参阅 G. Gerard, *J. Appl. Mech.*, vol. 15, p. 7, 1948. R. A. Pride 与 G. J. Heimerl 的论文, *NACA Tech. Note* 1817, 1949, 给出了板塑性屈曲各种理论比较。并参阅 E. Z. Stowell, *NACA Tech. Note*, 1681, 1948, 及 P. P. Bijlaard, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 16, p. 529, 1949, 及 vol. 24, p. 291, 1957.

2) 这问题的另一解法曾为 G. Schnadel 所提出, *Repts. 3d Intern. Cong. Appl. Mech.*, Stockholm, vol. 3, p. 73, 1930.

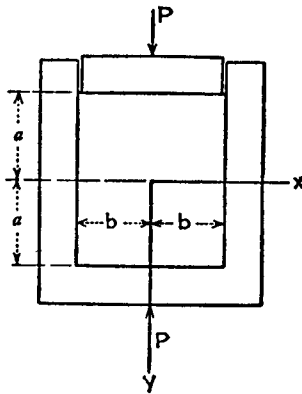


图 9.50

板中面的且符合边界条件的位移分量 v, u , 可取为以下的形式:

$$v = C_1 \sin \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi x}{2b} - ey, \quad (b)$$

$$u = C_2 \sin \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{2a},$$

式中的 C_1, C_2 及 e 为常数。可以看出, 在边 $x = \pm b$ 及 $y = \pm a$ 上 u 等于零; 在边界 $x = \pm b$ 及 $y = \pm a$ 上, 位移 v 等于由 y 方向的均匀压应变 e 所引起的位移¹⁾。

在板中面内的应变分量为[参阅 § 8.7 的方程(b)]

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2,$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

而板的相应的应变能为

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{h}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = \\ &= \frac{Gh}{1-\nu} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{xy}^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

1) 设板的中心保持不动。

运用位移 u, v 与 w 的表达式(a)与(b),并将弯曲应变能

$$U_1 = \frac{\pi^4 abf^2 D}{32} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2$$

加于中面的应变能 U_2 , 得到

$$\begin{aligned} U = U_1 + U_2 = & \frac{\pi^4 abf^2 D}{32} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{Gh}{1-\nu} \left[4abe^2 - \frac{\pi^2 f^2 be}{4a} + \right. \\ & + \frac{\pi^4 f^4}{1024 ab} \left(9 \frac{a^2}{b^2} + 9 \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - C_1 \frac{\pi^2 f^2}{6} \left(\frac{2b}{a^2} + \frac{1-3\nu}{2b} \right) - \\ & - C_2 \frac{\pi^2 f^2}{6} \left(\frac{2a}{b^2} + \frac{1-3\nu}{2a} \right) + C_1^2 \pi^2 \left(\frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{8} \frac{a}{b} \right) + \\ & \left. + C_2^2 \pi^2 \left(\frac{a}{b} + \frac{1-\nu}{8} \frac{b}{a} \right) + C_1 C_2 \frac{16}{9} (1+\nu) - \nu \frac{\pi^2 f^2 ae}{4b} \right]. \quad (d) \end{aligned}$$

对于板的给定的压应变 e , 在表达式(a)与(b)中的常数 C_1, C_2 与 f 可决定于应变能 U 为最小这条件; 因此

$$\frac{\partial U}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial C_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial f} = 0. \quad (e)$$

我们现在研究正方形板这情形。于是 $a = b, C_1 = C_2 = C$, 而方程(e)的头两方程成为

$$-\frac{\pi^2 f^2}{6a} \frac{5-3\nu}{2} + 2\pi^2 C \frac{9-\nu}{8} + \frac{16}{9} C(1+\nu) = 0.$$

由上式, 对 $\nu = 0.3$, 得到

$$C = 0.1418 \frac{f^2}{a}. \quad (f)$$

将这代入方程(e)的第三个方程, 得到

$$f(4.058h^2 - 6.42a^2e + 5.688f^2) = 0. \quad (g)$$

这方程的解 $f = 0$ 相应于受压板的平的形式。使方程(g)的括号中的项等于零, 得这解给出屈曲板的挠度的另一解。于是

$$f = \sqrt{\frac{6.42a^2e - 4.058h^2}{5.688}}, \quad (h)$$

只当

$$6.42a^2e > 4.058h^2$$

时才得到 f 的实数解。由极限条件

$$6.42a^2e = 4.058h^2$$

得到

$$e_{cr} = 0.632 \frac{h^2}{a^2}, \quad (i)$$

而相应的压应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{c_{cr}E}{1-\nu^2} = \frac{0.632h^2E}{(1-\nu^2)a^2}. \quad (i)$$

这应力等于在两垂直方向受压的正方形板的临界压应力 $(\sigma_y)_{cr}$; 这临界压应力系由方程(c)(参阅 379 页) 并取 $m = n = 1, a = b$, 及 $\sigma_x = \nu\sigma_y = 0.3\sigma_y$ 所得。

如果取 c 值为式(i)所给的 n 倍, 由(h)得到

$$f = 0.845h\sqrt{n-1}. \quad (k)$$

取 $n=10$, 即使板的压缩为式(i)所给的临界值的 10 倍, 我们得到 $f=2.535h$, 即板中点的挠度约为板厚的 2.5 倍。

将由(k)与(f)所得的常数 f 与 C 的值代入位移的表达式 (a) 与 (b), 即可由表达式(c) 得到板中面的相应的应变, 并可计算相应的应力。对 $y = a$ 得到

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{y=a} &= \nu(\sigma_y)_{y=a}, \\ (\sigma_y)_{y=a} &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\epsilon_y)_{y=a} + \nu(\epsilon_x)_{y=a}] = \\ &= 0.714 \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^2}{a^2} (n-1) \cos \frac{\pi x}{2a} \left(\frac{\pi^2}{8} \cos \frac{\pi x}{2a} - 0.142\pi \right) - \\ &\quad - 0.632 \frac{E}{1-\nu^2} n \frac{h^2}{a^2}. \end{aligned}$$

对 $n = 10$ 所计算得的板边界上的应力示于图 9.51。可以看出, 当板的挠度甚大时压应力的分布不再均匀, 而大部分荷重为板的靠近边缘的部分所承担。

在单位压缩 $n\sigma_{cr}$ 下板所负担的总压力为

$$P = -h \int_{-a}^a \sigma_y dx = 2ah \left(0.623 + \frac{0.377}{n} \right) n\sigma_{cr}.$$

括号内这因子给出了由于屈曲板对压缩的抗力的相对减小。这抗力相当于宽为

$$c = 2a \left(0.623 + \frac{0.377}{n} \right) \quad (9.31)$$

的平板的抗力。宽度 c 称为受压板的有效宽度; 这里它是由设板的横向伸长被阻止而计算得的。

对于在飞机结构中所用的较薄的板, 其极限荷重可能比临界荷重大好几倍, 所以我们不能期望这近似解还足够准确。在位移的表达式(a)及(b)中

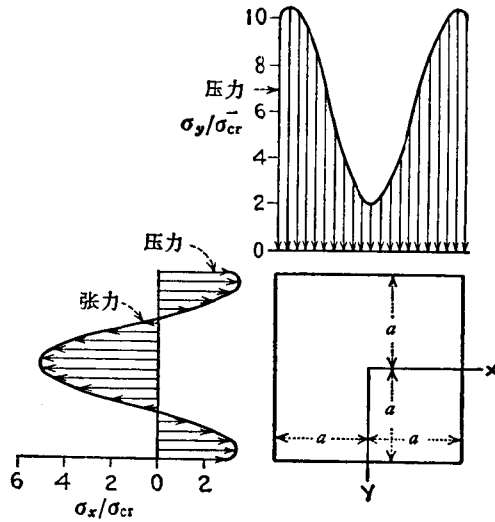


图 9.51

取较多的项可以改进这解, 但计算所需的工作量将大大增加. 在挠度的表达式(a)中加上一项, 即取

$$w = f \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi x}{2b} + f_1 \cos \frac{3\pi y}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2b}, \quad (1)$$

这计算曾被作出. 于是, 保留先前的 u 与 v 的表达式, 我们得到一个二级近似解. 这些计算证明: 一级与二级近似解相差很小, 并且只当 n 值很大时 (譬如 $n > 50$), 即作用的荷重比临界荷重大很多倍时, $(\sigma_y)_{\max}$ 值之差才变得明显.

在前面的讨论中曾假设框架是绝对刚体, 于是受压板的边的横向位移被完全阻止. 当板受压时, 如保持板的两侧边成直线的这框架的两铅直杆在横向可自由移动, 这问题可以作类似的处理. 取

$$\begin{aligned} w &= f \cos \frac{\pi x}{2b} \cos \frac{\pi y}{2a}, \\ v &= C_1 \sin \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi x}{2b} - \epsilon y, \\ u &= C_2 \sin \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{2a} + \alpha x, \end{aligned} \quad (m)$$

由沿板铅直边上正应力之和为零这条件决定 α , 于是得到

$$\alpha = -\frac{\pi^2 f^2}{16b^2} + \frac{2C_2}{b} + \nu e. \quad (n)$$

将 α 代入 (m) 的第三式并计算应变能, 我们仍用方程 (e) 以决定 f , C_1 及 C_2 . 对于正方形板并且 $\nu = 0.3$, 从为首的两个方程我们得到

$$C_1 = 0.144 \frac{f^2}{a}, \quad C_2 = 0.1215 \frac{f^2}{a}, \quad (o)$$

而第三个方程成为

$$f(0.411h^2 - 0.455ea^2 + 0.320f^2) = 0.$$

屈曲板的挠度为

$$f = \sqrt{\frac{0.455ea^2 - 0.411h^2}{0.320}}. \quad (p)$$

使这挠度等于零, 得到板纵向压缩的临界值

$$e_{cr} = \frac{0.411}{0.455} \frac{h^2}{a^2} = 0.904 \frac{h^2}{a^2},$$

这与从方程 (9.6) 对于正方形板所得的恰巧一样. 再运用记号 $n = e/e_{cr}$, 方程 (p) 给出¹⁾

$$f = 1.133h\sqrt{n-1}. \quad (q)$$

将这代入方程 (o) 并用式 (m), 得到板内的应力 σ_x 与 σ_y 的表达式. 在板的边界上这些应力为

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{x=a} &= 1.41(n-1)E \frac{h^2}{a^2} \times \\ &\times \left[\left(1.234 \cos \frac{\pi y}{2a} - 0.382 \right) \cos \frac{\pi y}{2a} - 0.374 \right], \\ (\sigma_y)_{y=a} &= E \frac{h^2}{a^2} \times \\ &\times \left[1.74(n-1) \left(\cos \frac{\pi x}{2a} - 0.366 \right) \cos \frac{\pi x}{2a} - 1.062n + 0.158 \right]. \end{aligned} \quad (r)$$

图 9.52 中示出了 $n = 59.7$ 这特殊情形的应力分布.

在单位压缩 ne_{cr} 下板负担的总荷重为

$$P = -h \int_{-a}^a \sigma_y dx = 2ah \left(0.661 + \frac{0.339}{n} \right) ne_{cr},$$

而横向可自由伸长的板的有效宽度为

1) 这公式与实验很符合, 参阅 W. L. Howland 及 P. E. Sandorff, *J. Aero-naut. Sci.*, vol. 8, p. 261, 1941.

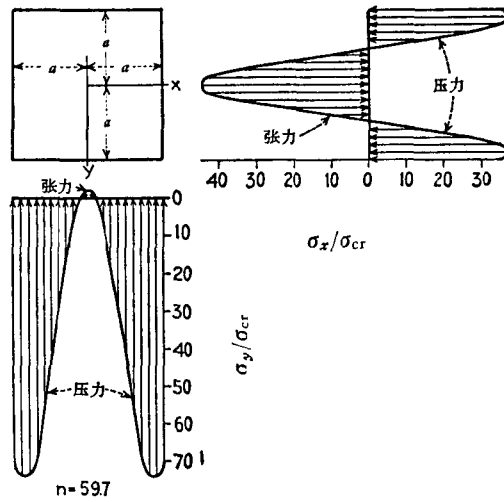


图 9.52

$$c = 2a \left(0.661 + \frac{0.339}{n} \right). \quad (9.32)$$

设直至板完全破坏应力的表达式 (r) 足够准确, 并设完全破坏发生于最大剪应力达到 $\tau_{Y.P.}$, 于是可由条件

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y)_{max} = \frac{1}{2} \sigma_{Y.P.} \quad (s)$$

决定板所能负担的极限荷重。剪应力的最大值发生于 $x = \pm b, y = 0$ (图 9.50) 并等于

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y)_{max} = E \frac{h^2}{2a^2} (1.38n - 0.473).$$

有了这 τ_{max} 值, 从方程 (s) 得到

$$n = \frac{0.725}{E} \frac{a^2}{h^2} \sigma_{Y.P.} + 0.34.$$

将这 n 值代入 (r) 的第二式, 得到板所能负担的极限荷重

$$\begin{aligned} P_{ult.} &= 2h \int_0^a \sigma_y dx = 0.867ah\sigma_{Y.P.} + 1.02E \frac{h^3}{a} = \\ &= 2ah \left[0.43\sigma_{Y.P.} + 2.04E \frac{h^2}{(2a)^2} \right] = \\ &= 2ah\sigma_{Y.P.} \left(0.434 + 0.566 \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{Y.P.}} \right). \end{aligned} \quad (9.33)$$

如果 n 不太大,例如 $n < 5$, 以上所计算的折合宽度值是良好的¹⁾。但对于如用于飞机结构的很薄的板,由实验所得的折合宽度小于自理论所得的。差别的原因在于假设(a)与(b);它们并不足够准确地表示板的变形,并且对板的刚度给出了偏大的值。但亦必须提及,在薄板试验中各种缺陷可能相当大地减小折合宽度及极限强度值。

根据板的大挠度理论的进一步研究表明²⁾,如果设板边界(图 9.50)剪应变为零,问题的解可得到简化。于是仍取表达式(a)作为挠度 w 并代入方程(8.38),则可得到应力函数及满足边界条件的应力 σ_x 与 σ_y 。对于纵向边固定的板,相应的折合宽度值为

$$c = \frac{9}{16} 2a \left(1 + \frac{8}{9} \frac{1}{n} \right);$$

对于纵向边自由的板,折合宽度为

$$c = \frac{1}{2} 2a \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

这些值比以上所计算得的略小些。

在 w 的表达式中用三项三角函数,业已证明,板的有效宽度可用以下这近似公式(在 $\sigma_{cr} < \sigma < 60 \sigma_{cr}$ 这范围内)来表示:

$$c = 1.54h \sqrt{\frac{E}{\sigma}} + 0.19(2a),$$

这式看来与实验结果颇符合³⁾。

薄矩形板在纯剪切作用下屈曲后的性能问题,在飞机设计中很为重要,并为许多工程师所研究过⁴⁾。在这种研究中,所选择的 w 的表达式具有多个参数,以表示简支边板的屈曲形状。将这表达式代入方程(8.38),可得应力函数使近似地满足位移 u 与 v 的边界条件。有了 u 与 v 的表达式,可得板的

- 1) 参阅 R. Lahde 与 H. Wagner 的论文, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 13, p. 214, 1936. (关于英译文,参阅 *NACA Tech. Mem.*, 814, 1936.)
- 2) 参阅 K. Marguerre, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 14, p. 121, 1937. (关于英译文,参阅 *NACA Tech. Mem.*, 833, 1937.)
- 3) 参阅 Lahde 及 Wagner, *op. cit.*
- 4) A. Kromm 与 K. Marguerre, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 14, p. 627, 1937; W. T. Koiter, *Natl. Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam, Rept.*, S. 295, 1944; S. Levy, K. L. Fienup 及 R. M. Woolley, *NACA Tech. Note* 962, 1945, 以及 S. Levy, R. M. Woolley 及 J. N. Corrick, *ibid.*, No. 1009, 1946; S. G. A. Bergman, Behavior of Buckled Rectangular Plates under the Action of Shearing Forces, *Kungl. Tekniska Hogskola, Stockholm, 1948.*

应变能的表达式。这表达式将由 w 的表达式中的参数表出。由应变能为最小这条件可得这些参数。对于每一特定情形,这一分析方法要求大量的计算工作;因此,只当对于一系列所选择的情形已将计算结果用表或图¹⁾表出,这理论的实际应用才可能。所有这些计算中均设完全弹性。在计算屈曲板的极限强度时,需求助于以后将讨论的经验公式(参阅 452 页)。

均匀受压圆板屈曲后的性能问题亦曾被研究过²⁾。对于对称形式的屈曲,曾证明:随着压应力与其临界值的比值 n 的增大,周向的压应力愈来愈集中于板的外围环内,而在板的内圈产生拉应力。

§ 9.14. 屈曲板的极限强度

在设计金属结构时,通常这样决定薄板的大小,使能消除在工作状态下的所有屈曲的可能性。但正如从前一节的讨论可以看出,板在屈曲以后可能负担比屈曲开始时的临界荷重大几倍的荷重而不破坏。因此,如在飞机结构中,当减轻重量这问题为首要时,理应不仅考虑临界荷重而且还要考虑板所可能负担而不使板完全损坏的极限荷重。

对于简支边受压矩形板,作为极限荷重的粗略的近似计算,我们可假设:通过一刚体块(图 9.50)传至板的荷重最后为位于板的两边而宽各为 c 的两小条所负担,并且沿小条的宽度荷重系均匀分布(图 9.53)。于是,板的中间部分可以忽视,而这两小条可作为宽为 $2c$ 的简支矩形长板³⁾。对于这样的板,其临界应力为(参

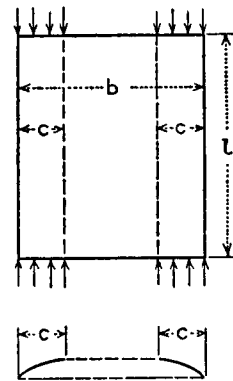


图 9.53

1) National Aeronautical Research Institute in Amsterdam 进行了以 Koiter 的理论工作为基础的大量这类工作;参阅 W. K. G. Floor 与 T. J. Burgerhout, *Rept. S. 370*, Amsterdam, 1951; 并参阅 W. K. G. Floor, *Rept. S. 427*, Amsterdam, 1953.

2) 参阅 K. O. Friedrichs 及 J. J. Stoker, *J. Appl. Mech.*, vol. 9, p. 7, 1942.

3) 这样的假设为 T. Von. Kármán 所建议;参阅 T. Von Kármán, E. E. Sechler 及 L. H. Donnell 的论文, *Trans. ASME*, vol. 54, p. 53, 1932.

閱 376 頁)

$$\sigma_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{h(2c)^2} = \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)c^2}, \quad (a)$$

設當 σ_{cr} 等于材料的屈服点应力 $\sigma_{Y.P.}$ 时达到极限荷重, 由 (a) 得到,

$$c = \frac{\pi h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{Y.P.}}}, \quad (b)$$

于是极限荷重为

$$P_{ult} = 2ch\sigma_{Y.P.} = \frac{\pi h^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{E\sigma_{Y.P.}}. \quad (9.34)$$

可以看出, 极限荷重与板的宽度无关, 而与板的厚度的平方成正比. 这结果与前一节中由假设板的边在屈曲时被保持为直线所得的结果不同. 如果没有这样的约束, 实验 (参阅 § 9.15) 与公式 (9.34) 甚为符合. 在这公式中用一随板的大小而变化的因子 c 以代替常数 $\pi/\sqrt{3(1-\nu^2)} = 1.90$ (对 $\nu = 0.3$), 则与实验更为符合. 因子 c 由图 9.61 中的曲线给出.

为了使公式 (9.33) 及 (9.34) 与试验相比较, 在表 9.24 中列出了由三种硬铝板的试验结果¹⁾.

表 9.24 三块受压硬铝板的极限荷重的比较

厚度 h (厘米)	宽度 b (厘米)	b/h	长度 a (厘米)	E (公斤/厘米 ²)	$\sigma_{Y.P.}$ (公斤/厘米 ²)	极限荷重 (公斤)		
						公式 (9.33)	公式 (9.34)	试验
0.227	10.16	44.8	61.0	7.49×10^5	2899	4630	4535	3314
0.090	8.93	98.75	22.9	7.07×10^5	3180	1226	735	533
0.082	25.42	311	53.3	7.07×10^5	3180	2900	595	576

可以看出, 公式 (9.34) 给出的结果与实验很为符合. 公式 (9.33) 给出偏大的 P_{ult} 值, 尤其是对于小的比值 h/b . 但应该注意, 公式 (9.33) 是由屈曲时

1) 第一块板的数据系取自 Bureau of Standards 的试验 (参阅 § 9.15), 而其余二块板取自 E. E. Sechler 的论文, *Guggenheim Aeronautics Laboratory, publication 27, California Institute of Technology, Pasadena, 1933.*

板边保持为直线这假设而演算得的，但在试验中并不存在这样的约束。在实际结构中沿板边有刚性肋条，情况可能与在前一节推演时所假定的条件较为相近，并且公式(9.33)可能更适用些。

若以正方形截面的薄管作压缩试验，则当管的诸侧面屈曲时，诸稜边保持为直线；故实际情况接近于在推导(9.33)时所假设的情况。在表 9.25 中

表 9.25 受压黄铜的正方形管的极限荷重的比较

厚度 h (厘米)	宽度 b (厘米)	比值 b/h	E (公斤/厘米 ²)	$\sigma_{y.p.}$ (公斤/厘米 ²)	管的极限荷重 (公斤)		
					公式(9.33)	公式(9.34)	试验
0.0165	2.54	154	1.16×10^8	2220	177.5	105	131.6
0.0142	2.54	178.5	1.13×10^8	2022	136	73	95.3
0.0165	5.08	308	1.16×10^8	2220	329.6	105	154.3

列出了由公式(9.33)及(9.34)所计算得的极限荷重与直接由黄铜管的试验所得的极限荷重¹⁾的比较。可以看出，对于这情形，公式(9.33)与试验要比对于V形槽中的板受压相符些。亦可以看出，当比值 h/b 减小时，符合程度就变得较差。当比值 h/b 很小时，公式(9.33)总给出偏大的极限荷重值。

在讨论薄板承受剪应力作用的极限强度时，让我们研究由三根绝对刚性的杆铰接而成的系统(图 9.54a)²⁾。杆所包围的范围 $abcd$ 内有一极薄的

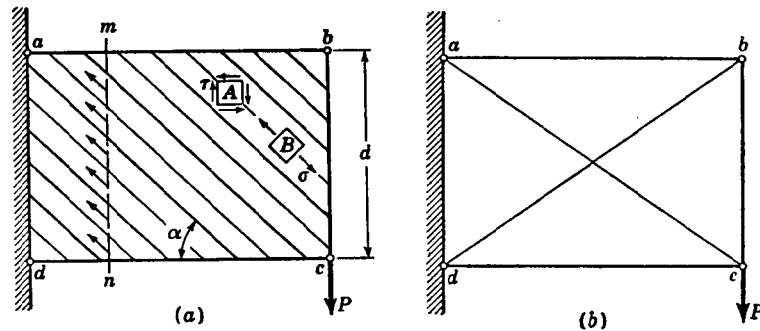


图 9.54

1) 这些实验数据系 L. H. Donnell 函告本作者，并且是在 Guggenheim Aeronautics Laboratory 得出的，California Institute of Technology, Pasadena, 1933.

2) 这近似理论系 H. Wagner 所创，Z. Flugtech. Motorluftsch., vol. 20, p. 200, 1929.

不能抵抗弯曲或压缩的板。在荷重 P 的作用下,情况将与有易弯曲斜杆的系统的情况类似(图 9.54b)。在荷重 P 的作用之下,受压的斜杆 bd 将侧向屈曲,而只有受拉斜杆 ac 发生作用。因这薄板不能负担剪应力,它将侧向屈曲。于是形成图 9.55 所示的折皱。在折皱处为简单拉伸,其方向如图 9.54a 的点 B 所示,而不是如点 A 的纯剪切 τ 。视 $mncb$ 部分为自由体,并以 σ 表示在折皱处的拉应力,得到方程

$$\sigma h d \cos \alpha \sin \alpha = P,$$

由此

$$\sigma = \frac{2P}{hd \sin 2\alpha}, \quad (c)$$

式中 d 为结构的高度, h 为板的厚度。

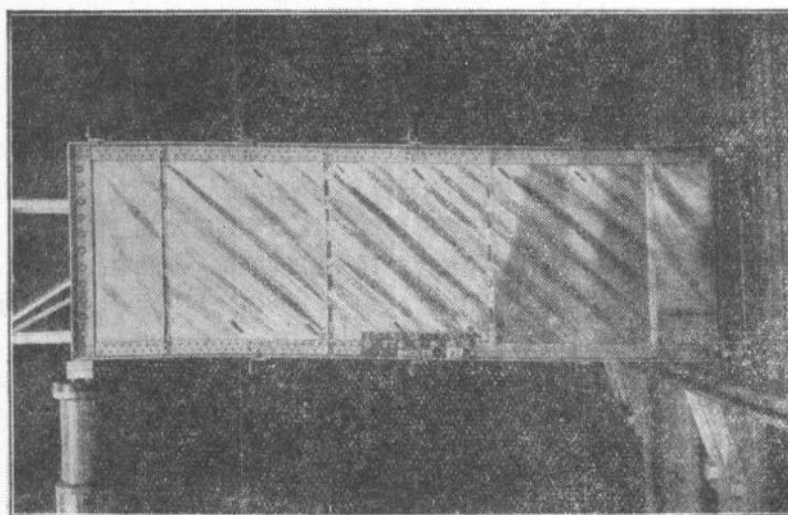


图 9.55 受对角拉伸的梁。NACA, Langley Field, Va. (取自 P. Kuhn, Stresses in Aircraft and Shell Structures, Fig. 3.1, p. 48, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.)
(图中标尺每小格代表 2.54 厘米)

现研究有薄腹板的板梁(图 9.56)。自折皱的腹板传递给下翼缘的张力如图 9.56b 所示。可以看出,分布倾斜力的强度为

$$q = \sigma h \sin \alpha. \quad (d)$$

将它分解为水平与铅直分量,得到

$$q_x = \sigma h \sin \alpha \cos \alpha = \frac{P}{d}, \quad q_y = \sigma h \sin^2 \alpha = \frac{P}{d} \tan \alpha. \quad (c)$$

力 q_x 表示翼缘内的每单位长度的轴向压力的增加, 而 q_y 表示作用于翼缘的横向荷重的强度。正如由图 9.56b 可以看出的, 铅直杆内的压力 S_v 为

$$S_v = b q_y = P \frac{b}{d} \tan \alpha. \quad (f)$$

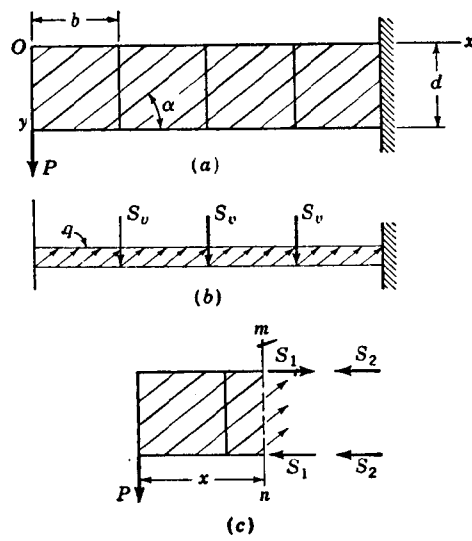


图 9.56

翼缘 (图 9.56c) 内的力 F 系由两部分组成: (1) 平衡作用于板梁横截面 mn 内的弯矩 $M = Px$ 的力 $S_1 = \pm M/d$; (2) 平衡斜张力的力 $S_2 = -(1/2)\sigma h d \cos^2 \alpha = -(P/2) \cot \alpha$. 于是得到

$$F = \pm \frac{M}{d} - \frac{P}{2} \cot \alpha. \quad (g)$$

折皱的角度 α (图 9.56a) 可由最小应变能条件得到。先设翼缘与铅直杆均为绝对刚体, 于是只须考虑腹板的应变能。由于腹板系处于简单斜拉伸状态下 [参阅方程(c)], 故要使能量为最小须取 $\sin 2\alpha = 1$, 即 $\alpha = 45^\circ$ 。在实际情况下, 翼缘与铅直杆亦将变形。将它们的应变能计算在内, 将得到稍小一些的 α 值。对于飞机结构中所用的板梁的尺寸, 角度 α 通常不小于 38° 。

当腹板未屈曲时板梁(图 9.56)的剪切变形,可得自剪应变

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{P}{dhG}. \quad (h)$$

当腹板很薄而仅受简单拉伸作用时,在两加肋条之间的这部分板梁的剪切挠度 γb (图 9.57),可由能量的考虑得到,于是得方程

$$\frac{P\gamma b}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} bhd,$$

由此得到

$$\gamma = \frac{4\tau}{E} = \frac{4P}{hdE}. \quad (i)$$

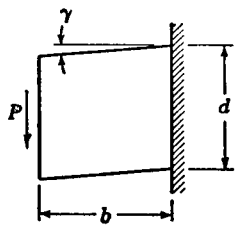


图 9.57

方程 (h) 与 (i) 给出了板梁剪切变形的两极端情形,即腹板仅受纯剪切及仅受简单拉伸。在实际情形中,必须计入翼缘与铅直杆的变形,并将得到

$$\gamma = \frac{\tau}{G_r},$$

式中的 G_r 与结构的尺寸有关,并在如上计算的两极端值 G 与 $E/4$ 之间。

以上对于斜向拉应力 σ 及在铅直杆与翼缘内的力的计算,是以下列假设为基础的:腹板为绝对易弯的,而铅直杆与翼缘为绝对刚性的。实验证明,只当腹板极薄且荷重已接近极限荷重值时才接近这样的情况¹⁾。要得到较好的近似分析,必须更详细地考虑结构各部分的变形。考虑及力 q_y 对翼缘的作用(图 9.58a),可以看出,翼缘将产生如连续梁似的弯曲。由于这弯曲,腹板内的斜向张力不再均匀地分布。固结在节间中点附近的斜向小条的应力将略减小,而固结于铅直杆附近的斜杆(图 9.58b)必须负担比方程(c)给出的为高的应力。力 S_o 亦将略不同于方程(f)给出的值。曾发展了计入所有这些因素应力分布的半经验公式。如果板并不很薄,则腹板将部分受剪切部分受斜向拉伸;在飞机设计中,已将这一事实加以考虑;并且以广泛的实验为基础,建立了经验公式以恰当地划分剪力。所谓“平面腹板系统的工程应力理论”,已发展得颇有成效²⁾,并且能够足够准确地预测板梁的应力及极限强度。这样所计算得的屈曲板内的应力及挠度,与薄板的大挠度理论很相符合³⁾。

1) 参阅 R. Lahde 及 H. Wagner, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 13, p. 262, 1936.

2) 参阅 Paul Kuhn, *Stresses in Aircraft and Shell Structures*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956. 此书并列出了这课题的参考文献。

3) 参阅 S. Levy 等人的论文, *loc. cit.*

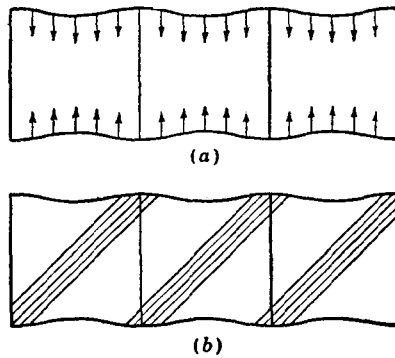


图 9.58

§ 9.15. 板的屈曲实验

矩形板受压 首先被作的是简支边板的实验，因为对这情形的理论解很简单。但在实验上，简支边是一种很复杂的情况，因为在实验中很难体现简支边的条件。为了尽可能地使边能完全自由地转动，可用有V形凹槽的框架¹⁾(图9.59)。但板边不修成弧形将不能完全自由地在这样的槽内转动，并且在屈曲时任何的转动将引起中面在垂直于板面方向的位移(图9.60)。为了使荷重系作用于板的中面内，板的承担荷重的边有时候做成半圆形²⁾。

由于板的初弯曲及荷重作用的偏心，通常在很小的荷重下即发生横向屈曲。要从所观察得的挠度来决定荷重的临界值，应用苏司韦尔在柱的试验(参阅第205页)中所建议的方法是有利的。在讨论有初弯曲的受压板的弯曲时(参阅§8.6)，我们曾指明：当荷重 P 趋近于它的临界值时，在表示挠度的双重三角级数中相应的项变为首要。这项这样地随荷重的增加而增大，即绘出所观察得的挠度 δ 与比值 δ/P 的关系，将得到一直线。这直线的斜率即为临界荷重的真值。用这样的方法所得的值通常与理论值很好地

1) 图9.59示 Bureau of Standards 所用的试验装置：参阅 L. Schuman 及 G. Back, *NACA Tech. Rept.* 356, 1930.

2) 参阅 Sechler 的论文, *loc. cit.*

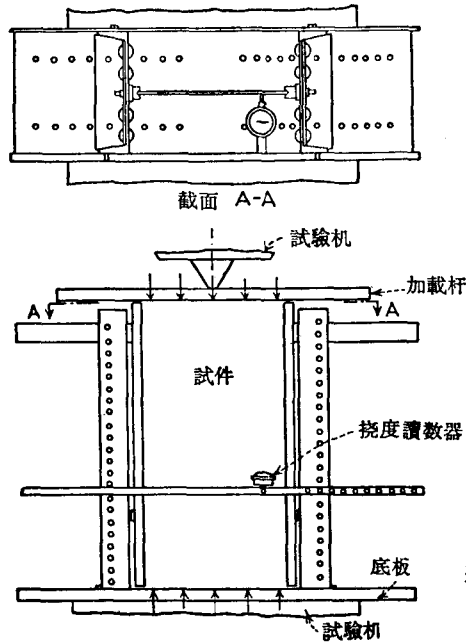


图 9.59

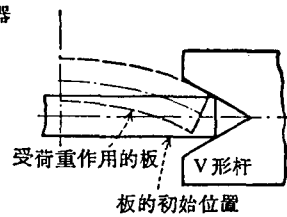


图 9.60

相符。受压板在屈曲时所形成的波通常亦与理论很好地相符¹⁾。

大部分的板屈曲试验是以用于飞机结构的薄板来做的，主要目的在于确定受压板所能负担的极限荷重。这些试验表明：一很宽的薄金属板能负担的荷重远大于理论上所预料的临界荷重。这荷重的极限值可以足够准确地按下列公式 [参阅公式 (9.34)] 计算：

$$P_{ult} = Ch^2 \sqrt{E\sigma_{Y.P.}}, \quad (9.35)$$

式中 h 为板的厚度， E 为材料的弹性模量， $\sigma_{Y.P.}$ 为材料的屈服点应力， C 为与材料性质及板的大小有关的因子。由实验所得的这因子的值²⁾ 示于图 9.61 内，图中还给出了一条可用于实际计算受压金属薄板的极限强度的 C 的曲线。

1) 参阅 L. Schuman 及 G. Back, *op. cit.*

2) 这些值系取自 E. E. Sechler 的实验, *loc. cit.*

角鋼受压¹⁾ 受压的角形截面杆可能在两种完全不同的方式下损坏：(1) 象柱一样地损坏 (参阅 § 5.5)；(2) 由于翼缘的屈曲而损坏。以对称的角形截面压杆所作的实验表明：当翼缘的宽度远比长度为小时，压杆将象柱一样地屈曲；而对于宽翼缘板将先发生屈曲 (参阅图 9.7)。为了得到压杆及其翼缘的屈曲的明确的条件，我们用如图 9.62 所示的端支座。在两端的垫块中各放进一 16 毫米的钢球，使压杆铰接于两球的中心。为了避免初始偏心，可用一供调节用的特殊装置；用了这装置，这球可沿平行于压杆截面的最大惯性矩的轴而移动，由此可除去初始偏心的影响而得到压杆的非常明确的屈曲。为了得到翼缘的明确的边界条件，在杆端部角形截面的每一边沿其两端处的宽度作成 60° 的凸角，而每一垫块有两个 120° 的 V 形凹槽；压杆的两端被支持于这凹槽中，因而保证了翼缘的铰支边界条件。

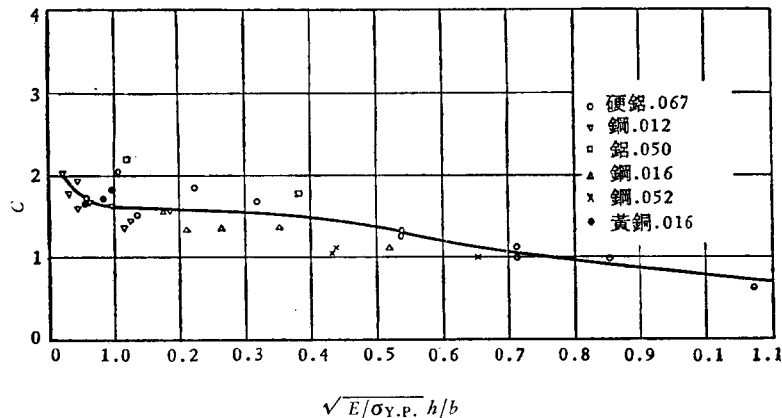


图 9.61 对于受压未加劲平板的方程(9.35)中C的实验值

以 24 SRT 铝合金压杆所得的实验结果示于图 9.63。试验用的试件长 55.8 厘米、厚 0.0635 厘米；翼缘的宽度自 1.03 至 5.15 厘米

1) 参阅 F. J. Bridget, C. C. Jerome 及 A. B. Vosseller, *Trans. ASME, Applied Mechanics Division*, vol. 56, p. 569, 1943。受压角钢超过屈服点的屈曲在 C. F. Kollbrunner 的学位论文中有论述, Zürich, 1935。

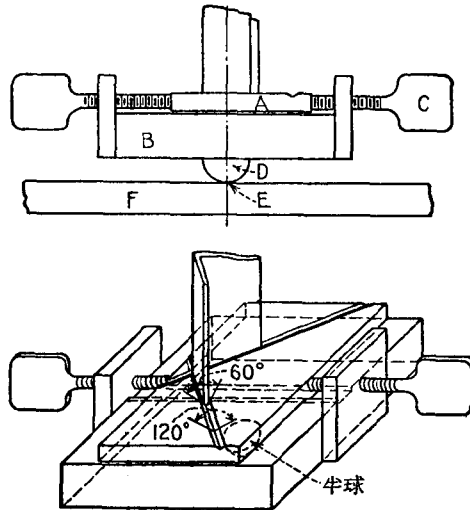


图 9.62

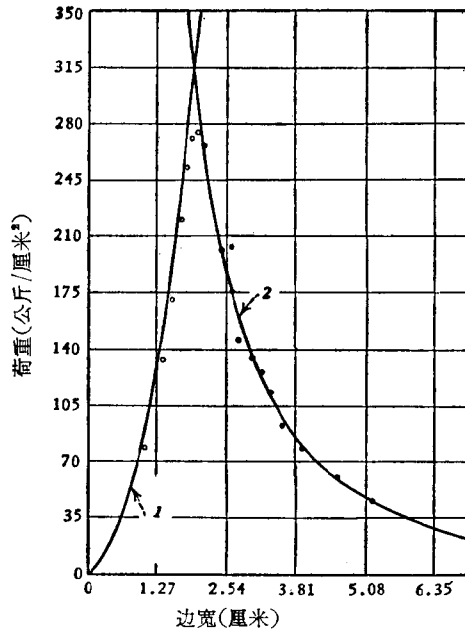
米間变化。可以看出,对于翼缘宽度小的压杆,实验结果与欧拉曲线甚为相符。对于宽度较大从而板的屈曲发生于柱的屈曲之先的情形,图中所示的临界荷重值系用苏司韦尔方法所算得,且仍与理论非常符合。

在剪力作用下板的屈曲 大部分这类试验是用很长的狭条来做的,且其两纵边为固定¹⁾。对于这情形,我们有一准确解(参阅 § 9.7),并且实验表明:对于波的形成,试验很好地与理论相符合。如果应用苏司韦尔的方法,亦足够准确地得到临界荷重的大小。

在图 9.64 中示出了正方形硬铝板(0.2 × 150 × 150 毫米)在纯剪切作用下屈曲后挠度试验的结果²⁾。板边可自由转动,但不能在板平面内移动,因而在板平面内的应力可充分地发展。由于有

1) 参阅 F. Bollenrath, *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 6, p. 1, 1929. 并参阅 H. J. Gough 及 H. L. Cox, *Proc. Roy. Soc., London*, series A, vol. 137, p. 145, 1932.

2) 参阅 E. Seydel, *Z. Flugtech. u. Motorluftsch.*, vol. 24, p. 78, 1933.



○ 柱的欧拉柱型屈曲试验； ● 主要为平板型的屈曲试验。
1——欧拉柱型屈曲的理论曲线； 2——三边铰支板边屈曲的理论曲线。

图 9.63

初曲率,在荷重小于临界值时就开始产生挠度,如图所示。为了比较,亦繪出了以初挠度为 $\delta_0 = 0.5h$ 而計算的板的理論曲綫¹⁾。这一曲綫与实验曲綫很相近。

随着在前节所提及的平面腹板系統的工程理論的进展,对薄板在純剪切作用下屈曲后的抗力作了一系列极为广泛的实验²⁾。

亦曾做过矩形波紋板受剪切的实验³⁾。剪力是用一铰接的矩形框架加上去的,沿框架的一对角綫作用着外加的拉力(图 9.65)。波的形成及临界荷重的大小与假設波紋板为各向异性板所得的理

1) 这曲线系 S. G. A. Bergman 所計算, *loc. cit.*
2) 关于这些试验及参考文献的叙述参阅 Kuhn, *loc. cit.*
3) 参阅 "Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V.", 1931.

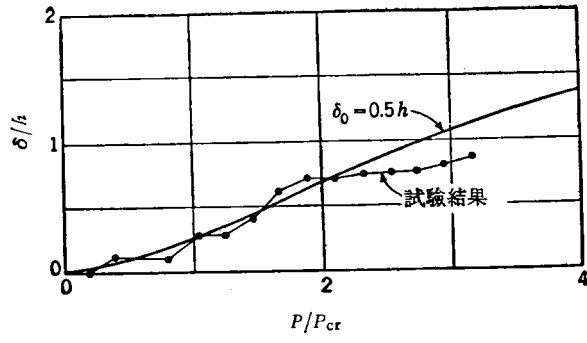


图 9.64

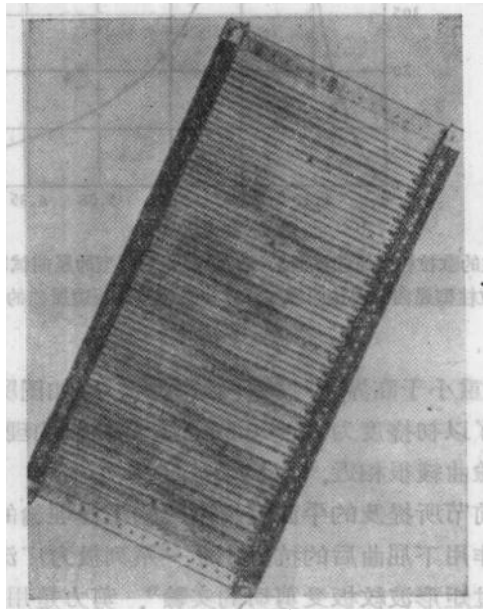


图 9.65

論很是符合¹⁾。应注意,对于这情形,节线对平行于波纹的边的方向只形成一很小的角度,而对于未加劲的板近似地形成 45° 角。

1) 参阅 S. Bergman 与 H. Reissner 的论文, *loc. cit.*

§ 9.16. 板屈曲理論的实际应用

应用于受压构件的设计 在討論柱的屈曲時曾指明：对于实际大小的压杆，当在最薄弱的横截面內轴向应力和弯曲应力的最大組合应力等于材料的屈服点应力时，即开始破坏。仅仅对于很細长的压杆，才在弹性极限以內发生相当于完全破坏的充分的屈曲。在设计由較薄的金属板組合成的压杆时，这事实務必記住。例如，取一截面如图 9.66 所示的压杆。沿边有角鋼的两寬为 b 厚为 h 的鉛直腹板，以斜杆相連接且在水平面內由斜条及橫条相連，如虛綫所示。为安全起見，我們略去角鋼对于扭轉的抵抗，并将腹板視作均匀受压的簡支矩形板。因这些板的长要比寬大得多，在弹性极限以內的临界应力对 $\nu = 0.3$ 可由下列公式决定（參閱 376 頁）：

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{2.73} \frac{h^2}{b^2}$$

对于很細长的压杆，譬如 $l/r > 150$ ，可以合理地取 b/h 的比值以使板的临界应力等于整个压杆的临界应力。于是运用压杆的欧拉公式，决定所需的 b/h 的比值的方程为

$$\frac{\pi^2 E}{2.73} \frac{h^2}{b^2} = \frac{\pi^2 E r^2}{l^2}, \quad (a)$$

式中 l/r 为压杆的細长比。从这方程得到

$$\frac{b}{h} \approx 0.60 \frac{l}{r}. \quad (b)$$

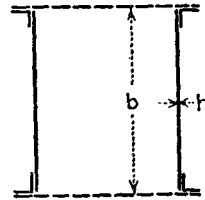


图 9.66

因此，要使腹板屈曲的安全系数等于一細长压杆屈曲的安全系数，腹板的尺寸比例必須适合条件(b)。

如果压杆具有在結構工程中常有的尺寸比例，則破坏的发生系由于在最危险的横截面內材料的局部屈服。由于各种各样的不精密，当压杆內的平均压应力远小于屈服点应力时即可能发生局部屈服。在这样的情况下，很明显，只当板的尺寸比例使它們在应力小于材料的屈服点时并不屈服，才可期望組合的压杆犹如一个整体一样。若結構鋼的屈服点应力为 2400 公斤/厘米²，要消除在应力低于屈服点时发生屈曲的可能性，結構鋼的受压簡支边长板

的尺寸比例須是 $b/h \leq 36$ 。因受压长板屈曲成許多个波，沿半个波的局部受压实际上与整块板的均匀受压的效果相同。因此，对于如图 9.66 所示的压杆，上述比值 $b/h \leq 36$ 仍是适用的。还应注意，由于腹板屈曲的局部性，沿压杆的长度在某些間隔內通常所安置的横向夹膜不会增大腹板的稳定性。

如果一压杆的鉛直腹板刚性固結于厚的水平板(图 9.67)，于是就有理由认为沿纵边是固定的。在这种情况下，可取 $b/h = 48$ 作为极限比值。

截面如图 9.68 所示的压杆的鉛直腹板的边界条件系介于簡支边与固定边的条件之間。設约束程度近似地与比值

$$\frac{h^3 b_1}{h_1^3 b}$$

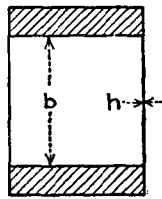


图 9.67

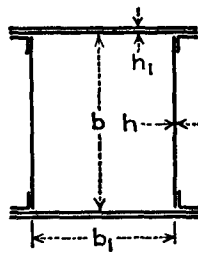


图 9.68

有关；由在 36 与 48 之間內插，对于部分约束这情形得到

$$\frac{b}{h} = 48 \left(1 - \frac{h^3 b_1}{4 h_1^3 b} \right), \quad (c)$$

由上式，对于 $h_1^3 b > h^3 b_1$ 的任何尺寸比例的板可計算所須的比值 b/h 。当 $h_1^3 b = h^3 b_1$ ，水平板的临界压应力与鉛直腹板的相同；因此后者属于簡支边板的条件。在这情况下，方程(c)給出值 36。

对于图 9.69 所示的情形，每一翼緣可作为沿一边簡支而沿另一边完全自由的板。对于这种情形，要避免在应力小于屈服点时屈曲的可能性，对于结构鋼 ($\sigma_{y.p.} = 2400$ 公斤/厘米²) 我們取极限比值 $b/h = 12$ 。对于图 9.70 所示的情形，設鉛直腹板的兩頂边为固定，极限比值 $b/h = 21$ 。

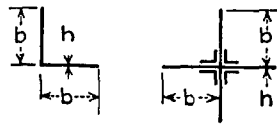


图 9.69

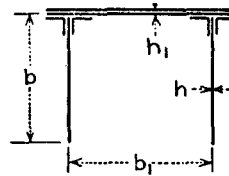


图 9.70

应用于板梁的设计¹⁾ 板梁的尺寸比例的決定,目前在很大的程度上是以經驗法則为基础的。由于它們是长期經驗积累的結果,这些結果通常給出适当的尺寸,并且同时又有充分的伸縮性,因此允许有各別判断的余地。由于这緣故,对于同一跨度和同一荷重所設計出来的板梁将有着各种各样的尺寸。

在設計尺寸特大的板梁时,适当地选择腹板的厚度及加劲肋条的間距成了重要的問題。这只能以合理的理論或模型試驗为基础才能很好地解决。

决定恰当的腹板厚度及腹板的加劲問題主要是稳定性問題。众所周知:如果腹板不够厚或加劲不当,复板可能发生側向屈曲而起系杆的作用,而加劲肋条起压杆一样的作用。考虑及这样的屈曲的可能性,有好几个工程师曾建議²⁾:与板梁的縱軸成 45° 的腹板的一狭条可看作一柱,在其横截面上所負担的压应力等于在中性軸的剪应力。柱的长取为 $h\sqrt{2}$,其中 h 为腹板的未被支承的高度,而柱的两端作为固定端。正如以后我們將看到的,这假設大大的低估了未加劲的腹板的稳定性。

要得到关于腹板的稳定性的較可靠的結論,必須研究板梁的实驗以及薄板在板平面内的正应力与剪应力作用下的屈曲理論。

传递剪应力及弯曲应力的薄腹板的屈曲試驗,最早为番朋(Fairbairn)所作³⁾;这实驗系结合著名的勃立德尼(Britannia)与康威(Conway)管洞桥的結

1) 参阅 Timoshenko, *Engineering*, vol. 138, p. 207, 1934.

2) 例如参阅 F. E. Turneaure 的论文, *J. Western Soc. Eng.*, vol. 12, p. 788, 1907.

3) 参阅 William Fairbairn, *An Account of the Construction of the Britannia and Conway Tubular Bridges*, London, 1849.

构而做的。对于从事于薄壁结构的工程师们，这些古典的实验至今仍保有很大的意义。勃立德尼桥为矩形截面的管洞式桥。较大的管的跨度为137米，横截面尺寸为 8.23×4.87 米。由于当时这是个异常大的结构，所以决定用模型作试验以决定管的安全尺寸及材料的最有利的分布。经过了大量的初步试验，决定用长度为桥的 $1/6$ 的尺寸的大模型作试验。这种模型管的壁由1.42米高而只有0.254厘米厚的薄板组成。最初的实验表明：在较小的荷重作用下，在侧面上即出现约与底线成 45° 角的波纹(undulation)。

“从这些实验可以明显地看出，在整个底部的受拉及整个顶部的受压有着作用与反作用的关系，而在侧面上的斜向应变则起着传递媒介的作用。”

“起皱的斜波明显地表明了应变最严重的线。显然，由于顶部与底部有互相趋近的倾向而使侧面形状改变，侧面系处于过大的应变；只要板能保持形状，板的强度是足够的。因此，决定在这实验中修改侧面的结构。这修改是由在侧面全长内铆接上角铁支柱而完成的，其高即为侧面的高。这起了加劲侧面的作用而同时又固定底部与顶部的位置。这些支柱为用于大管洞的T形铁支柱的原型。”

进一步的实验表明了位于侧面的支柱的重要性；因为，管的重量虽有少许增加，顶与底仍与以前完全一样，而极限强度有了很大的增加。从这些实验可知：“当腹板的高度增加时，为保持侧面的形状不改变的预防措施变得很庞大。”勃立德尼管洞桥一个管洞所用的T形铁、结点板及加劲板共重215吨，已超过侧面总重的 $1/3$ 。

试验用的管在中央承受一集中荷重，因而剪力沿跨度为常量。在设计实际的桥时，应考虑到最大剪力系向跨度的中央递减，所以跨度中间部分的腹板用1.27厘米厚，而在两端用1.59厘米厚¹⁾。

当时还作了一些板梁实验²⁾。板梁模型的腹板的厚度处处为6.35毫米；在跨度中点全部的高度为3.048米，在两端为1.83米，两支承间的距离为20.1米。这板梁是由于腹板的屈曲而损坏的。后来将这板梁加以修理，并在腹板的铅直板的每一接头处用角铁支柱加劲这腹板。这样，板梁的强度就大大地增加；最后在较大的荷重下由于顶与底的同时损坏而破坏。

1) 关于这些桥的进一步的叙述，参阅 Timoshenko, History of Strength of Materials, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.

2) 参阅 Edwin Clark, The Britannia and Conway Tubular Bridges, 2 vols., London, 1850.

板梁的进一步的实验曾为比利时工程师虎卜脱¹⁾(Houbotte)所做。他以跨度为 1.5 米,腹板的厚为 0.5 厘米,高各为 30 厘米及 49 厘米的两个板梁作试验。在跨度中央加荷重后,这两个板梁均由于未加劲腹板的屈曲而损坏。高度较大的这板梁在较小的荷重作用下就损坏,虽然它的截面模量为高度较小的板梁的两倍。

列莱²⁾(Lilly)曾做了些有关板梁的进一步的工作。他做了一尺寸如下的板梁:高 24.1 厘米,长为 1.6 米;翼缘由两块 50.8×9.5 毫米的板及两个 31.8×31.8×6.35 毫米的角钢所组成。板梁的框架分两部分作成并以螺栓栓于腹板。这样的结构可使在实验中所用的腹板有不同的厚度。曾以不同厚度的腹板及不同间距的加劲肋做了大量的试验。在跨度中点加上荷重,得到了腹板中发生波的情况。

“如果加劲肋的强度较腹板为很大时,发现形成的波的波长几与腹板的厚度无关。波的倾角与加劲肋的间距及板梁的高度有关。加劲肋阻碍波的形成,于是在加劲肋的两端产生了很大的局部应力,使这部分腹板发生皱纹。”

尺寸较大的板梁的试验,曾由多那尔³⁾(Turneure)所作。这些试验的主要结论为:(1)当应力在弹性极限以内时,有加劲肋条的腹板内的应力与理论应力极为符合;并且作为必然结果,不承受局部荷重时的铅直加劲肋内实际上无轴向应力。(2)无加劲肋条的腹板的弹性极限强度,约为将欧拉柱公式应用于对角狭条所得的极限强度的两倍(参阅 459 页)。

摩尔(Moore)及韦尔森(Wilson)对于辗压成的工字梁及组合板梁作了一

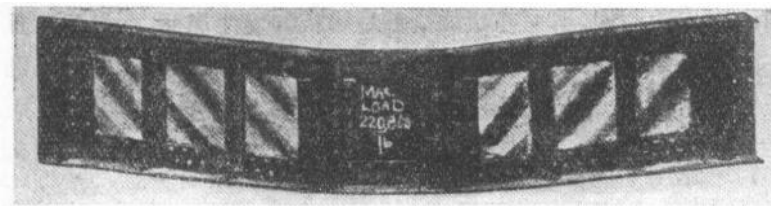


图 9.71 (最大荷重 10000 公斤)

- 1) 参阅 M. Houbotte, *Der Civilingenieur*, vol. 4, 1856.
- 2) W. E. Lilly, *Engineering*, vol. 83, p. 136, 1907. 并参阅他的书 “The Design of Plate Girders and Columns,” 1908.
- 3) Turneure, *loc. cit.*

系列的试验¹⁾。图 9.71 中示出了一试验板梁,腹板已屈曲。这两位实验者得到结论:“在中间部分无加劲肋条的薄腹板对于屈曲的抵抗能力被低估了;并且,如果腹板的未被支承的高度与厚度之比不超过 60,则建造没有中间部分加劲肋条的板梁可能是安全的。但当这比值变大时,必须降低腹板内的许用应力。”

斯德哥尔摩的理工学院作了一系列广泛的薄腹板板梁试验²⁾,其腹板为 $1000 \times 2000 \times 3.5$ 毫米。发现由于各种缺陷,在很小的荷重下腹板即开始屈曲,并且在大多数情况下,并未见到在临界荷重时腹板有不同的表现。根据这些试验得出结论:“平面腹板的理论临界荷重与极限荷重并无直接关系,并且极限荷重与理论临界荷重之比随腹板的细长比而增大”。并且还发现:“直到腹板相当大部分开始屈曲时腹板的承载能力才耗尽”。

在列日 (Liège) 大学,麦叔乃脱³⁾作了关于板梁的加劲肋所需的刚度的实验研究。

从所作过的实验可以看出,板梁可以以两种不同的方式将剪力传递给支座:(1)如果荷重尚不足以在腹板内形成波,则板梁的腹板传递这剪力;(2)当荷重较大而形成波时,一部分剪力与以前一样为腹板内的剪应力所传递,而另一部分犹如桁架中那样传递,腹板象一系列系杆而加劲肋如柱一样地起作用。波开始形成时的荷重的大小与腹板的厚度,加劲肋的间距及尺寸有关。当腹板有足够的厚度并适当加劲时,板梁可以负担所设计的总荷重而腹板无任何屈曲。在桥梁中尺寸通常就是这样的。另一方面,有着极薄的腹板的结构,当一开始加荷重时腹板即发生屈曲,而总的荷重实际上是如桁架那样地传递。在飞机结构中就有这样的板梁的例子⁴⁾。

1) 参阅 H. F. Moore, *Univ. Illinois Bull*, 68, 1913; H. F. Moore 与 W. M. Wilson, *Univ. Illinois. Bull.* 86, 1916.

2) 参阅 G. Wästlund 与 S. G. A. Bergman, *Buckling of Webs in Deep Steel I-Girders*, Institution of Structural Engineering and Bridge Building, Stockholm, 1947. 在这篇论文中给出了广泛的参考文献。

3) 参阅 C. Massonnet, *Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, vol. 14, p. 125, 1954.

4) 参阅 H. Wagner, *Z. Flugtech. Motorluftsch.*, vol. 20, p. 200, 1919. 并参阅 *Eng. News*, vol. 40, p. 154, 1899.

虽然腹板的屈曲并不意味着板梁的立即损坏，但通常是以避免在工作条件下发生屈曲而决定桥梁尺寸的。通常的做法是采用某一剪切应力，并以此为根据决定腹板的厚度，然后决定加劲肋的间距，以使腹板能传递剪应力而不发生屈曲。注意及铁路板梁的总荷重近似地随跨度而变化，并假设高度与跨度之比为一常量，于是可以看出，对于所有的跨度上述算法将得到几乎相同的厚度。设这厚度对于小的桥梁是适宜的，则对于较大的跨度一定是不够的，而必须增加厚度以避免腹板可能发生屈曲。这在某些规范中是被规定的。例如，美国铁路工程协会 (AREA) 的 1950 年的规范及美国钢结构学会 (AISC) 的 1949 年规范要求腹板的厚度应不小于 $d/170$ ，其中 d 表示两翼缘间的(净)距离。

对厚度的另一限制通常系由于考虑到腐蚀，并由于一宽而长的很薄的板是很难操作的。9.5 毫米的厚度通常被认为是 最小的厚度，以防止腐蚀及在构造与装运时保证材料的适于操作。

为了得到设计用的合理的根据，必须研究薄腹板的弹性稳定性。在讨论腹板的屈曲时，我们必须考虑三种情形：(1) 在支座附近剪力为最重要的因素，故在两加劲肋之间的这部分腹板可作为

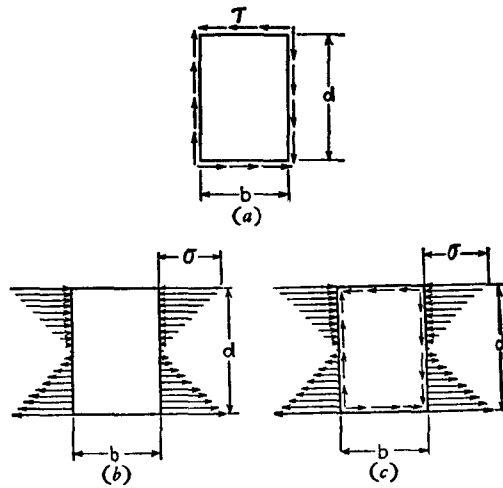


图 9.72

承受均匀剪切的矩形板(图 9.72a);(2)在跨度中部,与正应力相比剪应力可以略去,于是在两加劲肋之间的这部分腹板处于图 9.72b 所示的纯弯曲状态;(3)在支座与中点之间的诸截面内,有着如图 9.72c 所示的法向力与剪力的组合。这三种情形已在 § 9.6 及 § 9.7 中讨论过。

在应用前面所得的理论公式时,我们首先决定腹板在跨度中点的厚度。在跨度中点只须考虑弯曲应力,因承受弯曲的长矩形板在屈曲时分成较短的波(参阅表 9.6),所以通常可以略去铅直加劲肋所引起的约束,并可设

$$\sigma_{cr} = 23.9 \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \frac{h^2}{d^2} \quad (d)$$

由这公式,可计算对于任何 σ_{cr} 值时腹板的厚与高所需的比值¹⁾。为了避免腹板在工作条件下任何屈曲的可能性, σ_{cr} 的值必须大于腹板内的最大弯曲应力。在选择必需的安全系数时,在处理上不同于受压构件的板。对于柱,板的任何局部屈曲即为结构的完全损坏,故在以前的讨论中曾建议板的尺寸比例应使应力小于屈服点时不致发生屈曲。但对于板梁,腹板的屈曲并不表示结构即将有任何危险,而仅表明腹板不再负担全部的弯曲压应力。在这样的情况下,理应用较小的安全系数。

我们来研究结构碳钢,其屈服点等于 2400 公斤/厘米²。取 1125 公斤/厘米² 为对于这情形的基本拉应力,于是安全系数等于 2 $\frac{1}{8}$ 。这安全系数不仅可使作用的荷重有所增加,并且还考虑及由于铆钉及截面突然改变的应力集中以及由于应力的变化所引起的任何疲劳效应。在研究腹板的稳定性时,应略去局部的应力集中及疲劳效应。并考虑到在公式 (d) 中略去了在翼缘及加劲肋处的任何约束,所以取防止屈曲的安全系数小于 2 $\frac{1}{8}$ 似乎是理所当然的。我们建议取安全系数等于 1.5。于是,设除去了可占翼缘面积 15% 的铆钉孔以后得到的最大应力为 1125 公斤/厘米²,我们以 1125 ×

1) 在这讨论中,略去了翼缘角对腹板屈曲的抗力,而将腹板作为宽为 d 的简支矩形板,其中 d 为两翼缘内表面间的距离。

$0.85 \times 1.5 = 1430$ 公斤/厘米²代公式(d)中的 σ_{cr} 。用 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\nu = 0.3$, 这样就得到

$$\frac{d}{h} = \sqrt{23.9 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2) 1430 \times 0.85 \times 1.5}} \approx 180. \quad (e)$$

正如以前所提及, AREA 与 AISC 规范将这比值限于

$$\frac{d}{h} \leq 170. \quad (f)$$

考虑到腹板以肋加劲, 让我们首先决定比值 d/h 的极限值; 在这极限值时, 除了很重的集中荷重的作用点以外, 这样的加劲是不必要的。对于这情形, 在集中荷重之间并在支座附近的部分腹板, 可作为主要是承受剪应力作用的矩形板。略去翼缘处的约束并设板很长, 我们取方程(9.9)作为剪应力的临界值。于是

$$\tau_{cr} = 5.35 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{d^2}. \quad (g)$$

将屈服点应力代 τ_{cr} ¹⁾, 得到比 d/h 的极限值。仍用 $\sigma_{Y.P.} = 2400$ 公斤/厘米²的结构钢, 并设 $\tau_{Y.P.} = 0.58\sigma_{Y.P.}$, 得到

$$\frac{d}{h} = \sqrt{\frac{5.35\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\tau_{Y.P.}}} \approx 86. \quad (h)$$

对于屈服点应力较高的材料, 从(h)将得到较小的比值 d/h 。例如, 硅钢的 $\tau_{Y.P.} = 1825$ 公斤/厘米², 镍钢的 $\tau_{Y.P.} = 2040$ 公斤/厘米², 我们分别得到 d/h 为 75 与 71。

在计算支座附近的加劲肋之间所需的间距时, 我们将两加劲肋之间的腹板部分视作一简支板, 其长度等于高度 d , 宽度 b 等于加劲肋轴线间的距离²⁾。为了计算剪应力的临界值, 可用图 9.24 中的曲线。于是

$$\tau_{cr} = \left(5.35 + 4 \frac{b^2}{d^2}\right) \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2}. \quad (i)$$

1) 因腹板的屈曲并不表示板梁立即破坏, 直到屈服点应力为止我们运用方程 (g), 而略去由比例极限过渡到屈服点的范围内材料的永久变形。

2) 我们设加劲肋之间的距离小于高度 d 。

仍取安全系数等于 1.5, 得到

$$\frac{b}{h} = \frac{1.16}{\sqrt{0.415 \frac{\tau}{E} - \frac{h^2}{d^2}}}, \quad (j)$$

式中 τ 为在支座处节間內的总剪应力. 設 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $d/h = 170$, 由公式(j)得

$$\frac{b}{h} = \frac{2610}{\sqrt{\tau - 175}}. \quad (k)$$

AREA 规范将铅直加劲肋間的淨距离限制在 180 厘米之內, 或由公式

$$\frac{b}{h} = \frac{2780}{\sqrt{\tau}} \quad (l)$$

给出. 取最大許可总剪应力为 780 公斤/厘米². AISC 规范给出算式

$$\frac{b}{h} = \frac{2910}{\sqrt{\tau}}. \quad (m)$$

这些规范将距离 b 限制在 2.04 米, 而给出許可总剪应力为 920 公斤/厘米². 若最大总剪应力为 780 公斤/厘米², 由公式(k), (l)与(m)分別得到 $b/h = 107$, 100 及 105.

当支座处的加劲肋的間距及腹板厚度决定后, 即可考虑某些

表 9.26 加劲肋所需的慣性矩(厘米⁴)($b = 1.52$ 米)

	$h = 0.952$ 厘米	$h = 1.111$ 厘米	$h = 1.27$ 厘米	$h = 1.43$ 厘米
$d = 1.525$ 米 $b/d = 1$ $r = 3.30$	40	63	94	134
$d = 2.03$ 米 $b/d = 3/4$ $r = 11.6$	140	223	333	474
$d = 2.44$ 米 $b/d = 5/8$ $r = 25.2$	304	483	720	1028
$d = 3.05$ 米 $b/d = 1/2$ $r = 60.0$	724	1148	1718	2446

中間节間,并用图 9.27 中的曲綫来校核腹板的稳定性。

要决定加劲肋所需的弯曲刚度,須用表 9.19 及 9.20. 图 9.73 中的曲綫¹⁾表示了 γ 的值. 可以看出,如有三个节間,則对于两个中間加劲肋所需的 γ 比对于两个节間的为大,并且当节間的数目增大时 γ 亦应稍有增加. 設在所有的实际情况中所需的刚度将不大于表 9.19 所給的两倍,則对于各种高度和厚度的腹板及加劲肋的間距 $b = 1.52$ 米,我們得到表 9.26 給出的加劲肋横截面所需的慣性矩²⁾.

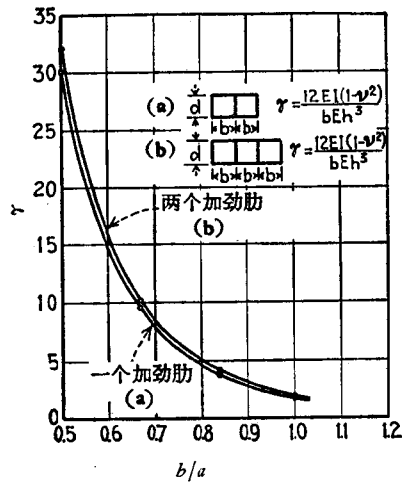


图 9.73

- 1) 注意,图中用了记号 $\gamma = EI/Db$. 因此,在表 9.19 中所给的 γ 值必须乘以 2,而表 9.20 中的必须乘以 3.
- 2) 关于运用稳定性理论以设计板梁的腹板,可参阅 F. Bleich, *Prelim. Publ. 1st Congr. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, Paris, 1932; *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952; E. Chwalla, *Prelim.Rept. 2d Congr. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, Berlin, 1936; P. P. Bijlaard, *Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, Zürich, vol. 8, 1947; J. M. Young 与 R. E. Landau, *Proc. Inst. Civil Engrs.*, vol. 4, p. 299, 1955.

第十章 薄壳的弯曲

§ 10.1. 壳上体元的变形

設 $ABCD$ (图 10.1) 表示一无限小的体元, 它系由两对相邻的垂直于壳中面并包含其主曲率的平面自壳截出. 取坐标轴 x 与 y 切于主曲率线的点 O , 而 z 轴垂直于中面, 如图所示. 分别以 r_x 与 r_y 記在 xz 与 yz 平面內的主曲率半径. 設壳的厚为一常量, 并以 h 表示之.

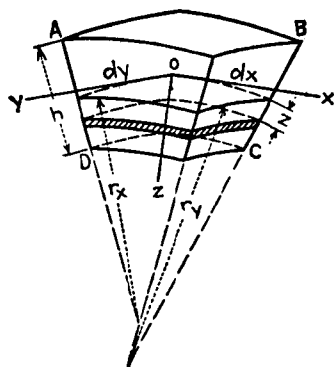


图 10.1

在研究壳的弯曲时, 我們設垂直于壳中面的綫元, 如 AD 与 BC , 保持为直綫并垂直于壳的变形后的中面. 我們首先来研究一简单情形, 即弯曲时体元 $ABCD$ 的侧面只繞它与中面的交綫而轉动. 若 r'_x 与 r'_y 为变形后的曲率半径, 則离中面为 z 的一薄层的单位伸长(参閱图 10.1)为

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{z}{1-z/r_x} \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right), \\ \epsilon_y &= -\frac{z}{1-z/r_y} \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right). \end{aligned} \quad (a)$$

如果除轉动外, 体元的侧面由于中面的伸长而有平行于侧面的平移, 并設中面在 x 与 y 方向的相应的单位伸长各以 ϵ_1 与 ϵ_2 来表示, 則由图 10.2 可以看出, 以上所研究的薄层的伸长 ϵ_x 为

$$\epsilon_x = \frac{l_2 - l_1}{l_1}.$$

代入

$$l_1 = ds \left(1 - \frac{z}{r_x}\right), \quad l_2 = ds(1 + \varepsilon_1) \left(1 - \frac{z}{r_x}\right),$$

得到

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1}{1 - z/r_x} - \frac{z}{1 - z/r_x} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon_1)r'_x} - \frac{1}{r_x} \right]. \quad (b)$$

同样, y 方向的伸长为

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_2}{1 - z/r_y} - \frac{z}{1 - z/r_y} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon_2)r'_y} - \frac{1}{r_y} \right]. \quad (c)$$

在以后的讨论中, 永远设壳的厚度 h 远小于曲率半径. 在这种情况下, 量 z/r_x 与 z/r_y 和 1 相比可以略去. 我们并将略去伸长 ε_1 与 ε_2 对曲率的影响. 于是, 代替式 (b) 与 (c), 我们得到

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_1 - z \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) \\ &= \varepsilon_1 - x_x z, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_2 - z \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) \\ &= \varepsilon_2 - x_y z, \end{aligned} \quad (10.1)$$

式中 x_x 与 x_y 为曲率的改变. 用这两个表达式作为薄层的应变分量,

并设在诸薄层之间无正应力 ($\sigma_z = 0$), 就得到以下应力分量的表达式:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - z(x_x + \nu x_y)], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 - z(x_y + \nu x_x)]. \end{aligned} \quad (10.2)$$

在体元 $ABCD$ 的各侧面上的相应的力, 可用一作用于这侧面形心的一法向力及一弯矩来代替. 由于壳的厚度很小, 体元的侧面可以作为矩形; 因此合力作用于壳的中面内. 用在讨论板时一样的记号 (参阅 § 8.1 与 8.2) 来表示这些合力与单位长度内的弯矩, 我

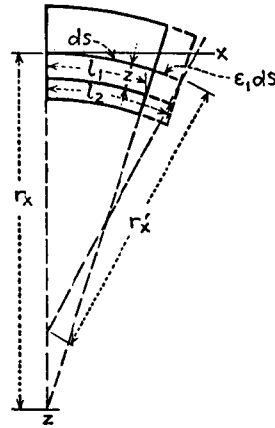


图 10.2

們得到¹⁾

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \end{aligned} \quad (10.3)$$

以及

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz = -D(x_x + \nu x_y), \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz = -D(x_y + \nu x_x), \end{aligned} \quad (10.4)$$

式中的 D 的意义与板中的相同[參閱方程(8.3)], 它表示壳的**弯曲刚度**.

如果我們設除正应力外还有剪应力作用于体元的側面, 即得到图 10.1 中这体元的变形的較一般情形. 用在板中一样的記号, 并考虑及垂直于 x 軸的側面上剪应力的分量为 τ_{xy} 与 τ_{xz} , 我們得到合力与扭矩为:

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, \\ M_{xy} &= - \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz. \end{aligned} \quad (10.5)$$

同样, 在垂直于 y 軸的側面上, 得到

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz, \quad N_{yx} = N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \\ M_{yx} &= -M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz. \end{aligned} \quad (10.6)$$

剪应力 τ_{xy} 与体元 $ABCD$ (图 10.1) 的扭轉之間的关系, 可完全按照自板截出的体元的相同方式来建立(參閱 344 頁); 这样便得

$$\tau_{xy} = -2Gz\kappa_{xy}, \quad M_{xy} = D(1-\nu)\kappa_{xy}, \quad (10.7)$$

式中的 κ_{xy} 代替了对于板的 $\partial^2 w / \partial x \partial y$, 并表示壳弯曲时体元 $ABCD$ 的扭轉, 因此 $\kappa_{xy} dx$ 即为边 BC 繞着 x 軸相对于 Oz 的轉角²⁾.

1) 弯矩与力的正方向与对于板的弯曲的图 8.5 及 8.11 所示的相同.
2) 对于绕 x, y, z 軸的轉动的正负按右手螺旋法则定出.

如果除扭轉外,在壳的中面內有剪应变 γ , 我們得到

$$\tau_{xy} = (\gamma - 2z\kappa_{xy})G, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \frac{\gamma h E}{2(1+\nu)},$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = D(1-\nu)\kappa_{xy}. \quad (10.8)$$

于是,設在壳弯曲时垂直于中面的綫元保持为直綫并垂直于变形后的中面,合力 N_x , N_y 及 N_{xy} 和力矩 M_x , M_y 及 M_{xy} 即可用六个量来表示:壳中面的三个应变分量 ϵ_1 , ϵ_2 和 γ , 及三个表示中面的曲率的改变和中面扭轉的量 κ_x , κ_y 和 κ_{xy} .

一个变形后的壳的应变能系由两部分組成:(1)由于弯曲的应变能;(2)由于中面的拉伸的应变能.对于这能的第一部分,我們可用方程(8.29).将曲率的改变 κ_x , κ_y 与 κ_{xy} 代入这方程以代替曲率 $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$ 及 $\partial^2 w / \partial x \partial y$, 得到

$$U_1 = \frac{1}{2} D \iint [(\kappa_x + \kappa_y)^2 - 2(1-\nu)(\kappa_x \kappa_y - \kappa_{xy}^2)] dA, \quad (10.9)$$

这积分应遍及整个壳面.

由于中面的伸长的应变能为

$$U_2 = \iint \frac{1}{2} (N_x \epsilon_1 + N_y \epsilon_2 + N_{xy} \gamma) dA,$$

或者,运用方程(10.3)和(10.8),

$$U_2 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\epsilon_1 \epsilon_2 - \frac{1}{4} \gamma^2 \right) \right] dA. \quad (10.10)$$

将表达式(10.9)与(10.10)相加即得总的变形能.以后将应用这些表达式討論壳的弯曲和屈曲.

§ 10.2. 圓柱形壳的对称变形

在許多实际情形中,作用于圓柱形壳的荷重对于圓柱軸綫对称分布.一承受均布内压的管子,一个盛着液体的鉛直的圓柱形容器,或者一个承受离心力作用的旋轉圓筒,均为这种受对称荷重的例子,对于以上这些情形,因在垂直于对称軸的同一橫截面內

壳中面的所有的点的位移相同，所以只須研究由两个軸截面¹⁾自壳截出的单位寬²⁾的小条 mn (图 10.3)。这小条的一微段 dx (图 10.3c) 受到在壳的中面內的力 N_x 与 $N_y dx$ 及垂直于表面的力 $q dx$ 作用，其中 q 为作用于壳的荷重的强度。还有弯矩作用于这微段的側面上。

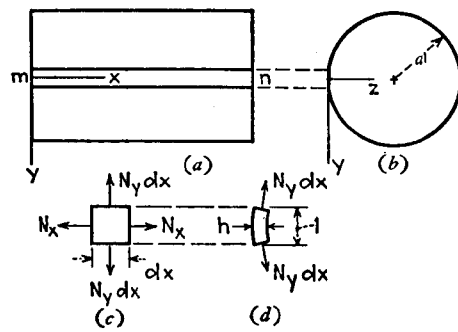


图 10.3

我們設力 N_x 为一常量，即这圆柱形壳承受均匀的軸向拉伸或压缩。力 N_y 将与小条上各点在壳变形时的径向位移有关。以 w 表示在 z 方向的这些位移，则壳的中面的周向应变为 $-w/a$ ，其中 a 为壳的中面的半径。运用方程(10.3)，得到

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\epsilon_1 - \nu \frac{w}{a} \right), \quad N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(-\frac{w}{a} + \nu \epsilon_1 \right),$$

由以上两式，得

$$N_y = \nu N_x - \frac{w}{a} Eh, \quad (a)$$

考虑小条 mn 的弯曲，力(a)給出一径向分量(图 10.3d)，其在每单位长度內的大小为

$$\frac{N_y}{a} = \frac{1}{a} \left(\nu N_x - \frac{w}{a} Eh \right).$$

由于小条在 xz 平面內的曲率，纵向力 N_x 亦給出一径向分量，其大

1) 这术语此后将用以表示通过柱轴线的截面。

2) 设这宽度与半径 a 相比为小量，于是将这小条的横截面视作矩形。

小为

$$N_x \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

将小条的每单位长度内的横向荷重相加,得到

$$q + \frac{1}{a} \left(\nu N_x - \frac{w}{a} E h \right) + N_x \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (b)$$

于是小条的弯曲的微分方程为

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q + \frac{1}{a} \nu N_x - \frac{w}{a^2} E h + N_x \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (10.11)$$

取量 D 作为小条的弯曲刚度, 因为横截面的变形为相邻的小条的作用所阻止.

若已知荷重 q 及力 N_x , 由方程 (10.11) 可得壳的挠度. 在以后将表明应用这方程研究壳的屈曲(参阅 § 11.1).

§ 10.3. 圆柱形壳的无伸长的变形¹⁾

在讨论圆环的变形时 (§ 7.2) 曾指出, 如果环的中心线的伸长可以略去, 即可将分析简化. 对于圆柱形壳的无伸长的变形亦可得到同样的简化. 我们来研究壳的中面各点的位移应有限制, 使无伸长的变形成为可能. 取壳的中面的任一点为原点, 坐标轴的方向如图 10.4 所示, 并以 u, v, w 表示这点的位移分量, 则中面在 x 方向无伸长的条件为

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (a)$$

如同环的情形一样 [参阅方程 § 7.2 的 (b)], 在周向无伸长的条件为

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} = 0. \quad (b)$$

在中面内无剪变形的条件为

$$\gamma = \frac{\partial u}{a \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (c)$$

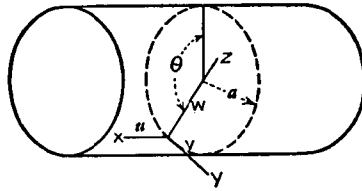


图 10.4

1) 壳的无伸长的变形理论为 Lord Rayleigh 所创, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 13, 1881, 及 *Proc. Roy. Soc., London*, vol. 45, 1889.

这式与板的小挠度情形相同,只是以 $a d\theta$ 代替了 dy . 取位移分量的表达式与圆环的(参阅 § 7.2)相同,即可满足条件(a),(b)与(c). 这些分量可写作以下的形式:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ v_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a(a_n \cos n\theta - a'_n \sin n\theta), \\ w_1 &= - \sum_{n=1}^{\infty} na(a_n \sin n\theta + a'_n \cos n\theta), \end{aligned} \quad (d)$$

式中 a 为壳的中面的半径, θ 为中心角, a_n 与 a'_n 为须由每种特定的荷重情况计算的常数. 位移(d)表明了壳的所有的横截面的变形相同. 在以上的位移上我们迭加上沿圆筒的长度而变化的位移;这些位移可用级数来表示:

$$\begin{aligned} u_2 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} (b_n \sin n\theta + b'_n \cos n\theta), \\ v_2 &= x \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - b'_n \sin n\theta), \\ w_2 &= -x \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \sin n\theta + b'_n \cos n\theta). \end{aligned} \quad (e)$$

容易证明,这些表达式亦符合无伸长的条件. 于是,对于圆柱壳的无伸长变形的位移的一般表达式为

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2. \quad (f)$$

计算在已知的力系作用之下圆柱形壳的无伸长的变形时,运用弯曲应变能的表达式 [方程(10.9)] 是有利的. 出现在这表达式中的曲率的改变 χ_x , χ_y , χ_{xy} 可以计算如下: 表示在母线方向的曲率的改变的 χ_x 等于零, 因为由式(d)与(e)可以看出母线保持为直线. 表示周向的曲率的改变的 χ_y 可与圆环一样地决定(参阅 § 7.1), 于是得到

$$\chi_y = \frac{1}{a^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right),$$

或者用条件(b),

$$\chi_y = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \quad (g)$$

在计算扭转时,我们注意到在变形时母线上的一微段绕 y 轴转一角度 $-\partial w/\partial x$, 而绕 z 轴转一角度 $\partial v/\partial x^1$. 现考虑离第一个微段的周向距离为

1) 在决定转角的正负号时,我们用右手螺旋法则.

$a d\theta$ 的一母线上的相似的微段, 我们可以看出, 该段相应于位移 w 的绕 y 轴的转角为

$$-\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} d\theta. \quad (h)$$

该段在壳的切面内的转角为

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\partial v / \partial x)}{\partial \theta} d\theta,$$

由于两微段间的中心角为 $d\theta$, 在切平面内的转角对于 y 轴有一分量等于

$$-\frac{\partial v}{\partial x} d\theta. \quad (i)$$

由(h)与(i)这两结果可得结论: 所研究的这两微段间的总的扭转角为

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) d\theta.$$

因此,

$$\kappa_{xy} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (j)$$

将所计算得的曲率的变化代入弯曲应变能的表达式¹⁾(10.9), 并用位移的表达式(f), 对于长为 $2l$ (图 10.5) 的圆柱形壳的总的变形能, 我们最后得到以下这表达式:

$$U = \pi D l \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2 - 1)^2}{a^3} \times \left\{ n^2 \left[a^2(a_n^2 + a_n'^2) + \frac{1}{3} l^2(b_n^2 + b_n'^2) \right] + 2(1-\nu)a^2(b_n^2 + b_n'^2) \right\}. \quad (10.12)$$

这表达式并不包含 $n = 1$ 这项, 因为正如在研究圆环的变形 (§ 7.2) 时会指出, 相应的位移与刚体的位移相同, 所以并不产生应变能。

现在我们应用以上这 U 的表达式来以计算一圆柱形壳的变形; 这壳的变形系离中点为 c 的对径作用的两大小相等方向相反的力 P 所产生 (图 10.5)。这两力只对于它们的作用点

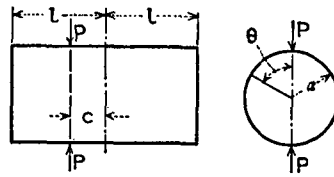


图 10.5

的径向位移 w 作功, 并且由于在 w_1 与 w_2 的表达式 [参阅方程(d)与(e)] 中有系数 a_n 与 b_n 的项在这两作用点均为零, 所以在变形的表达式中只出现系

1) 对于这情形, 由于壳的中面的伸长的变形能为零, 因为这变形假设为无伸长的。

数为 a'_n 与 b'_n 的项。运用虚位移原理, 计算系数 a'_n 与 b'_n 的方程成为

$$\frac{\partial U}{\partial a'_n} \delta a'_n = -na \delta a'_n (1 + \cos n\pi) P,$$

$$\frac{\partial U}{\partial b'_n} \delta b'_n = -nc \delta b'_n (1 + \cos n\pi) P.$$

将 U 的表达式(10.12)代入, 对于 n 为偶数得到

$$a'_n = -\frac{a^2 P}{n(n^2-1)^2 \pi D l^3},$$

$$b'_n = -\frac{nc P a^3}{(n^2-1)^2 \pi D l \left[\frac{n^2 l^2}{3} + 2(1-\nu) a^2 \right]}.$$

如果 n 为奇数, 得到

$$a'_n = b'_n = 0.$$

将 a'_n 与 b'_n 的值代入表达式(f)并令 $a_n = b_n = 0$, 即得到位移 u, v 与 w 的收敛很快的级数。虽然这些表达式并不严格地符合圆柱形壳的自由边的条件, 但如果壳的厚度 h 远较半径 a 为小时, 则所计算得的位移与实验¹⁾ 是很相符的。上述方法有时候亦可用以计算一部分圆柱壳的变形; 这部分圆柱壳系由两个夹角为

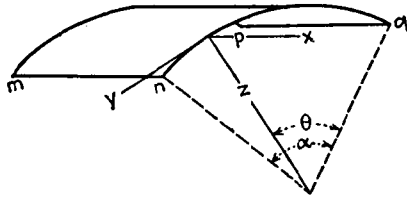


图 10.6

α 的轴截面自一半径为 a 的一完整的圆柱壳所截出(图10.6)。例如, 对于位移取级数

$$u = -\sum \frac{a a_n}{\pi n} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha},$$

$$v = \sum a a_n \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha} + x \sum b_n \cos \frac{n\pi\theta}{\alpha},$$

$$w = -\sum \frac{n\pi}{\alpha} a a_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} - x \sum \frac{n\pi}{\alpha} b_n \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha},$$

我们得到一无伸长的变形, 沿边 mn 及 pq 位移 u, w 及弯矩均为零。

1) I. A. Wojtaszak 曾在密歇根大学做过这样的实验。所用的黄铜管的直径为 15.25 厘米, 厚 0.159 厘米, 长 76.2 及 61 厘米。 $\theta = 90^\circ$ (图 10.5) 的母线的挠度曲线与将以上所得的 a'_n 与 b'_n 代入位移 w 的表达式(f)所得的直线相差很小。

§ 10.4. 柱形壳的变形的一般情形¹⁾

要建立确定壳变形的位移 u, v 与 w (图 10.4) 的微分方程, 我们可以与板一样地进行, 首先研究由两相邻的轴截面及两相邻的垂直于圆柱轴线的截面自柱形壳所截出的体元的平衡. 在图 10.7a 及 10.7b 中示出了在变形以后壳的中面的相应的面元. 在图 10.7a 中示出了在 § 10.1 所讨论的诸合力. 在变形之前, 中面的任一点处的 x, y 与 z 轴的方向分别为母线的, 与圆周相切的及垂直于壳中面的方向. 在所设的很小的变形以后, 这些方向将稍有改变, 我们取 z 轴垂直于变形的中面, x 轴与可能变为曲线的母线相切, 而 y 轴垂直于 xz 平面. 合力的方向亦将相应地稍有改变, 在写出体元 $OABC$ 的平衡方程时必须考虑这些改变.

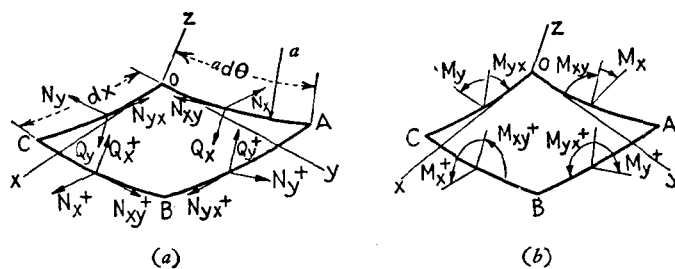


图 10.7

我们首先来建立体元 $OABC$ 的侧面 BC 与 AB 分别对于侧面 OA 与 OC 的角位移的公式. 在这计算中, 我们认为 u, v 与 w 很小, 并计算每一位移所产生的角位移; 然后用迭加法得到总的角位移. 我们首先研究边 BC 对于边 OA 的转动. 这转动可分解为对于 x, y 与 z 轴的三个转动分量. 侧面 OA 与 BC 对于 x 轴的转动是由于位移 v 与 w 而引起的. 因位移 v 表示侧面 OA 与 BC 在周向的运动 (参阅图 10.4), 而 a 为圆柱的中面的半径, 所以侧面 OA 对于 x 轴的相应的转动为 v/a , 而侧面 BC 对于 x 轴的转动为

1) A. E. H. Love 发展了薄壳弯曲的一般理论, "Mathematical Theory of Elasticity", 4th ed., chap. 24, p. 515, 1927.

$$\frac{1}{a} \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right).$$

因此,由于位移 v , BC 对于 OA 的繞着 x 軸相对角运动为

$$\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} dx. \quad (a)$$

由于位移 w , 側面 OA 对于 x 軸轉了角度 $\partial w/a\partial\theta$, 而边 BC 轉了角度

$$\frac{\partial w}{a \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) dx.$$

因此,由于位移 w , 相对角位移为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) dx. \quad (b)$$

将(a)与(b)相加,側面 BC 对于側面 OA 繞 x 軸的相对角位移为

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx. \quad (c)$$

側面 BC 对于側面 OA 繞 y 軸的轉动是由于母綫在軸平面內的弯曲所引起的,并等于¹⁾

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx. \quad (d)$$

側面 BC 对于側面 OA 繞 z 軸的轉动是由于母綫在切平面內的弯曲所引起的,并等于

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx. \quad (e)$$

公式 (c), (d) 与 (e) 給出了側面 BC 对于側面 OA 的三个轉动分量.

現在我們来建立側面 AB 对于側面 OC 的角位移的相应的公式. 由于柱形壳的曲率,体元 $OABC$ 的两側面之間原来的夹角为 $d\theta$. 但由于位移 v 和 w , 这角度将改变, 而側面 OC 对于 x 軸的轉动成为

$$\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta}. \quad (f)$$

1) 对于 x, y, z 軸的角位移的正负是按照右手螺旋法则而取的.

側面 AB 的相应的轉动为

$$\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) d\theta.$$

因此,代替原来的角度 $d\theta$, 我們須取

$$d\theta + \left(\frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) d\theta. \quad (g)$$

在計算側面 AB 对于 OC 繞 y 軸的轉角时, 我們用前一节的扭轉表达式(j)(參閱 475 頁); 于是所需的角位移为

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta. \quad (h)$$

側面 AB 对于側面 OC 繞 z 軸的轉动是由于 v 和 w 所引起的。由于位移 v , 側面 OC 的轉角为 $\partial v / \partial x$, 而側面 AB 的轉角为

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{a \partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) a d\theta,$$

因此相对角位移为

$$\frac{\partial}{a \partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) a d\theta. \quad (i)$$

由于位移 w , 側面 AB 在軸平面內轉了角度 $\partial w / \partial x$ 。这轉动对于 z 軸的分量为

$$-\frac{\partial w}{\partial x} d\theta. \quad (j)$$

将(i)与(j)相加, 側面 AB 对于側面 OC 繞 z 軸的相对角位移为

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) a d\theta. \quad (k)$$

有了以上的角度的公式¹⁾, 将所有的力投影于 x , y 与 z 軸, 可得到体元 $OABC$ (图 10.7a) 的三个平衡方程。从平行于合力 N_x 与 N_{yx} 的諸力着手, 并将它們投影于 x 軸, 我們得到 $(\partial N_x / \partial x) dx a d\theta$ 及 $(\partial N_{yx} / \partial \theta) d\theta dx$ 。由于表达式 (k) 給出的轉角, 平行于 N_y 的諸力在 x 方向的分量为

1) 这些公式可以很容易地将 A. E. H. Love 所给出的一般公式用于柱形壳而得到, *ibid.*, p. 523.

$$-N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta dx.$$

由于表达式(c)給出的轉角,平行于合力 N_{xy} 的諸力在 x 方向的分量为

$$-N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx a d\theta.$$

最后,由于表达式(d)和(h)給出的轉角,平行于 Q_x 及 Q_y 的諸力在 x 方向的分量为

$$-Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx a d\theta - Q_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta dx.$$

关于作用于这体元的外力,我們設只有强度为 q 的正压力,它对于 x 軸的投影为零.

将以上所計算得的所有投影相加,得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} dx a d\theta + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} d\theta dx - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta dx - \\ & - N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx a d\theta - Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx a d\theta - \\ & - Q_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta dx = 0. \end{aligned}$$

同样,可以写出其余两个平衡方程.經化簡后,这三个方程可写作以下的形式:

$$\begin{aligned} & a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - a Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\ & - Q_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\ & \frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + \\ & + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_y \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) = 0, \quad (10.13) \\ & a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & + N_y \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) + N_{yx} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + q a = 0. \end{aligned}$$

在推导这些方程时，并未考虑由于中面的拉伸造成的体元大小的改变。在解稳定性问题时，有时候引入进一步的改进，即在写出体元的平衡方程时将中面的应变 ϵ_1 与 ϵ_2 计算在内。因 ϵ_1 与 ϵ_2 为由位移 u, v, w 的导数所表示的小量 [参阅方程(10.15)]，所以只须引用在方程(10.13)中未被位移的导数所乘的项中。例如，研究柱形壳在侧向压力作用下的屈曲 (§11.5)，我们将看到，应力合力 N_y 远比其他的应力合力为大；因此，为了将中面的伸长计算在内，在方程(10.13)的第二与第三式中必须引用 $N_y(1 + \epsilon_1)$ 以代替 N_y ，并且在第三式中须以 $q(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)$ 代替 q 。对于柱形壳在扭转作用下的屈曲 (§11.11)，应力合力 N_{xy} 与 N_{yx} 变为最重要；考虑及中面的伸长效应，在方程(10.13)的第一与第二式中必须以 $N_{yx}(1 + \epsilon_1)$ 与 $N_{xy}(1 + \epsilon_2)$ 代替 N_{yx} 与 N_{xy} 。以后在研究特殊问题时，将讨论考虑中面的拉伸的问题。

现研究对于 x, y, z 轴的三个力矩方程 (图 10.7b)，并再考虑到侧面 BC 和侧面 AB 分别对于侧面 OA 和侧面 OC 的微小角位移，我们得到以下诸方程：

$$\begin{aligned}
 & a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \theta} - a M_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\
 & \quad + a Q_y = 0, \\
 & \frac{\partial M_{yx}}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} + a M_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\
 & \quad - a Q_x = 0, \tag{10.14} \\
 & M_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 & \quad + M_{yx} \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) - M_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + \\
 & \quad + a(N_{xy} - N_{yx}) = 0.
 \end{aligned}$$

利用这些方程的为首两个方程，我们可以从方程 (10.13) 中消去 Q_x 与 Q_y ，并由此得到包含合力 N_x, N_y, N_{xy} 与力矩 M_x, M_y, M_{xy} 的三个方程。运用 §10.1 的公式，以上这些量可由中面的三个应变分量 $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$ 及三个曲率的改变 $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ 来表示；而应变分

量和曲率的变化可由位移 u, v, w 表示如下(参阅 § 10.3):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{a\partial\theta} - \frac{w}{a}, & \gamma &= \frac{\partial u}{a\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ x_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & x_y &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right), & & (10.15) \\ x_{xy} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\theta} \right). \end{aligned}$$

所以我们最后得到三个微分方程以决定位移 u, v 与 w .

§ 10.5. 球形壳的对称变形

我们设铅直直径为球形壳变形的对称轴(图 10.8), 而来研究

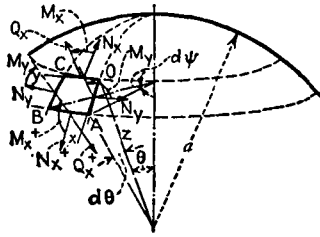


图 10.8

体元 $OABC$, 它系由两个夹角为 $d\psi$ 的子午面及与对称轴成半顶角 θ 和 $(\theta + d\theta)$ 的两个圆锥面所截出。取 x 与 y 轴分别切于点 O 的子午线和平行圆, 而取 z 轴为径向, 如图所示; 以 u, v, w 表示点 O 的相应的位移分量。对于对称变形,

$v = 0$ 而 u 与 w 只是角度 θ 的函数。体元的子午面 OA 与 BC 之间夹一小角度 $d\psi$ 。这可由将子午面 OA 绕 x 与 z 轴各转角度 $d\psi \sin \theta$ 和 $d\psi \cos \theta$ 而得。体元的侧面 OC 与 AB 的夹角等于 $d\theta$, 并且面 AB 的方向可由将面 OC 绕 y 轴转 $-d\theta$ 角¹⁾ 而得。运用体元 $OABC$ 各侧面之间的夹角的原有的值, 并表示合力与合力矩如图所示, 即可写出这体元的平衡微分方程。

对于对称变形, 我们只须考虑三个方程: 力在 x 与 z 轴的投影及对于 y 轴的力矩。将所有的力投影于 x 轴并设外力均与壳垂直, 得到

$$\begin{aligned} \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial\theta} d\theta \right) a \sin(\theta + d\theta) d\psi - N_x a \sin \theta d\psi - \\ - N_y a d\theta \cos \theta d\psi - Q_x a \sin \theta d\psi d\theta = 0. \end{aligned}$$

1) 在决定转动的正负号时用了右手螺旋法则。

同样,可以写出其余两个平衡方程。經化簡后,这三个平衡方程成为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial \theta} + (N_x - N_y)\cot \theta - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial \theta} + Q_x \cot \theta + N_x + N_y + qa &= 0, \quad (10.16) \\ \frac{\partial M_x}{\partial \theta} + (M_x - M_y)\cot \theta - Q_x a &= 0,\end{aligned}$$

式中 q 为外加荷重的强度。我們須用这些方程以研究球形壳在对于直径对称分布的法向荷重作用下的变形。

在写对于直径轴对称的壳的屈曲面的平衡方程时,应計入体元 $OABC$ 諸侧面之間由于变形而形成的角度的微小改变。考虑体元的侧面 OC 与 AB 間的夹角的改变,从所設的对称变形可知,只有繞 y 軸的轉动。侧面 OC 的轉角为

$$\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta}.$$

于是变形后侧面 OC 与 AB 間的角度成为

$$d\theta + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right) d\theta. \quad (a)$$

現在考虑侧面 AO 与 BC 間的角度改变,我們注意到,由于变形的对称性,这些面只在它們自己的平面內轉了角度

$$- \left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right).$$

在 BC 平面內的这样的轉动对于 x 和 z 軸的分量各为

$$\left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right) \cos \theta d\psi \quad \text{及} \quad - \left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right) \sin \theta d\psi.$$

因此,在变形以后,侧面 BC 对于侧面 AO 的方位可以由侧面 AO 分別对于 x 与 z 軸轉如下两角度而得:

$$\sin \theta d\psi + \left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right) \cos \theta d\psi \quad (b)$$

及

$$\cos \theta d\psi - \left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right) \sin \theta d\psi. \quad (c)$$

运用表达式(a), (b)与(c)给出的角度以代替原来的角度 $d\theta$, $\sin \theta d\psi$ 与 $\cos \theta d\psi$, 体元 $OABC$ 的平衡方程成为

$$\begin{aligned} & \frac{dN_x}{d\theta} + (N_x - N_y) \cot \theta - Q_x + N_y \left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right) - \\ & - Q_x \left(\frac{d^2w}{ad\theta^2} + \frac{w}{a} \right) = 0, \\ & \frac{dQ_x}{d\theta} + Q_x \cot \theta + N_x + N_y + qa + N_x \left(\frac{d^2w}{ad\theta^2} + \frac{dw}{ad\theta} \right) + \quad (10.17) \\ & + N_y \left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right) \cot \theta = 0, \\ & \frac{dM_x}{d\theta} + (M_x - M_y) \cot \theta - Q_x a + M_y \left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta} \right) = 0. \end{aligned}$$

从这些方程中消去 Q_x , 得到包含 N_x , N_y , M_x , M_y 的两个方程。运用 § 10.1 的方程(10.3)与(10.4), 以上这几个量均可用位移 u 和 w 来表示。由几何关系, 即可很容易地决定在方程(10.3)中的量 ε_1 和 ε_2 。对这里的情形, 它们为

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ad\theta} - \frac{w}{a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u \cos \theta}{a \sin \theta} - \frac{w}{a}. \quad (d)$$

运用表达式(a)和(b), 得到曲率的改变为

$$x_x = \frac{d^2w}{a^2 d\theta^2} + \frac{dw}{a^2 d\theta}, \quad x_y = \left(\frac{u}{a^2} + \frac{dw}{a^2 d\theta} \right) \cot \theta. \quad (e)$$

有了 ε_1 , ε_2 , x_x 与 x_y 诸值, 最后我们从方程(10.17)得到只包含 u 和 w 的两个方程。在 § 11.13 中将指明应用这些方程以讨论受压球形壳的稳定性。

前两节所得的平衡微分方程, 是以勒符 (Love) 的薄壳小挠度的一般理论¹⁾为基础的; 这理论略去了垂直于壳中面的应力, 并设变形前壳的中面的法线保持垂直于变形后的中面。近年来, 出现了大量的文献, 对勒符理论作了各种改进²⁾。这理论的某些改进,

1) *Ibid.*

2) P. M. Naghdi 的论文中给出了这课题的参考书目, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 9, p. 365, 1956.

系由計入剪力对壳弯曲的影响而得¹⁾。在解許多实际問題时,倾向于略去某些項以进一步簡化勒符的方程,使数学运算簡單些。这种簡化首先应用于薄圓柱壳的扭轉²⁾,并将在下一章內討論。对于圓柱壳屈曲的其他情形³⁾,以后将叙述类似的簡化。

-
- 1) 参阅 E. Reissner, *J. Appl. Mech.*, vol. 12, p. A69, 1945, 及 *J. Math. Phys.* vol. 31, p. 109, 1952; P. M. Naghdi, *Quart. Appl. Math.*, vols. 14 与 15, 1956, 和 1957; V. L. Salerno 与 M. A. Goldberg, *J. Appl. Mech.*, vol. 27, p. 54, 1960.
 - 2) L. H. Donnell, *NACA Tech. Rept.* 479, 1933. N. J. Hoff 曾讨论了简化后的方程的准确性, *J. Appl. Mech.*, vol. 22, p. 329, 1955.
 - 3) S. B. Batdorf, *NACA Tech. Note* 1341, 1947.

第十一章 壳的屈曲

§ 11.1. 圆柱形壳在均匀轴向压缩下的对称屈曲¹⁾

如果一圆柱形壳沿轴向均匀受压，当荷重到达某一值时可能发生对柱轴綫对称的屈曲²⁾ (图 11.1)。作用在壳边每单位长度内的压力的临界值 N_{cr} 可由能量法得到。只要壳保持为圆筒状，总的应变能为轴向压缩能。但当屈曲开始时，除轴向压缩外还必须考虑中面在周向的应变及壳的弯曲。因此，壳的应变能增大了；在荷重达到临界值时，应变能的增加必等于圆筒由于屈曲而缩短时压荷重所作的功。

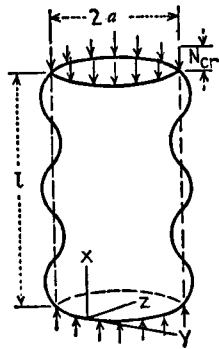


图 11.1

設屈曲时径向位移的表达式为

$$w = -A \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (a)$$

式中 l 为圆柱的长度。屈曲以后，轴向与周向的应变 ϵ_1 与 ϵ_2 可以由这条件而得到，

即在屈曲时轴向压力保持不变。对于在屈曲前的轴向应变用記号

$$\epsilon_0 = -\frac{N_{cr}}{Eh}, \quad (b)$$

式中 h 为壳的厚度，于是得到

$$\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 = (1 - \nu^2)\epsilon_0.$$

1) 对于非对称屈曲，参阅 § 11.3。

2) 参阅 Timoshenko, *Z. Math. Physik*, vol. 58, p. 378, 1910. 并参阅 R. Lorenz, *Z. Ver. deut. Ingr.*, vol. 52, p. 1766, 1908; *Physik Z.*, vol. 13, p. 241, 1911.

注意到

$$\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_0 - \frac{w}{a} = -\nu\varepsilon_0 + \frac{A}{a} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (c)$$

我們得到

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \nu \frac{A}{a} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (d)$$

在軸平面內的曲率的改变为

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = A \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (e)$$

将表达式(c), (d)与(e)代入应变能的方程(10.9)与(10.10), 并注意到, 由于变形的对称性,

$$\gamma = \chi_y = \chi_{xy} = 0,$$

我們得到在屈曲时应变能的增加的表达式为

$$\begin{aligned} \Delta U = & -2\pi h E \nu \varepsilon_0 \int_0^l A \sin \frac{m\pi x}{l} dx + \frac{\pi A^2 E h l}{2a} + \\ & + A^2 \frac{\pi^4 m^4}{2l^4} \pi a l D. \end{aligned} \quad (f)$$

在屈曲时压缩力所作的功为

$$\Delta T = 2\pi N_{cr} \left(\nu \int_0^l A \sin \frac{m\pi x}{l} dx + \frac{a}{4} A^2 \frac{m^2 \pi^2}{l} \right), \quad (g)$$

括号中的第一項是由于軸向应变的改变 $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$, 第二項是由于方程(a)所給出的母綫的弯曲。使式(f)等于(g), 得到

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{h} = D \left(\frac{m^2 \pi^2}{h l^2} + \frac{E}{a^2 D} \frac{l^2}{m^2 \pi^2} \right). \quad (h)$$

設在屈曲时沿柱长形成了許多个波, 并认为 σ_{cr} 为 $m\pi/l$ 的連續函数, 于是式(h)的最小值为

$$\sigma_{cr} = \frac{2}{ah} \sqrt{EDh} = \frac{Eh}{a \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (11.1)$$

并发生于当

$$\frac{m\pi}{l} = \sqrt[4]{\frac{Eh}{a^2 D}}.$$

因此,对 $\nu = 0.3$, 壳屈曲成的半波长为

$$\frac{l}{m} = \pi \sqrt[4]{\frac{a^2 D}{Eh}} = \pi \sqrt[4]{\frac{a^2 h^2}{12(1-\nu^2)}} \approx 1.72 \sqrt{ah}. \quad (11.2)$$

可以看出,对于圆柱形壳的对称屈曲,所得的结果与在弹性介质内的杆的屈曲的结果相同(参阅 § 2.10),并且,在 § 2.10 中关于杆的波的个数的讨论亦适用于此. 还可以看出,只对于很薄的壳,才可能在弹性极限以内发生所研究的对称屈曲. 例如,取 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\sigma_{r.L.} = 4200$ 公斤/厘米², $\nu = 0.3$ 的钢壳,则由方程(11.1)得到 $a/h = 303$,并由方程(11.2)可知,半波长小于半径的十分之一,并且对于长度不小于直径的圆柱,半波的个数大于 20. 对于这种情形, m 为一大数值这假设是足够准确的.

不用能量法,我们也可用圆柱形壳的对称挠曲的微分方程(10.11)来计算临界荷重. 在应用这方程时,取 $q = 0$,并且不自壳的未变形的中面去量度位移 w (如在导出这方程时所设),而是自均匀压缩作用以后的中面去量度 w . 这要求以 $w + \nu N_x a / Eh$ 代替方程中的 w ,并当 N_x 为压缩力时作为是正的. 于是圆柱形壳对称屈曲的微分方程为

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} + Eh \frac{w}{a^2} = 0. \quad (11.3)$$

将以前的 w 的表达式(a)代入并使 $\sin(m\pi x/l)$ 的系数等于零,从这方程我们得到表达式(h)所给出的临界应力.

当壳不是很薄并且在应力超过比例极限后才发生屈曲,则仍可由方程(11.3)得到临界荷重,而只须在弯曲刚度 D 的表达式中引入切线模量 E_t 以代替 E ¹⁾. 于是与以前一样,由方程(11.3)得到

$$\sigma_{cr} = \frac{h \sqrt{E E_t}}{a \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (11.4)$$

取一系列的 σ_{cr} 值并由压缩试验图决定 E_t 的值(参阅 § 3.3),从方程(11.4)可计算相应的比值 a/h .

1) 设方程(11.3)左边最后一项中的 E 值不改变.

对于超过比例极限的屈曲,半波长的表达式成为

$$\frac{l}{m} = \pi \sqrt[4]{\frac{a^2 h^2}{12(1-\nu^2)}} \sqrt[4]{\frac{E_t}{E}} \approx 1.72 \sqrt{ah} \sqrt[4]{\frac{E_t}{E}}. \quad (11.5)$$

因此,对于超过比例极限的屈曲,波长变短了.

如果我们设超过比例极限后在轴向与周向材料的机械性质是一样的,并且如果在方程(11.3)的第一和第三项中引入 E_t 以代替 E , 我们得到

$$\sigma_{cr} = \frac{E_t h}{a \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (11.6)$$

并且超过比例极限后波长保持不变.

在作圆柱形壳的试验时,压力通常是由试验机的刚硬的垫板加上去的,并且壳的横向的扩张被摩擦力所阻止.因此不是稳定性问题,而是涉及压缩和弯曲同时作用的问题¹⁾,如图11.2所示.设压应力小于方程(11.3)给出的临界应力,并用记号

$$\frac{N_x}{N_{cr}} = t,$$

方程(11.3)的通解可写作以下这形式:

$$w = C_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x + \gamma_1) + C_2 e^{-\alpha x} \sin(\beta x + \gamma_2), \quad (i)$$

式中

$$\alpha = \sqrt{1-t} \sqrt[4]{\frac{Eh}{4a^2 D}}, \quad \beta = \sqrt{1+t} \sqrt[4]{\frac{Eh}{4a^2 D}},$$

而 C_1, C_2, γ_1 及 γ_2 为四个积分常数,须对每一特定情形由边界条件来决定.设边为简支,于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{当 } x = 0 \text{ 及 } x = l; \quad (j)$$

$$w = \frac{\nu N_x a}{Eh}, \quad \text{当 } x = 0 \text{ 及 } x = l. \quad (k)$$

第二个条件表明摩擦力 Q 完全阻止了壳在边缘的横向扩张.若圆筒并不短并且荷重并不接近于它的临界值,则当考虑圆筒的 $x = 0$ 这端时,在通解

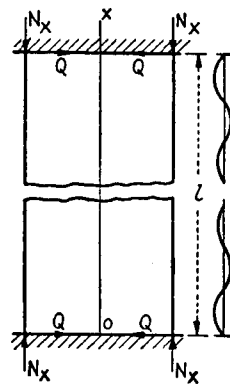


图 11.2

1) 压缩与弯曲同时作用这问题曾为 L. Föppl 所讨论, *Sitzber. mat.-physik. Kl. bayer. Akad. Wiss., München*, 1926, p. 27. J. W. Geckeler 亦讨论过这问题, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 8, p. 341, 1928.

(i)中可令 $C_1 = 0^1$ 。于是由于有因子 $e^{-\alpha x}$ ，我们得到了急剧衰减的波状挠曲。波长为

$$L = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+t}} \sqrt{\frac{4a^2 D}{Eh}}. \quad (1)$$

这长度稍大于在屈曲时所得的 [方程(11.2)]，并当 t 趋近于 1 时趋近于后者。当荷重趋近于临界值并当 t 趋近于 1 时，因子 $e^{-\alpha x}$ 亦趋近于 1。波便不

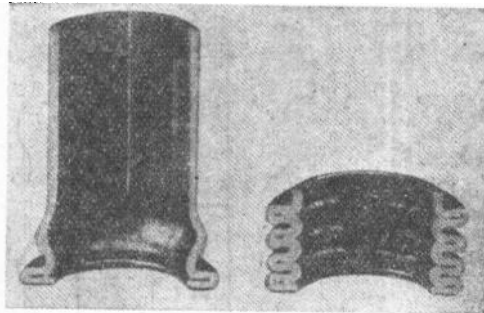


图 11.3

再急剧地衰减；对于每一端我们不能分别来处理边界条件，而必须考虑在表达式 (i) 中的所有的四个常数。挠曲的形式如图 11.2 所示。当荷重趋近于临界值时，最大挠度很快地增大；并由于与试验机的垫板最接近的那些波峰处的

材料的屈服而发生破坏。当第一个半波由于塑性变形而压平时，第二个半波即开始迅速地成长，依此类推；最后得到在照片²⁾中所示的变形(图 11.3)。这种变形通常得自屈曲发生于比例极限以外的厚壁管。对于薄壁管，通常发生对于轴线不对称的屈曲(参阅 § 11.4)。

§ 11.2. 圆柱形壳由于不稳定性的无伸长弯曲形式

如果一轴向均匀受压的圆柱形壳的边能自由地横向移动，就可能发生无伸长的横向弯曲。运用 § 10.3 的表达式(e)，我们取屈曲时的位移³⁾为：

$$\begin{aligned} u &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a}{n} b_n \sin(n\theta + \beta_n), \\ v &= x \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cos(n\theta + \beta_n), \\ w &= -x \sum_{n=2}^{\infty} n b_n \sin(n\theta + \beta_n). \end{aligned} \quad (a)$$

1) 参阅 Timoshenko, Strength of Materials, 3d. ed., part 2, p. 2, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1956.

2) 这照片系取自 Geckeler 的论文, *op. cit.*

3) 在这些表达式中的系数 b_n 等于 § 10.3 中的 $\sqrt{b_n^2 + (b'_n)^2}$ ，并且 $\tan \beta_n = b'_n / b_n$ 。

压力的临界值 N_{cr} 可由能量法得到。在由式 (a) 给出的变形过程中, 壳的应变能的增量为 [参阅方程 (10.9)]

$$\Delta U = \pi D l \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \frac{(n^2 - 1)^2}{a^3} \left[\frac{n^2 l^2}{3} + 2(1 - \nu) a^2 \right]. \quad (b)$$

在计算弯曲过程中压力所作的功时, 我们注意到, 由于位移 (a), 圆柱壳的母线与 x 轴将有一倾角

$$\frac{1}{x} \sqrt{v^2 + w^2},$$

于是所作的功为

$$\Delta T = N_{cr} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{v^2 + w^2}{x^2} a d\theta = \frac{\pi}{2} a l N_{cr} \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 (1 + n^2). \quad (c)$$

使这功等于应变能的增量 (b), 我们得到

$$N_{cr} = \frac{2D}{a^4} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 (n^2 - 1)^2 \left[\frac{n^2 l^2}{3} + 2(1 - \nu) a^2 \right]}{\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 (1 + n^2)}.$$

N_{cr} 的最小值可由只取级数中的 $n = 2$ 这一项而得到, 即设壳的横截面压扁成为椭圆形。于是

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= \frac{N_{cr}}{h} = \frac{2D}{a^4 h} \frac{9}{5} \left[\frac{4}{3} l^2 + 2(1 - \nu) a^2 \right] = \\ &= \frac{3Eh^2}{10(1 - \nu^2) a^2} \left[\frac{4}{3} \frac{l^2}{a^2} + 2(1 - \nu) \right]. \end{aligned}$$

可以看出, 如果比值 h/a 很小并且比值 l/a 并不很大, 则临界应力将小于对于对称形式的屈曲所得的 [方程 (11.1)]¹⁾。

§ 11.3. 在均匀轴向压力作用下圆柱形壳的屈曲 (一般情形)

虽然前面已讨论了轴向受压的圆柱形壳的对称屈曲 (参阅 § 11.1), 这里我们将用方程 (10.13) 与 (10.14) 研究较一般的情形²⁾。设除 N_x 外 (图 11.1) 所有的合力均很小, 并略去这些力与位移 u , v , w 的导数 (它们也是很小的) 的乘积, 由方程 (10.13) 得到

1) 参阅 Timoshenko, *Z. Math. Physik*, vol. 58, p. 378, 1910.

2) 参阅 R. Lorenz, *Physik. Z.*, vol. 13, p. 241, 1911; R. V. Southwell, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, series A, vol. 213, p. 187, 1914. 并参阅 Timoshenko, *Bull. Electrotech. Inst.*, St. Petersburg, vol. 11, 1914. 以下的讨论系取自后一论文。

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} &= 0, \\
\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_y &= 0, \\
a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y &= 0.
\end{aligned} \tag{a}$$

由方程(10.14),略去了力矩与位移 u, v, w 的导数的乘积,得到

$$\begin{aligned}
Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{a \partial \theta}, \\
Q_y &= \frac{\partial M_y}{a \partial \theta} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{b}$$

将这两个方程代入方程(a),轴向受压的圆柱形壳屈曲的三个平衡方程成为:

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} &= 0, \\
\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{a \partial \theta} &= 0, \\
a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y + a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_y}{a \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} &= 0.
\end{aligned} \tag{c}$$

在这些方程中的所有的合力与合力矩均可用位移 u, v, w 来表示 [参阅 § 10.1 的定义和方程 (10.15)], 位移的正方向示于图 10.4 中, 以压应力作为正并运用记号

$$\frac{h^2}{12a^2} = \alpha, \quad \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh} = \phi, \tag{d}$$

我們最后得到以下諸方程:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{a^2 \partial \theta^2} &= 0, \\
\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{a(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a \partial \theta^2} - \frac{\partial w}{a \partial \theta} + \\
+ \alpha \left[\frac{\partial^2 v}{a \partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{a \partial \theta^3} + a \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + a(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - a \phi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\
- a \phi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} - \alpha \left[\frac{\partial^3 v}{a \partial \theta^3} + (2-\nu) a \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \right. \\
+ a^3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{a \partial \theta^4} + 2a \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \left. \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{11.7}$$

如設

$$v = 0, \quad v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{a} = \text{常数}, \quad (e)$$

即可滿足以上的方程。這解表示了圓柱形式的平衡，即受壓的殼在橫向均勻地膨脹。

設 $v = 0$ ，而 u 與 w 只是 x 的函數，就得到另一個解。這樣，我們得到了在 § 11.1 中討論過的對於圓柱的軸對稱的屈曲情形。

現在我們來研究方程(11.7)的通解，設在這些方程中的 u 、 v 、 w 表示偏離上面提到的[方程(e)]圓柱形受壓平衡形式的很小的位移。將坐標原點置於殼的一端，並與以前一樣分別用記號 a 和 l 表示殼的半徑和長度，取方程(11.7)的以下形式的解：

$$\begin{aligned} u &= A \sin n\theta \cos \frac{m\pi x}{l}, \\ v &= B \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ w &= C \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (f)$$

即設屈曲時殼的母綫分為 m 個半波，而圓周分為 $2n$ 個半波。在兩端我們有

$$w = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

這即為簡支邊的条件。這樣所得的結果亦可用於其他的边界条件，因為如果圓筒的長度並不很短（譬如 $l > 2a$ ）¹⁾，這些条件對於临界荷重的大小只有很小的影响。

將表达式(f)代入方程(11.7)，并用記號

$$\frac{m\pi a}{l} = \lambda, \quad (g)$$

我們得到以下諸方程：

1) 实验表明，對於較短的圓筒，边界条件的影响也很小；參閱 L. H. Donnell, *Trans. ASME*, vol. 56, p. 795, 1934.

$$\begin{aligned}
& A \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + B \frac{n(1+\nu)\lambda}{2} + C\nu\lambda = 0, \\
& A \frac{n(1+\nu)\lambda}{2} + B \left[\frac{(1-\nu)\lambda^2}{2} + n^2 + \alpha(1-\nu)\lambda^2 + \right. \\
& \quad \left. + \alpha n^2 - \lambda^2\phi \right] + C[n + \alpha n(n^2 + \lambda^2)] = 0, \quad (h) \\
& Av\lambda + Bn\{1 + \alpha[n^2 + (2-\nu)\lambda^2]\} + \\
& \quad + C[1 - \lambda^2\phi + \alpha(\lambda^2 + n^2)^2] = 0.
\end{aligned}$$

使这些方程的行列式等于零,并略去含有因子 α^2 与 ϕ^2 的高阶小量,我們得到

$$\phi = \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh} = \frac{R}{S}, \quad (i)$$

式中

$$\begin{aligned}
R &= (1-\nu^2)\lambda^4 + \alpha[(n^2 + \lambda^2)^4 - (2+\nu)(3-\nu)\lambda^4 n^2 + \\
& \quad + 2\lambda^4(1-\nu^2) - \lambda^2 n^4(7+\nu) + \lambda^2 n^2(3+\nu) + n^4 - 2n^6], \\
S &= \lambda^2 \left\{ (n^2 + \lambda^2)^2 + \frac{2}{1-\nu} \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) [1 + \alpha(n^2 + \lambda^2)^2] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{2\nu^2\lambda^2}{1-\nu} + \frac{2\alpha}{1-\nu} \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) [n^2 + (1-\nu)\lambda^2] \right\}.
\end{aligned}$$

实验表明(参阅图 11.6),在压缩下,圆柱形薄壳通常屈曲成短的纵向波,因此 λ^2 是个大数值.于是,只保留分子 R 的方括号中的第一项,及分母 S 的第一项,我們可将表达式(i)表示为以下这簡化了的形式:

$$\phi = \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh} = \alpha \frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1-\nu^2)\lambda^2}{(n^2 + \lambda^2)^2} \quad (11.8)$$

当 $n=0$,方程(11.8)与在§ 11.1中得自对称型屈曲的方程(h)相同.

我們得到表达式(11.8)的最小值,当

$$\frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{\alpha}} = \frac{2a}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)}. \quad (j)$$

在这情况下,方程(11.8)給出

$$\phi = \frac{N_x(1-\nu)}{Eh} = 2\sqrt{\alpha(1-\nu^2)},$$

由此

$$\sigma_{cr} = \frac{(N_x)_{cr}}{h} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (11.9)$$

这表明，对于这情形临界应力与圆筒的长度无关且其大小与对称屈曲情形的 [参阅方程(11.1)] 相同。只要我们认为 λ^2 与 n^2 为大数值并认为式(11.8)为 $(n^2 + \lambda^2)^2/\lambda^2$ 的连续函数而决定这式的最小值，则屈曲时周界分为几个圆并不确定。对于任何小于 $2a\sqrt{3(1-\nu^2)}/h$ 的 λ^2 的值，我们可自方程(j)得到相应的 n^2 的值。

对于较短的圆筒，我们不能认为 λ 连续地变化；而对于表达式(11.8)须作另外的讨论。如果圆柱形壳短得使

$$\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 > \frac{2a}{h}\sqrt{3(1-\nu^2)},$$

则屈曲时在轴向只形成半个波，并且式(11.8)的最小值由取 $n=0$ 而得到。即在这情况下，壳的屈曲形式对圆筒的轴线对称。取圆筒的长度愈来愈短，我们可看出，在式(11.8)中的第二项与第一项相比愈来愈小；略去第二项，并以 $n=0$ ，得到

$$\phi = \alpha\lambda^2, \quad (k)$$

运用记号(d)，由上式得到

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)l^2}. \quad (l)$$

这是对于一小条的欧拉公式。

当圆筒的长度使 $(\pi a/l)^2$ 略小于 $2a\sqrt{3(1-\nu^2)}/h$ ，在轴向我们仍有一个半波但 n 不再等于零，而沿周界上将出现几个圆。使表达式(11.8)为最小的圆的个数随圆筒的长度而增加，直至在轴向形成两个半波而屈曲形式又成为对轴线对称为止。随长度的进一步增长，又出现周向圆，以此类推。对于较长的圆筒，在两个相接的 λ 值间压应力的临界值变化很小，并且我们可设这应力总保持等于对称屈曲的长圆筒的临界应力。

这讨论只当 h/a 的比值为很小时才有实用价值, 因为这时临界应力 (11.9) 才小于材料的比例极限。对于较厚的管, 破坏的发生系由于材料的屈服, 而不是由于不稳定。

对于长的圆柱形壳, 我们可预料到母线将屈曲成长波。在这情况下 λ 变得很小。略去表达式 (i) 的分子中所有的 α 与 λ 的平方以上的幂的乘积, 并略去分母中所有 λ 平方以上幂的项, 我们可将这表达式表示为以下的形式:

$$\phi = \frac{(1-\nu^2)\lambda^4 + \alpha\{(n^4 - n^2)^2 + \lambda^2[4n^6 - (7+\nu)n^4 + (3+\nu)n^2]\}}{\lambda^2 n^2 (n^2 + 1)} \quad (m)$$

取 $n = 1$, 从这表达式得到

$$\phi = \frac{1 - \nu^2}{2} \lambda^2,$$

或者运用记号 (d),

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E a^2}{2 l^2}.$$

这即为压杆的欧拉公式, 因为 $a^2/2$ 为薄壁管横截面的迴转半径的平方。当 $n = 1$, 横截面保持为圆形 (参阅 302 页) 而管象压杆一样地屈曲。

当 $n > 1$, 略去表达式 (m) 中的另外的微小项, 我们得到

$$\phi = \frac{(1 - \nu^2)\lambda^2}{n^2(n^2 + 1)} + \frac{\alpha n^2(n^2 - 1)^2}{\lambda^2(n^2 + 1)}. \quad (n)$$

使这式为最小的 λ^2 值为

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{\alpha n^2(n^2 - 1)}}{\sqrt{1 - \nu^2}} = \frac{h n^2(n^2 - 1)}{2a\sqrt{3(1 - \nu^2)}}, \quad (o)$$

而由表达式 (m), 相应的临界应力值为

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}. \quad (p)$$

这应力小于对于对称屈曲所得的, 并且它的最小值 (当 $n = 2$) 为

$$\sigma_{cr} = \frac{3}{5} \frac{Eh}{a\sqrt{3(1 - \nu^2)}}. \quad (11.10)$$

从式 (o) 可以看出, 这屈曲的特点为在轴向有着较长的波¹⁾。

若已知比值 h/a , 即若 α 为已知, 则运用式 (i) 并选一表示屈曲了的壳的圈的个数 n , 即可得到一表示 λ 与 ϕ 之间关系的曲线。在图 11.4 中绘

1) 这些波为 R. V. Southwell 所指出, *loc. cit.*

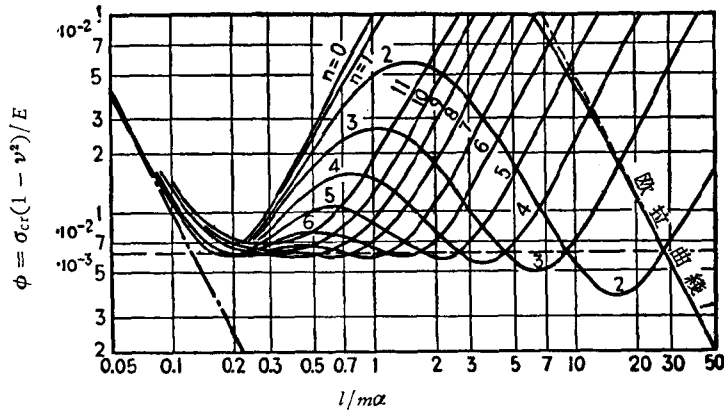


图 11.4

出了这一类的几条曲线¹⁾。取 $l/m\alpha = \pi/\lambda$ 的对数值为横坐标，而取 $\phi = \sigma_{cr} \frac{(1-\nu^2)}{E}$ 的对数值为纵坐标。在左边，这些曲线渐近地趋近于表示小条的屈曲条件的斜线 [方程(1)]。在右边，这些曲线为 $n=1$ 这曲线所限制，这曲线表示壳象压杆似的屈曲。可以看出，对于较短的圆柱形壳，压应力的临界值总接近于对于长圆柱形壳的对称屈曲所计算得的值 (在图中为水平虚线所示)。对于较长的圆柱形壳，在小于对称屈曲时的应力之下，可能发生屈曲成长波并且周向具有为数较少的圈 [方程(p)]。

注意到在均布轴向压缩下一个完善的圆柱形壳将分成个数很多的小波，我们可得结论：对于非圆柱形壳，屈曲将首先发生于壳的曲率最小的部分。例如，对于椭圆形截面的柱状管，屈曲将首先发生于椭圆短轴的两端，并且在式(11.9)中代入较大的曲率半径以代替圆筒的半径 a ，即可得到临界应力的近似值。

§ 11.4. 圆柱形壳轴向受压的实验

由前一节的讨论可以看出，只有很薄的壳才在理论公式可应用的弹性范围内发生屈曲。很自然，实际上所有的早期实验都是用比较厚的管来做的。在纵向受压时，这种管的破坏是由于材料

1) 这些曲线系取自 W. Flügge 的书, Statik und Dynamik der Schalen, Berlin, 1934. 它们是对 $\alpha = h^2/12a^2 = 10^{-5}$ 及 $\nu = 1/6$ 从一与(i)稍异的表达式而计算的。

的屈服,而并非由于屈曲¹⁾。后来,由于薄壳在航空结构中的应用,

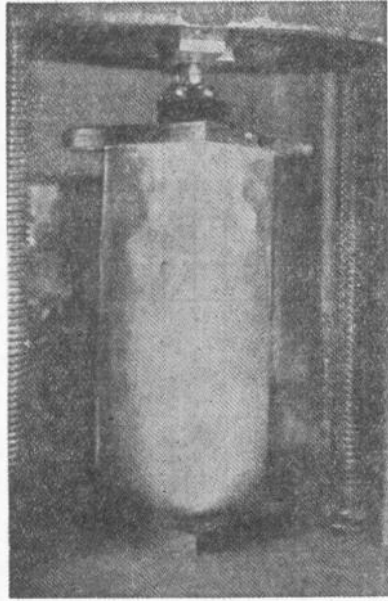


图 11.5

才做了很薄的圆柱形壳轴向受压的实验²⁾。图 11.5 表示在压缩试验机内的一个薄圆柱形壳。为了要使荷重真正作用在中心,用了如图所示的钢球。壳的边焊接于壳两端的板上。由于这附加的约束,边被加劲,于是屈曲通常发生于离两端某些距离之处。在图 11.6 中示出了钢和黄铜的薄圆柱壳的屈曲的几个例子。正如从理论可以预料到的,图中所示尺寸比例的壳将屈曲成较小的波。通常,这些波的波长在轴向和周向是近乎相同的。

在图 11.7 中示出了从这些实验所得的结果。图中以半径与壁的厚度的比值 a/h 作为横坐标,以极限压应力与根据短波所计算得的应力 $Eh/[a\sqrt{3(1-\nu^2)}]$ 之比值作为纵坐标。由硬铝制的壳的实验所得的结果³⁾,在图中以“×”来表示,由钢和黄铜壳所得的结果⁴⁾以“○”表示。可以看出,对于所有的情形,破坏发生于应力远小于理论预测的值,没有一个

- 1) W. Fairbairn 做了第一批管的屈曲试验, *An Account of the Construction of the Britannia and Conway Tubular Bridges*, London, 1849; 并参阅 E. Clark, *The Britannia and Conway Tubular Bridges*, 2 Vols., London, 1850.
- 2) 这类的最早的试验及与理论公式的比较为 Andrew Robertson 所作, *Proc. Roy. Soc., London*, series A, vol. 121, p. 558, 1928. 薄圆柱壳的大量的试验曾为以下两人所作: E. E. Lundquist, *NACA Rept.* 473, 1933; L. H. Donnell, *Trans. ASME*, vol. 56, 1934. 在我们讨论中所给的结果系取自后一论文.
- 3) Lundquist 的试验, *op. cit.*
- 4) Donnell 的试验, *op. cit.*

情形极限应力大于理论值的 60%。显然可以看出, 当比值 a/h 增大时, 极限应力与理论应力的比值减小, 即对于较薄的壳, 实验与理



图 11.6

论有着较大的差异。为了说明这差异, 已经提出了一理论¹⁾; 这理论考虑了对理想圆柱面的原始偏离, 并设挠度并不很小而研究由于这种原始缺陷所引起的壳的弯曲。并设当材料开始屈服时壳就破坏。取原始缺陷为和轴对称屈曲时的波组合²⁾的、在轴向与周向波长相同的波的形式, 发现对于给定的比值 $E/[\sigma_{y.p.} \sqrt{12(1-\nu^2)}]$,

1) 参阅 L. H. Donnell, *ibid.*

2) Donnell 是考虑变形能而选择这样的组合的。应注意, 由于两端的约束阻碍壳在受压时的横向扩张, 总是存在轴对称的(参阅图 11.2)。

极限荷重可表示为半径与厚度的比 a/h 的函数。在图 11.7 中以虚线表示了 $E/[\sigma_{Y.P.} \sqrt{12(1-\nu^2)}] = 165$ 的硬铝壳及 $E/[\sigma_{Y.P.} \sqrt{12(1-\nu^2)}] = 80$ 的钢壳和黄铜壳所计算得的相应的曲线¹⁾。可以看出,这些曲线和试验结果是很好地相符的。

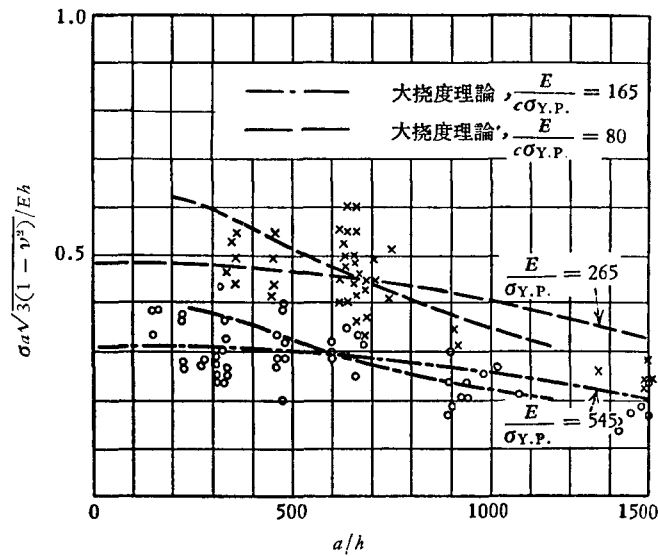


图 11.7

以现有的试验资料为根据, 建立了一个经验公式以计算轴向受压的圆柱形壳的极限强度。这公式计入了比值 a/h 与 $E/\sigma_{Y.P.}$, 并且给出

$$\sigma_{ult} = E \frac{0.6 \left(\frac{h}{a}\right) - 10^{-7} \left(\frac{a}{h}\right)}{1 + 0.004 \left(\frac{E}{\sigma_{Y.P.}}\right)}. \quad (11.11)$$

对于所试验的钢和黄铜的壳 ($E/\sigma_{Y.P.} = 545$) 及硬铝壳 ($E/\sigma_{Y.P.} = 265$), 表明这公式的两曲线亦示于图 11.7 内。

1) 图中用字母 c 代替 $\sqrt{12(1-\nu^2)}$, 这里考虑的是图中两条较陡的曲线。

对理论与实验之间差异的原因作了进一步的研究¹⁾,即研究一理想受压圆柱壳在屈曲以后的性状。如研究板在屈曲以后的性状(参阅 § 9.13)一样,运用方程

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad (a)$$

这与板的方程(8.38)的差别只在于右边的末一项。设屈曲已发生,取一具有几个参数的 w 的表达式并代入方程(a),可得应力函数 F ,并计算中面的应力与应变(参阅 § 8.7)。将它们代入方程(10.15),得曲率的改变。运用方程(10.9)与(10.10),得屈曲壳的总应变能。因已得壳的轴向应变,容易写出外加压力的能量。有了系统的总能量 U ,即可选择所设的 w 的表达式中的参数,以使这能量为最小。在实际计算中²⁾,设屈曲的壳被分为若干周向与纵向的波,而研究其中的一个波。以试验结果为依据,以波的中心为坐标原点,取波的形式如下:

$$\frac{w}{a} = \left(f_0 + \frac{1}{4} f_1 \right) + \frac{1}{2} f_1 \left(\cos \frac{mx}{a} \cos n\theta + \frac{1}{4} \cos \frac{2mx}{a} + \frac{1}{4} \cos 2n\theta \right) + \frac{1}{4} f_2 \left(\cos \frac{2mx}{a} + \cos 2n\theta \right). \quad (b)$$

这表达式包含五个参数,即确定径向位移的三个量 f_0, f_1, f_2 ,及确定波长的量 m 与 n ; $2\pi a/m$ 为纵向的而 $2\pi a/n$ 为在周向的。令能量 U 对 f_0 的导数等于零,得 f_0 的值使周向应力 σ_θ 的平均值为零。为了简化进一步的计算,设值 m/n 为波的**纵横比**(aspect ratio)而值 $\eta = n^2 h/a$ 为周向波的个数。于是由方程

$$\frac{\partial U}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial f_2} = 0, \quad (c)$$

1) 参阅 T. V. Kármán 及 H. S. Tsien, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 8, p. 303, 1941. P. Cicala 用 Ritz 法讨论了这一问题, *Quart. Appl. Math.*, vol. 9, p. 273, 1951. 并参阅 P. M. Finkelstein, *Bull. Acad. Sci. Div. Tech. Sci.*, No. 7, p. 37, 1956 (俄文).

2) Kármán 与 Tsien, *op. cit.*

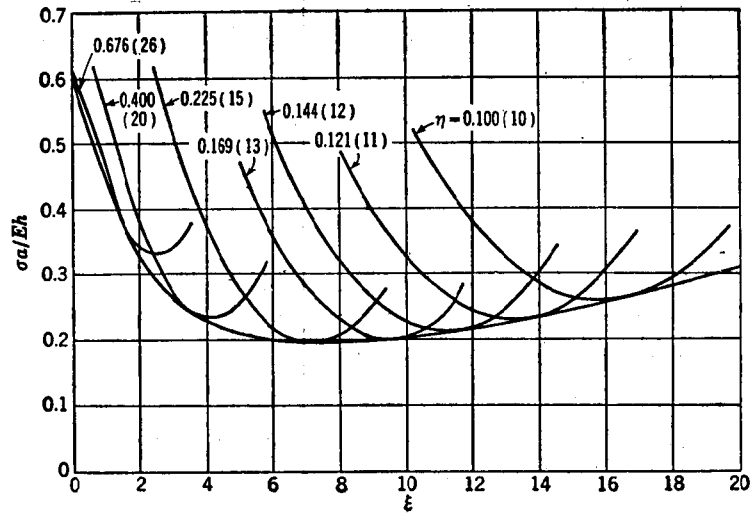


图 11.8

可计算作为压缩力的函数的参数 f_1 与 f_2 。在图 11.8 中示出了对于 $m = n$ 这特殊情形和对于几个 η 值的计算结果。取挠度与壳厚度之比值 δ/h 为横坐标，取与平均轴向压应力成比例的 σ_a/Eh 为纵坐标。在括号内的数目，给出对于不同 η 值时由 $a/h = 1000$ 这情形所计算得的周向波的个数。当 ξ 趋近于零时，方程 (c) 给出 $f_2 = -f_1/2$ ，而表达式 (b) 给出与 § 11.3 中所设的同样的波型¹⁾。对于这情形，我们得

$$\left(\frac{\sigma_a}{Eh}\right)_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (d)$$

这亦与前一节的结果相同。

可以看出，要在理想情况下发生屈曲，必须使压应力等于式 (d) 所给的值；但随着挠度的增大，保持圆柱壳在处于屈曲状态所需的荷重很快地减小，并趋近于理论上所需的屈曲荷重的 1/3。这说明了为什么圆柱壳轴向压缩的实验结果与理论有差异。对于薄

1) 注意，坐标原点不同于 § 11.3 的。

的实验用壳,总存在某些初挠曲和其他缺陷。由于这原因,当荷重甚小时弯曲就开始,并且所产生的挠度值使得只须要远小于理想情况的理论屈曲荷重,屈曲就继续进行。

在进一步研究¹⁾缺陷对屈曲过程的影响时,设圆柱形壳原来就具有如下形式的波:

$$w_0 = a_0 h \left(\cos \frac{m\pi x}{a} \cos n\theta + b \cos \frac{2m\pi x}{a} + c \cos 2n\theta + d \right), \quad (c)$$

并计算作为平均压应力 σ 的函数的柱体的单位轴向缩短 ϵ 。在这些计算中,常数 b, c, d, m, n 应选得使能量为最小。设确定初始缺陷大小的常数 a_0 具有形式

$$a_0 = \lambda_1 \frac{a^2}{h^2 m^{1.5} n^2},$$

式中 λ_1 为一很小的数值因子。图 11.9 中的曲线表示了对于几个 λ_1 值所作计算的结果。在这图中, σ_{cr} 为前一节的方程(11.9)给出的临界应力,而 ϵ_{cr} 为相应的单位缩短。可以看出,很小的缺陷就大大地降低了受压圆柱形壳所能承担的最大荷重。若以实际测量为依据来决定 λ_1 的值,即可用图 11.9 中相应的曲线来决定许可压荷重。

所有这些研究表明:各种缺陷对受压圆筒所能负担的极限荷重值有很大的影响。研究还表明:对于理想圆柱壳所发展的理论研究,只能作为由很多实验为基础来建立经验公式的一个指导而已²⁾。

§ 11.5. 均匀横向外压作用下圆柱形壳的屈曲

在讨论均匀受压的圆环的屈曲时(§ 7.4)曾指出,对于圆环所得的临界荷重的公式,亦可用于承受均布横向压力的自由边圆柱形

1) 参阅 L. H. Donnell 及 C. C. Wan, *J. Appl. Mech.*, vol. 17, p. 73, 1950.

2) 在“Handbook of Structural Stability”及 *NACA Tech. Notes* 3781—3786, 1957—1958 中可得到有关出版物的评述。并参阅 Y. C. Fung 与 E. E. Sechler, *Instability of Thin Elastic Shells*, *Proc. First Symposium on Naval Structural Mechanics*, J. N. Goodier 与 N. J. Hoff 编, pp. 115—168, Pergamon Press, New York, 1960

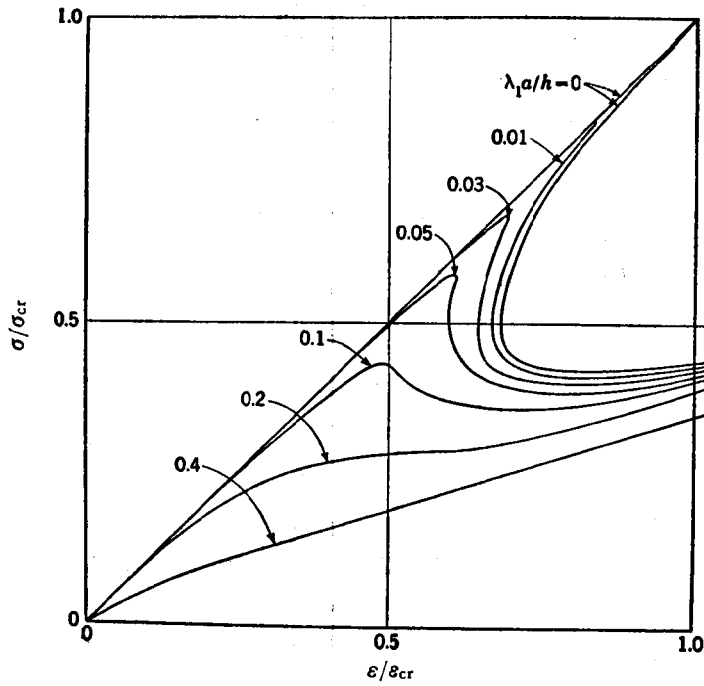


图 11.9

壳。这一公式亦可用于在边上有某些约束的壳，如果壳很长而可以略去边上任何约束所引起的加劲作用的话。如果圆柱的长度与直径相比不很长时，我们就不再能忽视边界条件，而在计算使发生屈曲的横向压力的强度时¹⁾，我们必须用圆柱壳的变形的一般方程(§10.4)。考虑方程(10.13)，我们设对于均匀横向压力除 N_y 外所有的合力均很小，并且略去这些合力与位移 u, v, w 的导数的乘积项。这样，我们得到

1) 这类的最早的研究为以下两人所作：R. Lorenz, *loc. cit.*； R. V. Southwell, *Phil. Mag.*, vol. 25, p. 687, 1913, 与 *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, series A, vol. 213, p. 187, 1914. 临界荷重的更为准确的公式为 R. v. Mises 所创, *Z. Ver. deut. Ingr.*, vol. 58, p. 750, 1914.

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0, \\
\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0, \\
a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_y \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) + qa &= 0.
\end{aligned} \tag{a}$$

我們設在方程(10.14)中的弯矩与扭矩很小, 并略去这些力矩与位移 u, v, w 的导数的乘积。于是为首的两个方程给出

$$\begin{aligned}
Q_x &= \frac{\partial M_{yx}}{a \partial \theta} + \frac{\partial M_x}{\partial x}, \\
Q_y &= \frac{\partial M_y}{a \partial \theta} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{b}$$

代入方程(a), 得到

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0, \\
\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{a \partial \theta} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} + a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{a \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} + \\
+ N_y \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) + qa &= 0.
\end{aligned} \tag{c}$$

方程(c)的一特解, 可得自設在均布外压作用下这圆柱形壳保持其圆形, 而只在圆周方向受均匀压缩, 于是

$$v = 0, \quad w = \frac{a^2 q}{Eh};$$

$$N_x = 0, \quad N_y = -qa, \quad M_x = M_y = M_{xy} = 0.$$

在討論壳的屈曲时, 我們只考虑离开这个均匀受压的平衡形式的小挠曲, 因而方程(c)中的 N_y 与 $-qa$ 这值相差无几, 而可写作

$$N_y = -qa + N'_y,$$

其中 N'_y 为合力 $-qa$ 的一个小的改变, 这改变相应于离开壳的均匀受压的圆柱形状的位移 u, v 和 w 。

我們也将屈曲时壳中面的伸长計算在內, 并在方程(c)的第二

与第三式中分别以 $N_y(1 + \varepsilon_1)$ 和 $q(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$ 代替 N_y 和 q . 注意到

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{a\partial\theta} - \frac{w}{a},\end{aligned}$$

我们将方程(c)表示为以下的形式:

$$\begin{aligned}a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial\theta} + qa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial\theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial N'_y}{\partial\theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{a\partial\theta} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial\theta} + a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{a\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial\theta} &+ \\ + N'_y - q \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{d}$$

运用 § 10.1 的公式及方程(10.15), 可以用位移 u, v 与 w 表示所有的合力与合力矩. 将这些表达式代入方程(d)并运用记号

$$\begin{aligned}\frac{qa(1 - \nu^2)}{Eh} &= \phi, \\ \frac{h^2}{12a^2} &= \alpha,\end{aligned}\tag{e}$$

得到

$$\begin{aligned}a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{2} a \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial\theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + a\phi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial\theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} &= 0, \\ \frac{1 + \nu}{2} a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial\theta} + \frac{1 - \nu}{2} a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} - \frac{\partial w}{\partial\theta} + \\ + \alpha \left[\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial\theta} + a^2(1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] &= 0, \\ a\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial\theta} - w - \alpha \left[\frac{\partial^3 v}{\partial\theta^3} + (2 - \nu)a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial\theta} + \right. \\ \left. + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial\theta^2} \right] &= \phi \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right).\end{aligned}\tag{f}$$

于是，决定横向压力的临界值这问题便归结为解以上这三个微分方程并符合于边界条件。如果壳的边为简支，边界条件要求在两端的 w 与 $\partial^2 w / \partial x^2$ 为零。设圆筒的长为 l 并设 x 系由壳的中央横截面量起，则取

$$\begin{aligned} u &= A \sin n\theta \sin \frac{\pi x}{l}, \\ v &= B \cos n\theta \cos \frac{\pi x}{l}, \\ w &= C \sin n\theta \cos \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \quad (g)$$

作为屈曲时的位移，即得满足边界条件的方程(f)的解。这些表达式表明：屈曲时壳的母线挠曲成正弦曲线的半个波，而周界被分为 $2n$ 个半波。在两端，位移 w 与导数 $\partial^2 w / \partial x^2$ 均为零，这表明了简支边的条件。

在实际情况中，通常在均布荷重 q 作用之先，壳的边已被固结于支座上。因此，除了在我们的讨论中所设的壳的均匀压缩外，还将在两边产生局部弯曲。设支座为绝对刚性，则局部弯曲将如图 11.10 所示的型式。由 § 11.1 的

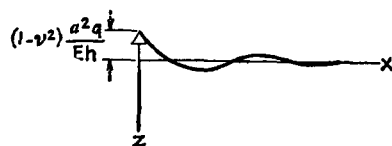


图 11.10

讨论可知，母线的挠度曲线为

$$w = \frac{a^2 q}{Eh} (1 - \nu^2) e^{-\beta x} \cos \beta x,$$

式中

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{a^2 h^2}}.$$

挠度曲线呈迅速衰减的波状，波长为

$$L = \frac{2\pi}{\beta} = 4.90 \sqrt{ah}.$$

对于薄壳，与 a 相比 h 为小量，并且波长通常远小于半径；所以对于长度为半径几倍的圆筒，两边的弯曲可作为一局部因素而对于临界荷重的大小并无严

重的影响。同样,对于固定边,我们可讨论弯矩 M_x 在壳内所产生的弯曲,并可以证明:对于较长的圆筒,对筒支边或固定边的临界荷重并无多大的差别。

将位移的表达式(g)代入方程(f)并运用记号 $\lambda = \pi a/l$, 即得以下诸方程:

$$\begin{aligned}
 & A\left(-\lambda^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2\right) + B\left(\frac{1+\nu}{2}n\lambda + n\lambda\phi\right) + \\
 & \quad + C(\nu + \phi)\lambda = 0, \\
 & A\left(\frac{1+\nu}{2}n\lambda\right) - B\left[\frac{1-\nu}{2}\lambda^2 + n^2 + n^2\alpha + \alpha(1-\nu)\lambda^2\right] - \\
 & \quad - C(n + \alpha n^3 + \alpha n\lambda^2) = 0, \quad (h) \\
 & A(\nu\lambda) - B[n + \alpha n^3 + (2-\nu)\alpha n\lambda^2] - \\
 & \quad - C[1 + \alpha\lambda^4 + \alpha n^4 + 2\alpha n^2\lambda^2 + \phi(1-n^2)] = 0.
 \end{aligned}$$

令 A, B, C 等于零即可满足以上这些方程,这相应于壳的均匀受压的圆形平衡形式。只当由方程(h)得出 A, B, C 的非零解时,才可能有屈曲的平衡形式;这要求这些方程的行列式为零。这样,就得到了决定临界荷重的方程。这方程的形式为

$$\phi(D + E\alpha + F\phi) = G + H\alpha + K\alpha^2, \quad (i)$$

式中的 $D, E, \dots K$ 各为

$$\begin{aligned}
 D &= (1-n^2)(n^2 + \lambda^2)^2 - \nu\lambda^4, \\
 E &= (1-n^2)\left(n^2 + \frac{2\lambda^2}{1-\nu}\right)[n^2 + (1-\nu)\lambda^2] + \\
 & \quad + \frac{1+3\nu}{1-\nu}n^4\lambda^2 + \frac{2+3\nu-\nu^2}{1-\nu}n^2\lambda^4 - \frac{2\nu n^2\lambda^2}{1-\nu} - \\
 & \quad - 2\nu\lambda^4 - \frac{1+\nu}{1-\nu}n^2\lambda^2(\lambda^2 + n^2)^2, \\
 F &= -\frac{1+\nu}{1-\nu}(1-n^2)n^2\lambda^2, \\
 G &= -(1-\nu^2)\lambda^4, \\
 H &= -(n^2 + \lambda^2)^4 + 2n^2\left(n^2 + \frac{3-\nu}{2}\lambda^2\right) \times \\
 & \quad \times [n^2 + (2+\nu)\lambda^2] - [n^2 + (1-\nu)\lambda^2] \times \\
 & \quad \times [n^2 + 2(1+\nu)\lambda^2],
 \end{aligned}$$

$$K = -\lambda^4(n^2 + \lambda^2)[n^2(1 - \nu) + 2\lambda^2].$$

在略去了对临界压力的大小影响极小的微小的项,并将 α , ϕ 与 λ 的表达式代入后,方程(i)可写作以下这形式¹⁾:

$$\frac{(1 - \nu^2)q_{cr}a}{Eh} = \frac{1 - \nu^2}{(n^2 - 1)(1 + n^2l^2/\pi^2a^2)} + \frac{h^2}{12a^2} \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \nu}{1 + n^2l^2/\pi^2a^2} \right). \quad (11.12)$$

当这壳很长时, l/a 为一大数;略去方程(11.12)中分母内包含这比值的平方项,得到

$$q_{cr} = \frac{Eh^3(n^2 - 1)}{12a^3(1 - \nu^2)},$$

用 $n = 2$, 这式即与以前的结果相同[参阅方程(7.15)].

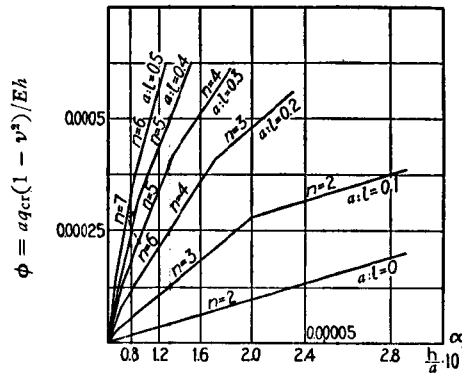


图 11.11

在计算较短的圆筒的临界荷重时,运用先前的记号(e),方程(11.12)表示量 α 与 ϕ 之间的线性关系。对于给定的 l/a 值及选定的数 n , 并以 α 和 ϕ 作为坐标,即得一直线。取 $n = 2, 3, 4 \dots$, 得到一组直线,而对于每一 a/l 的值形成一折线。在图 11.11 中示出了几条这种线。有了这些线,对于每一特定情形即可很容易地决定临界荷重的大小。可以看出,当壳的长度和厚度减小时,壳屈曲成的波

1) 这方程为 R. V. Mises 所得, *op. cit.*

的个数 n 增多了。

运用方程(11.12)所计算得的结果可用另一方式来表示,即以 l/a 的比值为横坐标,以 $(1 - \nu^2)a(q_{cr}/Eh)$ 这量为纵坐标。于是,对于每一 $h^2/12a^2$ 的值,即可得到由对于各种 n 值绘出的曲线部分所组成的一条线。图 11.12 中示出了这一类的几条线¹⁾。这样的表示法与以前在讨论板的屈曲时所用的相同(参阅 § 9.2)。可以看出,对于较短的圆筒,当比值 l/a 减小时临界荷重很快地增加。对于长的圆筒,譬如 $l/a > 50$, 临界荷重与长度无关,而等于方程(7.15)给出的对于无限长圆筒的值。

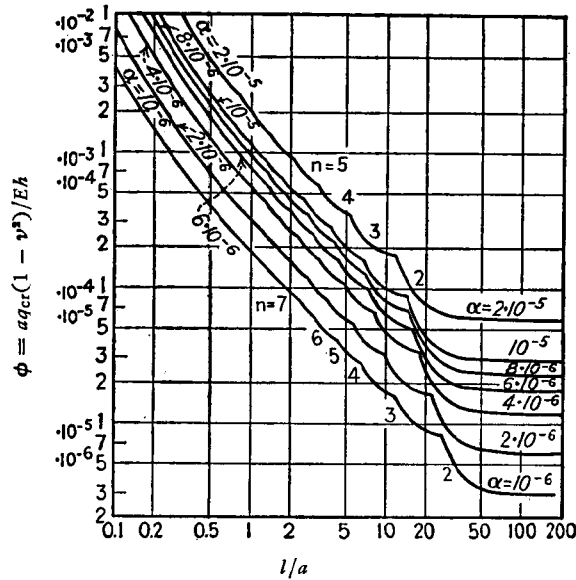


图 11.12

只要所计算得的压应力在弹性范围以内,由方程(11.12)所得的结果就表示临界荷重的正确值。超过了比例极限,方程(11.12)

1) 这些曲线取自 W. Flügge, *loc. cit.* 它们是用与方程(11.12)稍不同的一方程并取 $\nu = 1/6$ 而算出的。计算表明,用所提到的两方程所得的结果相差很小,在实用中可以忽略。

给出偏大的 q_{cr} 值; 要得到良好的结果, 应该用切线模量 E_t , 而不用 E 。当压应力趋近于屈服点应力时, E_t 的值减小得很快, 因此对于有明显的屈服点的材料, 产生屈服点应力的荷重应作为极限荷重。

对于钢的圆柱形壳, 若已知长度与直径之比及选定了一适当的安全系数, 图 11.13 中的曲线可用以¹⁾决定荷重的临界值, 或决定壁所须的厚度。这些曲线的右边部分是用方程(11.12)并取 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米² 及 $\nu = 0.3$ 而计算得的。在左边部分, 我们有相应于压应力等于屈服点应力的一组平行线, 对于现在这情形, 屈服点取得很低——1820 公斤/厘米²。对于别的材料亦可绘出类似的曲线。

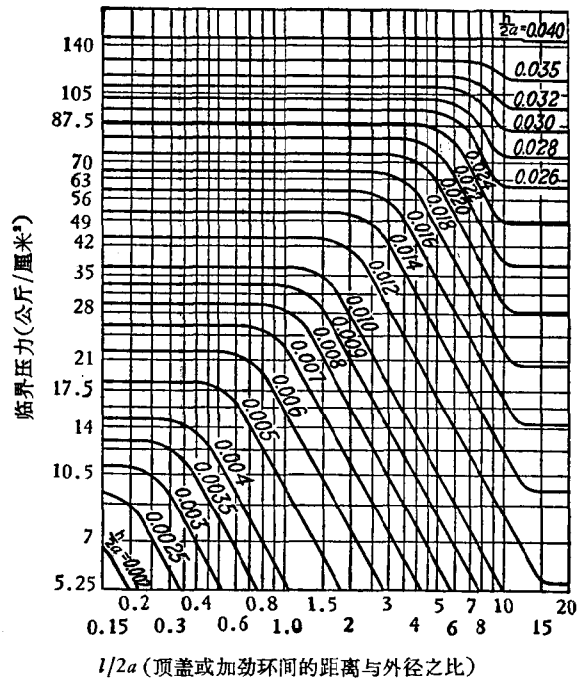


图 11.13

1) 这些曲线已经作成, ASME Research Committee on the Strength of Vessels under External Pressure, December, 1933.

这些曲线不仅可用于简支边的壳,而且亦可用于固定边的壳,因为边的约束方式对 q_{cr} 并无多大影响。这些曲线还可用于用环加劲的长壳,只要这些环的弯曲刚度使得它们可以单独地负担横向荷重而不屈曲。在这情况下, l 为环间的距离。

有初曲率的简支边圆柱形壳亦是有实用价值的。韦司脱加特 (Westergaard) 曾讨论了这类的一特殊情形¹⁾。

对于圆柱形壳在均匀横向压力下的屈曲曾作了大量的实验²⁾。在库克 (G. Cook)³⁾ 的论文中曾给出了一组这类的实验,以及实验结果与苏司韦尔⁴⁾ 的理論的比较。这些实验表明,认为较短的圆筒屈曲成多个圆的苏司韦尔理論,要比卡尔曼 (Carman)⁵⁾ 早期发展出来的公式与实验符合得好。卡尔曼的公式表明较短圆筒的临界压力为

$$q_{cr} = \frac{L}{l} (q_{cr})_0.$$

在这公式中, l 为圆筒长, L 即所谓临界长度(卡尔曼设这临界长度等于直径的六倍),而 $(q_{cr})_0$ 为对无限长圆筒的临界压力。

杜乃尔 (Donnell) 研究了缺陷对临界压力的影响⁶⁾。用与处理轴向受压的圆柱壳相同的方法,得知缺陷造成的临界压力的下降并不象对于轴向压缩这情形那样大。这说明了为什么对于横向压力这情形理論与实验之間较为符合。

§ 11.6. 受弯曲的或偏心受压的圆柱形壳

在 § 11.3 的討論中,我們总設壳受的压力是中心施加的,并且合力 N_x 为一常数。如果压力有偏心,我們將得到圆柱形壳的压缩与弯曲的組合。以 θ 表示軸平面与弯曲平面所成的角度,于是軸

1) H. M. Westergaard, *Reports 4th Intern. Cong. Appl. Mech.*, p. 274, 1934. 并参阅 R. D. Johnson 的论文,于 Engineering Institute of Canada 上宣读, Feb. 9, 1935.

2) Gilbert Cook 曾发表了关于这一课题的参考书目, *Brit. Assoc. Advancement Sci. Repts.*, Birmingham, 1913.

3) 参阅 G. Cook, *Phil. Mag.*, 6th series, vol. 28, p. 51, 1914.

4) Southwell, *loc. cit.*

5) A. P. Carman, *Phys. Rev.*, vol. 21, p. 381, 1905.

6) L. H. Donnell, *J. Appl. Mech.*, vol. 23, p. 569, 1956. 并参阅 G. D. Galletly 和 R. Bart, *J. Appl. Mech.*, vol. 23, p. 351, 1956. 在后一论文中,给出了以环加劲的圆柱壳的新实验的参考资料。

向的合力 N_x 将不再是常量, 而可由以下这公式来表示¹⁾:

$$N_x = -(N_0 + N_1 \cos \theta), \quad (a)$$

式中 N_0/h 为均匀压应力而 N_1/h 为由于弯曲而引起的最大压应力。于是最大压应力为

$$\sigma = \frac{1}{h} (N_0 + N_1). \quad (b)$$

考虑 § 11.3 的方程(11.7), 并注意到 N_x 不再是常量, 可以看出, 我们不再可用 § 11.3 的表达式(f)作为这些方程的解, 而必须用更为一般的表达式:

$$\begin{aligned} u &= \cos \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta, \\ v &= \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin n\theta, \\ w &= \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\theta, \end{aligned} \quad (c)$$

这表明在周向我们不再有简单的正弦波, 而发生较复杂的屈曲形式。由于有了无穷级数, 最大压应力(b)的临界值的计算将比以前大为复杂。这计算²⁾表明, 对于任何比值 N_0/N_1 , 假设屈曲发生于当最大压应力等于对称屈曲时所计算得的临界应力, 我们可得到一良好的近似并且是偏于安全这方面的。于是

$$\frac{1}{h} (N_0 + N_1)_{cr} = \frac{Eh}{a \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (d)$$

在图 11.14 中, 示出了对特殊情形

$$\alpha = \frac{h^2}{12a^2} = 10^{-6}, \quad \nu = \frac{1}{6}$$

的临界应力的精确值与近似值的比较; 其中 $N_0(1-\nu^2)/Eh$ 这量绘作横坐标, 而 $N_1(1-\nu^2)/Eh$ 作为纵坐标。精确计算的结果由实线所示, 而由方程(d)所得的结果以点划线来表示。可以看出, 对

1) 如果是张力, N_x 作为正。

2) 这样的计算曾为 W. Flügge 所作, *Ingr.-Arch.*, vol. 3, p. 463, 1932.

于純弯曲($N_0 = 0$), 精确解給出的临界压应力值比由方程(d)所得的約大 30%。

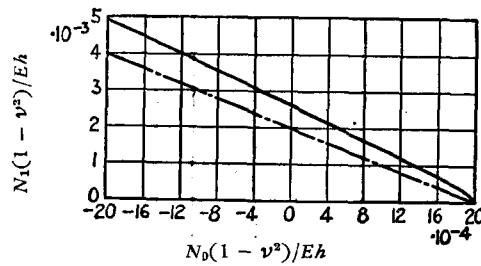


图 11.14

勃拉齐(Brazier)曾討論了薄圓柱壳在弯曲时失穩的一有意义的情形¹⁾。我們知道,薄壁曲管在弯曲时横截面将变为扁平状,并且这样的管将比由通常的曲杆理論所預料的更易弯曲²⁾。这变得扁平的現象亦发生于原来是直的圓筒;这是由于弯曲所产生的曲率所引起的。在弯曲时,横截面变为越来越扁的椭圆直至对弯曲的抗力开始减小;从这以后,当然就发生完全的破坏。这种破坏发生于由弹性模量較低材料所制的厚管,例如橡皮管,以及发生于应力超过了屈服点的厚金属管。对于例如在以前所述的实验中所用的固定边薄金属管,破坏的发生总是由于屈曲成与均匀受压的圓柱形壳的同一类型的小的波所致。在图 11.15 中示出了在弯曲下破坏的几个例子。在图 11.16 中給出了杜乃尔对于薄鋼管和黃銅管的軸向受压和弯曲試驗的結果³⁾。图中以比值 a/h 为横坐标,而以最大压应力(b)与对称屈曲的应力 $Eh/a\sqrt{3(1 - \nu^2)}$ 的比值为纵坐

- 1) 参阅 L. G. Brazier, *Proc. Roy. Soc., London, series A.* vol. 116, p. 104, 1927, E. Chwalla 曾更严格地讨论了这问题, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 13, p. 48, 1933. 并参阅 E. Reissner, *J. Appl. Mech.*, vol. 26, pp. 386—392, 1959.
- 2) Th. V. Kármán, *Z. Ver. deut. Ingr.*, vol. 55, 1911, 及 Timoshenko *Trans. ASME*, vol. 45, p. 135, 1923.
- 3) L. H. Donnell, *Trans. ASME*, vol. 56, 1934. 一组薄硬铝圓柱形壳的类似的試驗曾为 E. E. Lundquist 所作, *NACA Tech. Note* 479, 1933.

标。结果表明，随 a/h 的增大， σ_{cr} 的减小完全与受轴向荷重的试件所示的情形相同。对于所有的 a/h 值，所得的 σ_{cr} 的值约为轴向压缩试验所得的 1.4 倍。

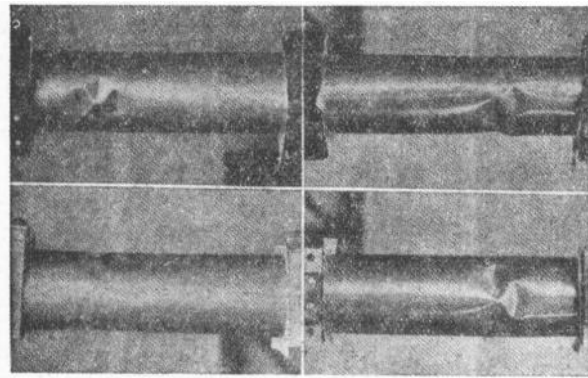


图 11.15

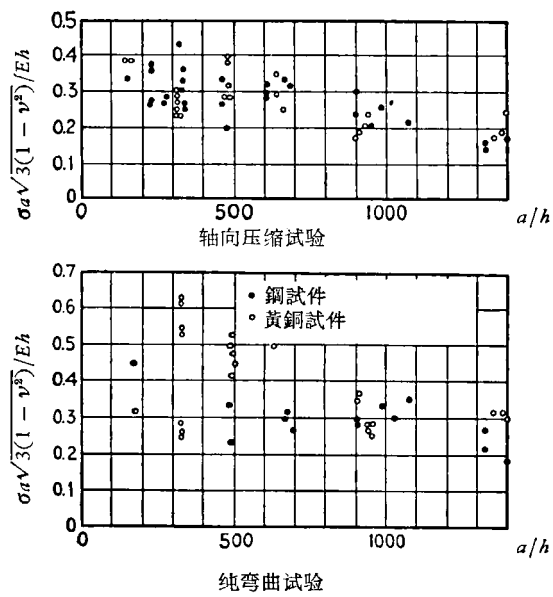


图 11.16

§ 11.7. 曲薄板的軸向壓縮

若一圓柱形壳沿兩母綫及沿兩垂直于圓柱軸綫的圓弧邊被支承，并沿母綫方向均勻受壓(图 11.17)，我們仍可用与軸向受壓的圓筒相同的方法¹⁾(§ 11.3)來計算臨界應力。若 β 为壳的中心角， a

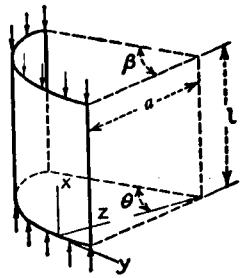


图 11.17

为半径， l 为沿母綫方向的长度，于是，用如图所示的坐标軸，我們取以下諸表达式作为壳屈曲时的位移：

$$\begin{aligned} u &= A \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} \cos \frac{m\pi x}{l}, \\ v &= B \cos \frac{n\pi\theta}{\beta} \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ w &= C \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} \sin \frac{m\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (a)$$

即可滿足边界条件。可以看出，沿壳的边，即当 $x = 0$ ， $x = l$ ，及 $\theta = 0$ ， $\theta = \beta$ ，径向位移 w 与弯矩均为零，正如为簡支边所要求的²⁾。將表达式(a)代入方程(11.7)，得到三个齐次綫性方程。与以前一样，使这些方程的行列式为零，即得決定压应力的临界值的方程。这方程与对于圓筒所得的方程(i)相似(參閱 494 頁)，所不同的只是以 $n\pi/\beta$ 代替了 n 。若中心角并不很小并且长度 l 与 βa 同数量級，我們可預料到，壳將屈曲成大量的縱向和周向的波。于是运用 § 11.3 的記号(g)及方程(11.8)，我們得到以下这方程以計算臨界應力：

$$\phi = \alpha \frac{(n^2\pi^2/\beta^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1 - \nu^2)\lambda^2}{(n^2\pi^2/\beta^2 + \lambda^2)^2}, \quad (11.13)$$

由此可得結論：与以前的薄圓筒的情形一样，臨界應力与圓筒屈曲成軸对称形式情形的相同，并且我們可以取

1) 这問題曾为 Timoshenko 討論过，Theory of Elasticity, vol. 2, p. 395, St. Petersburg, 1916.

2) 注意，沿母綫 $\theta = 0$ 及 $\theta = \beta$ ， v 并不等于零，并且在与壳的中面相切的平面內有周向位移，这相当于壳的边被支承于有些空隙的 V 形槽內。

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (b)$$

若角度 β 很小, 壳屈曲的情况接近于纵向受压的矩形板的情况; 在方程(11.13)中取 $n = 1$, 即得压应力的临界值。于是

$$\phi = \alpha \frac{(\pi^2/\beta^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1-\nu^2)\lambda^2}{(\pi^2/\beta^2 + \lambda^2)^2}. \quad (c)$$

随着壳的半径 a 逐渐增大, λ 亦增大, 并且对于很大的 a 值, 我们可略去表达式(c)中的第二项, 于是得到

$$\phi = \alpha \frac{(\pi^2/\beta^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} = \alpha \left(\frac{\pi^2}{\beta^2\lambda} + \lambda \right)^2. \quad (d)$$

这表达式的最小值发生于当

$$\lambda = \frac{\pi}{\beta} \text{ 或 } \frac{l}{m} = \beta a,$$

即当纵向半波的长度等于曲板的宽度。于是

$$\phi = 4 \frac{\alpha\pi^2}{\beta^2}.$$

注意到

$$\phi = \frac{(1-\nu^2)\sigma_{cr}}{E} \text{ 及 } \alpha = \frac{h^2}{12a^2},$$

我们得到

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\nu^2)(\beta a)^2}. \quad (e)$$

这与我们对长矩形板所得的临界应力的值相同。

保留式(c)中的两项, 可以看出, 如果

$$\beta a \geq 2\pi \sqrt{\frac{a^2 h^2}{12(1-\nu^2)}}, \quad (f)$$

即如果曲板的周向尺寸至少等于壳对称屈曲的半波长的两倍, 则当

$$\frac{\left(\frac{\pi^2}{\beta^2} + \lambda^2\right)^2}{\lambda^2} = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{\alpha}} \quad (g)$$

时 ϕ 成为最小, 于是

$$\phi = 2 \sqrt{\alpha(1-\nu^2)}.$$

将 ϕ 的值 $(1-\nu^2)\sigma_{cr}/E$ 代入, 我們又得到表达式(b)給出的临界应力的值。这表明, 对于符合于条件(f)的曲板的任何寬度 βa 值, 我們可由(g)得到纵向半波的长度 l/m , 使得临界应力等于以前对薄管的对称屈曲所得的。这值应用以設計沿母綫均匀受压的曲板。

若壳的周向尺寸小于(g)所要求的, 則当

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2}{\beta^2}$$

时表达式(c)成为最小。这意味着, 对于相当长的 l , 这样的狭长壳在屈曲时将分成正方形, 如同受压的狭长板一样。由方程(c), 对于这情形临界应力的大小为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\nu^2)(a\beta)^2} + \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \quad (11.14)$$

右边的第一項給出了作为板而計算得的临界应力, 而第二項給出了由于壳的曲率临界应力的增长¹⁾。

圓柱形曲板的軸向受压試驗表明²⁾: 可以写成形式

$$\sigma_{cr} = 0.6E \frac{h}{a}, \quad (11.15)$$

的公式(b)与試驗結果很相符合, 如果这薄曲板的軸向与周向尺寸大致相等并且中心角 β 很小, 譬如 $\beta < 1/2$ 。随着这角度的增大, σ_{cr} 减小; 当 $\beta > 2$, σ_{cr} 約仅为由算式(11.15)所得的一半并接近于薄圓筒实验給出的值(§ 11.4)。

如果 β 很小, 圓柱壳屈曲的情形接近于平面薄曲板的屈曲情况, 并且相似于在 § 9.14 所討論的板的屈曲, 应考虑极限荷重的增大。

1) S. B. Batdorf 与 M. Schilderout 曾研究了周向的中心加劲肋的作用, *NACA Tech. Note* 1661, 1948.

2) J. S. Newell 与 W. H. Gale 曾做了大量的硬铝制筒支曲板的这种实验; 参阅 "A Report on Aircraft Materials Research at the Massachusetts Institute of Technology", 1931—1932. 有些实验数据系发表于 S. C. Redshaw 的论文内, *Aeronaut. Research Comm. Rept. and Mem.* 1565, 1933, 及 H. L. Cox 与 W. J. Clenshaw, *ibid.*, No. 1894, 1941.

§ 11.8. 在剪力或剪力与轴向应力共同作用下的曲薄板

在飞机结构中,曲薄板在纯剪切(图 11.18)作用下的屈曲问题是具有实际意义的。运用与前几节相同的一般方法,计算了长的曲薄板开始屈曲时的临界剪应力 $\tau^{1)}$ 。在图 11.19 中示出了这些值,图中横坐标的值为

$$\sqrt[4]{\omega} = \frac{b}{\pi a} \sqrt{\frac{a}{h}} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)}, \quad (a)$$

式中 a 为圆柱壳的半径, h 为厚度, 而 $b = \beta a$ 为曲板的宽度。纵坐标为比值 τ_{cr}/σ_{cr} , σ_{cr} 值系对宽为 b , 厚为 h 的受压长矩形板所算得[参阅方程(9.7)], 即

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^2}{b^2} \quad (b)$$

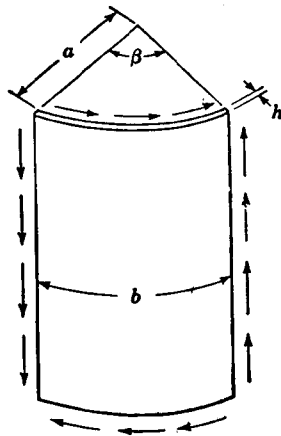


图 11.18

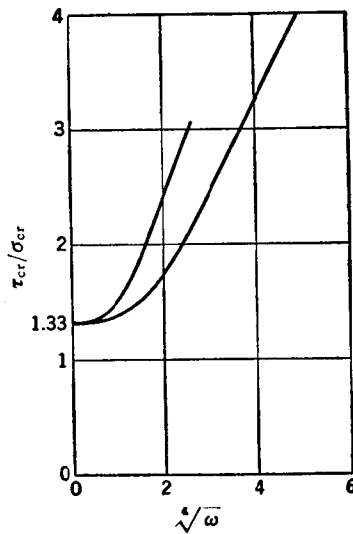


图 11.19

图中有两条曲线。上面这条曲线,是由设在曲板的纵边上周向的位移 ν 为零而计算得的;下面这条曲线,是由设在曲板的纵边上周向的正应力 σ_{θ} 为零而计算得的。对于这两个情形,均设在曲板的

1) 参阅 D. M. A. Leggett, Proc. Roy. Soc., series A, vol. 162, p. 62, 1937.

纵边上径向位移 w 及弯矩均为零。当 $w = 0$ 或 $a \rightarrow \infty$ ，即得平板这情形。这两曲线在纵坐标等于 1.33 处具有同一水平切线；值 1.33 相应于简支边长矩形板条的比值 τ_{cr}/σ_{cr} [参阅方程 (9.7) 与 (9.8)]。对于较大的 w 值，下面这曲线渐近地趋近于 $\tau_{cr}/\sigma_{cr} = 0.80\sqrt[4]{w}$ 这直线；并且，对于较大的 w 值及 $\nu = 0.3$ ， τ_{cr} 的值可由近似公式¹⁾

$$\begin{aligned} \tau_{cr} &= 4.82E \frac{h^2}{b^2} \sqrt[4]{1 + 0.0145 \frac{b^4}{a^2 h^2}} = \\ &= 1.67E \frac{h}{b} \sqrt{\frac{h}{a}} \sqrt[4]{1 + 68.7 \frac{a^2 h^2}{b^4}} \end{aligned} \quad (11.16)$$

来计算。

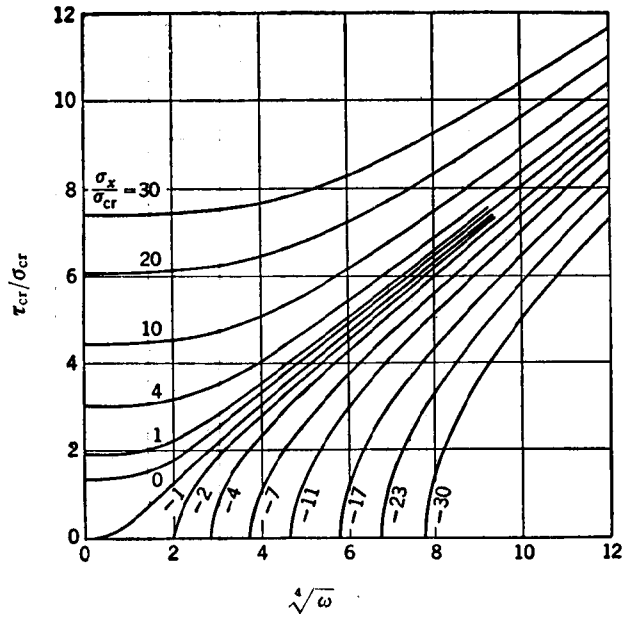


图 11.20

1) 对于在剪力作用下的具有一周向或轴向中心加劲肋这情形，参阅 M. Stein 与 D. J. Yaeger, *NACA Tech. Note* 1972, 1949.

剪切与轴向压缩的组合这问题亦曾被研究过¹⁾。在图 11.20 中的曲线给出了所得的结果。每一曲线相应于压应力 σ_x 与 σ_{cr} 的一定的比值，而 σ_{cr} 系根据方程(b)计算。图中所示的负的比值相应于轴向压缩，而正的比值相应于轴向拉伸。 $\sigma_x/\sigma_{cr} = 0$ 这曲线相应于前面所讨论的纯剪切这情形。在这计算中设曲板的纵边系简支，且在这些边上周向的正应力 σ_θ 为零。这些曲线与水平轴 $\sqrt[4]{\omega}$ [参阅方程(a)]的交点，给出了单由压应力 σ_x 的作用($\tau = 0$)而产生屈曲的 ω 值。这些曲线与铅直轴的交点，给出了狭长平板条对于各种大小纵向拉应力 σ_x 的 τ_{cr} 。

§ 11.9. 在轴向压缩下加劲圆柱壳的屈曲

在讨论受压曲板的屈曲时 (§ 11.7)，曾设加劲肋与框架都是绝对刚性的，因而所得的结果[方程(11.14)] 可用于研究受压的加劲圆筒的局部稳定性。对于具有较易弯曲的纵桁与框架的大圆筒，可能不仅表层而且纵桁与框架均发生屈曲，并且一同形成波。在大型飞机设计中，这类问题是有实际重要性的。

我们首先讨论一最简单的情形，即对圆筒轴线对称的屈曲(图 11.21)。对于这情形，只须研究一个纵桁在轴平面内的屈曲。屈曲时框架保持为圆形，并且在纵桁屈曲时它只是受拉或受压²⁾。以 w 表示纵桁在框架处的挠度，

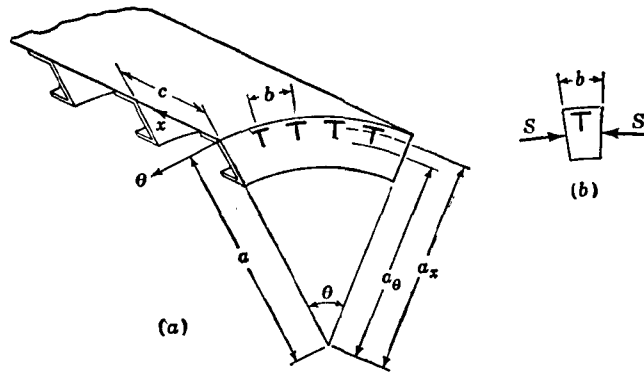


图 11.21

1) 参阅 A. Kromm, *Jahrb. deut. Luftfahrt-Forsch.*, p. 1832, 1940.

2) 设纵桁间的距离 b 与圆筒的半径 a 相比为小量。

于是框架的单位缩短为 w/a_θ ，式中的 a_θ 为框架的中心线的半径。框架内的压力 S 等于 $A_\theta E w/a_\theta$ ，式中的 A_θ 为框架的横截面积。以 b 表示纵桁间距离，于是力 S 间的夹角为 b/a (图 11.21b)；这些力的合力为 $A_\theta E b w/a a_\theta$ ，且阻碍纵桁的挠曲。若框架之间的距离很近，可以沿纵桁连续分布的反力代替这合力；这连续分布反力的强度为

$$q = \frac{A_\theta E b w}{a a_\theta c},$$

式中 c 为框架间的距离。可以看出，屈曲的纵桁与一在弹性基础上的杆的状况相同 (§2.10)；弹性基础的模量为

$$\beta = \frac{A_\theta E b}{a a_\theta c}.$$

若这杆很长，在屈曲时它将分成许多个半波，半波长为 [参阅方程 (2.40)]

$$l_x = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{\beta}},$$

而临界荷重 [参阅方程 (2.41)] 为

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{l_x^2}.$$

将这些方程用于屈曲的纵桁，并以 I_x 表示纵桁连同起作用的部分表层的中心惯性矩，得屈曲纵桁的半波长为

$$l_x = \pi \sqrt[4]{\frac{I_x a a_\theta c}{A_\theta b}}, \quad (11.17)$$

而纵桁的临界荷重值为

$$P_{cr} = 2E \sqrt{\frac{I_x A_\theta b}{a a_\theta c}}. \quad (11.18)$$

在进一步讨论中，将加劲圆柱壳用一个等效的不加劲的圆柱壳来代替是有利的；后者在纵向与周向具有不同的弯曲与拉伸刚度。在讨论这种各向异性壳在轴向上的性质时，对于厚度及半径为 a_x (a_x 为纵桁轴线与圆筒轴间的距离) 的圆的单位长度的惯性矩 (图 11.21)，引入以下记号：

$$h_x = \frac{A_s a}{b a_x}, \quad (a)$$

$$i_x = \frac{I_s a}{b a_x}, \quad (b)$$

式中 A_s 为纵桁的横截面积连同部分起作用的表层的面积。同样，对于周向，我们用记号

$$h_\theta = \frac{A_\theta}{c}, \quad (c)$$

$$i_{\theta} = \frac{I_{\theta}}{c} \quad (d)$$

运用这些记号,可将方程(11.17)与(11.18)表示成如下形式:

$$l_x = \pi \sqrt[4]{\frac{i_x a_x a_{\theta}}{h_{\theta}}}, \quad (11.19)$$

$$p_{cr} = \frac{P_{cr}}{b} \frac{a}{a_x} = 2E \sqrt{\frac{i_x h_{\theta}}{a_x a_{\theta}}}, \quad (11.20)$$

式中 p_{cr} 表示半径为 a_x 的圆的每单位长度的临界荷重。

为了将这些方程用于厚为 h 半径为 a 的各向同性薄圆柱壳,必须令

$$h_{\theta} = h_x = h, \quad a_x = a_{\theta} = a, \quad i_x = \frac{h^3}{12},$$

于是得

$$l_x = \pi \sqrt[4]{\frac{a^2 h^2}{12}}, \quad \sigma_{cr} = \frac{p_{cr}}{h} = \frac{Eh}{a \sqrt{3}}.$$

将这些结果与以前所得的公式(11.2)与(11.1)相比较可知,根号内少了 $(1 - \nu^2)$ 这因子。这是由于在推导方程(11.19)与(11.20)时只考虑了一单独的纵桁,而略去了在周向作用于纵桁的应力。要对于一各向同性圆柱壳计入这些应力,并使方程(11.19)和(11.20)同方程(11.2)和(11.1)相符,只须以表达 $h^3/12(1 - \nu^2)$ 作为 i_x 而不用 $h^3/12$ 。

只当由方程(11.19)所计算得的长度 l_x 与框架间的距离 c 相比很大,使得在一纵桁的半波内将包含不少于三个框架,以上对于对称屈曲所得的结果才是良好的。如果这条件不满足,则以连续分布的反力代替框架的集中反力是不够准确的,而必须将纵桁视作弹性支承上的杆(参阅 § 2.6)。

对于这情形,应首先研究框架须有怎样的横截面积 A_{θ} , 才能防止纵桁屈曲时框架发生弯曲。设有数量很多的等距离的框架,可用方程(2.30)以得到这问题的答案。由于一均匀受压的框架作用于一纵桁的反力为 $A_{\theta} E b w / a a_{\theta}$, 我们必须将

$$a = \frac{A_{\theta} E b}{a a_{\theta}}$$

代入这方程。并且须以框架的间距 c 代替 l/m , 以 $\pi^2 E I / c^2$ 代替 P , 并且 $\beta = 1/4$. 这样,就得到框架必须具有的横截面积:

$$A_{\theta} = \frac{4\pi^2 I_x a a_{\theta}}{b c^3} = \frac{4\pi^2 i_x a_x a_{\theta}}{c^3}. \quad (11.21)$$

如果框架的横截面积小于这值,则必须将纵桁视作在弹性支承上的杆。设屈曲了的纵桁每隔一个框架有一个反曲点,将得如图 2.26 所示的情况,而 P_{cr}

的值可得自这图中的曲线。如果每隔两个框架有一个反曲点,则情况将如图 2.27 所示,并且对于每个 α 值,由这图的曲线 AB 与 BC 可得到 P_{cr} 。

还应注意,在以上这分析方法中,圆筒表层对临界荷重的影响,是由在横截面积 A_s 和 A_θ 中包括入表层起作用的部分(即表层的有效宽度)而计及的。这样的步骤对于对称屈曲是良好的,但对于一般的屈曲情形,应作更深入的研究。

要得到一般屈曲情形的临界压力,我们仍用各向异性圆柱壳的概念。与各向同性壳一样地进行 (§ 11.3), 将得到类似于方程 (11.7) 的三个平衡微分方程。在解这些方程时,设圆筒的长度远大于其直径,并且在两端为简支边。对于位移,取与第 493 页的方程(f)相似的表达式,这些条件可以满足。将它们代入平衡方程,得到三个决定常数的方程; 屈曲圆筒的形状系由这些常数所确定。与以前一样,使这些方程的行列式等于零,便得到计算临界荷重的方程¹⁾。这方程很为复杂,但对于几种特殊的屈曲情形这方程可以简化。对于对称屈曲,这方程给出以上所得的 p_{cr} 的方程。

对于在轴向的半波长 l_x 与周向的半波长 l_θ 同级的屈曲,这方程给出半径为 a_x 的圆的单位长度的临界荷重为如下形式:

$$p_{cr} = \frac{(p_{cr})_{对数}}{Y + A + 1/Y} \left[\sqrt{\left(Y + A + \frac{1}{Y}\right) \left(Y + B + \frac{C}{Y} + F^2\right)} - F \right], \quad (11.22)$$

式中 A, B, C, F 为与结构的尺寸及其弹性性质有关的常数(参阅以下),而 Y 与 $(l_\theta/l_x)^2$ 成比例。对于每一特定情形,必须选择 Y 值使方程(11.22)的右边为最小。这一最小值即为所需的 p_{cr} 值。可以看出,这值与方程(11.20)给出的 $(p_{cr})_{对数}$ 成比例。方程(11.22)中的常数 A 由以下这方程确定:

$$A = \frac{E}{G_r} \sqrt{\frac{h_\theta h_x a_x}{h^2 a_\theta}}, \quad (c)$$

式中的 h 为表层的厚度,而 h_x 与 h_θ 由方程(a)与(c)确定。 G_r 的表达式给于第 450 页。常数 B 由表达式

$$B = \frac{G}{E} \frac{i_{x\theta} a_x^2 + i_{\theta x} a_\theta}{a_\theta^2 i_x \sqrt{h_\theta a_x^3 / h_x a_\theta a^2}} \quad (f)$$

给出,式中, $G_{i_{x\theta}}$ 为半径为 a_x 的圆每单位长度内诸纵桁连同表层的有效部分的扭转刚度, $G_{i_{\theta x}}$ 为沿框架间的距离 c 的每单位长度的框架连同表层的有效部分的扭转刚度。常数 C 为

1) 这研究系由 A. Van der Neut 所作,参阅 *Natl. Luchtvaarlaboratorium Reps.* S. 314, Amsterdam, 1947。以下给出的结果系取自这一论文。

$$C = \frac{i_{\theta} a^3 h_x}{i_x a^3 h_{\theta}}, \quad (g)$$

式中 i_{θ} 为沿框架间的距离 c 的每单位长度的框架横截面积连同表层的有效部分的惯性矩。方程(11.22)中的常数 F 与 Y 这量可得自公式

$$F = \frac{(a - a_x)a_{\theta} + (a - a_{\theta})a}{\sqrt{i_x a_{\theta}^2 / h_x}}, \quad (h)$$

$$Y = \left(\frac{l_{\theta}}{l_x}\right)^2 \sqrt{\frac{h_x a_{\theta} a^2}{h_{\theta} a_x^3}}. \quad (i)$$

对于每一特定情形,我们首先计算常数 A, \dots, F . 将它们代入方程(11.22), 并取几个 Y 值而计算相应的 p 值,即可作出 p 为 Y 的函数的曲线。这曲线的最小纵坐标给出了 p_{cr} 的值。作为选择 Y 的指导,我们注意到,对飞机结构中常有的情形 $F > 0$, Y 的真正值位于 \sqrt{C} 与当 $F = 0$ 时使方程(11.22)右边为最小的 Y 值之间。后一值是很容计算得的。

将方程(11.22)用于各向同性薄壳,我们得到

$$a_x = a_{\theta} = a, \quad h_x = h_{\theta} = h, \quad \frac{E}{G_r} = \frac{E}{G} = 2(1 + \nu),$$

$$i_{x\theta} = i_{\theta x} = \frac{h^3}{3}, \quad i_x = \frac{h^3}{12}.$$

于是,由方程(c)至(i),得到

$$A = 2(1 + \nu), \quad B = \frac{4}{1 + \nu}, \quad C = 1,$$

$$F = 0, \quad Y = \left(\frac{l_{\theta}}{l_x}\right)^2,$$

而方程(11.22)成为:

$$p_{cr} = (p_{cr})_{对壳} \left[\frac{Y + 4/(1 + \nu) + 1/Y}{Y + 2(1 + \nu) + 1/Y} \right]^{1/2}.$$

当 $Y = 1$, 这方程的右边成为最小,于是得到

$$p_{cr} = (p_{cr})_{对壳} \left[\frac{1 + 2/(1 + \nu)}{2 + \nu} \right]^{1/2}.$$

当 $\nu = 0.3$, 这值比以前所得的值[参阅方程(11.9)]约大2%。如果注意到在这两情形中原来的方程已由于略去了认为不重要的项而作了简化,这差异是可以理解的。

现在研究长度 l_{θ} 远大于 l_x 这情形。对于这情形,计算 p_{cr} 的基本方程可表示如下:

$$p_{cr} = (p_{cr})_{\text{对称}} \left[1 - \frac{n^2}{2} \sqrt{\frac{i_x a_b^2}{a^4 h_x}} (A - B + 2F) \right], \quad (11.23)$$

式中, A, B, F 的意义同前, n 表示在周向的波数, 并且由于设 l_0 很大, 故 n 值不能很大. 因子

$$\sqrt{\frac{i_x a_b^2}{a^4 h_x}}$$

很小, 且具有 h/a 的量级. 因此, 方括号内的第二项通常为一小的正数, 而自 1 减去这值, 所得的 p_{cr} 值只稍小于 $(p_{cr})_{\text{对称}}$.

如果纵向波比周向的波长好多倍, 量 Y 就很小, 而计算 p_{cr} 的基本方程成为:

$$p_{cr} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} (p_{cr})_{\text{对称}} \sqrt{C}. \quad (11.24)$$

要得到短的周向的波, n 必须很大. 又若 C 趋近于 1, 则 p_{cr} 值便趋近于 $(p_{cr})_{\text{对称}}$ 值.

所有这些结果都是设圆柱壳的边为简支, 并且径向位移 w 在两端为零. 对于自由边, p_{cr} 值可以很不相同.

因以上所计算得的 p 的临界值通常相应于屈曲成短的周向的波, 这些值亦能够准确地用于圆柱形壳弯曲(参阅 § 11.6)的情形.

§11.10. 在轴向压力与均匀横向压力共同作用下圆柱形壳的屈曲

在机械设计与造船工程中, 有轴向压力和均匀横向压力共同作用于圆柱壳这情形. 在这些力的作用下, 壳可能保持它的圆柱形, 但当压力达到某一临界值时, 圆柱形的平衡形式可能变为不稳定而壳发生屈曲¹⁾. 与以前一样, 如果 u, v 及 w 表示壳在屈曲时离开受压圆柱形位置的微小位移, 则运用对于壳受横向压力情形的方程 (f) (§11.5) 及壳受轴向压缩情形的方程 (11.7), 可写出三个平衡微分方程以决定这些位移. 运用记号

$$\frac{qa(1-\nu^2)}{Eh} = \phi_1 \text{ 及 } \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh} = -\phi_2, \quad (a)$$

这些方程成为:

1) 这问题曾为 R. V. Mises 解出, Stodola-Festschrift, p. 418, Zürich, 1929, 亦曾为 K. V. Sanden 与 F. Tölke 所讨论, Ingr.-Arch., vol. 3, p. 24, 1932; 及 W. Flügge, *ibid.*, vol. 3, p. 463, 1932.

$$\begin{aligned}
& a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} a \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + a \phi_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\
& + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \\
& \frac{1+\nu}{2} a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + \alpha \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \alpha^2 (1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - a^2 \phi_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (b) \\
& \nu a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \alpha \left[\frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + (2-\nu) a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right] = \phi_1 \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \phi_2 a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

設壳的边为簡支,我們用与軸向受压的壳的位移相同的表达式[參閱第 493 頁式(f)],即取

$$\begin{aligned}
u &= A \sin n\theta \cos \frac{m\pi x}{l}, \\
v &= B \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
w &= C \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{l}.
\end{aligned} \quad (c)$$

将这些表达式代入方程(b),得到 A, B, C 的三个齐次綫性方程。使这些方程的行列式等于零,即得用以計算压力的临界值的方程經化簡后,这方程可写作以下这形式¹⁾:

$$C_1 + C_2 \alpha = C_3 \phi_1 + C_4 \phi_2, \quad (d)$$

式中,

$$\begin{aligned}
C_1 &= (1-\nu^2)\lambda^4, \\
C_2 &= (\lambda^2 + n^2)^4 - 2[\nu\lambda^6 + 3\lambda^4 n^2 + (4-\nu)\lambda^2 n^4 + n^6] + 2(2-\nu)\lambda^2 n^2 + n^4, \\
C_3 &= n^2(\lambda^2 + n^2)^2 - (3\lambda^2 n^2 + n^4), \\
C_4 &= \lambda^2(\lambda^2 + n^2)^2 + \lambda^2 n^2;
\end{aligned}$$

1) 这形式的方程系由 W. Flügge 在他的论文中给出, *op. cit.* Flügge 用了与方程组(b)稍不同的方程组,但这差别在最后的方程中只影响次要的那些项。

$$\alpha = \frac{h^2}{12a^2}; \quad \lambda = \frac{m\pi a}{l} \quad (c)$$

如已知壳的大小, 并假设了轴向与周向的半波的个数 m 与 $2n$ 的值, 则方程 (d) 表示决定外压力的 ϕ_1 与 ϕ_2 两量间的某一线性关系。取 ϕ_1 与 ϕ_2 为直交坐标, 方程 (d) 定出了一直线。若保持 m 为常数而使 n 等于 2, 3, 4, ..., 即得一组这种直线。对于一既定的横坐标具有最小纵坐标的诸线段形成了一折线; 这折线可用以决定压力的临界值。在图 11.22 中, 绘出了对于 $\alpha = 10^{-5}$, $\nu = 1/6$ 及各种 λ 值的这种折线¹⁾。

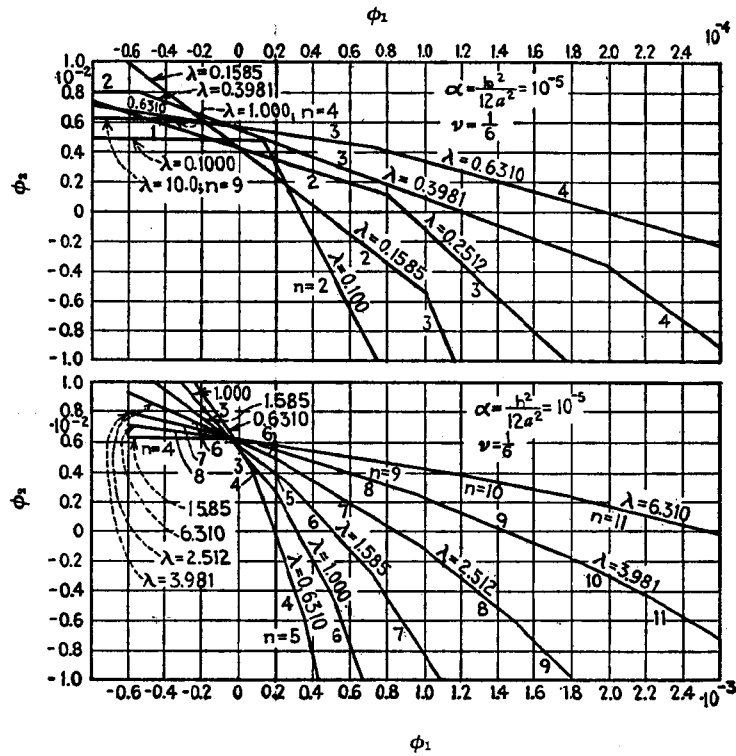


图 11.22

1) 这图系取自 W. Flügge 的论文, *ibid.*

取这些綫与横坐标軸 ($\phi_2 = 0$) 的交点, 得到横向压力单独作用时 ϕ_1 的临界值。可以看出, ϕ_1 与临界压力随 λ 的增加而增加。这表明, 只有横向压力作用时 $m = 1$, 即屈曲了的壳在軸向只有一个半波, 并且, 临界压力随圓筒长度的减小而增加。在周向的波的个数 (用数字注明在图 11.22 中的折綫旁边) 亦随圓筒的減短而增加。这些結論与在 § 11.5 中所述的相同。

取这些折綫与縱坐标軸 ($\phi_1 = 0$) 的交点, 得到軸向压力单独作用时 ϕ_2 的临界值。

对于任何已知的比值 ϕ_1/ϕ_2 , 我們自原点繪一以 ϕ_1/ϕ_2 值为斜率的直綫。这綫与諸折綫的交点决定了 ϕ_1 与 ϕ_2 的相应的临界值。可以看出, 任何軸向压力将降低横向压力的临界值; 而任何横向压力将使軸向压力的临界值降低。

最常見的情形为一两端封閉的圓柱壳承受均匀外压力的情形。对于这情形,

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \phi_1.$$

設壳很薄而只保留方程(d)中的主要項, 即得到对于这情形的横向压力的临界值的以下簡化公式¹⁾:

$$q_{cr} = \frac{Eh}{a} \frac{1}{n^2 + (1/2)(\pi a/l)^2} \times \left\{ \frac{1}{[n^2(l/\pi a)^2 + 1]^2} + \frac{h^2}{12a^2(1-\nu^2)} \left[n^2 + \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \right]^2 \right\}. \quad (11.25)$$

使这表达式为最小并必須用以計算 q_{cr} 的 n 值应取自图 11.23; 图中以长度 l 与直径 $2a$ 的比值作为横坐标, 而以壁的厚度与直径之比作为縱坐标²⁾。

从图 11.23 可以看出, 当圓筒的长度和厚度减小时, 壳屈曲成的周向的圓个数增多了。在材料的弹性范围内, 薄壳的屈曲实验

1) 这个簡化公式为 R. V. Mises 所给出, *loc. cit.*

2) 图 11.23 取自 D. F. Windenburg 与 C. Trilling 的论文, *Trans. ASME*, vol. 56, p. 819, 1934. 注意, 纵轴上的数均乘以 10^{-8} 。

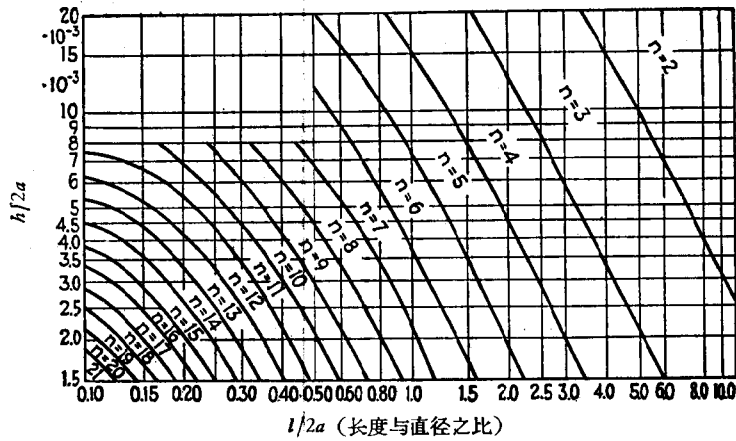


图 11.23 确定圈个数的图

与理论很相符¹⁾。

为等距离的周向环所加劲的圆柱壳的屈曲亦曾被研究过²⁾。相应地增加壳在周向的弯曲刚度及壁的厚度以代替环，并运用各向异性壳的方程，我们得到一与方程(d)相似的方程以计算临界压力。若 A_v 为环的横截面积， EI_y 为圆环和一部分相应的圆筒壁的弯曲刚度³⁾， b 为环之间的距离，在研究周向弯曲时，我们用 EI_y/b 而不用 $Eh^3/12(1-\nu^2)$ ；在考虑周向压缩时，我们用等效厚度 $h_y = h + (A_y/b)$ 而不用 h 。运用记号

$$\frac{I_y(1-\nu^2)}{bha^2} = \alpha_1 \quad \text{及} \quad \frac{h_y(1-\nu^2)}{h} = s, \quad (f)$$

于是决定压力的临界值的方程成为

$$C_1 + C_2\alpha + C_3\alpha_1 = C_4\phi_1 + C_5\phi_2, \quad (g)$$

式中 α , ϕ_1 与 ϕ_2 的意义与前同[参阅记号(a)和(c)]，而系数 C_1, C_2, \dots 为：

$$C_1 = s\lambda^4,$$

$$C_2 = \lambda^6(\lambda^2 + 2n^2) + s\lambda^2 n^2 [2(\lambda^2 - 1)^2 + 2(n^2 - 1)^2 + 5\lambda^2 n^2 - 2],$$

1) H. E. Saunders 及 D. F. Windenburg 的论文中给出了一些实验结果，*Trans. ASME*, vol. 54, p. 263, 1932; D. F. Windenburg. 及 C. Trilling 的论文中亦给出了一些实验结果，*loc. cit.* 并参阅 T. Tokugawa 的论文，*Proc. World Eng. Cong.*, Tokyo, vol. 29, p. 249, 1929.

2) W. Flügge, *loc. cit.*; Sanden 及 Tölke, *loc. cit.*; P. P. Bijlaard, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 24, p. 437, 1957.

3) 这里设环的横截面对壳的中面对称；即环的一半伸入壳内。

$$\begin{aligned}
C_3 &= (n^2 - 1)^2[\lambda^4 + s(2\lambda^2 + n^2)n^2], \\
C_4 &= \lambda^4 n^2 + s(2\lambda^2 + n^2)n^4 - s(3\lambda^2 + n^2)n^2, \\
C_5 &= \lambda^6 + s\lambda^2 n^2(2\lambda^2 + n^2 + 1).
\end{aligned}$$

对于既定的壳和肋条的尺寸及所设的 m 与 n 的值, 我们又得到表示 ϕ_1 与 ϕ_2 间关系的一直线。保持 m 为常数并取 $n = 2, 3, \dots$, 可得到与图 11.22 中的折线类似的折线, 并可计算临界压力。

§ 11.11. 受扭转的圆柱壳的屈曲

对于在两端的扭矩作用下圆柱壳的屈曲, 总剪力 N_{xy} 将变为首要。考虑到这一点, 一般的平衡方程(10.13)可写作以下这简化了的形式¹⁾:

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - a N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_y &= 0, \quad (a) \\
a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + (N_{xy} + N_{yx}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + N_y &= 0.
\end{aligned}$$

在这些方程中代入

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{M}{2\pi a^2} + N'_{xy},$$

式中 M 为所施加的扭矩, $M/2\pi a^2$ 为由于这扭矩而引起的总剪力, 而 N'_{xy} 为这剪力由于屈曲的微小改变。我们将屈曲时中面的伸长亦计算在内, 即在方程组(a)的第一和第二式的第二项中以 $N_{yx}(1 + \epsilon_1)$ 和 $N_{xy}(1 + \epsilon_2)$ 代替 N_{yx} 和 N_{xy} 。于是, 略去 N'_{xy} 的导数和位移 u, v, w 的乘积, 得到

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial \theta} + \frac{M}{2\pi a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &= 0, \\
\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N'_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{M}{2\pi a^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_y &= 0, \\
a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_y + 2 \frac{M}{2\pi a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) &= 0.
\end{aligned}$$

1) 在这里, 与以前一样, u, v 与 w 为受扭壳离开圆柱形平衡位置的微小位移。除 N_{xy} 外, 所有的力和力矩与 u, v, w 的导数的乘积均已略去。

在这些方程中代入[参阅 § 10.1 及方程(10.15)]

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right], \\
 N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right], \\
 N'_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right); \\
 M_x &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right], \\
 M_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right], \\
 M_{xy} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right),
 \end{aligned}$$

并运用记号

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{h^2}{12a^2}, \\
 \phi &= \frac{M(1-\nu^2)}{2\pi a^2 Eh} = \frac{\tau(1-\nu^2)}{E},
 \end{aligned} \tag{b}$$

我們得到

$$\begin{aligned}
 &a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 &\quad + \phi a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0, \\
 &\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
 &\quad + \alpha \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + a^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right] + \\
 &\quad + \phi a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\
 &\frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} - w - \\
 &\quad - \alpha \left[a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + (2-\nu)a^2 \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right] + 2\phi a \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{c}$$

于是，圆柱形壳在扭矩作用下的屈曲问题便归结为这三个方程的积分¹⁾。这些方程和我们以前讨论的横向或轴向压缩的圆筒的方程之间，有着根本的差别。这差别在于：在同一方程中，有着位移对于同一个自变量的偶数次及奇数次导数。这表明，我们不再能用正弦和余弦的乘积形式的解来满足方程；在物理意义上，这意味着屈曲时母线均不再保持为直线，不再形成具有一组直的节线的屈曲面。在扭转时，我们可以预期到螺旋形的节线，而如果取以下诸表达式作为位移：

$$\begin{aligned} u &= A \cos\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right), \\ v &= B \cos\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right), \\ w &= C \sin\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right), \end{aligned} \quad (d)$$

这条件是可以满足的，与以前一样， a 为圆柱的半径， l 为长度， n 为在圆周方向的波的个数，并且

$$\lambda = \frac{n\pi a}{l}.$$

相应的屈曲形状为具有 n 个螺旋地绕着圆柱的周向波；相应的螺旋线的螺距 L 可得自条件

$$\frac{\lambda L}{a} = 2\pi n,$$

由此

$$L = \frac{2a\pi n}{\lambda}.$$

关于两端的条件，我们首先设这圆柱很长，以致两端的约束对于临界应力无大影响，因此可不予考虑。将表达式(d)代入方程(c)，得到

1) E. Schwerin 最先研究圆柱壳的扭转屈曲，参阅 *Repts. Intern. Congr. Appl. Mech.*, Delft, 1924 及 *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 5, p. 235, 1925.

$$\begin{aligned}
& -A \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 - \lambda \phi n \right) + B \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda n + \lambda^2 \phi \right) - C \nu \lambda = 0, \\
& A \frac{1+\nu}{2} \lambda n - B \left[n^2(1+\alpha) + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2(1+2\alpha) - 2\phi \lambda n \right] + \\
& \quad + C n \left(1 + \alpha n^2 + \alpha \lambda^2 - 2\phi \frac{\lambda}{n} \right) = 0, \quad (c) \\
& A \lambda n - B n \left[1 + \alpha n^2 + (2-\nu) \lambda^2 \alpha - 2\phi \frac{\lambda}{n} \right] + \\
& \quad + C [1 + \alpha(\lambda^2 + n^2)^2 - 2\phi \lambda n] = 0.
\end{aligned}$$

仅当这三个齐次线性方程的行列式为零时, A, B, C 才有非零解。令这行列式等于零, 并略去¹⁾包含 $\alpha^2, \alpha\phi, \alpha^3, \phi^2$ 及 ϕ^3 的项, 得到

$$\phi = \frac{R}{S}, \quad (f)$$

式中

$$\begin{aligned}
R &= \lambda^4(1-\nu^2) + \alpha[2\lambda^4(1-\nu^2) + (\lambda^2 + n^2)^4 + \\
& \quad + (3+\nu)\lambda^2 n^2 - (2+\nu)(3-\nu)\lambda^4 n^2 - \\
& \quad - (7+\nu)\lambda^2 n^4 - 2n^6 + n^4], \\
S &= 2\lambda n^5 - 2\lambda n^3 + 4\lambda^3 n^3 - 2\lambda^3 n + 2\lambda^5 n.
\end{aligned}$$

对于 m 与 n 取某些整数, 从这表达式可计算相应的 ϕ 值。

从 $n=1$ 开始。对于这情形, 正如由表达式(d)可以看出, 圆筒的横截面保持为圆形, 在屈曲时只在它自己的平面内运动(参阅 302 页)。对于 $n=1$, 表达式(f)成为

$$\phi = \frac{\lambda^4(1-\nu^2) + \alpha\lambda^4[\lambda^4 + 4\lambda^2 + (2+\nu)(1-\nu)]}{2\lambda^3(\lambda^2 + 1)}. \quad (g)$$

略去分子中有作为小量的因子 α 的项, 得到

$$\phi = \frac{\lambda(1-\nu^2)}{2(\lambda^2 + 1)}. \quad (h)$$

要使这样的屈曲发生于弹性极限以内, ϕ 必须非常小 [参阅记号

1) 由记号(b)可以看出, α 与 ϕ 为小量, 因在弹性极限以内的屈曲只可能发生于很薄的壳, 因此 h^2/a^2 很小; 量 τ/E 亦很小。

(b)]; 因此 λ 亦必須很小¹⁾, 与 1 相比略去 λ^2 , 于是

$$\phi = \frac{1}{2} \lambda(1 - \nu^2). \quad (i)$$

当屈曲时圓筒在軸向只形成了一个完全的波, 即, 由表达式(d), 当

$$\frac{\lambda l}{a} = 2\pi, \quad \text{即} \quad \lambda = \frac{2\pi a}{l} \quad (j)$$

时, 我們得到 λ 的最小值. 代入(i), 得到

$$\phi = \frac{\pi a(1 - \nu^2)}{l},$$

并运用記号(b),

$$M_{cr} = \frac{2\pi^2 a^3 E h}{l}. \quad (11.26)$$

注意到 $2\pi a^3 h$ 为圓筒橫截面的极慣性矩, 可以看出, 所得的結果与格林希尔 (Greenhill) 对于細的长杆在扭轉时側向屈曲的解完全一致[参閱方程(2.74)].

若在表达式(f)中取 $n = 2$, 得到

$$\phi = \{\lambda^4(1 - \nu^2) + \alpha[\lambda^8 + 16\lambda^6 + \lambda^4(74 - 4\nu + 2\nu^2) + \lambda^2(156 - 12\nu) + 144]\} / \{4(\lambda^5 + 7\lambda^3 + 12\lambda)\}. \quad (k)$$

在这表达式中取 $\lambda = 1$, 我們得到一很大的 ϕ 值. 若設 λ 很小或很大, 可得到較小得多的 ϕ 值. 計算表明, 二个假設中設 λ 很小时給出的 ϕ 值較小. 采用这一假設并只保留表达式(k)中的主要項, 得到

$$\phi = \frac{\lambda^4(1 - \nu^2) + 144\alpha}{48\lambda}. \quad (l)$$

現在可由 ϕ 为最小这条件来决定 λ . 于是,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \frac{3\lambda^2(1 - \nu^2)}{48} - \frac{3\alpha}{\lambda^2} = 0,$$

由上式,

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{48\alpha}{1 - \nu^2}} = \sqrt{\frac{2h}{a\sqrt{1 - \nu^2}}};$$

1) 我們所考慮的屈曲情形要求大的 l/a 值; 所以大的 λ 值不在讨论之列.

代入方程(1),得到

$$\phi = 2\sqrt{\frac{a^3}{3}(1-\nu^2)},$$

用了記号(b),

$$M_{cr} = \frac{\pi\sqrt{2}E}{3(1-\nu^2)^{3/4}}\sqrt{ah^5},$$

并且

$$\tau_{cr} = \frac{M_{cr}}{2\pi a^2 h} = \frac{E}{3\sqrt{2}(1-\nu^2)^{3/4}}\left(\frac{h}{a}\right)^{3/2}. \quad (11.27)$$

以 $n > 2$ 所計算得的 τ_{cr} 值永远大于以 $n = 2$ 所得的¹⁾, 因此, 总須用公式(11.27)来計算受扭的长圓柱壳的临界应力.

对于較短的圓筒, 兩端的条件必須加以考虑, 并且决定临界应力的問題变得更为复杂. 一般的步骤如下: 将方程(f)作为一个 λ 的八次方程. 假設某些 ϕ , a 与 n 的值, 我們得到这方程的八个根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$, 将它們代入表达式(d), 便得到八个相应的基本解. 将这些解迭加, 位移的表达式成为:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^8 A_i \cos\left(\frac{\lambda_i x}{a} - n\theta\right), \\ v &= \sum_{i=1}^8 B_i \cos\left(\frac{\lambda_i x}{a} - n\theta\right), \\ w &= \sum_{i=1}^8 C_i \sin\left(\frac{\lambda_i x}{a} - n\theta\right). \end{aligned} \quad (m)$$

关于常数 A_i, B_i, C_i , 应注意: 对于方程(f)的任何根 λ_i , 我們从方程(e)得到 A_i/C_i 及 B_i/C_i 的一定的比值. 所以在表达式(m)中只有八个独立的常数. 我們有八个边界条件以决定这些常数; 在圓筒的每一端各有四个条件. 例如設兩端为簡支, 对于每一端我們有

$$u = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0. \quad (n)$$

1) 这样的計算曾为下列兩人所作: E. Schwerin, *loc. cit.*; W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, Berlin, 1934.

对于固定边,在每一端我們有

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (o)$$

将表达式(m)代入边界条件,我們得到八个齐次綫性方程。令这些方程的行列式等于零,最后得到一方程以計算与所設的 ϕ , α , n 值相应的圓筒的长度 l 。对于大量的所設的 ϕ , α 与 n 的值重复这样的計算,可以繪出表示临界应力为壳的几何尺寸的函数的曲綫。

但是,这样計算需要极大的工作量;为使問題的复杂性减小,杜乃尔曾建議了几种簡化方法¹⁾。他指出,在方程組(c)的为首的两个方程中,所有包含 α 或 ϕ 作为因子的項可以略去;而在第三个方程中,只保留包含有因子 α 或 ϕ 的 w 的导数項。这样,方程(f)亦被大大地簡化。再在边界条件方面略去在壳两端 $u = 0$ 这一要求,可得进一步的簡化。于是,由只保留表达式(m)的总和中的四項,并以一四次的近似方程代替簡化了的 λ 的八次方程(f),其余的边界条件可以滿足。这样,边界条件与計算临界应力的行列式,就化为与在剪力作用下一无限长薄条的屈曲問題相同的形式;如苏司韦尔与司刚(Skan)所討論²⁾。由于所有这些簡化的結果,杜乃尔得到了如下的对于短壳和中等长度壳的公式:对于固定边,

$$(1 - \nu^2) \frac{\tau_{cr}}{E} \frac{l^2}{h^2} = 4.6 + \sqrt{7.8 + 1.67 \left(\sqrt{1 - \nu^2} \frac{l^2}{2ah} \right)^{3/2}}; \quad (11.28)$$

对于簡支边,

$$(1 - \nu^2) \frac{\tau_{cr}}{E} \frac{l^2}{h^2} = 2.8 + \sqrt{2.6 + 1.40 \left(\sqrt{1 - \nu^2} \frac{l^2}{2ah} \right)^{3/2}}. \quad (11.29)$$

为了校核这些公式,曾做了約 50 个試驗,其結果連同其他实

1) L. H. Donnell, *NACA Rept.* 479, 1933. 关于簡化方程的准确性的讨论,参阅 J. Kempner, *J. Appl. Mech.*, vol. 22, p. 117, 1955, 及 N. J. Hoff, *ibid.*, vol. 22, p. 329, 1955. 关于將簡化方程用于其他荷重作用情形,参阅 S. B. Batdorf 的论文, *NACA Tech. Notes* 1341 及 1342.

2) S. W. Skan 与 R. V. Southwell, *Proc. Roy. Soc., London*, series A, vol. 105, p. 582, 1924.

驗者¹⁾所得的結果均繪于图 11.24 中。可以看出，所有的試驗給出的破坏应力均略低于理論公式所算得的临界应力的值。

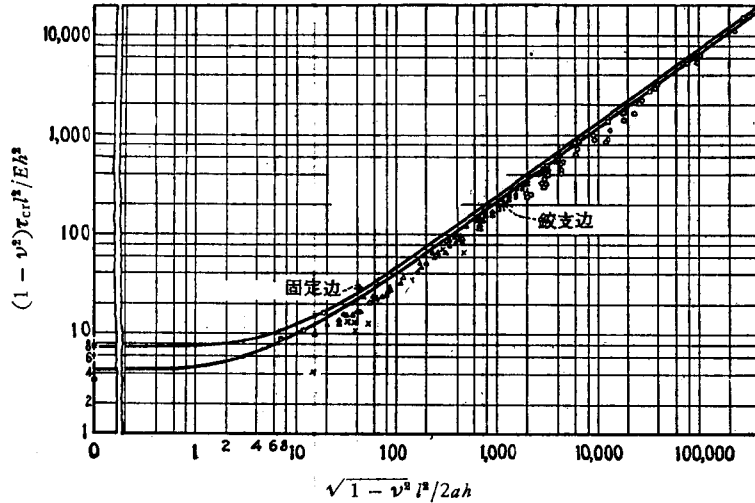


图 11.24

- 理論曲线
- 根据:
- 鋼 } Donnell 的試驗
 - 黃銅 } 极限荷重
 - △ 硬鋁, Lundquist (NACA)
 - × 橡皮, Sezawa 与 Kubo——作用的最大荷重
 - 賽璐珞 (83个試驗的平), Bollenrath——波纹开始时的荷重
 - 硬鋁 } 均值
 - 黃銅 }
 - + 鋼, Gough 与 Cox, 无原始偏心下所計算得的屈曲荷重

对于簡支边, 更詳尽的研究²⁾給出以下这方程:

$$\tau_{cr} = 4.39 \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{h^2}{l^2} \sqrt{1 + 0.0257(1 - \nu^2)^{3/4} \left(\frac{l}{\sqrt{ah}}\right)^3}, \quad (11.30)$$

1) 参阅 E. E. Lundquist, *NACA Tech. Note* 427, 1932; Katsutada Sezawa 及 Kei Kubo. *Tokyo Imp. Univ., Rept.* 76, vol. 6, 1931. F. Bollenrath, 及 Gough 与 Cox 所做的实验系关于平板条的屈曲; 前者发表于 *Luftfahrt-Forsch.*, vol. 6, p. 1, 1929, 后者发表于 *Proc. Royal Soc., London*, series A, vol. 137, p. 145, 1932. 并参阅 W. A. Nash, *Soc. Exptl. Stress Anal.*, vol. 16, p. 55, 1959.

2) 参阅 Kromm, *loc. cit.*

以代替公式(11.28)。在图 11.25 中，示出了这方程与方程(11.28)的比较。图中 σ_{cr} 与 ω 定义如下：

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^2}{l^2}, \quad (p)$$

$$\omega = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{l^4}{a^2 h^2}. \quad (q)$$

可以看出，方程(11.30)给出比方程(11.28)略低的 τ_{cr} 值。

对于较长的圆筒，例如

$$\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{l^2 h}{(2a)^3} > 7.8, \quad \text{对于固定边；}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{l^2 h}{(2a)^3} > 5.5, \quad \text{对于简支边，}$$

在计算临界应力时，推荐用以前对于很长的圆筒所得的公式。

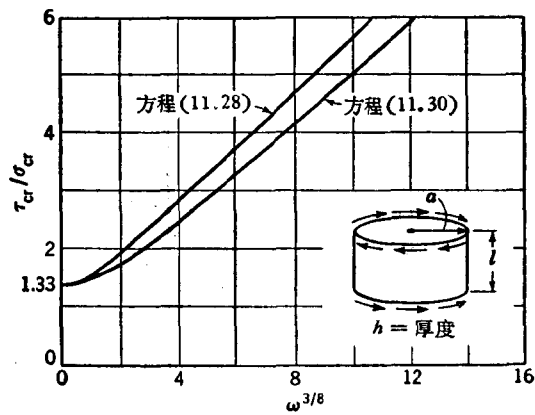


图 11.25

关于圆筒屈曲时在周向所形成的波的个数，实验与简化了的理论极为相符。

图 11.26 表示杜乃尔在他的扭转、扭转与弯曲的组合及扭转与压缩的组合试验中所用的机器。这三种荷重用三个适当设置的曲柄来施加。荷重的大小可直接由标度盘的刻度读出。图 11.27 表示一扭转屈曲的圆筒。

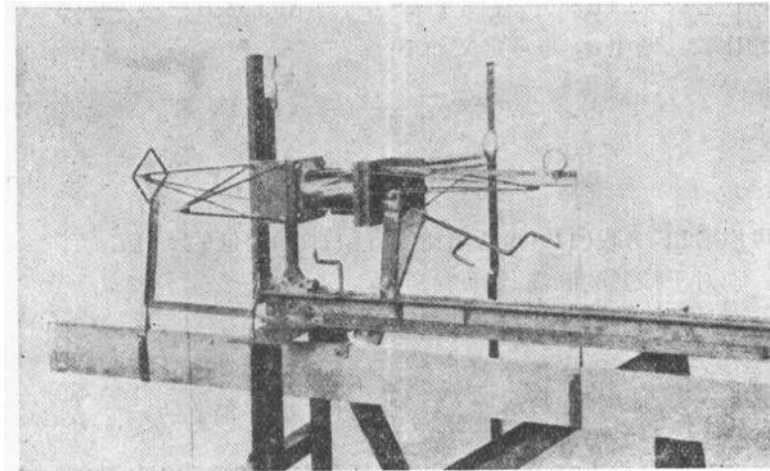


图 11.26

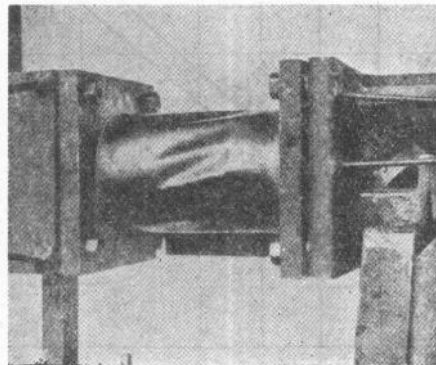


图 11.27

纵向拉伸或压缩与扭转的组合问题,亦在理论上研究过¹⁾。所得的结果示于图 11.28 内。图中的曲线是对各种 $\sqrt{\omega}$ 值而计算的,其中 ω 由表达式(q)定义。 $\omega = 0$ 这情形相应于受剪切并受均

1) 参阅 Kromm, *loc. cit.* 并参阅 S. B. Batdorf, M. Stein 及 M. Schildcrout 的论文, *NACA Tech. Note* 1345, 1947.

勻橫向拉伸或壓縮的長矩形板條¹⁾。橫坐標為比值 σ_x/σ_0 ，其中[參閱方程(11.1)]

$$\sigma_0 = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{a};$$

縱坐標為比值 τ/τ_0 ，其中 τ_0 為按方程(11.30)計算的純剪切的臨界應力。

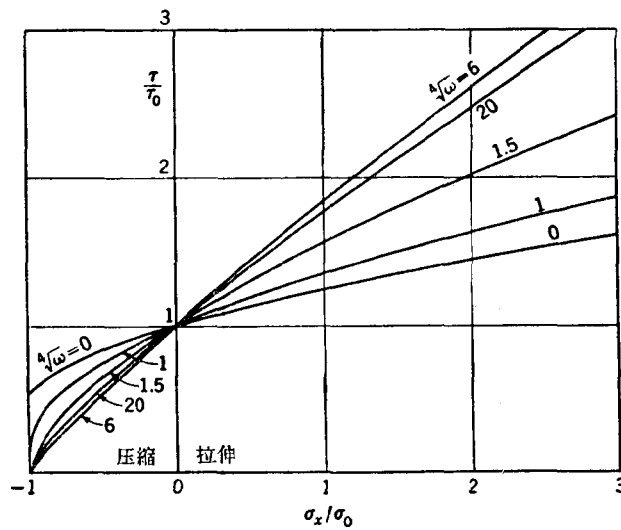


圖 11.28

圓柱形殼的扭轉實驗，並不顯示出突然的屈曲，或者象軸向受壓時那樣對於各種初始缺陷很敏感。相似於對軸向壓縮所作的理論研究²⁾，並不表明在屈曲後的變形過程中扭矩迅速地減小。

§ 11.12. 錐形殼的屈曲

受壓的錐形殼的屈曲的一般情形，是個複雜的數學問題³⁾。下述特殊情形的解已經得到，即殼的厚度 h 與曲率半徑 r 成比例

- 1) 這情形曾由 C. Schmieden 所討論，*Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 15, p. 278, 1935.
- 2) Tsu-Tau Loo, *Proc. 2d U. S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, Ann Arbor, p. 345, 1954.
- 3) 參閱 A. Pflüger, *Ingr.-Arch.*, vol. 8, p. 151, 1937.

(图 11.29), 即

$$h = h_1 \frac{r}{r_1}, \quad (a)$$

式中的 h_1 为锥壳底部的厚度。设锥壳承受均布铅直荷重 q 的作用, 则得膜力(membrane forces)的值

$$N_x = -\frac{qr}{2 \cos \alpha}, \quad N_\theta = -qr \cos \alpha, \quad (b)$$

其中 N_x 作用于母线方向, 而 N_θ 作用于周向。分别以 u 与 v 表示屈曲时在这两个方向的位移, 而以 w 表示垂直于壳面的位移。与以

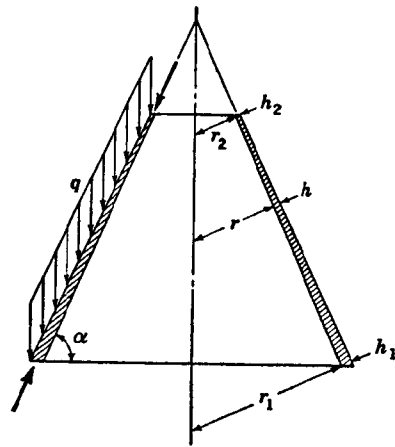


图 11.29

前一样, 可写出包含三个未知函数 u , v 与 w 的三个平衡方程。若壳的边可自由移动, 我们取这些方程的如下形式的特解:

$$\begin{aligned} u &= A \left(\frac{r}{r_1} \right)^m \cos n\theta, \\ v &= B \left(\frac{r}{r_1} \right)^m \sin n\theta, \quad (c) \\ w &= C \left(\frac{r}{r_1} \right)^m \cos n\theta, \end{aligned}$$

式中的 m 与 n 为参数, 它们应选得使屈曲荷重为最小。

将方程 (c) 代入平衡方程, 得三个齐次线性方程以计算常数 A , B 与 C 。只当它们的行列式为零时, 这些方程才给出非零解。这就得出了计算临界荷重的方程。这方程可写作下述简化了的形式:

$$aq_1 = b + ck_1, \quad (d)$$

式中

$$q_1 = q \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{r_1}{h_1}, \quad k_1 = \frac{h_1^2}{12r_1^2}, \quad (e)$$

若已知壳的几何尺寸与弹性常数, 并假设了参数 m 与 n 的值, 则量

a, b, c 为可以被计算的表达式。初步的研究表明：要使屈曲荷重为最小，应取 $m = 2$ 。然后取各种 n 值并对各种尺寸比例的壳作计算，由方程(d)便可得出结果，并在图 11.30 中以曲线¹⁾表示了这些结果。运用这些曲线，对于已知的角度 α 及量 k_1 的值，可得相应的 q_1 与 q 的屈曲值。对于 $\sigma_{Y.P.} = 1970$ 公斤/厘米² 的结构钢，弹性屈曲的范围由虚线表出。

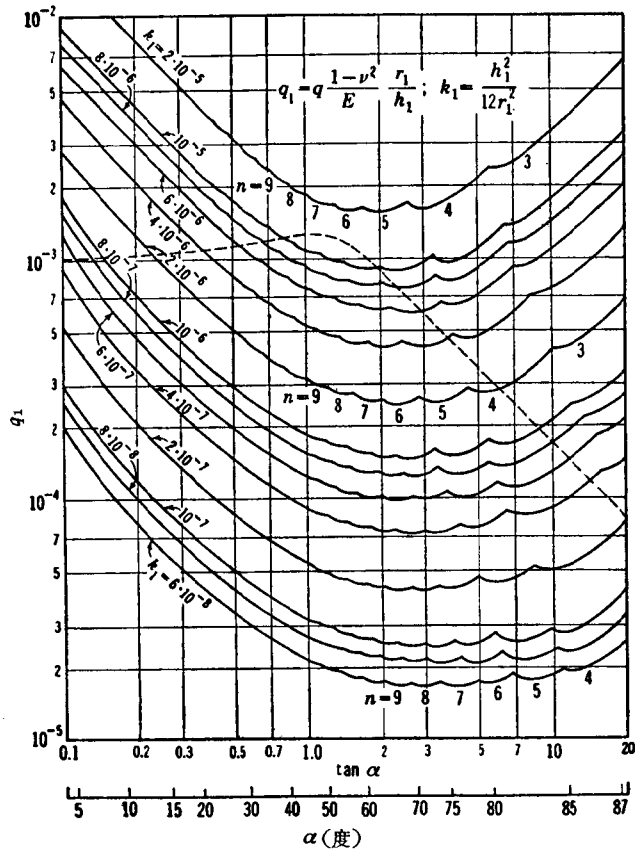


图 11.30

1) 这些曲线取自 Pflüger, loc. cit.

用类似的方法可处理垂直于锥壳表面的均布压力这情形。相应的临界压力值可得自图 11.31 中的曲线。对于 $\alpha = 90^\circ$ ，这些曲线给出 $n = 2$ ，并得到与长圆柱壳相同的 q_{cr} 值。

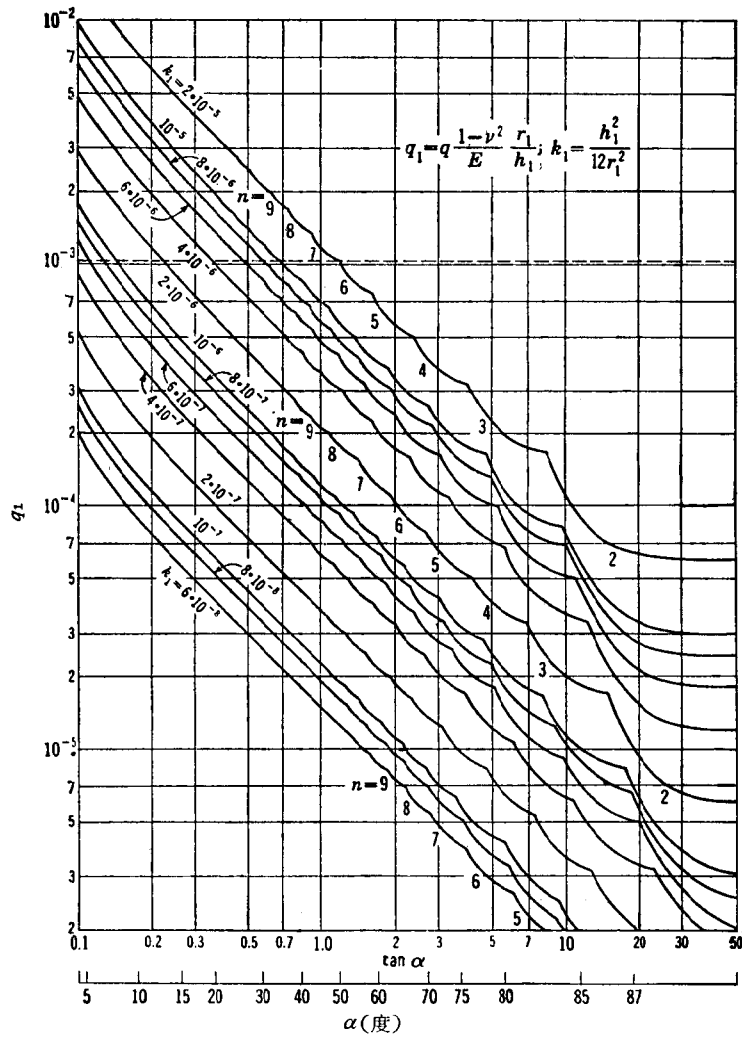


图 11.31

§ 11.13. 均匀受压的球形壳的屈曲

若一球形壳承受均布的外压力，它可能保持它的球形而只受到均匀压缩。对于这情形，均匀压应力的大小为

$$\sigma = \frac{qa}{2h}, \quad (a)$$

式中 q 为中面每单位面积的压力， a 为球的半径， h 为壳的厚度。如果压力超过了某一极限，受压的壳的球形平衡形状可能变为不稳定，于是发生屈曲¹⁾。在计算使屈曲发生的压力的临界值时，我们设屈曲了的表面对球的一直径对称，而用承受对称荷重的壳的对称变形情形所得的方程(10.17)。在推导球的屈曲了的表面的方程时，与以前一样，我们设 u, v, w (图 10.8) 表示屈曲时离开受压缩的球形的微小位移。于是在方程(10.17)中的 N_x 及 N_y 与均布压力 $qa/2$ 相差很小，而可写作

$$N_x = -\frac{qa}{2} + N'_x \quad \text{及} \quad N_y = -\frac{qa}{2} + N'_y, \quad (b)$$

式中 N'_x 与 N'_y 为由于微小位移 u, v 及 w 的合力。将这些表达式代入方程(10.17)，运用 $q(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2)^2$ 而不用 q ，并略去微小的项，诸如 N'_x, N'_y 及 Q_x 与 u, v, w 的导数的乘积，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{dN'_x}{d\theta} + (N'_x - N'_y)\cot\theta - Q_x - \frac{qa}{2}\left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta}\right) &= 0, \\ \frac{dQ_x}{d\theta} + Q_x\cot\theta + N'_x + N'_y + qa\left(\frac{du}{ad\theta} + \frac{u}{a}\cot\theta - \frac{2w}{a}\right) - \\ - \frac{qa}{2}\left(\frac{du}{ad\theta} + \frac{d^2w}{ad\theta^2}\right) - \frac{qa}{2}\cot\theta\left(\frac{u}{a} + \frac{dw}{ad\theta}\right) &= 0, \\ \frac{dM_x}{d\theta} + (M_x - M_y)\cot\theta - Q_x a &= 0. \end{aligned} \quad (c)$$

1) R. Zoelly (Dissertation, Zürich, 1915) 及 E. Schwerin (*Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 2, p. 81, 1922) 曾讨论过球形壳的屈曲。考虑到不对称屈曲的这问题的一般解曾为 A. Van der Neut 给出, Dissertation, Delft, 1932. 并参阅 K. Marguerre, *Proc. 5th. Intern. Congr. Appl. Mech.*, 1938, pp. 93—101.

2) 这是由于表面被拉伸使面元上的压力稍有改变。在方程中的相应的项非常小而可略去。我们保留它们只是使计算与现有的推导相一致，因在这推导中考虑了表面的上述拉伸。

利用第三个方程从第一二两个方程中消去 Q_x , 并在这些方程中代入(参阅第 484 页)

$$\begin{aligned} N'_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{ad\theta} - \frac{w}{a} + \nu \left(\frac{u \cot \theta}{a} - \frac{w}{a} \right) \right], \\ N'_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{u \cot \theta}{a} - \frac{w}{a} + \nu \left(\frac{du}{ad\theta} - \frac{w}{a} \right) \right], \\ M_x &= -\frac{D}{a^2} \left[\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} + \nu \left(u + \frac{dw}{d\theta} \right) \cot \theta \right], \\ M_y &= -\frac{D}{a^2} \left[\left(u + \frac{dw}{d\theta} \right) \cot \theta + \nu \left(\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} \right) \right], \end{aligned}$$

便得到决定 u 与 w 的两个方程. 用了记号

$$\alpha = \frac{D(1-\nu^2)}{a^2Eh} = \frac{h^2}{12a^2}, \quad \phi = \frac{qa(1-\nu^2)}{2Eh}, \quad (d)$$

这两个方程可表示为以下这形式:

$$\begin{aligned} (1+\alpha) \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{du}{d\theta} - (\nu + \cot^2 \theta)u \right] - (1+\nu) \frac{dw}{d\theta} + \\ + \alpha \left[\frac{d^3w}{d\theta^3} + \cot \theta \frac{d^2w}{d\theta^2} - (\nu + \cot^2 \theta) \frac{dw}{d\theta} \right] - \phi \left(u + \frac{dw}{d\theta} \right) = 0, \quad (e) \\ (1+\nu) \left(\frac{du}{d\theta} + u \cot \theta - 2w \right) + \alpha \left[-\frac{d^3u}{d\theta^3} - 2 \cot \theta \frac{d^2u}{d\theta^2} + \right. \\ \left. + (1+\nu + \cot^2 \theta) \frac{du}{d\theta} - \cot \theta (2-\nu + \cot^2 \theta)u - \frac{d^4w}{d\theta^4} - \right. \\ \left. - 2 \cot \theta \frac{d^3w}{d\theta^3} + (1+\nu + \cot^2 \theta) \frac{d^2w}{d\theta^2} - \cot \theta (2-\nu + \cot^2 \theta) \frac{dw}{d\theta} \right] - \\ - \phi \left(-u \cot \theta - \frac{du}{d\theta} + 4w + \cot \theta \frac{dw}{d\theta} + \frac{d^2w}{d\theta^2} \right) = 0. \quad (f) \end{aligned}$$

我们先讨论方程 (e). 与 1 相比略去¹⁾第一个因子中的 α 将方程 (e) 简化. 并注意如果以 $dw/d\theta$ 代替 u , 则方括号中的表达式相同. 于是, 如果引入一新变量 ψ :

1) 由记号(d)可以看出, α 为一很小的量, 因为在弹性极限以内的屈曲只可能发生于 h/a 很小的薄壳.

$$u = \frac{d\psi}{d\theta}, \quad (g)$$

即可得到简化。于是方程(e)变为

$$\begin{aligned} & \frac{d^3\psi}{d\theta^3} + \cot\theta \frac{d^2\psi}{d\theta^2} - (v + \cot^2\theta) \frac{d\psi}{d\theta} - (1+v) \frac{d\omega}{d\theta} + \\ & + \alpha \left[\frac{d^3\omega}{d\theta^3} + \cot\theta \frac{d^2\omega}{d\theta^2} - (v + \cot^2\theta) \frac{d\omega}{d\theta} \right] - \\ & - \phi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{d\omega}{d\theta} \right) = 0. \end{aligned}$$

用记号H代表运算

$$\frac{d^2(\dots)}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d(\dots)}{d\theta} + 2(\dots), \quad (h)$$

这方程可写作如下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} [H(\psi) + \alpha H(\omega) - (1+v)(\psi + \omega) - \alpha(1 + \\ & + v)\omega - \phi(\psi + \omega)] = 0. \end{aligned}$$

在这方程中, 包含因子 α 的第四项与第三项相比可以略去。积分经过这样简化了的方程并设积分常数为零¹⁾, 得到

$$H(\psi) + \alpha H(\omega) - (1+v)(\psi + \omega) - \phi(\psi + \omega) = 0. \quad (i)$$

以同样的方式处理方程(f), 得到

$$\begin{aligned} & \alpha H H(\psi + \omega) - (1+v)H(\psi) - (3+v)\alpha H(\omega) + \\ & + 2(1+v)(\psi + \omega) + \phi[-H(\psi) + H(\omega) + \\ & + 2(\psi + \omega)] = 0. \quad (j) \end{aligned}$$

于是, 球形壳的屈曲的研究便归结为积分方程(i)和(j)。

我们可用 $0, 1, 2, \dots$ 阶的勒让德函数来解这些方程。它们各为²⁾:

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta,$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1),$$

1) 从方程(g)可以看出, ψ 加上一常数并不影响 u 的值。

2) 这些函数的数值表和曲线可得自 E. Jahnke 和 F. Emde 的书, Table of Functions, 4th ed., Dover Publications, New York, 1945.

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8} (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta),$$

$$P_4(\cos \theta) = \frac{1}{64} (35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9),$$

.....

$$P_n(\cos \theta) = 2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \left[\cos n\theta + \frac{1}{1} \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\theta + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos(n-6)\theta + \cdots \right]. \quad (k)$$

所有这些函数都满足方程

$$\frac{d^2 P_n}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0, \quad (l)$$

因此,作出(h)所示的运算,得到

$$H(P_n) = -\lambda_n P_n, \quad (m)$$

式中

$$\lambda_n = n(n+1) - 2, \quad (n)$$

并且

$$HH(P_n) = \lambda_n^2 P_n. \quad (o)$$

如以前运用三角函数那样运用勒让德函数进行并使用级数,设

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n, \\ \omega &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n, \end{aligned} \quad (p)$$

我们便得到对于球形壳的任何对称屈曲的一般表达式. 将以上表达式代入方程(i)和(j)并运用方程(m)和(o),得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n[\lambda_n + (1+\nu) + \phi] + B_n[\alpha\lambda_n + (1+\nu) + \phi]\} P_n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n[\alpha\lambda_n^2 + (1+\nu)(\lambda_n + 2) + \phi(\lambda_n + 2) + B_n[\alpha\lambda_n^2 + (3+\nu)\alpha\lambda_n + 2(1+\nu) - \phi(\lambda_n - 2)]]\} P_n &= 0. \end{aligned}$$

只当每一項均等于零时，这些方程左边的級数才等于零。因此，对于每一 n 值，我們得到以下两个齐次方程：

$$\begin{aligned} A_n[\lambda_n + (1 + \nu) + \phi] + B_n[\alpha\lambda_n + (1 + \nu) + \phi] &= 0, \\ A_n[\alpha\lambda_n^2 + (1 + \nu)(\lambda_n + 2) + \phi(\lambda_n + 2)] + \\ + B_n[\alpha\lambda_n^2 + (3 + \nu)\alpha\lambda_n + 2(1 + \nu) - \phi(\lambda_n - 2)] &= 0. \end{aligned} \quad (q)$$

如果对于某一 n 值，这些方程产生 A_n, B_n 的非零解，壳就可能屈曲。这要求这两方程的行列式为零。这样，我們得到以下这方程以計算外压力的临界值¹⁾：

$$\begin{aligned} (1 - \nu^2)\lambda_n + \alpha\lambda_n[\lambda_n^2 + 2\lambda_n + (1 + \nu)^2] - \\ - \phi\lambda_n[\lambda_n + (1 + 3\nu)] = 0. \end{aligned} \quad (r)$$

这方程的一个解为

$$\lambda_n = 0.$$

由方程(n)，相应的 n 值为

$$n = 1;$$

而由方程(q)的第一式可知

$$A_1 = -B_1.$$

由方程(p)，相应的位移为

$$u = \frac{d\phi}{d\theta} = -A_1 \sin \theta,$$

$$w = -A_1 \cos \theta.$$

它們表示这球沿对称軸有刚体位移 A_1 。

要得到相应于壳屈曲的位移，必須設方程 (r) 中的 λ_n 不等于零。于是

$$\phi = \frac{(1 - \nu^2) + \alpha[\lambda_n^2 + 2\lambda_n + (1 + \nu)^2]}{\lambda_n + (1 + 3\nu)}. \quad (s)$$

对于任何 n 值，可計算 ϕ ，并用記号(d)，我們得到相应的外压力的值。要得到可能发生屈曲的 ϕ 和 q 的最小值，我們視表达式(s)为 λ_n 的連續函数，并从条件

$$\frac{d\phi}{d\lambda_n} = 0$$

1) 量 α 与 ϕ 系很小，在推导这方程时与 1 相比已予略去。

決定其最小值。略去微小的項后，这条件給出

$$\lambda_n^2 + 2(1 + 3\nu)\lambda_n - \frac{1 - \nu^2}{\alpha} = 0,$$

并且近似地有

$$\lambda_n = -(1 + 3\nu) + \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{\alpha}}. \quad (t)$$

代入(s)，我們得到

$$\phi_{\min} = 2\sqrt{(1 - \nu^2)\alpha} - 6\nu\alpha.$$

用了記号(d)，

$$q_{cr} = \frac{\phi_{\min} 2Eh}{a(1 - \nu^2)} = \frac{2Eh}{a(1 - \nu^2)} \left(\sqrt{\frac{1 - \nu^2}{3}} \frac{h}{a} - \frac{\nu h^2}{2a^2} \right),$$

略去后一括号中的第二項，

$$q_{cr} = \frac{2Eh^2}{a^2\sqrt{3(1 - \nu^2)}}. \quad (11.31)$$

并由方程(a)，

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1 - \nu^2)}}. \quad (11.32)$$

这应力的大小与軸向受压的半径为 a 厚为 h 的圓柱壳 [参閱方程(11.9)]的临界应力相同。

在以上的演算中，曾設 λ_n 系連續变化。但 λ_n 由方程(n)定义，而其中的 n 为整数。因此，要得到較准确的 σ_{cr} 的值，在方程(s)中应代入自方程(n)所得的两相邻的整数而不用值(t)，并且应用給出較小的 ϕ_n 值的 λ_n 来计算临界应力。从方程(t)可以看出， λ_n 为一大数；因此数 n 亦很大，故 σ_{cr} 的較准确的計算結果与公式(11.32)所給的相差很小。

到現在为止，我們只討論了壳的对称屈曲，但更一般的研究表明¹⁾：由于均匀受压球形壳对于任一直径的对称性，根据对称性假設所得的方程(s)給出了所有可能的 ϕ_{cr} 值，并且公式(11.32)总可用以計算临界应力。

1) 参閱 Van der Neut 的论文, *loc. cit.*; 并参閱 W. Flügge, *loc. cit.*

在均匀外压作用下球形薄壳的屈曲实验¹⁾表明: 屈曲发生于压力远小于方程(11.31)所給值时, 并且, 屈曲壳的破坏系突然地发生, 如同以前所討論的軸向受压的圓柱形壳那样。近似的計算²⁾表明: 在受压壳的球形平衡形状邻近, 存在着略偏离球形的平衡形式, 这种平衡形式要求的压力远小于方程(11.31)所給的。正如对于圓柱形壳所討論的(參閱第 501 頁), 这表明, 在加载时稍有扰动就可能在远小于古典理論所要求的压力下发生屈曲。这也說明了受压球形壳的突然屈曲現象以及临界压力的实验值的离散現象。

作为实际应用, 可用以下这經驗公式³⁾来計算 q_{cr} :

$$q_{cr} = \left(1 - 0.175 \frac{\theta^\circ - 20^\circ}{20^\circ}\right) \left(1 - \frac{0.07a/h}{400}\right) (0.3E) \left(\frac{h}{a}\right)^2,$$

对于 $400 \leq a/h \leq 2000$ 及 $20^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ (參閱图 11.32), 这公式給出滿意的結果。

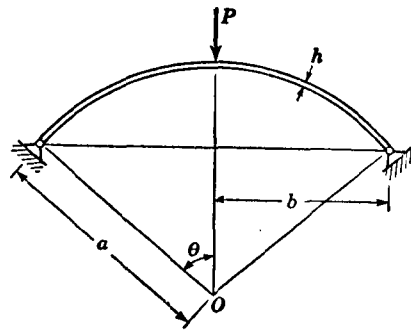


图 11.32

- 1) 參閱 K. Klöpple 与 O. Jungbluth, *Der Stahlbau*, vol. 22, p. 121, 1953.
- 2) 參閱 T. V. Kármán 与 Hsue-Shen Tsien, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 7, pp. 43 与 276, 1940. 并參閱 K. O. Friedrichs, T. V. Kármán Anniversary Volume, p. 258, 1941; V. I. Feodosiev, *Appl. Math. Mech.*, vol. 18, p. 35, 1954 (俄文); 以及 E. I. Rliss, H. J. Greenberg 与 H. B. Keller, *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 24, p. 533, 1957.
- 3) 參閱 Klöppel 与 Jungbluth, *op. cit.* 在这论文中亦给出了一些关于加劲球壳的内容。

对于角 θ (图 11.32) 很小的情形, 这将是一稍有弯曲的圆形板, 它在外压力下在初曲率的相反方向屈曲, 类似于微弯曲杆的屈曲(参阅 § 7.8).

对于沿对称轴作用一荷重 P 这情形(图 11.32)的近似解¹⁾给出了计算临界荷重的下述方程:

$$\begin{aligned}\mu &= \sqrt{0.152(\lambda + 74.9)} - 2.88, & \text{当 } 20 < \lambda < 100; \\ \mu &= \sqrt{0.093(\lambda + 11.5)} - 0.94, & \text{当 } 100 < \lambda < 500,\end{aligned}\quad (11.33)$$

式中

$$\lambda = \frac{b^4}{a^2 h^2}, \quad \mu = \frac{Pa}{Eh^3},$$

而式中的 b 为圆形板的半径, a 为球的半径, h 为板的厚度.

1) 这一现象为 C. B. Biezeno 所讨论, *Z. angew. Math. u. Mech.*, vol. 15, p. 10, 1935. 关于对类似问题的进一步的讨论, 参阅 H. Nylander, *Osterr. Ingr. Arch.*, vol. 9, p. 181, 1955.

附 录

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表

$$\phi(u) = \frac{3}{u} \left(\frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right), \psi(u) = \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan 2u} \right), \chi(u) = \frac{3(\tan u - u)}{u^3}$$

$2u = kl$	$\phi(u)$	$\Delta\phi$	$\psi(u)$	$\Delta\psi$	$\chi(u)$	$\Delta\chi$	$2u = kl$
0	1.0000		1.0000		1.0000		0
0.10	1.0008	0.0008	1.0007	0.0007	1.0010	0.0010	0.10
0.20	1.0047	0.0039	1.0027	0.0020	1.0040	0.0030	0.20
0.30	1.0106	0.0059	1.0061	0.0034	1.0091	0.0051	0.30
0.40	1.0189	0.0083	1.0108	0.0047	1.0163	0.0072	0.40
0.50	1.0299	0.0110	1.0171	0.0063	1.0257	0.0094	0.50
0.60	1.0437	0.0138	1.0249	0.0078	1.0374	0.0117	0.60
0.70	1.0603	0.0166	1.0343	0.0094	1.0516	0.0142	0.70
0.80	1.0801	0.0198	1.0454	0.0111	1.0684	0.0168	0.80
0.90	1.1033	0.0232	1.0585	0.0131	1.0882	0.0198	0.90
1.00	1.1304	0.0271	1.0737	0.0152	1.1113	0.0231	1.00
1.05	1.1455	0.0151	1.0822	0.0085	1.1241	0.0128	1.05
1.10	1.1617	0.0162	1.0912	0.0090	1.1379	0.0138	1.10
1.15	1.1792	0.0175	1.1009	0.0097	1.1527	0.0148	1.15
1.20	1.1979	0.0187	1.1114	0.0105	1.1686	0.0159	1.20
1.25	1.2180	0.0201	1.1225	0.0111	1.1856	0.0170	1.25
1.30	1.2396	0.0216	1.1345	0.0120	1.2039	0.0183	1.30
1.35	1.2628	0.0232	1.1473	0.0128	1.2235	0.0196	1.35
1.40	1.2878	0.0250	1.1610	0.0137	1.2445	0.0210	1.40
1.45	1.3146	0.0268	1.1757	0.0147	1.2671	0.0226	1.45
1.50	1.3434	0.0288	1.1915	0.0158	1.2914	0.0243	1.50

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表(续)

$2u = kl$	$\phi(u)$	$\Delta\phi$	$\psi(u)$	$\Delta\psi$	$\chi(u)$	$\Delta\chi$	$2u = kl$
1.50	1.3434	0.0310	1.1915	0.0169	1.2914	0.0260	1.50
1.55	1.3744	0.0334	1.2084	0.0182	1.3174	0.0281	1.55
1.60	1.4078	0.0361	1.2266	0.0196	1.3455	0.0303	1.60
1.65	1.4439	0.0391	1.2462	0.0211	1.3758	0.0327	1.65
1.70	1.4830	0.0422	1.2673	0.0228	1.4085	0.0353	1.70
1.75	1.5252	0.0458	1.2901	0.0246	1.4438	0.0383	1.75
1.80	1.5710	0.0498	1.3147	0.0267	1.4821	0.0416	1.80
1.85	1.6208	0.0542	1.3414	0.0290	1.5237	0.0452	1.85
1.90	1.6750	0.0593	1.3704	0.0316	1.5689	0.0493	1.90
1.95	1.7343	0.0650	1.4020	0.0345	1.6182	0.0540	1.95
2.00	1.7993	0.0713	1.4365	0.0373	1.6722	0.0594	2.00
2.01	1.8130	0.0140	1.4438	0.0074	1.6836	0.0117	2.01
2.02	1.8270	0.0143	1.4512	0.0075	1.6953	0.0118	2.02
2.03	1.8413	0.0145	1.4587	0.0077	1.7071	0.0121	2.03
2.04	1.8558	0.0148	1.4664	0.0078	1.7192	0.0122	2.04
2.05	1.8706	0.0152	1.4742	0.0080	1.7314	0.0126	2.05
2.06	1.8858	0.0154	1.4822	0.0082	1.7440	0.0128	2.06
2.07	1.9012	0.0156	1.4904	0.0083	1.7568	0.0130	2.07
2.08	1.9168	0.0161	1.4987	0.0084	1.7698	0.0134	2.08
2.09	1.9329	0.0164	1.5071	0.0087	1.7832	0.0135	2.09
2.10	1.9493	0.0168	1.5158	0.0088	1.7967	0.0139	2.10
2.11	1.9661	0.0170	1.5246	0.0090	1.8106	0.0141	2.11
2.12	1.9831	0.0174	1.5336	0.0091	1.8247	0.0145	2.12
2.13	2.0005	0.0179	1.5427	0.0094	1.8392	0.0147	2.13
2.14	2.0184	0.0182	1.5521	0.0095	1.8539	0.0150	2.14
2.15	2.0366		1.5616		1.8689		2.15

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表(续)

$2u = kl$	$\phi(u)$	$\Delta\phi$	$\psi(u)$	$\Delta\psi$	$\chi(u)$	$\Delta\chi$	$2u = kl$
2.15	2.0366		1.5616		1.8689		2.15
		0.0186		0.0097		0.0154	
2.16	2.0552		1.5713		1.8843		2.16
		0.0189		0.0100		0.0157	
2.17	2.0741		1.5813		1.9000		2.17
		0.0194		0.0101		0.0160	
2.18	2.0935		1.5914		1.9160		2.18
		0.0198		0.0104		0.0163	
2.19	2.1133		1.6018		1.9323		2.19
		0.0203		0.0106		0.0168	
2.20	2.1336		1.6124		1.9491		2.20
		0.0207		0.0109		0.0172	
2.21	2.1543		1.6233		1.9663		2.21
		0.0211		0.0110		0.0174	
2.22	2.1754		1.6343		1.9837		2.22
		0.0218		0.0114		0.0179	
2.23	2.1972		1.6457		2.0016		2.23
		0.0222		0.0115		0.0183	
2.24	2.2194		1.6572		2.0199		2.24
		0.0228		0.0118		0.0187	
2.25	2.2422		1.6690		2.0386		2.25
		0.0232		0.0122		0.0192	
2.26	2.2654		1.6812		2.0578		2.26
		0.0237		0.0124		0.0197	
2.27	2.2891		1.6936		2.0775		2.27
		0.0244		0.0126		0.0201	
2.28	2.3135		1.7062		2.0976		2.28
		0.0249		0.0130		0.0205	
2.29	2.3384		1.7192		2.1181		2.29
		0.0256		0.0133		0.0211	
2.30	2.3640		1.7325		2.1392		2.30
		0.0262		0.0136		0.0216	
2.31	2.3902		1.7461		2.1608		2.31
		0.0269		0.0140		0.0222	
2.32	2.4171		1.7601		2.1830		2.32
		0.0277		0.0143		0.0227	
2.33	2.4448		1.7744		2.2057		2.33
		0.0283		0.0147		0.0233	
2.34	2.4731		1.7891		2.2290		2.34
		0.0291		0.0150		0.0239	
2.35	2.5022		1.8041		2.2529		2.35
		0.0298		0.0154		0.0245	
2.36	2.5320		1.8195		2.2774		2.36
		0.0305		0.0159		0.0251	
2.37	2.5625		1.8354		2.3025		2.37
		0.0314		0.0162		0.0259	
2.38	2.5939		1.8516		2.3284		2.38
		0.0323		0.0167		0.0266	
2.39	2.6262		1.8683		2.3550		2.39
		0.0334		0.0171		0.0272	
2.40	2.6596		1.8854		2.3822		2.40

甲
1

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表(续)

$2u = kl$	$\phi(u)$	$\Delta\phi$	$\psi(u)$	$\Delta\psi$	$\chi(u)$	$\Delta\chi$	$2u = kl$
2.40	2.6596		1.8854		2.3822		2.40
2.41	2.6935	0.0339	1.9031	0.0177	2.4103	0.0281	2.41
2.42	2.7287	0.0352	1.9212	0.0181	2.4391	0.0288	2.42
2.43	2.7649	0.0362	1.9398	0.0186	2.4687	0.0296	2.43
2.44	2.8021	0.0372	1.9589	0.0191	2.4993	0.0306	2.44
2.45	2.8403	0.0382	1.9786	0.0197	2.5306	0.0313	2.45
2.46	2.8798	0.0395	1.9989	0.0203	2.5630	0.0324	2.46
2.47	2.9204	0.0406	2.0198	0.0209	2.5964	0.0334	2.47
2.48	2.9624	0.0420	2.0413	0.0215	2.6307	0.0343	2.48
2.49	3.0056	0.0432	2.0635	0.0222	2.6662	0.0355	2.49
2.50	3.0502	0.0446	2.0864	0.0229	2.7027	0.0365	2.50
2.51	3.0963	0.0461	2.1100	0.0236	2.7405	0.0378	2.51
2.52	3.1438	0.0475	2.1343	0.0243	2.7794	0.0389	2.52
2.53	3.1931	0.0493	2.1595	0.0252	2.8197	0.0403	2.53
2.54	3.2437	0.0506	2.1855	0.0260	2.8612	0.0415	2.54
2.55	3.2963	0.0526	2.2124	0.0269	2.9043	0.0431	2.55
2.56	3.3508	0.0545	2.2402	0.0278	2.9488	0.0445	2.56
2.57	3.4072	0.0564	2.2690	0.0288	2.9949	0.0461	2.57
2.58	3.4657	0.0585	2.2988	0.0298	3.0427	0.0478	2.58
2.59	3.5262	0.0605	2.3297	0.0309	3.0922	0.0495	2.59
2.60	3.5890	0.0628	2.3618	0.0321	3.1435	0.0513	2.60
2.61	3.6542	0.0652	2.3950	0.0332	3.1968	0.0533	2.61
2.62	3.7220	0.0678	2.4295	0.0345	3.2522	0.0554	2.62
2.63	3.7925	0.0705	2.4654	0.0359	3.3097	0.0575	2.63
2.64	3.8659	0.0734	2.5027	0.0373	3.3696	0.0599	2.64
2.65	3.9421	0.0762	2.5415	0.0388	3.4319	0.0623	2.65

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表(续)

$2u = kl$	$\phi(u)$	$\Delta\phi$	$\psi(u)$	$\Delta\psi$	$\chi(u)$	$\Delta\chi$	$2u = kl$
2.65	3.9421	0.0797	2.5415	0.0404	3.4319	0.0650	2.65
2.66	4.0218	0.0829	2.5819	0.0422	3.4969	0.0677	2.66
2.67	4.1047	0.0867	2.6241	0.0439	3.5646	0.0707	2.67
2.68	4.1914	0.0906	2.6680	0.0460	3.6353	0.0739	2.68
2.69	4.2820	0.0946	2.7140	0.0479	3.7092	0.0771	2.69
2.70	4.3766	0.0991	2.7619	0.0502	3.7863	0.0808	2.70
2.71	4.4757	0.1038	2.8121	0.0527	3.8671	0.0846	2.71
2.72	4.5795	0.1090	2.8648	0.0551	3.9517	0.0888	2.72
2.73	4.6885	0.1144	2.9199	0.0579	4.0405	0.0932	2.73
2.74	4.8029	0.1204	2.9778	0.0608	4.1337	0.0980	2.74
2.75	4.9233	0.1266	3.0386	0.0641	4.2317	0.1032	2.75
2.76	5.0499	0.1336	3.1027	0.0675	4.3349	0.1087	2.76
2.77	5.1835	0.1410	3.1702	0.0712	4.4436	0.1148	2.77
2.78	5.3245	0.1491	3.2414	0.0752	4.5584	0.1213	2.78
2.79	5.4736	0.1579	3.3166	0.0797	4.6797	0.1285	2.79
2.80	5.6315	0.1675	3.3963	0.0844	4.8082	0.1362	2.80
2.81	5.7990	0.1780	3.4807	0.0897	4.9444	0.1448	2.81
2.82	5.9770	0.1894	3.5704	0.0955	5.0892	0.1540	2.82
2.83	6.1664	0.2021	3.6659	0.1017	5.2432	0.1643	2.83
2.84	6.3685	0.2160	3.7676	0.1088	5.4075	0.1757	2.84
2.85	6.5845	0.2315	3.8764	0.1164	5.5832	0.1881	2.85
2.86	6.8160	0.2486	3.9928	0.1251	5.7713	0.2020	2.86
2.87	7.0646	0.2676	4.1179	0.1346	5.9733	0.2174	2.87
2.88	7.3322	0.2890	4.2525	0.1452	6.1907	0.2348	2.88
2.89	7.6212	0.3131	4.3977	0.1573	6.4255	0.2543	2.89
2.90	7.9343		4.5550		6.6798		2.90

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表(续)

$2u = kl$	$\phi(u)$	$\Delta\phi$	$\psi(u)$	$\Delta\psi$	$\chi(u)$	$\Delta\chi$	$2u = kl$
2.90	7.9343		4.5550		6.6798		2.90
2.91	8.2745	0.3402	4.7259	0.1709	6.9561	0.2763	2.91
2.92	8.6455	0.3710	4.9121	0.1862	7.2573	0.3012	2.92
2.93	9.0516	0.4061	5.1160	0.2039	7.5871	0.3298	2.93
2.94	9.4982	0.4466	5.3401	0.2241	7.9496	0.3625	2.94
2.95	9.9915	0.4933	5.5875	0.2474	8.3500	0.4004	2.95
2.96	10.5393	0.5478	5.8622	0.2747	8.7946	0.4446	2.96
2.97	11.1510	0.6117	6.1688	0.3066	9.2910	0.4964	2.97
2.98	11.8386	0.6876	6.5134	0.3446	9.8489	0.5579	2.98
2.99	12.6171	0.7785	6.9035	0.3901	10.4804	0.6315	2.99
3.00	13.5057	0.8886	7.3486	0.4451	11.2013	0.7209	3.00
3.01	14.5295	1.0238	7.8613	0.5127	12.0317	0.8304	3.01
3.02	15.7219	1.1924	8.4583	0.5970	12.9988	0.9671	3.02
3.03	17.1282	1.4063	9.1623	0.7040	14.1393	1.1405	3.03
3.04	18.8116	1.6834	10.0049	0.8426	15.5044	1.3651	3.04
3.05	20.8629	2.0513	11.0314	1.0265	17.1677	1.6633	3.05
3.06	23.4176	2.5547	12.3096	1.2782	19.2388	2.0711	3.06
3.07	26.6860	3.2684	13.9446	1.6350	21.8886	2.6498	3.07
3.08	31.0160	4.3300	16.1105	2.1659	25.3989	3.5103	3.08
3.09	37.0244	6.0084	19.1156	3.0051	30.2701	4.8712	3.09
3.10	45.9234	8.8990	23.5659	4.4503	37.4839	7.2138	3.10
3.11	60.4566	14.5332	30.8334	7.2675	49.2647	11.7808	3.11
3.12	88.4522	27.9956	44.8321	13.9987	71.9577	22.6930	3.12
3.13	164.7487	76.2965	82.9812	38.1491	133.8017	61.8440	3.13
3.14	1199.1629	1034.4142	600.1900	517.2088	972.2562	838.4545	3.14
π	$\pm\infty$	∞	$\pm\infty$	∞	$\pm\infty$	∞	π

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表(续)

$2u = kl$	$\phi(u)$	$\Delta\phi$	$\psi(u)$	$\Delta\psi$	$\chi(u)$	$\Delta\chi$	$2u = kl$
π	$\pm\infty$	∞	$\pm\infty$	∞	$\pm\infty$	∞	π
3.15	-227.1668	123.4092	-112.9747	61.7055	-183.8716	100.0325	3.15
3.16	-103.7576	36.5228	-51.2692	18.2624	-83.8391	29.6049	3.16
3.17	-67.2348	17.5035	-33.0068	8.7527	-54.2342	14.1884	3.17
3.18	-49.7313	10.2713	-24.2541	5.1365	-40.0458	8.3263	3.18
3.19	-39.4600	6.7537	-19.1176	3.3778	-31.7195	5.4750	3.19
3.20	-32.7063	4.7787	-15.7398	2.3903	-26.2445	3.8742	3.20
3.21	-27.9276	3.5593	-13.3495	1.7807	-22.3703	2.8858	3.21
3.22	-24.3683	2.7541	-11.5688	1.3779	-19.4845	2.2330	3.22
3.23	-21.6142	2.1940	-10.1909	1.0980	-17.2515	1.7790	3.23
3.24	-19.4202	1.7890	-9.0929	0.8954	-15.4725	1.4507	3.24
3.25	-17.6312	1.4865	-8.1975	0.7443	-14.0218	1.2057	3.25
3.26	-16.1447	1.2548	-7.4532	0.6284	-12.8161	1.0178	3.26
3.27	-14.8899	1.0733	-6.8248	0.5376	-11.7983	0.8707	3.27
3.28	-13.8166	0.9285	-6.2872	0.4652	-10.9276	0.7533	3.28
3.29	-12.8881	0.8111	-5.8220	0.4066	-10.1743	0.6581	3.29
3.30	-12.0770	0.7154	-5.4154	0.3567	-9.5162	0.5811	3.30
3.40	-7.4248	2.0479	-3.0787	1.0354	-5.7378	1.6681	3.40
3.50	-5.3769	1.1477	-2.0433	0.5861	-4.0697	0.9389	3.50
3.60	-4.2292	0.7302	-1.4572	0.3785	-3.1308	0.6016	3.60
3.70	-3.4990	0.5029	-1.0787	0.2659	-2.5292	0.4179	3.70
3.80	-2.9961	0.3647	-0.8128	0.1981	-2.1113	0.3070	3.80
3.90	-2.6314	0.2744	-0.6147	0.1544	-1.8043	0.2349	3.90
4.00	-2.3570		-0.4603		-1.5694		4.00

表 A-1 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ 表(续)

$2u = kl$	$\phi(u)$	$\Delta\phi$	$\psi(u)$	$\Delta\psi$	$\chi(u)$	$\Delta\chi$	$2u = kl$
4.00	-2.3570		-0.4603		-1.5694		4.00
4.10	-2.1454	0.2116	-0.3355	0.1248	-1.3840	0.1854	4.10
4.20	-1.9792	0.1662	-0.2317	0.1038	-1.2342	0.1498	4.20
4.30	-1.8475	0.1317	-0.1430	0.0887	-1.1105	0.1237	4.30
4.40	-1.7429	0.1046	-0.0652	0.0778	-1.0069	0.1036	4.40
4.50	-1.6603	0.0826	0.0044	0.0696	-0.9188	0.0881	4.50
4.60	-1.5962	0.0641	0.0682	0.0638	-0.8431	0.0757	4.60
4.80	-1.5152	0.0810	0.1851	0.1169	-0.7196	0.1235	4.80
5.00	-1.4914	0.0238	0.2975	0.1124	-0.6234	0.0962	5.00
5.25	-1.5482	0.0568	0.4495	0.1520	-0.5296	0.0938	5.25
5.5	-1.7446	0.1964	0.6470	0.1975	-0.4563	0.0733	5.5
5.75	-2.2344	0.4898	0.9747	0.3277	-0.3974	0.0589	5.75
6.0	-3.7455	1.5111	1.8015	0.8268	-0.3492	0.0482	6.0
6.25	-29.0867	25.3412	14.5346	12.7331	-0.3088	0.0404	6.25
2π	$\pm\infty$	∞	$\pm\infty$	∞	-0.3040	0.0048	2π
6.5	4.1490	∞	-2.0242	∞	-0.2745	0.0295	6.5

注: 函数 $\phi(u)$, $\psi(u)$ 及 $\chi(u)$ 称为贝莱 (Berry) 函数。表 A-1 为 Niles 与 Newell 所收集, *Airplane Structures*, 3d ed. vol. II, pp. 72-78, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1943. 第一个这种形式的表系 A. P. Van der Fleet 所发表, *Bull. Polytechnic Inst.*, St. Petersburg, 1904.

表 A-2 函数 $\eta(u)$ 与 $\lambda(u)$ 表

$$\eta(u) = \frac{12(2 \sec u - 2 - u^2)}{5u^4}, \quad \lambda(u) = \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}$$

$2u = kl$	$\eta(u)$	$\lambda(u)$
0	1.000	1.000
0.20	1.004	1.004
0.40	1.016	1.016
0.60	1.037	1.038
0.80	1.070	1.073
1.00	1.114	1.117
1.20	1.173	1.176
1.40	1.250	1.255
1.60	1.354	1.361
1.80	1.494	1.504
2.00	1.690	1.704
2.20	1.962	1.989
2.40	2.400	2.441
2.60	3.181	3.240
2.80	4.822	4.938
2.90	6.790	6.940
3.00	11.490	11.670
π	∞	∞

表 A-3 截面的性质

O = 剪心, J = 扭转常数, C_w = 翘曲常数

	$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$ $C_w = \frac{t_f h^3 b^3}{24}$	<p>若 $t_f = t_w = t$:</p> $J = \frac{t^3}{3} (2b + h)$
	$e = h \frac{b_1^3}{b_1^3 + b_2^3}$ $J = \frac{(b_1 + b_2)t_f^3 + ht_w^3}{3}$ $C_w = \frac{t_f h^3}{12} \frac{b_1^3 b_2^3}{b_1^3 + b_2^3}$	<p>若 $t_f = t_w = t$:</p> $J = \frac{t^3}{3} (b_1 + b_2 + h)$
	$e = \frac{3b^2 t_f}{6bt_f + ht_w}$ $J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$ $C_w = \frac{t_f b^3 h^3}{12} \frac{3bt_f + 2ht_w}{6bt_f + ht_w}$	<p>若 $t_f = t_w = t$:</p> $e = \frac{3b^2}{6b + h}$ $J = \frac{t^3}{3} (2b + h)$ $C_w = \frac{tb^3 h^3}{12} \frac{3b + 2h}{6b + h}$
	$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$ $C_w = \frac{b^3 h^3}{12(2b + h)^3} \times$ $\times [2t_f(b^2 + bh + h^2) + 3t_w bh]$	<p>若 $t_f = t_w = t$:</p> $J = \frac{t^3}{3} (2b + h)$ $C_w = \frac{tb^3 h^3}{12} \frac{b + 2h}{2b + h}$
	$e = 2a \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ $J = \frac{2a\alpha t^3}{3}$ $C_w = \frac{2ta^5}{3} \times$ $\times \left[\alpha^3 - \frac{6(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]$	<p>若 $2\alpha = \pi$:</p> $e = \frac{4a}{\pi} \quad J = \frac{\pi a t^3}{3}$ $C_w = \frac{2ta^5}{3} \left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{12}{\pi} \right)$ $= 0.0374ta^5$

內 容 索 引

三 划

三角级数用于梁-柱的弯曲 27
大挠度

 屈曲杆的大挠度 81
 板的大挠度 366

四、五 划

切线模量 189
正割公式 41

七 划

扭转屈曲 227
扭转刚度、常数 227
折合弹性模量 190

八 划

非保守力情形 163
非弹性弯曲 175
非弹性屈曲(杆) 188
非弹性横向屈曲(工字梁) 290
非弹性屈曲(板) 435
迭加原理用于梁-柱 7
板的纯弯曲 339
板的弯曲应变能 355
板的临界荷重计算 369
板(简支边)的屈曲:
 在一个方向均匀受压 372
 在两垂直方向均匀受压 377
 弯曲与压缩联合作用 396
 在剪力作用下 403
 以肋条加固的板 418
板的屈曲试验 451
板屈曲理论的应用 457
板屈曲的极限强度 445
屈曲
 框架的屈曲 66
 连续梁的屈曲 71

弹性支座连续梁的屈曲 74
在弹性基础上杆的屈曲 100
变截面杆的屈曲 134
组合柱的屈曲 144
螺旋弹簧的屈曲 151
扭转屈曲 240
由于扭转与弯曲的屈曲 245
在压力与端弯矩作用下的扭转屈曲 261
梁的横向屈曲 269
悬臂梁的横向屈曲 275
简支工字梁的横向屈曲 281
在均布外压力下圆环及管的屈曲 308
均匀受压圆拱的屈曲 316
两种金属组合小条的屈曲 330
在一个方向均匀受压的简支矩形板的屈曲 372
在弯曲与压缩联合作用下简支矩形板的屈曲 396
在剪力作用下矩形板的屈曲 403
以肋条加固的板的屈曲 418
圆柱形壳在均匀轴向压缩下的对称屈曲 486
在均匀横向外压力作用下圆柱形壳的屈曲 503
在轴向压缩下加劲圆柱壳的屈曲 521
在轴向压力与均布横向压力共同作用下圆柱形壳的屈曲 526
受扭的圆柱形壳的屈曲 531
锥形壳的屈曲 541
均匀受压的球形壳的屈曲 545

九 划

柱的折合长度 54
柱的试验 199
柱的设计
 以理想柱的公式来设计 207
 经验公式 209

直线公式 210
抛物线公式 211
很扁平的曲杆的屈曲 325

十 划

圆板的屈曲 413
圆柱形壳的对称变形 471
圆柱形壳的无伸长变形 473
圆柱形壳轴向受压试验 486
能量法 87
计算柱的临界荷重 94

计算板的临界荷重 371
计算梁横向屈曲的临界荷重 283
计算圆柱形壳的临界荷重 486
弯曲的或偏心受压的圆柱形壳 512

十 一 划

球形壳的对称变形 482
剪力对于临界荷重的影响 141
剪力或剪力与轴向力共同作用下的曲薄板 519