材料力学史

[美] S. P. 铁木生可 著

上海科学技术出版社

材 料 力 学 史

〔美〕S. P. 铁木生可 著
常 振 檝 譯

上 海 科 学 技 术 出 版 社

內 容 提 要

本书叙述材料力学从伽利略时代(1564～1642)开始到1950年为止的全面发展过程。作者将这門科学的发展按年代先后分成几个时期，在每一个时期中把一些杰出的科学家和工程师們的主要貢献与他們的簡单傳記結合起来一并介紹。其中还包括与材料力学有密切联系的彈性理論和結构理論的部分历史。

本书系作者为学习工程力学的学生們編写的，供他們在学完材料力学和結构理論方面一些必修課程以后，愿作进一步深入研究时参考之用。对于讲授力学和从事科学研究的人們也是一本重要的参考书。

材 料 力 学 史

HISTORY OF STRENGTH OF MATERIALS

原 著 者 〔美〕Stephen P. Timoshenko

原出版者 McGraw-Hill Publishing Co. 1953

譯 者 常 振 檝

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 787×1092 1/18 印张 21 14/18 字数 429,000

1961年9月第1版 1961年9月第1次印刷

印数 1—4,500

統一书号：15119·1624

定 价：(十四) 3.00 元

序

本书是根据我二十五年来在工程力学这門課程中对学过材料力学和結构理論的同学們講授材料力学史的講稿編写出来的。本书在准备付印期內，照原来的講稿又加入了許多材料，但对于这一課程的基本性質仍保留不变。我編写本书的主要愿望是想帮助那些学过材料力学的同学們对这一課程能作更深入的研究，并了解一些材料力学的发展历史。为此，我在本书中不打算作出彈性力学的索引，从而对这一課程編出一个完整的文献目录。象这样的目录是可以从現存的一些书籍里面找到的，例如塔德亨特(Todhunter)和皮尔逊(Pearson)合著的"彈性力学与材料力学史"(A History of the Elasticity and Strength of Materials)以及克萊恩(F. Klein)和茂勒(C. Müller)合編的"数学知識百科全书"(Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften)第四卷等等。

我却想仿照圣維南(Saint-Venant)的"簡史"(Historique Abrégé)[1]的先例，在无須进行过分詳細的叙述而能給予广大讀者对这門科学发展的主要阶段有一个历史的回顧。要做到这点，我認为在本书中要包括一些本学科中最著名的学者的簡史，并且討論材料力学的发展对各国的工程教育情况以及工业发展上的关系。例如鉄道交通的发展以及采用鋼鉄作为建筑材料都給我們带来和結构物强度有关的許多新問題，同时也对材料力学的发展有很大的影响，这是毋庸置疑的。至于对現代內燃机和輕型飞机結构的发展，当然也具有同样的影响。

討論材料力学的发展，如果不提到和它相关的一些科学，如彈性理論和結构理論的发展，是不够完善的。由于这些科学的发展与材料力学相互間有着密切关連，所以在本书中必須包括它們的历史中的某些部分。为此，我从彈性理論的历史里面摘引了与材料力学发展有密切关連的部分而略去一切有关該学科純理論和数学上发展的材料。同样，关于結构理論的发展方面，凡只着重于技术上的各部分都沒有包括在本书內。

在本书中，我是依照年代的先后来叙述的，而且把这門学科的历史分成几个时

[1] 即圣維南在增訂納維埃(Navier)所著"課程总結"(Résumé des Leçons)一书时加进去的历史介紹。

期。在每个时期中都討論了該时期内材料力学和与它相关学科的发展。但也沒有严格遵守这种次序，在討論个别学者的某些成就时，我覺得把他們的全部著作放在一起来介紹是更为适合的，虽然有些著作并不屬于所討論的这个时期以內。

在編写本书时，現已出版的一些关于科学历史的书籍对我是有很多帮助的。除了上面講到的一些书籍以外，我手边还有納維埃(Navier)著的"課程总結"(Résumé des Leçons)第三版，該书由圣維南增訂并包括他本人所著的"簡史"在內，还有他的許多研究报告，这些都是具有很大历史价值的。我也参考了圣維南从克列布希(Clebsch)的书中譯出关于彈性力学的譯本，該书本身便包括了早期彈性力学的历史。在傳記里面我覺得下列一些是非常有用的：馬立(M. Marie)著"数学与物理科学历史"(Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques)，魯日曼(M. Rühlmann)著"工程力学史"(Geschichte der Technischen Mechanik)，英国的一些傳記以及佛兰西斯·阿拉果(François Arago)和約瑟夫·伯特朗德(Joseph Bertrand)合著的"学会頌詞"(Éloges Academiques)文集。为了評論較新的著作物，必須查閱用各国文字出版的許多期刊。这就得化去很多的时間，但作者覺得如果他的工作能够节省其他学者对材料力学作历史研究时所費的精力，就完全能够得到补償了。

我要感謝斯丹福(Stanford)大学的一些同事們——感謝尼尔斯(A. S. Niles)教授，他对于处理桁架的早期历史和超靜定桁架的馬克斯威尔-摩尔法(Maxwell-Mohr's method)这两部分的手稿提出批評；同时感謝楊(D. H. Young)教授，在編写手稿时他对我提供了很多积极的建議。我也异常感謝皮沙普(R. E. D. Bishop)博士，他将手稿全部审閱了一次并且提出了許多重要的意見，最后还要感謝我們的研究生詹姆士·吉尔(James Gere)，承他給本书核对校样。

S. P. 鉄木生可，

斯丹福大学，加利福尼亚

1952年12月

鉄木生可著作在我国已有下列一些譯本：

(1) 江可宗譯 "鉄氏工程力学"(Engineering Mechanics)；

(2) 王德荣譯 "結构学原理"(Theory of Structures)；

(3) 王德荣譯 "材料力学"(Strength of Materials)；

(4). 徐芝綸等譯 "彈性力学"(Theory of Elasticity)；

(5) 王俊奎譯 "鈑与薄壳学"(Theory of Plates and Shells)。

目　录

緒　論

从古代人类开始建筑房屋的时候起，人們早就覺察到有必要获得有关建筑材料强度的知識，以便作出决定构件安全尺寸的法則。无疑地，埃及人民是有过一些这类經驗法則的，因为沒有这些經驗法則，他們就不可能建立起偉大的紀念碑、庙宇、金字塔以及方尖塔，其中有些还一直留存到現在。希腊人将建筑技术更向前推进。他們发展了靜力学，它是材料力学的基础。阿基米德（Archimedes，紀元前

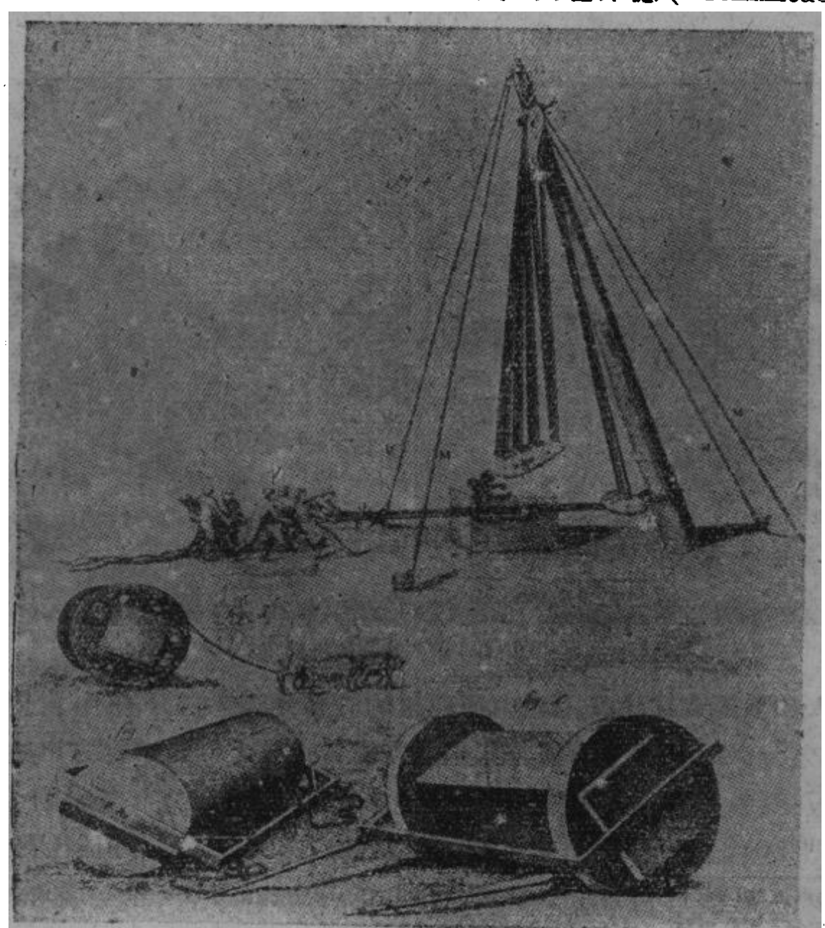


图 1~4　上面是罗馬人所用的起重机具的形状
下面是希腊人搬运柱子的方法

287～212)作出杠杆平衡条件的严格証明，并且概述了物体重心的求法。他把他的理論应用到各种起重机具的构造上。图 1～3 所示便是希腊人用来搬运依芬修斯(Ephesus)的底安納(Diana)神庙的柱子和下楣(Architraves)的方法。

罗馬人是偉大的建筑师。他們不仅有些紀念碑和庙宇，而且还有道路、桥梁和堡垒一直保留到如今。从菲特卢菲斯(Vitruvius)[1]——他是奥古斯丁(Augustus)王朝罗馬的一个著名建筑工程师——的著作里，我們了解到一些这种建筑物的营造方法。在該书里叙述了这些建筑物所用的建筑材料和构造形式。图 4 中表示罗馬人用来举起笨重石块的一种起重机。罗馬人經常在建筑物中采用拱形。图 5 表示法国南部著名的迦德 (Pont du Gard) 拱桥。这个桥到现在还在使用。罗馬时代的拱和現代的拱就其各部分尺寸比較[2]起来，现代的拱已輕巧多了。当时的罗馬人还沒有应力分析的便利方法。他們不知道怎样选擇适当的形式，一貫只采用着跨度比較小的半圓拱。

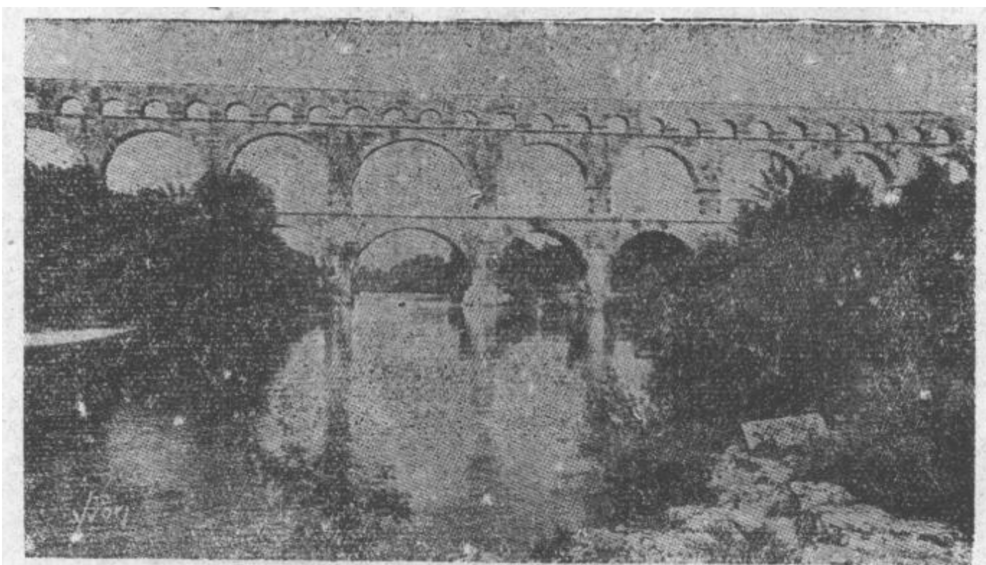


图 5 著名的迦德拱桥

希腊人和罗馬人在建筑工程中所积累的許多知識大部分在中古时代都已失傳，直到文艺复兴时期才开始恢复起来。当著名的意大利建筑师方坦納(Fontana，1543～1607)受教皇雪克斯特斯第五(Sixtus V)的命令建立起梵蒂岡(Vatican)的方尖塔时 (图 6)，这一工程引起了欧洲工程界广泛的注意。可是我們知道在此几

[1] 菲特卢菲斯(Vitruvius)著："建筑学"(Architecture)由德彪尔(De Bioul)譯成法文，于 1316 年在布鲁塞尔(Brussels)出版。

[2] 关于这一比較，可参看列吉尔(A. Leger)所著："罗馬宮殿的偉大成就"(Les Travaux Publics aux temps des Romains)第 135 頁，1875，巴黎。

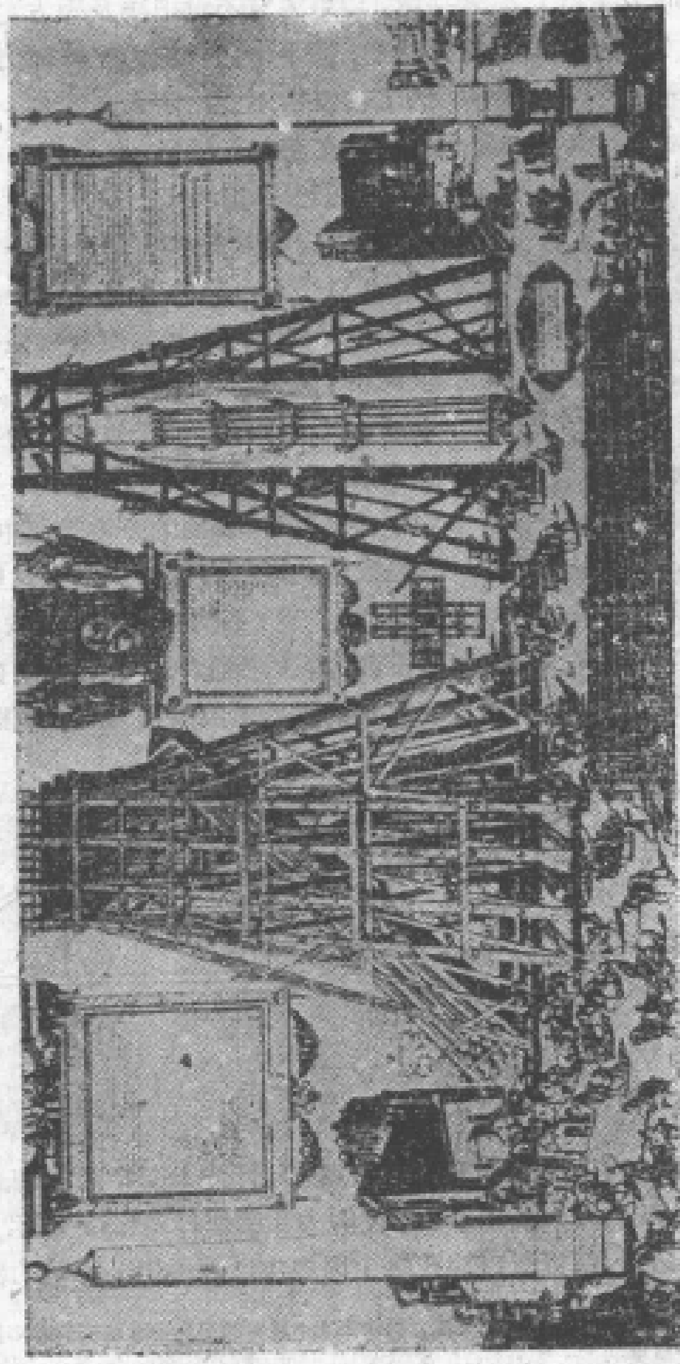


图 6 埃菲尔铁塔的建立

千年以前，埃及人从仙恩(Syene)的石坑凿取石料經由尼罗河上运来石料后已經建造起好几个这样的方尖塔了。老实說，罗馬人只不过把埃及的方尖塔从其旧址运到罗馬将它們建立起来而已。这样看来，似乎十六世紀的工程师們对于这种艰巨的工程技术不会比前人高明多少。


图 7 里奥納多·达·芬奇

在文艺复兴时期，科学事业有了轉机。在建筑和工程上出現了一些技术首要人物。在那个时期内，里奥納多·达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452～1519)是最杰出的一个。他不仅是那个时期的艺术家，而且也是一位偉大的科学家和工程师。他沒有写书，可是在他的笔記本里面发現了許多关于他对科学上各个部門中偉大发明的資料[1]。里奥納多·达·芬奇对于力学特具兴趣，在他的一本笔記中，曾写道："力学是数学的乐园，因为我們在这里获得了数学的果实"。达·芬奇应用力矩法求得图 8a 及 8b 所示的那些問題的正确解。他应用虛位移原理的概念来分析各种用在起重机具上的滑輪和杠杆系統。似乎达·芬奇已經有了拱产生出横推力的正确概念。在他的

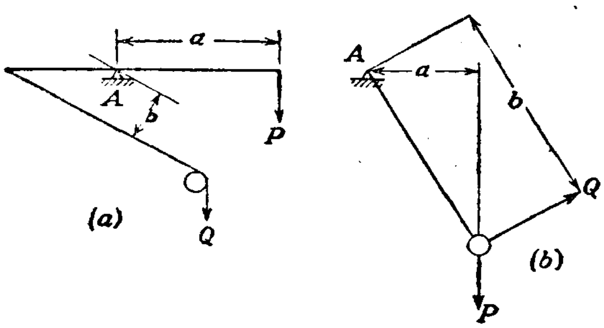


图 8

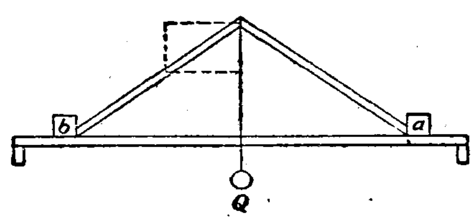


图 9

手稿里面，有一張繪出了两根杆件的草图(图 9)，杆件上面作用着垂直荷重 Q，并且提出一个問題："在 a 及 b 处要加上怎样的力才能使杆系保持平衡?"由草图中所画的虛綫平行四边形，就可断言他在这个問題上已經得出了正确的答案。

[1] 里奥納多·达·芬奇的傳記刊載在英国百科全书上。从他的手稿中所摘引的許多叙述可在麦克喀笛(E. Mc Curdy)所著"里奥納多·达·芬奇的笔記本"(Leonardo da Vinci's Note-books)中看到。也可参看派生斯(W. B. Parsons)著:"文艺复兴时期中的工程师和工程"(Engineers and Engineering in the Renaissance), 1939。本文所繪的图 10 及所引說明都是从后述书中摘来的。

里奥納多·达·芬奇用实验来研究結构材料的强度。在他的笔記"各种不同长度鉄絲的强度試驗"中，他画出如图10所示的草图，并且附注了如下的一段話："这个試驗的目的是要求出一根鉄絲所能負担的荷重。将长度为2布拉西亚(Braccia[1])的一根鉄絲，一端連結于能坚固地承重的物件上，他端吊住一只篮子或其他类似的容器，經过一只漏斗端部的小孔将細砂倒入篮中。另外装上一只彈簧，使在鉄絲断裂时立刻把小孔塞住。因为篮子掉下来的距离很短，所以掉下时不致翻轉过来。将砂子重量和鉄絲断裂的位置都記录下来。这样重复地試驗若干次以校核其結果。然后再用照先前一半长度的鉄絲来試驗，将所能增加的荷重記录下来；以后又用四分之一长度的鉄絲来試，依此类推。每次都記下极限强度和断裂的位置来[2]"。

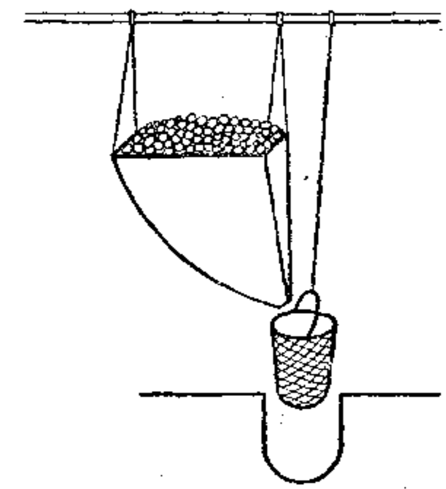


图 10 里奥納多·达·芬奇設計的鉄絲受拉試驗

里奥納多·达·芬奇也研究过梁的强度，并且提出一个普遍性原理如下："任何被支承而能自由弯曲的物件，如果截面和材料都均匀，則距支点最远处，其弯曲也最大"。他建議要做一系列的試驗，开始用一根两端支承而能負載一定荷重的梁，然后继續用一些长度較大而寬度相同和高度相同的梁作試驗，記下所能負載的荷重。他的結論是两端支承的梁的强度与其长度成反比而与其寬度成正比。他还研究过一端固定他端自由的梁，并說明："如果一根长为2布拉西亚的梁能負載100里布列(Libbre[3])，則另一根长1布拉西亚的梁便能負載200里布列。短梁較长梁短若干倍，它能負載的荷重較长梁所能負載的荷重也会大若干倍"。至于梁的高度对梁的强度的影响，在他的笔記中却沒有明确的說明。

显然，里奥納多·达·芬奇也做过一些关于柱的强度的研究。他說明柱(压杆)的强度是和其长度成反比而与其横截面的某些高寬比成正比。

以上所簡略討論到的里奥納多·达·芬奇的成就可以表明他也許是最先試图用静力学来求作用在某些构件上的力的人，同时也是最先用实驗来决定結构材料强

---

[1] 意大利长度单位。

[2] 見(Parsons)著："文艺复兴时期中的工程师和工程"(Engineers and Engineering in the Rénaissance)，第72頁。

[3] 意大利重量单位。

度的人。可是,这些重要的倡导一直被埋沒在他的笔記里,而在十五及十六世紀的工程师們却和罗馬时代一样継續地仅凭經驗和武断来决定构件的尺寸。

最早尝試用解析法来求构件的安全尺寸是在十七世紀才开始的。加利略(Galileo)的名著"两种新的科学"(Two New Sciences)[1]表明了作者使这种方法用之于应力分析能得出合理結果所作的努力。这才表述了材料力学这門科学的开端。

[1] 見亨利·克卢(Henry Crew)和阿尔芳索·德·薩尔維阿(Alfonso de Salvio)的英譯本,1933,紐約。

第 一 章

十七世紀中的材料力学[1]

1. 加利略（Galileo, 1564～1642）

加利略出生于意大利的比薩(Pisa)[2]，他是佛罗倫泰(Florentine)貴族家庭的后裔。在靠近佛罗倫薩(Florence)的法倫布拉薩(Vallombrasa)修道院，他受了拉丁語、希腊語与邏輯学的預备教育。1581年他被送入比薩大学讀医科。但不久，数学課程引起了他的兴趣，他便投入全部精力以研究欧几里德（Euclid）及阿基米德的著作。他似乎通过卡丹（Cardan）的著作[3]，才熟悉了里奧納多·达·芬奇在力学上的发現的。1585年，加利略因經济困难而休学，沒有得到学位就回到佛罗倫薩的老家。在那里，他私人講授数学和力学，同时継續他自己的科学研究。1586年，他制成一架比重秤来測量各种物質的密度，同时完成了求固体重心的研究[4]。这一工作使他聞名于世，而在1589年中，那时他还只25岁半，就被聘为比薩大学的数学教授。

图 11 加利略

他在比薩的这段时期(1589～1592)継續研究数学和力学；做出了著名的落体实驗。在这

[1] 关于十七世紀和十八世紀間材料力学的历史在吉拉德(P. S. Girard)所著："固体抗力分析的論著"(Traité Analytique de la résistance des Solides)1798年巴黎出版該书的序言中有詳細討論。

[2] 見法海(J. J. Fahie)著："加利略的一生和他的貢献"(Galileo, His Life and Work)，1903，紐約。并参看左尔特·德·哈散依(Zsolt de Harsanyi)所著小說"观星的人"(The Star-gazer)由(P. Tabor)譯成英文，1939，紐約。

[3] 見(P. Duhem)所著："靜力学初步"(Les Origines de la Statique)第39頁，1905，巴黎。Cardan(1501～1576)，在他的几本数学著作中討論到力学。他介紹这門科学和达·芬奇极为相似，一般認为卡丹的学說是接近于达·芬奇的手稿和笔記的。

[4] 用"平衡重"(La Bilancetta)为标題在1586年发表。

些实驗的基础上,于 1590 年就写出“論重力”(De Motu Gravium) 这篇論文。这篇論文卽为我們現在所熟悉的动力学的开端。此著作的主要結論是:(1)一切物体从同一高度落下所需的时間相同;(2)落下时,末速与时間成正比;(3)落下距离与时間平方成正比。这些結論完全与亚里士多德(Aristotle)的力学学說不符,但加利略却一点不躊躇而敢于根据这些論点和亚里士多德学派的代表們爭辯。这使得他們对这位年青的加利略发生恶感,最后加利略只好离开比薩,又回到佛罗倫薩老家去。在这段困难时期里,有些朋友帮他找得拔都(Padua)大学教授的职务。那时官方的聘书上曾有下列一段語句[1]:“由于拔都大学前任数学教授木列替(Signor Moletti)去世,遺缺已久,因該职务极为重要,故認为須暫緩决定任何人选,以留待适当而有才能者遞补。玆已覓得加利略教授,彼在比薩講学时負有盛名,在同儕中首屈一指。彼現有意卽来該校講授此項課程,应予任命”。

1592 年 12 月 7 日,加利略开始了他的新任务,他的講演,不独是由于学識渊博,而且由于語言流利和詞句优美因而博得了崇高的贊誉。到拔都的头一年,他是异常活跃的。他的講演极为聞名,使得欧洲其他国家的学生都跑到拔都来听他講課,終于要一間能容納两千学生的大教室作为他講課之用。1594 年他写出著名的力学論文“力学”(Della Scienza Meccanica)。这篇論文中所有各种靜力学的問題都是用虛位移原理来論述的。这篇論文以手抄本的形式流傳很广。大約在此同时,关联到造船方面的一些問題,他又从事于材料力学的研究。不久天文学引起了加利略的注意。这是大家都知道的,当他在拔都的头一年,他还是按照当时的风气采用托勒玫系[2] (Ptolemaic,为第二世紀时埃及天文学家,譯者注)来进行講授的。但是早在 1597 年他写給克卜勒(Kepler,德国数学兼天文学家 1571～1630,譯者注)的信中,就說过:“多少年前,我便改信了哥白尼(Copernicus,波兰天文学家,1473～1543,首創地动說的人,譯者注)的見解。用他的理論来說明許多在相反的假說下完全不能解释的現象已經得到成功”。1609 年有一个傳說傳到拔都說是有人发明了一架望远鏡,加利略凭着这个不充分的消息制造成功了他自己的一架,放大率为 32 倍。利用这架仪器,他作出許多卓著的天文学上的发現。他指出銀河是由較小的星所組成,还描述了月球上多山的征象,并且在 1610 年 1 月第一次看見了木星的卫星。这个最新的发現对于以后的天文发展起了很大的作用,因为这个系統的运动肉眼可以見到,这就成为有助于哥白尼理論的一个强有力的論据。所有这些发現使加利略出了名。他以“特任的哲学家兼数学家”的身份被推荐到杜斯

[1] 見法海的著作,第 35 頁。
[2] Ptolemaic system。

坎尼（Tuscany，意大利西部地名，譯者注）公爵那里。1610年9月他离开拔都仍回到佛罗倫薩。在他的新职位上，除了継續他的科学研究之外，沒有別的任务。他以全部精力投入于天文学的研究中。他发現了土星特有的形狀，观察到金星的相位并描述了太阳上的黑子。

所有这些光輝的发現以及他热心于写作支持哥白尼理論的文章引起了教会的注意。他們将他那行星系的新观点和圣經上观点之間的矛盾提付审問，在1615年加利略接到半官方的警告，要他迴避神学，而只限于作物理的論証。1616年，哥白尼的偉大著作被教会定了罪，因之在以后的七年中，加利略停止了发表他在天文学上的論辯文章。1623年，加利略的朋友，也是素来敬慕他的人，馬費阿·巴伯里宁(Maffeo Barberini)被选为教皇。加利略盼望着他的天文著作可以得到較好的处境，于是开始写出他那关于两种不同宇宙观这一名著，这本书在1632年出版。但因为这本书肯定地支持了哥白尼理論，結果还是被教会禁止銷售，而且将他傳到罗

图 12 在阿斯提的加利略別墅中的起居室

馬受审。在罗馬他被判了罪并逼他改变自己的論点。他回到佛罗倫薩以后，在他的阿斯提(Arcerti，意大利地名)别墅里度完他最后八年全然隐居的生活。在那段时期他写出他的名著«两种新的科学»(Two New Sciences)[1]，书中扼要地陈述了以前他在力学中各方面的研究成果。这本书于 1638 年由莱登 (Leiden，荷兰海牙邻近都市名，譯者注)的阿尔齐菲斯(Elzevirs)出版商所出版 (图 13)。书中一部分談到建筑材料的力学性質和梁的强度，成为材料力学領域中的第一本著作，从那时起，彈性体的力学史也就开了端。

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

图 13　加利略著：«两种新的科学»一书的里封面

2. 加利略在材料力学上的貢献

加利略在材料力学上所有的貢献都包括在他所著"两种新的科学"一书中的起先两个对話里。他以參观威尼斯一家兵工厂时所作的几个观察作为开始，并討論

[1] 加利略著："两种新的科学"由 Henry Crew 和 Alfonso de Salvio 譯成英文，在 1933 年由紐約 Macmillan 公司出版。

到一些几何相似的結构物。他說，如果我們使結构物作成几何相似，則尺寸愈是增大，它們便变得愈为軟弱。在說明中，他說道："一个小型的方尖塔、柱子或其他固体形状，无論平放或者直立都不会发生断裂的危險，而那些很大的則在稍微触动一下就很容易崩散破碎，这完全是由于它們自己的重量所起的作用"。为了証明这点，他开始用簡单拉伸的方法来研究材料的强度(图 14)，說明了一根杆件的强度是与它的截面积成正比，而与其长度无关。他称杆子的这种强度为"断裂时的絕对抗

图 14 加利略的拉伸試験示意图

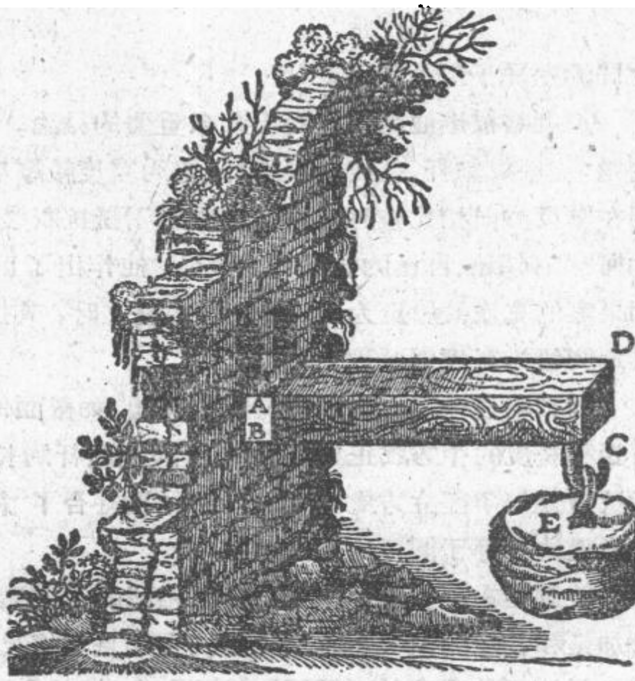


图 15 加利略的弯曲試験示意图

力"，并且給出了关于銅的极限强度的一些数据。得出了一根杆子的絕对抗力后，他便进而研究同一杆子用作悬臂梁而在自由端載以荷重使之折断时的抗力(图 15)。他說："很清楚地，如果杆件断裂，裂口一定发生在 B 处，該处榫眼边緣充当杠杆 BC 的支点，而力就是作用在这里的；杆的厚度 BA 为杠杆的另一臂，沿 BA 存在着抗力。此抗力抵抗着墙外的 BD 部分与墙内部分相分离。从以上所述，可知作用于 C 处的力的大小对棱柱杆[1] 厚度处的抗力的大小之比（棱柱杆的厚度系指 BA 端和其接連部分的嵌接高度），等于 BA 长度之半对 BC 长度之比值"[2]。我們可以看到加利略的假定是：当发生断裂时"抗力"是均匀地分布在截面 BA 上的(图 16b)。假設此杆为矩形截面，而且材料在断裂以前一直服从虎克定律，我們得出如图 16c

[1] Prismatical Bar.

[2] 見"两种新的科学"英譯本，第 115 頁。

所示的应力分布情况。相应于此应力分布的抗力偶仅等于加利略所假設的力矩的三分之一。于是对于这种材料，根据加利略的理論所得出的数值要比C点的实际断裂載荷値大三倍。实际材料在破坏以前并不服从虎克定律，而且在断裂时的应力分布也与图16c所示的不同，按照这样的一种說法，就能把加利略理論所預測的和断裂載荷实际数値之間的差异予以消除了。

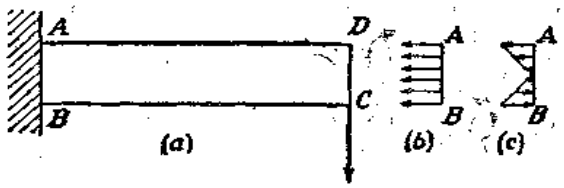


图 16

加利略根据他的理論得出几条重要的結論。他对一根矩形梁提出了这样一个問題："一根細杆，甚或一根粗杆，它的寬度較厚度为大，当力作用在寬度方向与作用在厚度方向相比較时，試問它們对于抵抗断裂的能力究竟何者为大而其比例又如何？" 利用他自己的假設（图16b），他作出了正确的答案："任一条木尺或粗杆，如果它的寬度較厚度为大，則依寬边豎立时，其抵抗断裂的能力要比平放时为大，其比例恰为寬度对厚度之比"[1]。

加利略进一步討論了悬臂梁的問題，如截面保持不变，他断定由梁重所产生的弯矩和长度的平方成正比。如果使圓截面杆的长度不变而改变其半徑，加利略发覚抗力矩与半徑立方成正比。此一結果符合了"絕对"抗力与圓杆截面积成正比而抗力偶的臂等于圓杆的半徑这一事实。

談到在本身重量作用下的几何相似的悬臂梁，加利略的結論是：固定端的弯矩增加是和长度的四次方成正比而抗力矩是与綫尺度的三次方成正比。这說明了几何相似的梁其强度并不等同。尺寸愈大，梁就愈弱，最后，当梁的尺寸甚大时，它們会只由于其自重作用而破坏。他更观察到要保持强度不变时，截面尺寸的增加率一定要比长度增加率大些。

有了这些見解以后，加利略写出下面的重要議論："你們能清楚地知道，无論是人工的或天然的結构物，都不可能将尺寸增加到非常大；同样也不可能将船只、宮殿或庙宇造得非常巨大而能使它們的船桨、庭院、梁、鉄螺栓以及其他部件都能結合在一起；自然界也不能生出异乎寻常的大树，因为树枝在其本身重量作用下是会折断的；因此倘若人的、馬的或其他动物的身体高度增加得异常高，那末这些动物的骨胳組織就不可能結合在一起来完成其正常机能；因为高度增加只能由較平常的骨胳更硬更强力的質料或者借放大骨胳才能达到目的，这样会改变它們的形体，以至使它們的形狀变成一个巨灵怪物……。如果縮小一物体的尺寸，該物体的强度

[1] 見"两种新的科学"英譯本，第118頁。

幷不按同样比例減小；实际上物体愈小，它的相对强度反愈提高。因此，一只小狗也許能在它的背上駝起三只同它一样大的狗；但是我相信一匹馬就甚至連一匹和它一样大的馬也駝不起”[1]。

加利略还研究过擱在两个支座上的梁（图 17），发現了在載荷下面弯矩最大，幷和 ab 乘积成正比，因此产生破坏的最小載荷必須擱在跨度中央。他观察到減小靠近支座处的截面尺寸能实現节省材料的目的。

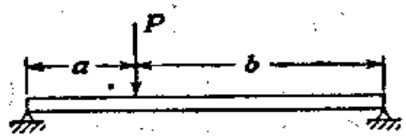


图 17

加利略对截面为矩形的等强度悬臂梁的形狀作出一个完整的推导。他首先考虑一根等截面梁 $ABCD$（图 18a），認为可以从該等截面梁中減省一部分材料而不致影响其强度。他又指出如果我們将材料节省一半使梁成为楔体 ABC，在任一截面 EF 处的强度即将不足，因为当 EF 处的弯矩对 AB 处的弯矩之比等于 $EC:AC$ 时，与梁高度的平方成比例的抗弯矩在这些截面处的比例将成为 $(EC)^2:(AC)^2$。要使抗弯矩与弯矩依同样的比例而改变，我們便須采取拋物綫 BFC（图 18b）。它能滿足等强度的要求，因为在一条拋物綫中，

$$\frac{(EF)^2}{(AB)^2}=\frac{EC}{AC}。$$

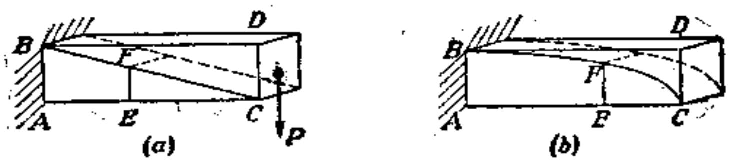


图 18

最后，加利略討論到空心梁的强度，他說明象这种梁[2]：“因不須增加重量而能大大提高强度，故在工艺上应用很广，——在自然界則更为普遍。象这类例子实在太多；例如鳥类的骨和很輕的而能高度抗弯和抗断裂的各种芦葦秆。一根麦秆所負載的麦穗較整个麦秆要重得多，如果麦秆是用同样多的材料作成实心形狀，那末它将減低其抗弯和抗断裂的能力。一根空心枪杆或一根木制或金属制的管子比同长度同重量的实心杆要强得多，这是一个已在实际应用中被証实的經驗…”。将同样截面积的空心圓管和实心杆相比較，加利略看到它們的絕对强度是相同的，但由于抗力矩等于其絕对强度乘以外半徑，故管子的抗弯强度超出实心杆的抗弯

[1] 見“两种新的科学”英譯本，第 130 頁。

[2] 同上注，第 150 頁。

强度是与管子直徑超出圓杆直徑两者的比例相同的。

3. 国立科学院的組織

在十七世紀年代，数学、天文学以及各种自然科学都有了飞速的发展。許多学者对科学都发生了兴趣，而实驗工作特別受到重視。当时許多大学都被教会所控制，这是不利于科学发展的，因此有些欧洲国家組織了一些学会。它的目的是把热心于科学的人士联合起来以便于进行实驗工作。这个运动是 1560 年在意大利开始的。在那不勒斯(Naples)組織了自然秘密研究会(Accademia Secretorum Naturae)。1603 年又在罗馬成立了著名的灵巧学会 (Accademia dei Lincei)，加利略便是会員之一。加利略去世后由于菲定那・梅底西 (Ferdinand dé Medici)公爵和他的兄弟里奥波尔德 (Leopold) 的支持，在佛罗倫薩也組織了西門脫学会 (Accademia del Cimento)。加利略的学生菲菲安尼 (Viviani) 和托里西利 (Torricelli) 都參加了該学会的工作。在該学会发行的許多书刊中，大部分篇幅都是那些有关溫度計、气压計和摆各方面的問題，以及关于真空的各种实驗上的問題[1]。

英国大約在同一时期也由于对科学发生兴趣使許多人自己組合起来，一有适当机会便聚集在一起来开会討論。数学家华里斯(Wallis) 描述过这些非正式的聚会情况如下："大致在 1645 年，我那时正在倫敦，除了和各种著名的神学家討論一些神学方面的事情以外，我时常有机会和研究自然科学以及人文学其他部門知識的許多有威望的人士接触；特别是那些称为"新哲学"或"实驗哲学"方面的人士。我們是大家事先約好了的，每星期的某天某小时在倫敦聚会一次，利用一定的罰款和每星期的捐献来作为实驗开支。并且大家协議通过一些規則来处理和討論这些事务……我們的工作是 (不涉及神学和政治事务) 探討和研究科学上的查詢函件，例如有关于物理学、解剖学、几何学、天文学、航海学、統計学、磁学、化学、力学以及自然实驗科学等，并将当时国内外研究出来的这类学术上的情况加以討論。我們研究过血液的循环，脉管的瓣閥，哥白尼假說，彗星和新星的性質，木星的卫星，土星的卵圓形狀[在那时呈現这种形狀]，太阳中的黑子，及太阳的自轉，月球的均差 (Inequality) 和月面学，金星与水星的各种周相，望远鏡的改进及为此目的的磨鏡問題，空气的重量，真空的可能性与不可能性及自然对真空的不相容性，托里西利 (Torricelli)的水銀柱实驗，重物的落下及其加速度；以及許多类似性質的其他事物。其中有些是那时的新发現，有些是直到現在人們还不很了解它，这些課題連同其他事物都属于所謂"新哲学"的范圍，它从佛罗倫薩的加利略时代起，也从英国的佛兰西斯・倍根 (Sir Francis Bacon，或称 Lord Verulam) 时代起，已

[1] 見"自然科学实驗的記載"(Saggi di Naturali Esperienze)，第 2 版，1691 佛罗倫薩。

經在意、法、德和其他海外国家跟我們英国一样不断地在进行研究。这些集会在倫敦一直継續下去……后来以皇家学会(Royal Society)等等名称合并起来一直継續到現在"[1]。

登記証签准的那天(1662 年 7 月 15 日)取定为皇家学会成立的日子。在被邀請为学会会員的名单中，我們发見有物理学家与化学家罗伯特·波义耳 (Robert Boyle)，建筑师与数学家克里士多佛尔·伍侖 (Christopher Wren)，以及数学家約翰·华里斯 (John Wallis) 等人的名字。罗伯特·虎克 (Robert Hooke) 被任命为学会主持人,他的責任是"为每一次聚会筹备一切,并且要准备三四个重要实驗"。

法国科学会也是由一些科学家的非正式聚会而开始的。法則·麦逊尼(Father Mersenne，1588～1648)一直贊助和主持这个学会直到死去为止,加逊底(Gassendi)，笛卡儿 (Descartes) 以及拔斯噶 (Pascal) 这些人曾参加过一系列的会議。后来这些科学家的私人聚会在哈伯特·孟特木尔 (Habert de Montmor) 的住宅里継續举行。1666 年,路易十四的首相科尔伯特 (Colbert) 組織了官办的科学院,会員概由各方面的科学专家充任。数学家罗伯佛 (Roberval)，天文学家薩沁尼 (Cassini)，丹麦物理学家魯麦尔 (Römer) (測出光速的人)，以及法国物理学家馬里沃特(Mariotte)都在科学院第一批会員名单內出現[2]。

以后不久(在 1770 年),德国柏林科学院組織成功,而在 1725 年俄国科学院也早在圣彼得堡成立了。所有这些科学院都出版学报，它們对十八世紀及十九世紀的科学发展具有很大的影响。

4. 虎克(Robert Hooke, 1635～1703)[3]

罗伯特·虎克出生于 1635 年,他是住在怀特 (Wight) 島 (在英吉利海峽內——譯者注)上的一个牧师的儿子。小时候身体很孱弱,可是他自小就热爱制造活动玩具和画图。十三岁上,进了魏斯特明斯特 (Westminster) 学校,住在校长布斯毕 (Busby) 博士家中，在那儿他学会了拉丁文,希腊文和一些希伯莱文,由此而精通了欧几里德原理以及其他数学論題。1653 年，虎克被派到牛津基督教堂充当唱歌队的指揮員，这个职位給予他一个継續学习的机会，因此在 1662 年他得到工艺

[1] 見亨利·里昂斯 (Sir Henry Lyons) 所著："1660～1940 年的皇家学会"(The Royal Society, 1660～1940)，1944。

[2] 見伯特朗德 (J. L. F. Bertrand) 著："1666～1793 年的科学院及其会員" (L' Académie des Sciences et les Académiciens de 1666～1793)，1869 巴黎。

[3] 見耿塞(R. T. Gunther)在"牛津的早期科学" (Early Science in Oxford) 卷 6～8 所写的"罗伯特·虎克的生平与成就" (The Life and Work of Robert Hooke)。并参看安德雷德 (E. N. Dac. Andrade) 刊在皇家学会学报 (Proc. Roy. Soc.) 卷 201，第 439 頁上的文章，1950 倫敦。本节所引文字，就是从这些书刊里面直接摘来的。

碩士学位。在牛津他接触了一些科学家，由于他是一个熟練的技师，他帮助他們进行过研究工作。大致在 1658 年他和波义耳合作完成了一架空气唧筒。他写道："大約在我得到瓦德(Ward)博士的帮助熟悉了天文学的同时，我致力于改进观测天文所用的摆，而且我想出了一个方法使摆的运动継續不停……經过几次試驗，我的理想实現了。这些成功使我更想进一步改进它来求經度，而且我在力学发明上自己創造的一套办法很快地启发我用彈簧来代替重力使物体在任何情况下发生振动"。这說明了他用彈簧作实驗的开始。

1662 年，經罗伯特・波义耳的推荐，虎克担任了皇家学会的实驗室主任，他的力学知識和創造才能被这个学会很好地加以运用。他一直打算着設計一些仪器来証实他自己的理想，或者来說明并澄清会員們在討論中所引起的任何論点。

1663～1664 年間，罗伯特・虎克轉而致力于显微术，1665 年他的著作"显微学"(Micrographia) 出版了[1]。在那本书里面我們不独看到关于虎克对显微鏡的报导，而且还叙述了他的重要新发現。虎克想出"光是一种与傳播直綫成横交的很短的振动"的概念，他說明了肥皂泡因光的干涉所发生的色彩与牛頓环的現象。

1664 年，虎克成为格雷斯罕 (Gresham) 学院的几何学教授，但他仍継續向皇家学会发表他的实驗、发明和描述新仪器的文章，和讲授他的武术課 (Cutlerian Lectures)[2]。

1666 年 5 月 3 日在皇家学会一次聚会上，虎克說道："我将說明与現在任何人所想象的极不相同的一个世界系統，它是在下列三种情况上被发現的"：

"I. 所有的天体不独它們的各部分对它們自己的共同中心有引力存在，而且在作用范圍內物体彼此之間也存在着引力。

"II. 一切具有簡单运动的物体将継續沿直綫运动，除非被偏斜的外力継續不断地作用其上，才会使它們的运动軌迹改变成为一个圓、一个椭圓或其他曲綫形狀。

"III. 物体相距愈近，这种引力将愈大。关于增大距离以使此力減小的問題，其中比例如何，虽然我为此做过一些实驗，但我自己(說他本人)沒有找出結果来。我将留待对这一工作有充分时間和知識的人来完成它"[3]。

我們看到虎克对于万有引力是有过淸楚的概念的，不过，似乎他还缺乏数学知識来証明开普勒定律(Kepler's laws)。

[1] 見"牛津的早期科学"卷 13。

[2] 見上注，卷 8。

[3] 見約翰・魯宾遜(John Robinson)著："机械科学原理"(Elements of Mechanical Philosophy) 284 頁，1804，爱丁堡。

在 1666 年 9 月的倫敦大火之后，虎克作出一个重建城市的模型和建議书，因此倫敦市的行政首长請他担任測量师。他在这次重建工作中很积极，并設計过几幢房屋。

1678 年，"彈性能"(De Potentiâ Restitutiva 或称"彈簧" Of Spring)这篇論文出版了。它包含了虎克对于彈性体实驗的結果。这是第一次刊行的討論到材料彈性的論文。文中在提到实驗工作时，他說："取一根长 20，或 30，或 40 呎长的金属絲(图 19)[1]将其上端和釘子系牢，他端系上一个彈簧秤以承受法碼：于是用一只两脚規量出自秤盘底面与地面間的距离，将該項距离記下，再将几个法碼加到秤上，量出該金属絲的几个伸长量，将它們記下来。最后比較該金属絲的几个伸长量，便可看到由法碼所造成的伸长量彼此間一直存在着同样的比例"。虎克也描述过用螺旋彈簧，用成圈的表彈簧，以及用"一端固定于水平位置、他端挂上重物使它向下弯曲的、既能弯过去又能彈回来的一根干燥木杆"的几种实驗。他不独討論了这根梁的撓曲，而且研究了縱向纖維的变形，并作出了重要的說明：当弯曲时，在凸面上的纖維被拉长了，而在凹面上的纖維被压縮了。从这些实驗里面，虎克得出如下的結論来："很显然，在任何彈性体內的自然規律和定理是，物体使自己回到自然位置的力和功率始終与所移动的距离或空間成正比，无論它的各部分是处于相互分离的稀疏狀态或其各部分是处于相互挤紧的紧密狀态都是这样的。这类現象不仅在上述各种物体中可以观测到，在其他多少带有彈性的物体上，例如：金属、木料、石块、干土、毛发、兽角、絲、骨胳、筋肉、玻璃及同类物体中都可以观測出来。所应考虑的只是在物体被弯曲的各自的形状以及弯曲这些物体的方法是方便或不方便的問題。从这个原則出发，很容易算出各种弓……以及古人所用的弩炮的强度……也很容易算出表彈簧的适宜强度……同样也很容易說明一只彈簧或受拉繩索的等时振动的原因，以及由这些物体的振动快到足以发出听得到的声音时会产生同一声調的原因。由此也說明了为什么一根彈簧作用在一只表的摆輪上能使其振动相等，无論它們是較大的或較小的……由此也很容易造出一个不須放置砝碼的科学研究用的秤(philosophical scale)来測驗任一物体的重量……我所設計的这种秤是用来測驗物体对地心的引力，即測驗在距离地心更远的物体是否对地心不失去它們的些微能力或作用趋势……"。

罗伯特·虎克不单創立了力的大小与力所产生的变形之間的关系，而且作出了几种能利用这一关系来解决許多很重要問題的实驗。这种力与变形間的綫性关系便称为虎克定律，在以后它被用作彈性力学进一步发展的基础。

[1] 图 19 是从虎克的論文中引来的。

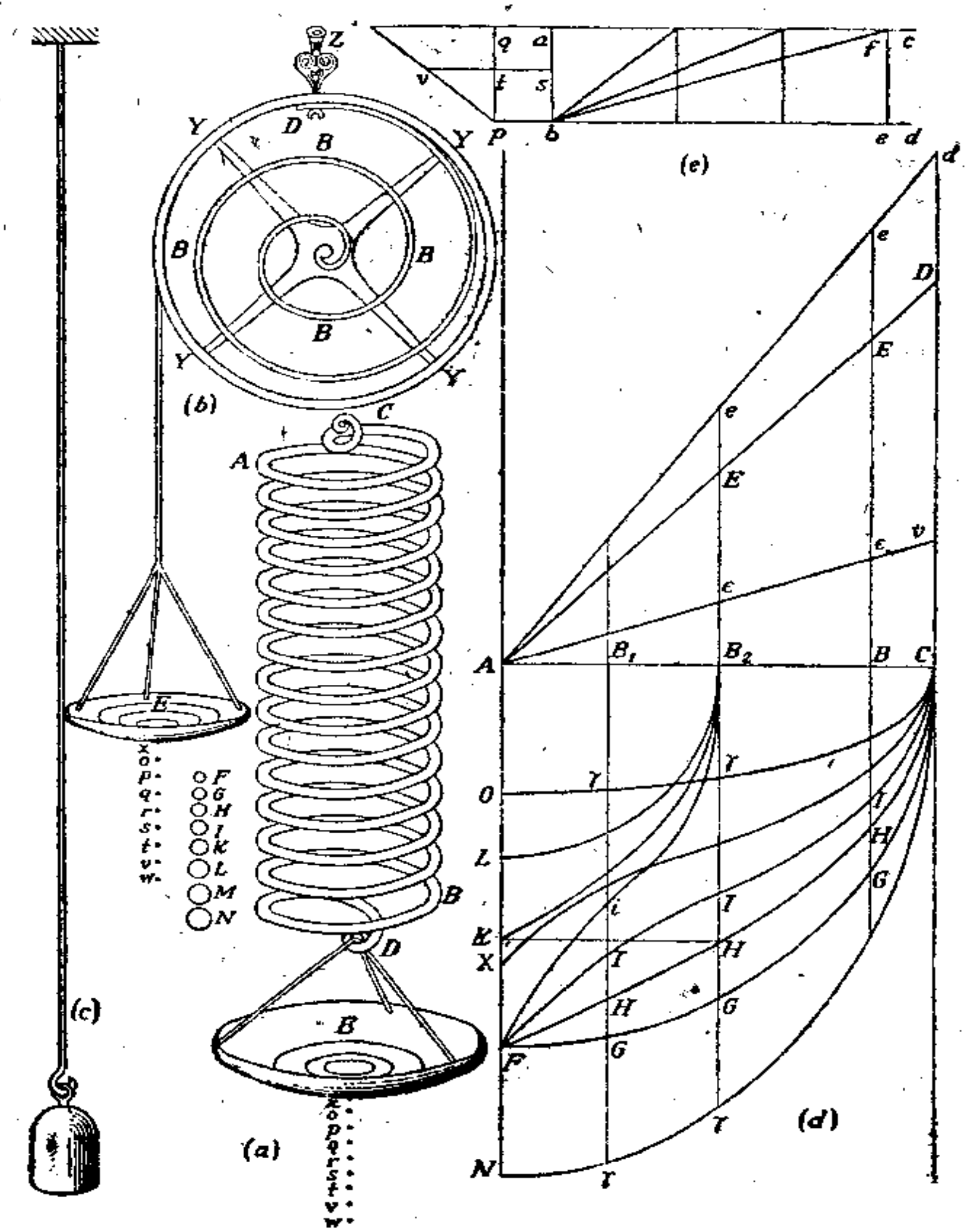


图　19　虎克作实驗用的装置

5. 馬里沃特(Mariotte)

馬里沃特(1620～1684)在迪容(Dijon，——巴黎东南的一个地名，譯者注)度过他一生中大部分的时間，他在那儿充当圣-馬丁-騷斯-彪恩(St.-Martin-Sous-Beaune)修道院的院长。他是法国科学院1666年第一批会員中的一員，他将实驗方法介紹到法国来为法国科学界出了很大的力。他的空气实驗归結为有名的

波义耳-馬里沃特定律，此定律說明了在温度不变的情况下，一定质量的气体其压力与体积的相乘积保持不变。

在固体力学方面，馬里沃特創立了冲击定理，他利用悬挂在繩索上的小球来說明动量守恒。他发明了冲击摆。

馬里沃特在一篇流体运动的論文[1]里包括了他对彈性力学方面的研究。他曾設計过通向凡尔塞宮的一条供水管綫，設計的結果使他对于梁的抗弯强度发生了兴趣。利用木杆和玻璃杆做实驗，他发現加利略理論所得的断裂載荷値过大，因之提出了他自己的弯曲理論，在他的理論中已將材料的彈性考虑在內。

他作了簡单拉伸試驗。图 20a[2] 表示在他的木材拉伸試驗中所采用的装置方法。图 20b 中表示紙的拉伸試驗。馬里沃特不独重視材料的絕对强度，而且也重視它的彈性，他发現在所有試驗过的材料中，其伸长量与所加的力成正比。他說明当伸长量超过某一极限时材料便发生断裂。在他討論悬臂梁的弯曲时（参看图

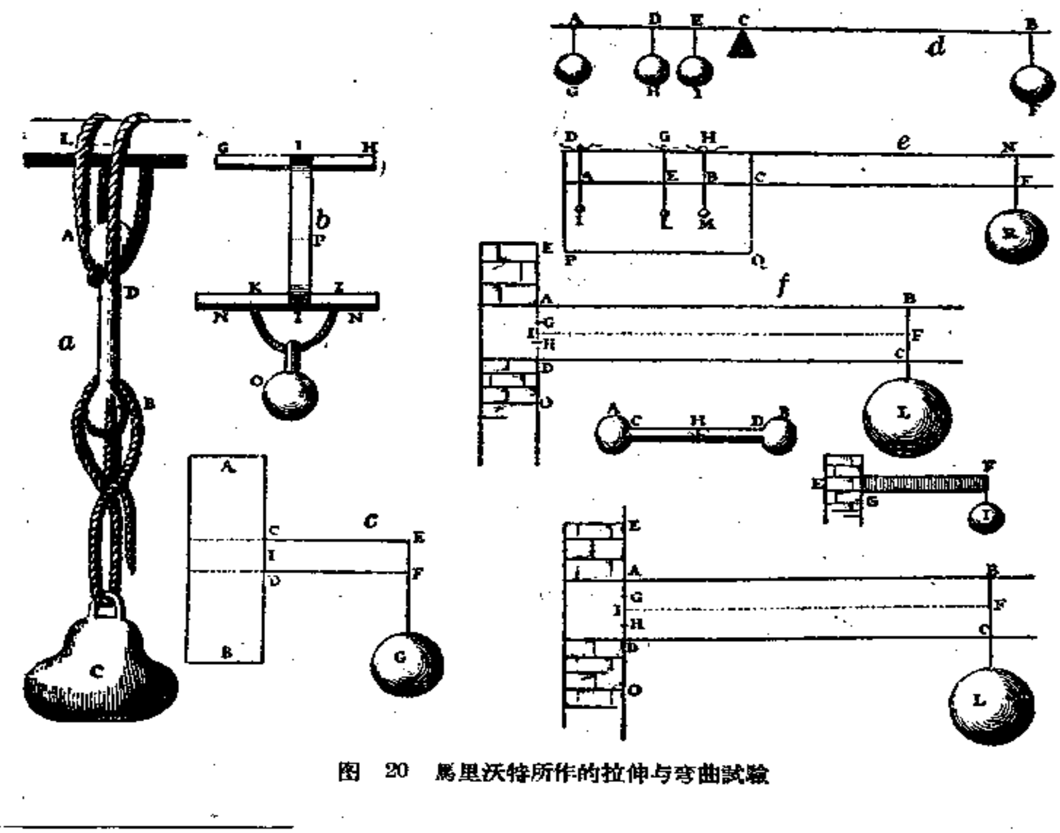


图 20 馬里沃特所作的拉伸与弯曲試驗

[1] 这篇論文在 1686 年馬里沃特刚去世不久由海日 (M. de la Hire) 將它出版。并参看馬里沃特集子第二卷，1740，海牙刊第二版。

[2] 图 20 是从馬里沃特文集中取用的。

20 c)，他首先考察支于 C 点处的一根杠杆 AB（图 20d）的平衡。在杠杆的左臂上，挂上三个等載荷 $G=H=I=12$ 磅，距离分别为 $AC=4$ 呎，$DC=2$ 呎，$EC=1$ 呎。为了平衡它們，在 $BC=12$ 呎处加上載荷 F，必須使 $F=7$ 磅。假設将載荷 F 增大稍許，杠杆将繞 C 点旋轉。A，D 及 E 各点的位移将与离 C 点的距离成正比，但加在那些点上的力仍等于 12 磅。現在考察同样的杠杆，但假定載荷 G，H，I 用三根同样的金属絲 DI，GL，HM（图 20e）来代替，金属絲的絕对强度等于 12 磅。在計算使各金属絲发生断裂的載荷 R 时，馬里沃特观察到当金属絲 DI 所受的力到达极限值 12 磅时，GL 和 HM 两根金属絲所受的力与各自的伸长量成比例，将分别为 6 磅及 3 磅，因之极限載荷 R 只为 $5^1/_2$ 磅，而不是和前述情况中一样的 7 磅。

馬里沃特用同一理論来研究悬臂梁的弯曲（图 20f）。假定在断裂时梁的右面一段繞 D 点旋轉，他的結論是：在其縱向纖維中所受的力与其去 D 的距离成同样的比例，由此可見，在一根矩形梁的情况下，这些力的总和将等于 $S/2$（即梁的絕对强度只有一半受拉力），而且它們对 D 的力矩将是 $\frac{S}{2}\times\frac{2}{3}h=\frac{Sh}{3}$，式中 h 为梁的高度。将此值与所加載荷 L 的力矩 Lh 列成等式，即可求出极限載荷为

$$L=\frac{Sh}{3l} \tag{a}$$

因此，将纖維的变形考虑进去，并且和加利略所做过的一样，利用同一旋轉点 D，馬里沃特求出弯曲的极限載荷 L 与絕对强度 S 之比等于 $(h/3):l$。这就說明了极限載荷只等于加利略所算得的結果之 2/3。

接着馬里沃特进行了更进一步的分析，仍然引用上述的矩形梁（图 20f），他观察到横截面下面部分 ID 的纖維呈压縮状态，而上面部分 IA 的纖維呈拉伸状态。他采用公式 (a) 来計算克服受拉纖維的抗力所需的載荷 L，并将 $h/2$ 代替 h，得出

$$L_1=\frac{Sh}{6l} \tag{b}$$

关于横截面下面部分 ID 的受压纖維，馬里沃特假設受压时力的分布定律也和受拉的情况相同，而且极限强度也相同。因此，由受压纖維形成的梁的强度其作用也将等于 L_1，如公式 (b) 所示。总强度則如上述公式 (a) 所示。在馬里沃特的分析中，我們看到他在彈性梁內所用的应力分布理論是很适当的。他那关于纖維中应力分布的假設也是正确的，不过在計算对于 I 点的拉力力矩时，不仅要用 $h/2$ 代替 (a) 式中的 h，而且也要用 $S/2$ 代替式中的 S。这个錯誤使得馬里沃特不能对材料服从于虎克定律直到断裂为止的梁作出計算梁断裂的正确公式。

为了証明他的理論，馬里沃特用直徑为 1/4 吋的木質圓杆作过实驗。由拉伸試驗得出絕对强度为 $S=330$ 磅。将此杆作为长度 $L=4$ 吋的悬臂梁[1]来試驗，他求出极限載荷 $L=6$ 磅，得 $\frac{S}{L}=55$，但由公式(a)得出 $\frac{S}{L}=48$[2]，而由加利略理論却得出 $\frac{S}{L}=32$。馬里沃特企图解释他的实驗結果不能与公式(a)的計算結果相符是由于“时間效应”之故。他說，受拉試件在載荷 300 磅作用下如果載荷作用时間很长，則裂口将裂开得更大。当他用玻璃杆重复实驗后，馬里沃特再发現到用他的公式(a)算出的数值比加利略所得出的要精确得多。

这位法国物理学家也曾用两端支承的梁进行过試驗，他发現两端固定的梁所能負載的中央載荷的极限值較之同样尺寸的簡支梁所負載的大出 1 倍。

利用一系列有趣的試驗，馬里沃特发現了在水靜压力作用下管子抵抗脹裂的强度，为此目的，他用一个圓柱形桶 AB (图 21)，桶上接連一根垂直的长管子。将水注入管子和桶中去，使管中水面高度逐漸升高[3]，最后它能使桶脹裂。用这样方法他断定了管壁所需厚度必須与內压力以及管的直徑成正比。

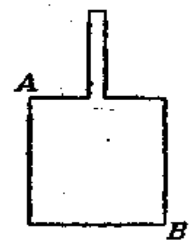


图 21 馬里沃特作脹裂試驗所用的圓柱形桶

在处理方形板受均布載荷的弯曲时，馬里沃特根据同样的研究，正确地确定了如果厚度完全相同，則板上总的极限載荷将保持定值，而与板的大小无关。

在这里我們可以看到馬里沃特大大地丰富了彈性体的力学理論。由于提出了考虑彈性变形的結果，他改进了梁的弯曲理論，并利用实驗来校核他的假說。他用实驗校正了加利略关于“梁的强度隨跨长而变更”这方面的一些結論。他研究了将梁的两端固定后对梁的强度的效应，并且得出管子脹裂强度的公式。

---

[1] 馬里沃特在他的論文中提到这些試驗是在罗伯佛(Roberval)和黄琴斯(Huyghens)两位在場时做出来的。

[2] 注意公式(a)是从矩形截面梁推导出来的，而馬里沃特将它用到圓形截面梁。

[3] 在这些試驗中，水头接近 100 呎。

第二章

彈性曲綫

6. 数学家伯諾里(Bernoulli)[1]

伯諾里的家族原先住在安特韦普(Antwerp，原属荷兰現属比利时——譯者注)，因受阿尔巴(Alba)公爵的宗教迫害，他們才离开荷兰，在十六世紀末叶搬到巴塞尔(Basel，瑞士地名，临近德、法两国。——譯者注)安家立业。从十七世紀末叶起将近一百年中这一族出过一些出色的数学家。1699年，法国科学院选举了雅可普·伯諾里(Jacob Bernoulli)和約翰·伯諾里(John Bernoulli)两兄弟为外籍会員，直到1790年，这个組織里面总有他們这一族的典型人物参加。

图 22 雅可普·伯諾里

十七世紀的最后二十五年到十八世紀的开初，微积分学开始迅速地发展。最初是由欧洲大陆的萊布尼茲(Leibnitz，1646～1716)[2]开始的，而主要的发展还是雅可普·伯諾里和約翰·伯諾里两兄弟的功績。为了扩展此种新数学的应用范圍，他倆討論过許多力学和物理学上的例題。有一个例題是由雅可普·伯諾里(1654～1705)提出来的[3]即关于彈性杆撓度曲綫的形状，从此他开創了彈性体力学中重要的一章。其实，加利略和馬

[1] 关于他的傳記，可参看彼得·麦里安(Peter Merian)著："数学家伯諾里"(Die Mathematiker Bernoulli)，1860，巴塞尔。

[2] 在英国牛頓独立地发展了积分原理，但在欧洲大陆上萊布尼茲的表示方法及其記数法在这門数学的迅速成长中已被采用。

[3] 經过1694年出版的萊布尼茲所著"利普賽学者的功績"(Acta Eruditorum Lipsiae)一书对此問題作出一些初步討論之后，他將他对此問題的最后見解刊入"巴黎科学院史"(Histoire de l'Académie des Sciences de Paris)，1705。并参看"雅可普·伯諾里的論文集"(Collected Works of J. Bernoulli) 2卷，976頁，1744，日內瓦。

里沃特不过研究了梁的强度，而雅可音·伯諾里却作出了梁的撓度計算；他沒有对我們貢献关于材料物理性能方面的知識。根据馬里沃特对中性軸位置的假定，他在凹面的一边作一条切綫到截面边界上并使与外力作用面相垂直。他考察了一端固定、他端負一載荷P的矩形梁，繪出梁的撓度曲綫，如图23所示。設$ABFD$为梁的一个元素，其軸向长度为ds。在弯曲时，如果截面AB相对于截面FD繞A軸而旋轉，則两相邻截面間纖維的伸长与去A軸的距离成正比。設依据虎克定律，并以Δds表示凸面一边最外层纖維的伸长量，即可求出在截面AB上所有纖維的拉力的合力为

$$\frac{1}{2}\frac{m\Delta ds}{ds}bh \qquad \text{(a)}$$

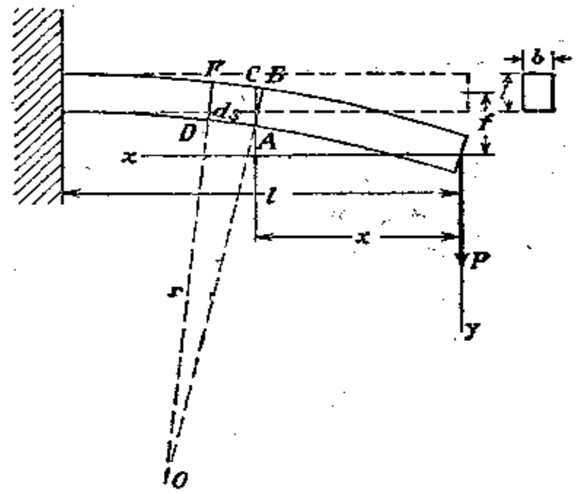


图 23

其中bh为截面积，而m为一常数，視材料的彈性而定。此合力对A軸的力矩必須与所加外力对同一軸的力矩Px相等，因此我們得出方程式

$$\frac{1}{2}\frac{m\Delta ds}{ds}bh\cdot\frac{2}{3}h=Px \qquad \text{(b)}$$

可知

$$\frac{\Delta ds}{ds}=\frac{h}{r}$$

将公式(b)写成

$$\frac{C}{r}=Px \qquad \text{(c)}$$

式中

$$C=\frac{mbh^3}{3}。$$

由于雅可音·伯諾里对截面AB的旋轉軸作出了錯誤的假定，我們看出他所假定的常数C的值是不正确的。不过公式(c)的一般形式說明了撓度曲綫上每一点的曲率与各該点处的弯矩成比例是正确的，而且后期的数学家(主要是欧拉)都用它来研究彈性曲綫。

約翰·伯諾里(1667～1748)是雅可音·伯諾里的弟弟，被认为是当时最偉大的数学家。由于受他教育的結果，馬奎斯·德拉荷比脫(Marquis de l'Hôpital)在1696年写出了最早的一本积分学。約翰·伯諾里在微分方面的原稿却到1922年才由巴塞尔科学研究学会(Naturforschende Gesellschaft of Basel)刊印出来，正好

那年就是伯諾里一族获得巴塞尔公民身分的三百周年。約翰·伯諾里写过信告訴范里囊(Varignon)[1] 說他已立出虛位移原理的公式。虽然他研究过材料的彈性,但他在这方面的貢献却不大[2]。实际上在材料力学上有重大貢献的人还是約翰·伯諾里的儿子丹尼尔·伯諾里(Daniel Bernoulli),还有他的学生欧拉(L. Euler)。

丹尼尔·伯諾里(1700~1782)因其名著"流体动力学"(Hydrodynamica)而极为出名,但他在彈性曲綫的理論上也是有貢献的。他曾經向欧拉建議,必須用变量积分来推导彈性曲綫的方程式,在他写給欧拉的一封信里写道:"因为沒有旁人能比得上你这么精通等周法(isoperimetric method)(卽变量积分),你一定能輕松地解答下列問題:怎样求出 $\int \frac{ds}{r^2}$ 的极小值"[3]。我們現在知道,这个积分代表了不計常数項的一根曲杆的应变能。欧拉根据这一建議果然得到成功,关于这点将在下面再加討論(参看第8节)。

丹尼尔·伯諾里是第一个导出棱柱杆側向振动微分方程的人,他应用此式研究了这种振动的特殊型式。这个方程的积分經欧拉解出,以后再会講到(参看第8节),但丹尼尔·伯諾里却作出一系列的实驗,他将所得結果写信給欧拉說:"这些都是自由振动,我已求出各种不同的情况,并且对于各节点的位置和音調进行过許多精确的实驗,它們都和理論密切符合"[4]。因此,丹尼尔·伯諾里不仅是一个数学家而且也是一个实驗家。他的某些实驗替欧拉提供了許多新的数学問題。

图 24 里奥納德·欧拉

7. 欧拉(1707~1783)[5]

里奥納德·欧拉出生于巴塞尔附近。他的父亲是雷申(Riechen,瑞士地名——譯者注)邻村的牧师。1720年,欧拉进了巴塞尔大学。这个大学自从約翰·伯諾里的講課吸引了欧洲各地青年数学家之后,已成

[1] 見范里囊著:"新力学"(Nouvelle Mécanique),2卷,174頁,1725,巴黎。

[2] 在約翰·伯諾里著"运动傳递理論"(Discours sur les loix de la Communication du Mouvement, 1727,巴黎)的前面三章对彈性理論有詳細的討論。

[3] 見伏斯(P. H. Fuss)所著:"数理通訊"(Correspondance Mathématique et physique)卷2,第26封信,1843,圣彼得堡。

[4] 見上注,卷2,第30封信。

[5] 見奥托·斯派司(Otto Spiess)著:"里奥納德·欧拉",萊比錫。并参看康朵塞特(Condorcet)的頌詞,刊在"欧拉給达倫美尼女王的信"(Lettres de L. Euler à une Princesse D'Allemagne),1842,巴黎。

为当时数学研究的一个很重要的中心。这位年輕学生的数学天才不久就引人注意，約翰·伯諾里在正規講課以外，每周还替他上私課。欧拉在十六岁上就得到了碩士学位，而在二十岁以前就参加过法国科学院悬奖的国际竞賽，并且发表了他的第一篇科学論文。

俄国科学院是1725年在圣彼得堡成立的。約翰·伯諾里的两个儿子，尼古拉斯·伯諾里（Nicholas Bernoulli）和丹尼尔·伯諾里（Daniel Bernoulli）都被聘为这个新学院的会員。他們到俄国以后，替欧拉在那儿找到一个准会員的工作。1727年夏天，欧拉也搬来圣彼得堡，由于脫离了任何其他职务，他就能将全部精力投入数学研究。1730年他成为該院物理部的一个会員，而在1733年，当丹尼尔·伯諾里因其兄去世（1726年）离开圣彼得堡而返回巴塞尔之后，欧拉接替了他的职位充任数学部主任。

欧拉在圣彼得堡俄国科学院工作期內写成了力学方面的名著[1]，他在該书里，介紹了分析法来代替牛頓及其学生們所用的几何法。他說明怎样推导一个质点的运动微分方程，以及怎样将这些微分方程加以积分来求出物体的运动。这种方法使問題求解得到簡化，因此該书在力学的往后发展上起了很大的作用。拉格朗日（Lagrange）在他所著："力学分析"（Mécanique analytique）（1788年出版）一书中說过欧拉的著作是力学中将积分应用到运动物体这門学科上的第一篇論文。

大概在他的著作发表的同时，欧拉热心于彈性曲綫的研究。而且，从欧拉与丹尼尔·伯諾里的通信中可以看到丹尼尔·伯諾里曾鼓励欧拉去解决彈性杆横向振动的問題，以及进行相关的微分方程的研究。

1740年腓特烈二世（Frederick the Great）做了普魯士国王。他对于科学和哲学都很重視，希望普魯士科学院能够拥有最优秀的科学家。那时，欧拉被公认为最出色的数学家，于是新王聘他为柏林科学院的会員。因为那时俄国的政局不稳，欧拉便接受了这一聘約，在1741年夏天搬到柏林。但他仍与俄国科学院保持联系，并继續在彼得堡科学院評論（Комментарии Академия петропочитания）[2]上发表許多研究报告。在柏林，欧拉继續作他的数学研究，而他的論文也經常在普魯士和俄国科学院的年刊上发表出来。

1744年出版了他的"曲綫的变分法"（Methodus inveniendi lineas curvas...）。

---

[1] "力学或科学分析方法解說"（Mechanica sive motus scientia analytice exposita）两卷集，1736，圣彼得堡；其后由沃尔伏斯（J. P. Wolfers）譯成德文，分別于1848及1850年在格萊斯瓦德（Greisward）出版。

[2] 俄国科学院的研究报告。

这是变分学中的第一本书，书中也包括了彈性曲綫方面第一次具有系統性的論文。这将留在后面再作討論。

欧拉在柏林期間写出了他的"微积分导論"(Introduction to Calculus)(1748年)，"微分学"(Differential Calculus)(两卷集，1755年)以及"积分学"(Integral Calculus)(三卷集)等书。"积分学"是在圣彼得堡出版的(1768～1770年)。以上这些书在数学界起过許多年的指导作用，可以說，所有生活在十八世紀末叶和十九世紀初期的一些著名的数学家全是欧拉的学生[1]。

自从毛渺求斯(Maupertuis)去世(1759年)之后，欧拉就主持該科学院，因此，他担任了許多行政工作。在七年战爭(1756～1763年普俄战爭——譯者注)的一段困难时期内，他四处筹款来支持这个科学院。1760年，柏林为俄軍侵占，欧拉的住宅遭到搶劫。但当俄軍司令塔特列本(Тотлебен)将軍知道了这件事以后，立即向欧拉致歉，并負責賠償他的損失。俄皇伊丽沙白(Elizebeth)也另外致送了比所賠償数字更大的一笔款子給这位数学家。

1762年，迦塞林二世(Catherine II)做了俄国皇帝。她也重視研究和发展科学，希望将俄国科学院加以改进。不久她和欧拉商量要他仍回圣彼得堡。迦塞林二世較之腓特烈二世更善于拉攏人才，因此在1766年当欧拉在柏林工作了二十五年以后仍回到圣彼得堡。在皇宮里他受到热烈的接待，而且迦塞林二世还賜給他一所住宅。他再一次不愁經济困难了，因此又全心全意进行科学研究。那时他已年近六十，視力很差。他从1735年起，一只眼睛已經失明，而另一只又开始生翳，后来他已接近于全瞎的地步了。但这并沒有阻碍他的积极性，在他晚年中每年所写的論文反較以前更多。欧拉有一些助手給他完成論文工作，他把新問題的全部資料以及所用到的解法提示助手。有了这些資料，助手們就能进行工作，再經过和欧拉深入討論之后，将討論結果写成論文，給欧拉最后校正。四百多篇論文就这样由这位老人在他的晚年(1766～1783年)中陆續写出，他死了四十多年之后，俄国科学院的年刊上还一直在刊載他的論文。

8. 欧拉在材料力学上的成就

作为一个数学家的欧拉，他对于彈性曲綫的几何形状最有兴趣。他毫无异議地接受了雅可普·伯諾里的理論：即一根彈性梁上任一点的曲率与該点处的弯矩成正比。根据这个假定，他研究了一根細长的彈性杆在不同載荷情况下所得曲綫的

[1] 康多響特(Condorcet)在他的頌詞中說过："目前所有成名的数学家都是他的学生；他的成就不是完全由論文形式反映出来的"(*Tous les mathématiciens célèbres qui existent aujourdhui sont ses éleves: il nén est aucun qui ne se soit form.; par la lecture de seè ouvrages...*)。

形状。欧拉在这方面的主要成果可从上述"曲綫的变分法"[1]一书中看到。他从变分学的观点研究这个問題，他已将这方面的主題列入該书内。在介紹此法时，欧拉观察到"由于宇宙的构造是最完美的，……，宇宙間任何事物从来沒有不出現极大和极小的一些关系。因此絕对不用怀疑宇宙間所有的效应都能借助于极大与极小法从最終原因加以充分說明，正象由一些有效原因（現实原因）本身所得出的一样……因此，摆在我們面前有两种研究自然界效应的方法：其一是根据有效原因，即通常所称的直接法，另一是根据最終原因……人們应該特别努力于了解这两种求解問題的門徑的共通性；这样，不独一种解答会被另一种解答給以有力的証实，而且，更重要的是由于两种解的結果一致后，我們会得到最大的满足"。欧拉提出一个悬鏈綫的問題来解释这两种方法。如果有一条鏈挂在 A 及 B 两点上（图 25），我們可用"直接法"得出平衡曲綫。然后我們考察曲綫上某一微分元素 mn 处所作用的力，并写下这些力的平衡方程。从这些方程中得出所求悬鏈綫的微分方程。但为了同一目的，我們也可用"最終原因法"(method of final causes) 考察重力的位能来解决这个問題。从所有那些几何学上可能表示的許多曲綫中凡能給出位能为最小值的便是所求的一根曲綫，換句話說，平衡曲綫也就是鏈的重心处于最低位置的那条曲綫。这样，問題便轉到求积分 $\int_0^s wy\,ds$ 的极大值，其中曲綫长度 s 为已知，w 为单位长度的重量。应用变分法則，即得出与上述一样的微分方程。

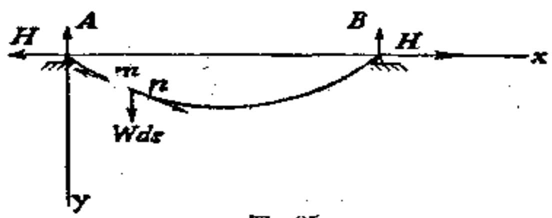


图 25

就一根彈性杆来說，欧拉指出建立彈性曲綫方程的"直接法"(direct method)已經被雅可普·伯諾里用过了（参看第 6 节）。至于应用"最終原因法"，欧拉需要一个表示应变能的式子，这里他采用了丹尼尔·伯諾里向他所提出的建議。他說："研究自然最精湛、最显著、最聪明的丹尼尔·伯諾里，曾向我指出他能用一个簡单的公式表出一根弯曲的彈性板条里面所儲有的全部的力，这个力他称之为位力(potential force)，这个表示式在彈性曲綫中一定是个最小值"，他还說（根据伯諾里的說法）："如果这根板条是等截面和富于彈性，而且能够拉直到原来位置时，曲綫的特征将是这样的，即在这种情况下，$\int_0^s \frac{ds}{R^2}$ 式子将为一絕对极小值"。欧拉应

[1] 这本书的附录，包括有彈性曲綫的研究，其英譯本是由奥尔得化則 (W. A. Oldfather)，艾里斯 (C. A. Ellis) 和布朗 (D. M. Brown) 譯出的。見 Isis, 20 卷, 1 頁, 1933, 布鲁治 (Bruges) 重印本。并参看德譯本，"东方的經典"(Ostwald's Klassiker) 175 頁。

用他的变分法,得出图 23 所示情况的弹性曲綫的雅可普·伯諾里微分方程为

$$C\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=Px \tag{a}$$

由于欧拉并沒有将他的討論局限于只考虑小撓度方面,在分母中的 y'^2 項是不能将它略去不計的,因此这个方程式是一个复杂的方程。欧拉用級数来积分,并指出如果撓度 f 很小(参看图 23),公式(a)将給出

$$C=\frac{Pl^2(2l-3f)}{6f} \tag{b}$$

如果我們略去分子中 $3f$ 这一項,便可得出悬臂梁自由端撓度的一般公式,即

$$f=\frac{Pl^3}{3C} \tag{c}$$

由于撓曲的关系,长度 l 总是較該杆的原长略微小些,基于这一事实,略去 $3f$ 这一項是可以容許的。

欧拉沒有討論到常数 C 的物理意义,此常数他称之为"絕对彈性"(absolute elasticity),仅說明它与材料的彈性有关,以及在矩形梁的情况下,它与梁寬成正比并与梁高 h 的平方成正比。我們看到欧拉的錯誤在于假定 C 与 h^2 成正比,而不是与 h^3 成正比。他建議通过实驗来决定 C 值时必須采用公式(b),这个建議曾为許多实驗家所信奉[1]。

欧拉考察了图 26[2] 中所示的各种弯曲情况,根据力 P 的作用方向与載荷作用点的切綫之間的夹角大小,将相应的彈性曲綫分为几种类型。当此角极小时,就能得出柱在軸向压力作用下压屈的重要情况。欧拉指出(参看图 26 中的柱 AB)在这种情况下很容易解出彈性曲綫方程,而且在发生压屈时的載荷也可由下述公式求得:

$$P=\frac{C\pi^2}{4l^2} \tag{d}$$

他說:"因此,除非載荷 P 大于 $\frac{C\pi^2}{4l^2}$,絕对用不着担心弯曲发生;反之,如果 P 的重量大于此值,柱子就不能抵抗弯曲。当柱子的彈性保持不变且其厚度也同样保持不变时,它能安全承載的重量 P 将与柱子高度的平方成反比;而柱子高度增加一倍时却只能担負載荷的四分之一"。从这里我們看到,两百年以前欧拉已經建立了柱的压屈公式,这个公式在目前分析工程結构物的彈性稳定上得到了广泛的应用。

[1] 例如,見吉拉德 (P. S. Girard) 著"固体抗力分析論" (Traité Analytique de la résistance des Solides), 1798, 巴黎。

[2] 此图由欧拉原稿中摘来。

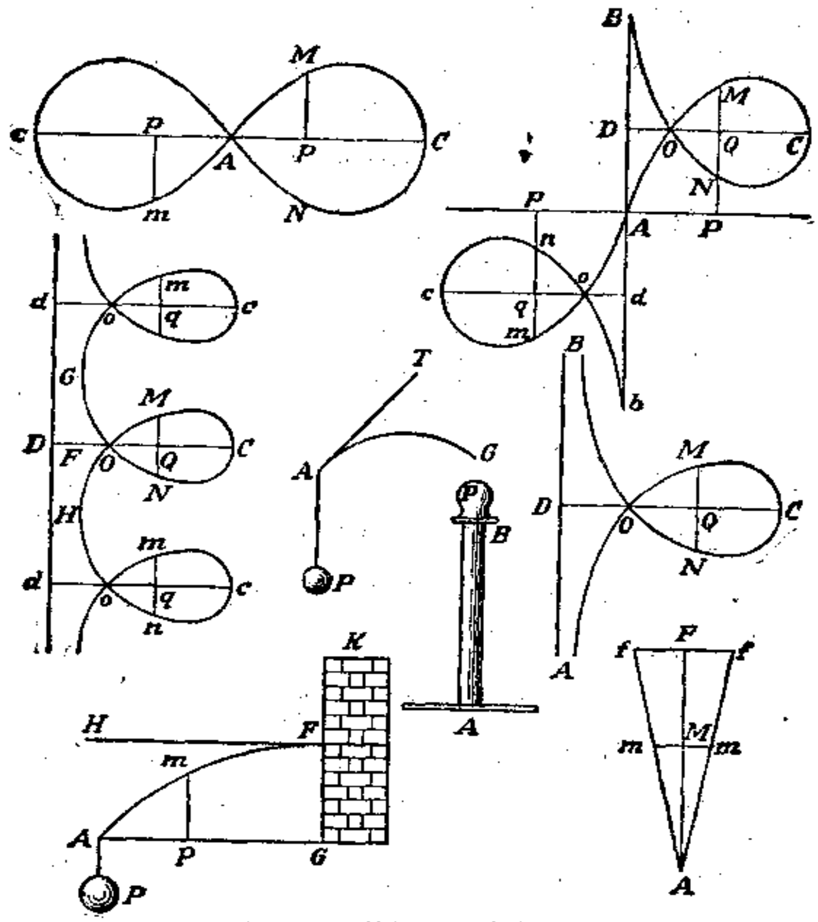


图 26 欧拉研究的撓度曲綫

欧拉也研究过变截面杆,例如,他討論过悬臂梁的撓度(图 26),其剛度是与距离 x 成正比。

欧拉更研究了具有初曲率 $\frac{1}{R_0}$ 的曲杆的弯曲,并說明在这种情况下,公式(a)应改写为

$$C\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)=Px \tag{e}$$

即:对于原来弯曲的杆子,任一点处的曲率变化是与弯矩成正比的。他証明如果沿杆长的初曲率 $\frac{1}{R_0}$ 是常数的时候,公式(e)可象上述的直杆一样按同样方式来处理。他也討論过下面一个有趣的問題:如果一个載荷作用在悬臂梁的自由端,而能使悬臂梁成为直綫,那么这根梁的原始形状是怎样的?

当梁上作用着均布載荷,例如梁的自重或作用着某一流体靜压力时,欧拉証明

彈性曲綫的微分方程將是一个四次方程。他成功地解出在水靜压力情况下的这个方程，并且得出用一个代数式表示的撓度曲綫。

在欧拉的著作中，我們更可看到他对于杆的横向振动的研究。在限于討論小撓度的情况下，他說，他能取 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 作为梁被撓曲后的曲率、照現用曲綫方程式一样的形式写出曲綫的微分方程。为了消除重力的影响，他假定振动杆 AB 是垂直地嵌入于 A 端（图 27a），然后考察具有重量 wdx 的微分元素 mn 的运动。他观测到这种运动和簡单等时摆（图 27b）的运动完全相同，而且使此元素拉向 x 軸的力也一定和摆相同，卽在极小振动之下，它将等于 $wy\frac{dx}{l}$。欧拉解釋其理由是："如果对板条的单独元素 mn，在对立的方向（在 y 軸方向上）加上相等的力 $wy\frac{dx}{L}$，則在 $AmnB$ 位置处的板条会保持平衡状态。因此，此板条在振动时的曲率可認为与該板条处于静止时在各个元素 mn 上作用着 y 方向的力 $wy\frac{dx}{L}$ 所具有的曲率相同"。这样，欧拉得出的結論正和我們現在用达朗伯(D'Alembert)原理所得的相同[1]。知道了分布載荷后，欧拉将 $C\frac{d^2y}{dx^2}=M$ 微分两次便得出所求的运动微分方程，并观察到 M 的二次导数和横向載荷的集度是相等的，卽：

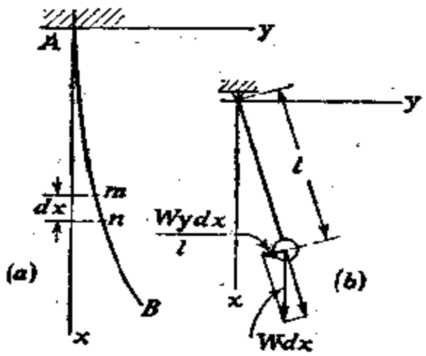


图 27

$$C\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{wy}{L} \tag{f}$$

于是欧拉得出結論："因此，利用这个方程就可以把曲綫 $AmnB$ 的特征表示出来，而且，若所給的条件为已知时，由它就可决定长度 L（当量摆的长度）。如果摆长为已知，則其本身的振动也可以将它决定出来"。接着他将公式(f)积分，并利用板条端部的假設条件求得頻率方程式，从頻率方程式便能計算一連串振动方式的頻率。

欧拉不但分析了悬臂梁，他也討論到下面一些杆件的横向运动：(1)两端簡支的，(2)两端固定的，以及(3)两端完全自由的。对于所有各种情况，他建立了計算頻率 f 的公式

$$f=m\sqrt{\frac{\pi^4Cg}{wl^4}} \tag{g}$$

[1] 达朗伯著"动力学論著"(Traité de Dynamique)，1743，但当欧拉写出他的书"变分法"(Methodus inveniendi...)的附录"彈性曲綫"(De Curvis Elasticis)时还沒有看到这本书。

式中 m 为一常数，視杆端擱置情况以及振动方式而定。在結論中，欧拉說明了公式(g)不仅能应用它来校核他的理論，而且也可实地用来决定此板条的"絕对彈性" C 的值。

1757 年，欧拉再出版了关于柱压屈問題的书[1]。在书中他利用經过簡化的微分方程 $C\frac{d^2y}{dx^2}=-Py$ 簡单地导出了临界載荷的公式。他在这里更詳細而正确地討論了 C 的数值，并且断定它必須是力的因次乘以长度的平方。在以后的論文中，欧拉将他的分析推广到变截面柱，而且也研究了具有沿长度分布的軸向載荷的压杆問題，不过他对于这些較复杂問題并沒有得出正确的解式。

雅斯奎士·伯諾里(Jacques Bernoulli, 1759～1789)[2]提到过欧拉的論文"关于作用在一块平板表面上一个集中荷重的压力"(Von dem Drucke eines mit einem Gewichte beschwerten Tisches auf eine Flaeche)，其中第一次提到超靜定的問題。这是根据板的頂面保持平面的假定解出来的。

欧拉也闡述了完全柔性膜的撓曲与振动的理論。認为膜是两組互相直交的索子所組成的，他导出偏微分方程[3]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

这个概念以后为雅斯奎士·伯諾里所引用，当他研究一块矩形板的弯曲和振动时，曾認定板为两个梁系所組成的格构而得出下面的方程[4]：

$$k\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)=z$$

他用这个方程来說明施拉德尼(E. F. F. Chladni)对于板振动的实驗結果(参看第 29 节)。

9. 拉格朗日(Lagrange, 1736～1813)

拉格朗日出生于都灵(Turin，意大利西北地名——譯者注)[5]。他的父亲原是一个富翁，在几次投机生意失败之后，財产損失迨尽。青年的拉格朗日后来認为

---

[1] 見柏林科学院研究报告"关于柱的承载力"(Sur la force des Colonnes), Mem. Acad. Berlin, 13 卷, 1759。

[2] 丹尼尔·伯諾里的侄儿。他溺死在尼瓦河(Neva River)中。

[3] 見彼得堡科学院会报(Novi comm, Acad. Petrop.) 10 卷, 243 頁, 1767。欧拉采用这一概念来研究鈴的振动(参看同一著作, 261 頁)。

[4] 見"新論"(Nova acta)卷 5, 1789, 圣彼得堡。

[5] 見达南布雷(J. B. J. Delambre)著拉格朗日的傳記,"拉格朗日的成就"(Oeuvres de Lagrange)卷 1, 1867, 巴黎。

失去財产是有补償意义的，因为假使他家还是很富有，他就不会去研究数学了。他很早就表現了特殊的数学才能，在十九岁时已成为都灵皇家炮兵学校（Royal Artillery School）的数学教授了。

他邀集許多学生組織了一个学会，以后便成为都灵科学院。在这个学会的第一期刊物中（1759 年发行），刊出了好几篇拉格朗日的研究报告，这些研究报告成为他在变分法上的重要貢献。由于这方面的共同兴趣，他和欧拉經常通信。欧拉非常佩服拉格朗日的成就，因此推荐他为柏林科学院的国外会員，在 1759 年正式通过。1766 年由于欧拉和达朗培尔两人的推荐，聘他为該院接替欧拉的人，于是他搬到柏林。在柏林他得到美好的工作环境，不久就发表了一系列的重要論文。

图 28 J. L. 拉格朗日

在这个时期中，他还写成了著名的"力学分析"（Mécanique Analytique）。书中拉格朗日用了达朗培尔原理和虛位移原理引出了"广义坐标"（generalized coordinates）和"广义力"（generalized forces）这两个新的概念，并且将力学理論归納为某些一般公式，从这些公式中，任何特殊問題所需的方程都能推导出来。在序言里面，拉格朗日說明他的书里沒有插图，因为他所采用的方法并不需要作几何学或力学方面的研討，只是按照規定的次序作出一些代数运算而已。在拉格朗日的掌握下，力学变成了解析法的一分支，他称之为"四維几何"（geometry of four dimensions）。那时，能賞識这种力学表示方法的人为数很少，因此拉格朗日很难找到出版商来出版他的著作。这本书終于在 1788 年在巴黎出版，但已經落后于牛頓刊行"物界原理"（Principia）一百年之久了。

腓特烈二世（Frederick the Great）死后，柏林的科学研究条件日趋低落，拉格朗日感到不能象以前那样受到尊重了，因之在 1787 年他搬到巴黎。在法国首都他受到热烈欢迎，他住在卢夫宮（Louvre），照常度着他的愉快生活。由于工作繁重的結果，拉格朗日完全失去时間来关心数字的研究，大概有两年光景，他那本已出版的"力学分析"一直沒有理会过它。在这段时間內，他关心了其他的一些科学，特別是化学，并且参加了討論法国采用米制的委員会的工作。

这时，正当法国革命，拉格朗日打算离开法国。可是在那时有一所新学

校——工业学院(École Polytechnique)开办了，拉格朗日被聘到这所新学校講授积分学。这才使他重新恢复对数学的关心，他的講演不独吸引了学生們，而且还有許多教师和教授們。作为这些講授的成果，他写出了两本书："解析函数"(Fonctions analytiques)和"数値方程解法"(Traité de la Résolution des équations numériques)。在他临死前几年中，他从事于訂正他所著的力学，但在他1813年去世时，这一項工作只完成了三分之二。修訂版的第二卷到他死后才发行。

拉格朗日在彈性曲綫上最重要的成就是他的研究报告"柱的形状"(sur la figure des colonnes)[1]。他首先討論一根两端鉸接的棱柱杆(图29)，并假定在軸向压力 P 作用下該杆已产生微小的弯曲。这使他想到欧拉老早討論过的方程(参看上节)

$$C\frac{d^2y}{dx^2}=-Py \tag{a}$$

他指出此方程的解为 $y=f\sin\sqrt{\frac{P}{C}}x$，只在 $\sqrt{\frac{P}{C}}l=m\pi$ 时才满足端部条件，其中 m 为一整数。由此可知，能使压杆发生微小弯曲时所支承的載荷可用下式表示

$$P=\frac{m^2\pi^2C}{l^2} \tag{b}$$

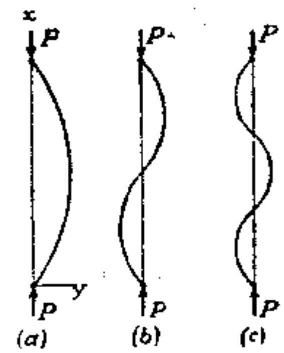


图 29

因此可能会有一个无穷数的压屈曲綫。要产生如图29a所示的、具有半波的曲綫，我們必須用一个大到欧拉对一端固定情况下所算出的四倍的載荷。要得出如图29b所示的曲綫，所需載荷应为欧拉所得出的十六倍，其余依此类推。拉格朗日不只限于算出載荷 P 的临界值，而且进一步研究了当載荷 P 超过临界值时所将发生的撓曲。为此，他采用包含有曲率的精确表示式的方程来代替式(a)的近似方程，展成級数后进行积分，得

$$l=\frac{m\pi}{\sqrt{\frac{P}{C}}}\left[1+\frac{Pf^2}{4(4C)}+\frac{9P^2f^4}{4\cdot16(16C^2)}+\frac{9\cdot25P^3f^6}{4\cdot16\cdot36(64C^3)}+\cdots\right]$$

当 $f=0$ 时，此方程得出公式(b)。当 f 值甚小时，此級数收斂极快，相应于已知撓度的載荷是很容易計算出来的。

接着，拉格朗日研究变截面柱(柱为轉成体)，并探討如何决定一根曲綫，使它繞一軸回轉时能得出具有最大效率的柱的外形。拉格朗日取用了临界載荷 P 对柱

[1] 見达蘭布雷(J. B. J. Dalembre)著，"拉格朗日的成就"(Oeuvres de Lagrange)卷2，125页。

的体积V的平方的比率作为效率的量度标准。因为柱两端具有相同曲率而两端切綫与柱軸平行的曲綫，拉格朗日断定具有最大效率的柱是圓柱形。他考察了通过离軸綫等距的四点所作的曲綫，也作出了同样的結論。由此可見，拉格朗日对于具有最大效率的支柱形状的問題还沒有得出滿意的解法来。以后此同一問題也被其他一些学者們討論过[1]。

在第二篇研究报告"关于彈性板条承載能力"(sur la force des ressorts pliés)中[2]，拉格朗日討論到一端固定他端負載的等截面板条的弯曲。他照样假定其曲率是与弯矩成正比，并且討論了一些例子，那些例子在研究扁彈簧(如表中所用的)时是有些用处的。拉格朗日的解的形式在实际应用上是太复杂了。

虽然拉格朗日在材料力学上的貢献，理論上的价值多，实用上的价值少，但他那广义坐标和广义力的方法在以后材料力学中仍普遍使用着，在解决实际重要問題时有很大的价值。

[1] 見克劳逊(Clausen)的論文，圣彼得堡科学院数理学报，卷9，1851；尼古拉依(И. Николай)的論文，圣彼得堡工业专科学院学报，卷8，1907；以及布拉修斯(Blasius)的論文，数理杂志(Z. Math. u. Physik)，卷62。

[2] 見"拉格朗日的成就"(Oeuvres de Lagrange)，卷3，77頁。

第 三 章

十八世紀中的材料力学

10 材料力学在工程上的应用

在十七世紀时代，科学研究事业主要是掌握在科学院的工作人員手中而得到发展。当时热心研究彈性体力学的人很少，虽然有加利略、虎克和馬里沃特討論过一些由实际問題所引起的有关彈性和結构强度的問題，但他們研究的主要动机还是从科学上的爱好而起。当十八世紀时，前几百年来的科学成果已得到实际应用，科学方法也漸漸采用到各种工程中。軍事工程和建筑工程新的发展不独需要經驗和实际知識，而且要有合理分析新問題的能力。第一所工程学校建立起来了，第一批关于建筑工程的书籍也出版了。在这一发展上，法国走在其他国家的前面，而十八世紀中彈性体力学研究得到进展，基本上也应归功于法国的科学活动。

1720 年，法国建立了几所軍事学校来培养堡垒和大炮方面的专家，1735 年，别利多尔(Belidor，1697～1761)出版了供这些学校用的一本数学教本[1]。在該教本里，作者不仅討論数学，而且也討論到数学在力学、大地测量学与炮兵学上的应用。虽然别利多尔在所写教本中只包括了初等数学，他建議他的那些对数学有兴趣的学生們也应該研究积分，并介紹馬奎士·拉荷庇脫(Marquis de L'Hôpital)所著"无限小的分析"(Analyse des Infiniment Petits)，这是当时已出版的积分方面的第一本书。要了解数学的应用发展得怎样，我們只要想一想在十七世紀末叶只有四个人(莱布尼兹、牛頓和伯諾里兄弟俩)从事研究积分学，只有他們对这門新的数学分支是精通的。

1729 年，别利多尔的"工程师的科学"(La Science des Ingénieurs)一书出版了。此书在建筑工程师中間流傳极广而且重版了許多次。由納維埃加注的最后一版在 1830 年問世。在这本书中，有一章是討論材料力学的。所引理論并沒有超出加利略和馬里沃特已得成果的范圍，不过别利多尔将它应用到木梁的实驗中得出

[1] 别利多尔著"炮兵术与工程用新数学教程"(Nouveau Cours de Mathématique a l'Usage de L'Artillerie et du Génie)，1735，巴黎。

了决定梁的安全尺寸的法則。在这些計算中，别利多尔指出了以往确定的选擇梁的尺寸的演算是不适当的，并且提供了求解这个問題的更合理的方法。为此目的，他引用加利略的說法，即矩形梁的强度与其寬度以及截面高度的平方成比例。最后，他認为不仅簡支梁而且象在屋架与桥梁桁架結构中所使用的較复杂的杆件都能分析出来，而且也能确定出选擇安全尺寸的方法。

1720 年，法国政府成立了交通工程队，1747 年巴黎也創办了著名的“桥梁道路学院”(École des Ponts et Chaussées) 来訓練建造道路、河渠与桥梁的工程师。这所学校，我們以后会知道，对于材料力学的发展起了很大的作用[1]。該校第一任校长是吉恩—罗多菲·拍洛尼特 (Jean-Rodolphe Perronet, 1708～1794)，他是一位著名的工程师，他設計并建造了好几座大拱桥，包各尼 (Bourgogne) 渠道，以及巴黎的許多重要建筑物。他的研究报告为建筑师們广泛傳閱[2]。这些研究报告中有关建筑材料試驗的一章将在以后再行討論(参看第 13 节)。

直到十八世紀末叶(1798 年)，吉拉德(Girard)所著的第一本关于材料力学的书出版了[3]。該书中最重要的是一段历史介紹，因为它包括了十七及十八世紀中在彈性力学方面主要研究成果的討論。在討論梁的弯曲方面，吉拉德提到加利略的和馬里沃特的分析方法，并說到当时这两种理論似乎都被采用着。在脆性材料，例如石料的情况下，工程师們采用了加利略的假說，即假定在断裂时，内力是均匀分布在整个截面上的。对于木梁，他們采用了馬里沃特的假說，即假定內力集度由在凹面上的零值向凸面上的最外层纖維增大到最大拉力。吉拉德很清楚地說出凹面上的纖維是处于受压状态，而凸面上的是处于受拉状态。他了解到内力力矩所对应的軸綫必須認定在截面以內来計算，但同时他仍坚持了馬里沃特的錯誤見解，認为中性軸的位置是不关重要的。因此，在梁的强度理論中，吉拉德的书并没有在馬里沃特所得的成果上有所改进。关于梁的撓曲，吉拉德是非常接近于欧拉方法的，而且又不限定于只对小撓度的推导。結果他得出了不切实用的复杂公式。在欧拉的早期著作中，欧拉假定梁的抗弯剛度是与它的綫尺度的三次方成正比。后来欧拉改正了这个假定，取定抗弯剛度是与它的綫尺度的四次方成正比。吉拉德并没有研究这一点，仍然引用了欧拉的不正确的原始假定。

[1] 关于这所著名学校的历史，可参看該校年刊 (Ann. Ponts et chaussées), 1906；并参看德达天(de Dartein)所写的文章。

[2] 桥梁建筑与設計(Déscription des projets de la construction des ponts)，見“拍洛尼特的成就”(Oeuvres de Perronet), 1788，巴黎。

[3] 見吉拉德著：“固体抗力分析”(Traité Analytique de la Résistance des Solides), 1798，巴黎。

在该书的第二部分里，吉拉德討論到等强度梁。对于这种結构，他认为在任一截面上都应該满足方程式

$$\frac{Mh}{I}=\text{常数}$$

的条件，式中 M 为弯矩，I 为截面对中性軸的慣性矩，h 为梁的高度。吉拉德指出，在一定載荷下，依靠变更截面尺寸的方法我們能得出很多种等强度梁的形状来。在十八世紀中，这个問題非常流行，当时曾有許多篇論文討論过它。不过这类工作对于实际上更重要的梁的强度理論并沒有多大助益。

吉拉德的书的第三部分討論了木柱的弯曲和压屈的实驗。它代表了吉拉德在梁的弯曲方面的独創之作，这点将留到以后再討論(参看第 13 节)。

从这段簡短的討論中，値得注意的是十八世紀的工程师們用了十七世紀中的理論来解决梁的强度方面的問題。但同时也有一个比較滿意的梁的弯曲理論在这段时期內形成，这将在以下各节中討論。

11. 拔侖特(Parent)

在上一章中我們已了解十八世紀的数学家怎样利用曲率与弯矩成正比来发展彈性曲綫的理論。他們进行这項工作并沒有考虑梁內应力究竟是怎样分布的。当这种数学研究向前发展时，研究工作就牽涉到弯曲問題的物理概念，因此对应力分布才有較清楚的認識。关于这些研究，我們可取拔侖特(Parent, 1666～1716)的成果作为代表。拔侖特出生于巴黎[1]。他的父母要他学法律，但他的兴趣却在于数学和物理学。毕业后一直沒有做过法律工作。他却用了大部分时間研究数学，并且依靠傳授数学来維持生活。1699 年，毕列梯斯(Des Billettes)被选为法国科学院的会員，他带着拔侖特在身边作为一个助手。这个职位使拔侖特有机会和法国科学家們接近并参加科学院的各种会議。在这里，他也有机会表現他对科学各部門的丰富知識，在科学院的刊物上刊出了好几篇他的研究报告。他的研究报告并沒有全部被刊出，直到 1705 年，拔侖特开始創办自己的杂志时，才把他所有的論文一一发表出来，并且还刊出对其他一些数学家著作的評論。1713 年，这些論文曾分为三卷重版，名之为"数学及物理研究"(Recherches de Mathématique et de Physique)。

在他討論梁的弯曲的第一篇研究报告中[2]，他根据馬里沃特的假定，取垂直于載荷作用平面而与凹面边界相切的切綫作为中性軸。他用这个理論求出等强度梁

[1] 見"科学院的历史"(Histoire de l'Académie des Sciences)，1716，巴黎。
[2] 同上注，1704，1707，1708，1710 年的年刊。

的各种形状。他又討論到在一根圓木中截取一根最大强度的矩形梁的方法这一重要問題;并且証明了对于已知直徑 d(图 30)，ab^2 的乘积必須为最大值。这可将直徑分为三等分并作出 cf 及 eg 两垂綫(如图 30 所示)便能求得。

1713 年，拔侖特刊出了有关梁的弯曲的两个研究报告[1]，它代表着材料力学已向前推进了一大步。在第一篇研究报告里，他指出方程式

$$L=\frac{Sh}{3l} \tag{a}$$

[由馬里沃特根据矩形梁导出(参看第 5 节)，以后应用到其他的截面形状] 不能用于圓管或实心圓梁。他和馬里沃特一样假定截面繞切綫 nn 旋轉(图 31)，而各层纖維所受的力系与距切綫的距离成正比，拔侖特发現对于一个实心圓截面，这些力对 nn 軸的最大力矩为 $\frac{5Sd}{16}$，式中 S 为梁的"絕对强度" (absolute strength)。这指出在圓截面梁中，应該用 $\frac{5d}{16}\left(\text{代替}\frac{h}{3}\right)$ 代入上述的(a)式中。

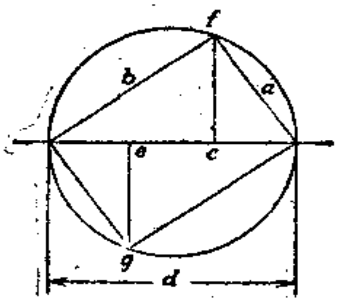


图　30

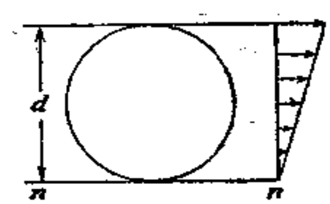


图　31

在拔侖特的第二篇研究报告中，他写出一段关于計算纖維抗力的力矩必須根据中性軸位置的重要討論。設有一根矩形梁固定在 AB 截面处 (图 32a)，負有載荷 L，他首先假定对 B 軸将发生旋轉。其相应的应力，如图 32b 所示，可用合力 F

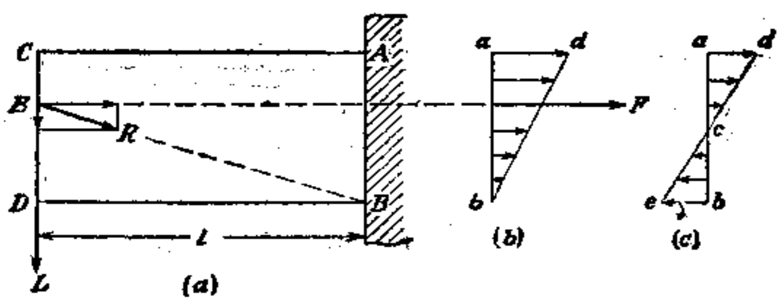


图　32

[1] "数理研究論文集" (Essais et Recherches de Mathématique et de Physique) 卷 2, 567 頁; 卷 3, 187 頁。

来代替。将此力作用綫延长与載荷 L 的作用綫相交于 E 点，根据平衡条件，他断定 F 和 L 两力的合力 R 必須通过旋轉軸上的 B 点。接着，他說明了单独的 B 点并沒有足够的抗力作为此合力的支座，于是断定此截面 AB 上有一相当大的部分必須作为 R 的支座而承受压力。他說，无疑地，这一考虑迫使馬里沃特采用如图 32c 所示的两个相等三角形的应力变化来代替用三角形 abd（图 32b）所表示的应力分布图。取此第二种应力分布形状并观察在断裂时最外层纖維的拉力必須恒等于 σ_{ult}，他断定用两个三角形所代表的抗力矩只有图 32b 中一个三角形所代表的一半大。这样他改正了馬里沃特所造成的、其后又为雅可普·伯諾里和范里囊等人[1] 所支持的錯誤。我們知道用两个三角形所代表的应力分布（图 32c）只是在梁的材料服从虎克定律的范圍內才是正确的，它不能用来計算弯曲載荷 L 的极限值。从馬里沃特的实驗中，拔侖特知道在图 32b 及图 32c 所預示的应力分布值中，必有一个极限抗力偶的数值。他克服这个困难是假定在断裂时旋轉軸（中性軸綫）不通过截面的中心，而应力分布有如图 33 所示。最大的拉力 ad 一定相同并代表着纖維的极限抗拉强度。用应力的合力来代替作用在截面 ab 上的应力，并加上拉力 F 和外力 L 如图中所示，根据平衡条件，他得出結論，认为作用在截面 ab 上 bc 部分的合压力必須与同一截面上上面部分的合拉力 F 相等。他也指出除了法向力以外，还有大小等于 L 的剪力作用于截面 ab 上。

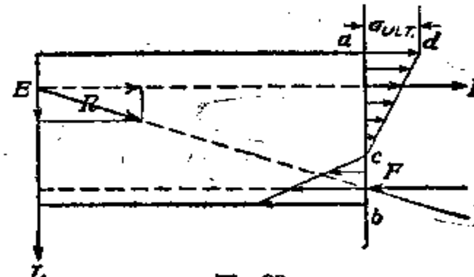


图 33

由此可知，关于梁弯曲的静力問題已完全被拔侖特解决了；而且他清楚地表明了分布于固定端截面 ab 上的抗力必須組成和外力平衡的一个力系。在上述論文里面的一篇[2] 中，他指出当載荷加大时中性軸綫会移动，而在断裂时它将接近于凹面边界处的切綫。拔侖特又将图 33 所示的应力分布用到馬里沃特的实驗結果里面，于是証明了如果中性軸依照 $ac:ab \doteq 9:11$ 来放置，则他的（拔侖特得出的）极限抗力偶与实驗所得者相符。

在取定如图 33 所示的三角形应力分布时，拔侖特假定材料服从虎克定律，而抗拉弹性模量和抗压弹性模量是不相等的。他也考虑到材料不服从虎克定律的那种情况，并正确地观察到，如果材料是处于应变增加較应力增加为小的时候，则极

---

[1] 見"科学院的历史"(Histoire de l'Académie des Sciences) 中有关范里囊所写的論文，1702 年，巴黎。

[2] 見他的研究报告，卷 2，568～589 頁。

限抗力偶較之用图 33 所示的两个三角形所代表的要小些。由于对材料的力学性能沒有实驗資料，拔侖特当然不可能更进一步发展他对这个問題基本上正确的观念了。从这个簡短討論拔侖特的著述中，可以看到他对梁的应力分布較之他的前輩們是有着更清楚的概念的，但是，他的学說仍然沒有被別人重視，而在十八世紀时，大多数工程师仍継續采用着根据馬里沃特理論得出的一些公式。其中原因也許是由于拔侖特的主要成果未經科学院刊出，只在他的論文集子里发表，而該論文集排印質量很差，其中还有不少印錯的地方所致。此外，拔侖特不是一个精明的作家，他的公式推导是很难了解的。在他的写作中，他最爱批評其他研究者的著作，因此无疑地使他和当时的科学家发生了嫌隙。拔侖特的著作发表之后，經过了六十年，彈性体力学这門科学才得到更进一步的发展。在这段时間的末尾，我們发現到庫侖的卓越成就。

12. 庫侖(Coulomb)

庫侖(C. A. Coulomb, 1736～1806)出生于安高侖(Angoulême, 法国地名——譯者注)[1]。当他在巴黎讀完大学預科以后，进入工程兵团工作。他被派到馬丁尼克(Martinique)島上(西印度洋中一个島屿——譯者注)，在那里住了九年，主持各种建筑工作，因此使他有机会研究材料的力学性能和建筑工程上的各种問題。在这个島上，他写出了有名的論文"建筑靜力学各种問題极大极小法則的应用"(Sur une Application des Régles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture)。在 1773 年向法国科学院提出[2]。他在这篇文章的前言中写道："本文是在几年以前写成的，原来意图系作为我在工作崗位上个人研究之用。我之所以敢于向科学院提出，只不过因为这些渺小的努力如果其中有一些有用的东西，科学院是乐于接納的。另外，科学是謀人类福利的不朽功业。每一个公民都应該按照他自己的才能为此作出貢献。有些偉大的人将爬上大厦的屋頂，在那儿指示和建造上层房屋，普通工匠則分布在

图 34 C. A. 庫侖

[1] 見达兰布雷(J. B. J. Delambre)所写的庫侖小史(Éloge historique de Coulomb)刊在法国自然科学会研究报告(Mém. inst. natl. France)卷 7, 210 頁, 1807。并参看霍里斯特(S. C. Hollister)著："庫侖的一生与其成就"(The Life and Work of C. A. Coulomb)刊在机械工程(Mech. Eng.)杂志 615 頁, 1936。

[2] 見 Mém. acad. sci. savants étrangers, 卷 7, 1776 巴黎。

下层或隐藏在基础的角落里工作着，他們都是用灵巧的双手在創造，只要看誰的工作完成得更好”。

当庫侖回到法国以后，他以工程师名义在罗歇里（Rochelle）、爱克斯島（the Iste of Aix）以及瑟堡（Cherbourg）等地方工作过。1779 年，他分得了（和汪斯威頓 Van Swinden 一起）科学院发給关于制造罗盘仪的最好方法这篇論文的奖金；1781 年又获得科学院对于他的“簡单机械的理論”（Théorie des machines simples）这篇論文的另一笔奖金[1]，在这篇論文里提出了各种物体彼此滑移时接触表面（干的或涂上滑潤物的）的摩擦实驗結果。1781 年以后，庫侖一直住在巴黎，他被选为科学院的会員，因此更方便于从事科学研究。他轉而研究电学与磁学。为了測量微小的电力和磁力，他发明了一种很敏感的扭力天平，并且結合这一工作，他研究了金屬絲对扭轉的抗力[2]。

1789 年，法国革命暴发，庫侖退休在布洛意斯（Blois）他自己的一所小小的庄园里。1793 年，科学院停办了，但两年后又以“国立科学技术研究所”（L'Institut National des Sciences et des Arts）的新名称而重新开办。庫侖被选为这个新組織的第一批会員，而他那最后关于流体的粘滞性和磁学的一些論文都在“研究所学报”（Mémoires de L'Institut，1801 及 1806 年）中发表出来。庫侖在 1802 年被聘为学术研究視察长之一，很积极地参加了学校教育事业。这种活动是需要四处走动的，但他却因年老力衰，以致在 1806 年終以劳累逝世。他的成就是不朽的，到現在我們还用到他的摩擦理論、建筑材料强度理論以及扭轉理論。

十八世紀时的科学家們对于彈性体力学的成就，沒有人能比得上庫侖。他的主要成就都包括在 1773 年所写的一篇論文中。

这篇論文首先討論为了确定几种砂石的强度所做出的实驗。他采用 1 呎×1 呎×1 吋的方版作为拉伸試驗之用，將試件作成如图 35*a* 所示的形式[3]。就这样他求得抗拉极限强度为 215 磅/平方吋。將同样材料作出剪切試驗，采用 1×2 吋的矩形杆，于固定端 *ge* 截面上（参看图 35*b*）加上剪力 *P*，他发覺在这种情况下抗剪极限强度与抗拉极限强度相等。最后，他作出弯曲試驗（图 35*c*），用高度为 1 吋，

[1] 見 Mém. présentés par savants étrangers，卷 10，第 161 頁。这篇报告，連同前面所提过关于結构理論以及其他对于机械工程較重要的一些研究报告，都重新編訂合成一本书，书名为“簡单机械的理論”（Théorie des machines simples），1821，巴黎。

[2] “金屬絲的彈性与扭力的理論实驗研究”（Recherches théoriques et experimentales sur la force de torsion et sur l'elasticité des fils de métal）“科学院的研究报告”（Mém. acad. sci.），1784。

[3] 此图是从庫侖的著作里面摘来的。

寬度为 2 吋，长度为 9 吋的一根杆子，得出极限載荷 P 等于 20 磅。

此后，庫侖对梁的弯曲作出了一个理論探討（图 35d）。取一根矩形悬臂梁，考察截面 AD，他断定截面上部分 AC 的纖維受拉而下部分的纖維受压。将纖維中

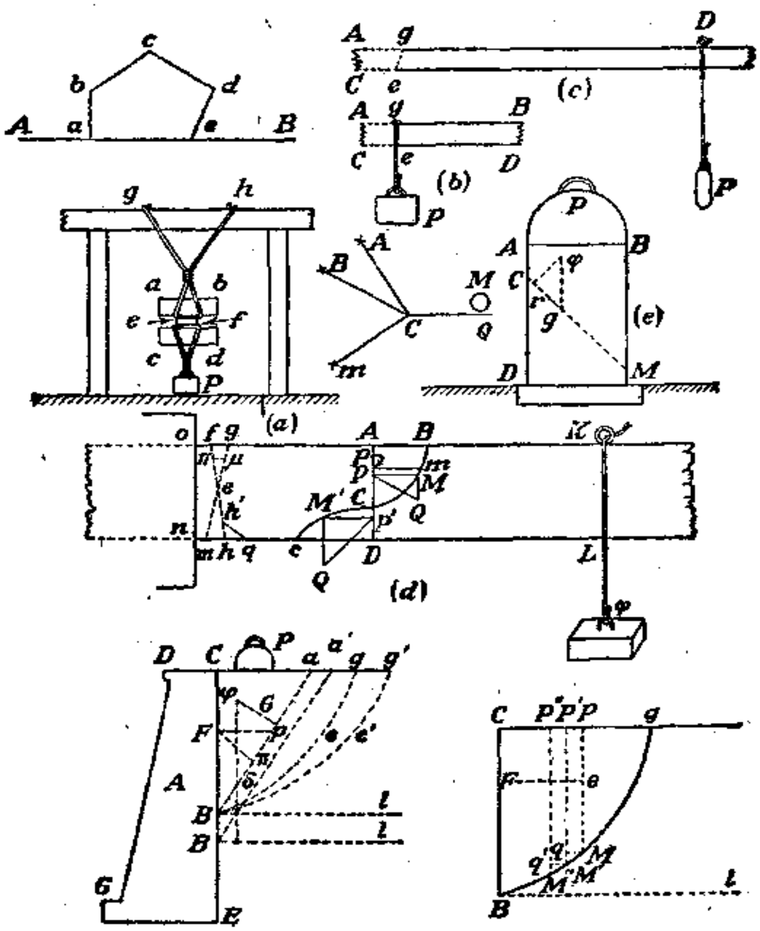


图 35

的力分解为水平的和鉛直的两分力（如图中向量 PQ 及 $P'Q$ 所示），并应用靜力学中的三个平衡方程，他断定沿 AD 断面用曲綫 BCc 来表示的水平分力的总和等于零。垂直分力的总和必須等于作用載荷 ϕ，而纖維中所有各力对于 C 軸的力矩須等于作用載荷 ϕ 对同一軸的力矩。他指出这些方程式与論証纖維力和纖維伸長的定律无关。取一个在断裂以前能服从虎克定律的完全彈性的材料，并考慮固定端处一元素 $ofhn$，他假定由于載荷 ϕ 所产生的弯曲作用，平面 fh 将移到 gm 位置，而小三角形 fge 及 emh 将代表纖維的变形，也代表纖維的应力。如果令 σ 为 f 点

处的最大拉力，他发觉內力矩为 $\sigma(\overline{fh})^2/6$[1]。用 S 表示杆的抗拉极限强度，用 l 及 h 分别表示載荷 ϕ 的力臂和梁的高度，則計算极限載荷的方程将为

$$\frac{Sh}{6}=\phi l \tag{a}$$

他指出如果梁的高度較其长度为甚小时，剪力对梁的强度的影响可以忽略不計。

現假定材料为絕对剛体，并假定它繞 h 点轉动，因之在整个截面上将产生均布应力，庫命断定計算极限載荷的方程将为

$$\frac{Sh}{2}=\phi l \tag{b}$$

将此方程应用到前述的实驗里，他得出計算的极限載荷較之实驗所得的要大些。他断定轉动点不可能在 h 处，而必須在另一点 h' 处(参看图 35d)，因此截面的 hh' 部分将承受压力。

由此我們看到在庫命的弯曲理論中，已正确地用了靜力学方程来分析內力，并且对于梁截面上这些力的分布也有过清楚的概念。他們乎还不知道[illegible]

$$P\sin\alpha=\frac{\sigma_{ult}A}{\cos\alpha}+\frac{P\cos\alpha}{n} \tag{e}$$

式中 $\frac{1}{n}$ 为摩擦系数。从此式，得

$$P=\frac{\sigma_{ult}A}{\cos\alpha[\sin\alpha-(\cos\alpha/n)]} \tag{f}$$

求能使 P 得极小値时的 α 值，他得出

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-\frac{1}{n}} \tag{g}$$

假設磚的 $\frac{1}{n}=\frac{3}{4}$，庫侖得出 $\operatorname{tg}\alpha=2$，因此，由公式(f)得出 $P=4\sigma_{ult}A$。此結果与他的实驗結果非常符合。

在同一篇論文(1773年所写的)中的第二部分，庫侖也研究过擋土墻和拱的稳定性，但这些我們将留到以后再討論。

1784年，庫侖发表了关于扭轉的研究报告，现在我們接下去檢閱一下它的内容。庫侖测定一根金属絲的抗扭剛度是借观察挂在金属絲上一只金属圓筒的扭轉摆动来进行的(图36a)[1]。假定扭轉的金属絲的抗扭矩与扭轉角 ϕ 成正比，他得出微分方程

$$n\phi=-I\ddot{\varphi}$$

通过积分，得出計算振动周期的公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{n}} \tag{h}$$

庫侖借实驗看到当扭轉角不太大时周期与扭轉角无关，因此他断定扭矩与扭轉角成正比这一假定是正确的。庫侖进一步更取材料相同、但长度和直徑不相同的金属絲再作实驗。由此，他建立了求扭矩 M 的公式如下：

$$M=\frac{\mu d^4}{l}\phi \tag{i}$$

式中 l 为金属絲长度，d 为其直徑，而 μ 为材料常数。将鋼絲和黄銅絲作比較，庫侖得出此两种材料常数之比为 $3\frac{1}{3}:1$，因此他断定，当我們需要剛度較大的材料，例如用作樞軸的材料，我們最好选定鋼料。

庫侖建立了基本方程(i)以后，进而研究金属絲材料的力学性能。对于每一种金属絲，他得出它的抗扭彈性极限，超过此极限将产生永久变形。他也証明了如果金属絲在一开始受扭就超过了彈性极限，材料会变得硬些而彈性极限也会提高，但

[1] 此图是从庫侖的研究报告里面摘来的。

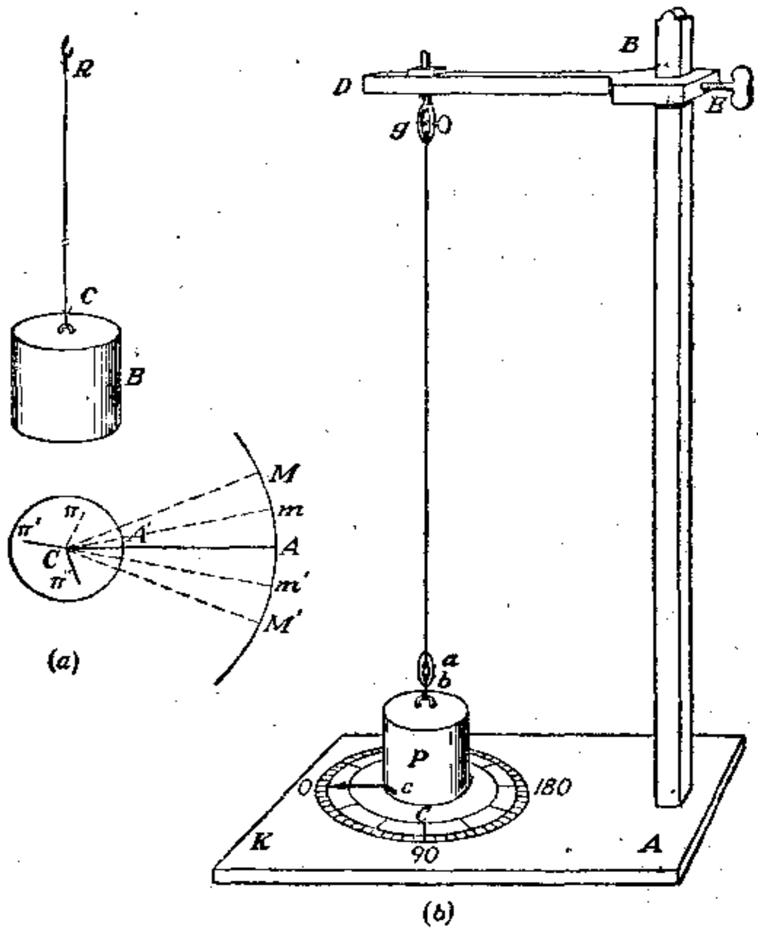


图 36 庫侖作扭轉摆动試驗的器具

方程式(i)中的 μ 值仍保持不变。然后，利用退火方法，他能把由于塑性变形所产生的一些硬性予以消除。庫侖凭这些实驗断定，要規定某一种材料的力学性能，我們需要有两个量：一个是表示材料彈性的 μ，另一个是和內粘力大小有关的彈性极限。借冷作或淬火方法，我們能使其內粘力增加，从而使彈性极限提高，可是我們却不能改变材料的彈性，也就是說，不能改变 μ 值。为了說明这一結論也能适用于其他种金属制品的变形，庫侖用一些鋼杆作出弯曲試驗，这些鋼杆只是在热处理上彼此不同，結果証明了在較小的載荷作用下，它們得出相同的撓度(不拘其加热过程如何)，但退火鋼杆的彈性极限比淬火鋼杆的要低得多。因此在較大的載荷下，退火鋼杆产生較大的永久变形，而經过热处理的金属却仍然是完全彈性的，亦即热处理改变了彈性极限，但保留着材料的彈性不变。庫侖想出了这样一个假說，認为每一种彈性材料都有一定的分子特殊排列形式，这种分子排列不会因較小的彈性

变形而被扰乱。超过彈性极限，分子开始发生一些永久的滑移，結果，虽然彈性仍保留不变，內粘力却增加了。

庫侖也討論到扭轉摆动的阻尼現象，并由实驗証明其主要原因并不是受了空气的阻力，而是由于金属絲材料本身有某些缺点所致。当摆动很小时，他看到每一周振幅减小的程度差不多和振幅成正比。不过当摆动較大时（彈性极限已經过冷作而提高），阻尼作用較之振幅增加得更快，因而試驗結果就更加沒有規律了。

13. 十八世紀中建筑材料力学性能的实驗研究

关于虎克、馬里沃特和庫侖这些科学家的实驗工作前面已經講过了。他們的实驗主要是为了証明材料力学上的某些理論而做的。但除此以外，在十八世紀由于需要在建筑工程中应用材料力学的知識，因而完成了更为实用的許多实驗工作。

辽麦尔（Réaumur，1683～1757）依靠力学試驗研究了炼鋼的各項工艺过程[1]。他作出金属絲的拉伸試驗来測定各种程度热处理的效应，并且用两个直角三角棱柱将尖角与尖角压在一起检查其产生的刻缺，由此发明了一种測定硬度的方法。

还有許許多多对各种材料的力学性能的試驗是由穆申布洛依克（Petrus Van Musschenbroek，1692～1761）做出来的。他是烏德勒支（Utrecht）大学、随后又是莱登（Leiden）大学的物理学教授。在他所著“实驗物理与几何”（Physicae exper-

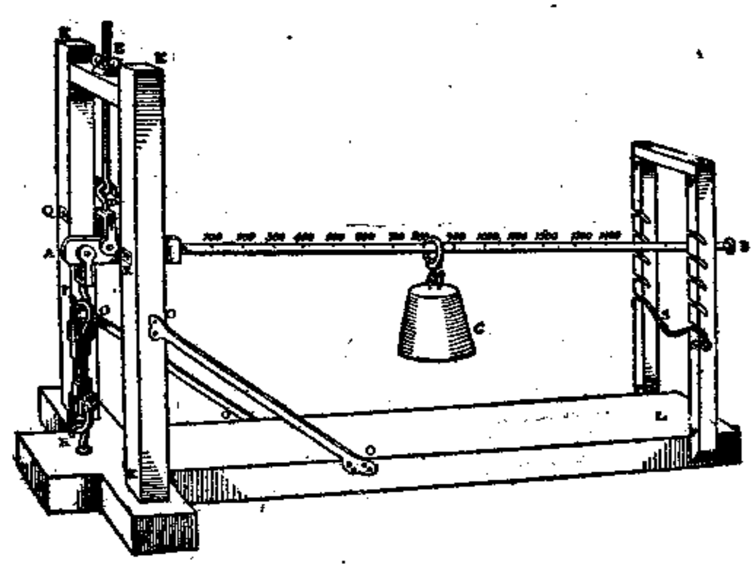


图　37　穆申布洛依克的拉伸試驗机

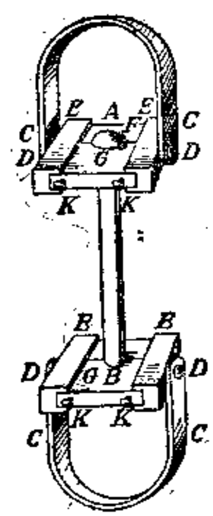


图　38　夾紧拉伸試件两端的方法

[1] 在1720～1722年間，辽麦尔向法国科学院所提出的几个研究报告。并見他所著“鍛鉄炼鋼工艺”（L'art de convertir le fer forgé en acier），1722，巴黎。

imentales et geometricae, 1729) 一书中，他叙述了他的試驗方法以及他所設計的試驗仪器。图 37 是他的拉伸試驗机，而图 38 表示他所用的試件式样和两端夹紧的方法。虽然杠杆系統已可将作用力扩大很多，但要用他这个机器将木材和金属拉断只能在試件横截面很小的情况下才行。他的試驗結果归并在他那物理学方面的著作中[1]而为工程师們广泛采用。图 39 表示穆申布洛依克进行弯曲試驗的机

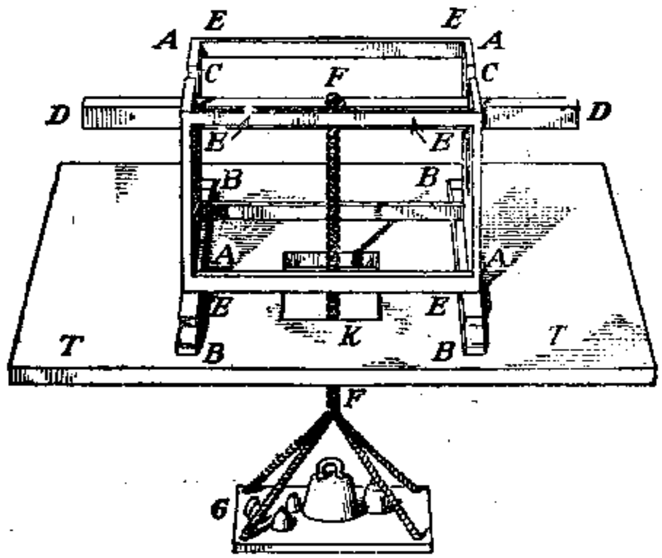


图 39 穆申布洛依克的弯曲試驗机

器。这位物理学家用矩形木梁証明了加利略的理論，即梁的抗弯强度与 bh^2 成正比。采用他从小試件所得出的結果，穆申布洛依克說明了計算象构筑物上所用的大梁的极限載荷的方法。

图 40 表示穆申布洛依克进行压杆的压力試驗所用的仪器。这是第一次作出側向压屈現象的实地研究，从研究結果中他作出重要的說明，即压屈載荷是与压杆长度的平方成反比。我們已經知道，欧拉曾利用对彈性曲綫的数学分析早已得出同样的結論。

穆申布洛依克所作的实驗受到蒲放(Buffon, 1707～1788)的批評。蒲放主要是由于他在自然科学方面的成就而成名，不过他的事业似乎包括多方面。虽然他是巴黎植物园的园长与自然科学博物館的創办人，他却将牛頓的“流分法”(Methods of Fluxions) 譯成了法文，而且对木材的力学性能方面也作出許多研究工

[1] 見“物理論文”(Essai de Physique)的法譯本，1751 年在萊登出版。从該书的序中，可看到物理学上某些問題在当时曾引起各国人士的兴趣，以及在荷兰許多城市也組織了一些科学团体。

作[1]。他的研究証明了从同一树干取出的木材試件，其强度随着所取的位置不同会发生显著的差别，不仅与距树干軸綫的距离有关，而且也与沿树干軸綫方向的距

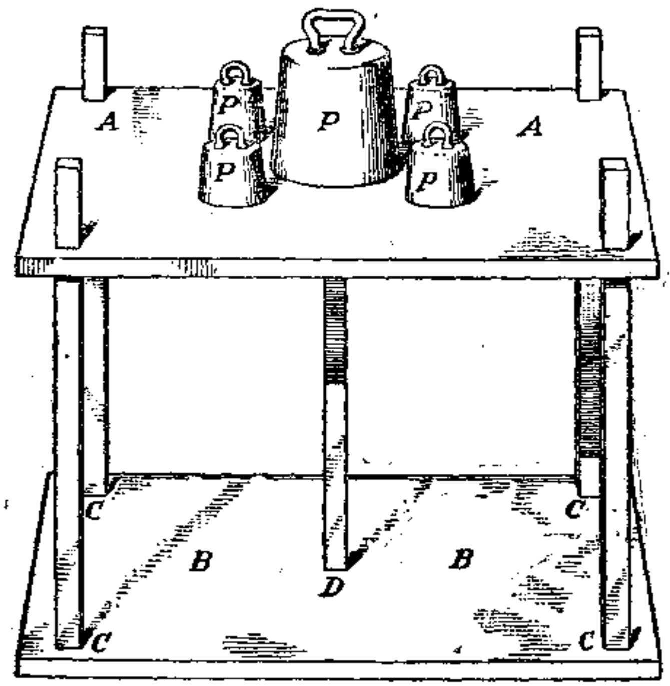


图 40 穆申布洛依克作压縮試驗的仪器

离有关。这样一来，象穆申布洛依克所用的小試件的实驗就不能满足建筑工程师所需要的資料，因为他們需要将整个梁作試驗并得出其全部資料。薄放利用截面为 4 吋×4 吋到 8 吋×8 吋，跨长达 28 呎的方梁作出許多的这类試驗。梁的两端系簡支方式，中央承受載荷，試驗結果和加利略所得結論相符，卽梁的强度正比于截面的寬度和高度的平方。試驗也指出梁的强度可假定为与材料密度成正比。

就建造巴黎的圣金尼菲夫 (Sainte Geneviève) 教堂而論，曾发生过怎样决定柱子的合理截面的問題，当时法国的一些主要建筑师和工程师都意見分歧，因而急需作出各种石料抗压强度的試驗。作出这些試驗的人是法国工程师高随(Gauthey, 1732～1807)，他是桥梁名著[2]的作者，他为了完成这件工作，設計并建造了如图 41 所示的一架特制的机器。这架机器采用了杠杆原理而与穆申布洛依克作拉伸試驗所用的机器有些相似(見图 37)。所用試件呈立方体形状，边长一般取为 5 厘

[1] 見薄放著"自然科学史"(Histoire Naturelle)卷 2，111 頁，1775 巴黎。

[2] 高随著"桥梁建筑論著" (Traité de la Construction des Ponts) 1809～1813。这篇論文在高随去世后由他的侄儿納維埃刊出，下面将和納維埃的貢献一起討論(参看第 17 节)。

米。将他的試驗結果与一些現成建筑物的石料所承載的压力相比較时，高随发覺（假定压力沿軸綫作用）安全系数一般不小于 10 。他解釋在石砌結构物上取定这样低的載荷，是因为在实际建筑物中，載荷可能有些偏心，而且作用力也許不与所作用的平面垂直。他也提到在一些实驗中証明了用长条形試件所得的抗压强度常較用立方体試件所得的为小。

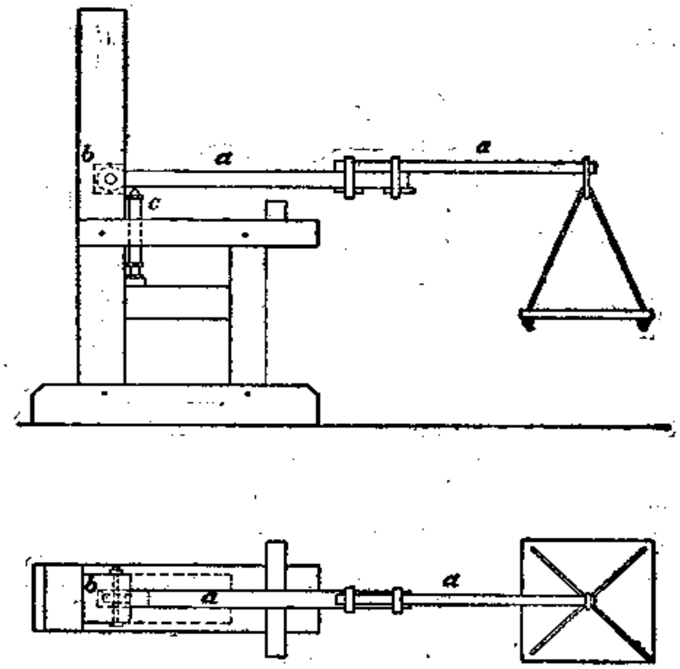


图 41 高随的試驗机

朗底列特(Rondelet, 1734～1829)改进了高随的机器，他用一个刃口代替 b 軸（图 41），这样减小了仪器的摩擦。关于这架机器的构造可参看 1802 年在巴黎出版的朗底列特所著“建筑工艺”(L'Art de Batir)一书。

拍洛尼特(Perronet)作出了許多关于石料强度的实驗研究。这些試驗是为建造留伊丽—賽因 (Neuilly-sur-Seine) 拱桥而作的。他在桥梁道路学院 (École des Ponts et Chaussées)設計并装置了一架机器，和高随所設計的相似，但增加了作拉伸試驗的一个方法。当他在該校担任教授及建筑工程师时，他做过很多試驗。

十八世紀末尾，曾做出不少关于木质压杆的研究。这項工作是由藍布拉吉 (J. E. Lamblardie, 1747～1797) 开始的，他継拍洛尼特之后充任桥梁道路学院的院长，并协助創办了有名的工业学院(École Polytechnique)。接着便是吉拉德(P. S. Girard)，他是写出第一本材料力学的人（参看第 10 节）。为提供这些試驗而制成

的机器有如图 42 所示。利用繞 V 軸轉动的杠杆 XY 和 y 处的載荷将压力傳到直立的压杆上。試件上端的圓盘在直柱 AB 及 EF 之間滑动，阻止端部发生側向移动。試件下端支承在 R 处。当支柱下端 R' 在水平擱置的梁的中央产生压力时，这

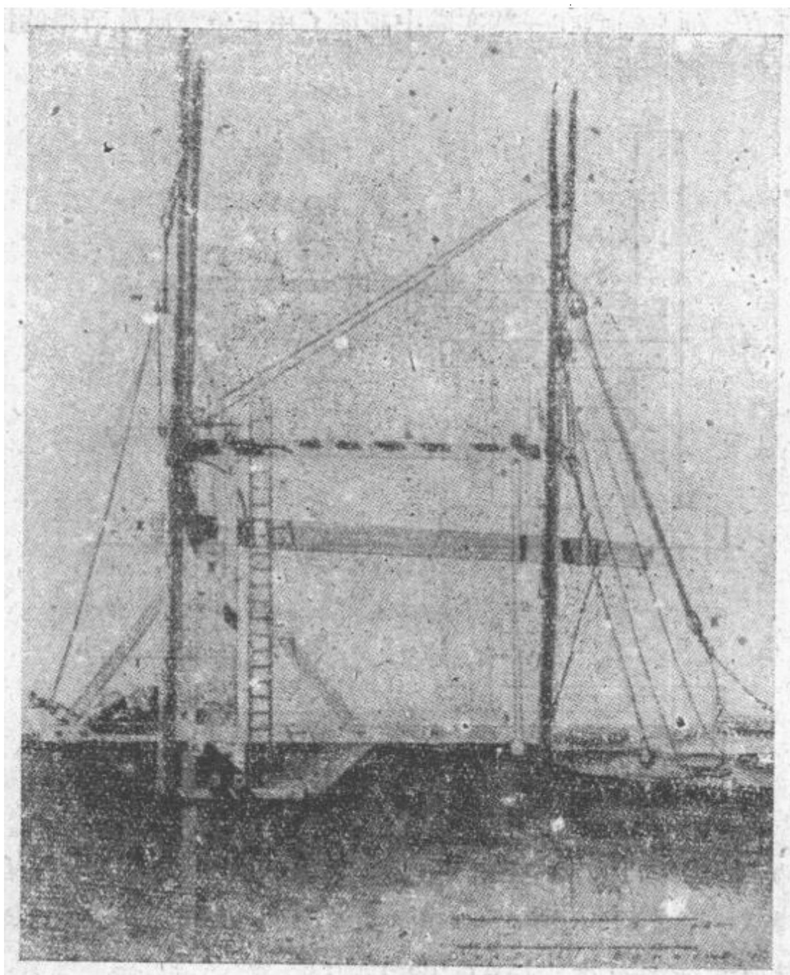


图 42 吉拉德的木制压杆实驗

架机器也可用来进行側向弯曲試驗。为了把压杆試驗的結果和从欧拉的長柱公式所算得的結果进行比較，所需压杆的抗撓剛度应遵照欧拉的建議（参看第 8 节）通过实驗得出。这些实驗指出了把木压杆看作完全彈性体还差得很远。側向弯曲时的撓度并不与載荷成正比，同时在一定載荷下撓度也不是常数，而是随着力的作用时間的延長而增加。将压杆两端夹紧的方式与加載方法曾征求公开評論，試驗結果和欧拉理論之間沒有得到完全一致。

布尔芬格(G. B. Bülfinger)在圣彼得堡做出許多試驗来校核加利略和馬里沃

特的弯曲理論[1]。他发現用馬里沃特的理論来解释实驗結果比較好些。布尔芬格設想虎克定律幷非由实驗而得，他建議用抛物綫关系式

$$\varepsilon = a\sigma^m$$

式中 m 为須待实驗决定的一个常数。我們所討論过的实驗工作最初是由法国工程师們做出的，他們积累了許多具有实际重要意义的試驗結果。例如，在高随的那本桥梁論著中（上面已提到过），我們看見有許多表格包含了各种鉄、木材和石料的强度的資料。

14. 十八世紀中的擋土墻理論

应用擋土墻来防止土壤滑动是一个非常古老的方法。但是在早期关于怎样选定这类結构物的适当尺寸是凭經驗法則来解决的。直到十八世紀，工程师們为了找寻一些合理的根据在設計步驟中应用，才提供各种假設来計算作用在墻上的土压力。同时也做了一些实驗室內的实驗[2]。

别利多尔 (Belidor) 对于求解这个問題是有相当成就的，在他所著“工程师的科学”(La Science des Ingénieurs, 1729 年出版)一书中包含有擋土墻的一章（參看第 10 节）。他指出在斜面 AB 上使重量为 P 的一个球（图 43a）保持平衡所需的水平力 Q 等于 $P\ \mathrm{tg}\ \alpha$。現考慮擋土墻 $ABDE$（图 43b）背后的土，幷假定当沒有墻擋住时，未擋住的土将有約 45° 的傾斜面 BC，他断定此三角棱柱形土体 ABC 有沿 BC 面滑下的趋势。如果此項滑动象球的滑动一样，沒有摩擦的話，則保持土体平衡所需的擋土墻水平反力須等于該土体的重量。但由于摩擦，所需反力可以小得多，别利多尔建議墻背的反力可安全地取为土体重量之半。以 h 代表墻高，γ 代表土壤单位体积的重量，他求出土壤作用于墻背每单位長度的水平压力等于 $\gamma h^2/4$。再根据同一理由，对平行于 BC 的任一平面，如图中虛綫所示，别利多尔断定在 AB 平面上的土压力服从三角形定律，而其合压力 Q 作用在距墻底 BD 为 $\frac{1}{3}h$ 之处。因而此压力对 D 緣的轉动力矩等于 $\gamma h^3/12$——此轉

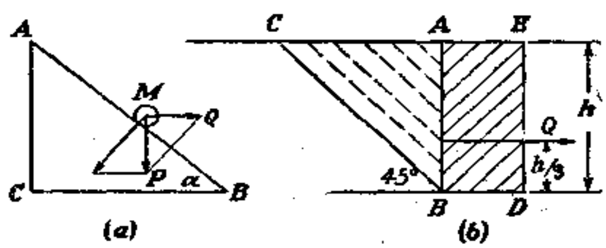


图 43

[1] 見 Comm. Acad. Petrop., 卷 4，164 頁，1785。

[2] 关于十八世紀中擋土墻理論和实驗的完整資料可參看梅涅尔(K. Mayniel)著“土压力与护墻的实驗分析与应用”(Traité expérimental analytique et pratique de la Poussée des Terres et de Murs de Revêtements)，1808 巴黎。

动力矩在选擇墙的厚度时必須加以考慮。别利多尔利用此力矩值来計算厚度，得出的尺寸与当时实驗所确定的非常符合。

更为进步的擋土墻理論由庫侖作出。在1773年的研究报告中(參見第12节)，他考察了在墙背直边 CE 的 BC 部分上的土压力(图35)，幷假定土壤有沿某些平面 aB 滑下的趋势。不計 CB 上的摩擦，他斷定墻的反力 H 为水平方向。土体 CBa 的重量 W 等于 $(\gamma h^2 \mathrm{tg}\alpha)/2$，式中 h 为 B 点的深度而 α 为 CBa 的角度。順沿滑动面的反力的合力 R 将与 Ba 面的法綫成一个摩擦角 ψ，即 R 位于与水平面成 $\alpha+\psi$ 角处。于是图44中的三角形代表了图35中楔形土体 CBa 的平衡条件，由此，他推出：

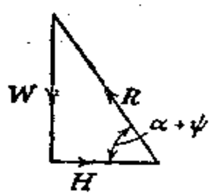


图 44

$$H=W\ \mathrm{ctg}\,(\alpha+\psi)=\frac{\gamma h^2}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,(\alpha+\psi)=\frac{\gamma h^2}{2}\ \frac{1-\mu\ \mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mu\ \mathrm{ctg}\alpha} \tag{a}$$

式中 $\mu=\mathrm{tg}\ \psi$，为摩擦系数。

第二步是选擇能使反力 H 得出最大値的 α 值。将 H [公式(a)所表示的]对 α 微分幷使之等于零，得

$$\frac{1-\mu\ \mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mu\,\mathrm{ctg}\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha \tag{b}$$

由此

$$\mathrm{tg}\ \alpha=-\mu+\sqrt{1+\mu^2} \tag{c}$$

将此値代入(a)式，他得出了擋土墻上所需的最大压力。在他的推导当中，他也考慮到作用在 Ba 面上的內粘力幷且說明方程式(c)仍能适用。另外，在庫侖的論文里面也研究过有外加載荷 P 作用下的情况(图35)。

第二个問題，庫侖观察到擋土墙对土体 CBa 会产生一水平压力 Q' 使土体向上移动。他算出能使 Q' 得出最小値时的 α 角度値。最后，庫侖考虑到土壤沿图35中 Beg 綫所示的曲面滑下的情况，他簡单地討論了在墙背能产生最大压力时該曲綫的形状。

普朗尼(Promy，1755～1839)介紹了将庫侖方法加以簡化的方法使之便于实用。

普朗尼出生于里昂(Lyons)附近的善梅列特(Chamelet)，1776年进入桥梁道路学院。1780年毕业以后，在拍洛尼特指导下參加紐伊丽(Neuilly)桥的建造工作。1785年他协助拍洛尼特改建敦克尔克(Dunkirk)的海港幷隨同拍洛尼特去英国訪問。法国革命时，普朗尼充任法国米制委員会的委員，在采用十进制表示等分圓周以及需要編制新的三角函数表时，他負責領导这个工作。普朗尼是著名的工业学院的創建人之一(1794年)，同时也是該校的第一位力学教授。1798年他充任桥

梁道路学院的院长。他的著作在水力学方面有"水工建筑"(Architecture hydroliqne, 1790～1796)两卷集以及在力学方面有"力学分析教程"(Leçons de mécanique analytique, 1810)，都为法国的工程学校普遍采用。

我們再回到庫侖公式的分析，其中 $\mu=\operatorname{tg}\psi$，普朗尼將方程式(b)写成为更簡单的形式：

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\psi)=\operatorname{tg}\alpha$$

由此，得

$$\alpha=\frac{1}{2}(90^\circ-\psi)$$

这里說明相当于图 35 中最大土压力的 Ba 面平分了墙背直边 BC 及自然坡度綫两者間的夾角。这样，普朗尼发明了选擇擋土墙适宜尺寸的一个实用方法[1]。

15．十八世紀中拱的理論

拱的建筑技术是很古老的。罗馬人在建造桥梁和高架渠中已广泛地使用了拱(半圓拱)。事实上，他們在这項工作中表現了高度的技巧，有許多結构物一直保存到目前[2]，使我們能研究他們所用的施工方法与尺寸比例。显然，那时候还沒有决定拱的安全尺寸的理論，罗馬建筑师們只是凭經驗法則来进行。在中古时代，很少甚至沒有建筑道路或桥梁，因此罗馬方法被人遺忘了。

"文艺复兴"的到来，随着欧洲經济生活的恢复，使得建筑师有必要重新学习建拱的技术。起先这些結构物的尺寸仍然全凭經驗方法来决定，直至十七世紀末年和十八世紀开始，法国工程师們才作出一些努力来建立拱的理論。当时法国在发展道路网方面走在各国的前面，因之，随着公路的发展，拱桥已被广泛地采用了。

第一个用靜力学来解决拱的問題的人是拉海尔(Lahire, 1640～1718)[3]，他是法国科学院的一个会員。他从底薩奎斯(Desargues)那儿学到数学，并且在那位大数学家的影响下在几何学方面有些名望。在拉海尔所著"力学論著"(Traité de Méchanique, 1695)一书中，我們看到在拱的分析里面第一次用了索多边形(funicular polygon)。他考察一个半圓拱(图 45)，假定

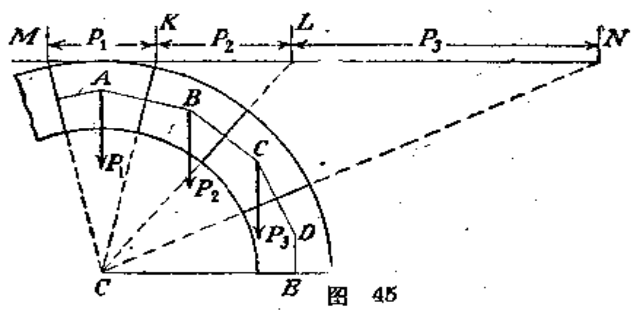


图 45

[1] 普朗尼著"决定擋土墙尺寸的規范"(Instruction-Pratique pour déterminer les dimensions des murs de revêtement) Germinal, An X, 巴黎。

[2] 关于罗馬的桥梁图可参看高随的著作(前已提及)"桥梁建筑論著"(Traité de la Construction des Ponts)卷 1, 1809。

[3] 在彭西列特的一篇很重要的研究报告中描述了拱的理論发展史，見 Comp. Rend. 卷 35, 493 頁, 1852。

构成半圓拱的各楔形块的接触面完全光滑，因此它們只傳遞法向压力。他根据这个假定，研究了下面这个問題：拱的楔块“重量”P_1, P_2, P_3, …应該有怎样大才能使結构物保持稳定？拉海尔采用如图 45 所示的几何方法解决了这个問題。在拱的外表面作一根水平切綫 MN，并将各楔块的半徑分别延长，使与切綫相交于 M, K, L, N 各点，他发現若“重量”P_1, P_2, …与 MK, KL, LN 的长度成同一比例时，可以得到稳定。他也发現在这种情况下，CK, CL, CN 等长度即代表作用在拱上楔块間的压力。用現今的术語来說，$ABCDE$ 图形是垂直力系 P_1, P_2, P_3… 所构成的索多边形，而 $MKLNC$ 图形表示繞极点 C 旋轉 $90°$ 的力多边形。

接着拉海尔又发現由水平面 CE 所支承的最后一个楔块的“重量”一定成为无穷大，因为半徑 CE 是和切綫 MN 平行的。这就启发了拉海尔：在楔块表面完全光滑的假定下，半圓拱的稳定是不会实現的。他注意到在实际的拱中，胶結物能防止楔块滑动，因而得以稳定。所以对于 P_1, P_2, P_3, … 确定的比例并不一定要严格遵守。

以后，拉海尔再回到拱的問題上[1]，用他的理論来决定半圓拱(图 46)支墩的适当尺寸。假設破坏发生在拱的最不利部位，例如在截面 MN 及 M_1N_1 上，他算出拱的上段对下段作用的力 F，仍然不計摩擦力，然后算出抵抗力 F 和防止支墩繞 A 及 B 点旋轉所必需的支墩重量。

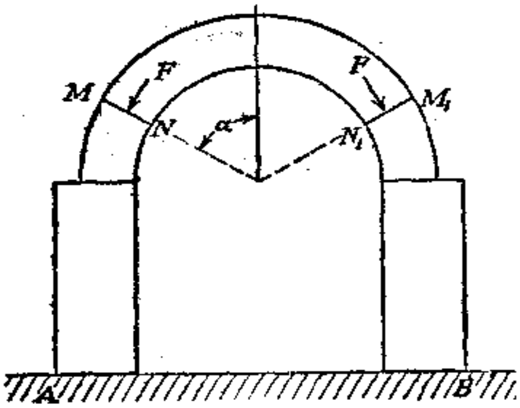


图 46

这种分析方法經別利多尔首先应用，在他所著“工程师的科学”(La Science des Ingénieurs)一书中叙述过拉海尔的方法，并且建議图 46 中的 α 角必須取为 $45°$。以后，拍洛尼特和杰齐(Chezy)都用了拉海尔的方法編制成表用以計算拱的厚度[2]。

庫侖在拱的理論上作了更进一步的发展。当时通过模型試驗已經发現拱的典型性破坏如图 47 所示[3]。我們可以从这个图中断定在研究拱的稳定性中，仅仅考

[1] 見他的研究报告“科学院史”(Histoire de L'Académie des Sciences), 1712, 巴黎。

[2] 列綏芝 (M. Lesage)著：“桥梁道路学院文献中研究报告摘要汇刊”(Recueil des Mémoires extraits de la bibliothèque des Ponts et Chaussées), 1810, 巴黎。

[3] 这种实驗經丹尼楚(Danizy)于 1732 年在 Montpellier 学会上做过，由佛累齐尔(Frézier)在他所著“石料切割”(Traité de la Coupe des Pierres)卷 3 描写过，1739 年于斯特拉斯堡出版。类似的較大規模的实驗也經波依斯塔德(L. C. Boistard)做过。見列綏芝：“各种研究报告汇刊”(Recueil de divers mémoires…)卷 2, 171 頁, 1808, 巴黎。

虑楔块的相对滑移是不够的，还須檢算相对轉动的可能性。在庫侖 1773 年所写的研究报告中，都已設想到这些破坏形式了。在图 48 中，設 $ABDE$ 为承受对称載荷

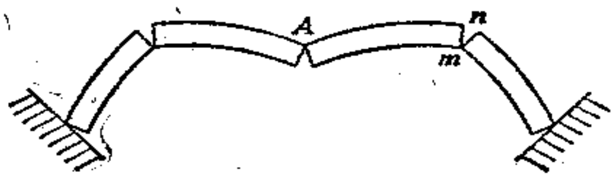


图 47

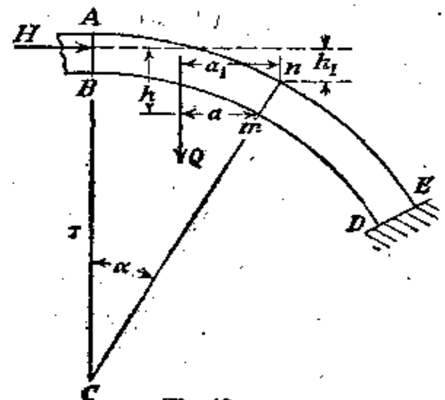


图 48

的对称拱的一半。用 H 表示 AB 截面上的水平推力，而用 Q 表示拱上 $ABmn$ 一段的重量，他求出作用在 mn 面上的合力的法向分力和切向分力分别为 $H\cos\alpha+Q\sin\alpha$ 与 $Q\cos\alpha-H\sin\alpha$，式中 α 为垂直綫 AC 与此面間的夹角。防止拱的 $ABmn$ 段沿 mn 面滑下所需 H 的最小值可以根据下式求得

$$Q\cos\alpha-H\sin\alpha=\mu(H\cos\alpha+Q\sin\alpha)+\tau A \tag{a}$$

式中 μ 为摩擦系数，而 τA 为拱沿 mn 面受剪的总抗力。他从这个方程式里得到

$$H=\frac{Q\cos\alpha-\mu Q\sin\alpha-\tau A}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha} \tag{b}$$

从所有的 α 角度值中，必須求出究竟是那个值能使(b)式得最大值。假定 H 为相应的横推力。显然它就是防止拱的上面一段沿 mn 面滑下所需的最小的力。同样他能求出拱的 $ABmn$ 段开始朝上滑动的推力 H' 的值。此值为

$$H'=\frac{Q\cos\alpha+\mu Q\sin\alpha+\tau A}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha} \tag{c}$$

于是他选擇能使表示式(c)为最小值时的 α 值。假定 H' 有一相应的值。不难看出，要想防止任何可能的滑动，实际推力必須較 H 为大而較 H' 为小。

他又轉而討論对 m 点可能发生的轉动，如图 47 所示，并利用图 48 上的符号，他求出推力 H_1 的极限值为

$$H_1=\frac{Qa}{h} \tag{d}$$

同样，对于 n 点的轉动，他得出

$$H_1'=\frac{Qa_1}{h_1} \tag{e}$$

在(d)式的最大値与(e)式的最小値之間給出了为避免轉动所应有的实际推力的极限值。这就是庫侖方法的关鍵。从他的实际研究中，庫侖断定拱的設計者只要考虑(d)及(e)两式的极限。他建議推力的作用点必須移到 A 点处(图 48)才能使(d)式中的 H_1 尽量地小。

我們看到庫侖对于拱的設計并沒有作出一定法則，只是为了稳定的需要定出推力的极限而已。因此，庫侖著述的价値并沒有得到当时工程师們的重視[1]，但以后到了十九世紀，发現用图解法能算出(d)及(e)两式的极限，他的概念才被拱的建造者广泛应用。

在十八世紀末尾，高陆[2]，波依斯塔德[3]和朗底列特[4]做出了許多試驗。所有这些試驗証实了如图 47 所示的破坏形式，因而支持了庫侖在发展他的理論中所創立的假說。

---

[1] 实际上当时工程师們都宁愿采用根据拉海尔的理論得出的拍洛尼特經驗公式来計算拱所必需的厚度。

[2] 高陆："关于法国潘錫昂拱桥的破坏"(Dissertation sur les dégradations du Panthéon Français)，1800 年巴黎出版。

[3] 波依斯塔德："实驗与观測汇刊"(Recueil d'experiences et observations) 1800 年巴黎出版。

[4] 朗底列特："建筑工艺"(Art de batir)卷 3，236 頁。

第　四　章

1800～1833年間的材料力学

16. 法国工业学院(L'École Polytechnique)[1]

有如上述(参看第10节)，十八世紀年代法国成立了几所工程学校。当法国革命时，这些学校和其他大学的学生和教师由革命政府認定为涉及某些反革命的嫌疑而停課。但在同一时期法国正和欧洲同盟軍进行战爭，迫切地需要工程师去推动堡垒、道路以及桥梁的建筑和发展炮兵学。許多科学家和工程师在数学家加斯拔德·孟治(Gaspard Monge)領导下，建議(向新政府)組織一所新的工程学校来代替所有那些旧政体遺下的学校。这个建議在1794年得到正式批准，因此在同年年底新的学校便开始了教学工作。1795年，这所学校被取名为現在的法国工业学院(École Polytechnique)。

图 49　加斯拔德·孟治

这所新型学校的組織和被停閉的旧校大不相同。一切陈旧的特权都被廢除了，社会上各阶层的子弟都能进入这所学校。为了选拔最优秀的学生，还采用了竞爭性的入学考試办法[2]。当这所学校創办的时候，在巴黎有許多閒散的科学家和教授們都要求到这所学校里来教书，有很多杰出的人物成为这所学校的教职員。拉格朗日、孟治、和普朗尼这些有名人物都被聘为該校的数学和力学教授。不久富勒(Fourier)和泊松

---

[1] 关于这所著名学校的詳細历史可参看該校校友們在1895年所出版的“法国工业学院百年紀念册”(École Polytechnique, Livre du Centenaire 1794～1894)，并参看宾尼特(Pinet)“法国工业学院史”(l'Histoire de l'École Polytechnique) 1886。

[2] 到現在还保留了这种选拔方式，工业学院每年的入学考試将法国高等学校最优秀的学生們吸引到巴黎来。常常只有一小部分学生被录取。

(Poisson)也加入其中。

由孟治拟定的这所学校的教学制度和以前各校所实行的本質上有所不同。在旧式学校里沒有統一的入学章程，也沒有聚集許多学生在一起的联合講課，因为只有从事实际工作的工程师向个別学生(或少数集体)解釋怎样設計和建造此一或那一結构，教学方法具有学徒式的风气。如果遇到为学生們生疏的数学或力学中某些理論需要作报告时，才由工程方面的教授或数学知識較好的学生来作一些額外的講授。在旧式学校里面象数学、力学或物理学之类的基础課程都从来不作联合講授的。

新校的行政措施也全然不同。它認为工程中各个部門都需要学好数学、力学、物理学和化学之类的普通課，它也認为如果一个学生在这些基础科学中受到較好的教育，他就不难求得工程上任何专业所必要的专門知識。按照这个总的原則，头两年的課程表里几乎全是基础科学，而工程方面的課程都集中在第三年开講。后来，取消了工程方面的教程，工业学院就成为一所只使学生預修必要基础科学的学校，以便随后分入其他工程学校，例如桥梁道路学院、矿业学院、軍事学院等等。

新校的主要发起人是加斯拔德·孟治(Gaspard Monge, 1746～1818)，由于他的教学热忱和才干，对于这所学校的取得成就，貢献过很大的力量。他出生于彪恩尼(Beaune)的一个較貧寒的家庭并在当地学校求学。因其成績优异，所以不滿十六岁就当上了物理教师。他經常关心几何学与制图学。有一位軍事工程师遇見他，发覚他的特异天才，便將他安排在梅齐尔斯(Mézières)軍事学校去学习，那所学校在当时可算是欧洲最有名的学校了。在該校，他接触到甘穆斯(Camus)和波修特(Bossut)两位教授，这两位教授很決就发現他的数学天才，帮助他在該校取得快速的进展，使他在1768年充任了該校的数学教授。他的講演引起学生們极大的兴趣，其中便有拉咱尔·卡洛特(Lazare Carnot)和普里尤尔(Prieur)。这两位后来成为法国革命时期的有力人物，对于創办法国工业学院出力很多。

孟治在梅齐尔斯时期創立了数学上全新的一支，即世所共知的画法几何学，从那时起这門学科一直是工程教育中一門极重要的課程。1780年，孟治被选为科学院的会員，1783年，他离开这所学校去巴黎，在海軍学院(École de Marine)充任教授。为了在这所学校里的教学需要，他写出靜力学方面的著作[1]，这本书在法国許多工程学校中用为教本很多年。

孟治是一位进步的思想家，他熱心支持革命，有段时間他参加了政府工作，充

[1] "靜力学原理"(Traité Élémentaire de Statique)第一版，1786。

任过海軍秘书。不久,又回到科学界担負筹办工业学院的工作。孟治不独是一位大科学家而且是出色的教师和演說家。他相信在教学組織中让学生們能接近当时一些卓越的科学家是必要的，这样会使学生能从这些参加科学創造和发展的人們那里得到所学課程的稳固基础。工业学院的教学組織是很成功的。当时最优秀的数学家都在該校講課,成功地将一些重要知識傳授給学生。师生双方热心教习的結果得到了极大成就,該校的第一班就替国家培养了許多著名的科学家和工程师,其中有波因薩特(Poinsot)、比沃特(Biot)、馬魯斯(Malus)、泊松、給呂薩克(Gay-Lussac)、阿拉果(Arago)、柯西(Cauchy)和納維埃(Navier)。

对学生所作的集体講演插入了一些习題課,并且有定期的制图与物理、化学实驗等作业[1]。为了进行这类作业,将大班分成 20 人的一些小班(brigades),每个小班都有一位专門的講师負責指导。这些青年講师中最优秀的到时候便提升为教授,因此这所学校不仅培养未来的工程师,而且也培养未来的教授和科学家。十九世紀前半个世紀內在彈性理論方面的发展主要是由这所学校毕业出来的一些人所完成的。

这所学校很早就出版工业学院期刊，它是以数学为主要內容的刊物。期刊里不独刊登教員們的原稿，而且也刊登已举行講演的教程。它是最先对学生集体講授积分、力学和物理学的一个学校,由于这一改革成功,就必須有教本应用。因此,教授們不得不編写講义来出版了。这样一来,在这一时期写成了許多重要书籍,例如孟治著的“画法几何学”(Géométrie descriptive)与“应用几何分析教程”(Cours d'Analyse appliquée a la Géométrie),普朗尼著的“力学分析教程”(Leçons de Mécanique Analytique),泊松著的“力学論著”(Traité de Mécanique),拉克洛(Lacroix)著的“微积分学”(Calcul différentiel et integral)以及德荷依(d'Haüy)著的“物理論著”(Traité de Physique)。这些书不独在法国而且在其他国家都广泛傳誦,对于基础科学的发展起了很大的作用。

其他国家的工程教育制度都仿照着工业学院办理。例如,維也納工业学院的創办人就采用它的教学大綱作为指导方針，从工业学院毕业出来的学生杜佛尔(Dufour)将軍也仿照它在苏黎世(Zürich)(瑞士地名——譯者注)創办了一所工业学院。俄国也仿照法国的工程教育制度,美国建立西点(West Point)軍事学院也受着这种趋势的影响。

法国是傳授工程师們以基础科学的全面教育的第一个国家，由于这些人具备

---

[1] 将实驗室工作作为教学大綱中的一个环节,好象这是第一次。

广泛的科学知識，对于工程科学的发展貢献很大，事实証明这种教育方法是极为成功的。那时法国工程师的声望是很高的，他們常常接受外国的聘請，协助解决工程上的困难問題。

17. 納維埃

庫侖在 1773 年提出的著名研究报告包括有材料力学中一些重要問題的正确解法，但迟至四十多年以后才有一些工程师充分了解这些問題，也才将它們应用到实际中去[1]。材料力学中更进一步的发展应归功于納維埃(1785～1838)[2]。虽然他在庫侖死后才开始研究，但他的早期著作中并沒有納入前人所得出的成就。納維埃出生于迪容(Dijon)，他的父亲是一个富有的律师。他 14 岁时，父亲去世，就住到叔父家中，他的叔父是法国著名的工程师高随，高随非常关心这个孩子的教育。1802 年，納維埃經工业学院的选拔式入学考試及格，进入該校，1804 年毕业后考入桥梁道路学院，过去他叔父也在該校讀过书并教过数学。高随尽量利用机会将有关建筑桥梁和渠道的实际知識来鍛炼他侄儿的理論研究。因此当納維埃在 1808 年毕业时，已經有足够的能力来对实际問題作理論研究了。

图 50 納維埃

他随即在一項重要著作中得到运用他的知識和才能的机会。因为高随在 1807 年去世，未死以前正在編写关于桥梁和渠道的論著。这項工作沒有完成，納維埃替他叔父完成了这件工作，刊出了三卷巨著。第一卷包含桥梁建筑的历史并描述了最重要的新建桥梁，这一卷是在 1809 年問世的。1813 年出版第二卷，而最后一卷，叙述渠道建筑，是 1816 年出版的。为了使內容合时，納維埃在許多地方加了一些編者注。这三卷著作是有极大历史意义的，因为它描述了十九世紀初期彈性体力学的动态。将这些加注和納維埃以后的著作比較一下，我們可以看出这門学科当时的成就，主要应归属于他个人的努力。第二卷第 18 頁上的編者注是特别有价值

[1] 彭西列特在他的各种拱的理論的历史回顾中(前已提及)指出："庫侖的研究报告頁数虽少，然而包括了許多东西，可惜四十年来工程师和科学家都沒有对它們重視过"。

[2] 关于納維埃的傳記和他的著作詳表可参看圣維南汇編的納維埃原著"材料力学"第三版，1864，巴黎。

的。在这里写出了棱柱杆弯曲的全部理論。从这里可以看出納維埃并不曾学习过拔侖特的重要論文(参看第11节)或庫侖的著作。他同馬里沃特和雅可普·伯諾里两人一样,認为中性軸的位置是不关重要的,可以将对截面四方所作的切綫取为中性軸。他也認为用馬里沃特的公式(参看第5节)計算梁的强度是足够精确的了,并且还可以根据它进而分析梁的撓度。凭着一些不正确的假定,他导出一个計算抗撓剛度的式子,这个式子由两項組成,并且建議必須用杆件弯曲試驗和压縮試驗来决定公式中的两个常数。

这些錯誤的見解,納維埃并沒有保持很久,在1819年,当他开始在桥梁道路学院講授材料力学时,他的理論中的某些錯誤已經改正过来了[1]。但对于求中性軸位置的方法还存在不正确的观念:納維埃此时假定中性軸必須在下列方式下将截面划分为两部分,即拉应力对此軸的力矩必与压应力对此軸的力矩相等。直到他的講稿第一版付印时(1826年)才得到改正。他是这样改正的:当材料服从虎克定律时,中性軸必通过截面的形心。

1813年納維埃增訂了別利多尔的"工程师的科学",又在1819年,重編了別利多尔的"水工建筑"第一卷。在这两本书中我們看到納維埃作了好些重要的注解,他是希望这些书能滿足当时讀者的需要的。

1820年,納維埃向科学院提出关于薄板弯曲的一篇研究报告,而在1821年又发表了一篇关于数理彈性理論基本方程式的著名論文。

虽然他忙于理論研究和修訂书籍,他还是經常有一些实际工作要做,他时常参予桥梁工程。在十八世紀末尾和十九世紀初期,桥梁工程方面发生了巨大的变化。在这以前,石料是建筑重要桥梁的主要材料,但現在却比較普遍地使用了鑄鉄。当时英国在工业方面是个最先进的国家,工业上广泛使用鑄鉄也是从英国开始的。約翰·斯米頓(John Smeaton, 1724~1792)[2]是在各方面推广使用鑄鉄的第一位出色工程师,他将鑄鉄用来制造风車、水車和水泵。第一条鑄鉄桥由阿伯刺罕·达尔比(Abraham Darby)在塞汶(Severn)河上(1776~1779)建成。其他国家也随着英国之后,在世紀轉換时,德国和法国都建造了鑄鉄桥。这些桥梁都做成拱式,因此材料主要系承受压力。这些新的建筑物并不怎样坚固,其中有很多已經毀坏了。

工程师們断定长跨度的鑄鉄桥是不安全的,于是开始建造悬索桥,悬索桥的基

[1] 見圣維南增訂納維埃著"固体抗力……課程总結"(Résumé des Leçons……de la résistance des corps solides)一书中对材料力学及彈性理論史实第104頁上所作的評注,1864,巴黎。

[2] 斯米頓的傳記在"Reports of John Smeaton, F. R. S. 卷1, 1812, 倫敦"中有所記述。

本原理是很古老的。在中国和南美可以看到一些很古老的悬索桥[1]，不过第一座能够經受严格考驗的更現代化的悬索桥于十八世紀末叶在北美建成。1796 年，詹姆士·芬萊(James Finley)在宾夕法尼亚(Pennsylvania)建成了他所造的第一座悬索桥。在十九世紀初叶，已經有許多那样的桥梁出現。最重要的是費拉特費亚(Philadelphia)附近跨越舒約基尔(Schuylkill)河上的那座桥。英国工程师又依照美国方法，在十九世紀的前二十五年中，在英国建造了許多这样的桥梁。其中最重要的有：中孔跨度为 550 呎的勉萊(Menai)桥，是由台尔福特(Telford, 1757～1834)[2]設計和建造(1822～1826)的。

法国政府极重視这一新的发展，派遣納維埃到英国去研究建造悬索桥的技术。經过两次訪問之后(1821 年及 1823 年)，他提出了"悬索桥的研究报告"(Rapport et Mémoire sur les ponts Suspendus)(1823 年)，其中不仅包括这方面的史料与現有主要桥梁的描述，而且还包括了分析这些結构物的理論方法[3]。这分报告用为悬索桥設計的一本最重要的参考书有五十年之久，到今天来說，它仍具有若干重要意义。

1824 年，納維埃被选为科学院的会員。1830 年，他成为工业学院的微积分和力学教授。他的講义"力学課程总結"(Résumé des Leçons de Mécanique)出版以后，在法国工程师們中多年来享有极大的声望。

18. 納維埃在材料力学方面的著作

1826 年，納維埃的材料力学第一版問世了[4]，书中編入了他在这方面的主要成就。假設我們把这本书和十八世紀出版的同类书相比較，我們可清楚地看出在十九世紀前二十五年中材料力学方面是有很大发展的。十八世紀的工程师应用实驗和理論建立了計算极限載荷的公式。納維埃在书中一开头就說过最重要的是要寻求結构保持完全彈性而不产生永久变形时的极限。在彈性范圍內，可假定变形

[1] 关于旧式鑄鉄桥的主要历史报导可参看麦鏈斯(G. C. Mehrtens)的鋼鉄桥講稿，第 1 卷，1908，萊比錫。并参看雅告拉(A. A. Jakkula)著"悬索桥的历史"(A History of Suspension Bridges in Bibliographical Form)，美国 Texas 农业机械学院，1941。

[2] 見吉布(A. Gibb)著："台尔福特逸事"(The Story of Telford)，1935 年倫敦出版。并参看斯迈尔斯(Smiles)著："工程师的生活史"(Lives of the Engineers)卷 2。台尔福特組織了倫敦土木工程师学会(1821 年)并終身为該学会的主席。

[3] 英国工程师們当时不很重視理論，因此布果斯特(Brewster)曾对台尔福特写过这样的話："他不喜欢研究数学，甚至初等几何他都不熟悉，这种奇突的性格眞使人惊异，当我們有一次向他介紹一位青年朋友作为他的助手时，介紹了这位年青人在数学方面的成就，他就毫不迟疑地說：他认为这样的学識与其說給予工作崗位，还不如說不合格来得恰当些"。

[4] 从 1819 年起納維埃的講义抄本已在他所教的学生中間流傳。納維埃的学生圣維南在討論納維埃的早期著作中的一些錯誤时曾提供了这部分的材料。

和力成正比，而建立一些較簡单的公式来計算这些量。超过彈性极限以后，力和变形之間的关系变得很复杂，无法导出簡单公式来估算极限載荷。納維埃建議为計算彈性状态而导出的公式必須使之能适用于现有的已驗証为十分堅固的結构物，这样才能确定出各种材料的安全应力，才能作为将来建造新的結构物时选定适当尺寸之用。

在这本书的头两节中，作者討論到棱柱杆的簡单受拉和簡单受压，并指出，要說明某一材料的特性，仅得出它的极限强度是不够的，还必須表明它的彈性模量 E。他給彈性模量下的定义是单位横截面面积上的載荷对所产生的单位伸长量的比值[1]。因为决定 E 值时需要在彈性范圍内測定极小的許多伸长量，納維埃从以往别人作出的实驗中，得不到什么資料。最后，他只好用鉄料做出自己的試驗。那些鉄料是他在建造巴黎的因法利底斯(Invalides)桥上用过的[2]。他确定了此种材料的模量 E 值。

在第三节中，納維埃討論了棱柱杆的弯曲，并且开头就假設弯曲是发生在和力所作用的同一平面内，因此他的分析只符合于具有对称平面的梁，而且載荷又須作用在該平面内方才有效。他假定横截面在弯曲时仍保持为平面，应用三个静力学方程式，断定中性軸通过截面的形心，而其曲率可用下式求出

$$\frac{EI}{\rho}=M \tag{a}$$

式中 I 为截面对中性軸的慣矩。假定撓度很小并取梁軸为 x 軸，他得到下列关系式

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M \tag{b}$$

从欧拉的时代起，这个方程式一直用来求悬臂梁及載有对称載荷的簡支梁的撓度。而納維埃則将此式用在承受任何側向載荷的簡支梁上，在这种情况下，撓度曲綫是根据梁上各个不同部位的各自方程式来表示的。为了解释納維埃的分析方法，在图 51 中示有加載于任一点 C 处的梁。令 C 处的切綫与水平軸所成的夹角为 α，他得出 B 与 A 对 x 軸的撓度分别为：

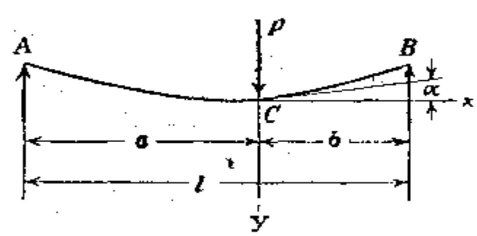


图 51

[1] 彈性模量是由湯姆士·楊首先介紹到彈性体力学中来的（参看第 22 节），但他所下的定义却与此不同。現在一般还是接受納維埃所下的定义。

[2] 見他的"悬索桥的研究报告"，第 2 版，第 293 頁。

$$f_b=\frac{Pa}{l}\ \frac{b^3}{3EI}+b\ \mathrm{tg}\ \alpha \qquad f_a=\frac{Pb}{l}\ \frac{a^3}{3EI}-a\,\mathrm{tg}\ \alpha$$

从这两个撓度相等的关系上，他得出

$$\mathrm{tg}\ \alpha=\frac{Pab(a-b)}{3EIl}$$

得出 α 并利用已知的悬臂梁撓度曲綫，便能作出 AB 梁上两部分的撓度曲綫。

他用同样方式討論了图 51 的梁上承載着一部分均布載荷的問題。在这种情况下計算最大应力时，他錯誤地假定了最大弯矩系发生在載荷重心的下面。

納維埃是第一个发明出一个一般方法来分析材料力学中超靜定問題的人。他說明只有当物体被認作絕对剛体时，这类問題才是超靜定的。可是，如果考慮它的彈性，那么我們应当(在靜力学方程式以外)另外加上許多表示变形条件的方程式，因此总会有足够的关系来解决所有的未知量。例如，考慮一个載荷 P 由同一平面内的几根杆件予以支承（图 52），納維埃說明如果杆件都是絕对剛体，則这个問題是屬于超靜定的。他可以将除掉两根以外的所有各杆的力各取定一任意数值，而用靜力学方程式决定此最后两杆的力。如果考虑到杆系的彈性，則这个問題变成了靜定的。若令 O 点位移的水平分量和垂直分量分别为 u 及 v，他可将各杆的伸长量和它們的内力表达为 u 及 v 的函数。于是他写出两个靜力学方程式，求出 u 及 v，然后算出所有各杆的内力。

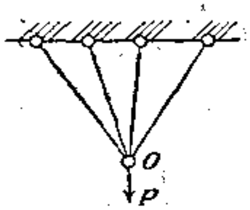


图 52

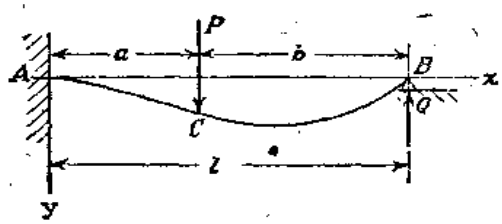


图 53

納維埃由一端固定而他端簡支的一根梁的情况开始(图 53)，研究了弯曲方面的超靜定問題。用 Q 表示 B 处的超靜定反力，他得出下列方程式：

对于梁的 AC 段：

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=P(a-x)-Q(l-x)$$

$$EI\frac{dy}{dx}=P\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)-Q\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$EIy=P\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-Q\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

对于 CB 段：

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Q(l-x)$$

将这个方程式积分并观测在 C 点处两段撓度曲綫有一公共切綫和相同的竪标距，他求得

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{Pa^2}{2}-Q\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$EIy=P\left(\frac{a^2x}{2}-\frac{a^3}{6}\right)-Q\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

由于 $x=l$ 时撓度等于零，他从最后方程式中指出

$$Q=\frac{P(3a^2l-a^3)}{2l^3}$$

得到这个反力后，便可立即得出两部分彈性曲綫的方程式。

以同样方式，納維埃分析了一根两端固定的梁以及支承于三个支座上的梁。我們可以看到，用积分求彈性曲綫和計算超靜定未知量这两个方法完全給納維埃发現出来了。不过在他的分析中并沒有提到現在所广泛使用的弯矩图和剪力图，这就很好地說明了为什么他在有些情况下将最大弯矩的位置定錯了。

納維埃也研究了棱柱杆受軸向力和横向力联合作用下产生弯曲的問題。在討論了軸向压力作用下的支柱的压屈之后，他进而研究偏心受压和受拉的情况以及与軸綫成某些角度的力作用于柱端的情况。他在这些方面計算最大弯矩与最大撓度的公式較之只計算有横向力的公式要复杂得多，大概在当时这些公式是很少应用的。以后，由于結构上使用細长杆日益增加，这些公式才变得非常重要，并且事先計算出大量表格以簡化使用时的演算过程。

納維埃在他的书中，对于曲杆的弯曲是有很大貢献的。欧拉已經作过一个假定：当一根原来有曲率的杆受弯时，弯矩和曲率的改变成正比。納維埃取

$$EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=M$$

这个公式用它来研究在 A 端为固定端的曲杆 AB 的弯曲(图 54a)。在 C 点处取一元素 ds，他由上述方程式断定，由于弯曲作用而引起两相邻截面間的角度改变，其值为 Mds/EI。因此在弯曲时截面 C 轉动了一个角度

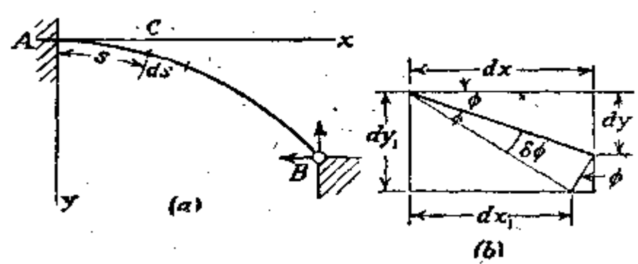


图 54

$$\delta\phi=\int_0^s \frac{Mds}{EI}$$

由于这一轉动，元素 ds 的原先投影 dx 及 dy 将变为 dx_1 及 dy_1（图 54b），得

$$dx_1-dx=-ds\cdot\delta\phi\cdot\sin\phi=-dy\int_0^s \frac{Mds}{EI}$$

$$dy_1-dy=ds\cdot\delta\phi\cdot\cos\phi=dx\int_0^s \frac{Mds}{EI}$$

他将这些公式积分，得出在弯曲时任一点 C 位移的分量成下述形式：

$$x_1-x=-\int_0^s dy\int_0^s \frac{Mds}{EI}$$

$$y_1-y=\int_0^s dx\int_0^s \frac{Mds}{EI}$$

利用这些方程式，便能求解曲杆弯曲的超静定問題。例如，有一对称的双鉸拱，拱頂上承受載荷，如图 55，超静定推力 H 的大小可由鉸 B 的水平位移等于零的条件而得出，所以

$$\int_0^s dy\int_0^s \frac{Mds}{EI}=0$$

納維埃从这个方程式算出抛物綫拱和圓弧拱的推力 H。同样他对整个跨度上受均布載荷的情况作出計算。全部分析是在元素的长度（如图 54b 所示）保持不变的假定下做出来的。納維埃最后指出怎样考虑将軸向力所产生的压力一并計入的問題。

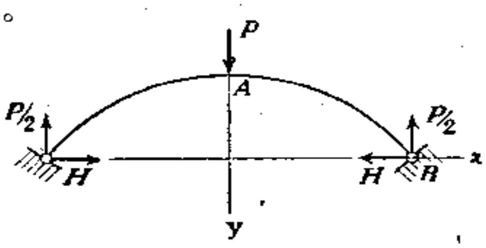


图 55

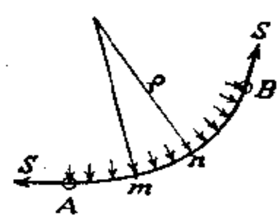


图 56

这本书的最后一章討論到薄壳，这也是納維埃創造发明的一部分。他起始討論一根完全柔性而不伸长的索 AB 在曲綫平面內承受着垂直压力的平衡状态（图 56），并推断（由元素 mn 的平衡条件）$S=$常数，而 $\frac{S}{\rho}=P$，式中 S 为索的拉力，而 ρ 为曲率半徑。这样，任一点上的曲率必与該点上的压力成正比。取一个长度不定的槽形物（图 57a），內充液体，并由均布力 S 支承，要求解答在什么条件下此壳将不致产生弯曲，他指出如果在任一点 m 处的曲率与深度 y 成正比时，才有此种情况。如图 57b 所示，将原先是直的細长狹条 AB 在两端施以力 F，使之弯曲，这样

形成的曲綫就能滿足上述要求，这是因为在任一点 m 处的弯矩和撓度曲綫的曲率都显明地和 y 成正比之故。

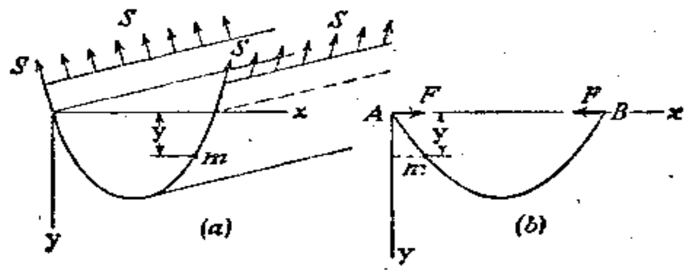


图 57

就承受均匀拉力 S 及法向压力 P 的一种薄壳而論，納維埃由平衡条件得出如下的方程式

$$S\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right)=P$$

由此，他得出厚度为 h 的球形壳体的拉应力为

$$\sigma=\frac{S}{h}=\frac{P\rho}{2h}$$

納維埃曾取直徑为 1 呎，厚度为 0.1 吋的鉄制球形薄壳作試驗[1]。使它受到足以发生破裂的內压力，他发現材料的极限强度与簡单拉伸試驗中所得的接近相等。

納維埃的书中还有另外几章是討論擋土墻、拱、板与桁架的。这些都留到下面再談。我們看到这本书已經包含了許多結构問題的适当解法。不过，从今天的观点来看，要使它完美无缺还必須加入关于梁弯曲时的剪应力的討論和梁不在力所作用的同一平面內弯曲的討論。我們以后可以看到，这两个問題在納維埃去世后不久也都得到了解决。

19．1800～1833 年間法国工程师的实驗性研究

十八世紀的工程师們作材料試驗时，主要着重于极限强度，虽然他們已經积累了不少关于材料破坏的資料，但很少人注意到試驗中試件的彈性。我們現在来看，在十九世紀初从法国工业学院出来的工程师們所作的实驗性研究不但有实用的价值，而且还有些科学上的价值。这是由于他們在数学、力学和物理学上修养淵博所致。

杜品（F. P. C. Dupin，1784～1873）[2] 是这个新时代中的一位杰出的学生，

---

[1] 見 Ann. Chim. et phys. 卷 33，225 頁，1826，巴黎。

[2] 关于杜品的傳記，參看伯特朗德 (J. L. F. Bertrand) 著："学会頌詞"(Éloges Académiques)，221 頁，1890 出版。

1803 年他在工业学院毕业。在学校里念书的时候，他就表現出数学才能，在几何学上发表过他的第一篇論文。1805 年他以一个造船工程师的身分被派到爱阿梁(Ionian)島(地中海东部，希腊西边的一个島屿——譯者注)主持柯尔佛(Corfu)兵工厂。在那里他完成了木梁弯曲的重要研究[1]。从簡支梁試驗中，他发現在一定限度內，撓度与載荷成正比。超出此限度后，撓度增加較快，他指出此时載荷和撓度之間的关系可用一拋物綫方程来表示。他用不同种类的木材作試驗，发現木材的抗弯能力是随着它們的比重而一起增加的。将梁中央受集中荷载所产生的撓度和同一梁上受同样重量的均布荷載所产生的撓度作比較，他发現后一情况产生的撓度等于前者的 19/30。我們知道这个从实驗中所得的比值和理論上得出的値 5/8，是非常接近的。

杜品从矩形梁的实驗中发現了梁的撓度是与其寬度并与其厚度的立方成反比的。他也发現撓度和跨长的立方成正比。就同一材料制成的許多几何相似的梁而論，他断定由梁本身重量在中点处所产生的曲率为一个常数，而且它們的撓度是与其綫尺度的平方成正比。在研究梁中央受集中載荷所产生的撓度曲綫的形状时，他发現用拋物綫来代表这种曲綫是非常精确的。从这些实驗中，杜品得出关于木船船壳的强度和撓度的一些結論。所有这些結果都是在納維埃的材料力学还沒有出版以前得出的。

工业学院的另一个毕业生杜留(A. Duleau)完成了許多种关于鉄料和鉄結构的試驗[2]。在杜留所作論文的第一部分中，他导出了計算棱柱杆的弯曲和压屈、計算拱的弯曲以及計算軸的扭轉所需的各項公式。他在設定弯曲时中性軸的位置时，錯誤地假定对該軸的拉力矩与压力矩相等。由于他的研究工作大部分是处理矩形梁及圓形梁問題，这个錯誤并不影响他最后試驗結果的确实性。他一开始便确定拉伸和压縮的彈性模量，并且假定梁弯曲时其截面仍保持平面形式，导出了撓度曲綫的微分方程。他将此方程式用于悬臂梁以及两端簡支的梁。为了得出两端固定的梁的撓度，他設想一根无限长的杆，其受載方式如图 58*a* 所示，在此受載方式下形成了波形的撓度曲綫，取其一段的长度为 l，如图 58*b* 所示。由此他断定：两端固定后，其中央撓度可减低为同跨度簡支梁相应値的 1/4。

他对梁所作弯曲实驗的結果証明：在矩形梁的情况下，实驗結果和他的理論

[1] 見"木材的柔性、受力与彈性的实驗"(Expériences sur la flexibilité, la force et l'élasticité des bois) J. école Polytech., 卷 10, 1815。

[2] 杜留著："鍛鉄的抗力理論与实驗"(Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé), 1820, 巴黎。

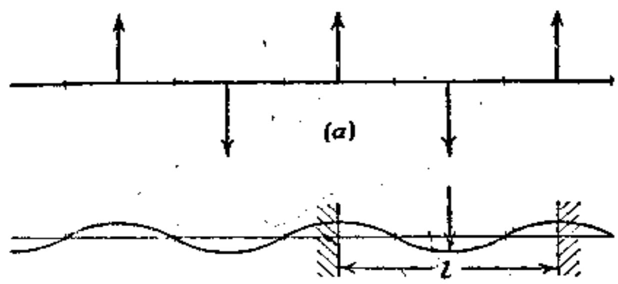


图 58

极为相符，但梁的截面为等边三角形时，則实驗的剛度較理論所得的为小。这一差异，我們可以从他对中性軸位置的錯誤概念上得到解释。

现在再来談第二类关于棱柱鉄杆承受軸向压力的試驗。他用很細长的杆子作实驗并細心地使載荷沿着軸心施力。这样他所得出的結果和欧拉的理論非常符合。

杜留还做过几次如图 59 所示的組合梁的試驗。在計算抗弯剛度时他取截面的惯矩为 $\frac{b(h^3-h_1^3)}{12}$。实驗証明，为了要得出和理論相符的結果，必須防止梁的上

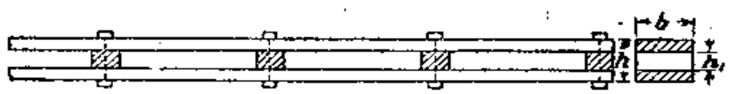


图 59

部对下部的任何滑移。这可用螺栓将它們固定起来达到目的。这类結构物用实驗方法所得的撓度常較計算的略大，当梁两部分間的距离 h_1 愈大时，差异便愈为显著。这种差异的来由，只要观察一下杜留的計算就可以明白，因为在他的計算中沒有考虑到剪应力对于撓度的影响。当距离 h_1 增大时，这种影响将愈大，而总撓度就因此减少。这样，因剪力所产生的撓度也相对地愈来愈居于主要地位了。

从实驗中明白了梁的强度和剛度是随着距离 h_1 而一起增加的关系之后，杜留观察到采用两块翼緣鈑其中連以腹鈑的梁是有利的。他也建議采用早已在鑄鉄拱桥上用过的管形截面[1]。

其次，杜留做过有关薄鉄鈑双鉸拱的一套試驗。他发现当載荷作用在拱中央时，在三分点上(在跨度方向上)曲率沒有改变。他假定在这些点上有鉸連接，从而发展了对此問題的近似解，这一解法充分証明了他在实驗中所用拱的尺寸是恰当的。正如我們所知，随后納維埃便提供了一个有关拱弯曲的可靠理論(参看第 18 节)。

杜留最后作出的試驗是研究棱柱鉄杆的扭轉。他起先用圓軸作試驗，并假定

[1] 杜留提到高随曾在 1805 年建議使用这种管形拱。

扭轉时所有截面仍保持为平面以及各截面上的半徑也都保持为直綫，导出了和庫侖公式相符的扭轉角公式。在計算圓管的扭轉角时，他作了同样的假定。这里他再一次提到了采用管形截面的优点。关于矩形杆的扭轉，杜留观察到为圓軸而作的假定在这里就不再适用了。那时大家都承認扭轉应力是与离杆的軸綫的距离成正比，但杜留的实驗証明并不如此[1]。我們可以在下文中看到柯西(Cauchy) 改进了这个理論，而圣維南又最后精确地解决了这个問題。

我們知道杜留的实驗經常是在彈性极限范圍以內做出的。他用的材料都服从于虎克定律，他常常企图用实驗来驗証他的理論公式。他認为只有这种类型的实驗才能供給工程师們以有用的資料，他批評象蒲放（參看第 13 节）所做的那些試驗，那些試驗完全以求算极限載荷为目的。

最后，这段时期內的最有用和最重要的成果还是由西昆(Séquin)、拉梅(Lamé)和維卡特(Vicat)等人达成的。这几位著名工程师中，西昆发表了他作金属絲試驗的結果，他利用这些試驗結果建造起法国第一座悬索桥[2]。拉梅对俄国鉄料的力学性能[3]作了研究，而維卡特則倡导以避免蠕变現象为目的的耐久性試驗，蠕变現象是他首先发现的[4]。維卡特又研究了各种材料的剪切抗力[5]，并且以直接試驗証明：在短梁中，剪力对强度的作用成为非常重要的因素。因为他用短梁进行研究，并且用的是不服从虎克定律的磚石等类材料，他所做的实驗已使簡单弯曲理論对它不能适用。因此，他的工作除了促使人們注意梁內剪力的重要性以外，很少理論价值。

20. 1800～1833 年間拱与悬索桥的理論

在 1800～1833 年間，拱的設計者大都依从庫侖的理論，假定拱破坏时，其形式必如图 47 所示，断裂成四节。这种分析的主要困难是在于求定断裂截面 BC 的位置(图 60)。理論假定了作用在截面 AD 上頂点 A 处的水平推力 H、拱段 $ADBC$ 的重量 P 以及在該段上的载荷所合成的合力 R 要通过 B 点。而且，截面 BC 必位于 H 为最大值的地点。求断裂截面位置的問題通常是用試探法解出的。假定出

[1] 圣維南在他的历史回忆中(參看第 41 节) 指出杜留由扭轉矩形杆所得的实驗結果使納維埃大吃一惊。

[2] 見他所著："鉄索桥" (Des ponts en fil de fer) 1823，第二版，1826。关于这位著名工程师的傳記，可参看皮卡德 (E. Picard) 著："学会頌詞与討論" (Éloges et Discours Académiques)，1931，巴黎。

[3] 他的实驗結果可从納維埃书中找到，第二版，第 34 頁。

[4] 見 Ann. ponts et Chaussées, 1834 ["关于承受不同拉力下鉄索的伸长"的注 (Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis à diverses tensions)]。

[5] 見 Ann. ponts et chaussées, 1833, 200 頁。

若干截面位置，即可求出重量 P 与其作用点，然后可由静力方程求得相应的推力 H。为了求出充分精确的 H 的最大值，必須如法重复計算若干次，由于那时这种工作須用分析法来完成，因此要耗费很多时間。为了簡化計算，曾将某些型式的拱根据拱上任一 BC 位置所給出的拱段 $BCAD$ 的重量和重心位置，列成表格以供应用[1]。当断裂截面及相应的 H_{max} 值求出以后，必須取定結构物下部 $FECB$ 上 EF 的尺寸，使 $ADEF$ 半个拱的重量对 F 軸的力矩能經受在 A 处所发生的最大推力 H_{max}，并須含有安全系数。

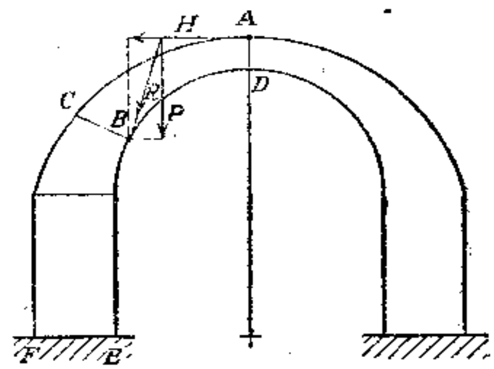


图 60

拉梅(M. G. Lamé)和克莱佩朗 (E. Clapeyron)[2] 将这个理論作了某些重要的扩充。当时，他俩都在俄国政府供职。两人都是圣彼得堡交通工程学院教授。他們被聘研究当时正在兴建中的圣・伊薩克(Saint Isaac)大礼拜堂的柱形拱和穹頂的稳定性。对于等截面的圓拱，他們用分解法找出断裂截面的位置并作出一个求 H_{max} 的公式。他們又指出对于任何形状的对称拱，如果用鉛直截面代替徑向截面来計算断裂截面的位置，則工作可大为簡化。他們証明，如果这么做，可从在 B 点处所作拱腹(內弧綫)的切綫必通过 P、H 两力的交点这一条件下求得所需截面。从这一事实出发，随即得出一个极簡单的图解法来求定截面 BC 的位置。

納維埃在增訂高随的桥梁著作(参看第 13 节)中所加的注释仍遵从庫侖理論。但在他 1826 年所著的"課程总結"(Résumé des Leçons...)一书中，已加入关于拱的应力的重要討論。庫侖已經提过 H 力及 R 力(图 60)一定作用在距 AB 两点某些距离之处，因而有充分面积以供应力分布。納維埃假定沿截面 AD 及 BC 的法向应力是依照綫性規律分布的，而在 D 点及 C 点处則应力完全消失，依照庫侖理論，当破坏发生时，該处开始裂縫。由此可知，在 A 点及 B 点上的应力将为假定应力系均匀分布(在截面 AD 及 CB 上)时所得的两倍。同时合力 H 及 R 必須作用在距 A 及 B 点为截面厚度的 1/3 处。納維埃用这些新的 H 及 R 的力作用綫，求出較現今所得者略大的 H_{max} 值。他用这些新数值計算应力并用以求結构物中 EF

---

[1] 彭西列特在其"有关拱的平衡的基本理論或解答的历史与評論"(Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voutes) Compt. rend; 卷 35，第 494、531 及 577 各頁上(1852 年出版)曾提到过梅孜(Metz)軍事学校曾以奥台 (Audoy) 公式列成表格。

[2] 見 Ann. mines, 卷 8, 1823。

的尺寸(图 60)。H 及 R 两力的新位置得到普遍的承認，在往后拱的分析研究中一致采用。值得注意的是湯姆士·楊(Thomas Young)(参看第 22 节)所得出的杆件偏心受压問題的解法虽已刊出在他的"自然科学"(Natural Philosophy)(1807 年)一书中，但納維埃并沒有注意到它，納維埃所得到的关于三分点的結論完全是独創的。

納維埃是第一个解出几种有关曲杆变形問題的人；但这些解法可以用来計算石拱的推力 H 这一点却不是他发現的。拱可以看作弯曲的彈性杆来处理这一概念在本节前半部已經提过，是由彭西列特提出的，也許他是最先提出的一个。我們将会知道，这个概念要經过一段相当长久的时間才在拱的实际設計中发生作用。

最早建造能經受相当严重风險的悬索桥是美国和英国。設計中所用的理論很少。巴洛(Barlow)也曾替台尔福特(Telford)[1]作过一些計算和試驗，他采用悬鏈綫方程式来决定悬索中的拉力[2]。但当时工程师們都認为用試驗来着手解决强度問題是比較重要的。台尔福特想出最好用布置得和悬索桥本身尽可能相似的柔索将它拉紧来測定它的强度。图 61 示出他的布置方法，所用跨长达 900 呎。从試驗中发現当拉力較索的极限强度一半稍大些时，索就开始急遽伸长；因此断定悬索必須設計得使在最不利情况下其拉力亦不超过极限强度的三分之一。

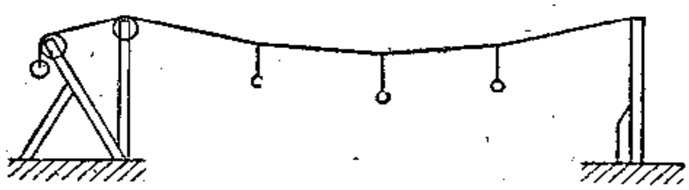


图 61

对悬索桥理論的进一步研究可查閱納維埃的研究报告(参看第 17 节)。納維埃对于在英国看到的桥印象很深，他很贊美这种結构型式。在第一章里，他写出这方面的历史回顧，并且描述了一些新的英国桥。第二章专門討論悬索桥应力和变形各种問題的解法。在研究了由于沿着索长(或沿跨长)均匀分布載荷而产生的垂度之后，納維埃又測定了由一个集中載荷所产生的垂度，并指出当結构物建造得更大更重时，这个集中載荷的效应将愈来愈小。当他研究在悬索桥上由于集中載荷

[1] 見巴洛所著："材料力学論文集"(Treatise on the Strength of Materials) 6 版，209 頁，1867。

[2] 大卫·吉尔伯特(Davies Gilbert)为了簡化計算起見，制出一些表格。見他所著："悬索桥各种情况下应力、应变等計算表格"(Tables for Computing All the Circumstances of Strain, Stress, … of Suspension Bridges) 1826 年出版。

冲击所产生的振动时，也得出同样的結論。根据这种分析，納維埃作了这样的断語：“肯定地說，規模愈大，外观愈坚硬，则結果愈佳”。以后継續研究悬索桥构造的人証明了这种見解是正确的。长而重的悬索桥不再有柔性过度的不良特征。而这种特征在早先的短跨結构中是很显著的。它們不独能承載公路汽車，而且也能承載很重的鉄道列車。在书中第三部分，納維埃編入了他自己設計的巴黎塞納河上悬索桥以及一条高架渠道的全部資料。

在他的报告的第二版以及他的另一篇报告中，这位法国工程师詳細地討論了他那座悬索桥終須在完工前予以拆除的許多原因[1]。

值得注意的是由法国工程师們建造的第一座悬索桥却建立在俄国圣彼得堡(1824～1826年)的方坦卡(Fontanka)河上。

21. 彭西列特(Poncelet, 1788～1867)

彭西列特出生于梅兹(Metz)的一个貧苦家庭[2]。由于他在語文学校的成績优异，他得到一笔助学金进入本乡的大学預科。1807年他胜利地通过了工业学院的选拔式入学考試，在該校，他成为孟治的一个高足。毕业后(1810年)进入梅兹軍事工程学院[3]，他修业完毕后，在1812年参加了拿破侖的軍队。同年十二月从莫斯科退却时被俘，在伏尔加河上的薩拉托夫(Саратов)渡过了为时两年的俘虏生活。在他被囚禁的日子里，沒有接触科学书籍或任何西欧文化的机会，只有将大部分时間化在科学玄想上，彭西列特就是这样发展了他的新几何(画法几何)的基本概念。

图 62 J. V. 彭西列特

宣告和平后，彭西列特回到法国，在梅兹兵工厂找到工作。在那里他有充分时間継續他的科学研究，因此他的名著“图形投影特性論”(Traité des propriétés projectives des figures)于1822年在巴黎出版。那时，法国数学家們大都着重于用数学分析以解决实际問題，而彭西列特的著作却

---

[1] 嵌入柔索的岩块重量是不够的，在建造过程中，发現桥有滑动，納維埃在設計中的这个疏忽事故經勒朗尼描写过。参看 Ann. ponts et chaussées, 1頁, 1837。

[2] 关于彭西列特的傳記，見伯特朗德(J. Bertrand)著：“科学院研究报告集”(Mémoires de l'Académie des Sciences)，卷41，1879。

[3] 梅齐尔斯(Mézières)学校在1794年迁到梅兹。

属于純粹几何学方面的，因此沒有得到相应的重視。这使他很灰心，于是他不再継續研究数学而将全部精力投入于解决工程力学問題；在兵工厂里出現許多重要的力学方面的疑难問題。不久，彭西列特从这些研究中出了名，于是在 1825 年充任了梅玆軍事学院的工程力学教授。1826 年，出版了他的“机器应用力学教程”(Cours de mécanique appliqué aux machines)，1829 年又出版了“工程力学导論”(Introduction a la mécanique industrielle)。彭西列特在力学上的著作很快就受到推崇，因而被选为科学院的会員(1834 年)。此后他搬到巴黎，在苏波恩(Sorbonne)大学教了一段时間的力学。

1848～1850 年間，他充任工业学院院长；1852 年退休，目的是为了能利用他的余年修訂和重版他在几何学和应用力学方面的許多著作。

虽然彭西列特的成名主要在于几何学和动力学方面，但他对于材料力学也有很重大的貢献，这些資料并入在他所写的“工程力学”(Mécanique industrielle)一书中。这本书中关于材料力学部分是介紹建筑材料力学性能方面的知識，在当时也許算得上是最完整的。彭西列特不独提出由力学試驗所得的結果，而且仔細地討論到这些結果对設計工程师的实用意义。他为了显示各种材料拉伸試驗的結果，插入了一些拉伸試驗图表；在比較各种鋼鉄材料的力学性能上，这些图表都是很有用的。彭西列特就利用这些图表来指示选擇各种材料的工作应力的方法。在选擇工作应力上他是很保守的，很少推荐大于材料彈性极限一半的数值。彭西列特推荐这种数值，是由于他考虑到建筑材料要抵抗动力的意义出发的。

湯姆士·楊最先指出了載荷动力效应的重要性(参看下节)。彭西列特受了当时悬索桥設計实踐的影响，进而作更为詳細的动力研究。利用他的試驗图表，他指出在不超过彈性极限时，一根鉄杆只能吸收少量的动能而在冲击状态下很容易产生永久变形。对于承受冲击的构件，他推荐鍛鉄在拉伸試驗时能产生較大的伸长量并能吸收較大的动能而不致断裂。彭西列特用分析方法解釋：一个突加載荷比慢慢加上去的同样載荷会产生两倍大的应力。他研究了一根杆受縱向冲击的效应以及在这种冲击下所产生的縱向振动。他还証明了如果一种脉冲力作用在一根受載的杆上，能在共振情况下形成强迫振动的振幅，并且他解釋为什么一队士兵用整齐步伐通过一座悬索桥时是很危險的。我們看到了他对于薩瓦特(Savart)的杆件縱向振动实驗的重要討論，并且看到了他对下一事实的解釋，即沿表面作用的細小摩擦力能产生出很大振幅和很大应力。

在彭西列特所著“工程力学”一书中，我們发現了应力的重复循环会引起金属疲劳这一重要現象的参証資料。他說明在拉伸和压縮的交变作用下，最好的彈簧

也会发生疲劳破坏[1]。

彭西列特在苏波恩大学講課时，联系到他的教学工作，对材料力学作过更深入的研究。这些講义一直沒有正式出版，但保存了底稿。有些部分被摩林(Morin)采用在“材料的抗力”(Résistance des matériaux)一书中(§213~219，1853年巴黎出版)。圣維南在增訂納維埃著的“課程总結”第三版中374、381及512各頁上提到彭西列特未出版的講义；施紐塞博士(Dr. Schnuse)編譯德譯本彭西列特的“机器应用力学”曾加入(在編譯本中)第220到270几节，其中即包括有这部分未出版的材料。从这个根源上，我們看得出，将剪力的影响引用到梁的撓度公式中去，一定是彭西列特的功績。如果一根矩形悬臂梁长l，寬为b，而高为h，上負均布載荷，其集度为q，他以公式

$$f=\frac{3}{2}\ \frac{ql^4}{Ebh^3}\left(1+\frac{9}{8}\ \frac{h^2}{l^2}\right)$$

来計算最大撓度，并說明括号内第二項代表剪力的影响，它只在相当短的梁中才具有实用意义。

在辯論如何选擇安全应力这个問題上，彭西列特支持了最大应变理論并肯定最大应变达到某一定限时即发生破坏。因此象石料和鑄鉄那种脆性材料在受压情况下的断裂情况是由于横向伸脹所致。最大应变理論始終被圣維南所引用，并且在整个欧洲大陆广泛使用，而英国作者們却仍継續在使用着最大应力理論作为他們設計計算的根据。

彭西列特的研究范圍还包括結构理論。在討論擋土墻的穩定性时，他提出了一个求墻上最大压力的图解法[2]。在处理拱的应力問題上，他是最先指出只有将拱認定为一彈性曲杆时才能展开合理的应力分析的人(参看第67节)。

22. 湯姆士·楊(Thomas Young，1773~1829)

湯姆士·楊[3]出生于桑麦塞特(Somerset)米尔韦侖(Milvelen)的奎克(Quaker)族家庭。幼小时期就有杰出的学习才能，特别擅长語言学和数学。十四岁时，他不仅已熟悉近代語文，他还懂得拉丁文、希腊文、阿拉伯文、波斯文和希伯莱文。从1787年到1792年，他在一个富有人家做家庭教师作为謀生之計。这个职业使他有足够的业余时間継續学习，当时他在哲学和数学方面下过苦功。1792年，楊开始学医，

[1] 見“工程力学初阶”(Introduction a la Mécanique Industrielle) 3版，317頁，1870，巴黎。

[2] 見他所著：“擋土墻与其基础穩定的研究报告”(Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations)于 Mém. officier génie, 13, 1840。

[3] 庇考克(G. Peacock)写过一部关于湯姆士·楊的傳記，1855，倫敦。

先在倫敦大学和爱丁堡大学，以后又进入格廷根（Göttingun）大学，1796 年在格廷根大学得到博士学位。


图 63 湯姆士·楊

1797 年，他回到英国以后，被接納为劍桥爱弥尔学院（Emmanual College）的自費研究生，在該校学习过一段时間。那时有一位和楊很熟悉的人曾用下列一段話来描述他[1]：“当校长向楊的导师介紹楊时，校长詼諧地說：‘我替你带来一个学生，准許他具有向导师作講演的資格’。話虽如此，他并沒有这样做，而是彼此間互相禮讓；他从来不想在这个大学中担任任何公职……当时的一些数学家的观点、目标、品性和学識都和現在的不同，而楊确能走在时代的前面，他能发覺这些人的缺点。的确，他只重視科学，而不愿和任何哲学家打交道……在談話中他从来不勉强別人接受他的不同見解；不过当人們請求他解答疑难問題时，他回答的迅速、簡便而肯定，好象滿不在乎一样；这种談話方式，他和我所見过的任何聪明人都大不相同。他回答問題似乎不費一点气力，也不流露出居功的心情。他从不逞能，或自居优越；他說話的方式好象他总以为对方都和他自己一样已經有所了解似的……他的語法正确，語調快捷，同时他講的句子，旣直率又完整，不过他不用通俗的文字，并且他的見解也几乎和別人完全不同。因此，在傳授知識这方面来說，他是我所熟悉的人中最不行的一个……要問他是怎样安排自己的工作，这倒是难于答复的；他讀书的时間很少，虽然他要接触大学图书館的机会很多，但图书館里却很少看到他。他的房間里并沒有堆着很多书，桌上沒有放置什么文件，他的房間看起来很象个閑散无事者的住房……他很少发表意見，也不肯自动发言。他所注意的是科学的眞理，难題的計算，精巧的仪器或新的发明；他絕口不談道德、玄学或宗教”。

楊很早就开始了他那創造性的科学研究。早在 1793 年，他那篇光学理論的論文曾向皇家学会提出。在劍桥时（1798 年），楊从事声学研究。关于这方面的研究，他写道：“我所研究的不是风的理論，而是空气的理論，我測驗过諧音，相信它是最新的一門科学。我以为我第一个发現了英国数学家不曾知道的一些情况，可是这些情况早为国外数学家发現并加以解釋了；事实上，英国在数学的很多方面都落后于她的邻国：假使我深入地向他們多請教一些，我将会变成法国和德国学校的門

[1] 同上頁注［3］。

生;不过这个园地是非常广阔的,还有許多荒地在等候着我去开垦"。他那"声与光的概論及实驗"(Outlines and Experiments Respecting Sound and Light)这篇論文系 1799 年夏季在劍桥写成,次年一月向皇家学会宣讀。1801 年,楊完成了"光的干涉"这个著名的发現。

他在物理学上的丰富学識是受人推崇的,1802 年,他被选为皇家学会的会員。同年接受皇家学院聘为自然科学的教授。这所学院成立于 1799 年,其宗旨在于:傳播知識与有利于全面而快速地介紹新的和有用的机械发明和改良;用定期科学講演和实驗的方式进行教学;将科学上的新发明应用到技术和制造业的改进工作中去,并用以促进生活水平的提高。作为皇家学院的一位講学者,楊是失敗的;因为他的傳授方法太簡单,他似乎不能料想到他的課程中哪些部分是最使人发生困难的。1803 年他脫离了教学生活,但仍繼續鉆研自然科学,并将他的講义編纂付印。楊对于材料力学上主要的貢献就包含在这本教程中[1]。

在被动强度(passive strength)与摩擦一章中(第一卷第 136 頁)討論到等直杆变形的基本类型。在拉伸和压縮方面,第一次介紹了彈性模量这个概念。这个量的定义与我們現在所用的楊氏模量的定义不同。这定义是:"任何物質的彈性模量是:同一物質做成的一根柱子,其发生在柱底的压力与由于重量而使柱底产生某种程度的压縮之比等于柱子长度与其縮短量之比"。楊也說到"模重"(weight of modulus)和"模高"(height of modulus),并且注明一已知材料的"模高"与横截面积无关。"模重"等于我們現在所称楊氏模量的量和杆件横截面积的乘积[2]。

在描述杆件的拉压实驗时,楊提醒讀者注意縱向变形必連带产生一些横向尺寸的改变。介紹虎克定律时,他观察到这个定律只能在某一限度內有效,逾此限度,一部分变形是非彈性的,形成了永久变形。

关于剪力,楊闡明还未曾有直接試驗能确定剪力与由剪力所产生的变形之間的关系;他說:"但是这可以从受扭物体的性質上推想到剪力随質点去其原来位置的距离成一簡单比例而变化,而且它与所作用的表面积大小也成簡单比例"。当圓軸扭轉时,楊指出所施扭矩主要被作用在截面平面內的剪应力所平衡,而且它与距圓軸軸綫的距离以及与扭轉角都成正比。他也說到纖維中的縱向应力对扭轉起有附加抗力的作用,此力与扭轉角的立方成正比,纖維将扭成螺旋形。因此,外层纖

[1] 見湯姆士·楊著:"自然科学与机械技术教程"(A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts)两卷集,1807,倫敦。关于梁的变形这一部分最有价值的材料沒有包含在凱尔南(Kelland)主編的新版中。

[2] 楊氏由一只振动音叉的频率測定过鋼的模重为 29×10^6 磅/吋^2,見"自然科学"卷 2,86 頁。

維将受拉伸而内层纖維将受压縮。而且扭轉时軸杆将相应縮小（其縮小量等于外层纖維伸长量的四分之一，如果长度保持不变的話）[1]。

在討論悬臂梁和两端简支梁的弯曲中，楊写出了关于撓度与强度的主要結果，沒有將它作推导运算。他对受压柱側向压屈的見解包含有下述重要語句："在承受纵向力的柱子和椽子的所有弯曲实驗中，可以看出显著的不規則性；无疑地，其中有些实驗是因不容易使作用力恰巧位于軸綫上，另外有些实驗因恰巧用了不均匀的材料，其纖維的方向原先就形成弯曲而不沿直柱方向所致"。

当討論到非彈性变形时，楊作了一个重要說明："永久变形……限制了实用的材料强度，它差不多接近于破坏强度，因为一般說来能产生永久变形的力，只要稍微增加一点点，就足以使材料发生破坏"。正如我們所見，納維埃曾得出同样的結論，并建議工作应力必須取得較材料的彈性极限稍低。

最后，楊对于彈性体受冲击而产生破坏有一段重要的討論。在这种情况下，不仅打击体的重量要考虑，而且它的动能的大小也必須加以考虑。"假設打击方向是水平的，它的效应不会因重力关系而增加"，他斷定"如果重量为 100 磅（靜止地加上去的）的重物在一定物质上伸入达 1 吋深度以后將該物压破了，則用同样重量的一重物从半吋高度落下的速度去冲击它也会使它破坏，而且重 1 磅的重物从 50 吋高度落下也一样会將它破坏"。楊說明了当一棱柱杆承受纵向冲击时，杆的回彈力"与它的长度成正比，因为在同样拉伸下較长的纖維会产生一較大的伸长量"。更进一步，他发現"有这样一个极限，即一物体冲击另一物体，无論第一物体的整个体积是怎样的小，在未克服第二物体的回彈力并將它破坏时，其速度不可能增加。这个极限視第二物体被冲击部分的慣性而定，此第二物体被冲击部分的慣性在相当大的速度下受冲击时尤其不能忽略"。用 V 表示沿杆件通过的压縮波的速度，用 v 表示打击体的速度，他斷定在冲击的瞬时杆端所产生的单位压力等于 $\frac{v}{V}$，而速度 v 的极限值可將 $\frac{v}{V}$ 的比值与单位压力列成等式而求得，此等式中的单位压力是指被冲击杆件的材料在靜力試驗下发生斷裂时測定的单位压力。

談到一根矩形梁的冲击效应时，楊肯定在梁內由于一次打击所产生的已知最大弯曲应力所累积的能量是与其体积成正比。这是因为打击体在梁上所作用的最大力 P 以及在冲击点处的撓度 δ 系由公式

$$P=k\frac{bh^2}{l} \qquad \delta=k_1\frac{Pl^3}{bh^3}$$

---

[1] 縮小量的正确值为楊所得的两倍。見鉄木辛可著"材料力学"卷 2，第 300 頁。

給出的，式中 b 为梁寬，h 为梁高及 l 为梁长；k 及 k_1 为常数，視材料的模量及所假設的最大应力的大小而定。将它們代入应变能 U 的式子中，得出

$$U=\frac{P\delta}{2}=\frac{k^2k_1}{2}bhl$$

这就証明了上面的說明是正确的。

我們看得到楊介紹拉伸模量和压縮模量的概念对于材料力学是很有貢献的。他也是分析冲击应力的先行者，同时他也給出断裂前服从虎克定律的完全彈性材料的冲击应力的計算方法。

在"自然科学"第二卷"关于彈性物質的平衡与强度"(Of the Equilibrium and Strength of Elastic Substances)一章中討論到关于杆件弯曲中一些較复杂的問題。下面說到有关这一章的評論是从塔德亨特(I. Todhunter)和庇尔逊(K. Pearson)合著的"彈性力学史"(History of the Theory of Elasticity)一书中引来的："这里有一系列的理論，其中有几处还継承着过去的錯誤理論，例如对于中性軸的位置……，整个这一节，似同这位名作者的很多写作一样，对我来說是很难理解的；以他的科学和語言学的博学程度，很能够清楚地用数学家們普通习用的語言来表达自己，但可惜他沒有这样做。这一节中的許多公式在当时差不多全部都是新出現的，但由于表达方式沒有吸引力，以致得不到广泛的注意"。这个評論是可以同意的，因为这一章确是很难讀懂；不过它包含了当时一些新的重要問題的正确解法。例如，我們看到他对矩形杆受偏心拉压問題的解法是最早的。假定在这种情况下的应力分布用图 64c 所示的两个三角形来表示，从这些应力的合力必須通过外力作用点 O(图 64b)的条件下，楊决定了中性軸的位置，得出

$$a=\frac{h^2}{12e}$$

式中 e 为力的偏心距。当 $e=\frac{h}{6}$ 时，$a=\frac{h}{2}$。应力分布为一个三角形，而最大应力成为軸向载荷作用时所得的两倍。图 64a 中杆件軸綫将在很小撓度的情况下弯曲时的圓弧半徑的正确值也經楊在分析中推导出来了。

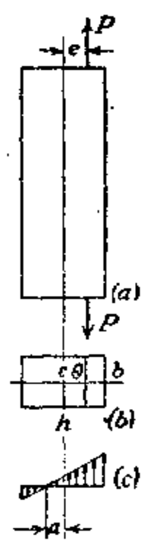


图 64

楊的次一課題是，他从事于一根原本有些微弯曲的等截面柱，研究它受压后的弯曲。假定原先的曲率可用正弦曲綫 $\delta_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$的半波来表示，他求出当加上压力 P 以后，中点的撓度将为

$$\delta=\frac{\delta_0}{1-(Pl^2/EI\pi^2)}$$

从这个結果中，他断定如果 $P=\frac{EI\pi^2}{l^2}$，“无論 δ_0 值的大小如何，撓度都会变为无限大，而且此力将使梁过載，或者至少使梁弯曲得已不能使这些力維持本身的作用效果”。这里我們第一次接触到推导原本不是直綫形柱子的公式。在使用尤拉公式求一根柱的截面尺寸时，楊指出它的实用范圍只限于細长杆，而且須将柱的长度对其截面高度之比給出某些一定的极限值。由于这个比例值較小而引起柱子的破坏是以材料压毁的形式而很少以压屈的形式出現的。

如果一根細长柱一端固定而他端自由，楊証明当施以偏心的軸向力 P 时（如图 65），撓度 y 可由下式得出

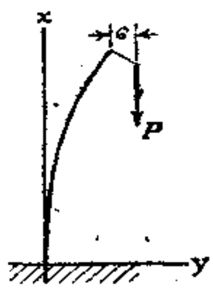


图 65

$$y=\frac{e(1-\cos px)}{\cos pl}$$

式中 e 为偏心距，$p=\sqrt{\frac{P}{EI}}$，而 x 为自固定端量取的距离。因此，在这一实例中，楊是先于納維埃得出这个式子的[1]。

在他处理变截面柱的側向压屈时，楊指出在一根截面高度不变的柱子中，如果它的寬度（图 66b）照一个圓弧拱的縱距 y 沿长度而变化时，它将弯成一个圓弧（图 66a）。

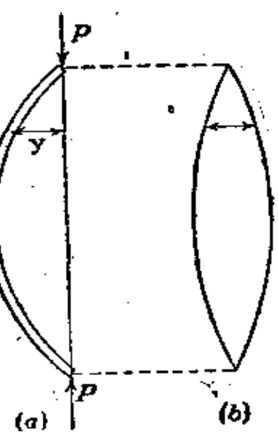


图 66

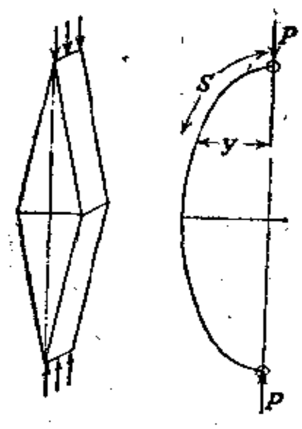


图 67

就两个三角柱体所組成的柱子的压屈（图 67）而論，并假定撓曲情况在中点的曲率半徑等于全部长度之半，楊說明撓度曲綫为一条摆綫。它符合于下式

$$\frac{Py}{EI}=\frac{1}{\rho} \tag{a}$$

[1] 這个解法由納維埃在 1819 年向科学院提出的研究报告中作出。見圣維南所著“历史”第 118 頁。

任一截面的惯性矩 I 是和 S^3 成正比，而摆綫的縱距 y 和 S^2 成正比，其中 S 如图 67 所示。現(a)式左方的因次是一个数值除以 S，因此，对于摆綫，$\rho=S$，我們总可以选得出滿足(a)式的 P 值。

从一已知圓柱体中切取一根矩形梁时，楊发現"剛性最大的梁是其截面高度与其寬度成 $\sqrt{3}:1$ 的比例，而强度最大的梁乃是高度与寬度两者成 $\sqrt{2}:1$ 的比例；但最富于彈力的乃是其高度与寬度相等的梁"。这一发現符合于下列事实，即对于一已知长度的梁，其剛度是取决于其截面慣性矩的大小，其强度取决于截面系数而其回彈力取决于截面面积。用同样理論，他推解了薄圓管問題。他說："假設将一根管壁非常薄的管子扩大其直徑，但长度不变，材料用量亦相同，則其强度将按直徑比例增加，剛度則按直徑平方的比例增加，但彈力将不改变"。

从这段討論中我們看出在"自然科学"第二卷材料力学一章中包含有材料力学的几个重要問題的正确解，在当时都完全是新穎的。由于作者的表达方式常常过于簡略和欠清楚，因之这本著作并沒有引起工程师們的注意。在丢下这本书的討論以前，有关对該书的一些評論值得在这里提一下。这些是由雷萊 (Lord Rayleigh) 傳記的作者写出来的[1]。1892 年，雷萊被聘为皇家学院教授，他的講稿"大致依照一个世紀以前湯姆士·楊在皇家学院剛成立时，在这所学院講过的教程来編写的，那些講稿都全部取材于楊著"自然科学 1807 年版"中，并引用了該书中許多描述仪器的插图，当时那本书还保存在該学院的博物館中，于是取出加以利用……雷萊研究过楊的講稿，并且发覺它蘊藏着一些重要資料。他在抄本里所作的一些鉛笔摘記証明了他在这本书上下过很深的功夫，并且在講授中他特别注重了該书中以及作者的其他著作中的一些好的而被人們忘掉了的材料。一个最值得注意的地方是楊估計了分子的大小；(他說) 分子的直徑是在二十亿到一百亿分之一吋之間。这是一个对現代知識的了不起的先見，較之克尔文(Kelvin) 对分子大小作过同样估計要早五十多年。在雷萊对这点引起注意以前，从来沒有人注意到它，至于当时是否有人因此就加以重視，我們也无从証明"。

楊的才干不独表現在解决純粹科学上的問題，而且同样表現在解决一些实际工程上的困难問題。例如，他曾向海軍部提出关于在船舶龙骨間使用斜肋(oblique riders) 以及在船舶建造中其他改进事項的报告[2]。他将船壳看作一根梁并假定出一定的重量分布以及一定的水波形状来計算某些截面上剪力和弯矩的大小。他也

---

[1] "雷萊的生平"(Life of Lord Rayleigh) 由他的儿子巴朗·雷萊 (Baron Rayleigh)第四所写，第 234 頁，1924 年。

[2] 見 Phil. Trans., 1814, 第 308 頁。

指出了計算船的撓度的方法。他解释船的抗弯剛度絕大部分和各部分間的接合方式有关。他說："由十块一样大小的板片組成的車架彈簧，如果将它們結合成一整块，其强度将增大十倍，剛度将增加一百倍，用加在原来分块組成的彈簧上能使它弯曲到一吋的同样重量加在結合成整块的彈簧上，撓度只有百分之一吋，不过这样的整块結合对于抵抗高速运动的能力来說沒有什么好处，这种能力在其他場合我們尔称之为彈力。現在如将一批平行排列的板子用几块横条(与板子互成直角)将它們紧固一起，则很难使它們完全不发生相对的滑动，可是采用具有充分强度的一根对角联条，縱然它不能使板子比横条連接方式作出更大的应变能力，但在許多情况下，由于减小了在破坏以前整个結构物可能达到的弯曲程度，这样做仍然是有利的"。他根据这种理由，贊成在木船建造中采用对角联条。这份报告，在应用实际理論来分析船舶結构設計方面，好象还是头一次。

我們讀完了这些楊对于材料力学理論上的貢献的概略情况以后，也許更能賞識雷莱对他的評論[1]："楊……由于种种原因沒有得到和他同时代的人們的重視。其实他过去已經达成的学术地位，有好些方面都为他的継承者花了很多脑筋才重新达到了的"。

23．1800～1833 年間英国的材料力学

1800～1833 年間，英国还沒有能比得上象法国的工业学院和桥梁道路学院那样的学校。国内的工程师未曾受过全面的科学教育，而他們那时的材料力学教本的水平也較法国的为低。研究彈性力学史的英国学者塔德亨特(Todhunter)在講到这类教本时曾說过："在本世紀的开始时期表現得最明显的莫过于英国力学知識的淺薄了"[2]。塔德亨特从魯宾逊(Robison)所著"力学体系"(A System of Mechanical Philosophy)一书中引出一段魯宾逊对欧拉著作的評論来說明当时英国作者的水平。他說："在圣彼得堡科学院刊行的 1778 年份的旧学报中，欧拉对于这方面写过一篇論文，但只限于柱的应变問題，其中考虑了柱的弯曲。伏斯(Fuss)在随后一篇論文中也討論了与木工有关的同一題目。但在这些論文中除掉根据一些不必要的假設(客气点說)进行枯燥的数学論述以外，几乎沒有什么內容，正如我們現在所看到的一样，最重要的压力推論，都整个地被忽略掉了。有关內粘机构方面的知識也很不完善，使我們大大地丧失了应用它的信心……"，他还說："因为他那柱的强度理論是这类荒謬无稽的文章中最有力的一个証据，同时因为在圣彼得堡他的門徒如伏斯和勒克塞尔(Lexell)等都采用他的結論，做了他的应声虫，

[1] 見"論文集"(Collected Papers)卷 1，第 190 頁。

[2] 見"历史…"(History…)卷 1，第 88 頁。

所以我們有这样严厉的批評"。正如塔德亨特所說，这样的評論，就一个作家的身份来說，是非常无聊的，在該书的后面几頁中还将梁承受弯曲时的中性軸位置放在梁的凹面上……因此魯宾逊又把早已被庫侖改正了的这个錯誤观念重新流傳下去了(在英文教本中)。

虽然英国在材料力学上的理論著作是如此低劣，但英国工程师們还是解决了許多重要的工程問題。在发展工业方面英国比其他各国領先，而且在建筑工程和机械工程上倡导采用鑄鉄和鍛鉄材料时出現了許多新的問題，这就需要对那些新材料作出力学性能的研究。他們完成了許許多多的实驗工作，将所得結果編成資料，不独在英国而且在法国都得到了运用。

彼得·巴洛(Peter Barlow, 1776～1862) 写出一本名为"論木材的强度与应力"(An Essay on the Strength and Stress of Timber)的书，第一版于1817 年出版。这本书在英国非常流行，而且重版了許多次[1]。在这本书的起首，巴洛采用吉拉德书中(参看第 1 节)的資料介紹了材料力学的历史；但吉拉德的书中曾用相当多的篇幅談到欧拉在弹性曲綫上的研究成果，而巴洛則認为欧拉的"分析方法"是"最不能使这本书所用到的材料有所助益的；因此在固执的論点下，欧拉的大量分析研究和关于他的卓越資料介紹得少而又少了"。在討論弯曲理論中，巴洛犯上杜留所犯过的同样錯誤(参看第 19 节)，即假定中性軸将梁截面分成两部分，所有拉应力对此軸的力矩与压应力对此軸的力矩相等。这个錯誤在該书的1837年版本中才得到改正。巴洛将正确决定中性軸这个功績归之于霍芝肯逊(Hodgkinson)。对于五十年前庫侖早已这样改正过的事迹，他似乎一无所知。

关于巴洛，塔德亨特說："作为一个理論家来說，他是那些缺乏清醒的头脑、缺乏正确的科学观点以及缺乏国外科学知識的人們中的另一个显著例子，这样使人們讀过这本在本世紀前半世紀出版的英国力学教本以后，对这位理論历史家的工作縱然不是失望，也将大为扫兴"。其实，当时象杜留和納維埃那等有才干的一些工程师都曾在决定中性軸位置方面犯过同样的錯誤，这样看来，塔德亨特的这段話似乎批評得太苛刻了。

这本书对材料力学理論方面并沒有增加什么新的內容。但其中描述了十九世紀前五十年中所作出的許多的实驗，这些都是具有很大历史价值的。这里我們发現了巴洛替台尔福特写的鉄絲試驗报告，那时台尔福特正在計划建造倫科恩

[1] 本书第六版由巴洛的两个儿子重編后于 1867 年付印。对于材料力学史来說，这一版是有相当价値的，因为它包括有巴洛的傳記，并且在附录中，还列入威里斯(Willis)的著作，"論載荷越过彈性杆所产生的效应"(Essay on the Effects Produced by Causing Weights to Travel Over Elastic Bars)。

(Runcorn) 悬索桥。作者用各种断面形状的鉄軌所做出的实驗也是很有意义的。在这些实驗中，最先測定了軌条在高速动載荷下的撓度以之与靜載荷所得的結果相比較。在这本书的最后一版(1867 年)中，还提到費儿班恩(Fairbairn)对鈑梁作出的重要疲劳試驗。书中也包含有威里斯(Willis)对梁上加有动載荷的动力作用的报告。这些研究将留到以后再来討論。

另一位英国工程师湯姆士·特里德哥尔德(Thomas Tredgold, 1788～1829)，他的书在十九世紀前半世紀也是非常流行的。他所著"木工基本原理"(The Elementary Principles of Carpentry, 1820) 中有一章叙述材料力学。其中很少新的成就，所有的理論都可在湯姆士·楊的"講稿"中(参看第 22 节)找到。特里德哥尔德的另一著作"实用鑄鉄强度論"(A Practical Essay on the Strength of Cast Iron, 1822) 书中包括有作者所作的实驗結果，以及設計鑄鉄結构用的許多規范。特里德哥尔德似乎是第一个作出柱的安全应力公式的人(参看第 46 节)。在 1800 年到 1833 年这段时期内，結构上采用鑄鉄是迅速地增加了，因此特里德哥尔德的书也为从事实际工作的工程师們广泛采用。这本书随后被譯成法文、意大利文和德文。

24. 欧洲其他著名学者在材料力学上的貢献

迟至十九世紀开端，德国才开始有材料力学方面的著作。首先对这門学科有重大貢献的人是佛兰茲·約瑟夫·格斯特勒(Franz Joseph Gerstner, 1756～1832)。他是 1777 年在布拉格(Prague)大学毕业的。經过了几年工程上的实际工作之后，便充当他母校天文观象台的助理人員。1789 年升任数学教授。他在任教期内，对科学在工程上的应用仍一貫重視，并且計划着在布拉格成立一所工程学校。1806 年毕竟在这个城市成立了波密施工程学院(das Bömische technische Institut)，格斯特勒便是該校的力学教授和院长，到 1832 年为止他一直担任这个职位。格斯特勒在力学上主要的著作都收集在他那三卷集的"力学手册"(Handbuch der Mechanik)中，該书系 1831 年在布拉格出版。这部书的第一卷第三章講述材料强度。在討論拉压时，格斯特勒列出他所作鋼琴絲拉力实驗的研究結果。他发現拉力 P 和伸长量 δ 之間存在如下的关系

$$P = a\delta - b\delta^2 \tag{a}$$

式中 a 及 b 为两个常数。对于較小的伸长量，(a)式右边的第二項可以忽略不計，于是我們就得出虎克定律。

格斯特勒也研究过永久变形对拉伸試件性能的效应。他証明当一根金属絲伸长到产生某些永久变形时，然后将載荷取去，而在第二次加載时它仍能服从虎克定

律直到第一次造成永久变形时的載荷值为止。仅在更大載荷下才与直綫定律有些偏差。因此,他建議将悬索桥中所使用的金屬絲在使用以前先拉伸到某一限度。

格斯特勒在工程力学的其他部分也做出重要的成績。最著名的是他的水面擺动波(trochoidal wave)理論[1]。

在十九世紀早期对于工程力学有貢献的另一位德国工程师是約翰·阿尔伯特·叶太尔維因(Johann Albert Eytelwein, 1764～1848)。他在十五岁上,是柏林炮兵团的一个炮手。他在业余时間經常研究数学和工程科学,因此在1790年考取了工程师(建筑)学位,很快地被称誉为一位富有理論知識的工程师。1793年他的“应用数学中的重要問題”(Aufgaben grosstentheils aus der angewandten Mathematik)出版了;它包括建筑工程和机械工程上許多实际重要問題的討論。1799年他和其他几位工程师在柏林創办了建筑学院(Bauakademie),他本人充任該院院长兼工程力学教授。

叶太尔維因的教本“固体力学手册”(Handbuch der Mechanik fester körper)在1800年出版,另一教本“固体静力学手册”(Handbuch der Statik fester körper)在1808年出版。后一书中討論材料力学和結构理論方面的問題。关于材料力学这部分,塔德亨特在他的“历史”中的評論是:“在这部分里面沒有新的东西,不过作者胜过了班克斯(Banks)和格里果列(Gregory)[2]两人,而这两位在当时数学界的声誉是和他不相上下的”。在結构理論方面,叶太尔維因补充了一些关于拱和擋土墻的新理論。他又发展了一个决定桩上容許載荷的有效方法。

拿破侖战争結束后,德国掀起了一个广大的运动来复兴工业的各个部門。这就需要大大改良工程教育,为此建立了好几所工程学校。1815年,开办了維也納工业学院,約翰·約瑟夫·普列施脫(John Joseph Prechtl, 1778～1854)为該校院长,1821年柏林創办了职业学校(Gewerbeinstitut)。随后又在卡尔斯魯赫(Karlsruhe, 1825年)、慕尼黑(Munich, 1827年)、德累斯登(Dresden, 1828年)、汉諾威(Hanover, 1831年)以及斯图加特(Stuttgart, 1840年)等地建立了一些工业学校。这些新的工程学校对于德国工业以及一般工程科学的发展都具有很大的作用。其他国家都沒有一个能象德国这样密切的把工业和工程知識結合一起,无疑地这样的結合对于德国的工业发展以及对于十九世紀末期德国奠定工程科学的强大地位都是很有貢献的。

随着英国、德国和法国在材料力学方面的进步,瑞典也得到同样的发展。鋼鉄

[1] 見他所著“波动理論”(Theorie der Wellen), 1804, 布拉格。

[2] 同时代写作工程力学的英国学者。

工业在瑞典占有重要地位，那里最先的实驗研究就以鋼鉄为对象。瑞典物理学家拉格杰姆 (P. Lagerhjelm)[1] 是这項活动的先驅者，他通曉湯姆士·楊、杜留和叶太尔維因諸人的理論著作，这些著作不独在他的实际工作中，而且在他的理論研究中都起着指导作用。他所設計的由布罗林(Brolling) 制造的拉伸試驗机經过試用証明是很适用的；事实上以后拉梅在圣彼得堡制造的类似的試驗机(参看第 19 节)也不过如此。拉格杰姆的試驗証明各种鉄的抗拉彈性模量几乎都一样，并与辗压、錘打以及各种热处理等工艺过程无关，不过彈性极限和极限强度将因这些工艺过程而有显著的差异。他发現鉄的极限强度常与它的彈性极限成正比。他也发現鉄在断裂时密度比較减低些。拉格杰姆曾取靜力試驗所得的彈性模量和观測一根杆件受横向振动的頻率从而計算出的彈性模量相比較，发现两者非常符合。他并且証明了如果两只音符相同的音叉，則当其中之一淬硬后，它們发音的音符仍然是相同的。

[1] 拉格杰姆的著作刊在 Jern-Kontorets Ann., 1826 年。他的成果簡略报导在 Pogg. Ann. Physik u. Chem., Bd. B, p. 404, 1828。以后瑞典的一些实验都参引了拉格杰姆的著作。例如，斯梯弗(K. Styffe)曾詳細描述过拉格杰姆的拉力試驗机，刊在 Jern-Kontorets Ann. 1866 年。

第五章

数理彈性理論的开端[1]

25. 彈性理論中的平衡方程

根据我們講到这里为止的材料强度理論的历史說来，关于梁的撓度和应力問題的解法通常是从梁在变形时截面仍保持平面以及材料服从虎克定律这两个假定中得出来的。十九世紀开初，人們企图为彈性体力学找出一个更为主要的根据。从牛頓时代起就有这么一个概念[2]，認为物体間的彈性可以解釋为它們最大質点之間的吸力和斥力。这个概念曾經波斯考維奇（босковин）[3]詳細討論过，他假設在任何两个最大質点之間沿着它們連結綫上作用的力在某些距离上是吸力而在另一些距离上則是斥力。而且还有一个平衡距离，該处諸力消失为零。

拉普拉斯（Laplace）利用这个理論并加入补充条件才发明了毛細管理論[4]，即当分子間的距离增加时，分子力即急剧减小。

应用波斯考維奇的理論来分析彈性体的变形是从泊松（Poisson）[5]利用这个理論研究平板的弯曲而开端的。他将平板认定为分布在板的中央平面內的一个質点系統。虽然它能够抵抗伸长，但不能抵抗弯曲，因此能看作为一个理想柔膜，而不把它看作一块平板。

---

[1] 关于彈性理論的历史可在下列书中看到較詳細的討論：圣維南注解的納維埃著“課程总結”三版，1864；圣維南譯克列布希“固体的彈性理論”（Théorie de l'élasticité des corps solides）中添入的注解（1883），以及穆依格諾(Moigno)著“力学分析教程”(Leçons de mécanique analytique)，1868，其中圣維南的两章。并参看杏勒（C. H. Müller）和廷普（A. Timpe）所写論文刊在“数学知識百科全书”(Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften)卷 4，第1頁，1906，和布克哈特(H. Burkhardt)的“振动函数的推演”（Entwicklungen nach oscillirenden Functionen），526～671 頁，1908，萊比錫。

[2] 見圣維南，“簡史”（Historique Abrégé）。

[3] 波斯考維奇：“自然科学”（Philosophiae naturalis）1版，1763，威尼斯。并参看新出的拉丁英文版有关波斯考維奇的簡单生活史，1922 芝加哥和倫敦。

[4] 拉普拉斯，Ann. Chim. et. Phys.，卷 12，1819。

[5] 泊松，Mém acad.，167 頁，1812。

納維埃[1]在弹性体的分子理論上有更进一步的成就。他假定有两个力系 $\sum F$ 及 $\sum F_1$ 作用在一彈性固体的各质点上。$\sum F$ 力系是互相平衡的，它代表外力不存在时作用的分子力。$\sum F_1$ 力系则与外力(例如重力)相平衡。假定它們与质点間距离 r_1-r 的改变成正比并且是沿质点連結綫方向作用的。設 u, v, w 为一个质点 $P(x, y, z)$ 的位移分量，而 $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$ 为相邻质点 $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ 的相应位移，则这些质点間的距离改变为

$$r_1-r=\alpha\Delta u+\beta\Delta v+\gamma\Delta w \tag{a}$$

式中 α, β, γ 分别表示 r 的方向与坐标軸 x, y, z 所夹之角的余弦。于是相应的力 F_1 为

$$F_1=f(r)(\alpha\Delta u+\beta\Delta v+\gamma\Delta w) \tag{b}$$

式中 $f(r)$ 是一个因子，它随距离 r 之增加而迅速减小。

納維埃将 Δu, Δv, Δw 展成下列級数形式

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\cdots$$

只取到二次方为止。然后，将它們代入(b)式，并使

$$\Delta x=r\alpha,\ \Delta y=r\beta,\ \Delta z=r\gamma$$

他得出表示力 F_1 的分量 x 的式子如下：

$$\begin{aligned}\alpha F_1=&rf(r)\left[\alpha^3\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^2\beta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\cdots\right]\\&+r^2f(r)\left[\frac{\alpha^4}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha^3\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\cdots+\frac{\alpha r^3}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]\end{aligned} \tag{c}$$

要計算在 x 方向作用在变位质点 $P(x, y, z)$ 的总力，必須求质点 P 作用范圍內所有各质点式子(如式 c)的总和。作出計算，并假設分子力和 r 的方向无关，即假設此物体是各向同性的，納維埃观察到所有包含有奇数方次的余弦的这些項都消去了。因此 (c) 式第一行所有的积分都等于零。剩下不等于零的第二行的那些积分的演算式便能簡化成为一个积分来計算，即

$$C=\frac{2\pi}{15}\int_0^\infty r^4f(r)dr \tag{d}$$

假定此积分值为已知，作用于质点 P 的合力在 X 軸上的投影将为

$$\sum\alpha F_1=C\left(3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) \tag{e}$$

---

[1] 納維埃的論文“彈性固体的平衡定理与运动的研究报告”(Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques) 在 1821 年 5 月 14 日向科学院提出。1824 年在 Mém. Inst. Natl. 上刊出，从这里面摘出的資料刊在 Bull. Soc. Philomath. 177 頁，1823 巴黎。

同法，写出其他两个投影。

引用下列記号：

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\\ \nabla&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\tag{f}$$

則質点 P 的平衡方程可清楚地写成下列式子

$$\left.\begin{aligned}C\left(\nabla u+2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+X&=0\\ C\left(\nabla v+2\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+Y&=0\\ C\left(\nabla w+2\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+Z&=0\end{aligned}\right\}\tag{g}$$

式中 X, Y, Z 为作用在質点 $P(x, y, z)$ 上外力的三个分力。这些关系式就是納維埃对各向同性彈性体的平衡微分方程。我們看得到用他所提出的假設来求物体的彈性只需要一个常数 C 就够了[1]。

将質点的慣性力加到外力 X, Y, Z 中，納維埃又得出彈性体运动的一般方程。

除了能滿足于物体內部任何一点的三个式子(g)以外，还必須立出求算物体表面的式子，即該处分子力必与边界上分布的外力相平衡。用 $\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n$ 表示此力在具有外法綫 n 的一点上每单位面积的三个分量，并应用虛位移原理，納維埃得出所求边界条件如下：

$$\overline{X}_n=C\left\{\left(3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos\gamma\right\}\tag{h}$$

……………………………………………………

……………………………………………………

随后柯西解释了 (h) 式的括号里面几个式子的显著性，并指出表面力的分量 $\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n$ 是以下六个应变分量的綫性函数，

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

彈性理論次一步的重要进展主要应归功于柯西的成就。他介紹了应变和应力这两个概念来代替个别質点間分子力的研討，这样大大地簡化了基本方程式的推导。

---

[1] 随后，柯西綜合了納維埃的推导并研究了各向异性物体。他指出，在最普遍情况下，要决定象这种物体的彈性，需要 15 个常数。見"数学习題"(Exercises de mathématique)第三年級用，第 200 頁。

26. 柯西 (Cauchy, 1789～1857)

奥古斯丁·柯西 (Augustin Cauchy)[1] 在 1789 年出生于巴黎。他的父亲是在政府供职的一位出名律师，法国革命时离开巴黎，在离巴黎不远的阿若尔 (Arcueil) 村鎮暂居。当时，著名科学家拉普拉斯和泊索列特 (Berthollet) 也住在那里，在拿破侖时代，拉普拉斯的住宅变成了巴黎著名科学家聚会的地方，因此年青的柯西認識了許多他們中間的人。其中的拉格朗日很快地就注意到这个孩子数学才能。柯西在潘錫昂中央学院 (l'Ecole Centrale du Panthéon) 受过中級教育，他在該校学习古典語文学，成績優异。

1805 年，他考取了工业学院，在該校时期，他的数学成績很出色。1807 年毕业后，即被选拔入桥梁道路学院在工程方面継續深造，1810 年毕业。在入学考試和毕业考試中他都名列第一，他的才能一直为教师們所称道。二十一岁上，他已經在瑟堡 (Cherbourg) 港干着重要的工程工作。但他对数学比工程更有兴趣，因而把业余时間完全用来研究数学。在 1811 及 1812 年間，他向科学院提出过几篇重要的研究报告。1813 年他离开瑟堡回到巴黎，将全部力量放在数学工作上。1816 年，他成为科学院的会員。

图 68 奥古斯丁·柯西

他回到巴黎以后，就在工业学院和苏波恩大学等校教书。在他講授积分时，他用一种較前人更加严格的方式来講授。这种創造性的講授法不独吸引了全体学生而且也吸引了一些国外教授和科学家来听課。1821 年发表了他的"工业学院解析学教程" (Cours d'Analyse de l'École Polytechnique)，該书对数学的往后发展方向起了很大的影响。

大致在这个时候，納維埃向科学院提出了第一篇关于彈性理論的著作。柯西很重視这篇論文，他自已也开始研究这个理論。他在这一早期的力学分支上的成就是有极大价值的[2]。

[1] 关于柯西的傳記，見华尔逊(C. A. Valson)著："巴朗·柯西的生活經历" (La vie et les travaux du Baron Cauchy), 1868, 巴黎。并参看"数理科学史" (Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques) 卷 12, 144 頁, 1888 巴黎。

[2] 穆依格諾"解析力学，靜力学" (Mécanique Analytique, statique), 1868, 一书中圣維南所写的关于彈性力学的两章，其中叙述柯西对彈性理論的研究最为詳細。

我們在前节中已經提过，納維埃在推导他的基本方程时，系考虑力是作用在变了形的彈性体的独立的分子之間的。柯西[1] 却不是这样，他用了平面上压力的概念（他从水力学上学到了这个概念），而且假定此压力并不經常正交于該压力在彈性体内所作用的平面。这样，应力的概念就引伸到彈性理論里面来了。从变形彈性体内取出一个无穷小平面单元，平面单元上的总应力可认定为位于平面单元一边的分子对另一边分子作用力的全部合力，它的（作用力的）方向与所研究的平面单元相交[2]。将总应力除以单元面积卽得出应力的量值。

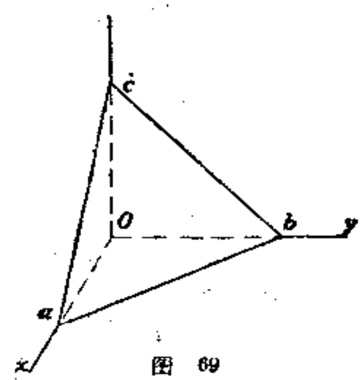


图 69

就一个四面形单元（图 69）而論，柯西指出在斜面 abc 上应力的三个分量 X_n, Y_n, Z_n 是由三个平衡方程得出：

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

式中 l, m, n 为平面 abc 的外法綫与坐标軸[3]相交角度的余弦，而 σ_x, τ_{yx}, … 为作用在 O 点（在坐标面 yz, xz 及 yz 上）处应力的法向和切綫方向的分量。他又証明了

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

上式中指出作用在任一平面（例如 abc）上的应力能够用六个应力分量 σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} 来表示。将公式（a）的各分量 X_n, Y_n, Z_n 分解为垂直于 abc 平面的方向，就得出作用在該平面上的法向应力 σ_n。柯西指出，如果从原点 O（图 69）按 n 个方向每一方向作向量 r，其长度为 $r = \sqrt{1/|\sigma_n|}$，这些向量的端点将位于二次曲面上。柯西称这个面的主軸方向为主向 (principal directions)，其相应的应力称为主应力 (principal stresses)。

柯西导出一矩形六面体单元的平衡微分方程，卽：

---

[1] 柯西的著作是在他研究了納維埃的論文（参看第 25 节）以后写的，該文系 1822 年 9 月 3 日向科学院提出，另有一篇摘要刊在 Bull. Soc. Philomath. 第 9 頁上，1823，巴黎。

[2] 应力定义的最后形成是由于圣維南。見 Compt. rend. 卷 20，1765 頁，1845 年；卷 21，125 頁。柯西在以前的写作中用了稍許不同的定义，但不久他接受了圣維南所下的定义。

[3] 关于在早期彈性理論許多作者所用的符号，見穆佐格諾“靜力学”626 頁。并参看塔德亨特和庇尔逊合著“彈性力学史”卷 1，322 頁。

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned}\right\} \tag{b}
$$

式中 X, Y 及 Z 表示在 O 点处单位体积的体力的三个分量。在振动情况下，这些体力应加上惯性力。

这位法国数学家又驗証了彈性体能繞 O 点(图 69)产生变形，并說明当这种变形很小时，在任一方向的单位伸长量以及在原先为相互垂直的任何两个方向上的直角的改变都可用下面六个应变分量来表示：

$$
\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\\
&\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \qquad\qquad\qquad \gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{c}
$$

这些关系式給出沿坐标軸向的三个应变与各軸間的角畸变。如果我們从 O 点对每一方向作一向量其长度为 $r=\sqrt{1/|\varepsilon_r|}$，式中 ε_r 为沿 r 方向的应变，则各向量的端点也将位于二次曲面上。該曲面的主軸称为变形的主向，而其相应的应变称为主应变 (principal strains)。

柯西又給出了各向同性体的六个应力分量和六个应变分量之間的关系式。他假定变形的各主向与各主应力方向相重合，并假定应力分量为应变分量的綫性函数，写出了下列方程：

$$
\sigma_x=k\varepsilon_x+K\theta,\ \sigma_y=k\varepsilon_y+K\theta,\ \sigma_z=k\varepsilon_z+K\theta
$$

式中 k 及 K 为两个彈性常数，$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$，即 θ 为单位体积的改变。对于任一坐标軸方向，他得出

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_x=k\varepsilon_x+K\theta,\ \sigma_y=k\varepsilon_y+K\theta,\ \sigma_z=k\varepsilon_z+K\theta,\\
&\tau_{xy}=\frac{k}{2}\gamma_{xy},\quad \tau_{xz}=\frac{k}{2}\gamma_{xz},\quad \tau_{yz}=\frac{k}{2}\gamma_{yz}
\end{aligned}\right\} \tag{d}
$$

(a)到(d)的关系式可合成为一个完全的方程組用以求解各向同性体的彈性問題。柯西本人用这些方程研究过矩形杆件的变形。他对于矩形杆件受扭的問題特别注意，他对狹长形截面的杆件想出了一个滿意的解法。他指出一根扭轉的杆件的截面一般不能保持平面，而会在扭轉时翹曲。柯西作成的这个結論，后来圣維南利用它并用公式推出一套更完整的棱柱杆扭轉理論(参看第 51 节)。

27. 泊松 (S. D. Poisson, 1781～1840)

泊松出生于巴黎附近的小市鎮庇梯威尔斯 (Pithiviers) 的一个貧苦家庭中，他

直到十五岁，还沒有讀书和写字的机会，更談不上进学校念书了。1796 年他被送到住在方坦涅布留 (Fontainebleau) 的舅父家去，在那里他才参加了数学班的学习。他的数学学习得很好，因此在 1798 年他得到工业学院的特准，考入了該校。他在該校的优良成績为拉格朗日（当时教他函数理論的老师）和拉普拉斯所看重。1800 年毕业后，被留在学校里任数学講师，到 1806 年他已成为积分課的教授。他的数学創作使他成为这方面最优秀的法国学者而聞名于世。早在 1802 年他已經是法国科学院的会員了。那时，理論物理学正在飞速发展，当时的数学家都致力于用数学理論解决物理学上的問題。以分子結构概念为基础的彈性理論引起了泊松的重視，他在这方面做了很多工作，奠定了这門学科的基础。


图 70 S. D. 泊松

泊松所得主要成就收集在 1829 及 1831 年所发表的两篇研究报告中[1]，以及他的力学教本中[2]。他的工作开始于究討质点系之間分子力的作用，他得到三个平衡方程和在边界上的三个条件。这些都和以前納維埃和柯西的做法相似。他証明这些方程不仅为确定物体任何部分平衡所必需，而且已达到充分滿足的程度。他将运动方程进行积分得到成功并証明如果在物体的微小部分內产生扰动，它将形成两种波[3]。移动較快的波每一质点的运动是与波陣面正交而且連带有体积的改变（或扩大）；另一种波則每一质点的运动是与波陣面相切，在运动中只有畸变而无体积改变。

在这篇研究报告中，泊松参照奥斯特洛格拉德斯基 (M. B. Остроградский) 的著作（参看第 33 节），将他的一般方程用到各向同性体上[4]，泊松发現对于一根棱柱杆的簡单受拉，軸向伸长 ε 一定会連带有横向收縮，其值为 $\mu\varepsilon$，式中 $\mu=\frac{1}{4}$。

---

[1] “彈性体平衡与运动研究报告”(Mémoire sur l'equilibre et le mouvement des corps élastiques), Mém. acad. 卷 8, 1829, 与“彈性体及流体的平衡与运动的一般方程研究报告”(Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides) 工业学院学报，20 期，1831 巴黎。塔德亨特与庇尔逊著“彈性力学史”对于这两篇研究报告有过很詳細的評論。

[2] 見“力学論著”(Traité de Mécanique) 两卷集，2 版，1833。

[3] 見“在彈性介质中运动傳播的研究报告”(Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques) Mém. acad. 法国，卷 10，549～605 頁，1830 年。

[4] 前述 1829 年的研究报告中討論到它的应用。

于是体积的改变将为 $\varepsilon(1-2\mu)=\frac{1}{2}\varepsilon$。作为一个三維問題的簡单例子，他討論到一空心球承受均匀內压力或外压力的应力与变形。他又討論了一个球的純徑向振动。

图 71　M. B. 奥斯特洛拉格德斯基

作为一种二維解法，泊松得出了計算一块受載平板横向撓曲的方程

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \qquad \text{(a)}$$

式中抗弯刚度 D 具有相应于 $\mu=\frac{1}{4}$ 时的数値，而 q 为載荷集度。他討論了边界条件。他的条件完全符合于現在普遍采用于板边固定和簡支的条件。对于沿着边緣分布有已知力的那一边，他要求三个条件（我們現在改用两个），即剪力、扭矩和弯矩（由边緣任一单元长度的分子力中算出），必須与作用在該边緣上諸力所給出的相应量相平衡。条件的数目由三个減少为两个是在以后由克希霍夫 (kirchhoff) 所达成，并由克尔文用物理学方法作了解釋（参看第 57 节）。为了証明他的理論的适用性，泊松研討了当載荷集度仅与去軸心距离成函数关系时的圓板的弯曲。为此，泊松将 (a) 式改写为极坐标并得出这个問題的全解。以后他将这个解用到均布載荷上而得出板边簡支和夹紧的撓曲方程式。他又討論到板的横向振动并解出了当圓板撓曲的形状对称于中心时的振动問題。

泊松还发展了另外一些方程式，作为决定杆件的縱向振动、扭轉振动和横向振动，并作为計算各种振动方式的頻率之用。

在他所著"力学論著"(Traité de mécanique) 一书中，泊松沒有用到彈性力学的一般方程而导出了另外一些关于計算杆件的撓度和振动的式子，书中都假定了杆件变形时的截面仍保持为平面。对于棱柱杆的弯曲，他不仅用过表示彈性曲綫的曲率对弯矩成正比的二次方程式，而且也用过下列方程式

$$B\frac{d^4y}{dx^4}=q \qquad \text{(b)}$$

式中 B 为抗弯刚度，而 q 为横向載荷的集度。在討論 (b)* 式的各种用法中，泊松作了重要的观测，如果 q 为 x 的函数，在杆端 $x=0$ 及 $x=l$ 处，它都等于零。因之經常可用正弦級数来表示。于是 (b)* 式变为

* 原书誤作 (a)——出版社注。

$$B\frac{d^4y}{dx^4}=\sum a_m \sin\frac{m\pi x}{l}$$

将此式积分并假定两端撓度为零，他得出解式如下：

$$By=\frac{L^4}{\pi^4}\sum\frac{a_m}{m^4}\sin\frac{m\pi x}{l}+x(l-x)\left[Cx+C_1(l-x)\right]$$

式中 C 与 C_1 为常数，按端部条件来决定。当两端为簡支时，C 及 C_1 等于零，因之得出

$$y=\frac{l^4}{B\pi^4}\sum\frac{a_m}{m^4}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

我們似乎是第一次在这里見到用三角級数研究杆件的撓度曲綫。在泊松时代，这个方法并沒有引起工程师們的重視，可是現在却发現它是非常有用的。

我們看到泊松并沒有象納維埃和柯西一样对彈性理論貢献出基本概念，不过他毕竟解决了許多重要的实际問題，因此，我們仍然采用了他的成果。

28. 拉梅(G. Lamé, 1795～1870)和克萊佩朗(B. P. E. Clapeyron, 1799～1864)

拉梅和克萊佩朗两位卓越的工程师同在1818年从工业学院毕业，又同在1820年从矿业学院毕业。他們在学业完成以后，被介紹到俄国政府作为約派的青年工程师，在俄国一个新建不久的工程学校，即圣彼得堡交通工程学院工作。这所新学院在以后俄国工程科学发展上起了很大的作用。它建立在1809年，是由卓越的法国工程师們如比坦喀尔特(Bétancourt)(他是这所学院第一任校长)，巴柴恩(Bazain)，和波提尔(Potier)諸人一起建立起来的。它的教学大綱和教学方法完全与巴黎的工业学院及桥梁道路学院的相同。拉梅和克萊佩朗在該校教授应用数学和物理学，同时他們也帮助設計了一些俄国政府极为重視的結构物，例如那时在圣彼得堡所設計和建造的几座悬索桥便是[1]。

图 72 奥古斯丁·德·比坦喀尔特

为了研究这些桥梁上所用的俄国鉄料的力学性能，拉梅設計并建造(1824年)

[1] 这些悬索桥(1824～1826年建成)是在欧洲大陆建造的第一批，参看怀貝金(Wiebeking)著“土木建筑”(Architecture Civile)卷7，1831，慕尼黑。并参看麦騰斯(G. C. Mehrtens)“鉄桥建筑”(Eisenbrückenbau)卷1，1908，莱比錫，拉梅和克萊佩朗又帮助設計过橫跨尼瓦(Neva)河上的大悬索桥(单跨，跨长1020呎)。参看Ann. mines，卷11，265頁，1825。

了一架专用的試驗机器，和拉格杰姆在斯德哥尔摩所制造的相似[1]。这是一架水平式試驗机，連带着一架冲击起水机（hydraulic ram）来产生載荷和吸收应变。載荷的大小借法碼来测量，如图74所示。拉梅注意到当进行这些試驗时，鉄在一个約等于极限强度三分之二的載荷作用下很快地开始伸长。鉄銹的脫落和达到屈伏点以后頸縮的形成也給观察出来。这些試驗結果[2]被采用在俄国的鉄結构設計中，有几种材料力学书本中也都讲到它[3]。

图　78　G. 拉梅

为了重建圣彼得堡的圣伊薩克大祇拜堂，拉梅和克萊佩朗檢驗了拱的稳定問題，并写出了前已提及的那份研究报告（参看第20节）。

当这两位工程师在圣彼得堡工作时，他們写出重要的研究报告"均質固体的内部平衡"(Sur l'équilibre interieur des corps solides homogenes)于1828年向法国科学院提出，經过波因薩特(Poinsot)和納維埃审定，并刊載在"科学家研究报告"(Mémoires présentés par divers Savants)卷4，1833年。这篇研究报告的重要性在于它不仅包含平衡方程的推导(当时这些平衡方程已可从納維埃和柯西的著作中查到)而且包括有应用这些一般方程求解某些实际問題的資料。在这分研究报告的第一节里，他們用納維埃的分子力概念(参看第25节)推出平衡方程并指出也可用柯西的应力概念得出同样的方程。在第二节里研究了在彈性体的一点上的应力，报告指出，如果对通过此点所作的每一平面用自此点作出的向量来表示相应的应力，那么所有这些向量的端点将位于一个椭圓球体的表面上。这就是所

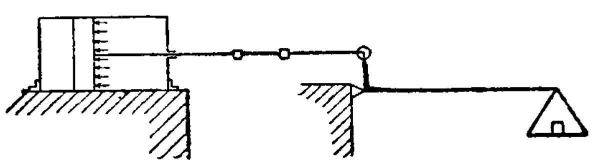


图　74　拉梅的拉伸試驗机

[1] 有名的渥尔威希(Woolwich)試驗机在1832年根据同一原理制成，还有在倫敦騷斯瓦克街(Southwark Street)格罗夫(Grove)公司的克尔卡台(Kirkaldy)机。参看吉旁斯(C. H. Gibbons)"材料試驗机"(Materials Testing Machines)1935，匹兹堡。

[2] 这些試驗的結果，写在拉梅給貝列特(Baillet)的信中，发表在Ann. mines，卷10，1825，巴黎。

[3] 例如，納維埃"課程总結"2版，27頁。1833。

謂"拉梅应力椭球"。它也指出求算通过此点的任何平面上应力的大小和方向的方法(利用此椭球和应力向二次式*一起)。

在一般討論之后，作者将他們的方程式用在特殊情况中。他們說出怎样以实驗方法从拉伸試驗或那些会产生均匀受压的試驗中求得方程式中所引用的单-彈性常数的值。于是他們处理空心圓筒的問題，并且导出求算均匀內压力与外压力所引起的应力的公式。如果压力大小为已知时，便可用这些公式来計算筒壁的必需厚度。在他們的分析中，他們用了最大法向应力理論；不过他們謹慎地說明圓筒的每一元素是处于二維应力状态而且由簡单拉伸試驗所得的彈性极限也許不能应用在这种較复杂的情况里。在这一节中討論到的其他問題有：圓軸簡单扭轉，球体承受向心引力以及球形壳体承受均布內压力或外压力等。对于所有这些情况都导出了正确的公式，从那时起这些公式都被广泛应用。

在最后一节中，这两个作者考察了一些更为复杂的問題。他們开始考察被一块平面所界限的一无限物体，在該平面上分布着已知的法向力。用一个富勒积分代表这些力，他們得出了四重积分形式的位移分量的式子。他們用同样方式来分析被两个无限平行平面所界限的一物体。最后处理了无限长圓柱体的問題。这儿，第一次介紹了圓柱坐标。这里又以例題的方式討論了一个圓柱由分布在它表面上又垂直于其軸的切向力所产生的扭轉。这里是假定这些力的集度只为沿圓柱軸量出的距离的函数。

这篇研究报告另一重要方面是，它除去有价值的結論以外，还包含了各向同性材料彈性变形理論的全部已知成果。这些成果表达得很清楚而又簡单扼要。以后，拉梅編写"固体彈性的数学理論教程"(Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps Solides)时引用了这篇論文。这是第一本关于彈性理論的书籍。

当法国革命后，法国和俄国之間的政治关系已宣告断絕，拉梅和克莱佩朗在1831年就回到法国。他們回国后发覺法国由于英国鉄路建筑迅速成长的吸引，也作出建筑鉄路的計划，因而工程师的工作重点也轉变了方向，拉梅和克莱佩朗参加了勘測和建造从巴黎到圣哲美因(Saint-Germain)的鉄路。不久，拉梅放弃了鉄路工作，改在工业学院担任物理学教授一直到1844年。在这段时間他出版了物理学教程(1837年)，还有关于光学理論方面的一些重要論文。

1852年，拉梅又出版了彈性理論方面的书(上面提过的)。他与克莱佩朗合

* Stress-director Quadric

写的那篇研究报告中的成果也列入其中，但其中方程的形式已稍有变动，因为那时拉梅已經理解到关于决定一各向同性材料的弹性只需要两个弹性常数的結論。这本来是柯西决定出来的(參看第 26 节)。拉梅介紹了一些振动問題，討論金属絲、薄膜和杆件的振动。又介紹了弹性介質中波的傳播。书中有很多篇幅专述曲綫坐标的应用及球壳的变形，这些都較研究报告所提的情况要詳細得多。最后，拉梅討論到弹性理論在光学上的应用。在应用过程中，他究討了光的双折射并假定介质是各向异性的(aeolotropic)。他相应地改变了弹性方程并求出应力和应变两者分量間的关系。

塔德亨特在其所著"历史"一书中評論到拉梅的著作时曾作过結論，他說："我們不能給拉梅的著作以过高的評价；一位素負盛名的科学家能降格地对他所精湛独到的学科写出初淺論著，該书可算得是一个少見的例子了。书中的数学叙述是既清楚而又有說服力的，同时講稿起首和結尾的一般論述写得极为流利，显示着他那詞句的优美和思想的深度"。

該书出版以后，拉梅継續从事于弹性理論的研究，1854 年他的"球面界限的弹性平衡研究报告"(Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques)发表在路佛里(Liouville)主編的"数学杂志"(Journal de mathématiques)卷 19 中。在此文中作者对球形壳体在任何面力作用下变形的問題作出了全解。

1859 年，拉梅所著"曲綫坐标及其不同应用(教本)"(Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications)出版了。这本书叙述曲綫坐标的一般理論，以及它們在力学、热学和弹性理論上的应用。书中給出变换为曲綫坐标的弹性方程，并将球壳的变形作为一个例子来說明。在最后几章中，拉梅討論到弹性理論基本方程所根据的一些原則。他已經不再贊成用納維埃的方程式推导(由分子力导出的)，而选擇了柯西方法(只用了剛体的靜力学)。以后他就取用柯西的假定，即应力分量为应变分量的綫性函数。对于各向同性的材料而言，这种假定使我們只需要两个弹性常数；这可从簡单拉伸和簡单扭轉的試驗中求出。这样，便用不着作分子結构及分子力的任何假說就能得出所有必需的方程式来。

1843 年，拉梅被选为法国科学院的会員，1850 年充任苏波恩大学的教授，講授理論物理学中的各专业課程。他并不是一个出色的講演家，但他的书却流傳很广，多少年来在数理物理学界有着很大的影响。1863 年由于身体孱弱，迫使拉梅不能継續教学，終于在 1870 年去世。

克萊佩朗在 1831 年回到法国以后，經常在法国鉄路建設方面的实际工作中活跃着。他的主要工作是将热力学应用于机車設計上。从 1844 年起，他在桥梁道路

学院担任蒸汽机課程的讲授，是一个优秀的教师。他将他丰富的理論知識和广博的实际經驗結合一起进行教学，因此特别能吸引学生听課。当1848年他被聘設計一座多孔桥时，发明了一个分析連續梁应力的新方法。这方面将留到下面再来討論(参看第34节)。

在拉梅那本关于彈性力学的书中，拉梅描述过他的老朋友的另一貢献，他称之为克莱佩朗原理(Clapeyron's theorem)。这个原理說明作用于一物体的外力与这些力在作用点沿着力作用方向上位移的分量的乘积之总和，等于此物体相应的应变能数值的两倍。我們看出由克莱佩朗发表的这个原理較此书出版的日子为早，所以它标志着这是最先导出各向同性体变形后应变能的一般公式。1858年，克莱佩朗被选为法国科学院的会員。他继續在科学院和桥梁道路学院工作，直到1864年去世为止。

29. 板的理論

第一个着手研究彈性面的撓度問題的人是欧拉。他在叙述一块完全柔性薄膜的振动时，把薄膜看成为由互相直交的两組受拉的索子所組成(图75)。他求出[1]有关的微分方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{a}$$

式中 w 表示撓度而 A 及 B 为常数。尤拉也用了这个概念来研究钟鈴的振动。

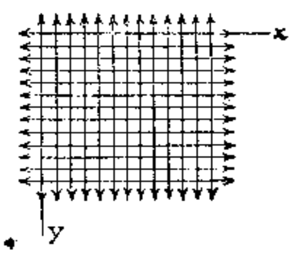


图 75

雅斯奎士·伯諾里(Jacques Bernoulli, 1759～1789)[2]用同一概念分析了板的撓曲，得出下面的微分方程[3]：

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \tag{b}$$

式中 D 为板的抗弯剛度，而 q 为横向載荷集度。伯諾里很清楚地指出他的式子只是一个近似式，而且所取的两組梁綫如果不是互相直交的話，将会得出稍有不同的結果。他发表这項著作只能認为解板的弯曲問題的初步尝試而已。

最有价值的板的理論是在施拉德尼(E. F. F. Chladni)的"声学"一书上引述出来的[4]，特别是他对于板的振动的实驗。施拉德尼在板上布滿細砂，使它显示出

[1] 見彼得堡科学院研究报告，卷10，243，1767。

[2] 雅斯奎士是丹尼尔·伯諾里的侄儿。在1786～1789年間为俄国科学院的会員。

[3] 見 Nova Acta，卷5，1789，圣彼得堡出版。

[4] 施拉德尼著："声学"(Die Akustik)第1版在莱比錫于1802年印出。1809年出版了法譯本，其中可找到一段短短的自傳。

在各种运动情况下所出現的节綫 (nodal lines) 从而求出其相应的頻率。1809 年法国科学院邀請施拉德尼对他的实驗作一次演述，拿破侖也参加了这次盛会，对这次实驗有深刻的印象。在拿破侖的提議下，法国科学院悬奖征求能导出一个板振动的数学理論，使理論計算結果与这次实驗結果相比較的論文。1811 年 10月，比賽已到截止日期，应征者只有苏菲・哲美因 (Mlle. Sophie Germain)一人。

苏菲・哲美因(1776～1831)[1]在她很年青的时候就爱好数学，并且为了讀牛頓的“物界原理”(Principia)，又学了拉丁文。她在法国革命战爭时期仍継續鉆研数学，并和当时一些大数学家如拉格朗日，高斯(Gauss)与列金得尔(Legendre)等交往。当她听到科学院悬奖征求論文的消息后，她决定著述板的理論。她鉆研了欧拉在彈性曲綫方面的著作 (参看第 8 节)，书中是采用变分法从表示弯曲应变能的积分式子里导出撓度的微分方程的。她决定用同样方式継續研究并假定板的应变能能用下面的积分式表出：

$$A\iint\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2 ds \tag{c}$$

式中 ρ_1 及 ρ_2 为撓曲面的两个主曲率半徑。苏菲・哲美因在計算积分式(c)的变量时造成錯誤，因此她沒有求出正确的方程式，沒有得奖。当时評判人之一拉格朗日[2]指出她的錯誤，并經过一些改正之后，得出了适合于所求方程式的下列形式：

$$K\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{d}$$

科学院再将这个題目提出，规定新的截止期为 1813 年 10 月，哲美因又再度参加应征。她現在虽然已經得到正确的(d)式，但評判人要求她对基本假設(c)式用物理方法作出証明，她又失敗了。于是科学院决定再延期一次。第三次，虽然評判人对于她的成果还認为不够十分滿意，但她毕竟得了奖(1816 年)[3]。她的論文中虽沒有包括基本式(c)的完善解釋，但我們应当同意塔德亨特的說法[4]：“当評判人評奖时，他們不能过于吹毛求疵……”。

泊松[5]对板的理論作了更进一步的改进。为了給出 (d) 式的物理意义，他假設板由許多质点所組成，其間有分子力 (与分子間距离的改变成正比) 作用着。他

[1] 苏菲・哲美因的傳記載在她所著："科学报告与信件" (L'état des Sciences et des Lettres)，1833 年，即她去世后两年在巴黎出版。

[2] 見 Ann. Chim. 卷 39，149，207 等頁，1828。

[3] 見她所著"彈性面的理論研究"(Recherches sur la théorie des surfaces élastiques)，1821，巴黎。

[4] 見他的"历史"卷 1，第 148 頁。

[5] 参看他在 1814 年由法国科学院刊出的研究报告。

由这个质点系的平衡条件达成了(d)式。可是,由于他假定所有质点都分布在板的中央平面,因而在他的(d)式中的常数 K 是与板厚的平方成正比,而实际上是应該与其立方成正比的。在同一篇研究报告中,泊松証明(d)式不仅可由积分(c)式而得,而且可由积分下式而得:

$$A\iint\left[\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2+m\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right)\right]ds$$

只要认眞地选择常数 A 和 m,它就是求算弹性板弯曲时应变能的正确式子。这就説明了虽然哲美因的(c)式沒有給出板弯曲的应变能,为什么她还能得出平板微分方程的正确形式(d)的道理。

对于得出板弯曲方面第一个令人滿意的理論应归功于納維埃。納維埃在其論文中(1820年8月14日向科学院提出,1823年出版)[1],和泊松一样假定平板由許多分子所組成;不过他認定各分子系按整个厚度分布,并假定在弯曲时它們的位移是和板的中央平面相平行,并与距該平面的距离成正比。这样,他得出了計算任何横向載荷的正确微分方程,即

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \tag{e}$$

式中 q 为載荷集度而 D 为板的抗弯剛度。因为納維埃又作过如第25节所述的假定,他在那个假定中作出的結果只用到一个彈性常数,而他的 D 值与現在我們取泊松比等于 $\frac{1}{4}$ 时普遍承認的数値相符。納維埃将(e)式用在簡支矩形板問題中,他説明了它的正确边界条件,并以二重三角級数的形式作出了正确解。这个式子他在均布載荷以及中央集中載荷的情况下应用。这些解法是求解板的弯曲問題第一次作出的最适用的解法。

納維埃也研討过在板的边界上受均布压力 T 作用下的板的側向压屈,并导出屈曲面的正确微分方程为:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0 \tag{f}$$

他曾将这个方程用到四角支承的矩形板那种复杂的問題上。可是在这里他作不出合理的解法。

---

[1] 見 Bull. Soc. Philomath. 第92頁,1823,巴黎。

第 六 章

1833～1867 年間的材料力学

30. 費儿班恩(Fairbairn)和霍芝肯逊(Hodgkinson)

在十九世紀的前半期，法国工程师以他們的优厚数学基础在从事数理彈性理論的研究。这段时期內英国工程师正在用实驗方法研究材料力学。那时英国是发展工业的先进国家，在詹姆士·瓦特(James Watt)的成就以后，机器工业很快地成长起来了。机車的制造成功刺激了鉄路建設的猛进。所以英国能在 1827 年出产鋼鉄 690,500 吨，1857 年增加到 3,659,000 吨。在这个迅速扩展工业的时代，对于改进英国工程教育的工作却做得很少，摆在他們面前的許多工程問題，大部分由自学的人們来解决。这些人并沒有深广的科学知識只偏重于用实驗方法来解决問題。虽然实驗工作对于材料力学的基本理論不会有多大的貢献，但对于从事实际工作的工程师在解决他們随时遇到的迫切問題上却有很大用处。这些試驗成果不仅在英国而且在欧洲大陆都广泛应用，同时还被摘引到法国和德国的工程文献中[1]。这些英国工程师中最著名的乃是威廉·費儿班恩(William Fairbairn)和愛頓·霍芝肯逊(Eaton Hodgkinson)。

图 76 威廉·費儿班恩

---

[1] 例如，参看摩林(A. Morin)著"材料的抗力"(Résistance des Matériaux)，3 版，1862，巴黎；勒夫(G. H. Love)著"鑄鉄，鉄与鋼…的不同抗力与外观性质"(Des diverses Résistances et outres Propriétés de la fonte, du Fer et de l'Acier…)，1859，巴黎；魏斯巴赫(J. Weisbach)著"工程力学与机械学教本"(Lehrbuch der ingenieur-und maschinen-Mechanik)(1845～1862)三卷集。最后一书有英，瑞典，俄及波兰等国譯本。

威廉・費儿班恩(1789～1874)[1]出生在苏格兰的喀尔索(Kelso),他是一个貧农的儿子。他从初等学校毕业以后便帮助他父亲种田。十五岁上,他开始在北盾(North Shields)附近的拍西煤矿的总矿当机工艺徒。費儿班恩是很用功的,白天整日在动力厂劳动,夜間却用来学习数学和英国文学。在七年的学徒生活中,他用这个学习方法增長了很多学識。1811 年学徒期滿,他搬到倫敦,那时倫敦正在建造滑鉄庐(Waterloo)桥。建筑师約翰・倫尼(John Rennie, 1761～1821)[2]的盛名吸引了費儿班恩,但費儿班恩不能在桥工上找到工作,仍继續做一名机工。他利用晚間上图书館看书,經常坚持着这种自学方式。在倫敦工作了两年,以后在英国南部及都伯林(Dublin)等处度过一段时期,1814 年搬到曼彻斯特。他希望在那儿找到一个能发揮他的工艺才能的場所,起先他在那里的几个工厂做工,1817 年他和另一位机工詹姆士・里萊(James Lillie)合伙自己經营业务。

最初,他一直做棉織厂的机械安装工作。对他来說,这是个新的工作,經过仔細的分析,不久他发現到这些机器的一些主要缺点。他发現这些机器是由方形大軸杆带动大直徑的木輪来傳动的,运轉速度很低,每分鐘只 40 轉。他想出办法減小木輪的直徑以提高速度。他又改进了离合器,这样才得出比較适用而又經济的运轉方式。这項成就使他在紡織工业中作出巨大的貢献,他就成为机械安装的有名专家了。1824 年,費儿班恩被聘請到苏格兰卡特陵(Catrine)棉紡厂去改进这个厂的水电站。在該厂他又提出了改进水輪机設計的建議,他在这方面的研究是很成功的,不久他設計和建造了水电站。这件事使他揚名于国际,他被邀請到瑞士去改造并装置苏黎世城爱司塞(G. Escher of Zurich)地方的水輪机。他也被亚尔薩斯(Alsace)的制造业聘作顧問。

大致在这个时候,鍛鉄的生产已相当发展,費儿班恩轉而着重于研究这种新材料的力学性能以及如何将它应用在各种工程結构上的問題。他遇到了霍芝肯逊,霍芝肯逊在材料力学上的研究是早已馳名的。他向霍芝肯逊建議应当在研究工作中多做实驗。他設計并制造了一架材料試驗机(費儿班恩杠杆式)(图 77),他倆絕大多数的研究工作都是靠这架机器做出来的。他們接受英国科学促进协会的委托,开始研究鑄鉄的力学性能。那时霍芝肯逊作拉伸及压縮試驗,而費儿班恩則負責弯曲試驗。他在工作中特别注意到时間效应和温度效应。他发覺当載荷加上以后,杆件的撓度随时間而增加,同时他想要求出一个这样的极限載荷,卽在低于此載荷时不

[1] 关于費儿班恩的傳記,見威廉・波尔 (William Pole) 所著"威廉・費儿班恩及巴特的生平"(The Life of Sir William Fairbairn, Bart), 1877, 倫敦。

[2] 关于約翰・倫尼的傳記,見斯迈尔斯(Smiles)著"工程师的一生"(Lives of the Engineers),卷 2。

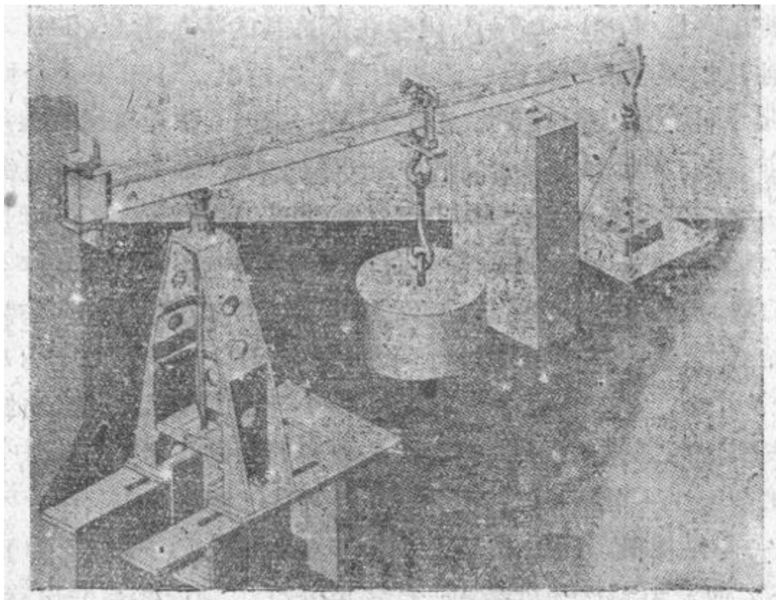


图 77　费儿班恩杠杆式材料試驗机

再有撓度的增加。他对温度效应的研究指出温度增加时断裂載荷将大大地減小。

1830 年，費儿班恩热心于鉄質船艦的制造，他对研究熟鉄板及其鉚合做过許多实驗[1]。他发覺鉄鈑在各个方向上的强度大致是相同的。用每种鉚合方法作試驗，他指出机械鉚合（比較手工鉚合）質量較好。在鋼鈑的使用中費儿班恩最感兴趣的是在鉄桥方面。关于他在桥梁設計和建造上的实驗工作将在以后再加討論（参看第 37 节）。

費儿班恩在設計鍋炉时[2]研究了承受外压力的管子对脹裂的抵抗力。他从取用两端固裝的具有各种尺寸的管子所作出的实驗里，証明了外压力的临界值可用下式很精确地表示出来，$P_{cr}=Ch^2/ld$，式中 h 为管壁厚度，l 为管长而 d 为管的直徑，c 为一常数，視材料的彈性而定。为了容易得到形状更为完整的管和球形壳体，費儿班恩随后用玻璃品来代替。他先試驗了几种玻璃的彈性并且得出其极限强度，再用这种玻璃做成的管子和球形壳体以实驗方法测定外压力的临界值[3]。

費儿班恩通过許多次講演将他无数次实驗的成果公之于世，以后又写成书本，这本书在当时的工程界中是非常流行的[4]。为了表揚他的科学成就和設計康卫

[1] 这个研究結果在 1838～1839 年得出，发表較迟。見 Phil. Trans. 第二部分，677～725 頁，1850。

[2] 見 Phil. Trans. 1858 年，389～413 頁。关于这項工作比較詳細的討論可参看前面提过的摩林所写的那本书（参看第 30 节）。

[3] 見 Phil. Trans. 1859 年，213～247 頁。

[4] 見他的"工程师的有用資料"（Useful Information for Engineers），1856，倫敦，及同一标題的丛书第 2 版 1856 倫敦，1858 年发行第 2 版。1860 年。并見"鑄鉄与熟鉄在建筑上的应用" On the Application of cast and Wrought Iron to Building Purposes）。

(Conway)及布列颠尼亚 (Britannia) 两个箱式桥的貢献,費儿班恩被选为皇家学会的会員。1860 年由学会頒发給他一个奖章。

1855 年他被选为巴黎博覽会評审委員之一,閉会后,他做了一个报告,其中有下面一段重要的評論:"从我的观感中,我坚决相信法国和德国在工业技术尖端部門的各种原理的理論知識方面比我們先进;我想这主要是由于那些国家的学术机关对化学和机械学的教育給予相当大的贊助 …… 在自我夸大的心理强烈刺激下,我們坚定不移地在赶数量,而别的国家却不图粗制濫造,一直在細心研究要怎样在各方面合理地使用材料,因此在許多情况下質量上是远远超过了我們的"。这个經驗使費儿班恩对教育寄予重視。他和当时一些負責調查群众失学情况的官員联系,向他們强調陈述英国必須改进她的教育制度。

霍芝肯逊(1789～1861)出生在靠近諾斯威希,杰什尔(Northwich, cheshire)的安德頓 (Anderton) 地方一个农民的家庭里。他只受过初等教育,当他年紀还很小的时候,就从事田間工作,帮助他那青年守寡的母亲共謀生活。1811 年他搬家到曼彻斯特,在那里遇見了著名科学家約翰·道尔頓 (John Dalton, 1766～1844),道尔頓发现这个青年人很机灵,便开始教他数学。这样霍芝肯逊才有机会讀到伯諾里、欧拉和拉格朗日的經典著作。

1822 年,他开始研究材料力学,两年后发表了一篇"論材料的横向应变与其强度" (On the Transverse Strain and Strength of Materials) 的論文[1]。在棱柱杆的弯曲方面,他观察到每个横截面上拉应力的总和必与压应力的总和相等,因而假定横截面仍保持为平面。他断言:"由于一方的外层纤維的伸长量与另一方外层纤維的縮短量相等,所以前者去中性軸的距离和后者去中性軸的距离也相等"。这个論断不是新的,因为从拔侖特和庫侖时代起已經被发現了。不过这篇論文的功績,正如塔德亨特所說,乃在于使英国的实际工作者能将中性軸放在正确位置上。在霍芝肯逊的分析中,他沒有采用虎克定律,而假定拉力是与伸长量的某一方次成正比。他更广泛地假定这一方次在縮短量和压力之間的关系上有一不同的数值。在他那篇論文中的第二部分,作者給出他用木梁作实驗的結果并証明在彈性极限內与虎克定律相符。

在他的第二篇論文中[2],霍芝肯逊叙述了用鑄鉄梁作出的弯曲試驗。并証明当梁上載荷增加时,中性軸的位置将有改变。他发現鑄鉄的彈性模量、彈性极限和

[1] 这篇論文发表在 Mem. Proc. Manchester Lit. and Phil. Soc. 卷 4, 1824。

[2] "决定鉄梁强度和經济截面的理論与实驗研究"(Theoretical and Experimental Researches to Ascertain the Strength and Best Forms of Iron Beams),刊在 Manchester Literary and Philosophical Society. 第 407～544 頁, 1830。

极限强度对于拉伸和压縮都各有不同的数値。霍芝肯逊利用这个資料又开始作另一实験以寻求在材料用量不变下鑄鉄梁能具有最大承載力的截面形状。他由实験証明一根上下翼緣相等的工字梁并不是最經济的形状，并解釋承受拉力一边的翼緣的横截面面积必須較承受压力一边的大若干倍。

霍芝肯逊实験研究的另一个項目是关于梁上的水平冲击。他所得結果与根据基本理論計算而得的非常符合。該基本理論是根据下面的两項假定：(1)梁因冲击而产生弯曲的撓度曲綫与因靜力而产生弯曲的相同，(2)冲击后冲击体和梁作为一个整体一道継續移动。在計算剛受冲击后冲击体和梁的共同速度时，梁的質量只考虑一半[1]。

霍芝肯逊发表了用費儿班恩試験机作出的研究成果[2]。图 78 表示鑄鉄压縮試件被压碎后的各种形象，关于这些图形，霍芝肯逊指出各种破坏有一共同点，即在每一种情况下，裂口都成錐形或楔形，它們几乎都成一定的角度滑下。在同一篇論文中，給出了用不等翼緣鑄鉄梁作弯曲試験所得的結果。試験指出当底部翼緣和頂部翼緣两者截面面积的比例成 6 或 $6\frac{1}{2}$ 比 1 时，可得到梁的最大承載力。这一比例与鑄鉄的抗压强度对抗拉强度的比例近乎相等。

1840 年，霍芝肯逊向皇家学会提出他在柱压屈方面的研究报告[3]。他的目的在証实欧拉的理論公式。这些实験的一般布置和試件的种类如图 77 。試験过的試件有两端为圓头及平头的圓柱形的，实心和空心的几种。对于細长的实心压杆，与欧拉公式所得結果非常符合(即极限載荷与 d^4/l^2 成正比，式中 d 为杆的直徑，而 l 为其长度)。实験中又发現两端平头的压杆和两端圓头但长度仅为前者之半的短压杆的强度完全相同。

在短压杆的实験中，他发覺和理論公式得出的結果有很大的偏差。將圓头的而长度对直徑的比例在 121 到 15 之間的实心圓柱所得出的結果加以估算，霍芝肯逊取极限載荷正比于 $d^{3.6}/l^{1.7}$ 。

为了設計不列顛尼亚和康卫箱式桥，霍芝肯逊和費儿班恩一起对薄壁管的弯曲和压屈作过許多很重要的实験。这些实験將在以后再討論(参看第 37 节)。

1847 年霍芝肯逊充任倫敦大学工学院工程机械原理教授，在职期間，他曾以皇家委員会会員的身分参加过鉄道建筑中使用鉄料的顧問工作。1841 年，由于他

---

[1] 霍芝肯逊对于冲击的研究刊在 1833～1835 年英国学会报告 (British Association Reports) 上。

[2] 这篇著作刊在 1838～1838 年英国学会报告上。其中大部分材料又編入在"鑄鉄的强度和其他性能的实験研究" (Experimental Researches on the Strength and other Properties of Cast Iron) 中，1846 倫敦。此书已譯成法文：見 Ann. ponts et chaussées，卷 9，第 2～127 頁，1855 。

[3] 見 Phil. Trans. 第二部分，385～456，1840 。

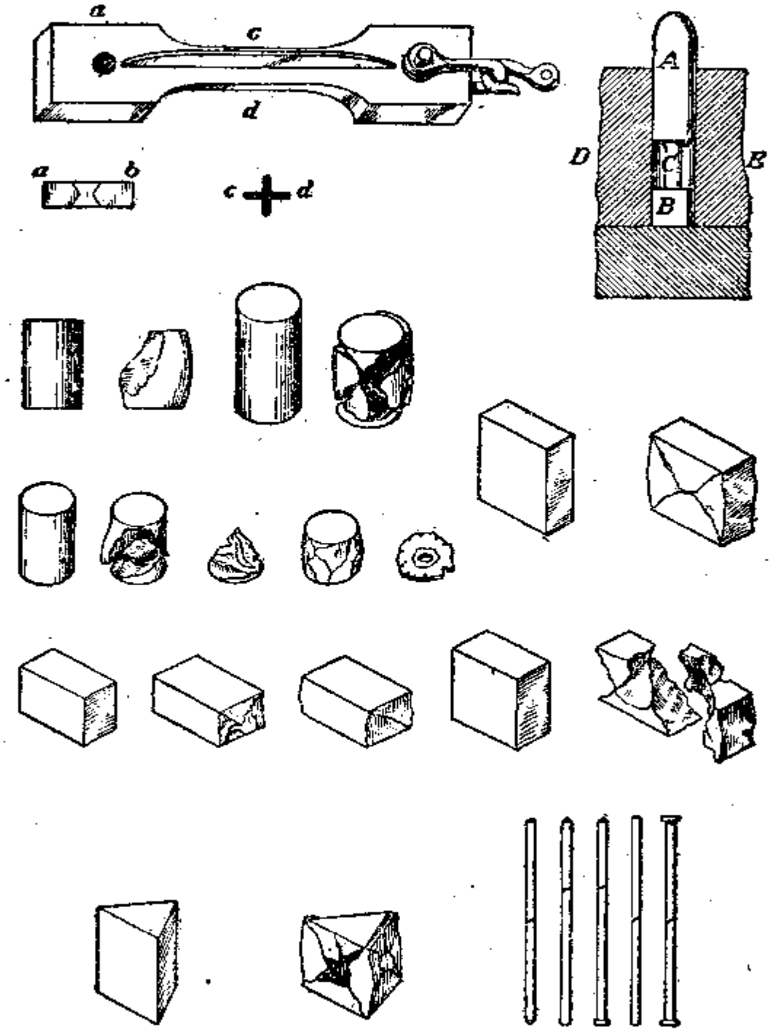


图 78 压縮試驗下鑄鉄試件被压坏的情况

在柱的强度方面的成就获得了皇家奖章，同年，他被选为皇家学会的会員。

31. 德国工程学校的成长

拿破侖战爭之后，德国的經济体系須进行重建。为此必須振兴工业，因而建立了好些工程学校以适应工业的需要，学校的規模仿照法国工业学院。建立工程教育决定以准备好数学、物理和化学等基本科学为其圍繞的中心。工程师应受过相当于在其他专业方面所必修的并相当于大学程度的一般教育。新的工程学校具有大学的資格，它們要培养工程师，使他們不独能解决技术上的問題，而且能担負起发展工程科学的任务。这些基本观念都是取法于法国工业学院的。其中也有一些

明显的差别；在法国象这样的学校只是为青年人以后进入其他专門学院(例如，桥梁道路学院，矿业学院或軍事学院)継續学习工程的預习学校，但德国却要在一个学校里讀完全部的課程。在头两年学习中，学生只受各种基本科学教育。后两年則分入各个专业学习工程。这种新制度对傳授理論的分量和类型較易控制。

另外还有一个重要的区别。法国学校培养工程师主要是为了从事机关工作。但德国学校，一开始就与私人企业发生密切联系而着重在从事工业生产。这两类学校在行政上也有很大的差别。法国工业学院具有軍事化的体制，而德国的新型工程学校却具有德国大学的风味。他們有自治制度，校长和各部主任都由教授会来选举。学生們也有相当的自由来計划他們的学习和支配他們的时間。

这种新式工程教育經事实証明是很成功的，德国工程学校不久就成为推动工业和工程科学的一个重要因素。在德国一位教授的社会地位总是很高的，因此，工程学校才能够吸引一些优秀工程师們来担任教学并从事科学研究。

至于德国的工程力学在起先是受了納維埃，泊松，彭西列特及其他法国人著作的很大影响。不过德国工程师們沒有多久就搞出他們自己的一套；因为过去在工业学院所盛行的抽象力学观念已經不能满足他們的要求了。这样，在我們所討論的这段时期(1833～1867 年間)，开始出現了一些更为实用的工程力学书籍。以下我們将看到这些著作促进材料力学发展的情况。

我們不妨轉而注意这一时代德国的著名力学教授的活动。魏斯巴赫(J. Weisbach)著的"机械力学"与工程力学"(Mechanics of Machinery and Engineering)不独在欧洲而且在美国都享有盛名，美国有英譯本出版[1]。

朱里士·魏斯巴赫(1806～1871)于 1826 年在佛賴堡(Freiberg)的矿业学院(Bergakademie)毕业，为了增进他对基本科学的知識，他又在格廷根大学讀了两年(1827～1829)并且在維也納工业学院讀了一年。出校后，魏斯巴赫放弃了采矿工程师的工作机会，宁愿留在佛里堡作私人教师教授数学来維持生活。1833 年他为佛里堡矿业学院聘去講授应用数学，并且从 1836 年开始直到他去世为止一直在該校担任力学和机械設計方面的教授。魏斯巴赫的主要成就是在水力学方面，他研究水力学系沿用彭西列特的方法，并且以实驗結果和极基本的理論分析相結合，作出了重要的实际貢献。

他的力学著作里适当地插有材料力学方面的問題，他在这方面的創作是以承受总合应力作用的机械零件的設計为中心內容[2]。他应用最大应变理論作为选擇

[1] 由約翰孙 (W. R. Johnson) 譯，1848，費拉德費亚。

[2] Z. Ing. 卷 1，252～265，1848。

机械零件安全尺寸的根据。这种分析方法是由彭西列特提出（参看第 21 节）而为圣維南所取法的。

魏斯巴赫很重視工程力学的講授方法，他設立一个实驗室使学生通过实驗能証实靜力学、动力学和材料力学中的各項原理[1]。他的学生能做出下列試驗：固定实心梁的弯曲，桁架模型，軸的扭轉以及扭轉与弯曲的联合作用。这些試驗都是用木制模型做出来的，它們的尺寸做到能用小的作用力产生出相当大的变形，以便易于量測。学生用实驗方法学习材料力学这里似乎是首創第一次。

图 79 朱里士·魏斯巴赫

图 80 F. 雷頓巴赫

雷頓巴赫（F. Redtenbacher，1809～1863）是德国当时另一位卓越的教授，他提倡将科学的分析方法灌輸到机械設計中去。1829 年，他毕业于維也納工业学院，由于他的成績优异，被該院聘任为工程力学講师。1833 年，又在苏黎世（Zurich）工业学校担任数学教师[2]。在該校他除了教学活动以外，还兼任了爱思彻（Escher）和怀斯（Wyss）制造厂的設計师，因此他在机械設計中获得了实际經驗。1841 年，卡尔斯鲁赫（Karlsruhe）工业学院聘他为应用力学和机械設計教授，在該校一直担任教学直到他去世为止（最后还担任了該校的校长）。他将他那广博的力学知識和实际經驗相結合，重新組織了机械設計的教学法，并将理論分析灌輸到解决設計問題上去。他成为德国培育工程教育的領导人物。他的著作被許多机械工程师采用[3]，他的設計方法也在工业界推广了。他注重用材料强度来决定机械零件的安

[1] 魏斯巴赫在土木工程（Civiling）卷 14，339～370，1868，发表过这項事实的描述。

[2] 1855 年这所学校由杜佛尔（Dufour）将軍改組为苏黎世联合工业高等学校。杜佛尔是巴黎工业学院毕业的学生。

[3] “机械設計資料”（Resultate für den Machinenbau），1848，有法譯本。

全尺寸，在他所著"力学与机械构造原理"(Principien der Mechanik und des Machinenbaues)(1852)及"机械构造"(Der Machinenbau)(1862～1865)两书中，我們看到了环鈎，片彈簧，螺旋彈簧，鏈条椭圓环圈等等的应力分析的題解。那时，还很少有人懂得分析这些机件，雷頓巴赫可算得是这方面的开創者[1]。

雷頓巴赫去世以后，格拉斯霍夫(F. Grashof)継承了卡尔斯魯赫工业学院的应用力学教授。格拉斯霍夫(1826～1893)[2]在柏林工业学院受过工程教育。毕业后，他在輪船上当过两年半的水手，到过印度、澳大利亚和非洲。回国以后(1851年)开始教学工作，1854年去工业学院講授应用数学。1856年，他协助創办了德国工程师协会，并且担任該会期刊的主笔。在这分期刊中，他发表了許多应用力学方面各种問題的論著。这项活动使他大为出名，也因此被卡尔斯魯赫工业学院聘去接替雷頓巴赫。在該校継續担任工程力学各科門的教学工作。

图 81 F. 格拉斯霍夫

他对材料力学很感兴趣，1866年他出版了"彈性理論与强度理論"(Theorie der Elasticität und Festigkeit)。在这本书里他不独介紹了基本材料力学，而且也介紹了彈性理論的基本方程。他将这些方程用到棱柱杆的弯曲和扭轉的理論以及板的理論上。他在討論杆件的弯曲时，发現了一些新的截面形状的解法，那些截面形状都是創立棱柱杆弯曲理論的圣維南所未曾考慮到的(参看第51节)。在編列机械零件設計用的一些公式时，格拉斯霍夫取最大应变理論作为計算强度的准則，并且把魏斯巴赫的研究成果扩展到复合应力上去[3]。有些地方当遇到特殊問題时格拉斯霍夫还发展了他自己的解法，从而得出一些新的成果。例如，在处理端部鉸接杆件的弯曲时，他試驗出在弯曲时如果鉸座是固定不动的話，可能产生縱向拉力的效应；并指出怎样去計算相应的拉应力。这些計算表明在細长杆弯曲时，这个縱向力变得很重要，它对撓度和应力的影响就不能忽略。

在处理承受內压力的圓柱形壳体时，格拉斯霍夫不只是采用拉梅的公式，而且

[1] 雷頓巴赫的这些解都摘引在康塔美因(V. Contamain)所著"抗力作用"(Résistance Appliquée)，1878，巴黎。

[2] 見文茨基(Wentzcke)所著"德国工程师領袖 F. 拉格斯霍夫"，并参看普南克(R. Plank)刊在 Z. Ver. deut. Ing. 卷70，933頁上的文章，1926年。

[3] 見 Z. Ver. deut. Ing. 卷3，183～195，1859。

也討論到当壳端与底板剛性連結时所产生的局部弯曲应力。在这項分析中，他用微分方程来推导从壳体上用两个徑向截面截取出来的縱向长条的撓度[1]。格拉斯霍夫作出过圓板受对称載荷的几种情况的全解。他也考察过均布載荷作用下的矩形板，对好几种情况提出了一些近似解。

格拉斯霍夫在发表他的研究成果时，总是喜欢用解析法，很少用图来解釋他的見解。他常常从討論某个問題的最通常情况开始，当一般解法得出以后他只簡单化地将它引用到特殊情况中去。这种表达方式閱讀起来是比較困难的；因此这本书在从事实际工作的工程师中間并不怎样流行，对于大多数工程学校的学生也很难閱讀。不管怎样，还是有一些特出的学生能够从它里面得到一套非常完整的材料力学理論知識。直到如今，格拉斯霍夫的书还沒有丧失它的价值，因为它是第一本引用彈性理論来闡述适用于工程师的材料力学的书。

費儿班恩对承受均匀外压力的圓管破裂的实驗（参看第 30 节）引起了格拉斯霍夫对很长的薄圓管的压屈作出非常重要的理論研究[2]。格拉斯霍夫假定一个原先为圓形的管的截面在破裂时变成椭圆形，他求出压力的臨界值为

$$P_{cr}=\frac{2Eh^3}{d^3}$$

式中 h 为管厚、d 为其直徑。在格拉斯霍夫的分析中，他只考慮了一个环元素而不計管子內两相邻环元素間所作用的应力。这就說明了为什么这个公式里只含有模量 E，而不是 $E/(1-\mu^2)$。

在十九世紀的中間三分之一的年代里，德国在建筑材料的力学性能上的实驗性研究有了进展。布尔格（A. K. von Burg）在維也納工业学院做出鋼鈑强度試驗[3]，卡尔馬希（K. Karmarsch）在汉諾威工业学校研究了各种直徑金属絲的性質[4]。路德士（W. Lüders）試驗了正交曲綫系的网絡，这种曲綫系当軟質鑄鋼試件在弯曲时以及在材料已遭受很大形变的其他情况时将在該試件的表面上出現。他証明如果用弱硝酸溶液侵蝕之后[5]，这些曲綫将愈加明显。

1852 年渥德（L. Werder）在紐倫堡設計并建造了一架 100 吨的試驗机来校核鮑利（W. Pauli）所設計的桥梁拉杆。这架机器很精确，而且适用于試驗較大的結

[1] 似乎圓管端部以及加勁环上的局部弯曲是由雪夫勒（H. Scheffler）首先研究的；見"鉄道技术"(Organ für Eisenbahnwesen) 1859。并参看尹克勒（E. Winkler）刊在土木工程（Civiling）卷 6 上的文章，1860。

[2] 見格拉斯霍夫的論文刊在 Z. Ver. deut. Ing. 卷 3，234 頁，1859。

[3] 見 Sitz. Akad. Wiss. Wien Math-Naturer. Klasse，卷 35，452～474 頁，1859 年。

[4] Polytech. Zentr. 1859 年于萊比錫出版。

[5] Dinglers Polytech. J. 1860, Stuttgart.

构构件。随后欧洲的許多实験室都照样装設了这种机器，无疑地十九世紀后半期在材料力学方面所做的研究工作大部分都是由渥德的机器所完成的。

32. 圣維南对梁的弯曲理論的貢献

圣維南的主要成就是在数理彈性理論上，这将留在以后討論。他在基本材料力学方面也有很大貢献(特别是对于杆件弯曲的理論)[1]。他是第一个驗証弯曲基本假設的精确性的人，所謂基本假設即 (1)变形时梁的横截面仍保持为平面，(2)弯曲时梁的縱向纖維不互相挤压，而只是处在簡单拉伸或簡单压縮状态。他說明只有当梁两端承受两个相等且反向的力偶成为均匀弯曲时，这两个假定才能严格地滿足要求。他究討一根矩形梁的均匀弯曲 (純弯曲) (图 82a)，指出纖維的长度改变，及其相应的横向变形，不独滿足上述条件，而且也滿足变形連續性的条件。他也指出原先的矩形截面将改变成图 82b 所示的形状，即由于凸方纖維横向收縮而凹方纖維横向伸长，原为直綫的 ab 便稍形弯曲，其相应的曲率半徑为 ρ/μ，式中 μ 为泊松比而 ρ 为杆弯曲时軸綫的曲率半徑。由于此种横向变形，从杆的上下表面至中性层纖維 ab 的距离也有稍許改变。上下层表面将弯曲成反撓面 (anticlastic surface)。这是对杆弯曲时横截面形状发生扭曲现象进行研究的第一次[2]。

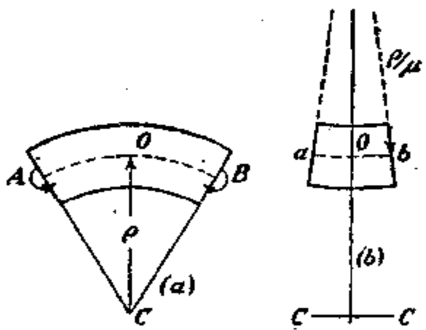


图 82

圣維南研究了一根在自由端加有載荷的悬臂梁 (图 83)，他指出剪应力系作用在横截面平面如 ab 及 a_1b_1 上。由于存在着这种应力，弯曲时横截面将不保持为平面而被翹曲成图示的形状。因为这种翹曲对任何两个横截面来說全是一样的，所以纖維长度并不发生变化，因而按照弯曲时横截面保持为平面这一假定而計算弯曲应力也不受影响。

納維埃在他的书中一直假定中性軸与弯曲力所作用的平面相直交。拍西 (Persy)[3] 首先指出只有在弯曲力所作用的平面 xy 沿着慣性主軸之一与梁的截面相交时才是合理的(图 84)。也只有在內力对于 y 軸的力矩 $\left(等于 \dfrac{E}{\rho}\int_{\Omega} zy\,dw\right)$等于

[1] 圣維南关于材料力学的基本理論多数都收集在納維埃的"課程总結"第三版的注解中，1864，巴黎，也收集在他那石印教本"圣維南编应用力学課程"中 (Leçons de mécanique appliquée faites par intérim par M. de St.-Venant)，1837～1838。

[2] 用光学器械测量反撓面上两个主曲率比值以决定泊松比是由哥尔諾(Cornu)做出来的；見 Comp. rend. 卷 64，333 頁，1869。

[3] 參看納維埃，"課程总結…"第 3 版，第 53 頁。

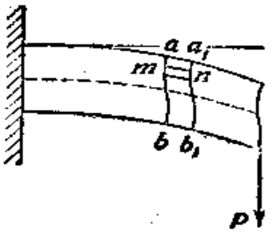


图 83

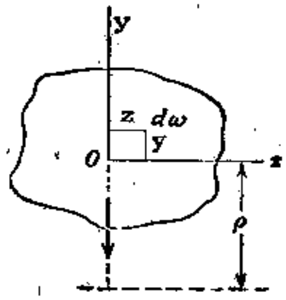


图 84

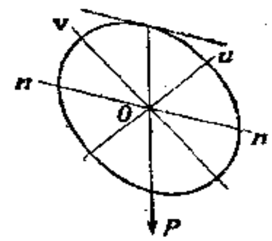


图 85

零，同时該內力对于 z 軸的力矩和外力矩相平衡时才有这样情况。圣維南指出了当弯曲力作用的平面不通过截面的主軸时决定中性軸方向的方法。設图 85 表示梁的横截面的慣矩椭圓，它具有主軸 Ou 及 Ov 以及 OP 表示力所处的平面，于是他証明中性軸 nn 与通过椭圓和 OP 平面相交的交点所作的切綫相平行。

圣維南指出[1]悬臂梁的撓度可以用一种不需近似微分方程进行积分的簡易方法来計算，他介紹了这个方法，即現在所称的面矩法。与撓度曲綫上一元素 mm_1 的曲率相对应的撓度 nn_1(图 86)为

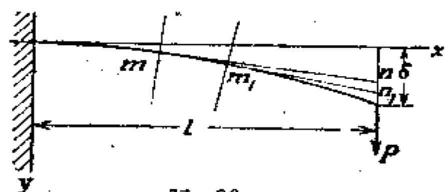


图 86

$$\frac{\overline{mm_1}}{\rho}\ \overline{mn}\ \approx \frac{dx}{\rho}(l-x)$$

观察任一横截面上的曲率，它将等于

$$\frac{M}{EI}=\frac{P(l-x)}{EI}$$

他得出下面的求撓度的式子：

$$\delta=\frac{P}{EI}\int_0^l (l-x)^2dx=\frac{Pl^3}{3EI}.$$

所求的积分可当作表示弯矩图的三角形靜面矩来計算。同洋他求出由均布載荷所产生的撓度。

圣維南檢查了悬臂梁的較大撓度，認为曲率 $\frac{1}{\rho}$ 不能用近似值 d^2y/dx^2 来代替。他将解法作成級数形式，这个解可用来計算要求有任何精确度的撓度 δ[2]。

所有上述結果都是假定虎克定律能有效的情况下得出来的。圣維南再取一种

[1] 參看納維埃，"課程总結…"第 3 版，第 72 頁。

[2] 同上，第 73 頁。

材料不服从虎克定律的梁来研究它的弯曲[1]。他利用弯曲时梁的截面仍保持为平面的假設对这个問題作出很全面的研究，他不用应力与应变成直綫規律的关系而取定下述方程式为应力与应变間的关系式：

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= A\left[1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^{m}\right] \quad \text{拉} \\ \sigma_1 &= B\left[1-\left(1-\frac{y}{a_1}\right)^{m_1}\right] \quad \text{压} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

式中 A, B, a, a_1, m, m_1 均为常数而 y 是某一点去中性軸的距离的絕对值。他将此式仅限于討論截面为 bh 的矩形梁的問題，自中性軸到最外层纖維的距离 y_1 及 y_2 可由下面两式求出

$$\left.\begin{aligned} & y_1+y_2=h, \\ & \int_0^{y_1}\sigma\,dy=\int_0^{y_2}\sigma_1 dy \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

得出中性軸的位置以后，他用(a)式便能算出內力的力矩。

圣維南考察了 $y_1=a$（即 $A=\sigma_{\max}$）的特殊情况。他进一步假定(a)式所表示的两条曲綫在 $y=0$ 处有一根公切綫，因此当应力很小时材料的抗拉模量和抗压模量是相同的。

另外，如果此两曲綫(a)相等（即 $m=m_1$, $a=a_1$, $A=B$），圣維南发覚內力矩可按 $M=\alpha bh^2\sigma_{\max}/6$ 求得，其中 α 为一因数，其値視 m 量的大小而定。这个因数的値列如下表：

m	1	2	3	4	5	6	7	8
α	1	5/4	27/20	7/5	10/7	81/56	35/24	22/15=1.467

从表中可以看出当 m 增大时，α 也随着增大，并且当拉应力和压应力为均匀分布时它将接近于 3/2 的数値。

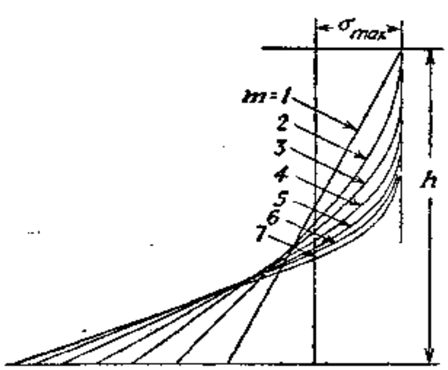


图 87

当 $m_1=1$，材料受压时服从虎克定律。相应于各种 m 值的应力分布如图 87 所示。决定中性軸位置所用的 y_1/y_2 的比值、最大压应力对最大拉应力的比值以及在

$$M=\frac{\alpha\sigma_{\max}bh^2}{6}$$

式中因数 α 的値如下表所示：

[1] 參看納維埃，"課程总結…"第 3 版，第 175 頁。

m	1	2	3	4	5	6	7	∞
$\|\sigma_{\min}\|/\sigma_{\max}$	1	1.633	2.121	2.530	2.887	3.207	3.500	∞
y_1/y_2	1	1.225	1.414	1.581	1.732	1.871	2.000	∞
α	1	1.418	1.654	1.810	1.922	2.007	2.074	3

当 $m=6$，M 値約为 $M=\sigma_{\max}bh^2/3$，它与馬里沃特的理論相符(参看第 5 节)，同时也与霍芝肯逊用实驗方法从矩形鑄鉄梁得出的 $Mult$ 的値相符合。当 $m=\infty$，我們得出加利略的理論，卽拉应力均布于截面上，而压应力給出一合力，該力与梁的凹方表面相切。这种对材料不服从虎克定律的矩形梁弯曲的分析能用来計算非矩形截面梁的极限弯矩。例如，如果用矩形鑄鉄梁作出的实驗証明了当取定 $m=6$ 及 $m_1=1$ 来計算，能得出 $Mult$ 的精确値时，我們便可用这些値来計算其他截面形状的 $Mult$，其手續和对待矩形梁的完全相同。

在梁的純弯曲的初步討論中(参看图 82)，圣維南用公式表出他的原理，这个原理現在已冠上他的名字称为圣維南原理。他說明只有当作用于两端的外力分布在端部截面上的情况与它們在中央各截面上的分布情况相同时，所发現的应力分布才严格与解法相符。可是(他說)[1] 对于在两端处任何其他分布力所得的解，那只有作用力的合力及合力偶一直保持不变时才是够精确的。他講到一些用橡皮杆做出来的实驗，并且說这些試驗証明了当一組自相平衡的力系分布在柱体表面的某一小部分上时，那只有当这些力非常接近时才能产生显著的变形。图 88 为圣維南的例題之一。在橡皮杆上施以两个相等而反向的力，只在端部产生局部变形，其余部分实际上不受影响。圣維南原理經常为工程师們用来分析結构中的应力。这个概念将再一次在講到圣維南对棱柱杆的扭轉和弯曲的研究时(参看第 51 节)加以討論。


图 88

这位法国彈性力学家又研究过曲杆的弯曲，并且在納維埃公式中(参見第 18 节)另外补充了代表因杆件軸綫拉长而产生的变形和代表因剪力而产生的变形这两个項，例如，他討論了一个在重力作用下挂成鉛直面的圓环的变形。他也討論了另一种圓环的变形，該圓环系垂直地擱置于水平面上，环頂加有載荷。

[1] 参看納維埃，"課程总結第 3 版"，第 40 頁。

圣維南在叙述有双重曲率的杆件的变形时，他指出单单說明中心綫的形状是不够的，因为当中心綫保持不偏移时，仍然能够产生变形和应力。假想(他說)有一根具有双重曲率的彈性圓形金属絲，被擱置在和圓絲形状相同且截面也相同的槽中。此圓絲能够在槽中轉动。由于轉动之故，較长的纖維会縮短而較短的纖維会伸长，但中心綫的形状仍保持不变。由此可知絲中的弯曲应力和扭轉应力不能完全由中心綫的变形来說明，而应該用截面对着絲的中心綫轉动的扭轉角来表明。圣維南不独注意了这个問題的一般討論，而且也將他的理論用到特殊問題上。他对具有圓形中心軸綫的杆件在承受垂直于軸綫所在平面的力作用时得出一个解法(图 89)，同时也給螺旋彈簧当有力在兩端沿螺旋軸方向作用时的伸长导出一个方程式[1]。

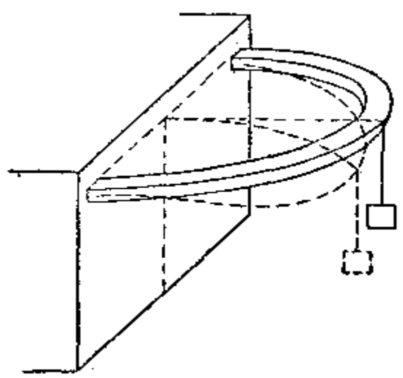


图 89

在确定結构物的容許应力以前，圣維南总是作这样的假定，即当分子間因变形增加的距离超过任一旣定材料所特有的某一定値时，材料便达到彈性极限。由此可知，他的計算結构物的安全尺寸的公式是考虑最大应变而推导出来的。例如，他根据最大应变建立了一个公式来概括軸杆的弯曲和扭轉的联合作用；这个公式自从发表以来便一直为工程师們所采用。

圣維南是第一个証明純剪切是由在一个方向上受拉和垂直于拉力方向的另一方向受相等的压力所产生的。取泊松比等于 1/4，他断定剪切的工作应力必須等于簡单拉伸的工作应力的 8/10。

33. 儒拉夫斯基对梁內剪应力的分析

庫侖注意到悬臂梁的剪应力并說过只在短梁內它們才是重要的。湯姆士·楊在他的“自然科学教程”(Lectures on Natural Philosophy)[2]中指出过从抵抗剪切的能力上可以区别固体和液体。維卡特(参看第 19 节)說过有許多地方这种抗力是头等重要的而且批評了梁的弯曲理論中沒有考虑剪应力的缺点。納維埃著作的第一版(1826)沒有包含这方面的材料，但在第二版(1833)中却有一节讲到短梁的弯曲。其中，給分布在一根悬臂梁的固定端上的剪应力取定一个平均值，并作出了將

[1] 这些結果在圣維南早期研究报告中給出，这些研究报告經过搜集和复印列入标題为“固体抗力的研究报告結合着两篇有关双重曲率杆件撓曲的笔記”(Mémoires sur la Résistance des Solides suivis de deux notes sur la flexion des pièces à double courbure)，1844 巴黎。

[2] 見“自然科学教程”卷 1，135 頁。

剪应力和纵向弯曲应力合在一起来求算的一个不恰当的方法。梁内剪应力問題的精确解是由圣維南在他的著名論文"关于撓曲的研究报告" (Mémoire sur la flexion)[1] 中提出来的。不过它只包括几种最簡单的截面形状，因此，对于一些較复杂的情况，工程师們仍須采用(直到現在)儒拉夫斯基(Д. И. Журавский, 1821～1891)[2]所提出的近似的基本解法。

儒拉夫斯基在 1842 年由圣彼得堡交通工程学院毕业。我們还記得該校是由法国工程师帮助建立的(参看第 28 节)。但当儒拉夫斯基在該校讀书时(1838～1842)，該校已經不再有法国教授，完全由俄国人自己担任講授。教数学的是奥斯特洛格拉德斯基(M. B. Остроградский)教授。他是一位有名的数学家又是一位杰出的教授[3]。在他的講授中，他常常超出教学大綱多講一些，无疑地使儒拉夫斯基有机会得到丰富的数学知識。儒拉夫斯基还在庫普佛(A. T. Kupffer)(参看第 47 节)指导下学过材料的力学性能。

儒拉夫斯基毕业以后，他的事績是和发展俄国鉄道建筑密切結合的。俄国第一条鉄路在1838年建成。該路包括从圣彼得堡到佐士可齐塞罗(Зорсколе Село)以及从圣彼得堡到彼得霍夫(Петерхов)間的两条短短的綫路。1842 年，从圣彼得堡到莫斯科的鉄路开始兴建，儒拉夫斯基剛毕业就被分配到这項重要的工程里。他的才能不久就被人贊許，1844 年他負責設計并建造这条路綫上一个最重要的构筑物，即横跨維列比亚河上的大桥(9 跨，每跨长 180 呎，距水面高度为 170 呎)。建造此桥时，儒拉夫斯基常采用高度很大的木梁，也采用木組合梁。这种材料順紋的抗剪能力是非常薄弱的，而儒拉夫斯基正确地断定在这类梁内剪应力非常重要，万不能将它忽略不計。当时已出版的一些书刊中，都沒有关于計算这种应力的資料，因此儒拉夫斯基只能凭自己的智慧来解决这个問題。

他首先研究矩形截面悬臂梁在自由端加以載荷的那种最簡单情况(图 90)并取定中性面为 OO，儒拉夫斯基断定在固定端的 mn 截面上分布的法向应力有在 OO 面上产生剪切的趋向。此剪力 T 的大小为

---

[1] 見路佛里(J. Liouville)的著作，1856 年出版。

[2] 矩形梁的剪应力理論是儒拉夫斯基在設計圣彼得堡到莫斯科鉄路上的木桥时发展出来的(1844～1850)。此項理論連同关于設計豪(Howe)式桥梁的其他研究成果在1854年一并向俄国科学院提出(参看第 42 节)。由于这項成就，他获得該学院的給米多夫(Демидов)奖金。

[3] 奥斯特洛拉格德斯基(1801～1861)出生于苏联南方波托华(Полтова)附近的一个村子里。从察科夫(Чарков)大学毕业以后，再到巴黎深造，成为柯西，泊松和富勒的高足。他在变分学上的成就极为閒名。在塔德亨特的"变分学史"(History of the Calculus of Variations)中，我們可看到有整个一章专門談到奥斯特洛格拉德斯基的成就。他也致力于彈性理論，他对彈性体波动的研究也經塔德亨特和皮尔逊合著的"彈性力学史"卷 I 中討論过。

$$T=\frac{\sigma_{max}bh}{4}=\frac{3Ql}{2h}$$

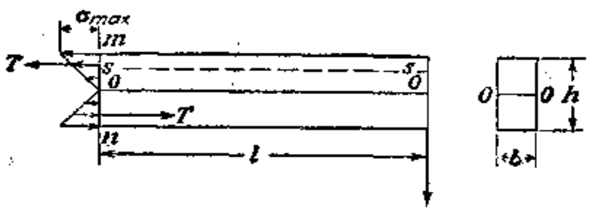


图 90

而均匀分布在中性面 OO 上的相应剪应力为

$$\tau=\frac{Q}{lb}=\frac{3}{2}\frac{Q}{bh}$$

作著用同样方法算出了作用于与 OO 面相平行的任一平面 SS 上的剪应力。当載荷沿悬臂梁的长度均匀分布时，儒拉夫斯基指出剪应力不再沿中性軸平面均匀分布而是随离自由端的距离而比例增加的。

儒拉夫斯基用上面求解实体梁的解，继而求解如图 91 所示的組合木梁，他指出怎样来計算作用在两端每一个独立鍵上的力。他更进一步說明如果鍵和梁的材料力学性能均为已知，就能算出鍵的必需尺寸来。这位俄国工程师又用此法来分析組合鉄梁，并且指出如果已知每个鉚釘的容許剪应力时怎样来計算鉚釘間的适当距离。他也分析了箱形截面梁(图 92)，根据它的强度他討論了康卫和不列顚尼亚箱形管桥中的鉚釘分布(参看第 37 节)。他指出所用的鉚釘个数可以大大地减少。他是从下面的事例来肯定的，即当我們从梁端向跨度中央行进时，作用在箱形管上的横向力逐漸减小，因此中央处的鉚釘間距可以增大而不致影响箱形管的强度。

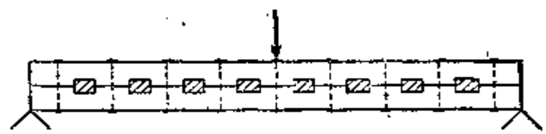


图 91

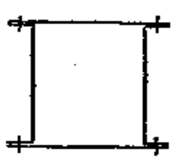


图 92

儒拉夫斯基关于梁的剪应力分析的該部分著作早已譯成法文[1]。圣維南称贊过儒拉夫斯基的近似法，并在他主編的納維埃著作第三版第 390 頁上的注解中将此法用在高寬比很大的矩形梁中。这个方法并被編入材料力学的許多教本中[2]。自从介紹了它，工程师們都广泛地采用并經判明在研究薄壁构件中它特别有用，因为在薄壁构件中剪应力占有头等的重要性，而这类問題的精确解在当时还沒有得出。

34. 連續梁

納維埃是第一个尽力于我們在分析連續梁中所遇到的超靜定問題的

[1] 見 Ann. ponts et chaussées, 卷 12, 328 頁, 1856 年。

[2] 例如, 見別南格 (Belanger) "固体弯曲平面与抗力理論" (Théorie de la Résistance et de la Flexion plane des solides), 1858, 巴黎; 2 版 1862。布類塞 (Bresse) 著 "应用力学教程" (Cours de Mécanique Appliquée) 2 版, 第一部分, 209 頁, 1866, 巴黎; 柯里格朋 (E. Collignon) 著 "应用結构力学教程" (Cours de Mécanique Appliquée aux Constructions), 2 版, 198 頁, 1877, 巴黎。

人[1]。在他所著"課程总結"中他考察了一根有三个支座的梁，并取其中一个支座的反力作为超静定量。当支座超过三个时，反力未知量的选擇就不大方便了，因为我們得出了和中間支座数量相同的方程式而每个方程式全含有未知量。在研究跨長相等而梁的整个长度上又負有均布載荷或每跨中央負有相等的集中載荷的个别情況时，显示这个問題是能够将它簡化的，而且每三个毗邻反力之間存在着綫性关系。利用此种关系，对于任何跨数的反力都不难一一求出[2]。

克萊佩朗对連續梁的分析进一步有所发展。他用公式計算支座处对撓度曲綫所作切綫与原来梁軸水平直綫的交角。在梁长为 l 受均布載荷的簡支梁并在两端各作用一力矩 M 及 M' 的情况下，这些角度将为

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{ql^3}{24EI}+\frac{1}{6EI}(2M+M')\\ \alpha'&=-\frac{ql^3}{24EI}-\frac{1}{6EI}(M+2M')\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

对于跨数为 n 的連續梁，他写出 $2n$ 个这种形式的方程，这些方程里包含有 $4n$ 个未知量(α, α', M, M')。現在观察到在每一中間支座处相邻两跨有一公共切綫及一公共弯矩值，他得出 $(2n-2)$ 个补充方程式。假定梁两端的弯矩等于零，他发現方程式的个数恰和未知量的个数相等，因之所有各未知量都可以求得。这个分析方法是在重建巴黎附近的达斯尼尔斯 (d'Asnières) 桥时发展出来的 (1849 年)，它已經使用了好几年，才由克萊佩朗写成論文于 1857 年向科学院提出[3]。在早期的一些結构理論书中也发現过这个方法[4]。

現在形式的三弯矩方程 (three-moments equation) 是由伯脫特 (Bertot) 工程师最先发表的[5]。很容易看出，伯脫特系将克萊佩朗的(a)式变換为三弯矩方程那样一种較簡单的形式。我們同意布累塞(Bresse)教授的說法，他說："据我看来，克萊佩朗是眞正发現这个観念的第一个人"[6]。因此，三弯矩方程式虽然在伯脫特的論文中最先出現，通常将其称为克萊佩朗方程是很公正的。在这項工作上，伯脫特参照了克萊佩朗的概念，但他并沒有导出这个理論，仅給出这类方程組的解法。当

[1] 見 Bull. Soc. Philomath. 1825 年巴黎出版。

[2] 这个方法是雷布蔣恩(G. Rebhann)发展出来的。見他的"鋼木結构理論"(Theorie der Holz und Eisen-Constructionen) 1856，維也納。在这本书中第一次出現了弯矩图并且用于簡支梁和連續梁上。

[3] 見 Comp. rend. 卷 45，1076 頁。

[4] 例如，这些方程式出現在木里諾斯和普朗尼尔的著作"鋼桥結构的理論与实际的論著"中(Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques)，1857，巴黎。并参看萊色尔 (F. Laissle)与修普勒 (A. Schübler) 的"桥梁結构" (Der Bau der Brückenträger)，1857 斯图加特。

[5] 見"法国土木工程学会研究报告" (Mém. Soc. Ing. civils. France) 卷 8，278，1855。

[6] 見 Ann. Ponts et chaussées，卷 20，405，1860。

一連續梁(跨数为 $n-1$)的两端为簡支时，他令 $M_0=M_n=0$，因此对于有許多单位长度的均布載荷 w 接連加載在每跨上的情況得出方程組为：

$$\left.\begin{aligned} 2(l_1+l_2)M_1+l_2M_2&=\frac{1}{4}(w_1l_1^3+w_2l_2^3)\\ l_2M_1+2(l_2+l_3)M_2+l_3M_3&=\frac{1}{4}(w_2l_2^3+w_3l_3^3)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

取 M_1 的某一值(例如 a_1)，他由(b)式中的第一式算出 M_2 的値。将它代入第二式，得出 M_3，如法进行，最后他从末尾一个方程式中求出最后弯矩 M_n 的某值 b_1。正确的結果要求 M_n 必須等于零。再取 M_1 的另一值(例如 a_2)重行計算，得出 M_n 的另一値 b_2，因为 a 值与 b 值之間存在着綫性关系，就可得出相应于 a_1 及 a_2 的 b_1 及 b_2 值，他就能給出 b 等于零时的 a 值。該 a 値卽 M_1 的正确值。由此卽可求出其余弯矩。这就是伯脫特所提供的求解三弯矩方程組的方法。

克莱佩朗在他的論文中(前已述及)列出过和伯脫特同样形式的三弯矩方程式，但他并沒有参考伯脫特的著作。因此克莱佩朗叙述了他自己解这些方程式的方法。最后，他給出一些关于不列顛尼亚箱形管桥的架設在五个支座上的連續梁的重要資料。他說出由木里諾斯(L. Molinos)和普朗尼尔(C. Pronnier)算出来的最大应力为下列数值：(1)在第一跨中央，4270 磅/吋²；(2)在第一墩上，12800 磅/吋²；(3)在第二跨中央，7820 磅/吋²；(4)在中央墩上，12200 磅/吋²。由此他作出結論“可以将鋼鈑的厚度改变一下来改进这一个偉大的結构物，因为在支座处它似乎太弱了”。以后我們可以看到(参看第 37 节)，在选擇該桥的截面尺寸时，系采用試驗簡支模型所得的实驗資料而支座上的弯矩系用特殊的构造方法使之与各跨中央的弯矩相平衡。

克莱佩朗和伯脫特經常将連續梁的各支座高度取成在同一水平面上。如果不能满足这个条件，支座处将产生某些附加力矩。这些是由德国工程师喀普斯克(Köpcke)[1]，雪夫勒(H. Scheffler)[2]和格拉斯霍夫[3]研究出来的。带有一些补充項的用以計算垂直位置的支座的三弯矩方程式，最先在沃脫·摩尔(Otto Mohr)的論文中出现[4]。布累塞和尹克勒完成了更进一步的連續梁理論研究，以下两节中卽

[1] 見 1856 年在汉諾威(Hannover)刊出的建筑工程杂志(Z. Architek. u. Ing. Ver.)

[2] 見所著“拱、擋土墙与鋼桥的理論”(Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken)1857 年于布倫斯威克(Brunswick)出版。

[3] 見 1859 年德国工程杂志(Z. Ver. deut. Ing.)

[4] 見 1860 年在汉諾威刊出的建筑工程杂志。

将討論及此。

35. 布累塞(1822～1883)

雅斯奎士·安多尼·査理士·布累塞 (Jacques Antoine Charles Bresse) 出生于維也納(意錫尔省)。1843 年从法国工业学院毕业后,随即进入桥梁道路学院受工程教育。从这所学院毕业后不久,他又回到母校担任应用力学的讲师(1848 年)。他一直襄助别南格教授到 1853 年才継承别南格的职位。他終身在桥梁道路学院讲授应用力学,对材料力学和結构理論这两方面享有盛名。1854 年,布累塞出版了"曲杆弯曲与抗力的解析研究" (Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbés) 一书,該书中讲到曲杆以及結构理論对曲杆的应用。1859 年他的材料力学和水力学教程的头两卷出版了。教程的第三卷系連續梁的全面研究,在 1865 年出版。1874 年由于应用力学方面的成就,法国科学院发給他彭西列特奖金,并且在 1880 年被选为法国科学院的会員。

布累塞在工程科学上主要的成就是将他的曲杆理論应用在拱的設計上。在他的书中第一章里,他討論到棱柱杆的偏心受压。一根矩形杆在对称平面受載的独特情况已經由湯姆士·楊討論过(参看第 22 节)了。布累塞却用一般公式处理了这个問題,并指出利用杆件截面的慣性中心椭圓(图 93),可对任一載荷位置的中性軸方向很容易地将其确定。如果力的作用点 O 沿 cm 綫移动,中性軸会經常与在 n 点处所作椭圓的切綫 pq 保持平行,此 n 点为椭圆与 cm 綫的交点。如果 O 点移离形心,中性軸将接近形心 C 点,当 OC 的距离变为无穷大时,即处于純弯曲的情况时,中性軸将通过 C 点。若 a 及 b 为 O 点的两坐标,中性軸的方程式为

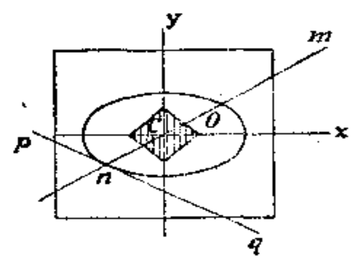


图 93

$$\frac{ax}{r_y^2}+\frac{by}{r_x^2}+1=0 \tag{a}$$

式中 r_x 及 r_y 表示截面对主軸 x 及 y 的慣性半徑。有了这个方程式,便可以决定出中性軸不和杆件的截面相交时 O 点必須留置于截面内的那一部分,因而所有分布在截面上的应力都将具有相同的符号。从这一点出发,断面核心 (core of the cross-section) 的概念好象是由布累塞提出来的[1]。

[1] 塔德亨特在他的"历史"中提到他藏有桥梁道路学院 (1842～1843) 一些石印的讲义,其中包括偏心受压的討論,与布累塞的完全相似。他認为这分讲义是布累塞的,不过那时布累塞还是工业学院的学生,不可能是这分讲义的作者。

在研究一根曲杆在其曲率平面变形时，布累塞不仅考虑到曲率的改变（以前已經由納維埃研究过，参看第 18 节），而且也考虑到杆件軸綫的伸长，为了解释布累塞計算曲杆变形的方法，我們可假設杆件的截面 a 是固定的（图 94），并用 N 及 M 分别表示軸向拉力及杆件上任一截面处的弯矩；于是长度为 ds 的微分元素 mn 的伸长将为 Nds/AE 而截面 n 对截面 m 的旋轉为 Mds/EI。由于这一旋轉，杆件軸綫上任一点 C 将描繪出一段微分弧 $\overline{cc_1}$，它等于 $\overline{nc}\cdot Mds/EI$。觀察到微分三角形 cc_1d 与三角形 cen 相似，我們发覺 c 点因杆件軸綫上一元素 mn 的曲率改变而形成的水平位移 $\overline{cd}$ 将为

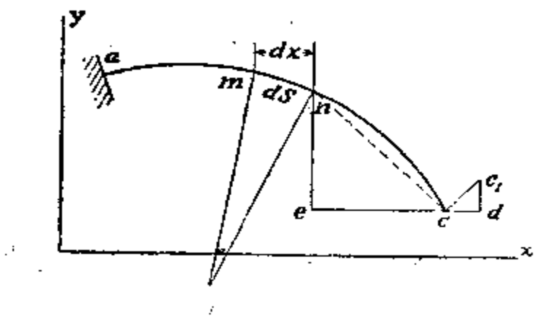


图 94

$$\overline{cd}=\overline{cc_1}\frac{\overline{cd}}{\overline{cc_1}}=\overline{cc_1}\frac{\overline{ne}}{\overline{nc}}=\frac{Mds\cdot\overline{ne}}{EI}=\frac{Mds}{EI}(y_n-y_c) \tag{b}$$

c 点因元素 mn 的伸长而形成的水平位移将等于 Ndx/AE。欲求 c 点的水平总位移 μ，我們只要从 a 点起到 c 点止把杆件上各元素的变形結果总加起来就是。于是得出

$$u=\int_a^c\frac{Ndx}{AE}+\int_a^c\frac{Mds}{EI}(y-y_c) \tag{c}$$

同法，我們可得出沿 y 軸方向的位移 v，

$$v=\int_a^c\frac{Ndy}{AE}+\int_a^c\frac{Mds}{EI}(x-x_c) \tag{d}$$

截面 c 的轉角 α 为

$$\alpha=\int_a^c\frac{Mds}{EI} \tag{e}$$

如果作用在杆上的外力为已知时，杆件任何截面 c 的位移分量 u 及 v 以及轉角 α 都能用 (c)～(e) 式将其算出。

这些方程式可用来計算超靜定量。例如，設有双鉸拱 abc（图 95），取水平反力 H 为超靜定量，根据 c 点的水平位移必須等于零这一假定，我們就能求出此量。应用 (c) 式[1]以分离力 H 的作用，并使

---

[1] 虽然截面 a 可能稍有旋轉，这个方程式仍可以在此处应用。因此，拱繞 a 鉸的任何微小轉动只能产生 c 点的垂直位移。

$$N=N_1-H\frac{dx}{ds}\qquad M=M_1-Hy$$

于是由(c)式得

$$\int_a^c\frac{N_1dx}{AE}-H\int_a^c\frac{dx^2}{AEds}+\int_a^c\frac{M_1ds}{EI}y-H\int_a^c\frac{y^2ds}{EI}=0,$$

$$H=\frac{\int_a^c\frac{N_1dx}{AE}+\int_a^c\frac{M_1y}{EI}ds}{\int_a^c\frac{dx^2}{AEds}+\int_a^c\frac{y^2ds}{EI}}\tag{f}$$

当拱为固定端时，我們即遇到含有三个超静定量的問題。如果我們知道对于固定端截面 c 而言，位移的两个分量 u 及 v 以及轉角 α 都必須等于零，则必需的三个方程式能由(c)(d)(e)各式得出。布累塞更指出要将由于温度改变的膨脹一起考虑进去也很容易，因为，如图 95 中所示的例子，我們只要在公式(f)中的分子内加入 stl 值即可，其中 s 为膨脹系数，t 为增高的温度，而 l 为拱的跨长。

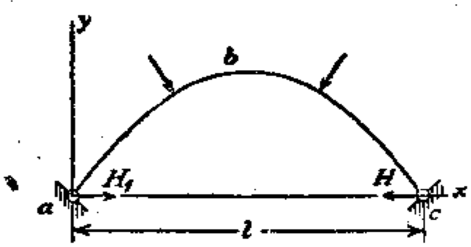


图 95

布累塞不独給出拱的一般解，而且也提出了对各种特殊载荷情况的詳細討論。这里他对迭加原理(principle of superposition)写出一段很重要的討論，并且証明对于服从虎克定律的微小变形，位移是外加载荷的綫性函数，并能由各个载荷所产生的位移将其累加而得。因此，对于垂直载荷，只要研究单个的垂直力的效应即可，然后用求和法得出整个垂直载荷系所产生的应力和撓度。对于对称拱来說，我們知道载荷 P 如从 a 点(图 96a)移到对称位置 a_1 点，其横推力不会改变，因此更可使計算大为簡化。也就是說，在計算超静定量 H 中，我們可考虑对称情况(图 96b)来代替如图 96a 的不对称(实际的)情况，将对称情况所得的推力除以 2 即得出 H。至于拱上作用着一个斜向力的情况也可用同样簡化方式来进行。

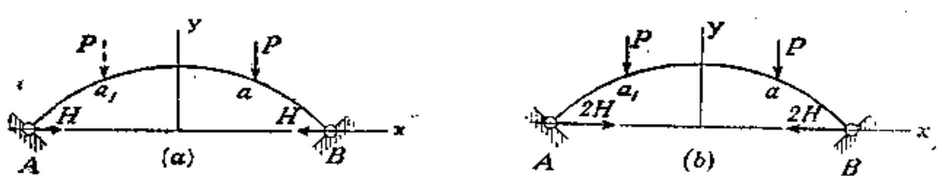


图 96

布累塞又将这些理論研究应用于等截面对称圓弧双鉸拱的特殊問題中。他将各种不同尺寸的这种类型的拱制成数值表，利用此表可很快地查出单一载荷下及

沿拱軸綫均布的載荷下或沿拱軸綫水平投影均布的載荷下的推力。为了便于計算因温度升高所引起的推力，也制成一表。所有这些精心制备的表到今天还具有一定的实用价值。

从以上对布累塞书內曲杆的討論中，我們看得出作者是怎样不满足于所得的某些理論結果，而希望使它便于为工程师所应用，因而，他才不嫌麻煩地算出这些表来。

布累塞的应用力学教程共有三卷[1]。其中只有第一卷及第三卷涉及材料力学問題。布累塞沒有把任何数理彈性理論的結果引伸到材料力学的基本理論里去。在討論杆件的所有各种变形情况时，都假定变形时截面仍为平面。在这一假定下，采用前述惯性中心椭圓（参看第 35 节）討論了偏心拉压。他指出了如果截面面积上材料的模量不相同时对这問題的处理方法。在扭轉理論中，他也采用了截面保持为平面的假設，布累塞为了想辯解这个假設，他說，在实际应用上軸杆的截面形式可为圓形或正多角形；这样，截面的畸变即可忽略不計。在弯曲理論中，用了儒拉夫斯基的剪应力分析。布累塞的书（前已述及）中对曲杆和拱有专章叙述。

該书在圓筒形鍋炉的应力分析上，討論过一个有关环內弯曲应力的主要問題，这些环具有很小的初椭圓率，又承受着均匀內压力。布累塞教授指出設 ε_0 为椭圓的初偏心率，当內压力 P 作用后其偏心率为

$$\varepsilon^2=\frac{\varepsilon_0^2}{1+(pd^3/2Eh^3)},$$

式中 h 为壁厚，而 d 为鍋炉直徑。当压力为外压力时，根据同一理論，可得

$$\varepsilon^2=\frac{\varepsilon_0^2}{1-(pd^3/2Eh^3)}$$

p 的临界值可由下述条件得到

$$1-\frac{pd^3}{2Eh^3}=0$$

或

$$p_{cr}=2E\frac{h^3}{d^3}$$

如上所述（参看第 31 节），这个結果是由格拉斯霍夫得出来的。

布累塞在他的教程中讲到棱柱杆的纵向和横向振动的問題。关于横向振动，他是第一个究討杆件元素的轉动惯性的人。他又研究了簡支梁在动載荷作用下的动力撓度。后一問題将在以后討論（参看第 40 节）。

---

[1] 布累塞著“应用力学教程”(Cours de mécanique appliquée)，1 版，1859；2 版，1866；3 版 1880。我們是根据第 2 版討論的。

上面說过，此教程的第三卷[1]包括連續梁的全面研究。在第一章中，討論了連續梁的一般問題。克萊佩朗和伯脫特对此問題的研討要求各跨須均等且載荷須沿梁的全长均匀分布，布累塞却打破了这个限制。他进一步容許支座高度不在同一水平面上得出一般形式的三弯矩方程式。布累塞將作用力分成两部分：(1)均布的靜載荷，例如梁的自重；以及(2)运动中的(活的)載荷，只在梁上逐段地作用着。在支座上由永久載荷产生的力矩可以用三弯矩方程式求解而得。至于动載荷，主要問題在于对梁的每一截面找出其最不利位置。布累塞着手这个問題时[2]，檢查了单个集中載荷作用的情况，幷找出在每一个未受載荷的跨度上有两个定点，当載荷是向右或向左运动时，它們都是反弯点。得出这些点以后，便能繪出对此单个集中載荷在任何位置下的弯矩图，因而能求出动載荷的最不利位置。我們看到布累塞在这个分析中是非常接近于影响綫的概念的[3]。然而，他沒有將它推导出来，同时他也沒有用图解法来选擇最不利的載荷分布。他宁愿采用解析的近似法制出各种不同跨数的梁的数值表，以簡化設計工程师的工作。

36. 尹克勒 (E. Winkler, 1835~1888)

尹克勒在 1835 年出生于靠近托高 (Torgau) 的薩克逊尼 (Saxony)。在托高中等学校念过书。父亲去世后，迫使他中途休学，在一个泥水匠那里当了一段时期的学徒。虽然如此，他还是克服了种种困难修完了中等学校的学业。后来他进入德累斯頓工业学院 (Dresden Polytechnicum) 学习建筑工程。在这所工业学校里，他在工程問題的理論分析上显过才能。毕业后不久，他发表了曲杆理論方面的一篇重要論文[4]。1860 年他开始在德累斯頓工业学院担任材料力学助教，而在 1863 年充任該校桥梁工程学講师。1860 年由于他的擋土墙理論，获得了莱比錫大学的博士学位。1862 年出版了他在連續梁方面的重要著作 (參看上节)。他不独是一个卓越的工程师，而且是一个优秀的教师，1865 年他受聘为布拉格工业学院的桥梁及鉄道工程教授。在該校他継續进行科学研究幷在 1867 年出版了他在材料力学方面的书籍[5]，书中編入了他对許多重要的工程問題自己作出的解法。

---

[1] 見"应用力学教程" (Cours de mécanique appliquée)，第三卷，1865，巴黎。

[2] 尹克勒是第一个研究这个問題的人。見他的論文，刊在土木工程，卷 8，135~182 頁，1862。

[3] 影响綫的方法是由尹克勒介紹出来的，見 Mitte. Architek. u. Ing. Ver. 6 頁，1868，波門 (Böhmen) 以及摩尔 (O. Mohr) 的論文，刊在 Z. Architek. u. Ing. Ver. 19 頁，1868 汉諾威。

[4] 尹克勒的論文，"曲面体，特别是环的变形与强度" (Formänderung und Festigkeit gekrümmter körper, insbesondere der Ringe)，土木工程，卷 4，232~246 頁，1858。

[5] 尹克勒著"彈性理論与强度理論" (Die Lehre vonder Elasticität und Festigkeit)，1867 年于布拉格出版。

1868 年他被聘为維也納工业学院的教授，在該校他开始写作鉄道与桥梁工程方面的书籍。这些书籍到后来在这些工程科学上占有重要地位，不仅在德、奥两国而且远及国外。

1877 年，柏林开始改組建筑学院，目的在于将它提高到其他德国工业大学的水平。尹克勒被聘去协助改組并主持結构理論和桥梁工程两科。在这里他从事于实驗性的应力分析。他用橡皮模型来研究鉚釘接合的应力，研究砂子对擋土墻的压力分布以及风压力对各种格构桁架的作用，还做了一些关于拱的应力分析的研究。对于最后这項工作，他在学校的地窖中建造了一座試驗拱。

尹克勒在材料力学方面的主要貢献是他的曲杆弯曲理論。納維埃和布累塞在討論这种杆件时，系用从棱柱杆情况下导出的公式来計算撓度和应力的。如果杆件截面尺寸比起軸綫的曲率半徑来很小时，这种分析方法才可适用。可是上述条件对曲鈎、环、鏈圈等，就不适合，因此根据直杆导出的公式用起来就不很可靠。为了找到更合适的理論，尹克勒保留在弯曲时各截面仍为平面的假設，但認为由于原先弯曲之故，两相邻截面間的縱向纖維其長度并不相等，因此其中应力不再与去中性軸的距离成正比。并且此軸也不会通过截面的形心。

討論曲杆在其初曲率的平面內弯曲时，我們可用 ds 表示軸綫上一个元素的長度，而令 $d\phi$ 表示截面間的原有角度。設 Δds 表示伸長量，$\varepsilon_0=\Delta ds/ds$ 为軸綫的縱向应变，而 $\Delta d\phi$ 为在弯曲时两相邻截面間的角度改变。于是在与截面形心軸相距 v 距离处的某一纖維的伸長量将为

$$\Delta ds_v=\Delta ds+v\Delta d\phi$$

而其縱向应变为

$$\varepsilon_v=\frac{\Delta ds+v\Delta d\phi}{ds+vd\phi}=\left(\varepsilon_0+\frac{v\Delta d\phi}{ds}\right)\frac{r}{r+v}$$

式中 r 为杆件軸綫的曲率半徑。假定在弯曲时各縱向纖維之間无挤压作用，則得出应力为

$$\sigma=E\varepsilon_v=E\left(\varepsilon_0+\frac{v\Delta d\phi}{ds}\right)\frac{r}{r+v} \tag{a}$$

并得出表示軸向力 N 及弯矩 M 的式子如下：

$$N=\int_A\sigma dA=Er\varepsilon_0\int_A\frac{dA}{r+v}+Er\frac{\Delta d\phi}{ds}\int_A\frac{vdA}{r+v} \tag{b}$$

$$M=\int_A\sigma vdA=Er\varepsilon_0\int_A\frac{vdA}{r+v}+Er\frac{\Delta d\phi}{ds}\int_A\frac{v^2dA}{r+v} \tag{c}$$

取用

$$r\int_A \frac{v^2 dA}{r+v}=\theta \tag{d}$$

得
$$r\int_A \frac{dA}{r+v}=\int_A dA-\frac{1}{r}\int_A v dA+\frac{1}{r}\int_A \frac{v^2 dA}{r+v}=A+\frac{1}{r^2}\theta$$

$$r\int_A \frac{v dA}{r+v}=\int_A v dA-\int_A \frac{v^2 dA}{r+v}=-\frac{1}{r}\theta$$

从这些关系中，尹克勒由(b)，(c)及(a)式得出

$$\varepsilon_0=\frac{N}{AE}+\frac{M}{AEr} \tag{e}$$

$$\frac{\Delta d\phi}{ds}=\frac{M}{E\theta}+\frac{M}{Aer^2}+\frac{N}{AEr} \tag{f}$$

$$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M}{Ar}+\frac{Mrv}{\theta(r+v)} \tag{g}$$

在任一靜定情况下，就能很快求出一指定截面处的 N 和 M。由一已知截面形状的(d)式可算出 θ 值，而由(g)式求得应力。在超靜定情况下，(e)及(f)式可以用来計算超靜定量。

尹克勒用这个一般理論来分析曲鈎、各种不同截面的环和鏈圈的应力。他指出当曲杆的截面尺寸比起半徑 r 不是很小时，直梁的基本弯曲公式便失去了它的价值而必須采用新的理論。

在論述对軸綫对称变形的另一节中[1]，尹克勒討論了受均匀内压力及外压力的圓管，并导出了拉梅公式。在选擇管壁的应有厚度时，尹克勒采用最大应变理論得出了与拉梅公式有些不同的一个新公式。尹克勒又考察管端的条件討論了圓头管端和平头管端。他对这两种情况都給出应力方程式并指出圓管的两端都將遭到一些局部弯曲。关于这种弯曲，他对以前由雪夫勒所发展的理論(參看第 31 节)作了一些修正。最后，尹克勒导出轉动圓盘的应力关系并用来分析飞輪的应力。

尹克勒关于連續梁方面的論文是在 1862 年发表的[2]。那时他正从事于桥梁工程的教学工作。大部分論文是关于最不利載荷位置的問題，其中还包括四跨梁的数值表[3]。

在 1867 年发行的尹克勒的材料力学书籍中，他不止介紹这門学科的基本部分，而且給出彈性理論的一般方程以及它們在梁的弯曲理論中的应用。他將常用

[1] 見土木工程，卷 6，325～362，427～462，1860。

[2] 同上，卷 8，135～182，1862。

[3] 关于連續梁理論的进一步发展可参看尹克勒所著"桥梁理論"(Theorie der Brücken)，1872，維也納。

的近似解和由彈性理論所得的結果相比較，指出这些基本方程对于实际应用是够精确的。在推导結构物安全尺寸的公式中，尹克勒追随着圣維南，經常采用最大应变理論作为他的准則。在梁的弯曲那一章包含有連續梁的非常全面的討論。对于軸向受压杆的側向压屈，作者給出不同截面杆件的一些解来。对"梁式柱"的問題（軸向力和横向力联合作用）討論得很詳細，他导出一些有效的公式来計算最大撓度和最大弯矩。梁在彈性基础上的弯曲是第一次討論到的，并指出这个理論对鉄路軌道应力分析的适用性。关于曲杆的那一章包含了一般理論（前已述及），以及它在拱的分析上的应用。关于双鉸拱，尹克勒叙述了布累塞处理过的一些情况，不过在无鉸拱的情况下，他却列入了許多新的成果。书中他对各种載荷情况下的等截面圓形及拋物綫形拱算出許多表来，以便于进行应力分析。

尹克勒的书是用比較簡单的笔調写出的，因此不容易看懂。然而它可能是德文写的材料力学中最完备的一部书，直到現在还有一些工程师用到它。在这門学科中以后出的书，我們将看到有这么一个趋向，即从数理彈性理論中将材料力学分出来，并且用一种較尹克勒所用过的更淺显的形式来表达。

第 七 章

鉄道工程发展时期的材料力学

37. 箱形管桥

第一条鉄道的兴建对于材料力学的发展影响最大，因为它出現許多必須解决的新問題，特别在桥梁工程中。当时建造桥梁所用的材料是石料和鑄鉄。大家知道，鑄鉄在承受压力时(如在拱桥中)是很适用的，可是鑄鉄鈑梁就不可靠了，因为这种金属在重的动载荷产生交变应力的作用下会因疲劳而損坏。試用鉄制受拉构件来加强鑄鉄鈑梁也未得到成功。因此必須采用一种更为合用的材料。1840 年以后，用鍛鉄建造桥梁已經很快地得到人們的贊許。那时在短跨度桥梁上使用工字形截面的鉄鈑梁已很普遍，可是对于要承受鉄道列車的較大的結构物就需要設計别的构造形式了。长跨度悬索桥是很早就有的，不过它在重的动載荷作用下柔性很大，不能适合于鉄道行車。

更为刚性的結构物成为迫切需要解决的問題，英国在建筑倫敦—彻斯特(Chester)—荷里海德(Holyhead)鉄路时曾試用过箱形管桥。在兴建鉄路过程中，

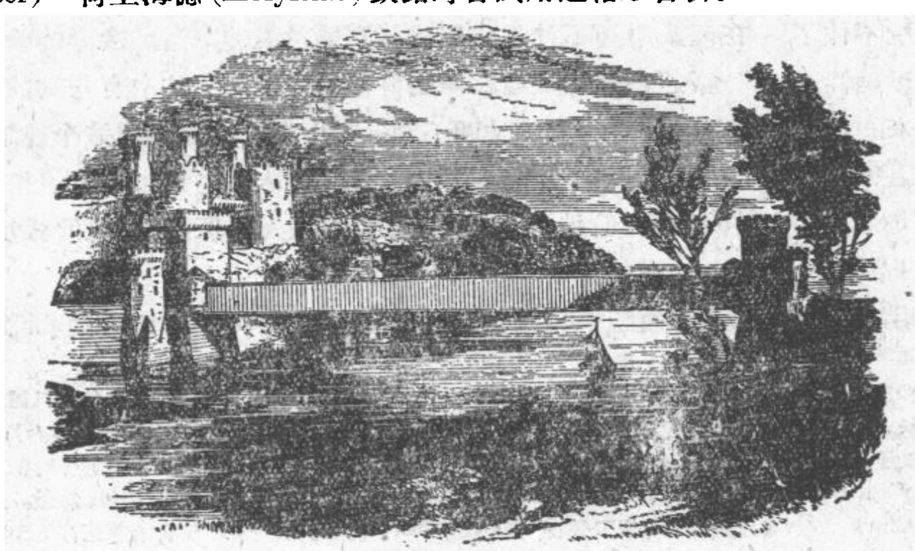


图 97 康卫管桥

工程师遇到了一个极为困难的問題，乃是如何跨过康卫河(图 97)以及門莱(Menai)海峽。此处要求桥梁不得妨碍船只航行，而最初計划的拱桥又不能容納船只通过。总工程师罗伯特·斯蒂芬逊(Robert Stephenson)[1]建議将桥造成大管子的形式，使能通过列車。那时費儿班恩(1845 年)(参看第 30 节)在他的造船工作中对于鍛鉄鈑結构已有很多經驗，因此斯蒂芬逊特請他来一起研究这个新奇的概念并帮助建造这些巨大的桥梁(最长跨徑达 460 呎)。斯蒂芬逊原来的見解并沒有全部被采用，因为他所說的管子是要用鏈条来支承的。直到費儿班恩作了初步試驗后，才决定不用鏈条，而将管子設計得有足够强度来支承最重的列車。費儿班恩用各种截面的管形鉄梁[2]所作的第一次实驗証明了它們的破坏不是象平常鑄鉄一样在凸方破坏，而是在材料受压的凹方破坏的，这就清楚地看出了这种破坏的发生是由于較薄的管壁造成不稳定而压屈了。費儿班恩說："在实驗中呈現出一些奇怪而有趣的現象——它們有許多是和我們預先想到的材料力学观念相矛盾的。总的說来，和已往研究所得的任何事物完全不同。我們一直观察到几乎在每次实驗中管子都呈現出頂边抵抗力薄弱的象迹，也就是抵抗其压碎趋向的力量不够所致"。这里我們第一次接触到了用薄壁构件作出因不稳定而引起破坏的实驗。

費儿班恩邀請他的有丰富理論知識的朋友霍芝肯逊(参看第 30 节)来檢查这些試驗結果。霍芝肯逊发現采用通常的弯曲应力公式来計算管形梁的承載量是不能充分明确材料的极限强度的。他說："我清楚地看到，由已被公認的原理推导出来的薄壁强度的任何結果，只是个近似值；因为这类管子常常經由頂部或受压边发生皺褶，在受拉力的那些部分継續应变到它們能經受的最大值以前，这些受压部分早就抵抗不住了。在理論中还不曾肯定出这样严重的缺点，当然会影响管子强度計算的正确性……"。霍芝肯逊建議应該做出許多基本試驗。其中有些試驗是他自己做出来的，这将在以后討論。由于时間不够，費儿班恩不能够照这个建議去做，他只得用各种形状的管形梁做出弯曲試驗，根据这些結果勉强决定了該桥所必需的截面尺寸。从实驗研究中，他选定了矩形截面，而且为了保証拉、压的强度相等，在梁的上部使用了較多的材料。

最后决定用一个大的模型来作試驗，这个模型跨长 75 呎，其截面如图 98 所

[1] 罗伯特·斯蒂芬逊是"鉄道之父"乔治·斯蒂芬逊的儿子，以鉄道工程师著名。他是机械工程学会第二任会长，并在 1849 年被选为皇家学会的会員。1856 和 1857 两年中，他兼任土木工程学会会长。

[2] 关于这些实驗和最后設計的全面叙述，見費儿班恩所写"建造布列顚尼亚及康卫管桥記实"(An Account of the Construction of the Britannia and Conway Tubular Bridges)，1849，倫敦。并参看克拉克(E. Clark)著"布列顚尼亚与康卫管桥"两卷集，1850，倫敦。后一著作包含有霍芝肯逊和波尔(W. Pole)研究連續梁的实驗結果(霍芝肯逊的实驗結果也刊在委員会的报告中)。

示。为了加强上面部分，采用了分格式結构，并且将頂部的截面积与底部的截面积两者比例取为 5:3，目的在根据实驗指示認为必須最后提高受拉边的强度。实驗証明分格式結构对于梁的稳定性很有帮助，最先破坏是在底边发生的。于是分次将底边加强，发現每加一层鈑就显出更高的抵抗力。当受压边面积对受拉边面积之比等于 12:10 时，拉压强度可以达到相等，因此分格式結构大大地减低了材料抗拉与抗压强度間的相差程度。这些实驗又指出管子的两旁也不够稳定，为了避免側鈑产生波浪形，还加上垂直的加勁杆。

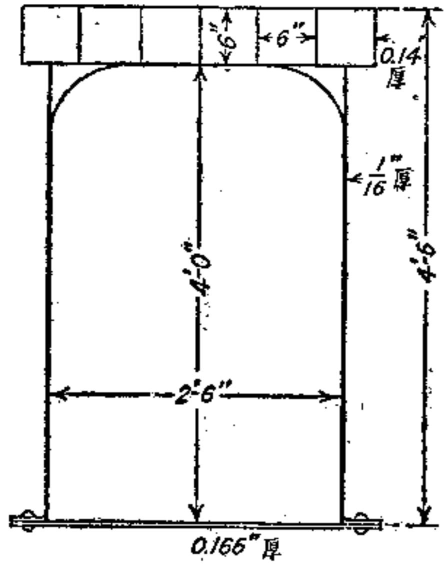


图 98 費儿班恩試驗模型的横断面

这些試驗完成以后，管桥截面的最后尺寸是根据以下的假定来选定的，即管子承載能力按綫尺度二次方比例增加而其重量按綫尺度的三次方比例增加。图 99 示不列顛尼亚桥最后形式的横断面图和縱断面图。当康卫箱形管桥設計完成以后，霍芝肯逊被請来核算該桥所能支載的最大載荷以及該載荷可能产生的撓度。虽然这个問題很簡单，只需要計算均布載荷等截面簡支梁的最大应力和最大撓度，但这个分析已非費儿班恩和現場工程师克拉克 (E. Clark) 两人能力所及。它需要"数学家"(霍芝肯逊)来帮忙。这个分析被認为极端重要，其詳細情形均列入克拉克的书中以及在鉄路建筑物鋼鉄利用研究委員会的报告中。我們也看到它曾轉載在威尔(Weale)的"桥梁的理論、实施与构造"(Theory, Practice, and Architecture of Bridges) 一书中。霍芝肯逊根据設計中的尺寸并允許最大压应力为 8 吨/吋^2，算出中央集中載荷将为 $W=1180.09$ 吨，相应的撓度将为 $\delta=10.33$ 吋。对于均布載荷，W 須加倍，而撓度則須乘以 5/4。計算中的彈性模量取为 24×10^6 磅/吋^2。当桥建成之后，在中央施加載荷所产生的撓度經試驗为 0.01104 吋/吨。它較上面所預先算出的值高出約 20%。

不列顛尼亚桥及康卫桥的兴建使我們在工程結构物强度方面的知識有了巨大的进展。不仅箱形管桥的一般强度通过模型試驗被确定了，而且鉄鈑的强度以及各种鉚釘接合型式都已被研究出来[1]。另外，也研究到横向风压力的效应和不均匀日照受热的效应。費儿班恩得到箱形管桥的专利权，以后又建成了几座这种型

[1] 由于这些試驗的結果断定了由鉚合接头处鉄鈑間产生的摩擦力能足够抵抗剪力，撓度只由于彈性变形的結果所致。

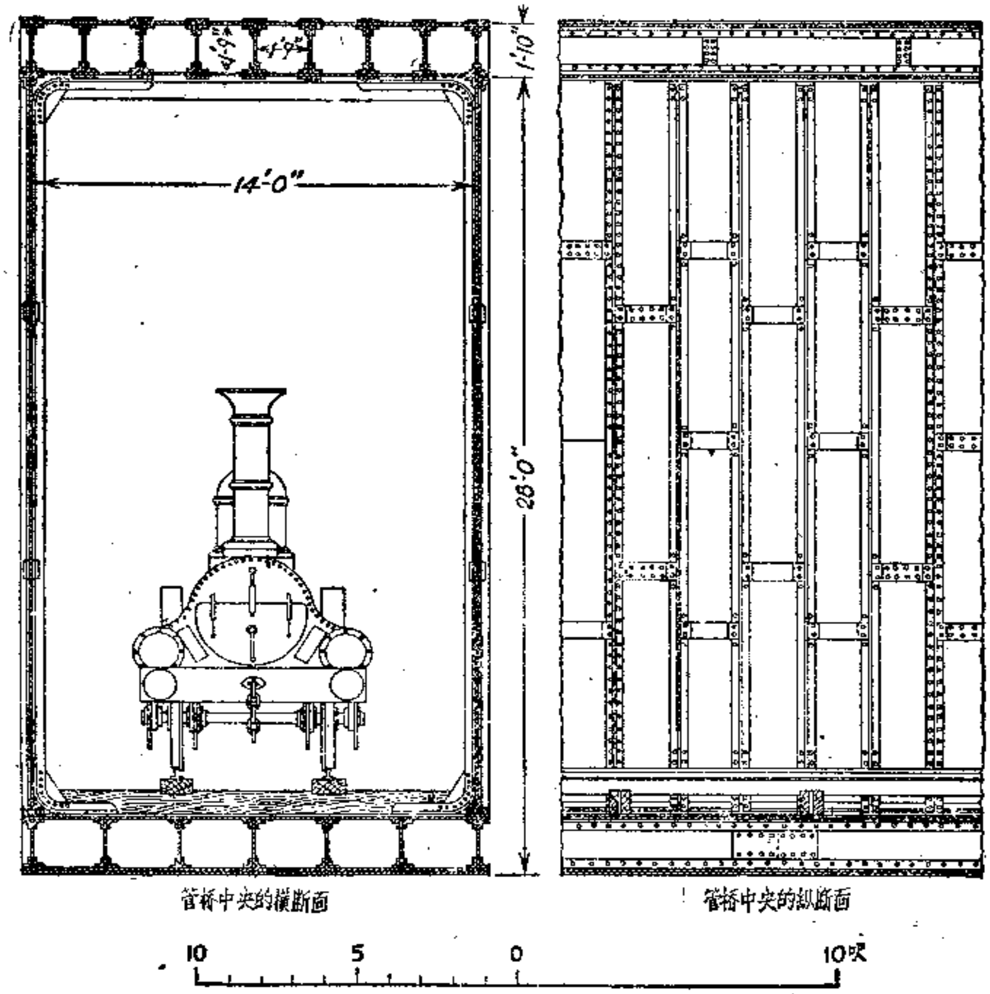


图 99 不列顛尼亚桥

式的桥梁[1]。

这些箱形管桥的建立吸引了国外工程师的重視，我們看到在許多材料力学和結构理論的书本上和論文上都描写过这个偉大的工程。前面提到过克萊佩朗的評論（參看第 34 节），他指出不列颠尼亚桥礅柱处的最大应力比跨度中央的要大得多。克萊佩朗似乎沒有注意到不列顛尼亚桥所用的安装程序，因为从克拉克的书中（第 2 卷，766 頁），我們看到工程师們很清楚地懂得連續梁受均布載荷的效应。书中說明了"我們一定要注意我們的目的不是要把管子的位置先准确地放成象它們原先已被建成一条整体时的情况一样，然后把它們安置在塔架上，因为象这样一

[1] 他又将管形截面引用到起重机的結构中，經証明是很成功的。

个連續梁（設截面是均匀的）在塔上的应变将較在每跨中央的为大，而其截面仍旧差不多相同；所以，我們的目的是在于使应变相等"。为了达到应变相等，在安裝作业过程中規定了下列的特殊步驟。首先將大管 CB（图 100）安放入位。在制作节头 B 时，相邻的管子 AB 稍微放斜一些角度如图所示，在这种情况下进行鉚接。当 AB 放成水平位置时，支座 B 上將产生弯矩，其大小視傾斜程度而定。采取同样的作业过程安裝 C 及 D 两个接头。在选择应需的傾斜角度时，由波尔协助这些工程师們进行选擇，他用納維埃方法研究过連續梁的弯曲問題。

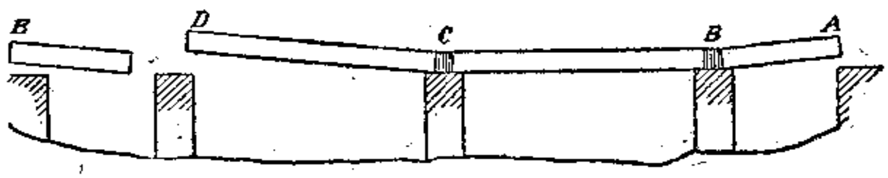


图 100

儒拉夫斯基[1] 对不列顛尼亚桥的設計作过广泛的評論。他首先討論格构桁架并且正确地断定管桥两側边的压屈是由于压应力在与水平成 45° 角的方向上作用于側边所致。他建議將加劲杆裝置在最大压应力的方向上。为了証明这点，他用厚紙版做成模型并用紙板条作加劲条作过一些极有意义的实驗。在討論到他选定这种試驗材料时，他加入了关于英国实驗方法中的一个重要的概念，他認为仅用比較极限載荷值的大小来判别建筑物的强度是不够充分的，因为当載荷接近于极限值时，結构构件的应力情况也許和正常工作情况下所发生的迥然不同。他建議用符合于結构物正常工作条件的載荷作模型試驗，并且建議采用彈性模量較小的材料做模型，这样能容易地測出彈性限度内的最大变形。儒拉夫斯基利用他的紙模型測出靠近中性軸的腹部平面内的变形，并且指出最大压应变是在 45° 方向上（对鉛直綫而言）。他又研究了在側边压屈时形成波浪形的方向。他比較了加劲杆的有效性，发現有斜向加劲杆的模型較之有垂直加劲杆的能多負載 70%。同时，斜向加劲杆的截面积只需垂直加劲杆的一半。

前已述及（参看第 33 节），儒拉夫斯基又評論过箱形管桥鉚釘間距的选定。利用他的梁的剪应力理論，他不难为任何特殊情况选定正常的鉚釘間距。

霍芝肯逊在管桥工作上完成了薄壁管在受压下折屈的重要研究[2]。他指出矩形管当其壁厚对边寬的比例減小时其强度也將減小。他也注意到圓柱形（圓形）是

[1] 这本书的法譯本刊在 Ann. ponts et chaussées 卷 20，113 頁上，1860 年。

[2] 研究結果刊在鉄路建筑物鉄料利用研究委員会的报告附录 AA 中，1849 年倫敦出版。并参看克拉克所著"不列顛尼亚管桥与康卫管桥"，1850 年倫敦出版。

管子中有利的形式。这項研究算得是对受压薄鈑和薄壁管压屈的第一次实驗性研究。

对于較短跨度的桥梁,采用了薄壁鈑梁。布倫涅尔 (Brunel) 式鈑梁在經过試驗得出很好的結果以后成为流行的結构形式了[1]。有些組合工字梁的实驗是由荷貝第(Houbotte)在比利时作出的[2],这位工程师在这些組合工字梁(腹部沒有加勁杆)的中央加上集中載荷,他发现在各种情况下由于腹部的局部压屈而产生的破坏总是靠近在載荷作用点处发生的。

38. 金属疲劳的早期研究

一根金属杆件卽使承受着比它在靜力条件下破坏时小得多的力,但在許多次应力循环下也会发生破坏。这件事实許多年来早为有經驗的工程师們所公認的了。彭西列特对梅茲的工人們所作的讲演里談到金属在拉压交变作用下的疲劳(fatigue)[3]。摩林在他的书中[4]討論了法国公路上两位負責管理邮車的工程师的很有价値的报告。他倆介紹了一个精細的檢查結果:經驗指出,車輛在行駛7万公里以后,車軸的截面尺寸将发生改变;在急遽改变的那些地方,特别是在突然凹入的尖角处,仿佛有細微的裂紋出现。他們也作出这些裂紋逐漸发生的极有意义的图形,并討論了它們的脆性。然而他們不同意应力循环促使鋼鉄重結晶的理論(卽以后为一般人所公認的)。从軸的靜力試驗中已看到有很多在靜力条件下的工作显示金属內部結构并不发生变化。

随着鉄道建設的扩展,机車軸的疲劳破坏問題显得非常重要。在这方面的第一篇英国論文也許是朗肯 (W. J. Macquorn Rankine)[5]提出的。外观上很完好的車軸在运轉了几年以后突然斷裂的事实过去常根据这种假定来解释,卽認为鍛鉄的纖維組織漸漸地变成結晶結构了。朗肯指出这种漸次的变质并不丧失纖維組織。他說:"裂口出现是从一个光滑的,形状規则的,細小的裂縫开始,在軸頸周圍逐漸扩大,其穿入深度的平均値达半吋。它們好象是从表面逐漸朝向中心穿入,直到中心处好鉄的厚度变成不够支持所經受的震动时为止,在这种情况下,軸頸的破裂端是凸出的,而軸身的破裂端必然是凹入的。軸身范圍中的这部分纖維将較軸

[1] 关于这些桥的記述見费儿班恩的"鑄鉄和鍛鉄在建筑上的使用"(The Application of Cast and wrought Iron to Building Purposes) 2版, 255, 1857~1858, 倫敦。并参看克拉克的书,其中描叙了布倫涅尔(Brunel)所作出的实驗。

[2] 見 Ann. Travaux Publique de Belgique, 1856~1857。

[3] 見他的"机械工业"(Mécanique industrielle) 3版, 317, 1870。因为这一版是第二版(1839年)的重版书,彭西列特可能是第一个討論材料抵抗交变循环应力性质的人,同时他采用了"疲劳"这个术語。

[4] 摩林(A. Morin)著:"材料抗力"(Résistance des Matériaux), 1853, 1版。

[5] 見 Proc. Inst. Civil Engs. 卷2, 105頁, 1843, 倫敦出版。

頸处纖維的彈性少些，这也許是由于肩部纖維的彈性运动在該处突然受阻而損坏的。因此建議在制造車軸时，当上車床車削以前，在肩部打成較大的曲口构成軸頸，使纖維能連續貫通"。

1849～1850年間在机械工程学会几次会議上都討論到同样的問題。麦克尼尔(J. E. McConnell)提出一篇論文題为"鉄道車軸"(On Railway Axles)[1]，他在文中說："我們的經驗似乎可以証实，这些軸即使在制造时非常小心，但由于振动以及由于它們在特別的极猛烈的运轉下发生的冲击，它們仍会发生快速变質的。由于这个原因，曲柄彎角处的断裂都一模一样并具有一定的規則，我們几乎能預料有几种引擎在断裂的象征出現以前它究竟能够行駛多少哩……軸变質的原因固然很多，但我所举出的这个原因对所有鉄路局来說是最重要的，那就是鉄的性質发生改变乃是一个确凿的事实，而这个研究是最值得注意的……我相信可以看出，由纖維状态改变为結晶体特性是与不同环境有关的。我由各处收集了一些断裂的車軸标本，那些标本都能很清楚地証实我所說明的概念。

"本文要把有关这个題目內各种事实的揭露完全包括进去是不可能的；可是有价值的是对于軸的变質特性有一个明确的認識，我現在可以将工厂里出来的每一根軸都加以登記，然后在不同期間內分別取得它們的性能和形状的汇报，我就能根据它們的热处理情况来加以判定。談到目前英国鉄道上所使用的車軸为数約有三十万个，我認为这些机車車輛的重要构件具有尺寸比例恰当、質量最高、热处理最好等优点必須为全世界所公認"。麦克尼尔提出一条重要的意見："我的一切經驗証明理想的維修工作……[軸的頸部]应尽可能避免厉害的突出尖緣以及直徑或截面强度的突然改变"。

对論文的最后討論大部分集中在是否鉄的分子結构在拉压交变作用下会发生改变这一問題上。会議上始終沒有得出一致的意見，主席罗伯特·斯蒂芬逊在会上作总結时說道："我只是希望在座的会員們在自己崗位上不要滿足于还未滿足的現象，即关于鉄內分子的改变問題。因为这是一个极端重要的課題，断軸事故不論工程师或局長有时都有可能被判成杀人的罪証，所以研究时必須特別細心；在現阶段还沒有充分証据来証明軸原先是纖維性的，而在断裂时却变成晶体。我希望本会会員中从事于鋼鉄制造业的人，在你們得出結論确認鉄是一种由于振动容易变成結晶体或容易使分子发生变化的那种物質以前，要慎重地思索一下……"。

1850年的几个会議繼續討論了这些內容。霍芝(P. R. Hodge)[2]在这些会議

[1] 見 Proc. Inst. Mech. Engrs. 1847～1849，倫敦出版(1849年10月24日那次会議)。

[2] 同上，1850年，1月23日那次会議。

的某一次中曾提出一条很重要的意見，他說："要得出关于鉄的結构的任何正确結果，必須使用显微鏡来檢查它的纖維和晶体結构"。斯蒂芬逊附議了这个意見，他报告[1]說他已經（自从上一次会議結束以后）在一架超級显微鏡下，檢查过一块称为"結晶質"的鉄，和一块称为"纖維質"的鉄，其間并不存在什么眞正的差异。这使得到会的会員們极为惊奇。

大致当倫敦机械工程师学会在討論疲劳問題的同时，鉄路建筑物鋼鉄利用研究委員会（成立于 1848 年）完成了一些对此問題的重要研究工作。委員会中的工作一部分是由組長亨利・詹姆士(Henry James)和組長加尔頓(Galton)負責領导的，他們进行了鉄杆在承受許多次循环載荷下强度的实驗研究（在朴茨茅斯）[2]。他們用一架轉动的偏心机来使杆撓曲又突然将它放松（參看图 101），撓曲的頻率为每分鈡由 4 次到 7 次。經試驗的这些杆件中有"三根承受过 10,000 次压縮，所产生的数值等于靜力破坏載荷的三分之一，它們对抵抗靜压力的强度还显明地沒有任何削弱；一根是在 51,538 次的压縮下破坏的，另一根承受 100,000 次后对靜压力的强度沒有任何显明的削弱；而其余三根杆件，在同一凸輪上进行撓曲、所产生的数值等于靜力破坏載荷的一半，它們分别在 490 次，617 次及 900 次压縮下破坏了。由此可以断定，鉄杆很少有在承受它的破坏載荷三分之一的反复作用下而不发生破坏的"。

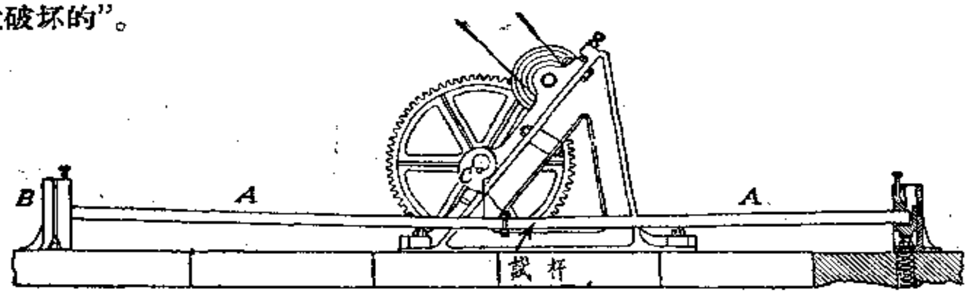


图　101　詹姆士和加尔頓的疲劳試驗机

費儿班恩很重視运行中的列車重量所造成的反复載荷对管桥强度的影响。他想求出能够在无限次作用下还不致使材料受損的最大应力，这样他就能算出一个安全的工作应力来。在大管桥的設計中，他說明[3]应該这样来选定它的尺寸，即：須使桥梁的极限載荷"在減去管桥重量一半以后能达到作用在桥上最重載荷的 6 倍。这可看作强度的适当界限；不过最后認为作为一般的新建筑法则，对于沒有試

[1] 同上，1850 年，4 月那次会議。

[2] 这个研究結果刊在委員会的报告中，259 頁附录 B5。費儿班恩的論文也討論过它們，这篇論文刊在 Phil. Trans. 卷 154，1864。

[3] 見 Phil. Trans. 卷 154，1864 年。

用过的材料应导出稍高的极限强度，因此不用最大載荷重量的6倍而更提高到最大載荷重量的8倍值作为极限强度"。此后費儿班恩討論到貿易部(Board of Trade)的規定卽"所有将来行駛火車的桥梁不能使应力超过5吨/吋²"。他观察出（正确地）在管桥的情况下，受压鈑可能在較低的应力下压屈，因此必须采用分格式結构。

为了求出桥梁工作应力的安全值，費儿班恩决定作出試驗，試驗中的应变要与重型列車正式通过桥梁时所产生的应变尽量接近。在这些試驗中，他用了一根角鉄和鉄鈑鉚成的工字梁A（图102）其长度为22呎，高度为16吋。在杠杆BC的C端处加以載荷D使产生初次撓度。由杆CE作出C端的垂直运动使产生应力循环，CE杆是和一个均速旋轉的偏心輪相連接的。在这种方式下，梁上受到每分鈡7～8次的应力循环。試驗指出"当熟鉄鈑梁加載到拉应力为7吨/吋²的限度时，如果此应力是承受着将載荷加上又移去的交变作用，而且在操作中还发生一定程度的振动的話，这样的拉应力是不安全的；最值得注意的是：在300,000～400,000次交变作用下，已足使鈑梁頻于断裂。然而必須記住，上述的梁如拉应力只用到5吨/吋²左右則能支持到3,000,000次以上的交变作用，并且实驗証明，应将鈑梁底部的拉应力5吨/吋²記录下来，和貿易部所規定的一样，作为极限强度的一般标准"。

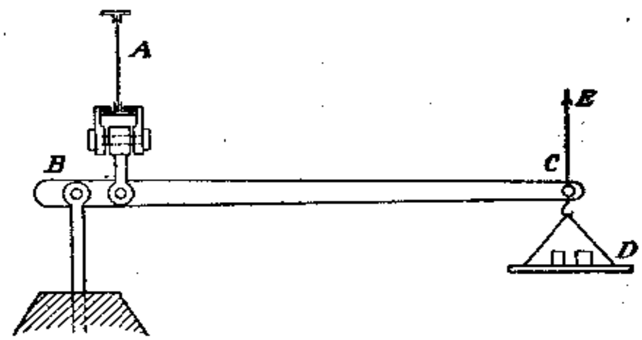


图 102 費儿班恩的疲劳試驗机

我們可以看出，在十九世紀中期，工程师已經認識到交变应力对金属强度的不良影响，他們通过試驗得出了結論，認为在交变作用情况下的載荷等于极限載荷的三分之一是安全的。以后沃勒(Wöhler)得出了更为完整的"疲劳"现象的見解。

39. 沃勒的功績

沃勒(1819～1914)出生于汉諾威省，他父亲是一个小学校长。他在汉諾威工业学院受过工程教育。由于成績优异，毕业后他得到一笔奖学金，使他能在柏林的博尔齐(Borsig)机車厂以及在柏林-安哈尔特(Anhalter)鉄路和柏林-汉諾威鉄路的建筑工程中获得实习机会。1843年沃勒被派送到比利时学习机車制造。回国以后被任为汉諾威鉄路机械厂厂长。1847年沃勒被調任为尼德施內齐希-馬克鉄路(Niederschlesisch-Märkische railway)的机車車輛厂和机器厂厂长，因此又使他在奥德(Oder)的法兰克福(Frankfurt)住了23年。在那里他解决了許多关于材料

力学性能的問題，并开始对金属的疲劳强度作出著名的研究。由于他的职位关系能使他的实验成果立刻在实际中应用。

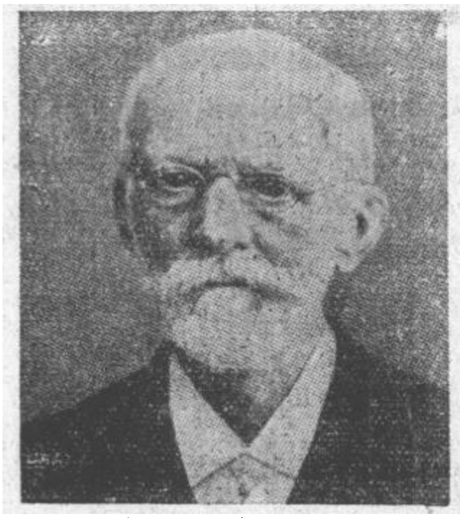


图 103 A. 沃勒

在实际应用中材料性质的一致是极端重要的，为了求得材料的一致性，他对鉄路用料规定出严格的规范。他又襄助有关方面在德国成立了一系列的材料实驗室，并一起进行金属一致性的力学試驗。在这方面他在德国的影响是很大的，他在这方面所設計和制造的試驗机在当时也是最优良的。这些試驗机到现在还保存在慕尼黑德国博物院里面，以标志其历史意义。

沃勒在金属疲劳方面的主要成就是在尼德施内齐希-馬克鉄路上提出了防止机車軸发生断裂[1]的意見。为了求出車軸在运行中承受的最大作用力，他使用了如图 104 所示的設备；mnb 部分和 pq 軸坚固地連接，而指針 bc 由鉸接杆 ab 将其与輪緣相連接。由于車軸发生如虛綫所示的弯曲，a 鉸移动使指針 bc 的 c 端在鋅板 mn 上划出一道刻痕。在运轉中刻痕的尺寸变化很大，特别在鉄路軌道不平整处产生冲击力作用时变化得更大。量出这些刻痕的曲綫峰値便可求出軸的最大变形。为了求出相应的力，作了靜力弯曲試驗，試驗方法是将已知的水平力作用在軸的 a 及 a_1 两点处并量出 aa_1 間距离的相应改变。有了这些資料，便能算出运轉中的最大弯曲应力。用同样方式，最大扭轉应力也能在运轉中由記录此軸所产生的最大扭轉角来决定。

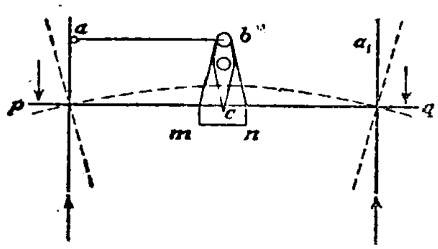


图 104 記录軸在工作中的撓度的工具

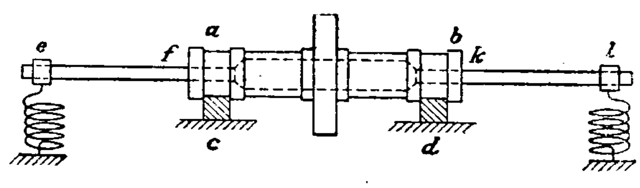


图 105 沃勒的疲劳試驗机

知道了所作用的最大力的数值以后，沃勒开始研究軸在承受均衡的交变应力时的强度。为此，他建造了一架特制的机器(图 105)，使圆柱 ab 在 c 及 d 两个軸承内以每分鐘 15 轉左右的速度旋轉。ef 及 kl 两軸装入轉子内，并借彈簧的力将它

[1] 見建筑工程杂志 (Z. Bauwesen) 卷 8, 641～652, 1858；卷 10, 583～616, 1860；卷 16, 67～84, 1866；卷 20, 73～106, 1870。

弯曲，此力是借軸承圈 e 及 l 来傳遞的。每旋轉一次，纖維內应力即經过一次循环。应力可由适当計算彈簧的平差而得。用这架机器試驗各种材料制成的及各种直徑的車軸，得出了相对强度的某些結果。不过对于鋼的疲劳强度的基本研究，需要作出許多次的实驗，沃勒决定不用真实的車軸（通常的直徑为 $3^3/_4$～5 吋）而使用了較小的試件，这种試件可用直徑 $1^1/_2$ 吋的圓杆車制。由于采用了較小的試件，才能增加試驗机的轉数达每日 40,000 轉左右。这样可以在試件上作用数百万次应力循环。用几个等同的試件在各个試件的两端作用以不同的力，把能产生断裂的循环次数进行比較，沃勒得出关于这种材料的疲劳强度的結論。他在分析中并沒有用現称的沃勒曲綫（Wöhler's curve）来称呼，而称之为界限应力（持久限）（Limiting stress, bruchgrenze）。

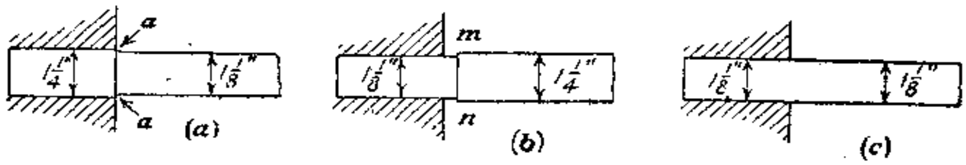


图 106

沃勒認为要消除尖角的影响（图 106 a），必须采用圓角 a。作試驗所用的試件有如图 106 b 及 106 c 所示，經发覺直徑均一的試件能得出較高的疲劳强度。也发覺象图 106 b 那种試件常在 mn 截面处发生断裂，因为該处系直徑急遽变化之处。因此利用在軸上添加材料（相当于增加 mn 处的直徑）的方法就能削弱这种突变的影响。沃勒用 mn 截面处应力分布不規則来解釋这一点，并說明这种减小影响（尖角）的方法不仅在軸內而且在設計其他各种机械零件时都是非常重要的。更进一步的实驗指出这种影响的减小視材料的种类而异，并指出因尖角而减低的强度大約在 25～30% 之間。实驗中又发現：如果截面急遽改变只是在圓軸的某一部分上，如图 107 a 及 107 b 所示，也可发現疲劳裂縫常在尖角处开始。图 107 b 内截面的影綫部分表示断裂后可看到的粗糙裂縫。

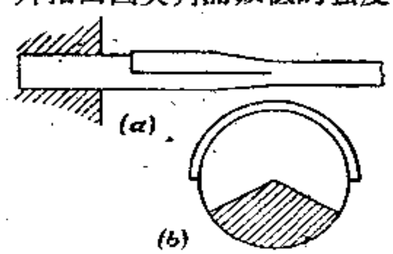


图 107

用图 105 的机器作出的一些实驗属于应力完全交变的方式。为了要得出其他种类的应力循环，沃勒設計并建造了另一种型式的疲劳試驗机，該机中应用两端簡支的矩形截面試件。由一偏心輪作用在試件的中央使产生变換不定的撓度，因此最外层纖維（受拉方面）的应力能够在其最大值和零值之間或在其最大值和某些較小拉应力之間变換。将这架机器所得的結果和

以前由应力的完全交变所得的結果相比較，他看到断裂經常在受拉方开始，而且材料能經受的最大应力与最大和最小应力間的差值（即应力幅度）有重大关系。对于特种的軸用鋼，沃勒求出在承受极多次循环下軸用鋼的最大及最小应力的极限値列如下表：

最大应力	30000 磅/吋²(2100 公斤/厘米²)	50000(3500)	70000(4900)	80000(5600)	90000(6300)
最小应力	−30000 磅/吋²(−2100 公斤/厘米²)	0	25000(1750)	40000(2800)	60000(4200)
应力幅度	60000 磅/吋²(4200 公斤/厘米²)	50000(3500)	45000(3150)	40000(2800)	30000(2100)

所有这些实驗証明，对于一已知的最大应力，产生断裂时所需的循环次数系依应力幅度的增大而减少。从这些試驗中，沃勒断定在长跨度桥梁及鉄路車輛彈簧（較大部分的最大应力由靜載荷产生）中，能采用較軸杆或活塞杆稍高的容許应力，軸杆或活塞杆都是承受完全交变应力的。

所有这些結論都是根据弯曲試驗的强度得出来的，沃勒决定用直接应力来加以驗証，为此設計了一架特制的拉力試驗机。在这架新机器中，試件系承受拉应力循环作用。用它作試驗的結果和以前在弯曲試驗中所得的結果非常符合。这使沃勒能作出建議，对于应力循环不管該循环究竟按照何种形式产生都可采用同样大小的工作应力。

研究金属疲劳强度的第二步是研究综合应力的循环。沃勒假定强度与最大应变的循环（服从最大应变理論）有关，在計算应变时采用泊松比为 1/4。他再应用了他对扭轉的一般研究，在这里他所假定的理論說明对于应力完全交变的疲劳极限等于拉伸或压縮所得的 0.80 倍。为了驗証这一点，沃勒建造了一架特制的机器，在此机中可使圓杆受扭轉应力循环。用实心圓形試件在此机中作出的实驗与理論相符。于是沃勒建議取拉伸或压縮所用的应力之 0.80 倍作为剪切的工作应力。他又发覺在扭轉試驗中，裂縫出現在与圓柱軸綫成 45° 的方向上而且是由最大拉应力所产生的。

由于疲劳試驗需要很长时間和許多費用，使沃勒想到最好能找出材料在靜力試驗中能得出的其他力学性質与疲劳强度之間的关系。他似乎对于他在疲劳試驗中得出的材料彈性极限特別注意。由拉力試驗来决定这个极限，需要量出很微小的伸长量，但那时的仪器还不能滿足这个要求。因此，沃勒决定用弯曲試驗来测定彈性极限，但他清楚地說明了这个方法并不十分精确，因为极限应力只是那些外层纖維首先到达，而且屈伏的起点也只是在材料已超过彈性极限相当程度时才能够覺察出来。为了使测定做到尽可能地精确，沃勒在他那特制的机器中用了如图 108

所示的布置方法。試件 mn 的 ab 部分承受純弯曲，精确量出其撓度以后，便能测定其彈性模数 E 和开始永久变形时的載荷。

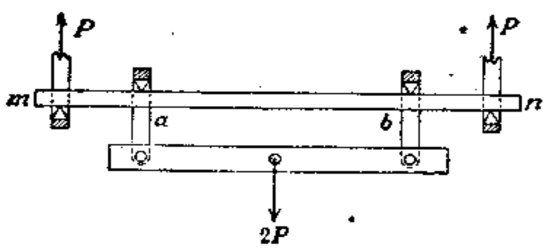


图 108 沃勒的靜力弯曲仪器

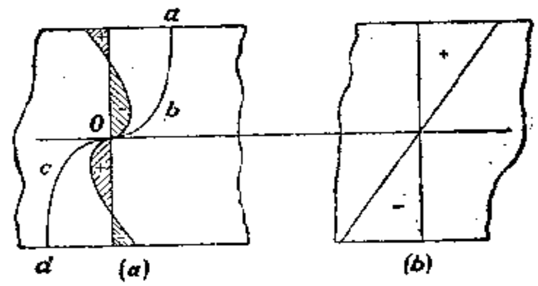


图 109

在进行这些靜力試驗的同时，沃勒轉而致力于杆件开始就載以超过彈性极限的載荷时杆件的塑性变形以及由这种变形所产生的殘余应力的研究。他討論了矩形杆件中的这些应力，他在試件上加載了超过彈性极限的載荷而后又将載荷取去(图 108)。假定在卸載过程中材料服从虎克定律，他指出殘余应力的分布将如图 109 a 中影綫面积所示。他将卸載过程中的应力綫性分布(图 109 b)迭加在用曲綫 $abocd$ 表示(图 109 a)的初应力分布上得出了这些影綫面积。沃勒从这个研究中，断定在疲劳試驗中相对的应力幅度是不受初始塑性变形的影响的。这是我們第一次看到的关于塑性弯曲产生殘余应力的討論。

沃勒对于矩形杆件在塑性弯曲时的截面畸变的研究是很重要的。假定材料的密度在塑性变形时保持不变，他得出了如下的結論，即如果纖維产生一单位伸长 ϑ，則单位横向收縮必为 $\vartheta/(2+\vartheta)$。对应于一单位收縮 ϑ_1，也必有一单位横向伸长 $\vartheta_1/(2-\vartheta_1)$。由于横向变形的結果，当塑性弯曲时矩形杆的截面畸变必如图 110 所示。这与实驗結果是相符的。

图 110

沃勒最后着重地討論了工作应力。他建議在不变的軸向拉应力下杆件的安全系数取为 2，因此工作应力为材料极限强度之半。在应力循环的情况下，他也建議安全系数为 2. 他的意思是工作应力应等于持久限之半。在这两种情况下，都假定考虑到最不利的載荷条件。在結构物的接头上，工作应力应該取得更小，使能弥补应力分布的任何不規則性。对于这些不規則性，他要求人們必須作細心的研究。

我們看到这些实驗都是根本性的，公正地說来，对于材料疲劳方面的科学研究是由沃勒开始的。沃勒对于每种試驗都設計并建造了所有应需的机器与測量仪具。在設計这些机器中，他对于量测力和变形的精确度达到了严格的要求，因此他

的机器显示出建筑材料試驗技术上的重大进步。

40. 动載荷

在研究桥梁的强度时，发生了梁在动載荷作用下的应力和撓度的問題。我們現在将探索一下这个問題的发展过程。从鉄路建筑物鉄料利用研究委員会的报告(参看第37节)附录 B 中已描述了威里斯教授、詹姆士組长和加尔頓副組长所做出的一些主要的研究[1]。在十九世紀中期，工程师們中对于动載荷在梁上的作用还沒有得出一致的意見。有些人只假定在高速运动中的載荷可当作一个突加載荷，它可能产生較靜載荷作用下更大的撓度，另外有些人提出反面的意見，认为在极高的速度下，載荷沒有充分时間能下垂到所想象的动力撓度那么大的距离。

于是决定作出尽可能接近眞实情况的一些試驗。在朴茨茅斯造船厂曾建造了有特殊膺架支承着的一段鉄路軌道，并且用一輛有两个車軸的車子作为动載荷(图111)。軌道頂部离水平部分的高度大約为40呎，因此車子的速度能达到每小时30哩。試驗的鑄鉄杆 C (图111)长9呎，截面为矩形，計有三种不同的尺寸；卽 $1''\times 2''$，$1''\times 3''$ 及 $4''\times 1\frac{1}{2}''$。在靜力試驗中，杆件在車子重量作用下的撓度是将載荷逐渐加大来測定的，同时測定其极限靜力强度。在动力試驗中，具有最小載荷的車子被拉上斜坡軌道的某点使能得到指定的速度然后将它突然放松。这种实驗用逐渐加大的載荷重复許多次，分别量出其动力撓度。最后測定其指定速度下的极限載荷。这样，証明了在一定載荷下的动力撓度較之同样載荷下的靜力撓度要大些，而杆件破坏时的动載荷也比极限靜載荷为小。用更高的速度重复試驗，发現速度增加則不利的影响也增加。在很高速度下所得出的动力撓度較靜力撓度大2倍，有时还大到3倍。

在桥梁上作出的現場实驗并沒有呈現出这样显著的速度效应。为了查明这种

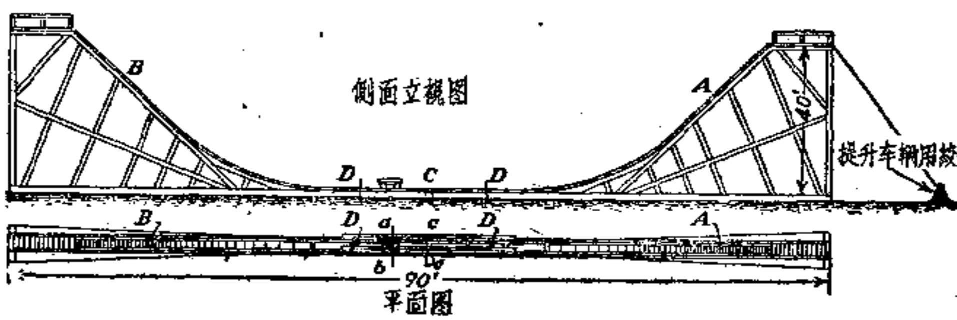


图　111　供梁的动力試驗用的鉄路軌道

[1] 威里斯描述这些实驗的报告，还可参看巴洛所著"論木材的强度"(A Treatise on the Strength of Timber)的附录，1851，倫敦。

差异，威里斯在剑桥用簡化的形式又作了一些实驗，并且发展了一个解析性的理論。在他的实驗装置中，試杆 BC 承受着滚輪 A 的作用(图 112)，滚輪是和在軌道上运行的車子鉸接在一起的。在支持車輛的两根軌条之間安置了第三根軌条，BC 杆組成了这根中間軌条的一部分。把构架 AD 和对于沿固定軌道 mn 滚动的車輛的滚动距离記录下来便得出滚輪 A 經行的路程。

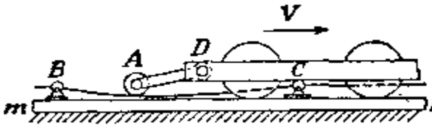


图 112　威里斯作梁的动力試驗用的装置

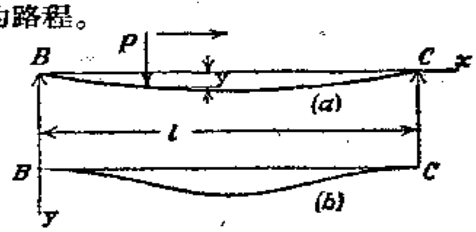


图 113

威里斯在展开他的理論时，沒有考慮試杆 BC 的质量(因为它比起滚輪 A 的质量来为数极小之故)并用下式表示 P 力作用下的靜力撓度 y (图 113)：

$$y=\frac{Px^2(l-x)^2}{3lEI} \tag{a}$$

式中 l 为杆的长度，EI 为杆的抗弯剛度。利用这个式子，我們看出，当 P 力沿杆而移动时，其作用点描出一条曲綫，該曲綫两端的切綫成水平方向 (图 113 b)。将 (a) 式用在具有滚輪 A 的情况中 (图 112)，威里斯将滚輪作用于杆上的压力来代替 P 力。此压力包含了两个部分，卽滚輪的重力 W 和相应于垂直移动的滚輪的惯性力 $-\frac{W\ddot{y}}{g}$。这样，他得出

$$y=\frac{W}{3lEI}\,x^2(l-x)^2\left(1-\frac{\ddot{y}}{g}\right) \tag{b}$$

又
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dy}{dx} \quad 及 \quad \frac{d^2y}{dt^2}=v^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

卽得威里斯方程式：

$$y=\frac{W}{3lEI}\,x^2\,(l-x)^2\left(1-\frac{v^2}{g}\;\frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{c}$$

因为 $-\frac{d^2y}{dx^2}$ 为此綫的曲率，滚輪 A 的接触点便是沿着此綫移动的，我們从 (c) 式中可以看出，当我們在重力 W 内加入离心力 $-(W\,v^2/g)\,(d^2y/dx^2)$ 时，滚輪 A 的动力作用就包括在內。为了算出此离心力，我們必須将 (c) 式积分，以便得出計算滚輪路程的方程式。但 (c) 式是相当复杂的，威里斯建議如果假定动力效应很小，就能得出它的近似解如下式所示，并認为如等式右边写成下面的形式后，所发生的誤差也不会很大。

$$y=\frac{Wx^2(l-x)^2}{3lEI} \tag{d}$$

这表示滚輪的軌綫是根据靜力撓度計算出来的［参看(a)式］，它具有如图 113 *b* 所示的对称形状。在靠近支座处，离心力作用向上，因而杆上的滚压力較重力 W 稍小。在中央，离心力垂直向下而与重力相加。故杆上的最大压力将为

$$W-\frac{W}{g}v^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}}=W\left(1+\frac{16\delta_{st}v^2}{gl^2}\right) \tag{e}$$

式中

$$\delta_{st}=\frac{Wl^3}{48EI}$$

例如，設 $v=32.2$ 呎/秒(9.81 米/秒)，$l=32.2$ 呎(9.81 米)，$g=32.2$ 呎/秒^2(9.81 米/秒^2)，而 $\delta_{st}=0.001l$。我們从(e)式得出最大压力超过重力仅 1.6%。在朴茨茅斯所作实驗中，跨长 l 比这里約大四分之一，而 δ_{st} 經常也大到10倍以上。在这种情况下，动力效应約为重力之 64%（当速度为 32.2 呎/秒时），而在速度 v 增加时更为显著。这样，使威里斯能解释朴茨茅斯造船厂得出的很大的动力效应主要是由于試驗中的杆件具有很大柔性之故。

威里斯的实驗还指出滚輪的路程并不是图 113 *b* 所示的一条对称曲綫。当滚輪由 B 向 C 移动时（图 113），最大撓度发生的位置离支座的距离要比图中所示的为近，与对称的偏差也由于 $\frac{1}{\beta}=\frac{16\delta_{st}v^2}{gl^2}$ 的增大而接連地加大。当 $\frac{1}{\beta}$ 不很小时，用近似式(e)来概括这种情况是不够充分的，应当用 (c) 式的全解来求算。这个式子的解是斯托克斯(G. G. Stokes)得出的[1]，对于較大的 β 值，其結果与威里斯的近似式所得相符。对于很小的 β 值，它得出不对称軌綫，并証明最大应力的截面将从跨度中央向支座 C 轉移（图 113）。后一結果与实驗非常符合，因实驗中常在中央与支座 C 之間的一段杆件上发生断裂。这个解更指出倘推导方程式时不計入梁的质量，则理論上得出的路程与实驗所得的曲綫不能相符。

为了想在試杆质量影响滚輪滚动的軌綫形式方面得到一些概念，威里斯采用一架精巧的仪器，他称之为慣性天平(inertial balance)。带有两个砝碼的杠杆 mn 和試杆 BC 的中心相鉸接（图 114）。砝碼系处于平衡状态，因而沒有靜力傳到杆的 D 处上。当滚輪沿 BC 杆轉动时，慣性天平将被带动，D 处即作用有一慣性力。这个作用

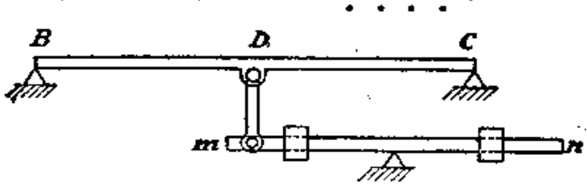


图 114 威里斯的慣性天平

[1] 見 Trans. Cambridge Phil. Soc. 卷 8, 707, 1849。

与 D 处附加一个质量的意义相同。如果将杆的撓度曲綫看作半个正弦曲綫，在 D 处附加的一个質量在动力上相当于沿跨长均匀分布着二倍的質量。因此，应用慣性天平，对于滚輪各种速度下的試杆質量影响都能研究出来。

这架仪器也可将滚輪质量和試杆質量之比做成和实际桥梁中所能預期的一样。此实驗是这样安排的，即模型中两質量之比与 β 量須与实际桥梁中的完全相同，即可由模型的撓度曲綫得出桥梁的动力撓度[1]。

和威里斯在劍桥一起工作的斯托克斯也完成了另一种极端情况下的一个近似解，即仅考虑桥梁的質量而不計动載荷的質量，并且假定为由一个大小不変的力沿梁而移动。斯托克斯只考虑振动的基諧方式，指出动力撓度的大小和梁振动的基諧方式的周期对运动力越过整个跨度的时間之比有关。

威里斯和斯托克斯所得的結果受到何默珊·卡喀斯 (Homersham Cox) 的批評[2]。他从考虑能量出发，斷定动力撓度不能超过靜力撓度的二倍。然而，在他的分析中，他沒有注意到这一事实，即不仅必須考虑相应于重力的能量，而且还要考虑运动中滚輪的动能。正交于撓度曲綫的梁的反力給出沿軌綫第一部分运动方向上的分量而沿第二部分却給出在相反方向上的分量。由于軌綫的不对称形状，此反力对滚輪速度的凈效应有些減低。滚輪所损失的动能轉变成弯曲的位能以致这种弯曲的撓度可以大到梁的靜力撓度的二倍。

这里可以看得出威里斯和斯托克斯已經能够說明为什么朴茨茅斯的实驗中会显現出这么大的动力效应了。他們也指出在实际桥梁上动力效应会比較小些。这样，摆在委員們前面的实际問題，虽然沒有得出一套数学的全解来，总算是被解决了。从那时起，許多工程师都曾經打算过增进动載荷对梁的撓度的动力作用方面的材料力学知識[3]，不过在十九世紀中这个問題很少有进展。

当英国研究桥梁上动载荷的动力效应的同时，德国在这方面也完成了一些研究工作。巴登 (Baden) 鉄路上的鑄鉄桥曾在各种机車速度下进行过撓度測量。为此目的使用了一架仪器，此仪器內有一个活塞在水銀貯器內工作着，它迫使液体沿一毛細管流动，这样可将撓度放大若干倍。实驗指出，由于机車的高速运行能使撓度稍有增加。但在速度达到 60 呎/秒以前，这种效应是很小的[4]。

[1] 这是由斯托克斯証明的。

[2] 見 Civil Engrs, Archits. J. 卷 11, 258～264, 1848, 倫敦。

[3] 見菲里普斯 (Phillips) 論文，刊在 Ann. mines, 卷 7, 467～506, 1855。并参看雷劳朵特 (Renaudot) 的論文，刊在 Ann. ponts et chaussées, 第 4 組, 卷 1, 145～204, 1861。

[4] 見馬克斯·别斯喀尔 (Max Becker) 的論文"巴登鉄路上的鑄鉄桥" (Die gusseisernen Brücken der badischen Eisenbahn) 刊在工程师杂志, 卷 1, 1848, 佛賴堡。

41. 冲击

1848 年，受命研究鉄道結构物利用鉄料問題的委員会在进行研究时，也曾关联到梁的冲击效应問題，在它的报告中可以看到这些实驗結果(参看第 30 节)。对求解这个問題的进一步发展是由何默珊·卡喀斯所完成的[1]，他研究了在等截面簡支梁中央受水平冲击的問題。在这項工作中，他对霍芝肯逊所提出的假定作了一些辨証，霍芝肯逊系假定在冲击的一瞬間冲击球所失去的速度和該球打击另一具有梁的一半質量的自由球体所失去的速度相等。

卡喀斯假定梁在冲击时产生的撓度曲綫与静压力作用在梁的中央所产生的弹性曲綫沒有很大差异，因而采用了下述方程式：

$$y=\frac{f(3l^2x-4x^3)}{l^3} \tag{a}$$

式中 l 为跨长，f 为中点撓度，而 x 为自梁端量得的距离。用 v 表示在冲击的一瞬間梁在中点处所得到的速度，他假定在任一其他截面处梁的速度为

$$\dot{y}=\frac{v(3l^2x-4x^3)}{l^3} \tag{b}$$

于是梁的动能为

$$T=\int_0^l \frac{q}{2g}(\dot{y})^2dx=\frac{17}{35}ql\ \frac{v^2}{2g}$$

式中 ql 为梁的重量。这里我們可看出，如果有一質量等于梁的質量之 17/35 集中在梁跨的中央，則动能与之相同。用这个“折合的”質量(reduced mass)，并用 v_0 表示冲击球(重量为 W)的速度，卡喀斯从动量守恒方程中求出共同速度 v 为

$$v=v_0\frac{W}{W+\frac{17}{35}ql} \tag{c}$$

为了要决定梁的最大撓度 f，他假設在达成共同速度 v 以后，球与梁一道移动直到这个組合体的全部动能都变成弯曲的位能为止。这样得出下列方程式：

$$\frac{24EIf^2}{l^3}=\left(W+\frac{17}{35}ql\right)\frac{v^2}{2g}=\frac{Wv_0^2}{2g}\ \frac{1}{1+\frac{17}{35}(ql/W)} \tag{d}$$

由此可見，最大撓度 f 是与冲击球的速度 v_0 成正比的。这与霍芝肯逊的实驗非常符合。在計算(d)式中的应变能时，假定虎克定律仍然有效。为了更好地使他的理論和霍芝肯逊的实驗結果相符，卡喀斯假定对于这些試驗中所用的鑄鉄，其应力与应变具有如下的关系：

[1] 見 Trans. Cambridge Phil. Soc. 卷 9, 73～78 (这篇論文是在 1849 年 12 月 10 日发表的)。

$$\sigma_s=\frac{\alpha\varepsilon_s}{1+\beta\varepsilon_s}$$

式中 α 及 β 为两个常数。卡喀斯适当地选定这两个常数，得出他所要寻求的很满意的結果。

进一步改进冲击理論的人是圣維南[1]。他設想了一个布置方式，它由一根在中心处附有一个質量 W/g 的棱柱杆所組成。他假定在冲击的瞬时对此質量所施的速度为 v_0，而杆的其他部分保持不动。他考慮了可能发生的各种振动方式，并且計算中央处的最大撓度。計算指出，如果只保留代表最大撓度的級数中的第一項（最重要的一項），其結果将与用近似式(d)所得的非常接近。檢查一下代表撓曲形状的曲率的第二次导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$，指出这条曲綫可能与(a)式所假定的大不相同，其中差异在 ql/W 的比值增加时更为显著。圣維南計算的最大应力 $\sigma_{\max}$（从他的級数中算出）对应力 $\sigma'_{\max}$［由曲綫(a)所得出］的比值如下表所列：

ql/W	1/2	1	2
$\sigma_{\max}/\sigma'_{\max}$	1.18	1.23	1.49

当 ql/W 的比值增加时，$\sigma_{\max}$ 与 $\sigma'_{\max}$ 之間的差值也随着增大。

必須注意的是圣維南的研究不能看作横向冲击問題的全解。他沒有考慮冲击球在打击梁上該点处的局部变形，而且，在冲击的瞬时之后球与梁保持接触直到最大撓度达到时为止的假定，在实际事物中也不能得到証实。在最大撓度达到以前，球会回跃，在这种情况中就不能应用圣維南的解法了[2]。

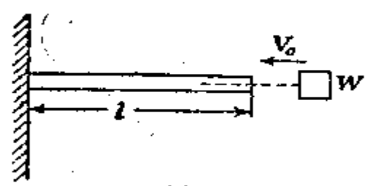


图　115

圣維南也討論过杆件的縱向冲击。他考虑了一端固定而他端承受縱向冲击的一根棱柱杆（图 115），并假定在冲击时杆产生均匀压力。为了酌量地計入杆的質量，他認为必須假定該質量的三分之一集中在自由端。設冲击体被看成絕对剛性的，并假定在打击的瞬时后杆端与冲击体的共同速度为 v，此中

$$v=\frac{v_0}{1+\frac{1}{3}(ql/W)}$$

[1] 見 Bull. Soc. Philomath. 1853～1854，巴黎；Compt. rend. 卷 45, 204, 1857。

[2] 圣維南断定他的解答是正确的。在他的"簡史"中（参看第 51 节），他說："为了計算抗力不用新的而确切的公式来进行冗长的計算，就不免会犯上由于任何不正确的假定所引入的严重錯誤了"。

(Pour calculer sa résistance, il faut, sous peine de commettre de graves erreurs qui inspireraient une fausse sécurité, se livrer au long calcul de la formule nouvelle et exacte)。

压力最大値(f)可由下式求得

$$\frac{AEf^2}{2l}=\frac{Wv_0^2}{2g}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}(ql/W)} \tag{e}$$

为了得出更为满意的解式，圣維南設想了由一端固定而他端牢固地加附有一个质量的杆件組成的布置方式。这种布置方式的自由振动已經由納維埃研究出来了[1]。圣維南将他老师納維埃的解用在冲击情况中，他假定当杆件在冲击的瞬时保持靜止，而加附在杆端的质量将突然得到一个速度 v_0。于是，他用納維埃的解，将杆端的运动用級数表达出来，然后用求和法得出最大撓度。这与(e)式得出的近似解非常符合。利用級数表示冲击瞬时后杆件的纵向振动，圣維南又算出最大纵向应变，并查出它和近似式(e)中所假定的均匀应变会大不相同。下表中列出了圣維南的計算結果。表中可以看出，最大应力 σ_{max}(从級数中算出的)对 σ'_{max} [从(e)式求得的]之比随着 ql/W 一起增加。

ql/W	1/4	1/2	1	2	4
$\sigma_{max}/\sigma'_{max}$	1.48	1.59	1.84	2.67	3.47

必須再一次注意到圣維南沒有在他的解中把冲击物的回跃可能性考虑进去，因为他假定冲击体是牢固地附着在杆端的。后来[2]圣維南回到这个問題上，发現可以利用納維埃的三角級数把这个解稍加改进，因此必須求出一个用有限項表达的解式。这个解最后被包沁涅斯克(Boussinesq)得出，并且又被西伯特(Sébert)和胡果尼沃特(Hugoniot)得出。这几位科学家的成就将在以后討論(参看第 52 节)。

42. 早期的桁架理論

桁架在建造木桥和屋架上最先見諸实用。罗馬人是用过桁架的。图 116 表示横跨多瑙河上著名桥梁的木制上部結构，此桥是特雷江(Trajan)皇帝(52～117，罗馬皇帝—譯者注)下令修建的，发現于罗馬的特雷江柱子上的浮雕[3]中。在文艺复

[1] Bull. Soc. Philomath. 73～76, 1823, 巴黎; 178～181, 1824。

[2] 見在圣維南与佛拉門特合譯的克列布希所著固体彈性理論一书中圣維南所加入的第 60 条后記(Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch, traduite par MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant), 1883, 巴黎。

[3] 关于桥梁的早期历史，見高提尔(H. Gautier)所著"桥梁論述"(Traité des Ponts), 1765, 巴黎。并参看納維埃出版的"高随的成就"(Oeuvres de M. Cauthey), 1809～1813, 巴黎。至于木桥方面的重要資料可参看加斯拔·华尔特(Gaspar Walter)所著:"在木工精制妥当安装后各种木石桥的建造及檢查"(Brückenbau oder Anweisung wie allerley Arten von Brücken Sowohl von Holz als Steinen nach den besten Regeln der Zimmerkunst dauerhaft anzulegen sind), 1766, 奧格斯堡(Augsburg)。

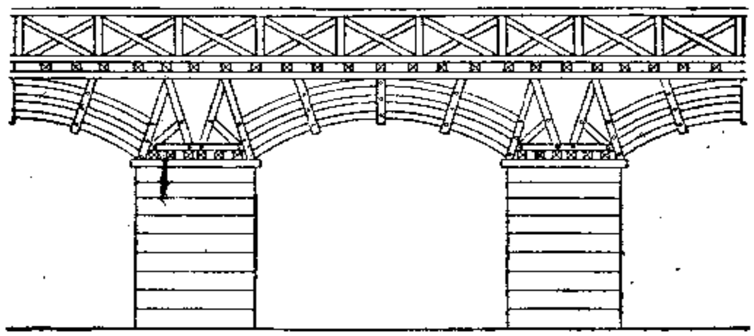


图 116 横跨多瑙河上的特雷江桥

兴时期，意大利建筑师也开始采用木桁架，著名建筑师拔拉雕 (Palladio) 也許是第一个建造这类长跨度結构物的人。图 117 示跨长約 100 呎的木桥，由拔拉雕建造在特侖特 (Trent) 和巴薩諾 (Bassano) 两地之間。另外一些拔拉雕的桥梁設計，示于图 118 及 119 中。

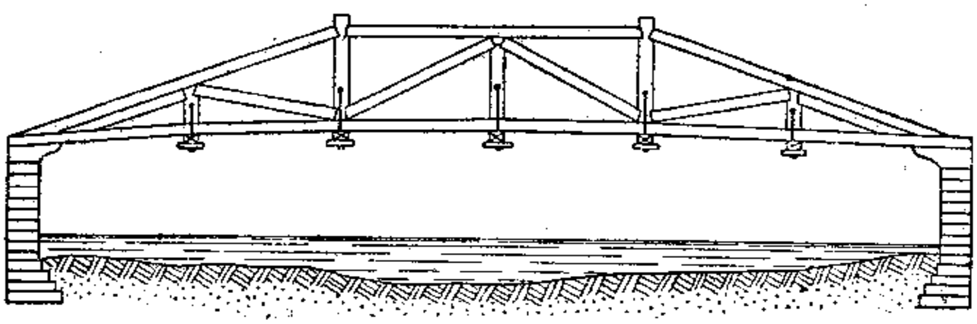


图 117 特侖特附近的拔拉雕式桥

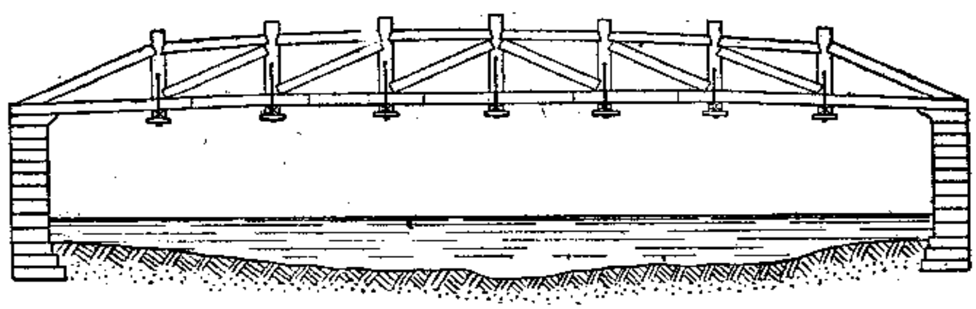


图 118 拔拉雕式桁架桥

进一步发展木桥使用的国家是瑞士。图 120 为沙夫霍逊地方横跨萊因河上的著名两跨桥中一跨的示意图；它是在 1759 年由天才的木工江·奥尔里希·格魯本曼(Jean-Ulrich Grubenmann)所建造的。两跨分别长 171 呎及 193 呎，經使用証

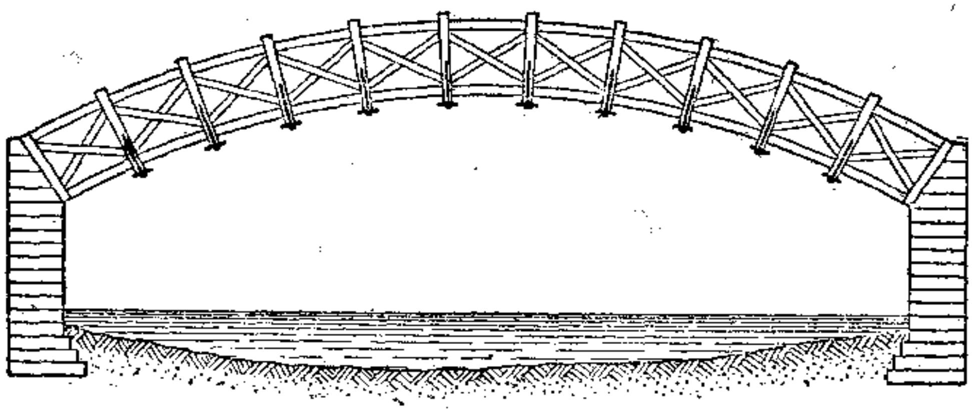


图 119 拔拉隆式拱桥

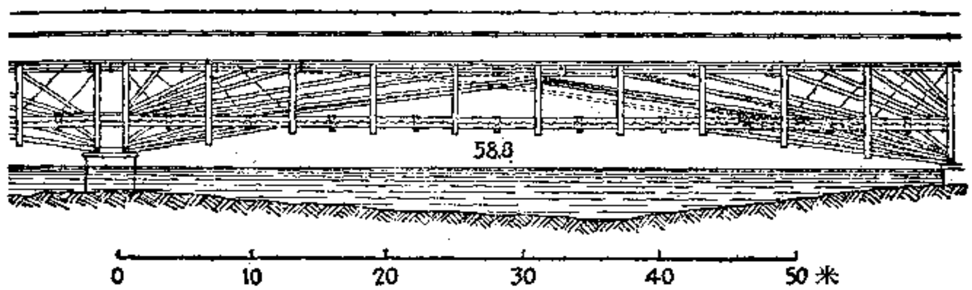


图 120 在沙夫霍逊地方横跨莱因河的格鲁本曼式桥

明其强度足以安全負載 25 吨重量的車輛。 1778 年格鲁本曼和他的兄弟在威廷根 (Wettingen) 附近的林馬特 (Limmat) 河上建造了一座更长的单跨桥，跨长約 390 呎。以上两桥在 1799 年战爭中[1]都被法国人焚毁。以后瑞士[2]和德国都建造起許多这种类型的桥梁(但跨度較小)。最后，木桥的发展轉入拱式构造，因为它具有較大的剛度之故[3]。

从开始建筑鉄路时起，桥梁的設計和建造方法就占据重要地位。 西欧的第一批鉄路是建筑在人烟稠密的地区的，桥梁都属于永久性質，石拱桥、鑄鉄梁式桥和鑄鉄拱桥开始流行[4]。在美国和俄国，情况就大不相同，由于人口稀少，鉄路里程較

[1] 这些桥的詳細叙述見美歇尔(Chétien de Mechel)的"瑞士的三个最著名木桥的平面，剖面与正面图"(Plans, coupes et élévations des trois ponts de bois les plus remarquables de la Suisse)。

[2] 关于瑞士的木桥，見布倫勒博士 (J. Brunner) 所著"瑞士的木桥建筑" (Der Bau von Brücken aus Holz in der Schweiz)，1925，苏黎世。

[3] 这些桥經高随在法国加以推广，特别經怀貝金(Wiebeking)在巴維利亚(Bavaria)推广。

[4] 关于各种早期鉄路桥梁的描述可參看威尔(J. Weale)所著"桥梁的理論，实施和建造"，1853 年倫敦出版。并参看威廉·亨伯尔(William Humber)所著"鑄鉄和鍛鉄桥的实用論文" (A Practical Treatise of Cast and Wrought Iron Bridges and Girders)，1857，倫敦。

长，在經济观点上要求初期費用尽量减少；全部建筑都是临时性的，因此在桥梁建筑中广泛地使用了木材，并設計出各种桁架式样，其形式和拔拉雕所采用的相似。朗式 (Long's system)[1]及湯式 (Town's system) 桁架如图 118 及 121 所示，豪式 (Howe's system)桁架則如图 122 所示；这些都是常用的形式。

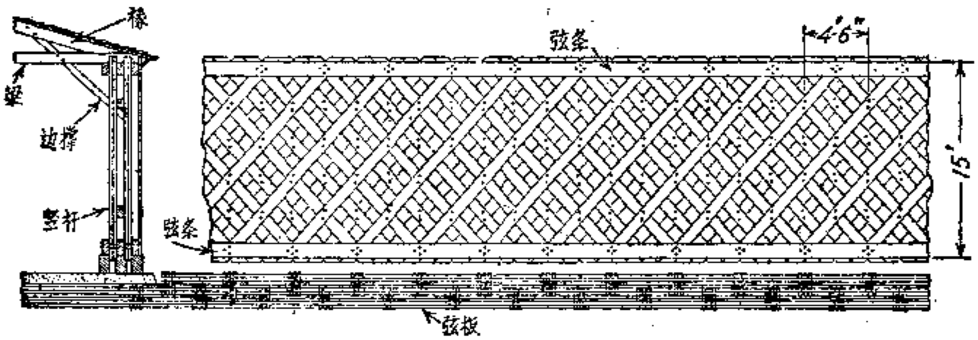


图 121 湯式桥

图 122 豪式桁架

最早的全金属桁架是1840年在美国建成的[2]。图 123表示非濮(S. Whipple)建造的許多桥梁中的一座；上弦杆用鑄鉄而下弦杆与斜杆均用熟鉄。图 124 为非濮 (1852～1853 年) 在侖塞拉尔-薩拉托加 (Rensselaer-Saratoga) 鉄路所建造的桥梁。它与豪式木桥相似，受压杆也用鑄鉄而受拉杆用熟鉄。

非濮是最先在书上講到桁架分析方面的实用資料的人[3]。他不仅討論了均布的静載荷而且也討論了动載荷，对于后者他求出任何一根杆件的动載荷最不利的

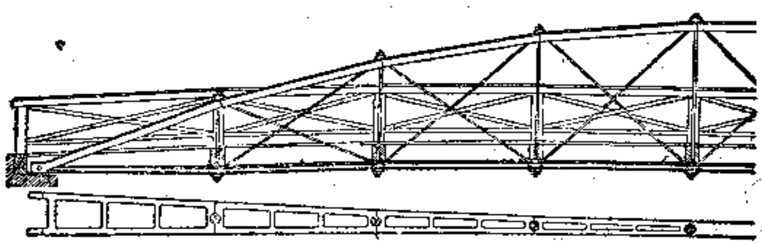


图 123 非濮式桥

[1] 朗式桁架和拔拉雕式的相似，如图 118 所示。
[2] 見麦麟斯的"鉄桥建筑"(Eisenbrückenbau)，莱比錫。这本书的第一卷主要描述桥梁的历史。
[3] 見非濮的"論桥梁建筑"(An Essay on Bridge Building)，1847 年由紐約奥爾巴尼书局出版。

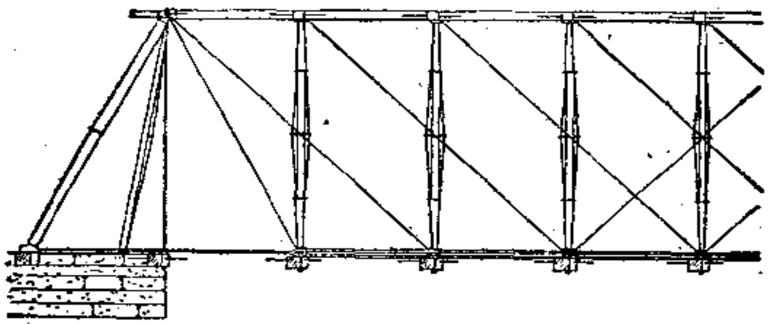


图　124、在倫塞拉尔-薩拉托加鉄路上的非潑式桥

位置。在分析如图 125 所示的桁架时，他假定对角斜杆只承受压力，这样他得出一个靜定系統。从一个支座开始，他用这个系統的各相邻节点上的力的平行四边形求出各个杆件的內力。这样，非潑清楚而概要地作出了兼用解析法与作图法求解靜定桁架的完备有效的方法。在图解法中，他在桁架的綫形图上繞每个节点繪出一个力多边形来。似乎非潑的书还未曾受到有經驗的工程师們的重視，因为在昊普特(H. Haupt)所著一书中(1851 年)的序言里曾說过[1]："当他最初将注意力轉到如何选定桥梁各部件的正常尺寸这个題目上时，从这个专业上参加工作的人那里，无論是工程师或施工人員，或者在书本上，他都得不到滿意的資料"。其实他自己的书比非潑的更不清楚也不完备，而非潑的书却比他的书早上五年就出版了。

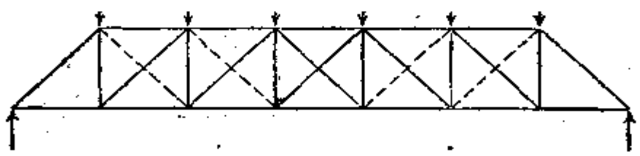


图　125

英国最早的金属桁架是在 1845 年建成的，它是和湯式木桁架相似的格构桁架(图 121)。1846 年，又采用了三角形的华倫式 (Warren's system)(图 126)。它們的分析方法早在 1850 年已被发現。費儿班恩在所著"鑄鉄和熟鉄的应用"(On the Application of Cast and Wrought Iron) (1857 年第 2 版，202 頁) 中說过，在 1850 年他从勃卢德 (W. B. Blood) 那里得到这种分析方法，其后，在計算杆件的应力方面对于均布靜載荷以及动載荷的最不利分布都得出了正确的公式。在亨伯尔 (W. Humber) 的书中 (参看上文)，重要的应力实驗数据是用华倫式桁架作出的 (見該书的第 56 頁)。勃卢德及朵恩(Doyn)用长度为 154 吋(3.85 米)、高度

[1] 赫尔曼·昊普特著"桥梁建筑的一般理論" (General Theory of Bridge Construction)，1851，1869 紐約。

为 12.12 吋(30.3 厘米)的模型做过实驗。用一个特制的測力計来測量內力，此仪器安装在模型中并以代替欲測內力的該杆件。試驗結果与理論結果非常符合。

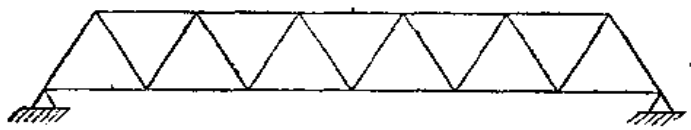


图 126 三角形的华倫式

法国工程师对桁架分析也很重視。早在 1848 年，米昌(M. Michon)在梅兹軍事学院講課时就討論过大跨度屋桁架計算应力的方法[1]。摩林[2]在技术职业学校(Conservatoire des Arts et Métiers)进行过一座跨长 5 米的拔拉雕式鉄路桥桁架(参看图 117)的試驗。用測力計量出的应力与計算結果非常符合。儒拉夫斯基(参看第 33 节)进一步发展了豪式桁架的分析。維列比亚桥便是他一手設計并建造起来的，他选擇了豪式桁架。这种式样在好些年前已經在美国鉄路上应用，但那时(1844 年)还沒有一套分析桁架应力的理論，而儒拉夫斯基則不独設計了这座桥，并且还发展了一个計算杆件应力的方法。儒拉夫斯基完成了这方面的著作并提供了一个分析平行弦桁架的一般方法。

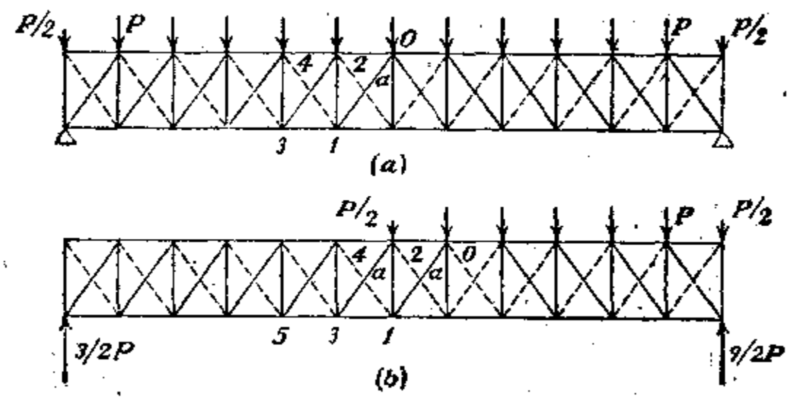


图 127

儒拉夫斯基考虑了如图 127 所示的桁架，他观察到豪式桁架节点具有这样的性质，卽斜杆仅承受压力，并且在均布載荷情况下只有实綫表示的斜杆受力。这样，就得出了一个靜定系統。儒拉夫斯基在分析这个系統时从对称的意义上断定載荷将在两支座之間均等地分布，因此我們可假定从跨度中点起左方的載荷以及

[1] 見"簡史"第 211 頁。米昌的方法編入摩林著"材料的抗力"(Résistance des Matériaux)內 3 版，卷 2，141，1862。

[2] 見摩林著"材料的抗力" 1 版，324～326 节，1853。

作用在中点处載荷的一半都傳到左边支座而其他的都傳到右边支座。現在从上方中央节点 0 开始，儒拉夫斯基断定傳遞到左方支座的載荷 $\frac{1}{2}P$，将在斜杆 $0–1$ 中产生压力 $P/2\cos\alpha$。傳到节点 1 上的力将在螺栓竪杆 $1–2$ 中产生拉力 $P/2$ 并沿下弦将作用有水平力 $(P/2)\operatorname{tg}\alpha$。其次考虑节点 2，我們看出除开竪杆的拉力 $P/2$ 以外，載荷 P 将垂直向下作用。此两力合并在斜杆 $2–3$ 內产生压力 $\left(\frac{3}{2}P\right)\cos\alpha$ 同时沿上弦将作用有水平力 $\frac{3}{2}P\operatorname{tg}\alpha$。同法継續分析节点 $3, 4, \cdots$ 儒拉夫斯基找出其余各螺栓竪杆的拉力分别为 $\frac{3}{2}P, \frac{5}{2}P, \cdots$ 而在各斜杆內的压力分别为 $\frac{5}{2}(P/\cos\alpha), \frac{7}{2}(P/\cos\alpha), \cdots$ 这可看出螺栓竪杆和斜杆的力从跨度中央向两边支座增加。同时，各弦杆內的力在跨度中央为最大，向两边支座逐漸減小。

在不对称載荷作用下，如图 127 b 所示，儒拉夫斯基开始求受力斜杆。知道了反力以后，他断定从左端起头两个載荷将傳到左方支座而受力斜杆将如图中实綫所示。現自节点 0 开始，如上法进行，所有各杆的內力都可以一一算出。有了这个方法，他就能求得桥梁每根杆件的最不利載荷分布情况，从而算出其相应的最大应力，根据它来选擇各該杆件的正常截面尺寸。儒拉夫斯基作出一个桥梁的模型，其中螺栓竪杆是用金属絲作成的。当模型受載时，从金属絲的音調中使他知道所产生拉力的大小。

要算出实际豪式桁架杆件的力是比較复杂的，因为将螺母旋上以后，系統中常产生相当大的初应力，这在应力分析中是不能加以忽視的。儒拉夫斯基进而研究此种初应力，他先考虑一脫离的节間(图 128 a)，指出：如将螺栓竪杆緊固，将使斜杆产生压力，而弦杆产生拉力。但他說：决不能把这些应力簡单地加入于外載荷所产生的应力中去[1]。为了証明这点，他先假定螺栓杆 ab 是被固定了的，然后考虑沿螺栓杆 cd 的垂直載荷 Q 的作用。很容易看出，由于 Q 力的作用，斜杆 ac 中的初压应力将減少，同时在斜杆 bd 中的将增加。当节間在最大剪力 Q 作用下有着象 ac 这样的斜杆 (图 128 b) 仅需极小的压力便能維持此斜杆的位置不变时，桥的任何节間內初期緊固螺栓杆的最大效果便得到了。在这种情况下，总剪力 Q 将由第二根斜杆来傳遞，而螺栓杆和斜杆內最大力的值将和以前分析图 127 时所得的数值相同。

在进一步討論中，儒拉夫斯基又考虑到如图 129 a 所示的更为复杂的系統。他

---

[1] 这种迭加原理在儒拉夫斯基发現以后很久才为工程师們所采用。例如，見雷布赫恩(G. Rebhann)所著"鋼木結构理論"(Theorie der Holz und Eisen-Constructionen)，517，1856，維也納。

建議用力的迭加方法來計算各杆的力。这些力都很容易从图 129 *b* 及 129 *c* 两个簡单桁架中求得[1]。

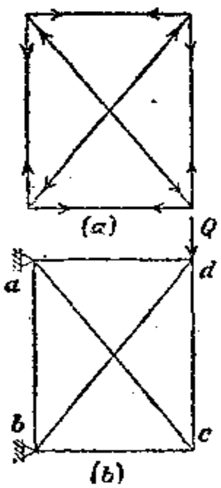


图 128

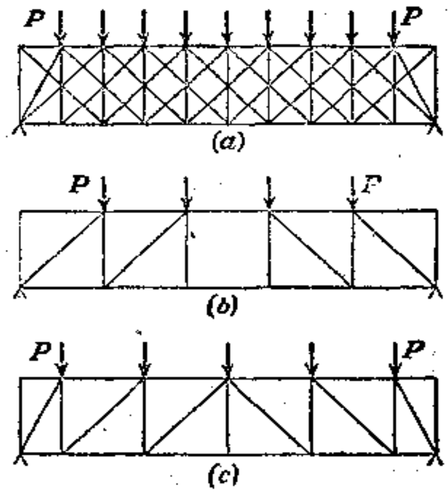


图 129

最后，儒拉夫斯基討論了擱在三个支座上的桁架并提出一个計算均載桁架应力的方法。他要求利用以前用过的分析方法来求出能表示載荷沿桁架 *a0* 部分分布并傳遞到左方支座 *A* 的截面 *mn* 的位置。如果該截面的位置已求出，就能知道那些受力斜杆的傳力方向，他按前述分析方法从上方节点 *0* 开始进行。現在他用了兩条假設来决定截面 *mn* 的位置：(1) 截面与螺栓杆之一相重合（在图 130 中的 *0–0* 螺栓杆）；(2)当桁架变位时此螺栓杆仍保持鉛直。他使用試算法来求此截面。設螺栓杆 *0–0* 与所求截面重合；于是和以前的方法一样便能認出受力斜杆来并求出沿着上弦作用在各节点上的力。現在將上弦的 *0–1* 部分認作是固定在 *0* 及 *1* 两端的一根杆件，他就能求出傳遞到固定端 *0* 处的力。如果螺栓杆 *0–0* 的位置选擇得不錯，此力必与沿上弦 *0–a* 部分作用的力相平衡。这样，儒拉夫斯基解决了他的超靜定問題。

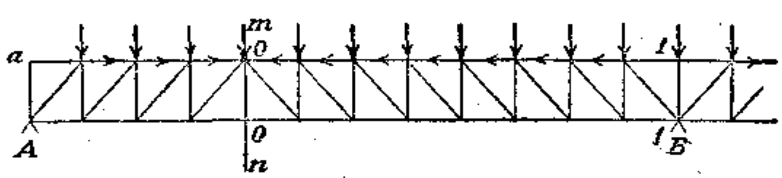


图 130

这些研究結果是在桥梁建成以后才問世的。1850 年，儒拉夫斯基发表了他的

[1] 假定跨长相同。

桁架分析法[1]。1854 年他向俄国科学院提出豪式桥梁的全部著作，获得了吉米多夫(Демидов)奖金[2]。

桁架分析的再次发展应归功于两个德国工程师施維德勒(J. W. Schwedler)[3]和里特尔 (A. Ritter)[4]。施維德勒在他的分析中用上了弯矩和剪力的概念，并且确定了下列关系式

$$V=\frac{dM}{dx} \tag{a}$$

这个关系式在以后桁架分析中被广泛地使用着。施維德勒用这个式子証明弯矩达到最大値的截面是在剪力改变符号的地方[5]。考虑如图 131 所示的桁架，并取截面 mn，施維德勒用三个靜力方程求出三根相交杆件的內力。他指出这些力是怎样随着桁架高度的改变而变化的，并且定出了桁架的最佳（或标准）形式使它的高度与每个截面上由靜載荷及均布动載荷所产生的弯矩成正比。这种載荷对于标准式桁架的斜杆不致产生应力。他指出一根斜杆內应力的符号和剪力的符号一起改变，并給出一个取定桁架段落的界限的方法，該段落內只要包括两根斜杆即可，如果这些斜杆只承受拉力或只承受压力的話。他也討論到一些更复杂的桁架(例如，湯式桁架)，并且建議在分析时可将它們分成簡单的系統如图 129 所示。

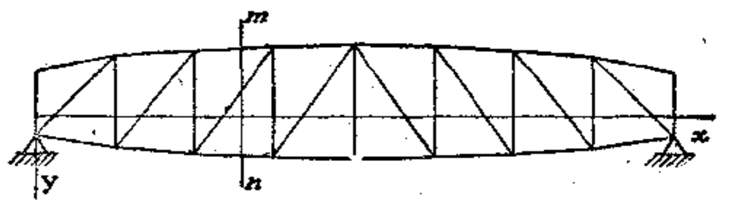


图 131

里特尔簡化了杆件內力的計算，他取一截面 mn（图 131）与杆件相交，并利用对三根相交杆件每两根的交点取力矩方程式。这样，我們每次只要求解一个含一

[1] 見“道路交通与市政工程杂志”(Журнал главного управления пути сообщения и публичних работ), 1850。

[2] 这本书于 1856～1857 年在圣彼得堡出版。关于計算梁內剪应力这部分已在法国翻譯出版。見 Ann. Ponts et chaussées, 卷 12, 328, 1856。

[3] 施維德勒的“桥梁的梁式理論”(Theorie der Brückenbalkensysteme)，建筑工程杂志，卷 1，1851 柏林。

[4] 里特尔著“鋼鉄屋架与桥梁建筑的基本理論和計算”(Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach und Brücken-Constructionen), 1862。

[5] 底尔逊在“历史”，卷2，613 頁上疑心施維德勒并不是第一个导出(a)式的人。但作者不能在任何更老的书籍中查到它，納維埃在所著“課程总結”，234 頁上，(1833 年出版)提出对此点的一个不充分的討論，因为他既过，弯矩得最大値是“經常位于受載杆件的載荷重心鉛直綫上”(est toujours situé dans la verticale contenant le Centre de gravité des poids dont cette pièce est chargé)。

个未知量的方程式就能得出求解各杆内力的非常簡单的公式来。

施維德勒和里特尔两人都用的是分析法。将图解法引入桁架分析中可得出另外的簡化方法，这些是由庫尔曼(K. Culmann)和馬克斯威尔(J. C. Maxwell)两人提出来的。

43. 庫尔曼(1821～1881)

卡尔·庫尔曼(Karl Culmann)出生于柏格薩柏恩(Bergzabern，或称雷恩普法尔兹，Rheinpfalz)。他的父亲是当地的一个牧师。在他父亲的教导下他受到很好的預备教育，因此当他年剛十七岁时，便直接进入卡尔斯魯赫工业学院(Karlsruhe Polytechnicum)的三年級，不再去讀那两年的預备班。毕业以后，他开始在霍夫(Hof)的巴維利亚(Bavarian)鉄路上参加实际工作。在那里他設計及建造过重要的鉄道建筑物。納維埃的"課程总結"在当时是一本最流行的材料力学书籍，庫尔曼在分析結构物时經常参考此书。1849年，庫尔曼为了增进工程学識去英国和美国游历。作为这次旅行的成果，他編写并发表了一篇内容丰富的英美桥梁研究报告[1]。这篇著作对于德国桥梁工程与結构理論的发展起着很大的作用。当时英美的鉄路建設比德国領先，庫尔曼发現有許多供他研究的重要結构物，同时他已具备了比許多英美工程师更好的理論知識，因此在研究新型結构物时，他常常能作出一些重要的評論。

图 132 K.庫尔曼

他的著作有很重大的历史价值。他开始叙述美国的木桥，使他惊奇的是他看到这些木桥不仅仅是仿照欧洲的型式，而且还結合了許多創造性的特点。他特别注意朗氏(S. H. Long)的成就，朗氏在选定桥梁桁架的杆件尺寸上有着很丰富的理論知識，認为朗氏是当时美国最优秀的一位工程师。朗氏的桁架式样和拔拉雕的相似，但是朗氏却清楚地懂得計算桁架杆件应力的有效方法，在朗氏的著作中[2]也給出各种不同跨度結构物全部杆件的最佳尺寸。庫尔曼在叙述几座朗式桥梁以

---

[1] 見 Allgem. Bauztg,卷 16, 69～129, 1851;卷 17, 163～222, 1852。这两节文字中都附有許多精制的英美桥梁图形。

[2] 論文題目是"改良桁桥"(Improved Braced Bridge)。根据改进桥梁专利的章程，1839 年朗氏获到了专利权。

后說过，如果朗氏还在世的話，他不能設想他还会做出什么成績来。他說："美国工程师們过于在实际工作中重視他們的杰出人物。每一个有經驗的工程师他总認为自己是最高的权威，瞧不起別人，也不重視別人的成就"。

在討論豪式結构时，庫尔曼观察到它对于結构理論并沒有提供新的內容。它的成績只在于将朗氏所用的施工方法作了一些实际改进。至于湯式桥梁，庫尔曼則大加非难，不主張在德国应用。最后庫尔曼討論到布尔(Burr)所建造的桥。他認为这些桥是从高随和怀貝金所介紹的欧洲式拱桥中发展出来的(參看上节)。这种型式(他說)在实用上証明是很滿意的，但沒有对它提供理論分析的方法，因为这种桥式很难求出其載荷中究竟有多少部分系由拱来傳力以及有多少部分系由加劲桁架来支承的。

为了更好地将各种类型的木桥作出比較，庫尔曼发明了分析这些桁架形式的新方法。他提出了关于朗式和豪式两种形式的一个无可否認的議論，并且导出近似分析法来求解象湯式桥和布尔式桥的超靜定形式。他的著作与施維德勒的論文(參看上节)也許已构成了当时最完整的桁架分析。

庫尔曼用他自己的分析方法来分析各种型式的木桥，从而論証美国人在他們的計算中对于动載荷的給定值比欧洲規范中所規定的小得多，同时他們所用的工作应力也太高。这事实促使庫尔曼对美国桥梁結构物的安全提出了反对意見。

庫尔曼的第二篇著作(1852)以鉄桥为敘述的內容。作者在英国对布侖涅尔(Brunel)式鈑梁桥(參看第37节)的印象很深，特别对于剛完成的那座巨大的箱形管桥。似乎庫尔曼早已从費儿班恩的著作中(參看第37节)得到了关于这些桥梁的所有初步資料，因为他是最乐于推崇这位工程师的。到了英国，他遇到了和斯蒂芬逊[1]一直合作无間的那班人。在他們的影响下，他显然改变了他的看法，因为在他的著作中，他轉而成为攻击費儿班恩最激烈的人了。他認为把研究問題的初期工作付托于一个沒有充分理論知識的人是非常錯誤的，因为此人在作了大量的浪費性实驗之后，只发現出鉄的抗压性能較抗拉为弱这一点，而这些是人家已經熟悉了的，很可以在現成的书籍里找到。庫尔曼的这种輕蔑論調似乎是恶意中伤的，因为那时候还很少人懂得薄壁結构。而事实上費儿班恩的实驗还是第一次引起工程界注意到在設計受压鉄鈑和受压薄壳时对于稳定問題的重要性。

当庫尔曼开始討論金属桁架时，他指出这些原来都是从現成的木桥桁架上抄襲来的。在华盛頓时，他訪問过里德尔(Rider)工厂。那时該厂正在进行制造里德

[1] 費儿班恩因与斯蒂芬逊意見不合，在1849年完成了康卫桥的第一根管子以后，就不再过問管桥的研究工作了。

尔专利式桥的构件。作者批評了美国的发明家，他認为美国人似乎完全只满足于用他們的发明来賺錢而沒有注意到如何更进一步去改进他們的制造工作。里德尔厂的桥梁，就庫尔曼看来，主要缺点是在空式桥的受压上弦缺乏足够的剛度。由于存在这个缺点，有些这种桥梁的上弦会被压屈。庫尔曼讲得出这个結局，就証明了他是有檢定能力的。根据庫尔曼的見解，在稳定方面以非潑式桁架为較好，因为受压上弦在水平面內有充分的勁度。这位作者特别鄙視那些和湯式木桁架相似的（图 121）鉄制格构桁架。他說明那种式样中的薄而扁平的受压杆不能承受压力而会向两边压屈。在压屈这一点上，它們証明比湯式桥的木質杆件还差，因为用木材制造时，所用材料一定要厚得多。他也說到采用竪向加勁杆是不好的，并且指出这种构件完全改变了格构的工作条件。庫尔曼是反对在德国采用格构桁架的。

当庫尔曼訪問美国的时候，許多美国工程师对鉄桁架很少信心，金屬的疲劳損坏大概是他們不信任的主要原因。他們告訴过庫尔曼，在重复冲击和振动的作用下，纖維性的鉄仿佛变成了結晶結构，一根构件可以在沒有发現这种弱点所造成的任何損坏的象迹以前突然折断。庫尔曼确切地观察到造成这个毛病的原因是美国人用着过高的应力之故。將工作应力减低就能避免疲劳破坏。

給予这位德国工程师印象最深的是美国的悬索桥。他說，在游历期間所看到的一切桥梁中，給他印象最深刻的就是在飞林（Wheeling）横跨俄亥俄（Ohio）河上的悬索桥。那时，美国工程师們正在討論通行鉄道的悬索桥的安全問題。庫尔曼根据他自己的分析能力，認为如果能采用一种适当的加勁桁架来消除过分的柔性，他也贊同在鉄路上使用这种桥梁。他建議在加勁桁架中采用如同跨长等于悬索桥的 1/2 的桁架桥上所需要的同样截面尺寸。

一般說来，庫尔曼对美国的桥梁建筑和美国工程师們的勇敢精神印象很深。不过，在他看来，对結构物事先的理論分析是不够重視的。他批評美国工程师們完成的那些建筑物都不能令人滿意，不是因为理論上的根据不足，就是因为使用中发生損坏。

1852 年回国以后，他继續在巴伐利亚鉄路上从事实际工作，直到 1855 年受聘于新成立的苏黎世工业学院担任結构理論教授为止。庫尔曼很爱好教学工作，他將全部精力投入于編写講义，特别强調采用图解法来分析工程結构的重要性。自从范里賽（Varignon）[1] 时代起，力多边形和索多边形的作图法已为人所共知，拉梅和

[1] 見范里賽："新力学"（Nouvelle Mécanique）卷 1，1725 巴黎。

克萊佩朗在分析拱的問題中用过它，彭西列特[1]在他的擋土墻理論中也用过它。不过在庫尔曼时期以前，用图解法来解决結构上的問題只限于少数特殊情况。庫尔曼的主要成就是在于系統地介紹了图解法来分析所有各种各样的結构，并且出版了第一本关于图解静力学的书[2]。

許多旧有的图解法也被搜罗在他的书中。他認为在介紹图解静力学时投影几何是非常重要的，他在前面几章里討論了力系的投影性質[3]。在論及应用方法时，庫尔曼首先介紹平面平行力系，并指出如何利用索多边形来决定梁的支座反力。他說明了作出弯矩图以及求动載荷最大弯矩位置的方法。接下去作者就給出設定平面图形形心位置的图解法以及图形对于某一軸綫的惯性矩的計算方法。他說明了如何求图形的主軸方向，如何作出惯性椭圓，并指出如何用它来求杆件的截面核心。

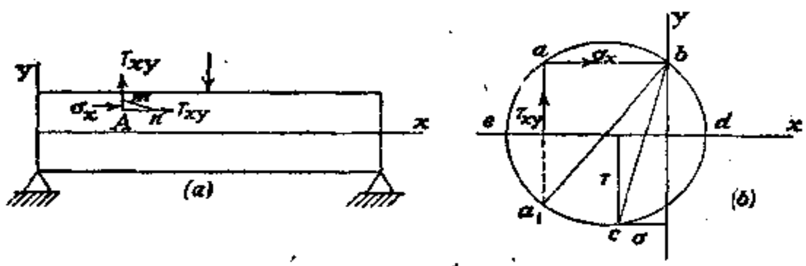


图 133

书中談到梁的弯曲时，庫尔曼指出了用图解法分析任一点 A 的应力(图 133 a)的方法。取一微分元素 Amn 并用 σ_x 及 τ_{xy} 表示經过 A 并垂直于 x 軸和 y 軸的作用在平面內的应力分量，他解释在任一斜面 mn 上作用的法向和切向的应力分量可由应力圓(circle of stress)上各点的坐标来表示。为了作出此圓，我們只要在坐标 τ_{xy} 及 σ_x 上取 a 点(图 133 b)，并取与 a 点位置对称于 X 軸的 a_1 点。于是 a_1b 綫代表了应力圓的直徑，便可作出此圓。从元素 Amn 的平衡方程式中，庫尔曼指出作用在任何平面 mn 上的应力分量 σ 及 τ 可由 c 点的坐标定出，而 c 点系作 a_1c 綫使平行于 mn 而得出。从这个作图法中，他指出在水平直徑两端的 d 及 e 点表

[1] 見 Mém. officier génie, 卷 12, 1835; 卷 13, 1840。米昌在梅兹学校时，就超过了彭西列特，他在拱和擋土墙的理論上用了图解法。庫尔曼在他的书(1880 年于巴黎出版的)的法譯本序言中就提到米昌的講义。

[2] 庫尔曼著"图解靜力学"(Die graphische Statik)，1866，苏黎世。庫尔曼的講义抄本用笔記形式发表在 1864 及 1865 年間。1875 年发表了补充第 2 版第 1 卷，但在第 2 卷要付印前，庫尔曼即去世。1880 年出版了第 2 版的法文譯本。

[3] 他在书的序文中提出一个意見，認为投影几何应列为工程学院的必修課程，同时他假定他的讀者已具备有这方面的一些知識。这个意見并沒有得到普遍的同意，因为图解靜力学的那些部分有直接实用价值的并不必依靠这門新的几何也能很容易地表达出来。

示了 A 点处主应力的大小和方向。他还証明了最大剪应力作用的平面将平分主应力平面間的夹角，而且最大剪应力的大小即等于应力圆的半徑。这里很容易看出庫尔曼的应力圓是应力分析中普遍使用的摩尔圓的一个先兆和特殊情况。知道主应力的方向以后，庫尔曼討論了应力軌綫，并給出如图 134 所示的草图以說明悬臂梁的应力軌綫。

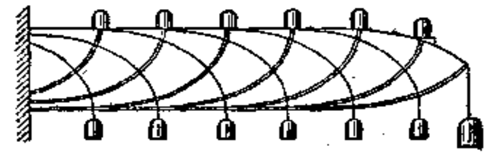
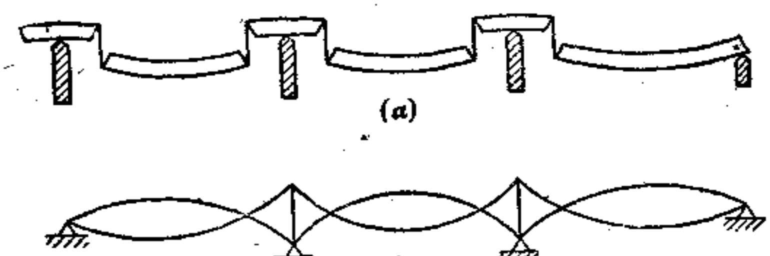


图 134

随后，庫尔曼对連續梁作过通盘的考察，那时連續梁在鉄路桥梁上已广泛采用。他提供了一个求解連續梁問題的图解法，該法以后曾由摩尔稍加簡化(参看第60节)。关于連續梁的反弯点，他建議在結构物中采用中間鉸，如图 135 a 所示，并且观察到利用这种布置方法，較长跨徑的桥梁也能建造起来。連續梁的应力軌綫如图 135 b 的曲綫所示，作者并說明应該仿照这种形式来設計很长跨度的桥梁。他說，他在倫敦工业展覽会上看到过一个桥梁模型和这个概念不謀而合。


(a)

(b)

图 135

庫尔曼用截面法(method of sections)的图解方法来分析桁架，并指出如果在进行分析时每次只要截到三根杆件，他就能将已知外力沿这三根杆件方向进行分解以求出这些杆件的內力。通过考虑各相邻节点的平衡条件并繪出相应的多边形，他又作出了桁架內力的图形。虽然他使用节点法时沒有按照馬克斯威尔所介紹的互易关系(reciprocity relation)，他的图形和根据馬克斯威尔方法所导出的差不多完全一致。

在书的最后一章中[1]，庫尔曼介紹了分析拱和擋土墙的图解法。这本书在結构理論上的作用远远超出苏黎世工业学院教学的范围。他的图解法为德国工程师以及科学家（如尹克勒和摩尔等）所接受并广泛采用，在以后图解靜力学的发展上貢献很大。图解法在意大利是由克里孟納(Cremona)介紹出来的，他是米兰(Milan)

[1] 他計划在第 2 版中将这本书有关这部分的內容加以全面修訂，但在这项工作尚未全部完成时，便不幸去世。

工业学院的一位教授。他在图解計算和互易图形方面那本最著名的书[1]已被比雷(Thomas H. Beare)教授在1890年譯成英文。

44. 朗肯(1820～1872)

W. J. M. 朗肯[2]出生于爱丁堡(Edinburg)。他的父亲自从軍队里退伍以后，便在鉄路上充任工程师，在工程界很出名。朗肯在格拉斯哥(Glasgow)学校讀了一些时候以后，又在爱丁堡讀了几年个人傳授的課程。1836年他进入爱丁堡大学，在福貝斯(Forbes)教授主講的自然科学課听課。他写过一篇"光的波动理論"(Undulatory Theory of Light)論文获得了一枚金质奖章。在此期內，他还接触了一些实际工程，帮助他父亲在爱丁堡及达尔开士(Dalkeith)鉄路管理过一些工程。1838年，朗肯以工程师名义在馬克奈尔(J. B. Macneil)領导下在鉄路上开始工作，其中大部分工作是在都柏林-德罗厄德(Dublin-Drogheda)鉄路担任測量和結构設計。随后他参加过卡列唐梁(Caledonian)鉄道公司所提出的几項規划工作。


图 136 W. J. M. 朗肯

朗肯很早就开始发表科学論著。1842年他发表第一篇論文，題目是"在鉄路上利用柱形車輪的实驗研究"(An Experimental Inquiry into the Advantage of Cylindrical Wheels on Railways)。次年他向土木工程学会提出关于車軸的疲劳損坏的論文(参看第38节)。朗肯在脚注中指出他早期的著作有些是根据他父亲的建議而写成的。从1848年开始，朗肯轉而研究分子物理学和热力学。他发表了好些篇关于物理学上很重要的論文而且在1853年被选为皇家学会的会員。

1855年，朗肯受聘主持格拉斯哥大学的工学院一直工作到他去世为止(1872年)。似乎格拉斯哥大学是英国第一所开办工程教育的大学。約翰·安得逊(John Anderson)教授(1726～1796)(該校过去的教授)曾想开办一个学校来培养技工，在1796年就开办了用他的名字命名的学院講授自然科学和化学。1799年乔治·白喀貝希(George Birkbech, 1776～1841)开始在該校講授数学和应用科学，他們

[1] 見"图解靜力学中的可易图形"(Le figure reciproche nella statica grafica)，1872米兰。

[2] 見 W. J. M. 朗肯的傳記，台特(P. G. Tait)著，刊于"科学論文"(Scientific Papers)一书中关于朗肯的一卷內，1881，倫敦。

为其他城市的工程学院打下了基础。1840 年联合王国成立了第一次土木工程講座。1886 年成立了格拉斯哥-西苏格兰工业学院，它是好几所专門学院联合起来的，安得逊学院的技术部門也成为这个联合組織的組成部分。

1855 年以后，朗肯的大部分精力用在教学活动中，通过他的講課，特別是通过他的教本，对于英国早期发展工程科学以及将工程教育发展到大学水平，他都有很大的貢献。他在材料力学和結构理論方面的大部分創作都包含在他所著"应用力学教本"（Manual of Applied Mechanics, 1858 年第一版）以及"土木工程教本"(Manual of Civil Engineering 1861 年出版）两书中。这两本书問世以后，重版过很多次；即使目前来說，它們仍具有一定的作用。当朗肯写作这些书时，他特別注意到工程各部門中的科学基础，在这些章节中极大部分都是他个人的創作。

当他在"应用力学"一书中写到材料力学时，他首先从数理彈性理論写起。他給出在一点上应力与应变的全面討論，并发展了平衡的基本方程式。这也許是在英国文献中我們第一次看到应力和应变这些名詞的确切定义。在朗肯的著作中，他处理每个問題都是首先取其最普遍的形式，只在以后才考虑具有实用价值的各种特殊情况。朗肯采用了这种写法，以致他的书頗难讀懂，这就要求讀者必須聚精会神地去領会。

朗肯在討論結构理論問題时，在靜力学方面介紹了他的平行投影法[1]，并指出一些重要的用法。他証明"如果通过任何点系而作用的一个平衡力系能用直綫系来表示，則該直綫系的任一平行投影也将代表一个平衡力系"。他将这个原理用到构架理論上，并說明："如果有一个构架，其抗力綫組成一个既定图形，能在一既定直綫系表示的外力系作用下得到平衡，則它的抗力綫所組成的一个图形是原来图形的平行投影，它将在一力系下平衡，此力系可用既定直綫系的相应平行投影来代表；而沿新构架各杆应力所代表的直綫将是沿原来构架各杆应力所代表的直綫的相应平行投影"。他在拱的分析中給出此理論的一个重要用法。首先取一圓弧形抗力綫拱(circular liner arch)[2]（或环）承受均布的正压力 P（参看图 137 a），他断定圍繞此环的推力 T 为压力 P 与半徑 r 的乘积。作出平行投影如图 137 b 所示，当所有水平尺寸按同一比例增加时（例如比

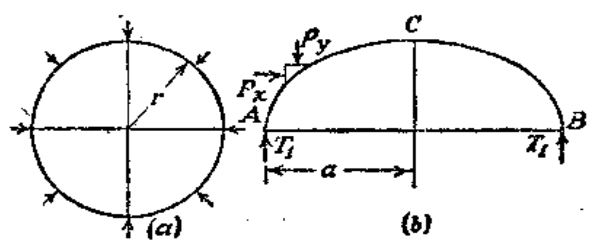


图 137

[1] 見"应用力学"14 版，第四章，1895。

[2] 同上，第 179～184 节，1895 年出版。

值为 n)，我們不改变任何垂直尺寸，这样得出一个椭圓形抗力綫拱(elliptical line ararch)。因为在这个投影中，力的垂直分量大小不变，同时它們中間的距离按比例 n:1 增加，便可断定在拱上的鉛直压力(图 137 b) 将为 $P_y=P/n$。同样，我們看到水平压力为 $P_x=nP$。椭圓拱上水平截面 A 及 B 上的推力将为

$$T_1=P_y a=\frac{P}{n}a=\frac{P}{n}rn=pr_{\circ}$$

同时在垂直截面 C 上的推力为

$$T_2=P_x r=npr_{\circ}$$

在一抗力綫拱 ACB 支承水压力的情况下(參看图 138)，在任一点 M 上，曲綫必須有与深度 y 成正比的曲率，因为只有在这种情况下，作用在曲綫的一元素两端的推力的合力才和水压力相平衡。为了得出这条曲綫，可用一根平直的彈性金屬絲 DCE，在金屬絲的两端分别和 EF 及 DG 两杆相接連，如图中虚綫所示。現在將金屬絲端旋轉 180°，就能用水平力 H 使它弯成 ACB 的情况如图中所示。在任一点处彈性綫的曲率将与該点上弯矩成正比，即与 Hy 成正比，这样得出的曲綫能滿足上述要求。因此，具有曲綫 ACB 的形状的一个抗力綫拱在水压力作用下只产生軸向压力而无任何弯曲[1]。利用平行投影，朗肯由水靜力拱 (hydrostatic arches) 得出地靜力拱 (geostatic arches)。将图 138 中 ACB 拱的水平尺寸減小到某一个定比值而不改变垂直尺寸，他得出如下面情况的一个抗力綫拱，在此种情况下作用在拱上的水平压力集度 P_x 仅为鉛直压力 P_y 的一部分，正同求土压力的情况一样。

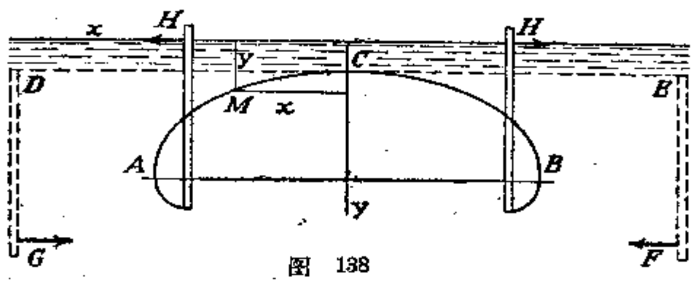


图　138

朗肯在处理一平面多边形构架时說过："若自一点沿徑向作出平行于一多边形构架各杆的抗力綫，则任一多边形各边位于各徑向綫上的各角将代表一力系，它作用在构架各节点上能互相平衡"[2]。这个說明在以后[3]被朗肯推广到三維系統，并

[1] 拱的这种型式由維拉修(Y. Villarceau)用数学方法研究过，見"关于圓柱形抗力綫拱的研究报告"(Mémoires sur les voûtes en berceaux cylindriques)，刊在 Rev. architect. et travaux publics, 1845，巴黎。

[2] 見"应用力学"，140，1895。

[3] Phil. Mag., 1864 年 2 月。

且說明了力多面体与多面构架在某一方式下成互易关系。朗肯的这个研究提供馬克斯威尔发明了互易法的著名成就(參看下节)。

关于悬索桥,朗肯参考了巴洛(P. W. Barlow)的实验,他曾"利用模型做出許多实驗,求出比假定时所必須的輕得多的大梁,这种大梁已能足够加强一座悬索桥的勁度"。朗肯将加勁桁架的撓度曲綫假定出某种一定形状,作出此問題的近似解[1],并且断定"加勁梁的横向强度,必須具有相同跨度的、并适合于承受同一集度的均布載荷的簡支梁强度的 4/27"。这个研究似乎是对加勁桁架的第一次理論性分析。

朗肯考虑剪应力对撓度大小的影响[2]从而对梁的弯曲理論作了重要补充。他說明由剪力产生的彈性綫的附加斜度是

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{VS}{GIb}=\frac{dM}{dx}\ \frac{S}{GIb}$$

式中 V 为剪力,S 为截面下部对中性軸的靜矩,而 b 为沿中性軸处的截面寬度。对于一根受均布載荷的簡支矩形梁,朗肯求出此附加撓度对常用公式所得的撓度之比值为 $6Eh^2/5Gl^2$,他認为这个数值很小,在实际应用上可以忽略不計。当然,在考虑高度很大而腹部很薄的工字梁时,他会作出完全不同的結論。

朗肯在結构理論上的最重要貢献也許是他的"松散土壤的稳定"(On the Stability of Loose Earth)的論文[3],其中他提供了一个求擋土墙恰当尺寸的方法。設想松散土壤压在一鉛直墻背上而頂上地面为水平面(图 139 a)的那种最簡单的情况,由于任一水平面 mn 上各点的应力情况相同,水平面以及平行于墻的鉛直面为应力的主平面。相应的主应力为 σ_x 及 σ_y(图 139 a)。与水平面成傾角 α 的平面上的应力分量 σ 及 τ 很容易由图 139 b 所示的摩尔圓求得。作半徑 OA 与水平面成一角度 2α,于是 A 点的坐标即为所求的应力分量。直綫 AB 的长度表示作用在斜面上的总应力而角度 θ 为該应力的傾斜角(angle of obliquity)。要使沒有任何凝聚力的松散土壤得到平衡,则必須使傾斜角絕不大于摩擦角,或休止角(angle of repose),即我們所称的 ϕ 角。我們从摩尔圓中看到最大傾斜度是在相应于 C 及 C_1 两点的平面处,而我們断定当切綫 BC 及 BC_1 与水平綫成傾角 ϕ 时,土壤平衡的极限状态便达到了。假定我們知道了此极限状态,主应力 σ_x 与 σ_y 間相应的关系就能由摩尔圓得出。图中可以看出摩尔圓的半徑等于 $(\sigma_x-\sigma_y)/2$ 以及圓心的坐标 OB 等于 $(\sigma_x+\sigma_y)/2$,我們由三角形 OBC 求得

---

[1] 見"应用力学"370, 1895。

[2] 同上, 342, 1895。

[3] Phil. Trans. 1856～1857 年。

$$\sigma_x-\sigma_y=(\sigma_x+\sigma_y)\sin\phi$$

由此

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \tag{a}$$

現在考慮图 139 a 所示的擋土墻，即得

$$\sigma_x=\gamma x \tag{b}$$

式中 γ 为土壤单位体积的重量。墻上水平反力的最小值与(a)式的平衡条件相符，为

$$\sigma_y=\gamma_x\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} \tag{c}$$

朗肯推荐此压力值作为研究擋土墻稳定之用。当墻頂上土壤为斜面时，这位苏格兰工程师也曾作出了一个更为普遍的式子来計算作用于該种墻上的土压力。

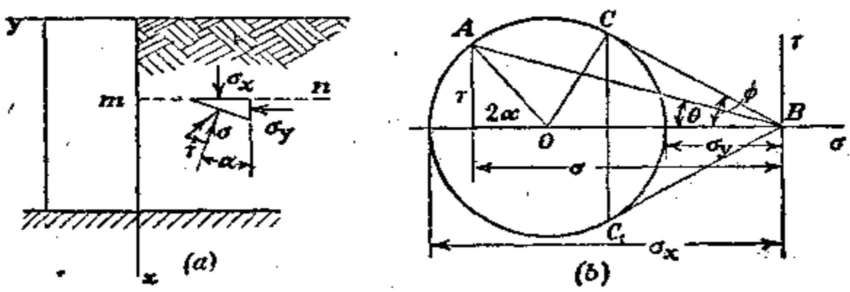


图 139

45. 馬克斯威尔在結构理論上的貢献[1]

我們已經看到庫尔曼在分析桁架时用过力图。但在他的图中，同一个力有时出現好几次。每根杆件的力只用一根单独的綫条来表示的力图作图法，是由馬克斯威尔(J. C. Maxwell)[2] 和台勒(W. P. Taylor)[3] 各自单独地发現出来的。要說明馬克斯威尔的方法，我們可研究一平面三角构架(图 140 a)，其上有三个互相平衡的力 P，Q 及 R 作用着。各杆的力可由作图而得，如图 140 b 所示。这两个图形可認为是两个三角錐体的平面投影。用 a，b，c 表示图 140 a 中三角錐体的三条边而令 O 表示其底，在图 140 b 中也用同样的文字标出。于是对于图 140 a 中組成三角形的每三根綫在图 140 b 中就有相应的一点，經过它作三根綫与三角形各边相平行。对于图 140 a 中每一頂点，在图 140 b 中便有相应的一个三角形，它代表了經过所考虑的頂点的各力平衡条件。图 140 a 和 140 b 組成了两个互易图形的最簡

[1] 馬克斯威尔的傳記和他在彈性理論方面的著作将在以后討論(参看第 58 节)。

[2] Phil. Mag. 卷 27, 250, 1864。

[3] 見佛萊名·堅金(Fleming Jenkin)的論文，刊在 Trans. Roy. Soc. 愛丁堡，卷 25, 441, 1869。

单的例子。很容易看出，根据上述互易关系，有了图 140 *a*，我們就能純粹用几何方法不必考虑各个点的平衡而作出图 140 *b* 的互易图。

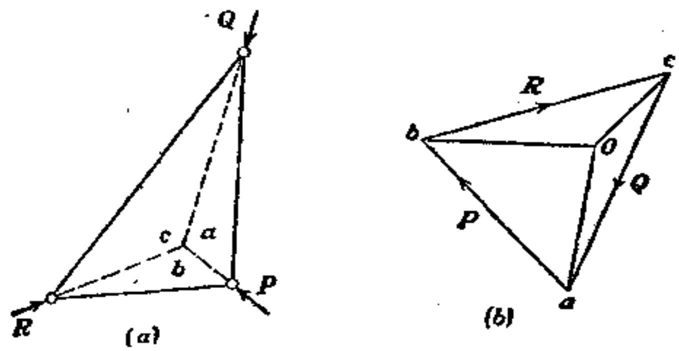


图 140

对于一般情况，馬克斯威尔用下面一段話作为他的結論："如果两个平面图形成互易关系，它們包含着同样数目的直綫，因此两个图形中相应的直綫是彼此平行的，而相应的直綫在一个图形中收斂于一点在另一图形中便形成一个封閉的多边形。如果各力用所作图形的两根綫来表示它的大小并作用在互易图形上相应各綫的端点之間，則互易图形的各点将在这些力的作用下呈平衡"。象这样一个互易图形的重要抽象概念对于实际工程师是不会有很大帮助的，因此我們同意坚金(Jenkin)教授[1] 在摘引这段話以后所說的："有些工程师对所引証的这两段話能否帮助他們得出一个計算构架应力的最簡单而精确的方法感到怀疑"。在这段評論之后，坚金給出几个作互易图的例子，它們是根据当时正在某建筑公司工作的一位有經驗的制图人員台勒(W. P. Taylor)所发明的制图法則繪制的。在欧洲大陆使用互易图是从前已述及的克里孟納的书上流傳出来的(参看第 43 节)，通常这些图形便称为克里孟納图形。

現在我們簡略地討論一下在靜定桁架中杆件內力的一些基本結論。馬克斯威尔在几年以后便达成了这些結論[2]，他說："在吸力与斥力的作用下呈平衡的一平面內任何点系中，每一吸力乘以各点間作用的距离，其乘积的总和等于斥力与各点間作用距离的乘积的总和"。要証明这点，我們可注意此系統的每一点是在一个平面內斥力和吸力系統作用下呈平衡。如果将此系統順时針方向旋轉一个直角，它仍会保持平衡。但如果此种轉动是在作用于所有各点的力系上进行，则在連結两点的每一条直綫的端点上就有两个相等的力与該綫成直角并作用在相反方向

[1] 同上頁注[3]。
[2] 同上，卷 26，1870 年出版。

上。这些将組成一个力偶，其大小等于两点間的力与其相去的距离之乘积。若力为相斥时，其方向为順时針；若为相吸时，则为逆时針方向。現在由于每一点都呈平衡，故此两力偶系也呈平衡，或正力偶的和等于負力偶的和，这就証明了这个原理。

在一个受載桁架的情况下，除了杆件的內力以外，还有外力和反力。如果上述这些力的旋轉是在所有各点上进行的，則旋轉的外力和反力对于在桁架平面內任一点的力矩之和必須与各杆中旋轉力形成的力偶总和相平衡。例如，如果我們有一个具有一根水平下弦的桁架且全部外力和反力都是沿鉛直方向而且都作用在下弦各节点上，于是所有各旋轉外力与反力的力矩总和等于零，而所有拉杆的长度与作用于其內的拉力之乘积的总和必須等于所有压杆的长度与相应的压力之乘积的总和。这个結論可用来檢驗桁架分析的結果；而且符合于下面的情况，即如果所有杆件內的应力在数值上相等，則所有拉杆的总体积将等于所有压杆的总体积。

馬克斯威尔的著述不仅仅局限于上述靜定桁架的分析，而且用一个更为普遍的形式来解决桁架問題[1]。他指出如果有一个具有 n 个节点的平面构架，就可写出 $2n$ 个平衡方程式。通常只需要三个方程式来計算支座反力，如果杆件的数目等于 $2n-3$ 的話，那末其余 $2n-3$ 个方程式就可用来計算构架各杆件的力。若杆件数目超过了 $2n-3$ 根，此問題便属于超靜定的，因此必須将杆件的彈性考虑进去，并且要研究結构的变形才能求解。关于这种做法，馬克斯威尔說："对于所有这类比較不复杂形式的問題，我已經提出一个普遍方法来求解。这个方法是从能量守恒原理中导出来的，并且參考了拉梅的"彈性力学教程"(Leçons sur l'Elasticité)第 7 篇，卽所謂克萊佩朗定理；不过我还沒有看到它的任何具体应用"。

我們可先来計算一下如图 141 a 所示的桁架变位，以說明馬克斯威尔的分析方法。这个桁架是靜定的，因此很容易求出由已知載荷 P_1, P_2, … 所产生的全部杆件的內力。設 S_i 为作用于任一杆 i 的力；l_i 为該杆的长度，并設 A_i 为其截面积。于是此杆的伸长量 $\Delta_i=S_il_i/EA_i$。現在我們遇到了已知桁架各杆的伸长量求任一节点(例如 A 点)变位的几何問題。为了求解此問題，馬克斯威尔設想了一个輔助問題，如图 141 b 所示。在此图中，他仍取同样的桁架，但不加上实际載荷 P_1, P_2, … 而加上一单位載荷于节点 A 上，該处的变位正是我們所要計算的。这个問題仍然是靜定的，我們能求出由单位載荷在任一杆件 i 內所产生的力 S_i。現在我們来計算由一根杆件 i 的伸长量 Δ_i' 所造成的 A 鉸的变位 δ_a'。为此，我們假定桁架各杆，除 i 杆以外，都是絕对剛体。于是由单位載荷移动一变位 δ_a' 所作的功将轉化为 i 杆的应变能，假定出力和变位間的比例关系后，卽得下式

[1] Phil. Mag. 卷 27, 294, 1864。

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \delta'_a=\frac{1}{2}S_i\Delta'_i$$

由此，得

$$\delta'_a=\Delta'_i\frac{S_i}{1}$$

此关系在 Δ'_i 为任一微小值时能适合。如果将 Δ'_i 写成 S_il_i/A_iE，我們将求出在眞实情况下（图 141 a）由一根杆件 i 伸长所造成的变位。如欲求得在眞实情况下总的变位 δ_a，我們只要将所有各杆变形引起的变位总加起来即可。即

$$\delta_a=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_is_il_i}{EA_i} \tag{a}$$

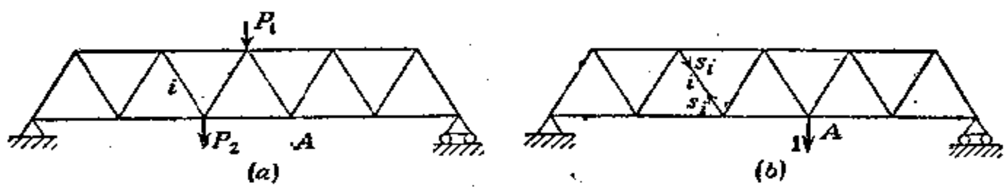


图 141

采用（a）式，便能解出一些超静定的問題。例如，取图 142 a 所示的有一个冗余支座的桁架。为了求得 A 点处的反力 X，我們首先假定这个支座被移去而用（a）式算出因节点 A 所产生的变位。现在照图 142 b 那样分开来計算，我們先算出由于 X 反力单独作用在 A 点处所产生的变位。利用如图 141 b 所示那种情况得出的結果，我們看到由这个反力 X 使桁架任一杆件內产生的力将等于 $-S_iX$，因此，从（a）式反力 X 在 A 点处产生的变位 δ_1，为

$$\delta_1=-\sum_{i=1}^{i=m}\frac{Xs_i^2l_i}{EA_i}$$

因为在图 142 a 那种眞实情况下，A 处的变位将等于零，則决定 X 的方程式将为

$$\delta+\delta_1=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_is_il_i}{EA_i}-\sum_{i=1}^{i=m}\frac{Xs_i^2l_i}{EA_i}=0 \tag{b}$$

可見如图 142 a 的超静定問題的解可簡化为計算 S_i 和 s_i 两力的两个静定問題。同法，有冗余杆件的桁架也可照样求解。

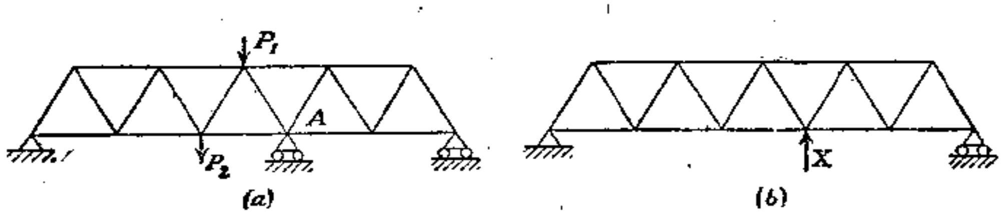


图 142

馬克斯威尔在研究桁架变位时，发現桁架由两种不同类型的載荷所产生的变位，其間存在着一个极其重要的关系。設我們取两种載荷情况如图 143 a 及图 143 b 所示。在第一种情况下，載荷 P 作用在 B 鉸上，要求找出 A 处的变位 δ_a。在第二种情况下，載荷 P 作用于 A，要求找出变位 δ_b。仿照图 141 所說明的方法，我們考虑图 143 c 及 143 d 两个輔助情况。設我們分别用符号 S_i 及 s_i 代表图 143 a 及 143 c 第 i 根杆內的力，而用符号 S_i' 及 s_i' 分別表示图 143 b 及 143 d 第 i 根杆內的力。于是，由(a)式可知

$$\delta_a=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_i s_i l_i}{EA_i} \qquad \delta_b=\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_i' s_i' l_i}{EA_i} \tag{c}$$

将图 143 c 与 143 b 相比較，可知 $S_i'=s_i p$，而且从图 143 d 及 143 a 中，可知 $S_i=S'p$，代入(c)式，得

$$\delta_a=\delta_b=P\sum_{i=1}^{i=m}\frac{S_i s_i' l_i}{EA_i} \tag{d}$$

因此我們从图 143 a 及 143 b 所示两种載荷情况看到，当載荷由 B 节点移向 A 节点时，A 处和 B 处的变位也互相对換。这种互易定理便由馬克斯威尔用最簡单形式表达出来了。

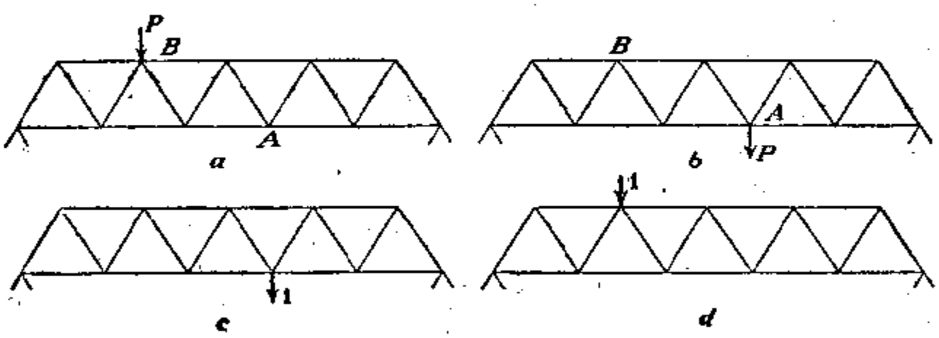


图 143

以后我們将看到这个定理已被推广而成为分析超靜定結构的重要工具。

馬克斯威尔提出他分析超靜定构架的方法是用抽象的形式而沒有任何說明的图形，我們可以就現有的文献来判断，他的成就在当时还不曾为工程師們注意过[1]。十年以后，摩尔再一次发現出馬克斯威尔的(a)式[2]，并且指出它在結构分析上的各种应用。由于摩尔达成他的結果时并不知道有馬克斯威尔的成就，而且所用的推导方式也完全不同，又由于这个方法得到实际应用还只在摩尔的书出版以后，因

[1] 关于馬克斯威尔的成就的討論以及对馬克斯威尔的例題的一些修正都收集在最近尼尔斯 (A. S. Niles) 所写的一篇論文中，刊在 1950 年 9 月 1 日工程杂志上。

[2] Z. Architek, u. Ing. Ver. 第 223, 509, 1874; 17, 1875, 均在汉諾威出版。

此这个方法通常便叫做馬克斯威尔-摩尔法(Mexwell-Mohr's Method)。

46. 彈性稳定問題压杆公式

随着鉄結构的采用带来一个最重要的实际問題，即細长压杆和薄腹鈑的弹性稳定問題。在十九世紀初期，杜留根据他的鉄杆压力試驗（参看第19节）指出，如果端部条件满足于理論的假定，欧拉公式能給出压屈載荷合理的数值。杜留試驗时所用的是相当单薄的杆件，然而桁架中所用的杆件却并不是那么細长。在后面这种情况下，用欧拉公式会得出压屈載荷过大的数值，因此对于求出一个更可靠的公式仍然必須依靠实驗。

在十九世紀中期，根据霍芝肯逊的試驗（参看第30节）所导出来的一些公式得到普遍使用。但在霍芝肯逊的大多数实驗中，杆件端部都是平头的，端部条件沒有明确的規定。有时也用了圓端，而接触面却不是球形，以致在任何微小的压屈下就会引起一些偏心。因此，霍芝肯逊的公式有些地方还是存在着缺点的。更且，在任何实际問題中使用它并不方便，因此后来由勒夫(Love)（参看第30节）和利卫斯・果尔頓[1]都提出了一些簡化公式。

当时对于側向压屈的一个很重要的理論研究是由拉馬尔(E. Lamarle)得出来的[2]。他最先提出欧拉公式的适用范圍，超出此范圍必須依靠实驗。他引出了对于两端鉸接杆件的公式

$$\sigma_{cr}=\pi^2 E\frac{i^2}{l^2} \tag{a}$$

式中 l/i 为长細比，并正确地断定只有在 σ_{cr} 值不超过材料的弹性极限时，它才能給出合理的結果。关于鉄，他明白地假定彈性极限的出現相当于屈伏点的应力，因此得出决定长細比极限值为

$$\frac{l^2}{i^2}=\frac{\pi^2 E}{\sigma_{yp}} \tag{b}$$

对大于此值的长細比，拉馬尔建議采用欧拉公式，而对于較小的值，他建議用常数值 σ_{yp} 作为 σ_{cr}。

显然这个合理的建議沒有被工程师們注意，而从朗肯的书中，我們发現有果尔頓的公式。朗肯給这个公式写过一段有趣的历史。似乎在霍芝肯逊作出他的实驗

[1] 見朗肯的"土木工程数本"(A Manual of Civil Engineering)第20版，236頁，1898年出版。

[2] 拉馬尔的"关于木材弯曲的研究报告"(Mémoire sur la flexion du bois)，刊在 Ann. travaux publics Belgique，卷3，1～64頁，1845年；卷4，1～36頁，1846年。这篇研究报告的第二部分討論了压屈問題。

以前，英国工程师們正用着特里德哥尔德的公式，該公式是按照下述方法导出来的：假定有一根矩形截面的压杆(边长为 $b\times h$)，两端鉸接，在軸向压力 P 的作用下产生撓度为 δ。于是最大压应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{bh}+\frac{6P\delta}{bh^2} \tag{c}$$

对于一已定材料，撓度系与 $M_{\max}l^2/I$ 成正比，同时最大弯曲应力也与 $M_{\max}h/I$ 成正比。因此对于一已定弯曲应力，δ 与 l^2/h 成正比。将此 δ 的値代入(c)式中，特里德果尔德斷定压杆破坏时的压应力可从下式算出

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{bh}\left(1+a\frac{l^2}{h^2}\right) \tag{d}$$

式中 a 为某一常数。朗肯說明这个公式是以下述的意見为根据的，即“这个公式有好些时間已廢而不用，直到利卫斯·果尔顿手里才加以修改，他决定了式子中的常数值是将該式与霍芝肯逊的实驗相比較而得出的”。这样一来，对于鍛鉄，果尔顿得出[1]

$$\sigma_{ult}=\frac{36,000}{1+\frac{1}{12,000}\ \frac{l^2}{h^2}} \tag{e}$$

对于两端固定的压杆，他建議用 1/3000 来代替式中的 1/12000。对于非矩形截面的压杆，朗肯建議用一个类似于(e)式的公式，他用长細比 $\frac{l}{i}$ 代替 $\frac{l}{h}$，而且相应地改变了分母中数値因子的大小。

朗肯在他的教本中也处理了其他一些压屈問題。考虑一根組合的方形鉄管的压力，并假定壁厚不小于方孔一边长度之 1/30，他建議使用公式(e)，取应力为 27,000 磅/吋^2 代替 36,000 磅/吋^2 来計算 σ_{ult}。

关于組合工字梁的弯曲，朗肯討論了梁的受压翼緣側向压屈的可能性。令 b 表示翼緣的寬度，他用下列公式算出翼緣的极限应力为

$$\sigma_{ult}=\frac{36,000}{1+(1/5000)\,(l^2/b^2)} \tag{f}$$

在决定一根工字梁腹鈑的正确厚度时，朗肯認定腹鈑可能压屈是由于作用在中性軸上而与水平綫成 45° 傾角方向的压应力所致。为了計算該应力的极限値，他提供下述公式

---

[1] 公制为 $\sigma_{ult}=\dfrac{2530}{1+0.000083\frac{l^2}{h^2}}$ (公斤/厘米^2)

$$\sigma_{ult}=\frac{36,000}{1+(1/3000)(s^2/t^2)} \tag{g}$$

式中 t 为腹鈑厚度，s 为沿一綫量取的距离，此綫与水平綫成 45° 傾角而在两个相邻鉛直加勁杆之間。

一个更合理的分析短柱的方法是由雪夫勒(H. Scheffler)提出来的[1]。他假定由于施加压力时不可避免的不准确性，在两端总会存在一些載荷偏心。他导出根据偏心率計算的最大应力的公式，因此对于前者的任何假定值，都可以算出危險載荷的数值来。雪夫勒选定各种材料的压杆的偏心率，其大小能使所得的极限載荷数值与霍芝肯逊的实驗結果非常符合。显然，雪夫勒是第一个使用假定的偏心率来計算危險压力的人。这个方法的价值在当时沒有被重視，直到十九世紀末尾，工程师們才放弃所沿用的朗肯公式。

47. 1833～1867 年間擋土墻和拱的理論

在这段时期內，工程师継續用着庫侖的理論(參看第 14 节)来研究擋土墻的穩定。这方面的进展主要是在于发明了图解法来求土压力的大小。彭西列特[2]是最先指出能用图解法求出擋土墻土压力(照庫侖所計算的)的人。在直背墻和頂上土壤为水平面 AC (图 144) 的这种簡单情况下，他求得下列公式来計算墻上每单位长度所受的水平土压力(不計墻与土壤間的摩擦力)，

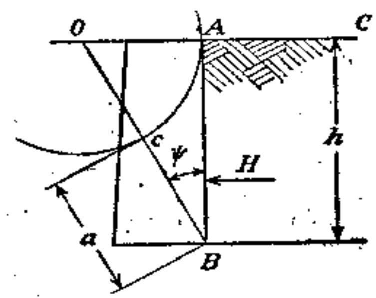


图 144

$$H=\frac{\gamma}{2}a^2 \tag{a}$$

式中 γ 为土壤单位体积的重量，而 a 为从图 144 上所得出的长度，求法如下：

$$a=\overline{Bc}=\overline{OB}-\overline{OA}=\frac{h}{\cos\psi}-h\operatorname{tg}\psi$$

ψ 为自然休止角。于是从(a)式他得出

$$H=\frac{\gamma h^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\psi}-\operatorname{tg}\psi\right)^2$$

如果我們将庫侖公式中的(b)及(c)两个表示式(參看第 14 节)代入时，則这个結果和庫侖的(a)式相符。

彭西列特又发展了一个用于更为普遍的情况下的簡单图解法，其中墻面是傾

[1] 赫尔曼·雪夫勒著“抵抗压折的强度理論”(Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken…)，1858，布隆斯威克(Brunswick)。

[2] Mém. officier génie，卷 13，261～270頁，1840 年出版。

斜的，頂面土壤是多角形界面，而且其中还考虑到墙和土壤間的摩擦力。在这項研究中，他首先导出(根据庫侖理論)求土压力的一个分析式，然后指出怎样作出图解来計算这个式子。

当工程师們在分析擋土墻的稳定中継續使用着庫侖理論时，对于决定出擋土墻所支承的松散顆粒材料中的真实应力分布情况曾作过一些努力。这些工作，正如我們已經知道的(参看第35节)，是經朗肯做过，也經雪夫勒做过[1]；可是这两位的成就长时間沒有被工程界所重視，因之在所討論的这段时期对于擋土墻設計上沒有起什么作用[2]。

在拱的設計方面，工程师們継續把石拱看作絕对剛性的石块所組成的体系。然而，我們知道(参看第4节)，布奥塞已給出两端固定的彈性拱的全解。大概在1830年間，拱的分析中已引进压力綫(line of pressure)和抗力綫(line of resistance)这两个概念了。显然可认为格斯特勒(F. J. Gerstner)[3]是第一个研究压力綫的人。他首先从分析悬索桥入手，处理了悬鏈綫問題，还列出繪制該曲綫的表来。然后他指出将同一曲綫倒轉过来便是适当于等截面拱的一条曲綫。这样的拱在它本身重量作用下只承受压力。由于圓弧拱和椭圓形拱最为通用，他研究了这样一个問題，即怎样将載荷集度分布得使圓或椭圓正好就是这些压力綫。他指出实际上載荷分布情况和用理論方法对假想状况得出的有所不同。这就說明事实上不仅有压力而且还有弯曲作用存在。他还指出这类問題是超静定的，因此可作出无数的压力綫都能满足平衡条件并通过拱頂石和拱座上的各点。对于每一根这样的曲綫就有一个相应的水平推力 H 的值。为了使問題得出明确的解答，最后格斯特勒对实际压力曲綫的位置作了一些任意假定。

有些拱內实际压力曲綫位置的一般概念是由英国科学家亨利·沐斯列(Henry Mosley, 1802～1872)得出来的。沐斯列出生于紐卡索(Newcastle)附近。他先在省立語文学校求学，以后又在阿布威尔(Abbeville)(法国地名——譯者注)求学。最后，他进入劍桥的圣約翰大学于1826年毕业。1836年，沐斯列在倫敦高等大学(King's College)担任自然科学和天文学教授。在該校他講授力学以及力学应用于工程方面的課程，并出版了“技术应用力学”(A Treatise on Mechanics Applied to the Arts 1839)及“工程与建筑的力学原理”(The Mechanical Principles of Engineering and Architecture 1843)两书。从后面这本书的序言里，我們知道

[1] 雪夫勒的論文，刊在 Crelle's J. Baukunst 上，1851。

[2] 关于擋土墻理論的历史，見麦騰恩所著“工程知識講演”(Vorlesungen über Ingenieur-Wissenschaften)，卷3，第一部分，1912。

[3] 見格斯特勒主編的“力学手册”(Handbuch der Mechanik)，卷1，405頁，1831，布拉格。

沐斯列受法国科学家的著作的影响很大，他常常参考納維埃、杜品的著作，特別是彭西列特所著的“工程力学”(Mécanique Industrielle)一书。沐斯列写作的主要功績是把法国工程师的方法介紹到英国来；因此他的写作已表达出当时英国工程文献上很大的进步。其后沐斯列很重視超静定問題，并提出最小抗力原理(The principle of least resistance)[1]来求解此項問題。沐斯列在他的論文“拱的理論”(On the Theory of the Arch)里发表了在拱的分析中应用这个原理的方法，該論文于1839年写成并編入“桥梁的理論，实施和构造”(The Theory, Practice and Architecture of Bridges)第一卷中，該书由約翰·威尔(John Weale)主編，于1843年出版。这篇論文第一次指出了压力綫和抗力綫是两根不同的曲綫。他用一个簡图(图145所示)来說明这点。箭头 A 表示作用在截面 *1–2* 上 a 点处的力。此力加上石块 *1234* 的重量可得出在截面 *3–4* 上 b 点处作用的 B 力。这样繼續下去，就得出作用在 c, d, e, … 的 C, D, E, … 諸力。由 A, B, C, D, E, … 諸力相交所組成的多边形給出压力綫的范圍，而多边形 a, b, c, d, e, … 同样給出了抗力綫的范圍。

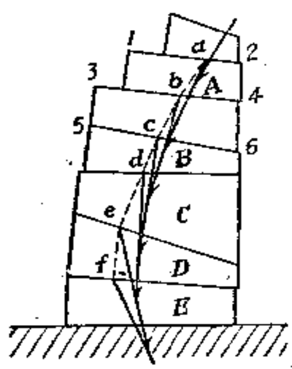


图 145

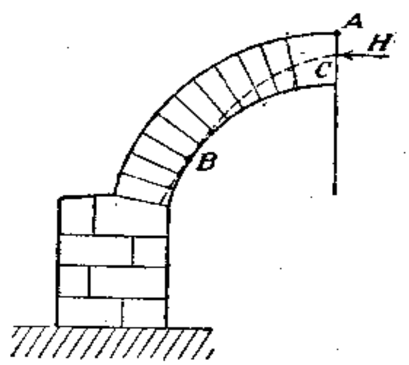


图 146

在繪制对称拱的压力綫时(图146)，沐斯列首先从任意选定的 C 点开始，并加上一个推力 H，其大小能使压力綫变成拱腹綫上某一点 B 处的切綫。將起始点 C 的位置改变，可得出无数的压力綫来。为了从这許多可能作出的綫中选出实际的压力曲綫。沐斯列用他的最小抗力原理說明所求的一根曲綫乃是符合于 H 为最小值的一根曲綫。可以看到，將 C 点向上移动，我們能使 H 減小，因此最后沐斯列找到了通过 A 及 B 两点的实际压力綫。这个結論与庫侖理論的基本假設相符。沐斯列曾說过：“庫侖理論的基本假設在完成我的研究很久以后，我才知道它在‘院外学者研究报告’(Mémoire des Savants Étrangers)中埋沒了六十多年，在我国以及其他国家从那时起对这个問題虽然作过許多深入的討論，但都一直原封不动，

[1] Phil. Mag 1833 年 10 月。

直到最近才被納維埃、拉梅和克萊佩朗及加利德尔(Garidel)等发掘出来，成为他們有价值的研究課題”[1]。

沐斯列的著作引起了德国工程师們的重視，他的“工程与建筑的力学原理”一书經雪夫勒于1844年譯成德文。雪夫勒随后想根据沐斯列的理論将拱的材料强度考虑进去来加以改进[2]。他注意到如果压力綫通过 A 及 B 点（图146），在那些点上的应力一定成为无穷大。为了消除这个困难，雪夫勒建議把压力綫移到拱內，并認定能使 A 及 B 处的最大应力达到材料的极限强度值时的綫作为实际压力綫。

在拱的分析上更进一步的发展是引用图解法来进行研究。彭西列特担負了这个任务[3]。他将庫侖理論作为他分析的根据，作出用图解法来求断裂截面位置的方法。他証明了（在他的著作中）下述原理，卽在拱的拱腹綫上相应于断裂截面的点，此点对拱腹綫所作切綫必通过作用于拱頂石上的水平推力和最后一块拱石与断裂截面之間这一段拱的重力的交点[4]。

拱的图解分析中另外一項改进应归功于庫尔曼[5]。他假定拱的材料不能承受拉应力，由此断定压力綫的极端位置必經过拱頂石中央上方的三分之一点上以及断裂截面中央下方的三分之一点上。他利用这两个点作出石块重力和外加載荷的索多边形，并用此法决定了作用在拱的每个截面上的力（以及这些截面內相应的应力）。对于庫尔曼的工作由于那段时期在拱的理論发展中都沒有考虑到彈性变形，因此得不出結論来。我們将看到，在这方面更进一步的发展是将拱看作一根彈性曲杆来处理，并且采用了納維埃（參看第18节）和布悶塞（參看第35节）所发展的理論。

最后，簡略地討論一下維拉修(Yvon Villarceau，1813～1883)[6]在拱桥上的著名成就是有益的。他是文端(Vendôme)地方[7]一个商人的儿子。小时候不大喜爱讀书，成天地玩弄各种机械器具，学会了許多机匠的技艺。后来他对音乐有兴趣，参加了当地乐队的活动，1830年他搬到巴黎，在音乐傳习所(Conservatoire de

[1] 見 Mém. officier génie，卷12，7頁，1835。

[2] 雪夫勒所著“拱，擋土墙与鉄桥的理論”(Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken)，1857，布隆斯威克。

[3] 見 Mém. officier génie，卷12，151～213頁，1835年。

[4] 我們已看到，这个原理在以前早經拉梅和克萊佩朗予以証明（參看第20节）。

[5] 見“图解靜力学”(Grafische Statik)，435～469頁，1866。

[6] 見他的研究报告“拱桥建造”(Sur l'établissement des arches de pont)，在1845年向法国科学院提出，并发表在 Mém. présentés par divers savants，卷12，503～822頁，1854年出版。

[7] 見約瑟夫·伯特朗德(Joseph Betrand)的“学会頌詞”(Éloges Académiques)，1890，巴黎。并參看普錫尔(F. Pothier)所著“中央制造技术学校的历史”(Histoire de l'École Centrale des Arts et Manufactures)，333頁，1887，巴黎。

Musique)讀书。那时他很注意圣西門(Saint-Simon)的社会学理論。他加入了恩凡丁(Enfantin)教会,在埃及住了几年,直到1837年才回到巴黎,决定到中央制造技术学校(École Central des Arts et Manufactures)讀工程。当他在該校学习时,他表現了优异的才能,在几何学上有过一些創造性的研究。他特别对拱的分析发生兴趣,毕业以后(1840年)发表了这方面的一些論文,刊登在"建筑与市政工程杂志"(Revue de l'architecture et des travaux publics)上。最后(在1845年)他向科学院提出对拱的著名研究报告。随后,維拉修又轉而从事天文学研究,并且在阿拉果(Arago)手下参加巴黎天文台的工作;在那里他写出天文学方面的名著。1867年他被选为科学院的会員。

在他那拱的著作中,維拉修主要着重于选定拱中心綫最合宜的形状。他清楚地看到这个問題是超靜定的而它的全解需要考虑到彈性变形。但他认为对拱的材料的彈性知識还不够充分,因此仍然假定拱石为絕对剛体来处理这个問題。他相信如能将彈性变形考虑在內,則由此求出的形状将极为妥善。这种解决方法使他考虑压力曲綫和拱中心綫相重合的一些情况。我們在前面已經提过(参看第44节)这种情况的最簡单例子是不計拱的厚度。維拉修更进一步地不独考虑了他假定为垂直作用在拱背綫上(或外表面上)的外压力,而且也考虑了拱的重量。在这些假定之下导出压力綫的微分方程,而其积分式要用到椭圓函数。为了使此解得到实际应用,維拉修毫不迟疑地算出許多数值表来,使有經驗的工程师在每种特殊情况下能得出所需求的拱的中心綫以及必需厚度。維拉修将他的理論連同这些表用到許多建成的桥梁上,并指出如果用了他的中心綫的形状,常常能使拱的厚度减小而不致增大应力。

最后,他討論了材料彈性的效应(在他的理論中是被忽略了的),并認定为了得出变位后中心綫的正确形状,拱的高度必須有所增加。取定根据假設的外載荷所作出的索曲綫作为中心綫的維拉修的概念已被广泛运用。用这种方法来确定拱的初步形状和它的厚度通常总是成立的,而所选定的尺寸随后可借拱的彈性理論加以校正。

第八章

1833~1867 年間的数理彈性理論

48. 物理彈性力学与"彈性常数的論战"[1]

納維埃在推导彈性理論的基本方程时(参看第 25 节),假定一个理想彈性体系由分子所組成,在变形中分子之間出現了力。这些力与分子間的距离改变成正比,且沿分子間連接綫的方向而作用。这样,納維埃只要用一个彈性常数便能建立起各向同性体的变形和彈性力之間的关系。柯西原先用了两个常数(参看第 26 节)写出各向同性体情况下应力与应变間的关系。在各向异性体的最普通情况下,泊松和柯西两人都假定 6 个应力分量的每一个都能表示为 6 个应变分量的齐次綫性函数(广义的虎克定律)。为此,引入了 36 个彈性常数。根据上述分子理論的假定,在一般情况下,他們能够将这个数目減少到 15 个。他們也指出对于各向同性体可以作出进一步的簡化,最后只需納維埃所用的一个常数就能表示出各应力分量和各应变分量二者之間的关系。

泊松指出当一根各向同性的杆件处于簡单拉伸时,其横向收縮对縱向伸长之比应等于 1/4,因此,如果令 E 表示簡单拉伸或压縮的彈性模量,則剪切彈性模量将为

$$G=\frac{E}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)}=0.4E \tag{a}$$

又当一个物体承受均匀压力 p 时,則可由下式得出单位体积的改变 e

$$e=\frac{3P\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right)}{E}=\frac{3P}{2E} \tag{b}$$

一个各向同性体的彈性完全可以用一个常数来确定(例如抗拉彈性模量 E),这个

[1] 这个題目的历史在納維埃的"課程总結 3 版,1864 的附录 III 及 V 中討論得最詳細,并参看圣維南所譯的,克列布希:"固体的彈性理論"(Théorie de l'élasticité des corps solides),1883 年巴黎一书的第 16 号后記。

概念在彈性理論发展的早期已被普遍接受了。例如，納維埃、柯西、泊松，拉梅和克萊佩朗等都同意这个概念。

由于乔治·格林 (George Green) 的研究，使得这方面发生很大的改变，他不用任何关于彈性体分子結构形式的假說，提供了一个推导彈性方程的方法。

乔治·格林 (1793～1841) 是一个定居在諾廷翰 (Nottingham) 的磨坊主的儿子，年輕时沒有求学的机会。他之所以获得丰富的数学知識是在后期生活中从书本上自学得来的。1828 年，他发表了他的第一篇論文"在电磁理論中应用数理分析論" (An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism)[1]。从这篇論文的序言里，我們看出格林从法国的数学文献中获得了不少知識。他提到拉普拉斯、泊松、柯西和富勒这些人的著作，并且說："他們的著作，对于分析学家来說，无疑地应当認为是一件喜事。就天文学来說，有个时期認为它已达到了完善的境界，沒有什么地方能进一步应用到他們的著作了，可是其他自然科学方面越来越显示出需要接受这些著作的帮助……"他又說："希望这个难題能促使数学家們細心地多看几遍，特別要請他們明了，这是一个青年写出来的，他的生活环境不好，学識有限，同时由于其他紧要工作忙不过来，深入思考的机会也很少，本文是在这样的光景和方式下写成的"。格林的第一篇論文可認为是他对科学方面貢献最大的一篇論文。在該文中，他用了一种数学函数，即拉普拉斯曾用过的势函数，該文在物理学各方面經証明都有广泛的用处。格林的著作引起数学家們的重視，1833 年，格林已經四十岁了，但还是得到机会进入劍桥大学的岡維里 (Gonville) 和开斯 (Caius) 学院。1837 年 1 月，他以第四名甲等优秀生得到文学士学位。1839 年，他被选为該学院的会員，可惜不到几年，在 1841 年就去世了。

格林在其"关于在两个非晶体介质的公共面上光的反射和折射的定律" (On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-crystallized Media)[2] 一文中提出了彈性問題。他不想作出关于以太的基本成分或分子間相互作用的任何假定，只是假定以太的特性必須服从能量守恒原理。他說："如果……我們完全不明白以太元素彼此之間的作用方式……較为可靠的办法不如取某些普遍的物理原理作为我們推論的根据，这比假定某些作用方式要妥当得多。总之，任意假定会与自然界原来的組織机能迥然不同，特别是如

[1] 見佛勒尔斯 (N. M. Ferrers) 主編的"乔治·格林的数理論文" (Mathematical Papers of the late George Green) 1871 年倫敦。

[2] "数理論文" (Mathematical Papers), 245 頁。

果这个原理本身包含有一种以前被柯西和其他人用过的那些特殊条件时，它也能引出更簡单的計算步驟来。在后面一段論文中包括有选定为推論根据的原理，即：无論按什么方式，任何物質組織的元素彼此之間会产生相互作用，如果将所发生的全部內力乘以它們各个方向的元素对于任何指定部分的質量总和将永远为某一函数的恰当微分”。于是，如果我們用 ϕ 表示該函数，并将达朗培尔原理和虛位移原理相結合，在沒有外力时的运动方程可由下式得出

$$\iiint \rho\, dx\, dy\, dz\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\delta u+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w\right)=\iiint \delta\phi\, dx\, dy\, dz \tag{a}$$

假定位移 u, v, w 均极小，格林断定函数 ϕ 必定为 6 个应变分量的二阶齐次函数

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

在最普遍情况下，这样一个函数包含有 21 个系数，这些系数决定了材料的彈性。采用这个函数可由 (a) 式得出三个运动方程，它們必能适合于彈性介質的每一点。在一个各向同性体中，正如格林所指出的，可以将函数 ϕ 大大地加以簡化。于是它只包含两个系数，而相应的运动方程也只包含两个彈性常数，正如柯西在他原先的方程中所假定的一样(參看第 26 节)。

格林的論文引起了一場論战，从而产生了彈性理論发展中的两个学派。那些贊成納維埃和柯西的科学家們同意关于彈性体分子結构的概念，他們用 15 个常数来确定一般材料的彈性，并且用一个常数来确定各向同性体；另一派附和格林的則分別用 21 个常数和 2 个常数来确定一般材料和各向同性体。当然，他們試过多次想用直接試驗来解决这个爭論，因此有好些物理学家都轉而重視于用实驗来测定这些彈性常数。

渥賽姆 (W. Wertheim, 1815～1861)[1] 特别重視这些系数的测定，他的测定結果到現在还一直在物理学教本中引用。起先，他贊同单一常数假說，他的第一篇論文中提出了各种材料的拉伸模量[2]。他对于这个模量不仅利用了靜力拉伸試驗，而且还用了縱向和横向振动的实驗。他发現 (1) 同一种金属，凡能使密度增加的所有工艺过程(例如錘打、輾压)都能使模量提高；(2) 振动实驗所得的模量較靜力

[1] 渥賽姆在 1815 年出生于維也納。1839 年于維也納得到医学博士学位。1840 年搬到巴黎，并在 1848 年又得到科学博士学位。1855 年以后，他一直是工业学院入学考試主試人之一。1861 年他自杀死亡。

[2] 見 Ann. Chim., 卷 12, 385～454 頁, 1844 年巴黎出版。

試驗所得的为高，并且他指出此中差异可用来求算应力不变下的比热对体积不变下的比热的比值。他又研究了温度对模量的影响从而发現当温度由 $-15°C$ 升高到 $200°C$ 时拉伸模量一般都不断减低。然而鋼对这一規律却是个例外，因为当温度由 $-15°C$ 升高到 $100°C$ 时它的模量随着提高，以后才开始降低，因此在 $200°C$ 时，它的模量将較在 $100°C$ 时的为小，有时还較室温时的为小。这个实驗証明并不存在眞实的彈性极限，而渥賽姆取定拉伸时当永久变形有达到单位长度的 0.00005 的数值时的应力作为彈性极限。

以后，渥賽姆在雪凡提尔 (E. Chevandier) 的合作下，做出很多关于玻璃[1] 以及各种木材[2] 的研究。1848 年，他向科学院提出"关于匀質固体平衡的研究报告" (Mémoire sur L'équilibre des corps solides homogènes)[3]，在此項研究中他采用雷諾 (Regnault) 的建議并用玻璃和金属圓管作为試件，并且量出由軸向拉力所产生的管内体积的改变。这样可算出材料的横向收縮。实驗結果并不和泊松的理論比値 1/4 相符，因此横向收縮只能用各向同性体的两个彈性常数才能得到解释。可是渥賽姆仍然同意单一常数的理論，而建議采用 1/3 作为泊松比的値，虽然該数値既无理論根据而又不能使他的实驗和理論密切符合，他还是这么做了。

渥賽姆很重視材料的电彈性和磁彈性，关于电流对一根导綫的拉伸模量的效应，他作出許多研究。他也研究过一根鉄杆在一个螺綫管中电流对其縱向变形的影响。

在研究彈性体的光学性質中[4]，渥賽姆作出一个很完整的色表，利用它可量出透明杆件伸长时的应力。他发覺如果一种材料并不眞正服从虎克定律时，則双折射与应变成正比，而不与应力成正比。

最后，还要提一下渥賽姆关于扭轉的那篇内容很丰富的研究报告[5]。实驗所用的試件有实心的圓杆、橢圓杆和矩形截面杆，在有些情况下还用了管形試件。材料方面有鋼、鉄、玻璃和木材。从他的試驗中，他又一次断定横向收縮的比値不是 1/4，而是接近于 1/3。通过量出管子扭轉时的管内体积，渥賽姆发現此体积随扭轉角增大而减小(正如在螺旋形状下所考虑的縱向纖維的假設情况一样)。在討論橢

---

[1] Ann, Chim., 卷 19, 129～138, 1847 巴黎。

[2] "木材力学性能的研究报告" (Mémoire sur les propriétés mécaniques du bois), 1848 巴黎。

[3] Ann, Chim., 卷 23, 52～95, 1848巴黎。

[4] Ann, Chim., et phys. 卷 40, 156～221, 1854 巴黎。

[5] 同上,卷 50, 195～321 及 385～431, 1857 巴黎。

圓形截面和矩形截面杆的扭轉中，虽然实驗結果和圣維南的理論非常符合，但他幷沒有应用这个理論。他应用柯西的那个不精确的公式（参看第 26 节）再加上了些修正系数。关于扭轉振动，渥賽姆注意到对于較小的振幅，振动的頻率要高些，幷指出在极小的应力下模量的数値比在較大应力下的要高。

虽然渥賽姆在物理彈性力学上的研究有过很多貢献，但关于彈性常数所必需的数目这个基本問題幷沒有得到解决。每一次实驗中証明了泊松比不是 1/4，这可能說明試件所用的材料不是完全各向同性的。

这段时間內在物理彈性力学上作过許多研究的另一个物理学家是庫普佛（A. T. Kupffer, 1799～1865）。俄国政府在 1849 年設立了中央度量衡实驗室，曾任命庫普佛为該机构的負責人。他很重視金属的物理性质，因为它們会影响量度的标准，他的研究結果发表在法国科学院学报（Comptes rendus）年刊中（1850～1861），該年刊系由中央物理观測所发行的。塔德亨特和庇尔逊[1]曾对此作出評論："关于庫普佛在彈性的振动常数和温度效应上所作的实驗，可以說，在他以前从来沒有人象他那样旣精細而又徹底地作出过"。

庫普佛从扭轉試驗着手以决定剪切彈性模量 G。根据单-常数假說，将 G 乘以 5/2 应可得出拉伸模量 E。可是他发覚这样得出的数値和由拉伸或弯曲試驗所得的相差很大。因此他的試驗結果幷不能支持单-常数假說。

在研究扭轉振动中，他考查了阻尼作用，幷且指出只有一部分阻尼作用归因于空气阻力，其他的都由材料的粘滞性所致。他提出了"彈性后效"問題，指出鋼杆的撓曲不会因載荷取去而立卽完全消失，而是在卸載后經过好几天时間撓曲才漸漸減小。作者指出这种彈性后效也能增加振动的阻尼作用。它不与变形成正比，因此这种振动就不是眞正的等时振动。

庫普佛很細心地考查了温度影响彈性模量的問題，在 1852 年[2]向俄国科学院提出关于这个題材的一篇論文。他証明在温度改变很小的情况下（由 $t=13°R$ 到 $t=25°R$），拉伸模量可用如下公式表示

$$E_{t_1}=E_t[1-\beta(t_1-t)]$$

式中 β 是和材料有关的一个系数。他还証明了温度升高則由于"后效"所影响的阻尼作用也将增加。庫普佛的这个成就曾获得格廷根皇家学会（Royal Society of Göttingen）頒发的一笔奖金（1855 年）。

[1] 見"历史"卷 1，第 750 頁。

[2] 見圣彼得堡科学院的研究报告，数学与物理科学，卷 6，397～494，1857。

1860 年，庫普佛出版了一本书[1]，书中收集了他在杆件弯曲和横向振动方面的許多实驗研究。在該书序言中，庫普佛强調要有一个国立研究院来研究建筑材料的彈性和强度的必要性。他說明通过这个机构可以将各个工厂出产的金属材料的性質刊登出来，这样可以供給設計工程師們以有用的資料。这种措施对提高材料的質量能起有利的影响。

在德国，佛兰兹·紐曼 (Franz Neumann) 和他的学生們也在从事物理彈性力学的研究，而且他們也从实驗中測定彈性常数。从紐曼和庫普佛两人的信件中[2]，我們知道紐曼假定縱向伸长对横向收縮之比并不保持定値，而是視材料的性質而定。紐曼最先想出将小鏡放在矩形杆的各边上将杆受弯，小鏡显示出弯曲时横截面变成了梯形。从杆件两边所作相对轉动的角度上，便可算出泊松比来。

克希霍夫 (Kirchhoff) (紐曼的学生) 在他的实驗中[3] 用了圓形截面的鋼制悬臂梁。在梁的自由端加上有一定偏心的横向載荷，因此同时产生弯曲和扭轉。扭轉角和悬臂梁端点所作切綫与水平綫的交角都可用附着在梁端上的小鏡通过光学方法測出。从这些很仔細地做出的試驗中，克希霍夫得出鋼的泊松比为 0.294，而黄銅的为 0.387。不过他对所用的黄銅杆件采取保留态度，不能認为是各向同性的。

所有这些实驗結果都和各向同性体的单一常数假說相矛盾。此外，这个假說和公認的物質构成的观念更相抵触。这样一来，在彈性理論的后續发展中，由格林所提供的方法，从考虑应变能所推出的应力应变間的关系，被認为是有效的，这个方法目前还在广泛地应用着。

49. 劍桥大学在彈性力学上的早期成就

工业学院的一些法国数学家的輝煌成就对于其他各国数学教育的发展起了很大的影响，同时也是十九世紀前二十五年在劍桥大学开始恢复科学活动的一个重要的因素[4]。1813 年，在查理士·巴貝芝 (Charles Babbage, 1792～1871)，乔治·庇考克 (George Peacock, 1791～1858) 和約翰·佛里德里克·赫尔雪儿 (John Frederick Herschel, 1792～1871) 的領导下，許多劍桥的学生組織了解析学

[1] "俄国中央物理观測所发表的金属彈性的实驗研究" (Recherches expérimentales sur l'élasticité des métaux faites à l'observatoire physique central de Russie) 卷 1. (全部印出), 1～32 及 1～430 頁, 1860 年于圣彼得堡出版。

[2] "历史"卷 II, 507 頁。

[3] Pogg. Ann. Physik U. Chem, 卷 108, 1859 年。并参看 Ges. Abhandl. 316 頁。

[4] 見劳斯巴尔 (W. W. Rouse Ball) 著"劍桥的数学研究史" (History of the Study of Mathematics at Cambridge), 1889 劍桥。

会 (Analytical Society)。他們开会，宣讀論文，并且展开了将欧洲大陆的微积分記数法介紹到劍桥来的著名的学术活动[1]。为了便于傳輸这个記数法，巴貝芝（与赫尔雪儿及庇考克合作）将拉克洛 (S. F. Lacroix) 所著的法文本微积分学翻譯过来 (1816 年)。以后庇考克又出版了 (1820 年)“微积分应用例题集” (Collection of Examples of the Application of the Differential and Integral Calculus)。

当巴貝芝在欧洲大陆游历的时候，他和許多科学家建立了联絡。1828 年秋天，他参加了德国自然科学家年会，并将这次年会的經过情况写了一分报告寄給布略斯特 (D. Brewster) 教授。以后布略斯特和約翰・罗宾逊 (John Robinson) 及哈克尔特 (W. V. Harcourt) 合作也在英国成立了一个同样的协会，称为英国科学促进协会。在这个协会的第二次会議上，巴貝芝极力提倡“研究的重点要放在使理論科学密切結合到国家富强所賴的实际知識上”。他本人很重視实际应用，并且参予与英国鉄道建設有关的各种技术問題的討論。他組織了大西鉄路 (Great Western Railway) 的早期实驗工作，并且建造了一輛专門进行实驗的車子，其中装备有記录机車牵引力和列車速度的一些仪器。他对建造大的管桥感到兴趣，曾与费儿班恩通信討論过模型管的实驗。

威廉・飞韦尔 (William Whewell, 1794～1866) 和乔治・比德尔・艾雷 (George Biddell Airy, 1801～1892) 两人是劍桥大学中承担应用数学早期研究的主要人物。飞韦尔在 1816 年毕业，1817 年被选为該校特棱尼梯学院 (Trinity College) 的学会会員在該院开始講授力学。1819 年出版了他的“力学基本教程” (An Elementary Treatise on Mechanics)。这本书对于将欧洲大陆的数学介紹到劍桥来起了推动作用，因为他在书中直接使用了微积分。同时，飞韦尔还出版了几本更高級的书。在上述一书的基本靜力学部門，他补充了“解析靜力学” (Analytical Statics, 1833)，該书中包含了关于彈性体平衡的一章。这一章里的梁弯曲的基本理論，是参考霍芝肯逊和巴洛两人的著作写成的。为了使学生从牛頓的著作中得到一些知識，飞韦尔出版了他所著的“关于点的自由运动以及关于包括有物界原理第一册及第三册中主要定理的万有引力” (On the Free Motion of Points, and on Universal Gravitation, Including the Principal Propositions of Books I and III of the Principia, 1832)。两年以后，又出版了他的“点的拘束运动和阻抗运动以及剛体的运动” (On the Motion of Points Constrained and Resisted and on the Motion of a Rigid Body)。飞韦尔的著作中最聞名于世的是他那“归納学的历史”

[1] 关于当时劍桥的大学一些重要資料“可参看巴貝芝所著科学家的生活片断” (Passages from the Life of a Philosopher), 1864。

(History of the Inductive Sciences, 1837)和"归納学的哲学"(The Philosophy of the Inductive Sciences, 1840)两书。前面这本书在美国再版过(1859年),而且又被譯成德文和法文。飞韦尔对于高等教育也是很重視的。他出版过一本"英国大学教育政策"(On the Principles of English University Education, 1837),从书中所提到的观点上可以看得出劍桥大学数学教学的方針[1]。

艾雷在1819年进入劍桥大学的特棱尼梯学院。在学生时代,他的成績就很优秀,1823年[2]他以高級优秀生名义毕业該校。1826年,被任为該校魯卡襄(Lucasian)学院的数学教授,并且出版了"关于月球与行星理論、地球形状、岁差、章动*以及变量积分等的数学論文集"(Mathematical Tracts on the Lunar and Plantary Theories, The Figure of the Earth, Precession and Nutation and the Calculus of Variations)。在第二版中(1828年出版)还增加了光的波动理論一章。这本书在劍桥大学广泛使用,作为用数学来求解天文学和理論物理学方面問題的入門书籍。

关于艾雷在劍桥活动的这段时間,他在自傳(第73頁)里写道:"多少年来沒有开过实驗科学(力学、水靜力学、光学)的講座。我相信本校大概对于我頑强地开始講授这方面的課程会认为是很相宜的;尽管这方面还存在着很大的困难;沒有确定講座的期限,沒有确定每天的授課鐘点,也沒有确定的講堂"。他一直准备將数学应用在理論物理学各部門中,并且反对那些专門研究純粹数学的人。在他写給斯托克斯(1868年)关于斯密士(Smith)奖金这件事的信里,他說:"我認为本校是世界上数学教育最崇高的学府。除了由于过分机械地使用分析法这点錯处外,它还是最正确的。从来沒有能象劍桥大学这样精确的教学方法:就該校目前已設立的实用科学中,我特别提出天文学来說,这方面的教育是完善而杰出的。不过与此同时,还有一种非常严重的趋势,就是关起門来搞的那些数学科目沒有能深入到科学的大千世界中瞧瞧究竟那里需要些什么"。

1828年,艾雷被选为該校普侖米安(Plumian)学院天文学教授。从那时起他的大部分精力用在建立劍桥大学的天文台和天文研究中。1835年,他又被任命为皇家天文学家而搬到格林威治(Greenwich)。但他仍和飞韦尔及庇考克保持密切

---

[1] 关于飞韦尔以及劍桥大学在飞韦尔时期比較重要的資料可參看塔德亨特所著"劍桥特棱尼梯学院院长威廉·飞韦尔(William Whewele, Master of Trinity College), 1876。

[2] 威尔佛里德·艾雷(Wilfrid Airy)主編的"乔治·比德尔·艾雷爵士的自傳"(The Autobiography of Sir George Biddele Airy), 1896。

* 地球的微动。

联系，同时他对于数学教育方面的意見仍然受到劍桥大学的尊重。

艾雷經常注重将数学用来求解工程問題。他本人非常关心大管桥的建造，指示費儿班恩怎样才能从模型試驗結果決定出那些桥梁所必需的截面尺寸（参看第 37 节）。他从事梁的弯曲理論，在 1862 年，向皇家学会提出关于这个題目的一篇論文[1]。假定矩形梁为一个二維問題，艾雷得出下列的平衡微分方程：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0 \tag{a}$$

并且指出要滿足这两个方程，須有由函数 ϕ 导出的应力分量的表示式呈如下的形式：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{b}$$

艾雷将函数 ϕ 取为多項式，并选定多項式的各系数使它們能滿足边界条件。他并不認为 ϕ 还須滿足此相容性方程式；因此他的研究是不完全的。可是这是第一次用到应力函数 (Stress function)，因之可以認为这是求解彈性問題的一个很有用的方法的起源。

50. 斯托克斯 (Stokes)

劍桥大学理論物理学的兴盛时期是从乔治·加布利尔·斯托克斯 (George Gabriel Stokes, 1819～1903)[2] 的科学研究开始的。斯托克斯出生在爱尔兰的斯里哥 (Sligo) 南部的斯克灵 (Skreen) 村，他父亲是該村的教长。他家是个大家庭。他在一位教堂执事那里学习过算术方面的初等教育，1832 年，他剛滿十三岁，被送到都伯林的瓦尔 (Rev. R. H. Wall's) 学校去。在該校，他对求解几何問題的能力得到数学教师的重視。1835 年，他进了布利斯托 (Bristol) 学院，在佛兰西斯·牛曼 (Francis Newman) 教授手下攻讀数学，1837 年毕业考試时他获得一个"精通数学"的奖状。

图 147 G. G. 斯托克斯

同年，斯托克斯进入劍桥大学的彭布罗克

[1] Phil. Trans. 卷 153, 1863。

[2] 斯托克斯的"研究报告与科学通訊" (Memoirs and Scientific Correspondence) 由約瑟夫·拉摩尔 (Joseph Larmor) 主編出版，1907 劍桥。雷萊写的斯托克斯的略傳，可在斯托克斯的"数理論文集" (Mathematical and Physical Papers)，第 5 卷中找到。

(Bembroke)学院。关于他在劍桥时的学习情况，他随后这样写过：[1]"在那时剛进入該校的学生，一般說来，不曾学到象现在的学生应学到的那么深的数学；所以我进入学院时还沒有学过微积分，只是剛学完解析几何。在我入校的第二年，才开始在一位私人教师霍普金斯(Hopkins)先生那里学到微积分。霍普金斯先生在当时是很有名望的，經他教过的許多学生，他們在本校的数学考試中都获得了优良的成績。1841年，我在班級中得到甲等数学优秀生的称号和斯密士奖金而名列第一。随卽被选为本学院的特惠奖学会員。当我得到此項学位后，被留在学院里并私人傳授一些学生。我想我应当着手作些独立研究工作；霍普金斯先生看过我的学位論文，經他的建議我开始研究水动力学这一学科，那时我对这方面的学习很馬虎，比不上乔治·格林在这方面以及其他部門的惊人成就——他一直留在本校直到他去世为止……1849年，我三十岁了，被选为魯卡襄学院的数学教授，从那时起就不再傳授私課了。当时的天文台是由普俞米安学院的教授会領导的。負責人为察里斯(Challis)教授，他常常講授一些关于水动力学和光学的課程，正如他的前輩艾雷所作过的一样。在我被选拔时，他很乐意将他所講授的水动力学和光学这項工作交給我，以便他能专心搞天文学一門課程，因为天文学与天文台业务是密切相关的，他同意我用他本人以前所写出的教程来担任这个工作"。

斯托克斯的第一篇論文是討論水动力学問題。可是在1845年他向劍桥大学科学会提出的那篇論文"流体在运动中的內摩擦理論以及彈性固体的平衡与运动的理論"(On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids)[2]中他特别着重在推导各向同性体彈性的基本微分方程。斯托克斯認为彈性理論必須根据物理实驗的結果而不能根据固体分子結构的理論推測。他說："固体之所以具有納入等时振动形态的能力証明系由微小位移所引起的压力作用所致，它和这些单純位移的齐次函数有关[3]。根据微量迭加的一般原理，我可以进一步假定由于各种不同的位移所引起的压力是可以迭加的，因此压力为位移的綫性函数。"他根据这些假定，最后建立了包含两个彈性常数的平衡方程。他指出彈性橡皮[4]和胶质物的横向收縮对縱向伸长之比值和单一常数假說所預計的大不相符。于是他叙述了求任一特殊材料的两个彈性常数(E 及 G)的比值的一些实驗(包括拉伸，扭轉和均匀压縮)。他說："有

[1] 見格拉兹布洛克(Glazebrook's)的論著刊在"良語"(Good Words)，杂志，5，1901。

[2] 見斯托克斯的"数理論文集"(Mathematical and Physical Papers)卷1，75頁。

[3] 我們已經看到(参看第4节)虎克曾提过等时性振动是一种物理事实証明应力与应变成比例的定律。

[4] 这里他指的是拉梅和克萊佩朗的研究报告(参看第28节)。

两种完全不同的彈性：一种是物体經均匀受压有恢复其原来体积的傾向；另一种是物体經約制成另一形状不依靠压力而該物体有恢复其原来形状的傾向。”考慮彈性的第二种情况，斯托克斯取用固体和粘性流体作出一个很重要的比較。他說：“許多高度彈性的物質，例如鉄、銅等，还是具有明显程度的塑性。在实驗中发現鉛的塑性比鉄的或銅的要大些，但它的彈性就要差些。可能所有的物質其塑性愈高則彈性愈低。当一物質的塑性一直繼續增高而其彈性則相应减低，就慢慢成为一种粘性流体。似乎固体和粘性流体之間并无明显的分界綫”。

斯托克斯从他的水动力学的早期研究轉向光学方面。假定将以太作为一种均匀非晶体的彈性介質（如同一个彈性固体一样），他又一次在彈性理論方程上用工夫。在他的論文“关于折射的动力理論”(On the Dynamical Theory of Diffraction)[1] 中，他說：“这个方程可由假定介質为元分子 (ultimate molecula) 組成而得出，但并不需要采用这样的假說，只要認定介質是連續性的也能得出同样的方程来”。

他在这項研究中，建立了两个定理，經証明在彈性体振动理論上是非常重要的。設我們根据具有一个自由度的系統最簡单的一种振动情况来檢查这些定理。距平衡位置的位移 x 可用下式表出

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \tag{a}$$

我們看出上式中属于初位移 x_0 的这一部分可从属于初速度的那部分对 t 微分并以 x_0 代 $\dot{x}_0$ 求得。这符合于最普遍的情况，因此斯托克斯断定，在彈性介質中，“由初位移所形成扰动的部分可从由初速度形成的該部分对 t 微分并以代表初位移的任意函数代入以初速度所表示的任意函数后求出”。这样，求位移的問題便局限于只求出由于初速度造成的位移就可以了。

第二个定理是处理一已知变量力沿已知方向作用于介質某一已知点处的扰动。仍旧考慮具有一个自由度的系統，并且用 $f(t)$ 表示系統的单位質量的扰动力，我們发現，由于冲量 $f(b)dt$ 在瞬时 t 傳遞到此系統上，則相当于 $f(t)dt$ 的速度将产生增量 $d\dot{x}$。于是从 (a) 式中的第二項的形式，我們可断定，由于在瞬时 t 所傳遞的速度 $f(t)dt$ 的增量，在任一瞬时 t_1 的位移将为

$$\frac{f(t)dt}{p}\sin p(t_1-t)$$

[1] “数理論文集”卷 2, 243 頁。

現在考慮由 $t=0$ 到 $t=t_1$ 这段时間間隔內扰动力的作用，我們可得出下式[1]

$$x=\frac{1}{p}\int_0^{t_1} f(t)\sin p(t_1-t)\,dt \tag{b}$$

来表示該系統在瞬时 t_1 的位移。同样的推論可应用到一般情况上，而且当知道了系統的自由振动后也能算出由一个扰动力所产生的位移。

同一年（1849 年）里，斯托克斯提出了他在折射方面的研究成果，他又作过以前討論到的（参看第 40 节）桥梁的动力撓度的研究。

1854 年，斯托克斯成为皇家学会的秘书。这个新职位的工作分去了他許多精力，雷莱曾在斯托克斯的訃告中写道："論文汇刊的讀者会覺察到从那时以后作品发表的速度有一显著的下降。这反映出科学家必須让他們从事科学研究，而不应該使他們担任过于繁重的行政职务。"关于斯托克斯的实驗工作和他的講課，雷莱說道："他的实驗工作是用最实效的器具来进行的[2]。他的許多发現是在他家里的餐室后面一条狹窄的过道里做出来的，正对着过道有一个装着百頁窗扇的窗子，百頁窗扇上又开了一条細长的孔口；在窗口的擱板上放置着結晶体和三棱鏡。在他的講課中也同样很有实效的。多少年来他講授的一年期的物理光学課程，有許多数学学位候选人参加听講。总之，其中很有些人喜欢在这位精通該科的学者下領教，因为他能随时将計划中的新鮮事物引入他的講演中"。

斯托克斯在劍桥經常重視理論課程的数学工作，并且經常担任数学优等生考試的主試人。当他受任魯卡襄学院的数学教授以后，他負責选定参加斯密士奖金考試諸篇論文中最优秀的一篇。这些考試論文，連同他給数学优秀生考試所出的題目都收集在"数学論文集"（Mathematical Papers）第五卷作为附录。

从 1885 年至 1890 年，斯托克斯任皇家学会的会长。斯托克斯的科学界同輩尊敬他的最显著例証，乃是紀念他当教授五十周年的那次庆祝会。許多杰出的科学家从世界各地都如期赶到劍桥来向他表示祝賀。

50 a. 圣維南 (Barré de Saint-Venant)

圣維南在 1797 年出生于佛尔托修（de Fortoiseau，或称圣馬尼 Seine-et-

---

[1] 将一連續扰动力的作用再分为微小时間間隔以及将那些时間間隔內所产生的运动总加起来得出强迫运动这个概念似乎是由杜哈美尔（M. C. Duhamel）最先用在"关于质点任何系統振动的研究报告"（Mémoire sur les Vibrations d'un système quelconque de points matériels）中，J. école polytech.（巴黎），第 25 期，1～36 頁，1834 年出版。圣維南在他的杆件强迫振动的研究中也用过这个概念。見圣維南所譯克列布希的书的譯本，538 頁。

[2] 那时劍桥还沒有物理实驗室。有名的卡文笛施（Cavendish）实驗室是在 1872 年由馬克斯威尔經手成立的。

Marne) 城堡[1]。很早他就表現出数学才能，得到他父亲的細心教导，他父亲是个农村經济学家。以后他在布魯治 (Bruges) 教堂求学，1813 年他年滿十六岁，經过选拔式入学考試进入工业学院。在該校他表現出卓越的才能，在班級中名列前茅。

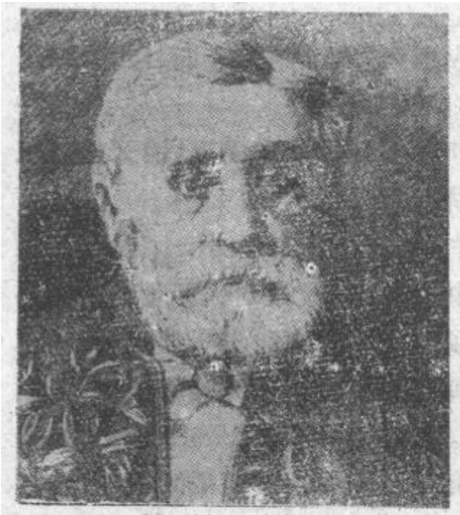


图 148 圣維南

1814 年的政变对圣維南的事业有很大的影响。該年三月，联軍逼近巴黎，工业学院的学生們都动員起来了。1814年 3 月 30 日那天，他們将大炮运到巴黎的炮台去，当时圣維南是支队的第一軍曹，他从行列中跳出来高喊口号[2]："我的良心不愿为剁削者作战……"，他的同学們对于他这种行动非常憤怒，于是宣布圣維南为逃兵，并且再不容許他在工业学院継續学习。著名数学家开尔士 (Chales) 是圣維南的同学之一，事后他平心静气地評論了圣維南，他說："如果圣維南如他所說的一样，能被相信是有良心的……即使你們把他碎尸万段也将毫无怨言。这种胆小者的控告是荒謬的。恰好相反，他是非常勇敢的，在 3 月 30 日那天，証明他激起他的队长的憤怒和同伴們的侮辱比起将自己暴露在哥薩克人的刺刀下其坚毅精神将胜过百倍"[3]。事变以后的八年中，圣維南在火药工厂充当助手。其后在 1823 年政府准許他不通过考試进入桥梁道路学院。在該校有两年之久，受尽了同学們的歧視，他們既不和他講話，也不和他同坐在一起。他并不顾及这些不愉快的行动，专心攻讀，上課从来不缺席[4]，最后以該班上第一名毕业。我們不能估計所有这些事对于圣維南后来的事业究竟发生了多大的影响，但可以看出，以他的卓越才能、毅力和热爱坚苦工作的精神，他这样一位工程师在社会上的发展过程并沒有如我們所猜想的那么快。在大英百科全书上沒有提及圣維南的卓越成就。在法国大百科全书上也写得很少，我們却在塔德亨特和庇尔逊合著的"彈性力学史"的扉頁上看到有"为了紀念近代最先进的彈性学家圣維南，編者謹以編著本书的劳力奉献給他"的献詞。

[1] 圣維南的生平事迹由包沁涅斯克 (M. J. Boussinesq) 和佛拉門特 (M. Flamant) 写出并刊載在 Ann. ponts et chaussées, 第 6 組,卷 12, 557; 1886。

[2] 見伯特朗德 (J. Bertrand) 的"学会頌詞" (Éloges Académiques)，新的一組，42 頁，1902 年巴黎出版。

[3] 見伯特朗德的頌詞。

[4] 这时圣維南参加听納維埃的講課，对于这位卓越的工程师兼科学家表示过无限崇敬。

圣維南从桥梁道路学院毕业以后，在尼佛萊斯 (Nivernais) 运河上工作了一段时期 (1825～1830 年)，以后又在阿登尼斯 (Ardennes) 运河上工作。他在业余时間从事理論研究，1834 年，他向科学院提出两篇論文：一篇是論述理論力学上一些定理，另一篇是关于流体动力学的問題。这两篇論文使他在法国科学界出了名，在 1837～1838 年間哥里奥里斯 (Coriolis) 教授生病期內，桥梁道路学院当局請他去講授材料力学。这些講义是用石印印出来的[1]，它具有很重大的历史价值，因为其中所提到的一些問題以后就成为作者科学研究的对象。那时在材料力学方面最高級的书是納維埃的"課程总結"。虽然納維埃自已建立了彈性理論的基本方程，但他并沒有把它們作为教材，同时在闡述棱柱杆的拉、压、弯曲和扭轉的理論时，他仍然假定了杆件的横截面在变形时保持为平面。圣維南是第一个想使学生們去注意彈性理論上新发展的人。在他的講义的緒論中討論了关于固体的分子結构和分子之間作用有力的一些假說。利用这些假說，他解釋了应力的概念。他講到剪应力和剪应变，并証明拉力作用于一个方向而同样大小的压力作用于与拉力成垂直的方向即組成为純剪切。在处理梁的弯曲时，他注意到剪应力，但那时还不知道剪应力在截面上是怎样分布的。他假定为均匀分布，将梁內剪应力和纵向纖維中拉、压应力合在一起来計算主应力。他在討論梁的安全尺寸时，認为最大应变必須作为选定容許应力的基础。

那时，彈性理論对于具有实用意义的問題还沒有精确的解法，而工程师們对于这类理論研究也不抱有很大的期望，他們宁愿应用經驗公式[2]来选定結构物的安全尺寸。圣維南不相信这样能使工程科学得到任何进步，并認为只有把实驗研究和理論研究結合起来才能增进材料力学的知識。

当圣維南在桥梁道路学院講課时，他也在巴黎市政府担任过实际工作。但由于有些計划沒有被批准，于是他辞去了这項工作表示异議。圣維南很早就热心于水力学以及該学科在农业上的应用，发表过几篇关于这方面的論文，这些論文使他获得了法国农业学会的金质奖章。他还在凡尔賽农业学院講授过两年力学 (1850～1852 年)。这些职业并沒有分散他对原来爱好的工作的注意力，他仍然継續在彈性理論方面进行研究。1843 年，他向科学院提出一篇关于曲杆弯曲的研究报告，又在 1847 年发表了关于扭轉的第一篇研究报告。然而他对于处理扭轉和弯曲問題的最后意見是在以后 1855 及 1856 两年所发表的两篇著名的研究报告中叙述出来的。这些将在以下各节再加討論。

---

[1] 这些講义的原稿可在桥梁道路学院的图书館里面找到。

[2] 見維卡特对于弯曲理論的評論(参看第 19 节)。

圣維南不仅着重于分析静力所产生的应力，而且也研究了沿着梁运动的載荷的动力作用和一个載荷落到杆件上而使它产生横向或縱向振动的冲击作用。关于这些問題的几篇重要論文也将在以后討論。

圣維南还热心于彈性理論基本方程的推导，积极地参加了关于彈性常数所应需的个数的辯論。他一直站在根据固体的分子結构的假定而采用較少数目的常数的那些科学家这边。他在这个問題上的意見曾在許多篇論文中討論过，最后都全部收集在他所主編的納維埃所著"課程总結"的附录五里面（645～762 頁）。

圣維南在穆依格諾（Moigno）所著"力学分析教程，静力学"（Leçons de Mécanique Analytique, Statique, 1868）一书中很全面地叙述了彈性方程的历史，該书最后两章（616～723 頁）是他撰写的。穆依格諾在該书的序言中对这两章的內容作了很重要的評語。当初他对彈性体靜力学这部分要求有一位彈性理論专家来写，可是每次他邀請一位英国或一位德国科学家来合作时，他总是得到同样的回答："就在你的旁边，你們那儿有最优秀的权威人士圣維南，請詢問他，听从他，追随他"。他們中間有一位，艾廷豪森（M. Ettingshausen），还补充說："你們的科学院犯了一个錯誤，一个重大的錯誤，它沒有向一位滿載荣誉的数学家开門"。最后，穆依格諾說："在法国一般人都非常藐視他，认为他只有极单純的数学上的荣誉，然而我們敢严正地說圣維南在国外是享有盛名的"。

1868 年，圣維南被选为科学院的会員，到他去世为止一直是該院的力学权威。他継續在固体力学这方面积极研究，特别注重于振动問題和塑性变形問題。自从特萊斯加（Tresca）作出金属在极大压力下塑流的实驗研究[1]之后，他的注意力就集中在塑性变形問題上。那时这是一个完全新的研究課題，而圣維南是第一个建立塑性的基本方程并且将它們用到（几个）实际問題中去的人。

圣維南从来沒有把他关于彈性理論的大量研究写成书本，不过他主編了納維埃的"課程总結"（1864 年出版）并且編譯了克列布希所著的"固体彈性理論"（1883 年出版）。在前一本书中，圣維南的加注很多，納維埃的原始資料只占有該书的十分之一！而克列布希所著的书由于編者的注释在字数上也增加了三倍。这两部著作无疑地是所有从事研究彈性理論和材料力学发展史者最重要的书籍。

圣維南継續他的研究工作一直到他去世为止。在 1886 年 1 月 2 日他发表了最后一篇研究报告刊在"法国科学院学报"（Comptes rendus）上。1886 年 1 月 6

[1] 見特萊斯加的"固体流动的研究报告"（Mémoires sur l'écoulement des Corps Solides）刊在"各方学者的研究报告"（Mém. presentés par divers savants）卷 20，1869 年。

日这位偉大的科学家便逝世了。法国科学院的主席在宣布圣維南逝世的消息时用了下述的語句："老人对我們广大的同事們很爱护。他在这么高的岁数下无疾而終，临危以前还在研究他所爱好的一些問題，他还是希望能貢献出象拔斯噶和牛頓貢献过的那么偉大的成績来"。

51. 半反求法

1853年，圣維南向法国科学院提出他那关于扭轉的划时代的研究报告。由柯西，彭西列特，庇禾伯特 (Piobert) 和拉梅所組成的审查委員会对这个报告极为贊許，并作出建議将它公开发表[1]。这个报告不仅包含了作者的扭轉理論，而且叙述了当时已知的所有彈性理論連同他本人所发展的許多重要补充。圣維南在緒論中說明如果知道了代表位移分量 u, v 及 w 的函数式时，則彈性体任一点上的应力可以立郎算出。将已知函数式 $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ 及 $w(x, y, z)$ 代入应变分量的已知表示式中(參看第25节)，郎

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

他通过微分得出这些应变分量，于是应用虎克定律算出应力分量。有了应力分量的表示式，从平衡微分方程[參看第26节(b)式]和边界条件[參看第26节(a)式]，他得出了产生假定的位移量所必須作用于物体上的力。圣維南認为按此法进行以及假定 u, v 及 w 的表示式，很难得出实用的解式。在反求的情况下，各力均为已知，我們必須将平衡微分方程积分，而积分法也不見得能使我們将此問題解成一般形式。

于是圣維南提供了**半反求法***(semi-inverse method)，利用此法，他只要假定位移和力的一些特征，从而推求出这些量的其余特征使能滿足所有的彈性方程。他指出凡学过基本材料力学近似解的工程师都能用这个方法得出有实用价值的精确解来。于是他作出了計算各种截面形状的棱柱杆受扭和受弯的解式。

为了更清楚地說明这个方法，可考察一根杆件受力偶 M_t 作用在两端的簡单扭轉情况(图149)。将坐标軸原点放在杆件左端形心处，并取坐标軸綫的正方向如图149所示，考虑从杆件左端相距 z 处所取任一截面 mn 上 A 点的位移分量。假設在扭轉时該端是不能轉动的，并且用 θ 表示軸杆单位长度的扭轉角。mn 截面将

---

[1] 見 Mém. acad. sci. savants étrangers, 卷 14, 233~560 頁, 1855 年。

* 亦可称为"半逆法"或"凑合法"——出版社注。

轉动一角度 θz，由于这种轉动，任一点 A 对坐标 x 及 y 将有位移量

$$u=-\theta zy \quad v=-\theta zx \tag{b}$$

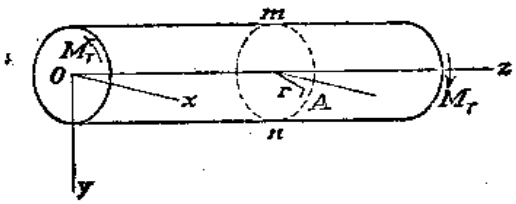


图 149

一根圓軸在扭轉时各截面仍保持为平面并且在軸綫方向上的位移 w 将等于零。利用 (b) 式便可算出圓軸內的扭轉应力。他也試过仍然用各截面保持为平面的假設来处理非圓截面軸杆，但是用这种方法所得的結果与实驗不符[1]。因此，圣維南假定截面将发生翹曲，并假定所有各截面的翹曲都一样，卽 w 和 z 无关。于是他使

$$w=\theta\cdot\phi(x, y) \tag{c}$$

式中 ϕ 是以后要决定的 x 和 y 的某一函数。

(b) 及 (c) 式卽代表圣維南对扭轉产生位移所作的假定。关于这些力，他假定其中并无体力而且也沒有作用于軸杆曲面上的力。至于作用在两端的力，他假定在靜力学方面它們是相当于已知的扭矩 M_t。将 (b) 及 (c) 式代入 (a) 式中，圣維南发現只有两个应变分量 γ_{xz} 和 γ_{yz} 是不等于零的，它們的式子是

$$\gamma_{xz}=\theta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right) \quad \gamma_{yz}=\theta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)$$

其相应的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0\\ \tau_{xz}=G\theta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right)\\ \tau_{yz}=G\theta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

将它們代入平衡方程中(参看第 26 节)，他看到如果函数 ϕ 能满足下式，則它們也能被满足的。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{e}$$

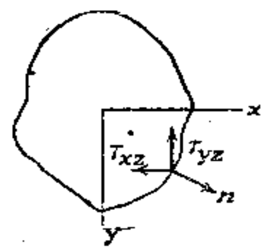


图 150

在截面的边界上（图 150），在向边界所作法綫 n 的方向上的剪应力分量必等于零，不然的話，依照柯西的定理(参看第 26 节)，在軸杆的曲面上必有剪力作用。那样就会和原先假定側面不发生牽力相矛盾。这种考虑引出了边界条件

[1] 見杜留实驗的叙述(見上第 19 节)。

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right)\cos(nx)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)\cos(ny)=0 \tag{f}$$

用同样方式，对于有任何截面形状的棱柱杆的扭轉問題都可化成为在每一特殊情况下求 (e) 式的解并使满足于边界条件 (f)。

圣維南解出了各种截面形状的扭轉問題。椭圓截面的軸杆是最簡单的一种情况。在这种情况下，(e) 及 (f) 式可取如下关系得到满足，

$$\phi=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}xy \tag{g}$$

式中 a 及 b 为椭圓的半軸長度 (图 151)。于是应力分量 (d) 式为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=-G\theta\frac{2a^2y}{a^2+b^2}\\ \tau_{yz}&=G\theta\frac{2b^2x}{a^2+b^2}\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

相应的扭矩为

$$M_t=\iint(\tau_{yz}x-\tau_{xz}y)\,dx\,dy=\frac{\pi G\theta a^3b^3}{a^2+b^2} \tag{i}$$

由此得

$$\theta=\frac{M_t(a^2+b^2)}{\pi Ga^3b^3} \tag{j}$$

从 (h) 式中我們可以看出，对于在截面平面内通过其中心所作任一直綫 Oc (图 151)，沿該綫上所有各点的比值 $\tau_{xz}:\tau_{yz}$ 都保持为常数。这指出在这些点上的剪应力合力都互相平行，而且必与边界上 c 点处的切綫相平行。我們也可断定最大应力将发生于边界上 d 及 e 点处，即椭圓短軸的两端。(c) 及 (g) 式确定了翹曲截面的形状，同时我們看出在椭圓中翹曲面的等高綫呈双曲綫形，如图 151 所示，其中实綫表示在 xy 平面之上的各点(对于这些点 w 是負的)。(j) 式可改写成下式：

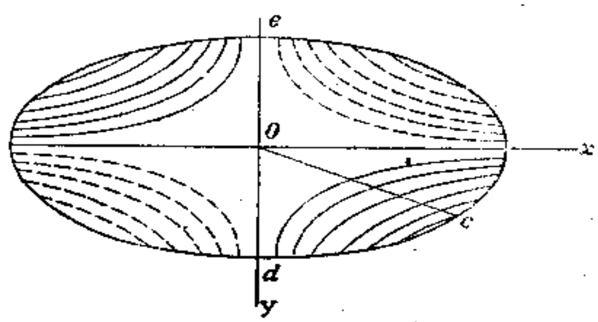


图 151

$$\theta=\frac{M_t}{C} \tag{k}$$

式中

$$C=\frac{\pi Ga^3b^3}{a^2+b^2}=\frac{GA^4}{4\pi^2I_p} \tag{l}$$

$$\left(A=\pi ab,\quad I_p=\frac{\pi a^3b}{4}+\frac{\pi ab^3}{4}\right)$$

C 为杆件的抗扭剛度。

从他对各种截面的棱柱杆抗扭剛度的計算中，他断定由 (1) 式所得的 C 值在各种情况下都非常符合[1]。因此，可将棱柱杆的抗扭剛度看作与具有相同面积 A 和相同极慣矩 I_p 的椭圓截面杆的抗扭剛度相等。显然，抗扭剛度是与极慣矩成反比而不是象旧理論中所說的成为正比。

圣維南所得的解式是将所有各截面上的应力分布作成相同的，因此要求作用在两端的外力也要按同样方式分布。只有在这种条件下，圣維南的結果才算是扭轉問題的精确解。可是，圣維南利用他那关于由靜力等效力系产生应力的原理(参看第 32 节)，断定如果所考虑的各点距两端有足够的距离，那末，即使两端处力的分布与他的理論中所假設的不相符合，用他的解所得的应力还是足够精确的。靠近两端的应力必然与外力分布情况有关；但是这种分布情况通常是不知道的，因此对靠近两端处应力的深入研究很少实用价值。

圣維南又将半反求法用到端部承受有一个集中力的悬臂梁的弯曲問題上[2]。他指出倘使在任一截面上的法向应力根据梁的基本理論已經很正确地得出，就能求得满足全部弹性方程的剪应力的分布。他用这个方法得出了各种截面的棱柱杆弯曲的精确解。他不仅求出弯曲問題的一般解，而且 (为了便于应用他的計算結果) 还制出一些表来，从表中可算出矩形梁的最大剪应力。这些計算指出，当矩形梁在它最大剛度的平面上弯曲时，其最大剪应力非常接近于由儒拉夫斯基的基本理論所算得的結果(参看第 33 节)。

作出了棱柱杆受扭和受弯的解法以后，圣維南进一步考虑弯曲与扭轉的联合作用[3]。他不仅算出截面上分布的应力，而且也求出主应力并算出最大应变。他建議在設計梁时，梁的尺寸应該选擇得使最大应变不超过由直接試驗所定出的每种建筑材料的极限强度。

圣維南得出扭轉和弯曲在实际情况中应用的精确解的研究报告对材料力学的影响是可以很清楚地看出来的。自从他发表了这些見解以后，将彈性理論的基本方程引用到材料力学方面的工程书中便形成了一种趋势。圣維南本人依照这个方針在他編訂納維埃的书时作了許多这方面的注解。朗肯在他的应用力学教本中給

[1] 見 Compt. rend. 卷 88, 142～147 頁, 1879。

[2] 在扭轉的研究报告中簡略地提到弯曲問題。在弯曲的那篇报告中討論得較詳細，該报告刊在 J. math. Liouville 第 2 組，卷 1, 89～189, 1856。在这篇报告的开端，对于旧的弯曲理論作了很重要的評論。

[3] 見扭轉报告第 12 章。

彈性理論写下相当多的篇幅。格拉斯霍夫和尹克勒两人都曾試行过不用截面保持为平面的假設而根据他們导出的恰当理論方程来推导材料力学中的公式。这种編写材料力学的方法后来已經被廢除不用了[1]，現在习慣上講授这門学科是从比較淺近的观点开始的。根据彈性理論作更精細的研究，在今天来說，一般是那些专門从事于应力分析的工程师們的工作。

52. 圣維南的后期成就

圣維南完成了扭轉和弯曲的著名的論文以后，継續在彈性理論方面进行研究并发表了許多論著，大部分刊登在法国科学院学报（Comptes rendus）上。这方面最重要的一些研究成果在以后都以加注的形式編入在他所編的納維埃的"課程总結"和他所譯的克列布希的书中。他对"課程总結"所作的附录，包含了一套完整的各向异性体的彈性理論，和关于彈性常数必需个数这个問題的精細記述[2]。一直到他临死为止，他坚持着这个意見，即認为只有認定固体的分子构造和假定有分子力存在，才能合理地进行这些研究。他贊成在一般情况下将彈性常数从 21 个減为 15 个，而对于各向同性体則从 2 个減为 1 个。他的研究不仅对于彈性力学家有很大的意义，而且对于分子物理学家也有一定的助益。

圣維南在克列布希的书中的注釋也是很有价值的，特别是关于杆件振动和冲击理論的那些注釋。在討論梁的横向冲击时，我們已經提过圣維南在这方面的重要貢献（参看第 41 节）。假定一物体冲击于一根簡支梁上而与梁保持密貼，对于这个冲击問題，他是把它看成梁上有一附加物的振动問題来討論的。他研究了这个系統的头七种振动方式，計算出相应的振动頻率，并且求得相应于梁重对冲击体重量的各种比值的曲綫形状。假定梁原本是靜止的而附加物則有一定的速度，圣維南算出了每种振动方式的振幅。将相应于这些部分的振动的撓度总加起来，他能得出在时間 t 的不同数值下梁的撓度曲綫，从而求出最大撓度和最大曲率来[3]。从这一分析中，正如由卡喀斯（Cox）首先所作出的結論一样（参看第 41 节），他断定横向冲击的基本理論能得出滿意的最大撓度值，不过对于計算最大应力却是不够精确的[4]。

---

[1] 以彈性理論为基础的材料力学教本，例如格拉斯霍夫在卡尔斯鲁赫所写的以及在俄国工程学校一些教授所写的，經証明对一般学生接受能力感到困难，因此后来逐渐不用了。

[2] 見附录五。

[3] 圣維南在他的分析中所用的許多曲綫，在他去世后由他的学生佛拉門特（M. Flamant）发表在 J. école polytech.（巴黎出版），59 期，97～128 頁，1889 年。

[4] 似乎圣維南沒有发覚卡喀斯的初淺解法，所以他写出自己的推导方法以及对推导結果所作的很詳細的討論。見圣維南譯出的克列布希的书，576 頁上。

圣維南也热心于研究杆件的縱向冲击。考察一根水平方向的杆件，一端固定，另一端接受一軸向打击，他仍然把这个冲击問題看成为杆端有一个附加物的振动問題来討論。他假定杆件原本 ($t=0$) 是静止的，而附着的物体沿軸向有一給定速度。他将解作成三角級数的形式，将前头几項总加起来得出有关杆端运动的滿意結果。可是在計算应力中，圣維南发現他的級数收斂得不够，因此較难立刻算出精确的答案。以后他試用一些位移的近似式以代替无穷級数。这个問題大致在同一时期由包沁涅斯克以及由西伯特 (Sébert) 和胡果尼沃特 (Hugoniot) 两位炮兵軍官最后予以解决。他們是用不連續函数作出解来的。

圣維南研究的特点是他决不滿足于只得出一个一般解。他經常要把他的結果(通过算出的表和制出的图)表示成使得工程师能在实际应用中一点也不感到困难的形式。利用包沁涅斯克的解，圣維南和佛拉門特合作繪成图表来表明对于各种受击杆件的質量对冲击体質量的比值 r 下的縱向冲击的各种相位[1]。例如，图 152

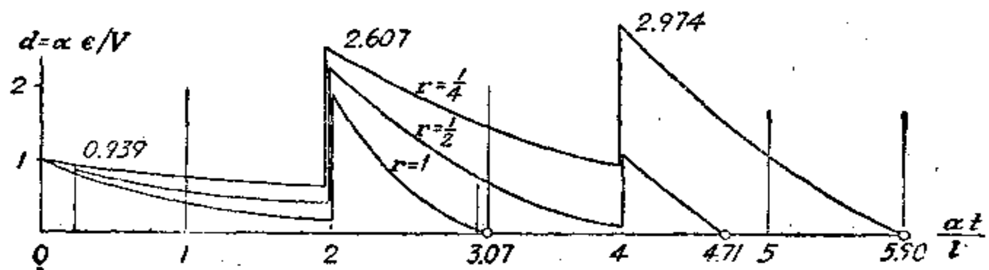


图 152

就表示了这么一个图表，从該图中可算出杆端与冲击物体相密貼时的压应力。在此图中，l 表示杆长，α 为沿杆傳播的声速，而 V 为冲击体的速度。他取 $\alpha t/l$ 的比值作为横坐标，取 $d=\alpha\varepsilon/V$ 的量为縱坐标，它与杆端处的单位压縮量 ε 成正比。图中三条曲綫相应于杆重对冲击体重的三个不同的比值 r。图中可以看出，杆件和冲击体接触面上在冲击的瞬間所产生的压应变在 $t=2l/\alpha$ 时間以前是逐漸减小的。在 $t=2l/\alpha$ 时，从杆件固定端反射回来的压縮波到达了接触面；因之压縮应变突然升高到一較高数值，然后压应变又重新开始逐漸减小。当 $r=1$ 时，我們看出，在 $t=3.07l/\alpha$ 时，压应变等于零，因此冲击体和杆件間的密貼到此中断。对于較小的 r 值，在这个时間以后还是継續保持密貼，而在 $t=4l/\alpha$ 时，我們又得出压应变的第二次突变。此后，应变减低，当 $r=1/2$，$t=4.71l/\alpha$ 时，以及 $r=1/4$，$t=5.90l/\alpha$ 时，密貼卽行停止。該图指出：比值 r 减低，則冲击的持續时間增长；同

[1] 这一論著刊在 Compt. rend. 卷 97，127，214，281 及 353 頁，1883。在克列布希的书的法譯本附录中也可以找到。

时最大应变的突变也說明了級数形式的解沒有得出滿意結果的理由。圣維南还作出几个与图 152 类似的不同杆件截面的图表，这样，他証明在冲击时最大应力是在固定端发生的。

这个冲击理論假定了密貼現象是在同一瞬間发生在杆端整个表面上的。这种情况在实际事物中是不能实現的，而且沃依特 (W. Voigt)[1] 所作的实驗（参看第 71 节）也不和这个理論相符。

圣維南不仅热心于研究冲击，而且也研究了杆件的强迫振动。在他所譯克列布希的书的第 61 号注释中（約占 150 頁），他写出按时間而变的一个力作用于杆件上产生振动的一个最全面的討論。他也研究了杆上任一点按特定的运动方式所产生的强迫振动，并且很詳細地討論了在一簡支棱柱杆的中点形成一定的諧和运动的情况。在同一注释中，他在一个动载荷下的弯曲問題上写下很大的篇幅。他查考了威里斯和斯托克斯两人的著作（参看第 40 节），其中都忽略了梁的質量。接着他导出了这个問題的一般方程，并討論了菲里普斯的著作[2]，因为菲里普斯的著作中作过那些方程的近似解。他指出菲里普斯的解是不完备的，最后他利用威里斯的推理方式并在动載荷 W 的慣性力上加上和梁的均布重量 Q 相应的慣性力，从而导出了一个近似解。这样，他得出由載荷 W 及載荷 Q 两者所产生的最大弯矩为[3]。

$$M_{\max}=\frac{Wl}{4}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{Ql}{8}\left(1+\frac{5}{4}\,\frac{1}{\beta}\right)$$

式中，和以前一样（参看第 40 节），

$$\frac{1}{\beta}=\frac{16\delta_{st}v^2}{gl^2}$$

这个解和菲里普斯的解不同之处是在 $M_{\max}$ 式子的第二項中，菲里普斯用的是 $\frac{3}{4}\,\frac{1}{\beta}$ 而不是 $\frac{5}{4}\,\frac{1}{\beta}$。

1868 年，特萊斯加向法国科学院提出关于在极大压力下金属流动的两篇笔記[4]。圣維南正准备在这項工作上提出一份报告，因此轉而从事延性材料塑性变形的研究。随后他发表了几篇論文，其中他导出了塑性基本方程，推导方程式所根据的假定是：(1) 塑性变形时材料的体积不变，(2) 主应变的方向和主应力的方

[1] 見沃依特的論文刊在 Ann. Physik, 卷 19, 44 頁, 1883; 卷 46, 657 頁, 1915。对冲击方面的文献的評論可参看普修尔 (T. Pöschl) 所著"物理手册" (Handbuch der Physik) 卷 6, 525, 1928 柏林。

[2] Ann. mines, 卷 7, 1855。

[3] 布聚塞得出同样的結果，見他所著"应用力学教程"(Cours de mécanique appliquée), 1859 年第 1 版。布聚塞也得出了梁上有均布动载荷情况下的解。

[4] 見"各方学者的研究报告" (Mém. presentés par divers savants), 卷 20, 1859 年。

向一致，以及 (3) 每一点上的最大剪应力等于一特定的常数。利用这些假說，圣維南解出了如下的几个簡单問題，例如，圓軸的扭轉，矩形棱柱杆的純弯曲[1]以及在内压力作用下空心圓筒的塑性变形[2]。这样，圣維南开創了材料力学中一个完全新的研究范疇。他称这門新的学科叫塑性动力学（Plasticodynamics）；最近它已成为不可忽視的研究对象了。

53. 杜哈美尔和菲里普斯

杜哈美尔 (J. M. C. Duhamel, 1797～1872) 出生于圣馬洛 (Saint-Malo)。1814 年进入工业学院，毕业于 1816 年。毕业以后，先在勒恩 (Rennes) 学习了一段时間的法律，其后又回到巴黎，在好几个学校教过数学。1830 年，他繼承哥里奥里斯在工业学院教积分，此后一直在該校任教，直到他結束教学工作为止 (1869 年)。他在学校里的声望很高，因此他的許多計划都为該校所采納实行。他的积分[3]和理論力学[4]的教本在法国各学校中普遍采用。在此項著作中，杜哈美尔从他过去的老师富勒和泊松那里得到不少助益。他所处的时代正是将数学分析应用到物理学上得到迅速发展的时代，他的研究报告正迎合着这个潮流。

在他发表了几篇关于固体中热流的重要研究报告以后，他向科学院再提出他的"关于計算因温度变化引起固体中分子作用力的研究报告"（Mémoir sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements du température dans les corps solides）[5]。这篇論文构成了杜哈美尔对彈性理論的主要貢献。在緒論中，他說过富勒曾在他的名著"热的分析理論" (Théorie analytique de la Chaleur) 中討論了固体中温度的不同分布，但沒有考虑因温度改变而产生的变形。一个固体中可分成許多元素，在温度改变的影响下它們不能自由膨脹，因此产生了应力。在研究这类应力时，杜哈美尔取用了納維埃所介紹的方法(参看第 25 节)，并且推出和(g)式(参看第 25 节)相似的平衡微分方程。但是，除开体力的分量 X，Y 和 Z 以外，还加上有 $-K(\partial T/\partial x)$，$-K(\partial T/\partial y)$ 和 $-K(\partial T/\partial z)$ 这类形式的各項。这些都和在 x, y, z 各方向上的温度改变率成正比。他也得出物体的边界条件，并且指出温度应力可以象求体力的应力以及求作用于表面上外力的应力的同样方法而求得。于是杜哈美尔指出由各外力所产生的应力以及由温度改变所产生的应力可以各自計算，而后用迭加法求出其总应力。似乎这里是第一次我們看

[1] 数学杂志 (J. Mathématiques) 卷 16, 373～382, 1871。

[2] Compt. rend. 卷 74, 1009～1015, 1872。

[3] "工业学院解析教程" (Cours d'analyse de l'École Polytechnique) 两卷集, 2 版 1847。

[4] "力学教程" (Cours de mécanique), 两卷集, 2 版 1853。

[5] 見 Mém. acad. sci. savants étrangers, 卷 5, 440～498 頁, 1838 年。

到应力分析中采用了迭加法。作者指出在温度均匀分布的情况下物体内不致产生应力。

杜哈美尔进一步将其基本方程应用于几种特别情况中从而得出了具有实用价值的解式。他起始研究一只空心球形壳体，球壳的温度为与中心相隔距离的已知函数。他証明外半徑和内半徑长度的改变只与壳壁温度的平均值有关。他将这个結果推广到由不同材料作成两层同心夹层的壳上。在这篇論文里他也討論到一只圓柱形管子，其温度为徑向距离的一已知函数。最后，杜哈美尔研究了一个球壳因温度变更而产生的运动。在所有的这种工作中，作者都假定彈性常数和温度无关。他討論到由变形所产生的温度改变以及体积不变时的比热和压力不变时的比热两者之間的差异。这些都发表在他的第二篇研究报告中[1]，这篇报告在热学理論中占有首要的地位。

杜哈美尔在彈性体振动理論方面也作了一些工作。弦索和等截面杆的自由振动已經有許多人研究过了。杜哈美尔考虑了更为复杂的情况。例如，他研究了附着有集中质量的弦索的振动，他不仅得出这个問題的全解，而且作出許多的实驗，所得結果都与理論相符[2]。他得出了一个分析彈性体强迫振动的普遍方法[3]。利用迭加原理，他証明由一个变力所产生的位移可用一积分形式求得（参看第 50 节）。这个方法在以后又經圣維南用来研究杆件的横向强迫振动（参看第 52 节）。

菲里普斯（1821～1889）出生于巴黎。1840 年他进入工业学院，以后又在矿业学院求学，1846 年毕业。在政府机关作了几年工作以后，他便在法国鉄道上供职。他那最初的科学研究工作是結合他的鉄道工程师的工作进行的。他主管鉄道公司的机車車辆，因此从事于彈簧的設計。当时懂得这方面知識的人很少，菲里普斯却发展了片彈簧的完整理論；他根据他的理論設計出彈簧来，以后又得到进行試驗的机会，証明了他的理論对于实际应用是够精确的。这个成就曾向科学院提出，經委員会通过将它发表在“院外学者的研究报告”（Mémoires des savants étrangers）中[4]。这篇論文对于从事彈簧的設計工作者是很有用的，也清楚地証明了一位具有实际經驗的工程师必須兼备十足的数学知識，才能在新的工程領域中作出巨大的貢献。論文中的分析是以直梁弯曲的基本理論为根据的。假定在弯曲时鈑片間保持互相接触（图 153 a），菲里普斯导出在彈簧每一截面处曲率改变的公式，并且

[1] J. école Polytech.（巴黎），第 25 期，卷 15，1837。

[2] 同上注，第 29 期，1843。

[3] 同上注，第 25 期，1～36，1843。

[4] 这篇論文的全文刊在 Ann; mines 第 5 組，卷 I，1852。

指出，将鈑片端部削尖如图 153b 所示，可將彈簧的曲率做成沿整个长度連續改变的形状。他用积分方法得出彈簧的撓度公式。借微分方法也得到計算鈑片之間压力的式子。得出此压力便能算出摩擦力，而摩擦力是和振动时彈簧的阻尼特性有关的。菲里普斯将所有这些結果用到眞实的鉄道彈簧的設計中，并且給出这种設計的一些計算例題。文中有相当大的篇幅述及彈簧的材料力学性能試驗，他并且从这些試驗結果中对容許应力的規定作出建議。

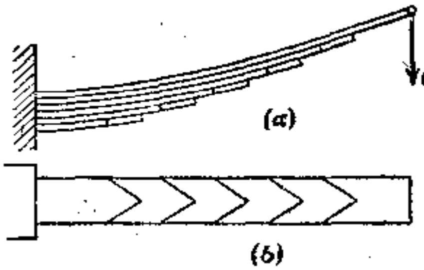


图 153

在庇尔逊的"彈性力学史"一书(第 2 卷，第一部分，330 頁上)中可以看到对于这項工作的一个非常詳細的評論。在这段評論的結尾，庇尔逊說："这篇研究报告是对于一个非常簡单的彈性理論——应用的范圍是充分精确的——能引出很有价值的成果的一个显明例子。菲里普斯的彈簧理論，正如它已在一般鉄道的机車車輛中使用那样，是最优秀的成就之一，只有具备丰富理論知識的实际工作者才能作出这种成就来"。

菲里普斯結合他在鉄道方面的工作，也从事于动載荷在桥梁上的动力作用問題的研究[1]。他得出这个問題的近似解，其中不仅考虑到动載荷的質量，而且也考虑到桥梁的質量。随后，由圣維南将此解加以簡化并作了一些修正(参看第 52 节)。

菲里普斯也研究过杆件的縱向和横向强迫振动，对那些一端承受有一个周期性力作用的杆件[2]的縱向振动問題作了解答[3]；在处理横向振动时，菲里普斯考查了一根側杆的应力，該杆軸綫上所有各点能作出具有同一半徑的一些圓来。他也考虑过一根弦索的振动，該弦索一端固定，他端連接在一只发生諧和振动的音叉上。菲里普斯在处理杆件横向振动方面所发展的方法，以后圣維南在他所譯的克列布希的书中第 61 号注释內被用来討論横向振动的特殊情况(参看第 52 节)。

1864 年菲里普斯辞去了实际工作，开始教授力学，首先在中央学院 (École Central) (1864～1875)，以后又在工业学院 (1866～1879)。1868 年，他被选为法国科学院的会員。

在他的后半世生活中，菲里普斯热心于象用于錶中的那些螺旋彈簧的变形理

[1] 見 Ann. mines, 卷 7, 467～506 頁, 1855 年。

[2] 这类問題现在在油田中有重大的实用价值，那里常采用很长的杆件。

[3] J. mathématiques, 卷 9, 25～83, 1864。

論。他在这方面发表了几篇研究报告[1]，报告中将問題討論得极为詳細。他証明滿足錶运行的条件之一乃是錶的螺旋彈簧的重心必須保持在平衡輪輪軸的軸綫上。他也研究了温度和摩擦力分别对平衡輪振蕩的影响，并且得出对制錶工业最有价値的許多实驗結果。这是在求解重要实际問題中应用理論分析很成功的一个例子。

54. 紐曼 (Franz Neumann)

佛兰兹·紐曼[2] (1798～1895) 出生于布兰登堡 (Brandenburg) 省的約奇姆斯托尔(Joachimsthal)附近。他的父亲厄恩斯特·紐曼 (Ernst Neumann) 是一个产业代理人。拿破侖战爭給德国帶来非常艰苦的年代，而紐曼的儿童时代也是很不幸的。他在約奇姆斯托尔的一个学校里受到初等教育。直到十岁时才进入柏林的渥德尔 (Werder) 中学，他住在一个木匠的家中，生活仍然很艰苦。当 1813 年普魯士从法軍占領中解放出来时，紐曼自动报名参加德国軍队，不过他年紀太輕，直到 1815 年才达成他的志愿。他加入在布魯彻尔 (Blücher) 的队伍里，参加了滑鉄卢 (Waterloo) 战役以前的里尼 (Ligny) 战役 (1815 年 6 月 16 日)。他負了重伤，遺留在战場上等死，直到第二天他清醒过来以后，才被运回野战医院。經过几个月的休养恢复了健康，他又回到他原来的部队。那年秋季参加了包圍季威特 (Givet) 一役，并留駐該地直到战役結束为止。

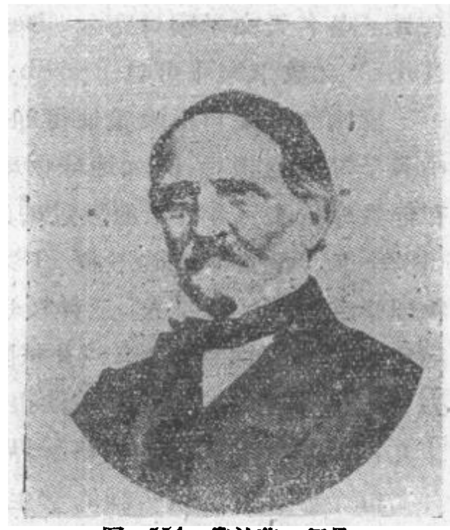


图 154 佛兰兹·紐曼

1816 年 2 月，志愿軍都撤回柏林，于是紐曼才有机会在中学恢复学业。1817 年毕业，同年进入柏林大学。他的生活还是很困苦的，因为他的父亲不能供給他，他只好用兼課的方法弄点錢来維持自己的生活。在开始讀大学时，他学习神学和法律，但随即改讀自然科学而对矿物学极感兴趣。虽然他精于数学，但由于选課太少，在該学科上不能得到很多的教育。他的数学知識还是以后从书本中并极大部分由研究富勒的书籍中累积起来的。

[1] J. mathématiques, 第 2 組, 卷 5, 313～366, 1860; Ann. mines, 卷 20, 1～107, 1861。

[2] 由他的女儿路易士·紐曼所写的，佛兰兹·紐曼的生平事迹，在 1904 年出版。并参看万格林 (A. Wangerin) 的"佛兰兹·紐曼及其研究与教学工作" (Franz Neumann und Sein Wirken als Forscher und Lehrer, 1907) 以及沃依特 (W. Voigt) 的追念紐曼 (Zur Erinnerung an F. E. Neumann), Nachr. Ges. Wiss. 格廷根大学, 数理丛书, 1895。

1820 年秋季，紐曼到西里西亚 (Silesia)（現为波兰的工业区——譯者注）作短期旅行，替柏林自然科学博物館收集矿石和化石。这一次旅行使他和柏林矿物学教授魏斯 (E. C. Weiss) 发生了密切联系，魏斯替他在矿物研究所安排了一个助理員的工作。紐曼在矿物学方面研究的結果写成了一本名为"結晶学"(Krystallonomy) 的书，其中叙述了分析晶体結构用的一个新的投影方法。这本书成就很大，他被邀請向那些专門研究矿物学的人們作过一系列的講演。这些講演使他得到发展这些新方法的机会。他又开始了爭取博士学位的努力，并在 1826 年春天获得这个学位。同年，他被哥尼斯堡 (Königsberg) 大学聘为矿物学講师。在哥尼斯堡，紐曼会見了著名天文学家貝塞尔 (Bessel) 和几位年青的科学家，例如物理学家朵夫 (Dove) 和数学家雅可貝 (Jacoby) 等人。

德国的学院自由政策使得紐曼能扩大他的活动范圍，他开始講授理論物理学中各个部門的課程，例如地球物理学、热学理論，声学理論、光学和电学等。这样，在他教学的头三年中，他教过理論物理学的全部課程。他很快地被提升为副教授 (1828 年)，随即又升为教授 (1829 年)。1834 年，紐曼和雅可貝合作組織了理論物理学和数学的研究室。这种教学方式在以前只在人文科学院实行过，在物理学上应用还是試驗性的，它第一次試图将研究理論科学的研究生在某种程度上組織起来。这种培养研究生的新方法很快地在德国得到贊揚而且証实是非常成功的。在十九世紀后半期德国物理科学界就因此而获得相当大的进步。

每个参加研究室听課的学生在每一次聚会时必須准备一篇論文，会上在教授指导下討論些高深的物理学問題或学生們所作的一些科学研究。以后，紐曼根据学生的知識水平将学生分成两組。对于那些学識較差的，研究室討論的題目通常結合着前学期的課程来进行。在这种会上所提出的論文常常将講課中只簡单提过的一些論題在这里再作更詳細的討論。有时，这些較初淺的論文还叙述了学生們为証实理論所作的实驗。紐曼特別注重这項工作，因为这样学生們可以得到使用科学仪器和量測技术的經驗，并能使学生們熟諳于将实驗結果用数学形式表达出来。研究室所处理的問題有：理論力学，毛細管，热的傳导，声学，光学和电学。对于那些学識較高的学生，只經常討論学生們独創性的研究。

研究室本身表現为一个优越的进修場所。紐曼的学生常常成为其他大学最优秀的教师，一个一个地成立了他們自己組織的研究室。因此，紐曼对于德国物理学方面的影响是很大的，同时，看一看十九世紀后半期彈性理論的发展情況，我們可以說在这个时期內德国科学上的主要貢献都是由他的学生們所完成的。波尔察朵 (Borchardt)，克列布希、克希霍夫、薩尔許茨 (Saalschütz) 和沃依特都在哥尼斯

堡大学参加过物理学研究室討論，他們在彈性力学上的研究也是由紐曼带头的[1]。

当納維埃、柯西和泊松在彈性理論方面都正在积极研究的时候，紐曼也开始了这方面的初期研究，那时，彈性理論还只在光学上应用。在他那双折射的論文中[2]，紐曼考虑了一个彈性体，其結构形式系由三个相互正交的对称平面所构成，根据納維埃的方法(參看第 25 节)，他发展了包含六个彈性常数的平衡方程，并且研究了在这样一种介質中波的傳播情况。随后，他就从事于研究有三个相互正交对称面的晶体的彈性[3]，并指出应当做出一些实驗，借直接試驗得出六个常数的数値。他导出(第一次)一个公式来計算按任意方向从晶体上截下的棱柱体材料的抗拉模数。在这些早期著作中，紐曼采取彈性体的分子結构理論作为他研究的根据，因此采用了較少的彈性常数，和过去泊松所采用的以及后来又被圣維南所采用的一样。

然而，經过他为了寻求理論和实驗相一致所进行的不断研究，不久他就否定了納維埃和泊松的一些假定。最后，他不用分子理論确定了各种晶体所必需的常数个数。他建議用各种方法来試驗由晶体上截下的棱柱体，因此可从量測中算出必需的彈性常数。这些实驗是由紐曼的学生做出来的。其中以沃依特[4]所做出的这类研究特別重要，因为它明确地証明了由假定分子間作用有中心彈性力所得出彈性常数减少的个数和試驗結果不符，在最普遍情况下所需彈性常数的个数是 21 个，而不是如泊松的理論所指出的 15 个。对于各向同性体，所需常数为 2 个而不是如納維埃、泊松和圣維南所假定的 1 个。只要一直坚持着多-常数理論，当引出一些象軟木、橡皮和胶質物的例子时，它們都明显地証明泊松比并不是 1/4，这就能說明那些材料并不是各向同性的。而且沃依特的实驗也明显地証明了將少-常数理論用到由完全晶体上截出的棱柱杆所得的結果是不合适的。

紐曼在彈性理論上最重要的貢献包括在他那处理双折射的一篇重要的研究报告中[5]。布略斯特 (Brewster)[6]和西貝斯克(Seebeck)[7]曾注意过一块受热不匀的

---

[1] 关于紐曼的研究室和他的学生的較多資料可參看万格林的书。

[2] Pogg. Ann. Physik. U. Chem. 卷 25, 418～454 頁, 1832 年。

[3] 同上注, 卷 31, 177～192, 1834。

[4] 同上注, 卷 31, 701, 1887; 卷 34, 981, 1888; 卷 35, 642, 1888; 卷 38, 573, 1889。

[5] Abhandl. preuss. Akad. Wiss., 数学自然科学丛书, 第二部分, 1～254, 1843。

[6] Phil. Trans. 436 1814; 1 1815。

[7] 馬克斯威尔写給威廉・湯姆逊的信中曾提到西貝斯克的成就。見"克勒克・馬克斯威尔电观念的来源" (Origins of Clerk Maxwell's Electric Ideas) 由約瑟夫・拉摩尔 (Sir Joseph Larmor) 主編, 第 31, 1937, 劍桥。

玻璃板能发生双折射。布略斯特发現玻璃在应力作用下也具有同样的性質[1]，因此他建議用玻璃模型借助于这种現象来研究結构物中的应力。布略斯特也用胶質物作过实驗，并且指出如果使这种物質膨脹再让它干燥发硬，則在此种状态下，当膨脹力消失时，它仍能保持双折射的性質。关于玻璃在压应力下的双折射性質也被佛累斯涅 (Fresnel) 研究出来[2]。他用三棱鏡作实驗，指出在軸向压力下它們具有和晶体一样的双折射性質。

在紐曼的研究报告中，他发展了关于受力的透明物体的双折射理論。在一块均匀受力平板的最簡单情况下（图 155)，这个理論說明了如果垂直于平板通过一点 O 有一束偏极光，而 OA 表示以太剪切振动的振幅，此振动可分解为平行于 x 及 y 軸的 OB 和 OC 两个分量。这两个分量将以两个不同的速度在平板内傳播。两者速度之差 (v_x-v_y) 与两个主应变間之差 $(\varepsilon_x-\varepsilon_y)$ 成正比，即与最大剪应变 γ_{xy} 成正比。我們利用一个分析器可使此两种光綫分量发生干涉，于是借观察平板映在一块幕上的彩色图便能求出給定的平板的象的色和剪应变 γ_{xy} 的数值之間的关系。有了这种資料，我們能再一次檢查幕上的彩色花样来分析不均匀受力平板内剪应变的分布。如果不用白光而用一束单色偏极光，我們将得出幕上平板的象带有許多黑色的流苏状花紋。关于剪应变的分布便可由这个图象的方位得出結論来。这种技术現在已由工程师們广泛用在光測彈性应力分析 (Photoelastic stress analysis) 上。

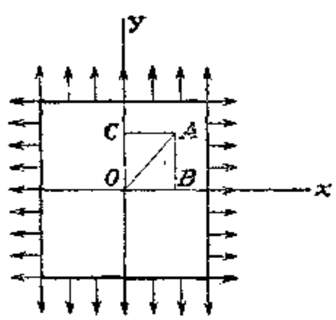


图 155

紐曼得出了三維应力分布一般情况下的理論。他指出怎样从簡单的試驗中得到光学常数。利用它們便能替已知应力分布及已知材料拟定其彩色花样。他将这个理論应用于一根受扭圓軸和一个有徑向对称应力的球体的特殊情况中。

其次，紐曼应用他的理論来研究布略斯特在不均匀受热玻璃板上所观察到的彩色花样，并且指出象这种平板的双折射性質是由于温度分布不匀产生应力所致。为了研究这些应力，紐曼发展了和杜哈美尔所得方程相似的平衡方程（参看第 53 节），其中包含有考虑受热膨脹的各項。将这些方程用到一只球上，此球的温度分

[1] Phil. Trans. 1815 年，第 60 頁；1816 年，第 156 頁。

[2] Ann. Chim. et phys. 卷 20，第 376 頁，1822 年。并参看"奧古斯丁·佛累斯涅的成就"(Oeuvres d'Augustin Fresnel)，卷 1，713 頁，1866 年。关于佛累斯涅的工作，馬克斯威尔說过下面一段話："布略斯特发現透明固体中暂时产生的机械应力和偏极光性質同向，而佛累斯涅用晶体的双折射証实了这些性质"（見上面注解中所提到的馬克斯威尔的信件)。

布仅与去中心的距离有关，在这种情况下，紐曼算出了温度应力，而且作出了光測彈性試驗，这些試驗証明当偏极光通过球体时所出現的彩色流苏形花紋和他的理論非常符合。

紐曼也討論到温度分布不均匀但在任一点处的整个厚度上的温度不变的平板内的温度应力。他导出所需的方程式，并且将它們用到圓板和圓环中。他考慮了沿徑向厚度极薄的圓环，而且討論了当圓环的温度仅为沿圓环軸綫方向所量距离 s 的函数时圓环的弯曲情况。紐曼也研究过两块不同材料的平板胶合在一起，如同布累奎特 (Brequet) 的双金属温度計那样的情况，他又解决了当温度均匀分布时該胶合板的弯曲問題。

在他那偉大的研究报告最后一章中，紐曼研究了殘留应力的問題，这种应力是当加載到出現塑性变形时将外力移去以后在物体内所留下的一种应力。他的理論是根据下述假定出发的，即主塑性应变的方向和主彈性变形的方向一致而且其数值为主彈性应变分量的綫性函数。紐曼应用他的理論来研究一急遽冷却的玻璃球所引起的殘留应力。似乎紐曼是第一个研究殘留应力的人。

紐曼在彈性力学上有些独創性研究包含在他的教程中[1]。紐曼經常討論到他在課堂里認为特别重要的一些問題，也談到一些給学生們准备科研題目的問題。其他的都沒有用研究报告的形式发表，只是在講义发表时的第一次印本中出現过；这些資料在研究完成以后大約已有三十年以上了，因此这些成果当时已陈旧不堪。

我們如将紐曼的书的内容簡略地流覽一下，就会注意到在头五章中他引入应力分量和应变分量的概念，发展了各向同性体彈性的基本方程，并且用两个彈性常数成立了这两种分量之間的关系式。他那应力分量的概念以后經許多学者采用过；例如，勒夫(A. E. H. Love)就用过它。接下去的三章，根据固体的分子构造假設，作出了基本方程的推导；討論了納維埃和泊松的著作；作出了温度不均匀分布的方程的推导并且討論了彈性方程的解答唯一性定理。該书以下部分是关于方程式在特殊問題中的应用。特别重要的是关于从晶体切出棱柱体来研究它的变形这一章，它代表了紐曼的独創成果，同时也提供了他的几个从事于求定各种材料的晶体的彈性常数的学生們以实驗研究的基础。

其次，我們再看到該书中有討論在彈性介質中波的傳播这一部分。不过，在光学中应用彈性力学，应該归屬于光的波动理論的历史，所以这里不再詳細討論。

[1] 紐曼的“固体彈性理論和以太的講义”(Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen körper und des Lichtäthers) 由美依尔博士 (Dr. O. E. Meyer) 主編，1885，萊比錫。

最后一章包括弦索、薄膜和棱柱杆的振动。紐曼在处理圓軸的縱向振动时，建立了应需的方程式，較之过去所見到的要完善得多；因为他不仅考虑了質点的縱向位移，而且也考虑了徑向位移。他提出一个近似方法[1]来求解这些方程，并且将結果用于圓柱形杆的縱向冲击中。在这方面他是最先指出用能量守恒原理研究縱向冲击时必須考虑杆件的振动的人。我們已經知道（参看第 52 节），这个問題在以后又經圣維南研究过。

55. 克希霍夫 (G. R. Kirchhoff)

格斯塔夫·罗泊特·克希霍夫 (Gustave Robert Kirchhoff, 1824～1887)[2] 出生于哥尼斯堡，他是一个律师的儿子。1842 年讀完中学以后，进了哥尼斯堡大学，而在 1843～1845 这段时間，他参加听紐曼的一般講課和理論物理学研究室的教学活动。紐曼注意到克希霍夫的卓越才能，因此在他所写給教务长的报告中，他推荐这个学生是一个最有希望的青年科学家。他也贊許克希霍夫发表在 1845～1847 年間的几篇論文，这些論文都是在他的指导下在研究室中起草的。1848 年，克希霍夫得到博士学位并开始在柏林大学教課。他在柏林住不多久，1850 年便接受布累施劳 (Breslau) 大学的聘請，担任物理学副教授。在該校遇到著名化学家本生 (Bunsen, 1811～1899)，此后他就和本生密切地共事許多年。1854 年，本生轉到海得尔堡 (Heidelberg) 大学，1855 年，該校的物理学講座无人主持，他就将克希霍夫拉到海得尔堡大学。1858 年，希姆霍兹 (Helmholtz) 加入了他們的队伍，此后，海德尔堡大学便开始了一个偉大的科学时代。

图 156　G. R. 克希霍夫

这三位杰出教授的講座吸引到从其他德国大学和从国外来的許多学生。克希霍夫和本生一起研究光譜分析，1859 年克希霍夫发表了他在这方面的著名論文。他不独是一位很优秀的教师和理論物理学专家，而且也是一位不平凡的实驗家，因此学生能得到极全面的实驗教育。1868 年，克希霍夫因偶然事故跌斷了腿骨，健

[1] 关于这类問題的全解以后由普希罕默(L. Pochhammer)作出，見 J. Math. 卷 81, 324, 1876，克里立 (Crelle)。

[2] 关于克希霍夫的簡略傳記可参看波兹曼(L. Boltzmann)的"通俗小丛书" (Populäre Schriften), 1905，萊比錫。

康受到了严重的影响。他不能再在实驗室里做辛劳的工作，因而迫使他局限于作理論研究。1875 年，他轉到柏林大学，在該校担任理論物理学教授，就不再管教学生的实驗工作了。1876 年他以理論物理学講义第一卷的形式出版了他在力学方面的名著[1]。1882 年，克希霍夫再出版了論文集第一卷[2]。他的健康継續恶化，結果在 1884 年中止教学工作，在六十三岁时（1887 年）去世。

克希霍夫在当紐曼的学生时期就已热心于研究彈性理論。1850 年，他发表了关于平板理論的一篇重要論文[3]，文中我們看到有平板弯曲的最早的正确理論。在这篇論文的开端，克希霍夫对这个問題作了一段簡要的历史叙述。他提到苏菲・哲美因 (Sophie Germain) 最先企图求出平板弯曲的微分方程，以及拉格朗日怎样改正了她的錯誤。他沒有提起納維埃用分子力假說来推导平板方程的工作（参看第 29 节）。他討論了泊松的工作，并且指出泊松的三个边界条件一般是不能同时遇到的（参看第 27 节），而这位法国彈性学家之所以能够正确地解出振动圓板的問題那只是因为他所討論的对称的振动方式正巧与三个边界条件之一相合的緣故。

克希霍夫的平板理論是根据現在已普遍承認的两个假說，它們是：(1) 原来垂直于平板中央平面的每根直綫在弯曲时仍保持为直綫，并与弯曲后板的中央面相正交；(2) 平板中央面的元素在平板受横向載荷发生微小撓度时并不伸长。这些假定近似地与現在平板弯曲基本理論中所用的截面保持为平面的假說相符合。克希霍夫利用这两个条件建立了一个計算弯曲平板的位能 V 的正确式子，即

$$V=\frac{1}{2}D\iint\Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
$$+2(1-\mu)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big]dx\,dy \tag{a}$$

式中 $D=Eh^3/12(1-\mu^2)$ 为板的抗弯剛度，而 w 为其中央面的撓度。为了得出計算弯曲的微分方程，克希霍夫在这里用了虚功原理，該原理說明对于任何虚位移由满布在板面上載荷 q 所作的功必須等于平板位能的增量。由此得

$$\iint q\,\delta w\,dx\,dy=\delta V \tag{b}$$

将 (a) 式代替 V 并进行簡单的換算，克希霍夫导出了平板弯曲的著名方程：

---

[1] "数学物理，力学上的講义"(Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik) 第 1 版，1876 莱比錫。

[2] "綜合論文集" (Gesammelte Abhandlungen), 1882, 莱比錫。

[3] J. Math. 卷 40, 1850, 克里立。

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \qquad (c)$$

此外，他証明只有两个边界条件，而不是象泊松所建議的三个。

克希霍夫將他的方程用到有自由边緣的圓板的振动理論中。他不仅研究了对称方式（其节綫为一些同心圓），而且也研究了节綫为圓的直徑的方式以及不能用泊松的边界条件的方式。得出了一般解之后，他着手做許多数值运算并且制出一个計算各种振动方式的頻率的表来。他用这些数值来分析施拉德尼（参看第28节）和斯特列尔克（Strehlke）所得出的平板振动的实驗結果。从这些結果里，他想求出泊松比 μ 的正确值。然而，由于頻率受 μ 值大小的影响不大，这些实驗經証明是不适宜于作精确测定的。以后，正如前面所提过的一样（参看第48节），克希霍夫为了同一目的作出了他自己的实驗。

在他的講义中[1]，克希霍夫最后將他的平板理論推广到撓度不是很小的情况中。这个平板理論的出現已將彈性理論向前推进了一大步，而且由于在各种薄壁构件的設計中广泛使用，因此以后它就成为特殊重要的理論了。

克希霍夫在彈性理論方面另一重要貢献是他的細薄杆变形理論[2]。他导出杆件撓度不是很小时的三維撓度曲綫的一般平衡方程。他解释：当力只作用在杆端时，这些方程与一剛体繞一固定点的运动方程相同。这样，在剛体动力学中已經熟悉的解都可以直接用到細薄杆的变形上来。这就是所謂克希霍夫的动力比拟(dynamical analogy)。作为这种比拟的一个簡单例子，我們可將一根受压杆 AB（图157 a）的側向压屈和一个数理摆（图157 b）的振蕩进行比較。在这两种情况中，我們得到同样的微分方程，同时我們能說明两个問題之間存在如下的关系：如果有一点 M 以等速沿 AB 曲綫运动，它从 A 到 B 所經时間設等于摆的周期的一半，而且如果 M 开始自 A 点移开时恰在摆在其极端位置的一瞬間，以及在 A 点处作曲綫的切綫所成的角等于摆的极端位置与鉛直綫所成的角，則 M 点在任何中間位置处曲綫的切綫方向必和摆的相应位置的方向相一致。对于金属薄条作成一螺旋綫的撓度和一架迴轉仪的正常旋进之間的关系也可作出同样的說明。

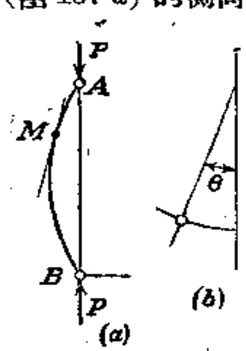


图 157

克希霍夫的理論引起了許多討論，并且它澄清了許多疑点，簡化了推导，而且

---

[1] 見他的"力学"（Mechanik），第2版，450頁，1877年出版。

[2] Borchardt 期刊，卷56，1858年。并参看"綜合論文集"（Gesammelte Abhandlungen），第285頁。

还証实了他自己的实验結果。最近，这个理論已經被用来分析一些彈性稳定問題，例如一个均匀受压圓环的压屈問題和具有狹长矩形截面的曲杆在均匀弯曲下的侧向压屈的問題。

最后，必須提一下克希霍夫关于变截面杆件的振动那篇論文[1]。計算这种杆件的侧向振动的一般方程是大家早已熟悉了的，而克希霍夫指出在某些情况下它可以正确地由积分解出。特别是他考虑了具有狹长的楔体形状和具有极尖的錐体形状那类杆件，算出了两者振动的基本方式的頻率。

56. 克列布希 (A. Clebsch)

克列布希 (1833～1872) 出生于哥尼斯堡。他年紀很小时就进入哥尼斯堡大学，在該校跟紐曼学习理論物理学。在紐曼的指导下他写出了一篇討論橢圓体在不可压縮的流体內的运动的博士論文。克列布希得到这个学位以后 (1854 年)，仍旧留在哥尼斯堡大学充任講师。随后他仍以講师名义在柏林大学工作。不久，他的科学研究就引起人們的注意，1858 年，他年仅 25 岁，便在卡尔斯魯赫工业学校担任教授。該校是一所重要的工程学校，他在該校主持理論力学的教学。在該校时，他写出他的名著"固体彈性理論" (Theorie der Elasticität fester körper, 1862)，这本书陈述了他在彈性理論方面的主要貢献。以后，克列布希的科学兴趣轉向純粹数学方面[2]。他停下工程学校的教务，1863 年受聘为开孙(Giessen)大学的純粹数学教授。1868 年被选为格廷根大学教授。在該校他发揮了科学家和教师的卓越天才。他和卡尔・紐曼 (Carl Neumann)——他的老师佛兰兹・紐曼的儿子——两人合作創办了一种新的数学杂志名为数学年报 (Mathematische Annalen) (1868 年)，成为数学期刊中的第一流刊物。他的講座吸引了許多学生，因为他懂得怎样培养他們的数学兴趣，也懂得怎样启发他們在这方面作出創造性的研究。1872 年，他被选为格廷根大学的校长，可惜他在职不久，就在那年因患白喉症突然去世，时年三十九岁。

1861 年，克列布希 (时年 28 岁) 开始写出他在彈性力学方面的书。那时，这門学科只出过拉梅所著的一本书。而法国学者正在将彈性理論应用于理論物理学的声学和光学这两方面，此时克列布希正向工程师們講授力学，因而須要写出一本这門学科可以在工程上实用的书。他的緒論对于应力和应变的介紹写得比拉梅的

[1] 克希霍夫的"綜合論文集" 339～351 頁。

[2] 克列布希在这方面的著作曾由他的学生克尔文 (F. Kelvin) 討論过。參看他所著"十九世紀数学发展上的講演" (Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert)。并參看克列布希的傳記，刊在数学年报，卷 6，197～202 頁上；卷 7，1～55 頁上。

簡短得多。他一开始就假定建筑材料都是各向同性的，根据这个假定导出了所有必需的方程式。他整个地删去了所有关于光学的問題，另外插入了圣維南的扭轉和弯曲理論以及克希霍夫的薄条和薄板的变形分析。不过作为一本供工程师用的书，克列布希的著作还是不很适用的。这是因为作者的科研工作經常不能得出簡单的实用方法之故。他特别注重于設想数理方法来求解問題，而不注意如何說明他所得結果在物理上和技术上的意义。更由于他独出心裁的性格使他討論到当时他特感兴趣的一些問題上去，結果使得該书的內容沒有得到很好的平衡。这本书作为克列布希的創作汇編是很有价值的，但它幷不是一本适合于研究彈性理論的书，特别对于那些用数理方法处理問題不发生特殊兴趣的人們为然。圣維南在他那克列布希著作的法譯本中，加入了許多重要的注释，这本加注的版本到現在仍然是彈性理論和工程实用上一本最完善的书。

克列布希著作的緒論包括有彈性基本方程的扼要介紹，早在第 50 頁上作者就开始写出其应用部分，幷討論均布的內压力或外压力作用下一个空心球壳的应力和变形。这个問題里面幷沒有新的东西，可是克列布希用它作为球体徑向振动理論的导論，从而作出頻率方程的根的一个創作性研究以及所有各根均为实根和正根的一个数理上的証明。他还用这个条件証明：如果作用力为已知，同时物体被固定得象一个不可移动的剛体一样，则可以完全决定出彈性体的平衡状态。

在第二部分中，克列布希討論了圣維南的彈性理論問題。他删去了圣維南关于应用半反求法所用的物理探討，而将此問題作成純粹的数学形式。此种情况可說明如下：設有一棱柱杆，如果它沒有体力，也沒有作用在它側面的力，而只有在縱向纖維的側面上作用着沿軸綫方向的剪应力的話，試求此杆两端应作用的外力。这样，克列布希能将軸向拉伸、扭轉和弯曲諸問題联合在一起加以处理。这种表示方法比圣維南的方法要复杂得多，因为彈性問題的物理意义在这个近似方法中已完全消失，而且处理的方法过于抽象，不能引起工程师們的重視。克列布希对圣維南考虑各种截面形状的梁时所討論过的許多应用問題不感兴趣。他取了实心椭圓形杆和截面由两个共焦椭圓組成的空心杆作为例子。这些問題的实用价值很小，但克列布希首先利用它們通过共軛函数的新奇数学处理方法来討論圣維南所提出的問題。

下一章是討論二維問題，它也許是克列布希在彈性理論研究中最有价值的一部分。二維問題从那时起已得到人們极大的注意，而且所得結果都具有重大的实用价值。作者仍是用純数学观点来研究这个問題的。他考虑一根圓柱形杆，假設力和应力分量在圣維南問題中等于零的，則在此处不等于零，而在圣維南問題中应

力和力不等于零的，則在此处却等于零。在这种方式下，垂直于杆件軸綫的截面上无应力作用，而在两相邻截面間的杆件任何部分将代表一块平板，此板因承受分布于其圓柱形周界表面上并平行于平板各表面的力而引起应力。这就是平面应力(plane stress)。克列布希研究了力在边界上分布必須滿足平面应力的条件給出位移的一般表示式。嗣后他应用这些一般式于一块圓板上，該圓板在边界上的徑向位移是已經規定了的。作为他的第二个例子，克列布希討論到一块极薄平板的情况并建議不用上面所考虑的那些应力而取用整个厚度中应力的平均值。于是他指出对于沿边界任何力的分布問題都可求解，并且給出了圓板的一般解。作为平面应力普遍形式的一种特殊情况，克列布希論及沿边界分布着力偶的一块薄板的弯曲，解出一个圓盘的应力問題，其撓度預先規定系沿边緣产生。

在书中的第二部分，我們看到了关于薄杆和薄板变形的問題。他給克希霍夫的薄杆理論作出稍加改变的形式(参看第 55 节)。他又通过写出撓度并不很小那种情况的方程式将薄板弯曲理論大大地加以推广[1]。最后，他将小撓度方面的理論用于一块圓板的弯曲上，此圓板的边緣被固定而承載着垂直于其表面任一点上的一个力。

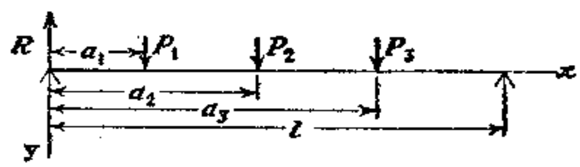


图 158

該书最后一部分包括材料力学中各种問題的基本討論。在求算受有几个横向集中力的梁的撓度时(图 158)，他指出积分常数的决定能够加以簡化，如果梁連接的各部分其平衡微分方程的积分

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Rx$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Rx+P_1(x-a_1)$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Rx+P_1(x-a_1)+P_2(x-a_2)$$

....

....

[1] 見他的书 264 頁上的脚注。

能得出下列形式：

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{Rx^2}{2}+C$$

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{Rx^2}{2}+\frac{P_1(x-a_1)^2}{2}+C_1$$

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{Rx^2}{2}+\frac{P_1(x-a_1)^2}{2}+\frac{P_2(x-a_2)^2}{2}+C_2$$

……………………………………………………………

……………………………………………………………

$$EIy=-\frac{Rx^3}{6}+Cx+D$$

$$EIy=-\frac{Rx^3}{6}+\frac{P_1(x-a_1)^3}{6}+C_1x+D_1$$

$$EIy=-\frac{Rx^3}{6}+\frac{P_1(x-a_1)^3}{6}+\frac{P_2(x-a_2)^3}{6}+C_2x+D_2$$

……………………………………………………………

……………………………………………………………

根据下述条件：在各載荷的作用点上，卽在 $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, …… 上，撓度曲綫两相接部分必須有一公共切綫和一公共撓度，这个条件得出 $C=C_1=C_2$ …… 和 $D=D_1=D_2=$ ……，这意味着积分常数与力的个数无关，在每种情况下只要算出两个积分常数就行了。克列布希將他的方法推广到旣作用有集中力还作用有分布載荷的那些問題中。此外，他还用它来分析均布載荷的連續梁。对于这些，他給出很簡单的一些公式来求等跨度各支座上的反力。

在該书最后一节中，克列布希給出一个分析桁架的方法。这里，第一次用一般形式討論了这个問題。他指出如果不用杆內的力而选擇各鉸的位移作为未知量时，我們經常能做到有多少个未知量便可写出多少个綫性方程式，因此問題可以解出。克列布希用两个簡单問題来說明这点：(1) 一单独的鉸用几根杆件將它和基础相連接的情况 (图 159 *a*) 以及 (2) 一根梁用三根杆件組成的杆系將其加强的情况 (图 159 *b*)。

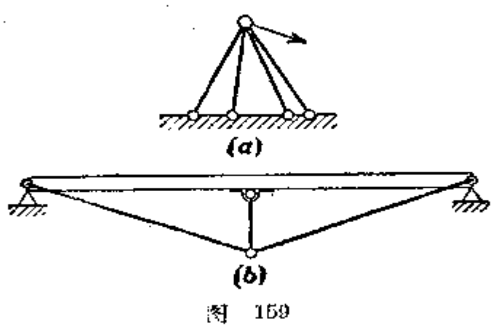


图　159

克列布希对于彈性理論的貢献大部分是属于数学方面的。他象柯西一样基本上是一位純粹数学家，他应用数学来发展

处理彈性問題的新方法。他的书，特别是經圣維南加注的法譯本，在材料力学史上占有重要的地位。

克列布希有一些关于光学方面的創作性論文对于彈性力学家也有用处。其中特别是他对彈性球振动所作研究的論文，在該球的表面上位移等于零[1]。他在解这个問題时用了球函数，并且在这种函数的理論中补充了許多內容。在加速度等于零的特殊情况下，得出了靜力問題的解，这个問題以后又經克尔文討論过（参看下节）。

57. 克尔文 (Lord Kelvin, 1824～1907)

威廉·湯姆逊·克尔文(William Thomson Kelvin)出生于1824年，是培尔法斯特(Belfast)(北爱尔兰的一个地名——譯者注)的苏格兰族[2]。他的父亲詹姆士·湯姆逊(James Thomson)是培尔法斯特皇家学院(Royal Belfast Academical Institution)的数学教授。1832年，全家搬到格拉斯哥(Glasgow)，他父亲在格拉斯哥大学担任数学教授。1834年，威廉·湯姆逊进入格拉斯哥大学学习古典語文、数学和自然科学。当时講授自然科学的是尼可尔(J. P. Nichol)教授，他使这个年青的湯姆逊对数学发生了兴趣。1840年，尼可尔叫他注意富勒的名著"热的分析理論"(Théorie analytique de la Chaleur)，該书內容对湯姆逊的早期科学研究起过很大的影响。以后他写道[3]："我爱好研究这些問題的起源是在1839年听过尼可尔的自然科学四年級的講課以后，对于富勒的輝煌成就和生活感到极端欽慕……我問过尼可尔我是否能讀懂富勒的书，他回答說'也許可以'。他認为这本书是一本不朽的著作。所以在1840年5月1日，就是奖金条例公布的一天，我在大学图书館中借出一本富勒的书；两个星期的时間我讀懂了它的內容——一直将它讀完"。

图 160 克尔文

为了帮助儿女們学习外国語言，湯姆逊的父亲在1839年夏天将全家搬到巴

[1] 見 J. reine u. angew. Math. 卷 61，195～262，1863。

[2] 关于克尔文的傳記曾写在下列书中，"威廉·湯姆逊·克尔文的一生"(The Life of William Thomson, Baron Kelvin of Largs)，两卷集，由湯普生 (Silvanus P. Thompson)，1910年于倫敦出版。

[3] 見上注所列书，第14頁。

黎，并且在 1840 年夏天他們又游历了德国。那时，威廉专心研究数学，对于德国語不感兴趣。他在回忆中曾說道："那年夏天我跟着父亲和兄弟姐妹同去德国，我随身带着富勒的书。我的父亲带我們到德国是要我們什么事都不要管，一心一意讀好德文。我們到了法兰克福，父亲在那里租了一所房屋，住了两个月……。我在法兰克福經常偷偷地躲在地窖里每天要讀几頁富勒的书。后来給父亲发觉了，他并不怎样严厉地責备我"[1]。

1841 年 4 月，威廉·湯姆逊离开格拉斯哥大学，进了劍桥大学的圣彼得 (St. Peter) 学院。他在該校継續研究富勒的著作，于是在 1841 年 11 月在劍桥数学杂志上发表了他第一篇关于富勒級数的科学論文。次年又在同一杂志上发表了两篇更为高深的論文。威廉在数学上的資賦和学識远远超过他班上所有的同学，大家都料定他将是 1845 年的第一名甲等数学优秀生。然而在毕业考試中他只得到第二名，使他和他父亲感到很失望。他的傳記里面写道："献身于最高級的科学活动……其作用与其說成有助于大学的荣誉，不如說成为一种前程的阻碍……为了在毕业考試中求取前茅名次，候試人必須熟习已知問題的解，推敲他写出解式的方法，因此要在短时間内讀完大量的书籍。他們通常由輔导教师或私人教师在这种訓練方式下，象訓練賽跑一样，事先訓練好几个月；在当时流行的特别方式下，候选人在有关对于用当时流行的特殊方式来处理特别类型的問題，的确得到不少好处。但是这种訓練方式不能采用为培养創造能力或推进数学科学之用。它对"学識"两字兴起了一个虛假的概念，同时屡屡发現优秀生的身分，不是給予該年級最优秀的数学家，而是給予那个对这些賽跑作了充分准备的人"[2]。

湯姆逊从劍桥毕业以后，决定継續他的研究工作。为此目的，他到了巴黎。那时，法国正在大力促进数学研究和数学在物理学各部門中的应用。在巴黎他会見了当代第一流的数学家，如路佛里 (Liouville)，斯士姆 (Sturm) 和柯西等，同时还向他們推荐他从劍桥带去的格林的著作(参看第 48 节)，得到他們的重視。

他还会見了几位法国物理学家。为了能学到更好的实驗技术，他进了法兰西学院 (Collège de France) 的物理实驗室，他在那里和雷諾 (Regnault) 教授一道工作，他帮助雷諾作出了雷諾对于研究热的定律方面的著名实驗。在这段时期，湯姆逊熟悉了克萊佩朗的著名論文"有关火的动力的研究报告" (Mémoires sur la puissance motrice du feu)，其中作者解釋了卡諾 (Carnot) 循环。在他的早期科学研究中，湯姆逊从卡諾，富勒和格林諸人的著作中得益很多。

[1] 見上注所列书，第 17 頁。

[2] 見上注所列书，第 96 頁。

他在巴黎学习了四个月以后，于1846年5月回到剑桥，同年秋天成为圣彼得学院的会員，在該校充任数学講师而开始收受数学方面的私人学生。他也主办剑桥及都伯林数学杂志（Cambridge and Dublin Mathematical Journal），他的几篇討論数学在理論物理学上的应用的論文都在这个杂志上发表。

1846年秋季，威廉·湯姆逊被选为格拉斯哥大学自然科学教授，在該校担任这門課程达53年。他的傳記中写道："虽然他掌握的学識很淵博，語法也很正确，但若要达到循序漸进的教学目的，他却变成了一个表达能力很差的人。他不能对一般的大学生講授物理学中最普通与最初淺的部分，他的思想时时刻刻引入于深奥的边緣科学范圍里，其中只有极少数人能勉强跟得上来。根据以前听过他課的学生說，他那些課题以外的創造性的内容实际上包含了他講課中的无价之宝，可惜大家都平白地放过了机会。只有少数能力較高思想較敏慧的学者才聚精会神地傾听着他天才奔放的講演。他的想象力是生动活潑的：在他的强烈热情之下，他好象不能控制自己，而让自己自由奔放。象他这样在工作中兴奋得忘形的人和在創作活动中的艺术家沒有两样"[1]。

湯姆逊一开始投身教学工作时就認識到物理学中的实驗工作对学生的重要性。他不但在講授中作实驗示教，而且还成立了一所实驗室，以便他本人和他的学生都能在实驗室内研究物質的性質。这是英国物理学界的第一所物理实驗室。当他在格拉斯哥大学工作的头几年，他对物理学范圍内最重要的貢献是在热力学方面，但在材料力学和彈性理論[2]上，他也得出很多的实驗資料。这些成果以后都被用作編写大英百科全书的項目，刊入在該书的第九版中，因此它們都被远近傳誦，并受到广泛的重視[3]。

在这些項目中，湯姆逊討論到彈性理論所根据的基本假定，說明了实际的材料性質有时和那些理論中所考虑到的性質有显著的偏差。他观察到建筑材料并非完全彈性的，在探討这个缺点时，他引入了內摩擦的概念，这个概念是从考察彈性系統的阻尼振动来研究的。从他的实驗中，他断定这种摩擦并不象在流体中一样，它是不和速度成正比的。关于彈性模量，他激烈地批評了当时在法国科学界最流行的少-常数理論（参看第48节）。在他反駁这个理論时，他引用軟木、胶質物和彈性橡皮作为例証。湯姆逊采用湯姆士·楊在簡单拉伸中对模量所下的定义，并且談

[1] 見上注所列书，第444頁。

[2] 参看論文"数学的彈性理論"（A Mathematical Theory of Elasticity），刊在 Trans. Roy. Soc. (A)，1856 倫敦；及"关于金属的彈性及粘滞性"（On the Elasticity and Viscosity of Metals），刊在 Trans. Roy. Soc. (A)，1865 倫敦。

[3] 这些論題以后印成一本书，"彈性学与热学"（Elasticity and Heat），1880。

到模重 (Weight-modulus) 和模长 (Length of modulus) (参看第 22 节)。他指出模长有一个簡单的物理解釋——沿一根杆件縱向振动傳播的速度与一落体从等于模长一半的高度上落下时所得的速度相等。

彈性体的实驗将湯姆逊引到彈性力学和热力学之間的边界范疇中。他研究了彈性体由于应变[1] 所产生的温度変化，并且証明了模量的大小和試件內产生应力的方式有关。考察一下拉伸試驗的結果，設 OA (图 161) 表示試件在彈性极限內突然拉伸的图形。拉力慢慢加上的图形通常斜度較小，如图中 OB 直綫所示。在第一种情况下，試件和其周圍空間沒有热交換，因此是一种絕热伸长 (adiabatic extension)。在第二个例子中，我們假定变形进行得极为緩慢，由于热交換，試件的温度实际上保持定值，因此是一种等温伸长 (isothermal extension)。从这个图形中，我們斷定突然拉伸的楊氏模量比緩慢伸长的要大些。就鋼料来說，两者之差是很小的(大約为 1/3%)，因而在多数实际应用中可以忽略不計。承受突然拉伸的試件通常較其周圍空間的温度要低些，由于温度的均衡作用，于是产生伸长的某些增量，如图 161 中的距离 AB 所示。如果現在将拉力突然除去，試件即收縮，其状况由图 161 中 C 点来表示。由于縮短，試件的温度上升，因此要回到原先状况(如图 161 中所示的 O 点)，只有在它冷却到周圍空間的温度时才能发生。于是 $OABC$ 的面积即代表一次循环中所失去的机械功。

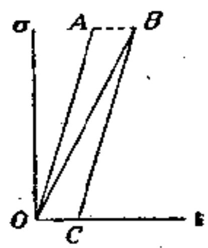


图 161

有一些特殊材料，例如彈性橡皮，在某一温度下，当張拉时它显示出一种热效应，而当張力除去时又表現出冷却效应。在这类試件中(湯姆逊是这样解釋的)，加热时材料必然收縮，而冷却时它又伸长。因为如不这样，則由图 161 所說明的推理就会引出矛盾的結論，即在每一次循环过程中会出現得到机械能的可能性了。在湯姆逊的实驗中，他用了一根彈性橡皮带，由挂在下端的一个載荷将它鉛直地加以拉伸，他指出当一个赤热物体移近橡皮带时重物将向上升起，当赤热物体移开，它又下降。

以后湯姆逊对于一个彈性体变形时所出現的温度变化作了一般性研究。他从考虑物体的能量[2] 給出第一次理論上的証明，認为应变能作用的存在只和对某一标准状态所測定的应变有关，而不与达成应变的方式有关。这个研究組成了威

[1] 見上注所列书，第 19 頁。

[2] 見"数学及物理論文集" (Mathematical and Physical Papers)，卷 1，291～313 頁。

廉·湯姆逊加入在彈性理論上的最重要資料之一。

1860 年，台特 (P. G. Tait) 被选为爱丁堡自然科学教授，湯姆逊和台特这两位科学家就工作在一起了。他俩都感到需要有些可以介紹給学生使能从事于理論物理学各个部門的研究的书本。这两位科学家决定自己动手写出这些必要的书本，因此在 1861 年，他俩开始写作"自然科学論著" (Treatise on Natural Philosophy)。由于湯姆逊参加了建設大西洋电报綫的重要工作，那項工作需要大量的理論和实驗研究，因此写书工作延迟了很久。这册著名論著的第一卷直到 1867 年才出版。这一卷論述剛体力学、彈性力学和流体力学，并且包含了湯姆逊在彈性理論中的很多創造性研究。

在湯姆逊事业发展的初期，他已經得出了对絕对均質各向同性彈性体的彈性方程的解[1]。他就利用此解来求解一些重要問題，例如，一力均匀作用于絕对均質体的部分球面上，以及一力作用于該物体的无限小的一个部位上等等。他也給出对已知表面应力或已知表面变形而作的球壳和实心球[2]問題的全解。

作者应用这个解来研究地球的剛性。那时曾有人提出这么个問題："是否地球实际上具有完全剛性能保持它的形状不变，还是它因为受月球和太阳的吸力在它的外表层和内部物質会明显地产生变形的傾向？因为沒有一种物質是絕对剛性的，它必然在某种程度上发生变形：可是这些"固体潮"是否能由任何观察方法（直接的或間接的）充分地发現出来，到現在还无法肯定"。假定它是完全彈性体，湯姆逊推測一个密度均匀的实心地球的彈性应变对表面海潮的影响，并且得出如果地球象鋼一样的剛硬，它的彈性屈伏将使潮的高度减低到假設地球为絕对剛体的理論所算出的高度之 2/3 左右。在这册論著的第二版中，增加了达尔文 (G. H. Darwin) 对这方面的补充討論，他得出如下的結論："总而言之，我們可以充分断定，如果地球物質有波动起伏的某些形迹时，那种起伏現象也一定是很微小的，因此它的有效剛性至少有鋼的剛性那么大"[3]。

在湯姆逊处理細杆的理論中，他对于克希霍夫的动力比拟（参看第 55 节）作出很全面的討論，并用它来計算螺旋彈簧的撓度。在发展薄板弯曲的理論时，他用簡单的字眼解釋了克希霍夫的基本理論只在撓度較板厚为小时才足够精确的理由。他也作出对边界条件的一个很有益的討論。克希霍夫早已指出在一条边緣上的边

---

[1] 同上注，卷 1，97 頁。

[2] 同一問題业已为拉梅解出，他用了另外的方法（参看第 28 节）。

[3] 見"自然科学論著"第二部分，460 頁。

界条件一定只有两个而不是泊松所需要的三个。湯姆逊对这一縮减提出了物理学上的解釋，并利用圣維南关于等效靜載系的彈性当量原理（参看第 32 节）指出沿薄板一边分布的扭轉力偶可用一等效靜力分布的剪力来代替。这样一来，只需要考虑与一个边緣上的弯矩和剪力有关的两个条件就够了[1]。在沿着一块矩形板的四周边緣均匀分布有扭轉力偶并产生一均匀反曲率的特殊情况下，用剪力代替扭轉力偶将得出由法向力 P 及 $-P$ 形成的矩形板的有利力系，法向力 P 作用于一条对角綫的两端，法向力 $-P$ 作用于另一对角綫的两端。这样的力系很容易加在薄板上，故可在实驗室中用此法作出薄板的撓度試驗作为决定薄板抗弯剛度之用。

在处理圣維南的扭轉問題时，湯姆逊采用了克列布希的共軛函数的方法，并应用它来計算扇形截面杆的应力和扭轉角。

湯姆逊在"自然科学論著"一书中对彈性理論的討論成为該方面用英文写成的第一次有系統的著作。它对于英国后来的彈性理論研究者起了重大的影响。

1866 年，英、美两国間的电报綫接通了。这个重要企业的成功大部分应归功于湯姆逊的科学性建議和他积极努力的合作。为了表揚这个成就和他在科学界的崇高地位，他被授以爵士的光荣称号。他不独被公認为英国最偉大的物理学家，而且也是一位发明家和极有研究的工程师。从这个时候起，他的絕大部分时間都化在設計机器和技术顧問的工作上。

准备将全部理論物理学中的各个部門都包括在內的"自然科学論著"的編写規划一直沒有全部完成。第一卷发行了两版，1879 年出第一部，1883 年出第二部。然而克尔文* 仍在繼續研究着物質的性質。在希姆霍茲关于渦旋运动的一篇論文的影响下[2]，克尔文发展了渦形环的理論。他指出"在一理想介質中，渦形环是稳定的，而它們在許多方面所具备的性質都是很重要的，例如物質的原子、耐久性、彈性，以及通过介質而彼此間互相作用的力等性質"。

克尔文关于物質結构的观念其后整理在他的名著"巴尔提摩講演集"（Baltimore lectures）（巴尔提摩在美国华盛頓东北——譯者注）中，那些講演曾在 1884 年当着許多著名物理学家和数学家的听众面前发表过。那些講演的絕大部分都属于彈性理論、各向同性与各向异性彈性体中光的傳播，以及在摻有无数回旋分子的彈性介質中的傳播等題材。他不承認光的电磁理論，而企图改进光的"彈性"理論。

---

[1] 見上注，724～729 頁。湯姆逊給出一个数学証明評論一力学由另一靜力等值力系代替的問題。这是第一个証明圣維南原理的例子。以后，同一个題目又經毛萊斯・列佐 (Maurice Levy) 討論过，見 J. Mathématiques，卷 3，219～306 頁，1877 年。

[2] J. Math. 1858 年于克里立出版；有英譯本刊在 Phil. Mag. 1867 年出版。

* 这是湯姆逊授爵士以后的尊称——出版社注。

他經常反复地說："我从不自满，除非我能把那种物质作出一个力学模型"。为了要說明光学現象，他想出了几种类型的分子結构。1884年在"巴提摩尔講演集"中添加了些注釋，并且重新油印过一次，克尔文对这方面的兴趣一直很濃，因此这些講稿經过多次修改和补充，在二十年以后終于印成了书本。

"巴尔提摩講演集"一书連同"自然科学論著"中的有关各章都为彈性力学家广泛傳誦，我們将看到，在十九世紀的后期以及二十世紀的初期，由于受到他的著作启发的結果，好些英国的著名科学家都热心于这方面的研究。

过去曾有人好几次想把克尔文請到劍桥担任卡文笛施学院的教授，可是他却宁愿留在格拉斯哥一直到1899年終止他的教学活动为止。那时組成了庆祝克尔文教学五十周年的紀念会[1]。許多科学家从世界各地都来参加这个盛会以表示对这位偉大人物的祝賀。1899年，克尔文从教授生活中退休，但他請求圣納特斯学院(Senatus Academicus)委派他作为一个研究員，因此他有权利在自然科学实驗室內进行研究。1907年12月17日，克尔文去世。

58. 馬克斯威尔(1831～1879)[2]

馬克斯威尔(James Clerk Maxwell)出生于爱丁堡，但他的童年大部分是在乡下原籍度过的。1841年，他父亲带他到爱丁堡，并把他送入爱丁堡学院附属小学，在該校一直讀到1847年，每年暑期都回乡度假。詹姆士起先对学业不很重視，可是自从1844年上几何課开始，他的数学天才很快就受人注意。他以后专心致力于数学研究，1845年，由于他在考試中的优秀成績，他获得了数学奖章。

图 162 J.C. 馬克斯威尔

馬克斯威尔的父亲常常来学院訪問，因此有好几次他带了他的儿子参加爱丁堡艺术学会和皇家学会的聚会。其中有一次会議討論到爱特魯斯坎(Etruscan——意大利北部一个古代国家名字，以制陶器著名——譯者注)甕的形状，发生了怎样繪制一个完整卵形的問題。这个孩子对此問題感到兴趣，他終于想出

[1] 那时"克尔文"(Lord Kelvin)这本书已出版，其中写出克尔文的生平事迹并描述了那次五十周年庆祝会的盛况。

[2] 关于馬克斯威尔的詳細傳記，見甘培尔(L. Campbell)与加尔涅特(W. Garnett)合著的"馬克斯威尔的生平"(The Life of James Clerk Maxwell)，1882年于倫敦出版。并参看尼文(W. D. Niven)主編的"科学論文集"(The Scientific Papers)中的序文，1890年于劍桥大学出版社出版。

一个巧妙的解法。他想出一个簡单的机械方法用一根綫繞在几根小針上来作出卵形曲綫。这个成就于 1846 年由福貝斯教授向皇家学会提出，并且发表于爱丁堡皇家学会学报(Proceedings of the Royal Society of Edinburg)中[1]。1847 年春季，詹姆士被派到偏振棱鏡发明者尼可尔的实驗室工作，从那时起，他精通了偏振光的实驗。他利用玻璃鏡的反射来产生偏振現象。随后，尼可尔送給他許多三棱鏡，他用这些贈品造成一架光彈性应力分析用的仪器。

1847 年秋季，馬克斯威尔进了爱丁堡大学，在該校他能順利地进行研究，并根据自己的爱好选定学习科門。他参加了听福貝斯教授的自然科学課程，繼續着他的偏振光实驗，并支配相当多的时間来閱讀力学和物理学方面的书籍。在他 1850 年 3 月写給一个朋友的信中說："我正在閱讀楊氏的講稿 (Lectures)，威里斯的机械原理 (Principles of Mechanism)，沐斯列的工程与力学 (Engineering and Mechanics)，笛克逊 (Dixon) 的热学 (Heat) 和穆依格諾的光学研究报告 (Répertoire d'Optique)……我对金屬絲和杆的扭轉有了一些概念，要到放假时才能将它写成；我还要对玻璃、胶質物等材料作出压縮实驗，得出它們的一些数据；对光学常数和力学常数之間的关系作出实驗，得出它們适合的比值等，以及进行其他悬索桥、鏈垂綫、彈性曲綫的研究"。我們看到他那时候已开始研究彈性理論了。

1850 年馬克斯威尔的論文"彈性固体的平衡" (On the Equilibrium of Elastic Solids) 曾在爱丁堡皇家学会上宣讀过。这篇論文开始批判了少-常数理論并且給斯托克斯的論文作出了引証[2]。作者导出有两个彈性常数的各向同性体的平衡方程。然后利用他的方程来討論几个特殊問題。这类問題大半已由其他学者在以前解出，不过沒有一人这样注意过用实驗来証实理論結果。他首先取"一个空心圓筒，其外表面固定不动，內表面受一力偶——力偶矩为M，使旋轉一微小角度$\delta\theta$"的情况，借助于用极坐标表示的平衡方程，他很容易地証明有剪应力产生，其大小与距圓筒軸綫距离的平方成反比。

为了証实这个結果，他采用光彈性法做实驗，并用赤热的魚胶灌入两个同心圓的模子里，冷却时，便成为一正常的固体圓筒，以供实驗。他說："如果用平行于圓筒軸綫方向透射的偏振光来观察筒的实体，則在实体內任一点处反向偏振射綫的減速差数将与距圓筒軸綫距离的平方成反比……，因此一般現象是色环系排列成为与单軸晶体的色环相反的样子，愈近中心的环圈其色調愈为鮮明，而环与环間的距离則愈近中心也愈为減小。整个系統被两条暗带所交叉，該暗带与原先的偏振

[1] Proc. Roy. Soc. 爱丁堡，卷 2，89～93 頁。

[2] Trans. Cambridge Phil. Soc. 卷 8，第三部分，1845 年 4 月宣讀的論文。

面傾斜 45°"。馬克斯威尔观察了这个色图，并且用水彩画颜料将它描下[1]。他的傳記中写道："馬克斯威尔有很大的設計才能，他經常設計出一些奇妙的毛織品图案自娛。他的設計对色彩調和这方面是令人惊叹不置的"。

第二个問題是：馬克斯威尔考虑了圓杆的扭轉，并且利用他的分析通过实驗决定了剪切模量。他的第三与第四个例題是，处理拉梅提出的空心圓筒和空心球内由均匀压力产生应力的問題。馬克斯威尔用他的解来考查有关决定流体压縮性的一些实驗結果。他說："有些人認为数学理論不很适用便将它抛弃不用，而猜想到如果容器各边的壁非常薄且两边壁上压力相等时，則容器的可压縮性将不影响計算結果。在下列計算中指出：液体的表观可压縮性和容器的可压縮性有关，而不与压力相等时的壁厚有关"。

第五个問題是关于矩形梁的純弯曲。作者考虑了由于梁弯曲而发生的縱向纖維之間的压力从而对基本理論作出一項重要补充。馬克斯威尔討論了（作为他的第六个問題）均匀受载圓板的弯曲。作这个研究是为了考查能否以圓板受弯的方法制造凹形的鍍銀玻璃鏡。馬克斯威尔算出平板中央处的曲率半徑，并且观察到依照这个原理制成的望远鏡能够作为一具无液气压計，其焦距与大气压力成反比。

第七个問題是关于受扭圓柱体由于縱向纖維伸长而引起的扭矩，經証明計算扭矩的公式包含了与扭轉角的立方成正比的一項，如同湯姆士·楊以前所指出的一样。

在第八个問題中，馬克斯威尔考虑了轉动中的薄圓盘由于离心力而产生应力的重要問題，从而作出了計算切向应力的正确公式。这算得是这个問題上[2]第一个最满意的处理方法了。

第九到第十一个問題是关于空心圓筒和空心球的温度应力。因此，显見得杜哈美尔对这类問題的解，馬克斯威尔还不曾知道（参看第 53 节）。

在第十二个問題中，馬克斯威尔計算出一根簡支梁的撓度，从而給出了一个将剪力对撓度数值的影响考虑在内的公式。这是假定为这些应力系均匀分布于梁的整个截面上而得出来的。

第十三个問題是討論当两个圓柱形表面（其軸綫均垂直于一无限彈性板的平面）在同一方向上承受相等的扭力时所产生的应力情况。任一点上的合应力可用

[1] 图附在他的論文里面。它們又刊印在甘塔尔和加尔涅特合写的馬克斯威尔傳記里面，但在"科学論文集"中却被删去了。

[2] "科学論文集"第 61 頁，第 (59) 式中有印錯的地方。

迭加法将两个旋轉圓柱体每一个所产生的应力加在一起而得出。这方面可参考第一个問題。他根据計算所得的等色綫如图 163 所示，馬克斯威尔用实驗証明了这

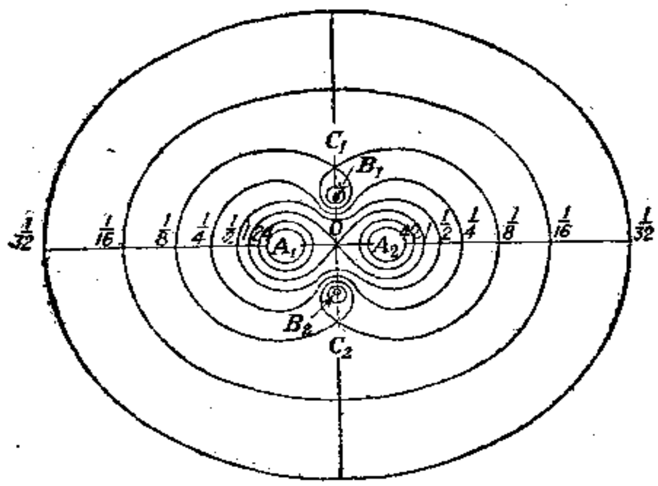


图 163

些理論結果。他說："我已經用第一个問題中所描述的魚胶圓柱体作出了这些等色綫。利用圓形的偏振光能清楚地看到它們，又由于所看見的等色綫沒有被遮断的情况，所以它們更能显示出和計算的等色綫相类似的形状"。

在第十四个問題中，馬克斯威尔討論到一块未进行退火的玻璃所制成的三角形薄板的应力。这个問題更为复杂，計算时还沒有理論解可資根据。馬克斯威尔用光測彈性法通过实驗来决定它的应力，并且用圓偏振光得出等色綫。然后依靠透射平面偏振光，决定出主应力的方向并繪出等傾綫系，如图 164 所示。"根据这些曲綫，其他在任一点处按它們自己的方向、主軸的方向指示的其他类似曲綫，都可如法作出。这些收縮和膨脹的方向曲綫都表示在图 165 中；相应于收縮方向的曲綫是朝三角形的中心凹进的，并与膨脹曲綫直角相交"。得出了这种应力迹綫（傾度綫）(trajectories) 系以后，馬克斯威尔再指出了怎样計算主应力的方法。取定一个曲边矩形元素，該矩形由两相邻压縮綫和两相邻拉伸綫包圍而成，他采用平衡方程

$$q-p=r\,\frac{dp}{ds} \tag{a}$$

式中 q 为受压主应力，p 为受拉主应力，r 为压縮迹綫的曲率半徑，以及 ds 为相邻两压縮迹綫間的距离。因此 (a) 式和他在討論拉梅問題中所用的式子相同，在那个式子里，r 是表示一点的徑向距离，而 ds 則等于 dr。因为 $q-p$ 已从光測彈性

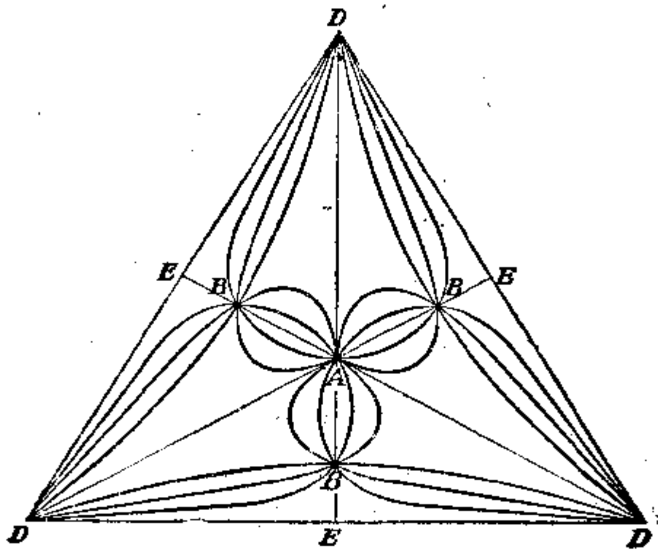


图 164

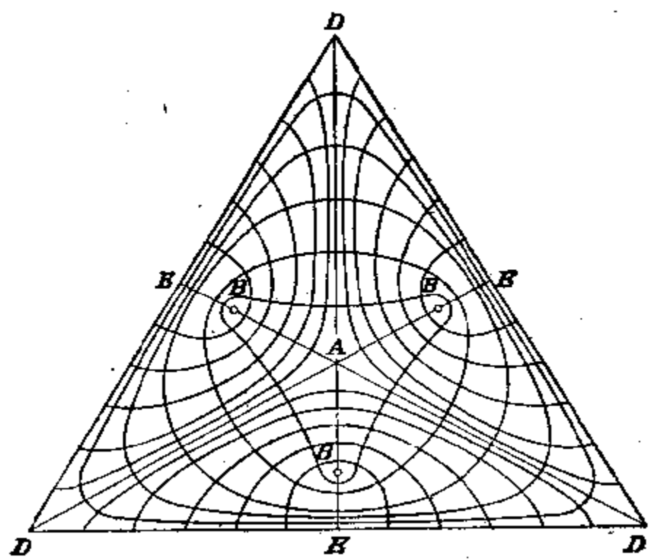


图 165

試驗中求得，而 r 及 ds 可从繪出的迹綫中取得，他便能用 (a) 式的逐步积分并且从已知 p 值的边界开始，来求出 p 值。

我們知道馬克斯威尔完备地发展了光測弹性的应力分析技术，这种方法現在已被广泛地用来研究二維問題。他也說到現在已用于三維光測弹性学中的某些透明材料所显現出来的特性。因为，在他的扭轉实驗中(第一个問題)，他說过：“当

魚胶还未完全干燥的时候，継續不断的施以扭轉力，將得出一块很硬的魚胶板，卽使將扭力除去之后，它仍然能发生同样形式的偏振光……两种其他的非結晶物質也具有經施压后轉化为起偏振結构的性能。第一种是用蜡和松香的混合物压成一块薄板……另一种具有同样性質的物質是馬来古塔波树胶。这种物質在它的常規状态下（卽在冷却时），卽使作成很薄的胶片，它仍是不透明的。但是如果將薄胶片逐漸拉伸，它可以被拉到原来长度的两倍以上，因此它具有一种强烈的双折射能力，可供引起偏振光之用"。

馬克斯威尔在年靑时期已經作出了所有彈性理論方面的重要研究，包括应力分析的光測彈性法在內。1850 年秋季，他回到劍桥大学継續他的研究工作。

关于馬克斯威尔在劍桥的生活，有台特教授所写的下列記載可査。他和馬克斯威尔在爱丁堡大学是同班同学，他在 1848 年就离开該校进入劍桥的。他写道："他（指馬克斯威尔）在 1850 年秋季来到劍桥，他知識的广博，对于这样年靑的人来說，实在是难以估量的，可是有一个失常的情况，使他那严守法則的私人教师感到惊异。虽然那位教师是威廉·霍普金斯（William Hopkins），很有名望，可是他这个学生在学习中絕大部分都自搞一套，并且可以确当地說，近年来的高級优秀生沒有一个象馬克斯威尔这样在进入考場以前不去好好訓練怎样进行"应付"的工作。虽然他对于在考試中如何取巧的門徑懂得太少，但由于他的眞才实学，还是获得了第二名优秀生的地位，并且在斯密士奖金的更高阶段考試中，他被訒定为和第一名优秀生洛斯（E. J. Routh）是同等程度的"。

馬克斯威尔毕业后，被留在劍桥，而在 1855 年被选为特棱尼梯学院的会員，开始講授水靜力学和光学。那时他的科学工作是測量混合色和分析色盲的原因。他对电学也很重視，发表了关于法拉第力綫的研究报告。1856 年，他受聘为阿伯尔丁（Aberdeen）的馬丽紹尔（Marischal）大学的教授，在 1856～1860 年这段时間他一直在該校講授自然科学。同时，他継續研究色感覚，并且做出稳定土星光环的研究。他在气体动力理論上的研究也是在阿伯尔丁开始的，关于这方面的第一篇論文于 1859 年在英国学术协会上宣讀过。

1860 年，馬克斯威尔受聘为倫敦高等学院（King's College）的教授，于 1860～1865 年間在該校講授自然科学和天文学。当他留駐在这所太晤士河畔的学院时期，他发表了关于气体动力理論的重要研究报告以及关于电学方面的著名論文。我們以前已討論过的他在結构理論方面的重大倡議（参看第 45 节），也是在那时发表的。

在高等学院的教学工作占去了他許多时間，为了改善他自己的科研工作条件，

他决定辞去教授工作，回到苏格兰他的乡間老家。在那儿他以全部精力編写热学方面的书并写出他在电学和磁学方面著名的論文。

联系到艾雷(G. B. Airy)发表梁的內部应变的論文[1]，馬克斯威尔轉到他那互易图形的概念上对三維应力系統提出一个应力图的一般理論[2]。他指出彈性方程的一般解可以用应力的三个函数来表示。他将他的理論应用到二維問題中，作出結語說："艾雷在他論文中所討論的那些情况的解并不眞正地滿足彈性理論中推导出来的那些条件。事实上，在他的研究中沒有将彈性应变明确地考虑进去"。他将他的理論应用于矩形簡支梁，此梁的上緣承受有均布載荷，他发現他的正确解和艾雷的解，其中差別只是在縱向应力的数值上，而且誤差的最大值为 0.314 q，q 为載荷的集度。

在約瑟夫·拉摩尔所著"乔治·加布利尔·斯托克斯爵士"(Sir George Gabriel Stokes)一书的第 217 頁上，拉摩尔曾将馬克斯威尔的科学見地和斯托克斯以及克尔文两人的見地作了一个有趣的比較，他写道："馬克斯威尔对于一切事物都富于科学幻想；斯托克斯却拘謹过分。馬克斯威尔最喜欢构創想象的和实在的模型以及想象組成物質基础的分子活动；斯托克斯所发表的研究大部分是属于精細和表观的一类，以整块物質的性質和对称性为規准，在他的研究中很难引入分子的概念。克尔文大致折衷于两者之間。按照他活动的主要特征，他可以正确地被說成为(也是他本人所确認的)斯托克斯的一个門徒。虽然他还缺乏勇气，不能大胆地馳騁于未知境界；但在重视实用的才能以外，他也有积极想象的能力。无疑地，他的想象能力在受到法拉第影响之后，主要是受馬克斯威尔的启发。在馬克斯威尔的著作中，想象的結果是极为成功的"。

1871 年，馬克斯威尔中止他在苏格兰的退隐生活，接受了劍桥大学教授的职务。那时，該校已彻底地認識到实驗工作在物理学的热学、电学和磁学各部門中的重要性。校长迭汪賽尔公爵(Duke of Devonshire)也毫不吝嗇地撥出基金来建造物理实驗室，馬克斯威尔即被聘为实驗室的第一屆主任。在他一生的最后阶段(1871～1879)，他在这所新的实驗室的行政工作上化了很大的力量。他对于这所大学的主要政策方針也起有很大的促进作用。他主張大学里的研究工作一定要和校外科学团体保持密切联系，并且主張物理学中的各分支学科也一定要在优等生考試中占有入选地位。他很积极地参加了 1873 年发起的考試計划的筹备工作。

[1] Phil. Trans. 1863 年。
[2] 同上，卷 26。

第 九 章

1867~1900 年間的材料力学

69. 材料試験所

我們已經注意到，自从結构工程和机械工程使用了鋼鉄以后，已經使此种材料的力学性質的实驗研究居于重要地位。較早的一些实驗家經常只着重在求极限强度，但现在已了解到鋼鉄的性質和制造时的工艺过程有关，因此在任何情况下，为了特殊目的选擇一种适当的材料时，仅有极限强度方面的知識还是不够的。对材料的力学性質作出更全面的研究已經具有极重大的实用价值了。这些試驗要求专門的設备，我們将看到在所討論的这段时期內許多国家都开始迅速地成立了許多材料試驗所。

德国方面，沃勒在倡議成立国立試驗所。英国方面，私人企业也成立了試驗所。最早的成績优良的例子之一是大卫·克尔卡台 (David Kirkaldy) 的試驗所，它是 1865 年在倫敦的南瓦克 (Southwark) 地方开办起来的。在克尔卡台所著的书籍[1]的序言中，他說："罗伯特·納庇尔 (Robert Napier and Sons) 公司接受了一批制造高压鍋炉和船用机械的定貨任务，这些机具最重要的是質量輕而强度高，經建議鍋炉采用均質金属 (homogeneous-metal) 而船用机械采用精炼鋼 (puddle-steel) 来代替平时所用的熟鉄。由于这些材料那时还刚开始采用，因此在使用以前，必須謹慎地确定它們的有关功效；为此目的，建造了下面将要講到的机具。那时只打算每次試驗少数試件，但这种研究証实了不独对科学研究本身极为重要，而且也似乎能得出重要的实用效果。因此，在納庇尔公司許可之下，我一有閑空，便将实驗范圍大加扩充，远远超过了原先的計划。試驗从 1858 年 4 月 13 日开始，直到 1861 年 9 月 18 日才結束……"。图 166 表示克尔卡台在他的实驗工作中所建造和使用的机器，而图 167 中我們可看到他所用的試件以及試件的裝置。克尔卡台利用这个簡单的

---

[1] 克尔卡台著"各种熟鉄和鋼的抗拉强度及其他性質的实驗研究結果" (Results of an Experimental Inquiry into the Tensile Strength and Other Properties of Various Kinds of Wrought-iron and Steel), 1862 年格拉斯哥。

設备作出了很重要的成績，他的书在出版的时候就对当时所采用的鋼鉄的力学性質作了最全面的叙述。

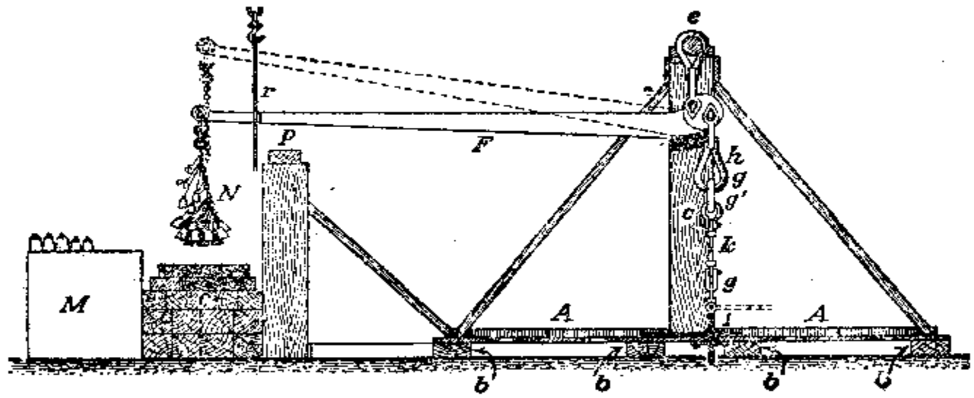


图 166 克尔卡台的試驗机

克尔卡台所用的試件很短小[1]而所用的測量仪器也很粗魯，不可能量出彈性伸长或算出彈性模量。他的实驗只得出极限載荷和試件的总伸长。在某种实例中，将試件全长刻划成相距 1/2 吋的刻度，試驗后量出原刻度之間的距离。这样，实驗指出，試件大部分的长度伸长是均匀的，而且保持为圓柱形；只有接近断裂处的那些部分才显出較大的应变，而截面积也有較大的局部收縮。由此，克尔卡台推論到总伸长量对原长度的比例和所用的試件尺寸有关。

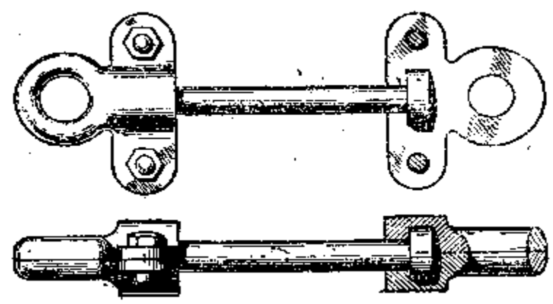


图 167 克尔卡台作拉伸試驗的試件

他是第一个介紹測量横向收縮和認定在断裂处截面积的相对收縮是材料的一个重要特性的人。他認为要决定一种材料的性質，单知道它的极限强度的大小是不够的，因为"抗拉强度很高并不是品質优良的一般証据，因为它可能极硬而脆，根本不能承受弯曲和扭轉。无論怎样，当我們将断裂应变与断裂处截面积的收縮两相比較时，情况就大不相同。因此我們得以正确地判定：一方面很高的断裂应变(应力)是归因于鉄的优良品質、致密、純粹和适度的柔軟，或是单純归因于它是很硬和不可屈伏；另一方面低的断裂应变(应力)可归因于組織的疏松，或者它的性質虽很致密和純粹，但特别柔軟所致"。这位作者在表中列出极限强度的两种数值；它們是

[1] 为了測出满意的彈性伸长量并得出充分精确的彈性模量，霍普金逊所用的杆，长达 50 呎。

分别用截面的原来面积和断裂面积計算出来的。

克尔卡台大概是最先认識到試件形状对极限强度有影响的人。他把同一材料制成不同截面的一些短試件的試驗結果进行比較之后，他說："由一个試件产生的断裂应变的量經証明实質上受到它的形状的影响——就作者所知，这个重要影响至今未被任何人确定出，甚至未被任何人料想过。这是許多例子中的一个，可以用来說明当我們将不同来源的試驗結果进行公正的比較以前，絕对需要正确了解所有試驗作出时的真实情况（这种說法除适用于現在所討論的論題外，也能适用于許多其他的論題）。从上面这些事实，很清楚地証明了，如果两块鉄或鋼其中有一块在几吋的长度內直徑很均匀，而另一块却只有很短的一段是直徑均匀的，我們不能单凭比較这两块鉄或鋼的断裂应变（应力），就判定它們之間的优劣"。

克尔卡台很注重鋼的疲劳强度，他的书中曾描叙了在1850年土木工程师学会会議上对于这个問題的討論。这次会議的主席是罗伯特·斯蒂芬逊（参看第38节）。克尔卡台同意主席的意見认为振动不能引起鋼的重結晶。他作出他自己的試驗，証明了重結晶的假說用来說明疲劳断裂的脆性是无效的。他指出如果改变試件的形状使断裂时横向收縮受到阻碍，例如在带有矩形深槽的試件中，則柔軟材料也能发生脆性断裂。他又指出断裂的形状也可用下法来改变，即"突然施加应变使試件只有极短时間的伸长而更易于折断"。

在研究冷作对鉄的力学性質的影响时，克尔卡台不同意一般人的意見，即抗拉强度的提高是由于"固結作用"所致。他用直接試驗証明"經过冷拉处理和类似的冷辗处理，鉄的密度并不象从前所想象的会增大，而是减小了"。克尔卡台发现到，用檢驗鋼鉄內部結构的方法可以得出此种金屬性質方面的有用資料。他証明"各类熟鉄的組織能够很鮮明地显現出来，即将其浸入稀盐酸溶液中使周圍杂質发生化学作用后只剩下金屬部分露出在外，以供檢驗"。这样，他发現"在纖維质的断裂面中，裂紋向外拉出，从外面就可看到；然而在結晶质的断裂面中，裂紋都突然整个横向折断，要在內部或截面上才可看出来。在后面这种情况下，試件的裂口通常与其长度方向成直角；在前面这种情况下，裂口的形状多少总是不規則的"。

从这段对克尔卡台所作成就的概述中，我們看到这位卓越的实驗家在材料的力学試驗这个范疇中提出并說明了許多重要問題。他的书对于从事这方面工作的工程师們一直很有价值。他的丰富的实际經驗和他的对观察任何不平常事物的敏銳眼力結合一起，使得克尔卡台在他的私人試驗所里解决了由建筑及机械工业飞速发展中所发生的許多重要問題。

在欧洲大陆上，材料試驗所发展成为国营事业。其中德国达到了最高水平[1]。它們是由工程学院經管的，不独用作工业試驗而且也供教师們作研究工作和教学之用。这样的措施对工程教育和工业都很有利。

第一所这样的試驗所是1871年在慕尼黑工业学院建立起来的。它的第一屆主任是約翰·包兴格(Johann Bauschinger，1833～1893)，他是該学院的力学教授。他完成了一架能負載100吨的試驗机的安装工作。这架机器是由留德威格·渥德(Ludwig Werder，1808～1885)[2]在1852年替勒恩堡(Nürnberg)机械制造厂(Maschinen-baugesellschaft)設計出来的。經証明它較以前所制成的一些机器更能适合于作較精确的試驗之用，嗣后大多数的欧洲主要試驗所装置了这种机器。

包兴格为了測量較小的彈性变形，发明了一架鏡式伸长仪[3]，它能测出单位伸长量精确到1×10^{-6}。利用这架精密的仪器，他查测了各种材料的力学性质，其精确度远远超过了以前研究者所得出的。他在作鉄和軟鋼的拉伸試驗时，注意到在一定限度内，这些材料很精确地服从虎克定律，即伸长量和应力是一直保持着正比关系的，它們是彈性的，沒有发現永久变形。包兴格从这些試驗中断定：可以假定鋼或鉄的彈性极限和它的比例极限相重合。当他在試件上継續加載至超过此彈性极限时，伸长量的增加开始較載荷的增加出現更快的速率，在一定的載荷值之下，会发生变形急遽增加，即在此載荷保持不变时变形随时間不断增加。載荷的这个极限值称为材料的屈伏点。軟鋼的屈伏点会因試件上加載以超过初始屈伏点的載荷而有所提高，如果第二次加載是立即开始的，則載荷的最大值給予我們新的屈伏点的数值。如果第二次加載是在相隔几天以后才进行，屈伏点将較第一次加載最大載荷时稍高。包兴格也注意到超过屈伏点以后試件的伸长并不显示完全的彈性，而且如果在初始伸长后立即加上第二次載荷，則在第二次載荷下将

图 168 約翰·包兴格

[1] 关于德国的材料試驗的历史，可参看包曼(R. Baumann)的"技术与工业发展史"(Beitr. Geschichte Technik u. Industrie)卷4，147，1912。并参看李昂(A. Leon)的"材料試驗的发展与努力"(Die Entwicklung und die Bestrebungen der Materialprüfung)，1912，維也納。

[2] 关于渥德的傳記，可参看康拉德·馬特修斯(Conrad Matschoss)的"偉大的工程师"(Grosse Ingenieure)，第3版，1942。

[3] 关于这种伸长仪的叙述，見包兴格的論文，刊在土木工程卷25，第86頁，1879年出版。

出現一个非常低的彈性极限。可是，如果加載的时間隔了好几天，材料的彈性恢复幷且呈显出一个較初始限值稍高的比例极限。

包兴格試驗了軟鋼承受应力循环时的性质[1]。他发現如果一个試件被拉伸到超过了它的初始彈性极限，則其受压时的彈性极限将降低。軟鋼的彈性极限值可使試件承受压力而提高，但是，如果此压力継續到超过某一定限时，則受拉的彈性极限也将因此降低。使試件承受几次的載荷循环，可以定出这两个极限使試件在此极限中保持完全彈性。包兴格称此两个极限为拉伸和压縮的自然(natural)彈性极限。他假定初始(initial)彈性极限与材料制造时的工艺过程有关，而此自然彈性极限表示了"眞实"的物理特性。他肯定了只要試件保持在自然彈性极限以內，材料是能經受无限次数的循环而不致有疲劳破坏的危險。

包兴格将他的結果在公报(Mitteilungen)上发表，該公报每年发行一次，为許多从事这类工作的工程师們的重要讀物。在慕尼黑工业学院的这个先創工作之后，其他許多地方也开始了建筑材料的实驗研究。1871年，由馬騰斯(A. Martens)在柏林工业学院成立了材料試驗所[2]，他随后出版了一本书[3]，叙述各种試驗方法和所使用的机器。1873年由堅尼(K. Jenny)[4]主持下在維也納工业学院开办了同样的一所試驗所。1879年在苏黎世工业学院也創立了材料試驗所，由于台特梅哲(Ludwig von Tetmajer, 1850～1905)教授的領导有方，它获得了欧洲最重要試驗所之一的声望。

巴赫(C. Bach)于1879年受聘为斯图加特工业学院的教授，他在該学院也成立一所材料試驗所。巴赫主要着重在将材料力学应用于机械設計中。他利用这所試驗所不独是在材料性能方面作研究工作，而且也为有关建筑物或机械零件的应力分析上的各种問題作出实驗性解答。这类研究的主要結果收集在巴赫的教本"彈性与强度"(Elasticität und Festigkeit)[5]中，这本书在机械工程师之間流傳很广，因而对于德国机械設計占有重要的地位。

---

[1] 見 Mitt. mech. tech. Lab. 1886 年于慕尼黑发行；幷参看 Dinglers Polytech. J. 卷 266，1886 年发行。

[2] 关于德国实驗室发展的历史，可参看"高等工业学院皇家材料实驗室"(Das königliche Materialprüfungsamt der Technischen Hochschule)，1904，柏林。

[3] 馬騰斯著"机械制造各种材料手册"(Handbuch der Materialienkunde für den Maschinenbau)第一部分，1898年柏林出版；第二部分与海恩(E. Heun)合著，1912年柏林出版。

[4] 关于該实驗室及其工作的記述，見堅尼所著"在韦因(Wien) K. K. 高等工业学院的强度試驗与所使用的机器与仪器"(Festigkeits-Versuche und die dabei verwendeten Maschinen und Apparate an der K. K. technischen Hochschule in Wien) 1878年維也納。

[5] 見"彈性与强度"第一版于1889年发行；第6版于1911年发行。

在瑞典,材料試驗的业务都集中在鋼鉄工业方面。1826年,拉格杰姆在这方面做了許多工作,我們已知道(参看第24节)他为此目的建造过一架专用机器。这架机器为克略特·斯梯菲(Knut Styffe)广泛地用来試驗瑞典鉄道工程上所用的鋼鉄[1]。斯梯菲是斯德哥尔摩(Stockholm)工业学院的院长。1875年,瑞典鋼鉄工业在里尔吉霍門(Liljeholmen)建立了一所材料試驗所,并且裝置了一架能力为100吨的渥德式机器連带着一架阿姆斯勒拉方(Amsler-Laffon)式的水压机。1896年,这架渥德式机器又被迁往斯德哥尔摩工业学院新建立的試驗所。

在俄国,材料試驗是由拉梅开始的,他試驗了在圣彼德堡建造悬索桥所用的由俄国工厂制出的鉄。他的試驗机裝置在交通工程学院,那时他是該学院的力学教授。更多的工作是由薩布科(П. И. Собко, 1819～1870)完成的[2],他是該学院的桥梁工程教授。这所試驗所在著名的俄国桥梁工程师别列留布斯基(Н. А. Белелюбский, 1845～1922)主持下大大地加以扩充,成为俄国最重要的一所試驗所,别列留布斯基竭力提倡建立材料試驗的国际规范,他积极地参加了組織国际材料試驗学会的工作。

为了使各試驗所所得的实驗結果可以相互比較,必須将試驗的技术統一起来。为此目的,包兴格教授发起于1884年在慕尼黑召开了一次会議。这次会議是很成功的。共有七十九位研究工作者从各国来参加会議,其中多数人都参予了討論。会上选拔出一个委員会来拟定各种試驗的规范,1886年在德累斯登召开的第二次会議上,原先拟定的大多数规范都被通过了。

1889年在巴黎举行国际展覽会时,还同时召开了应用力学的国际会議,会議中的一个部門便是与应用力学有关的材料試驗。会中討論了克尔卡台,包兴格,巴尔巴(Barba)以及其他諸人的成就[3],而且一致承認必須使用几何相似的試件来作試驗。在大会閉幕时,大家一致决定向各国提議建立国际材料試驗学会。第一次国际会議在苏黎世召开,由台特梅哲(L. Tetmajer)教授担任主席。多数国家都参加了这个組織,以后的国际会議对于試驗材料力学性能的新方法方面貢献很大。

[1] 研究結果曾发表在 Jern-kontorets Ann. 1866年发行。对这个重要工作的一段簡要討論包括在下列书中"瑞典材料試件的强度"(Festigkeit-Proben Schwedischer Materialien),1897年于斯德哥尔摩出版,此书为在斯德哥尔摩召开的国际材料試驗会議准备的。

[2] 薩布科于1840年由交通工程学院毕业,以后充任奥斯特洛格拉德斯基(М. В. Остроградский)的助手。他教过力学,編定过奥斯特洛格拉德斯基的积分讲义,并且发表了几篇关于材料力学和桥梁方面重要的論文。1857年,他到美国旅行一次去参观美国的桥梁。

[3] 这一部門的报告占了下列一书第三卷的大部分篇幅:"应用力学国际会議"(Congrès International de Mécanique Appliquée),1891年于巴黎出版。它指出当时材料的机械性能的試驗情况一个美好的全景。

60. 摩尔(O. Mohr, 1835～1918)的功績

阿托·摩尔出生于北海沿岸的霍尔斯丁(Holstein)的韦塞布侖(Wesselburen)。十六岁上，他进入汉諾威工业学院，毕业后在汉諾威-俄尔登堡(Olden-burg)鉄路建筑时期充任結构工程师。在这段时期内，摩尔設計了德国一些最早的鋼桁架。他也作过一些理論研究，发表了几篇重要的論文刊登在汉諾威出版的建筑工程师学会学报(Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins)中[1]。

图 169 阿托·摩尔

摩尔所发表的論文包括：应用索曲綫求梁的彈性撓度，推导支座不在同一水平面上的連續梁的三弯矩方程以及影响綫的第一次应用等等。

他三十二岁时已經作为一个著名工程师而被斯图加特工业学院聘任为工程力学教授。他受聘后，在1868～1873这五年中一直在該校講授工程力学各分支学科的課程。当时他特别注重用图解法求解結构理論中的問題，并且在图解静力学这門学科上开辟了新的园地。摩尔是一位优秀的教授，他講課能引起学生們很大的兴趣，以后学生中間也涌現出一些出色人物。当时听他課的就有巴赫和奥古斯特·虎勃(August Föppl)。在虎勃的自傳里[2]，曾說过所有的同学一致認为摩尔是他們最好的老师。他的講解并不頂好，有时講話很慢，他在黑板上画的图也很潦草，可是他的講义一直是很清楚而且安排得很合理，他时常提出一些新鮮而有趣的事物来引起学生們的注意。学生們对他的講課发生兴趣的原因是：摩尔不独很透彻地了解了这門学科，而且講授了他本人在科学創造中作出的不少成績。

1873年，摩尔搬到德累斯頓，繼續在德累斯頓工业学院教书，直到六十五岁时退休为止。他在晚年安居在德累斯頓附近，仍繼續他的科学研究工作。

摩尔最大的功績是在結构理論方面，这将在下一章里討論。此外，他对于材料力学的貢献也是很重大的。他是最先注意到[3]由一个变集度載荷 q 沿直綫 AB 分布(图170)所构成的索曲綫的微分方程

---

[1] Z. Architek. u. Ing. Ver. 1868 年于汉諾威出版。

[2] 奥格斯特·虎勃的"自傳"(Lebenserinnerungen), 1925 年慕尼黑。

[3] 見他的論文刊在 Z. Architek. u. Ing. Ver. 第19頁，1868年汉諾威。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{q}{H} \tag{a}$$

和彈性綫的微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI} \tag{b}$$

形式相同。由此可見，如取极点距离等于梁的抗弯剛度 EI，作出虛載荷集度为 M 的索曲綫即成为撓度曲綫。也可观察到如果将索曲綫 acb 和閉合綫 ab 間的縱距 e，乘以极点距离 H，可得出 AB 梁在截面 D 处弯矩的数值，摩尔断定梁的撓度可以从虛载荷集度 M/EI 作用于梁上所产生的弯矩計算出来，这个方法大大地簡化了求撓度的問題。这就不再需要将(b)式积分，只要按簡单的靜力学方法就能得出撓度了。正如摩尔所指出，这个簡化方法用在变截面梁中特别重要。

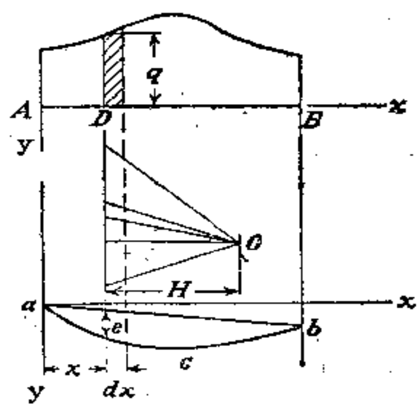


图 170

摩尔将他的方法用于一簡支梁（图 171a），考虑 c，d 两截面，他証明如果先将載荷 P 作用于 c 而量出 d 处的撓度，再将同一載荷作用于 d 而量出 c 处的撓度，則在这两种載荷情况下所量得的撓度是相等的。得出这个結果以后，摩尔考虑了这样一个問題，即梁上如承受着能在各不同位置作用的一个力，則必可算出梁上任一截面（設为 d）处由該力所引起的撓度。为此，他作出相应于一单位載荷作用于 d 处的彈性綫 $acdb$（图 171b）。令 y 表示任一点 c 处的撓度。于是，根据上述結果，他断定如一单位載荷作用于 c 处能在 d 处产生撓度 y，則任一載荷 P 作用于 c 处也能在 d 处产生撓度 yP。这样，得出撓度曲綫 $acdb$ 以后，他立即得出載荷在任何位置时 d 点处的撓度。摩尔称此曲綫 $acdb$ 为 d 处撓度的影响綫（influence lines）。应用迭加原理，摩尔指出，如果有几个載荷 $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots$ 作用于梁上，而 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots$ 为影响綫的相应縱距，于是由这些載荷产生于 d 处的撓度将等于 $\sum P_i y_i$。这是第一次在工程上使用了影响綫[1]。在同一篇論文（1868 年的）里，摩尔也討論了連續梁，提

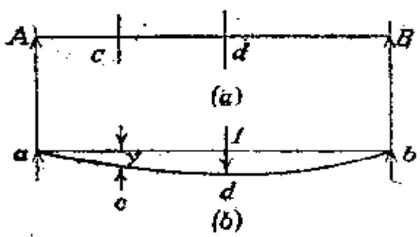


图 171

[1] 摩尔在他的"論文集"（Abhandlungen）第 2 版，第 374 頁上（1914 年出版）提过：大致在同时，尹克勒也独自地用过影响綫这个概念。見尹克勒的論文刊在 Mitt. Architek. u. Ing. Ver. 第 6 頁上，1868 年于波赫門（Böhmen）出版。

供了三弯矩方程的一个图解法。

摩尔在材料力学上另一个重要的成就是他的一点上应力的图示法[1]。在数理弹性理論中，为了表示一点上的应力用过应力楕球（参看第26节），而对于二維問題，就要用应力椭圓。庫尔曼在他的“图解静力学”（Graphische Statik, 1866年出版）第226頁上早已証明二維系統中的应力可用一个圓来表示（参看第43节），这样能使問題大为簡化。摩尔对这个問題作出更全面的研究。考虑一个有主应力 σ_1 和 σ_2（图172）的二維情况，他指出作用在按 ϕ 角决定的平面 mm 上的应力其法向应力分量 σ 和剪应力分量 τ 可由按 2ϕ 角决定的在圓周上的 R 点的两坐标得出，如图173中所示。AB 圓的直徑等于 $\sigma_1-\sigma_2$，其两端点 A 及 B 表示了垂直

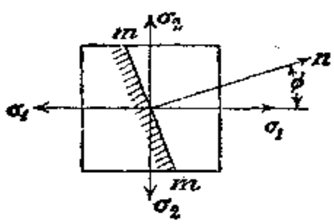


图 172

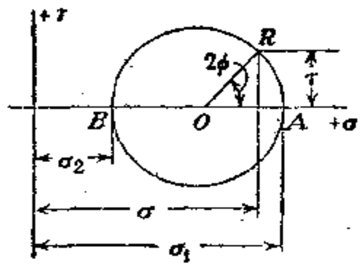


图 173

于 σ_1 及 σ_2 的主平面上的应力。在按同法处理具有主应力 σ_1、σ_2 及 σ_3 的三維情况时，摩尔发現作用在通过主軸的平面上的应力分量可用在三个圓上各点的坐标来表示，如图174所示。三个圓中最大的一个具有一个等于最大及最小主应力之差，即 $\sigma_1-\sigma_3$ 的直徑，而它表示可通过中間主应力 σ_2 的軸綫所作平面上的应力。摩尔又指出与所有三个主軸都相交的平面上作用的应力可用图形（图174）上某些点的坐标来表示的方法，証明了所有这些点都落在阴影面积以内。如果我們取定法向应力的某值，例如取 OD 所表示的值，于是有无数的平面都具有同样的法向应力分量。决定那些平面上剪应力的大小的諸点落在通过 D 点所作垂直綫 EF 及 $E'F'$ 两綫段上，可見具有由长度 OD 表示的同一法向应力分量值

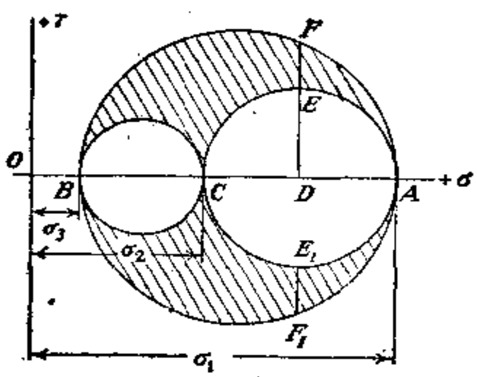


图 174

[1] 見土木工程，第113頁，1882年发行。

的所有各平面，其最大切应力值将对应于通过中間主軸的那些平面，其应力可由 F 及 F_1 点的坐标来确定。

摩尔随即利用这种应力表示法来发展他的强度理論[1]。那时，多数工程师在作应力分析时都取法圣維南采用最大应变理論(maximum strain theory)作为他們評断破坏的标准。認为构件的尺寸应按这样的方式来确定，即在最不利載荷情况下，最弱点处的最大应变不能超过簡单拉伸中的容許单位伸长量。不过多少年来已經有一些科学家認为剪应力的作用很重要而必須加以考虑。庫侖就已經假定过破坏是由于剪应力所致。維卡特（参看第 19 节）批判过梁的基本理論中沒有考虑到剪应力的缺点，路德士（Lüders）也注意到当試件伸长超过彈性极限以后在試件的磨光的表面上出現了屈伏綫[2]。在摩尔时代，已經有包兴格作出的一些实驗結果，包兴格已經利用他那精密的仪器决定出鋼的拉伸、压縮和剪切的彈性极限。这些結果都和最大应变理論不符。摩尔在他 1882 年的論文中討論过包兴格的实驗，并且評論到用立方体試件所作的压縮試驗結果，他認为作用在立方体和机器平台接触面間的摩擦力对于应力分布一定有很大的影响，因此試驗的結果就不会是簡单压縮試驗的結果了。

摩尔采取他那用圓表示应力的方法(图 174)設想了一个强度理論，这个强度理論能适用于各种应力情况而且与实驗結果很相符。他假定一切具有同样大小的法向应力的平面，其中最弱的一个平面，也就是最容易发生破坏的一个平面[3]，乃是具有最大剪应力的平面。在这种情况下，只須考虑图 174 中最大的一个圓。摩尔称它为主圓(principal circles)，并且建議对这样的圓必須根据每一种应力情况下发生破坏的实驗結果来作出。例如，图 175 表示为鑄鉄受拉、压和純剪切(受扭)試驗至断裂时的主圓。如果有了很多这样的主圓，便可作出这些圓的包絡綫，并且可充分精确地确定对于沒有实驗資料的任何一种应力情况，其相应的主圓也将与此包絡綫相接。例如，当

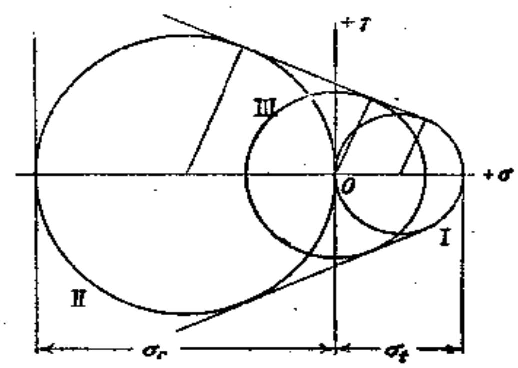


图 175

[1] 見 Z. Ver. deut. Ing. 第 1524 頁，1900 年出版。

[2] 見他的論文刊在 Dinglers Polytech. J. 1860 年出版。并参看哈特曼(L. Hartmann)的"金属受力作用下的变形分布" (Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts)，1896 年出版。

[3] 摩尔考虑了广义的破坏；它可能是材料的屈伏或是材料的断裂。

論及鑄鉄时，摩尔建議可取对I，II两圓所作两根外公切綫作为包絡綫（图175），此两圓系相应于拉、压实驗下的断裂情况。剪切的极限强度便可从作出圓III来求得，此圓与包絡綫相切其圓心在O点处。而設σ_t及σ_c为材料的抗拉和抗压极限强度的絕对值，从图形中我們可求出剪切的极限强度为

$$\tau_{ult}=\frac{\sigma_t\sigma_c}{\sigma_t+\sigma_c}$$

它与实驗非常符合。

摩尔的理論引起工程师和物理学家极大的注意。結合这个理論，他还做出了許多实驗，这些将在以后再行討論（参看第71节）。

61．应变能与卡斯提安諾定理

我們已經看到欧拉在他推导彈性曲綫的微分方程时用过杆件弯曲应变能的式子（参看第8节）。格林在討論彈性常数的必需个数时也假定应变能是应变分量的二阶齐次函数（参看第48节）。拉梅在他的彈性力学书中（1852年第一版，参看第28节）談到克萊佩朗原理，該原理說明一个彈性体变形时受外力所作的功等于物体中累积的应变能。

假定一个彈性体在变形时所产生的位移是外力的綫性函数，則由这些力所作的功T将为

$$T=\frac{1}{2}\sum P_i r_i \tag{a}$$

式中P_i为在i点处的力，而r_i为在該点沿作用力方向的位移分量。物体的应变能V可用下列积分表示：

$$\begin{aligned}V=\frac{1}{2}\iiint\Big\{&\frac{1}{E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)-\frac{2\mu}{E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)\\&+\frac{1}{G}(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)\Big\}\,dx\,dy\,dz,\end{aligned} \tag{b}$$

而克萊佩朗的原理說明了

$$T=V \tag{c}$$

在分析有冗余杆的桁架时，意大利軍事工程师米納布里雅（L. F. Ménabréa）建議采用桁架应变能的式子[1]。他主張作用于各冗余杆的力X_1，X_2，X_3，……必須能使应变能为一最小值。这样他得出下列方程：

$$\frac{\partial V}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial X_2}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial X_3}=0,\cdots\cdots \tag{d}$$

此式連同靜力方程已足以求出桁架所有各杆內的力。我們看到米納布里雅用了

[1] 見 Compt. rend. 卷46，第1056頁，1858年出版。

最小功原理(principle of least work);可是他沒有得出这个原理的正确証明。理論上的証明还是在以后由意大利工程师阿尔伯托·卡斯提安諾(Alberto Castigliano, 1847~1884)提供的。

卡斯提安諾出生于意大利的阿斯梯(Asti)。他教过几年书以后,在1870年进入都灵工业学院,他在該学院的学生时期就已經对結构理論作了独特的研究。1873年他提出了該校的工程师学位論文,这篇論文包含了对他那著名定理的說明及其在結构理論上的一些应用,經过整理和扩充以后,由都灵科学院于1875年出版[1]。初出版时,这篇論文的重要性并沒有为工程师們所注意。为了使多数人認識到它的重要性,卡斯提安諾用法文重新印出这本著作,里面还补充了对他这个定理的一套完整的証明以及許多实用的例子[2]。卡斯提安諾的早死限制了这位偉大科学家的事业。可是他的定理已成为結构理論中不朽的眞理。象德国的茂勒-布累斯劳(Müller-Breslau, H.)和意大利的蘧米洛·奎地(Camillo Guidi)等有名工程师們的許多著作都是根据这个定理写出来的。

卡斯提安諾在推导他的理論中,首先考慮具有理想鉸的桁架。如果外力是作用在鉸上而各杆都具有等截面形状,这样一个系統的应变能将为:

$$V=\frac{1}{2}\sum\frac{S_j^2l_j}{EA_j} \tag{e}$$

并且,根据克萊佩朗原理,应为

$$\frac{1}{2}\sum P_ir_i=\frac{1}{2}\sum\frac{S_j^2l_j}{EA_j} \tag{f}$$

左边的总和号概括全部受載荷各鉸的应变能,而在右边的則概括桁架所有各杆的应变能。卡斯提安諾假定此系統中撓度 r_i 为外力的綫性函数。将这些函数代入(f)式的左边,他就可用外力 P_i 的二阶齐次函数表示应变能。利用撓度和諸力之間的同样关系,他又可用变位的綫性函数表示諸力,这样就得出用位移 r_i 的二阶齐次函数表示的应变能。卡斯提安諾在他的研究中用这两种表示应变能 V 的形式証明了两个重要的定理。

首先他假定把 V 写成位移 r_i 的函数。如果将 P_i 力作些微改变,位移 r_i 也会产生些微的变量 δr_i,而桁架应变能的总量将改变一微量

---

[1] Atti. reale accad. sci. 1875 年于托林諾(Torino)出版。

[2] 卡斯提安諾著"彈性系統的平衡理論"(Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques),1879年于都灵出版。在卡斯提安諾死后五十周年,科倫尼第(G. Colonnetti)主編了"卡斯提安諾选集"(Alberto Castigliano, Selecta)。其中包括有卡氏的工程师学位論文和他的法文著作的重要部分。这本书曾由安德柳斯(E. S. Andrews)譯成英譯本,1919年于倫敦出版。

$$\delta V=\sum\frac{\partial V}{\partial r_i}\delta r_i$$

显然此量必須等于当位移有些微改变时外力作出的功，即等于

$$\sum P_i\delta r_i$$

这样，他得出下式

$$\sum\frac{\partial V}{\partial r_i}\delta r_i=\sum P_i\delta r_i \tag{g}$$

此式必須适合于任意选定的 δr_i 的值。由此，对于所有的 i 均为

$$\frac{\partial V}{\partial r_i}=P_i$$

它的涵义是将 V 对任一位移 r_i 加以微分，得出的綫性函数即表示相应的力 P_i。

在他立出第二条定理的方程时，卡斯提安諾假定把 V 写成外力 P_i 的函数[1]。于是，当我們将外力作些微改变时，应变能的改变将为

$$\sum\frac{\partial V}{\partial P_i}\delta P_i$$

代入(g)式，得

$$\sum\frac{\partial V}{\partial P_i}\delta P_i=\sum P_i\delta r_i \tag{h}$$

此式等号的右边，表示功 $\frac{1}{2}\sum P_ir_i$ 的增量，而

$$\sum P_i\delta r_i=\delta\left[\frac{1}{2}\sum P_ir_i\right]=\frac{1}{2}\sum P_i\delta r_i+\frac{1}{2}\sum r_i\delta P_i$$

由此，它便可改写为

$$\sum P_i\delta r_i=\sum r_i\delta P_i$$

代入(h)式，得

$$\sum\frac{\partial V}{\partial P_i}\delta P_i=\sum r_i\delta P_i$$

由于它必須适合于任一取定的 δP_i 的值，作者断定

$$\frac{\partial V}{\partial P_i}=r_i \tag{i}$$

这样一来，如果应变能 V 是按各自的外力函数写出，这些函数对任一个力取导数时便得出該力作用点处沿該力方向相应的位移。

有了这个計算变位的一般方法，卡斯提安諾考虑了如图 176 所示的两种特殊情况。他証明如果沿一个彈性系統的直綫 ab（图 176a）作用着相等而反向的两个

[1] 卡氏称 P_i 为独立力 (independent forces)。它的意义是在計算应变能 V 中用力 P_i 的函数給出的反作用力，可用靜力方程式算出。

力 S，則导数 $\frac{\partial V}{\partial S}$ 給出由于此系統变形所引起的 ab 距离的增量，正如包含 a、b 两个鉸的桁架那种情况一样。在两力垂直于桁架中 ab 綫并且組成了一个力偶 M 的情况下（图 176 b），則导数 $\frac{\partial V}{\partial M}$ 給出 ab 綫的旋轉角。

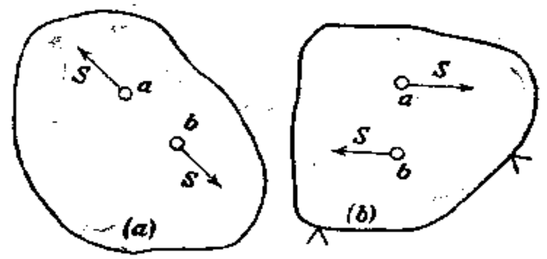


图 176

卡斯提安諾用这些結果来分析有冗余杆的桁架，給最小功原理作了一次証明。在分析中，他除去所有的冗余杆，并且用力代替它們对桁架其他部分的作用，如图 177b 所示。于是此系統变成静定的，而其应变能 V_1 为外力 P_i 的函数，也为作用于冗余杆的未知力 X_i 的函数。关于图 176 a，根据上述情况，他断定 $-\frac{\partial V_1}{\partial X_i}$ 卽表示 a 及 b 两节点間距离的增量。很清楚地可以看到这个增量等于冗余杆系中 ab 杆的伸长量（图 177a）；因此他得出下列关系：

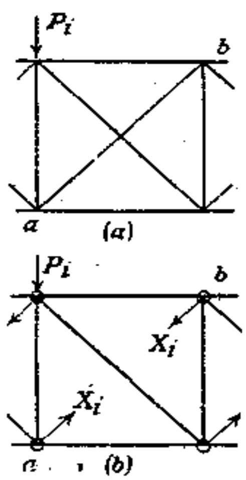


图 177

$$-\frac{\partial V_1}{\partial X_i}=\frac{X_i l_i}{EA_i} \tag{j}$$

他看出此式的右边卽表示冗余杆的应变能 $X_i^2L_i/2EA_i$ 对 X_i 的导数，并用 V 表示包括有冗余杆在內的一个系統的总应变能，他将（j）式写成下式：

$$\frac{\partial V}{\partial X_i}=0 \tag{k}$$

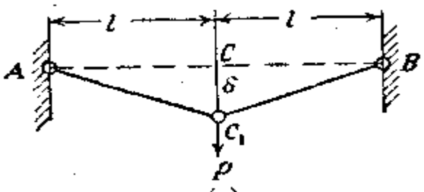
此式卽表示最小功原理。

这些原来为分析鉸接桁架所得的結果，已被卡斯提安諾推广到任何形状的彈性体上。他发展了在各种变形下杆件的应变能的式子，这些式子在应用他的理論来分析梁和拱的超静定問題时实用过許多次。看了所有这类实用例子之后，很容易了解到自从卡斯提安諾写出他那名著以来，在結构理論中应变能这方面就很少再增加新的內容了。

恩格塞（F. Engesser）[1] 将卡斯提安諾原理作了重要的归納。卡氏一直假定結构物的位移是外力的綫性函数，可是有些情况，这样的假定是不适当的，因而他的原理就不能应用。恩格塞引出了**余能**（complementary energy）的概念来处理这些情况，并且指出余能对各个独自的力的导数經常給出位移来（力与位移間的关

[1] 見他的論文刊在 Z. Architek. u. Ing. Ver. 卷 25，第 733～744 頁，1889 年汉諾威出版。

系可以为非綫性的)。我們可用一个簡单例子来解释。設有两根恒等的杆件鉸接在一起而与不可移动的支座 A, B 相連(图 178 a)。在未受力时，杆件系沿直綫 ACB 安置。如果有一个 P 力作用于其中央，C 鉸經过一段距离 δ 移到 C_1 处，从簡单分析中，即得



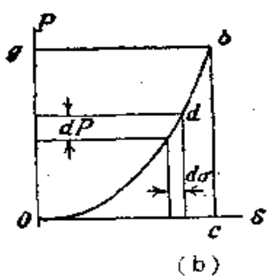


图 178

$$\delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \qquad (1)$$

式中 l 及 A 分别表示杆件的长度与其截面积。图 178 b 中的曲綫 Odb 代表用 P 的函数表出的 δ，于是 $Odbc$ 的面积給出应变能

$$V = \int^{\delta} P\, d\delta = \frac{lP^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}}$$

这并不是一个 P 力的二阶函数，因此导数 $\frac{\partial V}{\partial P}$ 不能給出撓度 δ 来。依据恩格塞的意見，$Odbg$ 的面积系表示余能 V_1，因此，得

$$V_1 = \int^{P} \delta dP = \frac{l}{\sqrt[3]{AE}}\int^{P} P^{1/3} dP = \frac{3lP^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}}$$

此式对 P 取导数得出用(1)式所表示的 δ 値。由于一般的結构分析主要关联到能满足于卡氏假定的那类系統[1]，因此恩格塞的工作沒有受到人們的重視。

62. 彈性穩定問題

自从結构工程中使用鋼料以后，由此而产生的彈性穩定問題便成为极关重要的問題了。工程师們常常要处理一些細长压杆，受压薄板和各种薄壁构件发生破坏的問題，它們的破坏不是由于过分的直接应力，而是由于缺乏彈性穩定所引起的。关于受压支柱这类最簡单的問題已經很詳尽地作出了理論上的研究。可是对于运用理論結果的可靠程度还不十分淸楚。在柱的实驗工作中，对于端部擱置情况，对于所加載荷的精确度，以及对于材料的彈性都不够注意。因此，試驗結果并不与理論相符，工程师們在設計时就宁愿采用各种經驗公式。随着材料力学試驗所的发展和測量仪器的改进，柱的实驗研究才获得了新的成就。

第一次可靠的柱的試驗是由包兴格做出来的[2]。他在試件的两端裝上圓錐形端头，保証了試件端部的自由轉动和載荷沿中心綫作用。他的实驗証明了在这样情况下用細长杆所得的試驗結果和欧拉公式非常相符。較短的試件在超过彈性极

[1] 直到最近魏斯特加德(H. M. Westergaard)教授才提醒工程师們注意恩格塞的貢献，并且給出一些例子来說明它的重要用处。見 Proc. Am. Soc. Civ. Engrs. 第 199 頁，1941 年发行。

[2] 包兴格的論文刊在 Mitt. tech. mech. Lab. 第 15 期，第 11 頁，1887 年于慕尼黑发行。

限的压应力下发生压屈，对于这种杆件，欧拉的理論就不能适用，因此必須提供一个經驗法則。包兴格只做了少数几个实驗，还不够得出供柱子設計用的一个实用的公式来。

台特梅哲在苏黎世工业学院継續作出这类研究[1]。在他的主持下，試驗了許多組合的鋼、鉄柱子，結果推荐了对于建筑鋼当长細比大于110时才能用欧拉公式来計算临界应力。对于較短的試件，他提供一个直綫公式，这个公式以后在欧洲被广泛地使用着。图179描繪了在台特梅哲的实驗中所采用的端部支座的型式；它們能容許端部自由轉动。利用这样的設施，台特梅哲又作出偏心施力的压縮試驗，并証明了撓度和最大应力的理論公式，計算出在这种情况下其最大应力达到彈性极限时的压力数值。将此載荷除以安全系数便得出柱的最大安全載荷[2]。

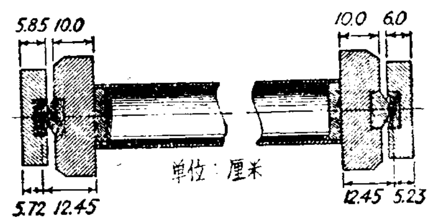


图　179

关于十九世紀末叶在結构物彈性稳定方面的知識报导可参看雅辛斯基（Ф. С. Ясинский）的一本重要书籍[3]。在这本书里我們可看到在柱子方面理論和实驗研究的相互关系以及作者的創造。雅辛斯基（1856～1899）是一个波兰人，出生于华沙。1872年他考入圣彼得堡交通工程学院。1877年毕业后，开始在鉄路上工作，首先在圣彼得堡—华沙鉄路，随后在彼得堡-莫斯科鉄路。在这些鉄路上他設計并监造了几个重要的結构物。同一时期，他发表了一些科学論文。关于柱的理論的一些論文都收集成书稿的形式（1893年）作为交通工程学院副博士学位論文发表。1894年他充任該学院的結构理論和彈性理論教授。过早的死亡中止

图　180　Ф. С. 雅辛斯基

[1]“料材試驗所报告”（Mitteilungen der Materialprüfungs-Anstalt），第8期，1896年于苏黎世出版；第2修正版于1901年发行。

[2] 似乎阿斯頓費尔德（A. Ostenfeld）是最先介紹柱子分析中假定的不准确，同时决定柱子上的安全載荷作为能产生危險应力时載荷的某一比例。参看 Z. Ver. deut. Ing. 卷42，第1462頁，1898年出版；卷46，第1858頁，1902年出版。

[3] 雅辛斯基著“柱子压屈理論的发展”（An Essay on the Development of the Theory of Column Buckling）1893年于圣彼得堡出版。并参看他的“論文集”卷1，1902年于圣彼得堡出版，及本书的法譯本，刊在 Ann. ponts et chaussées，第7組，卷8，第256頁，1894年发行。

了他那輝煌的教学事业，然而他在該学院五年教学中，給俄国工程师們提高了理論知識的水平。他那結构理論和彈性理論的教本在俄国被广泛地采用着。

雅辛斯基是一位有名的教授。当时这所学院很少請到象他这样一个杰出的工程师，他不独是一位对他的专业有精深知識的科学家，而且他还是第一流的教师。那时俄国学生可以任意选擇自己的学科，以及支配自己的学习时間，只有少数学生經常按規定听課；然而雅辛斯基的講堂里总是挤滿了学生。这决不是由于他的演講术好，他講演的方式是非常簡易的。其所以使学生感到莫大兴趣的是他那表达清楚和富于邏輯性以及他随时提出自己在担任建筑工程师时所遇到的一些新問題。他还經常向学生提出很多新問題以測驗他們的創造能力。

雅辛斯基在杜的理論中的主要貢献是处理桥梁工程中所遇到的一些問題。在格构式桥梁中（参看第42节），有两个斜杆系統：其一承受压力，另一承受拉力。雅辛斯基是最先研究受压斜杆的稳定性以及对受拉斜杆估算其具有加强作用的人。在他的年代里，西欧和俄国都发生过几座空式桥的破坏事件（图181）。这些破坏是由于頂上受压弦杆的側向剛度不足以及关于正确选定这类桥梁各弦杆和竪杆的抗弯剛度根本缺乏滿意的資料所致。雅辛斯基对此問題作出了理論上的研究。

图 181 一座空式桥的破坏

他認定空式桥的受压上弦杆为一根两端簡支的杆件，这根杆件承受斜杆拉力的水平分力发生压縮，同时由竪杆来限制其側向压屈。为了簡化这个問題，他用等效的彈性介質的連續分布反力代替竪杆的彈性抗力，而且用連續分布的軸向力代替斜杆的作用力，連續分布軸向力的集度取为与去杆件中央的距离成正比。雅辛斯基对于側向压屈的这种复杂情况得出一个精确的解，算出了压力的临界值，因此任何空式桥的上弦杆和竪杆都能合理地設計出来了。

雅辛斯基也検算了棱柱杆側向压屈的恰当微分方程的解，并且証明这个解得出的临界載荷值和欧拉从近似方程所得出的相同。这样他推翻了克列布希的說法[1]，認为近似微分方程給出临界載荷的正确值只是一件偶然巧合的事。

雅辛斯基并不滿足于应用包兴格、台特梅哲和康西台雷（Considère）[2]諸人的实驗結果来作杆件側向压屈的理論研究，他制出一个表列举各种长細比下的临界压应力。这个表在俄国广泛采用，并替代了朗肯公式。此外，他指出了借助于一根杆件的"折減"长度，可以將計算两端鉸接杆件的临界应力表用到其他型式的側向压屈中。

在我們現在所討論到的这段时期内，对于压屈理論作出許多貢献的另一位工程师乃是菲烈德利赫·恩格塞（Friedrich Engesser）。恩格塞（1848～1931）出生于靠近曼海姆［Manheim——旧属巴登公国（Duchy of Baden）］[3]的韦海姆（Weinheim）地方一个音乐教师的家庭中。在曼海姆中学毕业以后，1865年他进了卡尔斯魯赫工业学院。1869年毕业，得到了建筑工程师的資位証。那时德国正开始加速发展鉄路网，恩格塞作为一位青年工程师，在施瓦茲瓦尔德（Schwarzwald）鉄路上参加了一些設計和建造桥梁的工作。随后，他在巴登鉄路上担任領导工作，負責該路的桥梁設計。这时正是結构理論飞速发展的时期，恩格

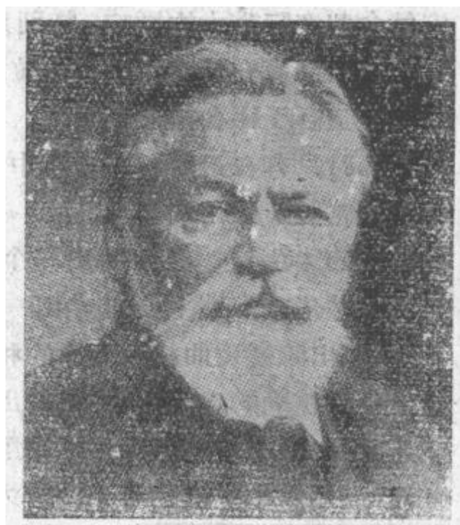


图 182 F. 恩格塞

[1] 克列布希的"固体的彈性理論"（Theorie der Elasticität fester körper），第 407 頁，1862 年出版。

[2] 康西台雷著"受压杆件的抗力"（Résistance des pièces comprimés）刊在国际建設会議議事录，卷 3，第 371 頁，1891 年于巴黎出版。

[3] 关于恩格塞的傳記，見阿托·斯太因哈特（Otto Steinhardt）的論文"菲烈德利赫·恩格塞"，1949 年于卡尔斯魯赫出版。

塞也积极参加活动。他发表了几篇重要的文章，主要是关于超静定系統的，例如，連續梁、拱以及有冗余杆和有剛性节点的桥梁。他从此出了名，不独成为一位經驗丰富的工程师，而且也成为一位結构理論专家，因此，在1885年，卡尔斯魯赫工业学院聘任他为該校教授。恩格塞以后的三十年間均在該校教书，在結构理論方面作了巨大的发展。

在侧向压屈理論方面，恩格塞建議[1]应該将欧拉公式中的常数彈性模量 E 用变量 $E_t=d\sigma/d\varepsilon$ 来代替，从而将公式的应用范圍加以扩大，这个变量他称之为切綫模量(tangent modulus)。对于任何特殊情况，从压縮試驗曲綫中求出此切綫模量之后，他便能算出用不服从虎克定律的材料作成的杆件的临界应力以及由建筑鋼作成的杆件超过彈性极限的临界应力。关于这个建議，当时曾和雅辛斯基发生过爭辯。雅辛斯基指出[2]在压屈时杆件凸方的压应力会减小，因此，依照包兴格的試驗，必須用彈性模量 E 代替 E_t 来計算这一部分的截面。随后，恩格塞对于截面的这两部分引用两个不同的模量修正了他的理論[3]。

恩格塞是第一个研究組合柱压屈理論的人[4]。他研究了剪力对于临界載荷大小的影响，并且发現在实心柱中这种影响很小，可以忽略不計，但在綴合式压杆中，它就会起实际重大的影响，特别是当它們单独由板条組成时为然。恩格塞导出一些公式来計算在什么比例下欧拉公式算出的載荷必須将其减小，使在每一种特殊情况下适合于綴合构件的柔度。

那时只有在最簡单的問題中，才有侧向压屈微分方程的精确解可用。这样，工程师們常被迫采用粗略近似的一些解式。恩格塞提供了一个用逐步求近法計算临界載荷的方法[5]。为了得出一个近似解，他建議采取能滿足于端部条件的撓度曲綫的某些形状。这种曲綫給出一个弯矩图，因此我們能够用面矩法算出相应的撓度。将算出的撓度曲綫和假設的相比較，就得到决定載荷临界值的一个方程。为了得出更为精确的近似值，他取算出的曲綫作为压屈杆件的一个新的近似值，再重复上述計算，逐次进行。如果不用解析式来表示原先假定的曲綫，便可用图解法作出此綫，而逐步求近法也可用图解方式来进行[6]。

[1] Z. Architek. u. Ing. Ver. 卷 35，第 455 頁，1889 年于汉諾威出版。

[2] Schweiz. Bauz. 卷 25，第 172 頁，1895 年。

[3] 同上注，卷 26，第 24 頁，1895 年；Z. Ver. deut. Ing. 卷 42，第 927 頁，1898 年。

[4] Zentr. Bauv. 第 483 頁，1891 年。

[5] Z. Österr. Ing. u. Architek. Ver. 1893 年。

[6] 这类問題的图解法是由意大利工程师維安尼洛(L. Vianello)提出的，見 Z. Ver. deut. Ing. 卷 42，第 1436 頁，1898 年。这一步驟的收斂性的数理証明由底里菲茨 (E. Trefftz) 得出，見 ZAMM，卷 3，第 272 頁，1923 年出版。

恩格塞也很重視空式桥受压上弦杆压屈的問題，他导出一些近似公式来計算該弦杆正常的側向抗弯剛度[1]。虽然如此，稳定問題在恩格塞的結构理論研究工作中还只占一小部分。他在次应力方面的重大研究将在下一章中再行討論。

正当雅辛斯基和恩格塞在研究杆件側向压屈的各种情况时，布里安（G. H. Bryan）[2]发表了一篇关于彈性稳定一般理論方面的重要論文。他指出克希霍夫关于彈性理論方程的解答唯一性定理只在物体的所有因次都属于同一方次才能合用。在薄杆、薄板和薄壳中，对于同样的外力有时可能具有不止一种的平衡形式，因此，那些形式下的稳定問題便具有很大的实用意义了。

随后布里安着手研究一块四边简支的受压矩形板的压屈問題[3]，得出了計算临界压应力值的一个公式。这是第一次从理論上来研究受压板的稳定。作为他的公式在实用上的一个例子，布里安說明了如何适当地选擇船壳中受压鋼鈑的厚度。随着飞机結构的发展，薄板压屈問題更占有头等重要的地位，布里安的論文已經給以后的薄壁构件彈性稳定理論打下了基础。

63. 虎勃（1854～1924）

我們将討論奥古斯特·虎勃（August Föppl）的成就作为十九世紀末叶材料力学史的結尾。他的这方面的书籍是在1898年出版的，在德国普遍流傳，而且被譯成俄文和法文。奥古斯特·虎勃[4]出生于格洛斯翁斯塔特[Gross Umstadt——旧属黑森公国（Duchy of Hesse）]的小市鎮中一个医生的家庭里。他在一所公立学校受初等教育后进入达姆斯塔特（Darmstadt）中学。那时，正在修筑格拉斯-翁斯塔特鉄路，这給予他的威染很深，他立志要在将来成为一个建筑工程师，为了这个目的，在1869年，他进了达姆斯塔特工业学院。似乎达姆斯塔特学院当时的教学水平并不很高，因此在讀完了預科以后，虎勃便在1871年轉入斯图加特工业学院。那时，摩尔正在該校授課，使得虎勃能付出大部分精力来学习結构理論。

1873年，摩尔去德累斯頓教书，虎勃也离开斯图加特，进入卡尔斯鲁赫工业学院去完成他的工程教育。該校的工程力学是由格拉斯霍夫教授担任的（参看第31节），似乎他对格拉斯霍夫的讲課感受不深，因为在他的自傳里，他曾严格地批評了格拉斯霍夫的教学方法。当然，听过了摩尔的熟練的讲授之后，对于格拉斯霍夫，便覚得太累贅和缺乏創造性了。1874年，虎勃从工业学院毕业，得到建筑工程师

[1] 見 Zentr. Bauv. 1884, 1885, 1909 各年；并参看 Z. Ver. deut. Ing. 卷 39, 1895 年出版。

[2] Proc. Cambridge Phil. Soc. 卷 6, 第 199 頁, 1888 年出版。

[3] Proc. London Math. Soc. 卷 22, 第 54 頁, 1891 年出版。

[4] 虎勃的一个很重要的自傳由阿尔登堡 (R. Oldenbourg) 刊出，1925 年分別在慕尼黑和柏林出版。

的学位，便決心从事桥梁設計师的工作。可是那时德国的經济情况正处于衰退时期，鉄路修建进程日趋緩慢，因此他不能找到一个滿意的永久性职业。他在卡尔斯魯赫作了一些桥梁設計中的临时工作以后，服了一年的义务兵役，此后在1876年他找到一个商业学校教員的职业；起先在霍尔茲明登（Holzminden），从1877年起在萊比錫执教。在这段时期內，虎勃埋头苦学并且发表了几篇关于空間結构的重要論文。他又在萊比錫設計了一所商場建筑物。其后，他汇集了这些論文編著成书[1]。这是同类书中的最早版本，发行后流傳很广。

图 183 奥古斯特·虎勃

早在1880年，德国对工业用电已經迅速发展，虎勃对于这一个物理学的分支部門也感到兴趣。他和萊比錫大学著名的物理学教授怀頓曼（G. Wiedemann）相識，在怀頓曼的建議下，开始研究馬克斯威尔的电学理論。这項研究成果使他出版了关于馬克斯威尔理論的一本重要著作[2]。該书在德国首先使这个理論引向实用之途并且使作者在科学上聞名一时。

1893年，包兴格教授在慕尼黑去世，次年虎勃被聘接替这位卓越的学者来教授工程力学。这样，他又一次能重新尽力于他一直感到兴趣的力学了。他不独在这門学科上担任講課，而且还領导着材料試驗所的工作，該試驗所由于包兴格的研究成果早已負有盛名。虎勃在这两方面的工作都获得显著的成功。他是一个卓越的教师，虽然他的班級人数很多，他懂得怎样掌握学生們的注意力。有时，听講的学生多到五百个。为了改进他的教学法和提高教学水平，不久他着手出版他在工程力学方面所写的講义。他的講义分为四卷出版：(1)力学入門，(2)图解靜力学，(3)材料力学以及(4)动力学。材料力学这一卷是在1898年最先出版的。这本书立刻得到很大成就，不久它就成为德語国家中最流行的教本了。它也馳名于其他国家。例如，雅辛斯基在圣彼得堡时就立即向学生們介紹这本优秀著作。該书曾譯成俄文，为一般从事应力分析的工程师們广泛使用。該书也曾被譯成法文在法国流行。

[1] 虎勃著“空間桁架”(Das Fachwerk im Raume)，1892 萊比錫。

[2] 虎勃著“馬克斯威尔电学理論入門”(Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität)，1894 萊比錫。

在他的自傳里面，虎勃討論到一本好的教科书所必需滿足的一些要求。他批判了一般編写教本的人常是再三耽心到别人可能提出批評，而不大注意学生的接受能力。为了迎合評論者的口味，作者們总是想用最簡略的术語来編写他們的題材，編写形式也力求严格，这就使初学者感到閱讀困难了。虎勃表达他的題材是完全用口語化的形式写出来的。他常从初学者能容易理解的最簡单的个别例子入手。在討論这些例子时避免引入离題太远的細节。当学生已經熟悉了一些基本概念而且更能体会較严格的形式时，才在后面的章节里提出更为广泛的討論和較严格的表达形式来。当时在德国已經出过一些非常完整的材料力学方面的书籍，例如格拉斯霍夫和尹克勒的著作，可是在这两本书中，作者們都将数理彈性理論作为表达材料力学的基本方法，这样就使大多数学生对学习这門学科感到极大困难。虎勃在他的书本中用淺显的方式写出材料力学全部的必需知識，只是在书的末尾才涉及彈性理論的一些方程。在他这本教程的后来几次版本里，虎勃扩充了有关彈性理論这一部分，并且将它另外編成一卷。这卷新版本在普及彈性理論方面是有功績的，对于在工程实践中采用更严格的应力分析方法也具有很大的作用。这是第一本专为工程师們写出的彈性理論方面的书。

虎勃的实驗工作也具有很重要的意义。他的前輩包兴格教授主要着重在材料的力学性质，并发展了試驗各种材料試件的一套完善的技术作业过程。虎勃扩大了实驗工作的范圍，他利用試驗所来驗証有关材料破坏的各种理論，以及对还沒有理論解可以求算的某些复杂問題中的应力作出实驗测定。当测量水泥的抗拉强度时，虎勃观察到拉应力并不是均匀分布在标准拉伸試件的整个截面上，因此这个試驗成果不能答出抗拉强度的实际数値。他采用一个橡皮模型作为拉伸試驗的試件，并量出其去試件軸綫不同距离处的縱向应变，得出了在这种复杂情况下很满意的应力分布图形。当进行水泥立方体試件的压縮試驗时，他注意到立方体和試驗机座子相接触的表面摩擦力作用的重要性。因此他研究了减低这种摩擦力的各种方法，并指出通常用立方体試件所作試驗其所得抗压强度值比实际数値为大。在所有这些試驗中，虎勃也很注意他那試驗机的精确度。为了校驗作用于試件上的拉力或压力，他采用象一个很重的鋼环那样的专用测力計，如同現在在許多試驗所里所用的一样。

虎勃在他的书中同意圣維南的見解，在推导供計算結构物安全尺寸的公式时采用最大应变理論。但他同时也重視其他的强度理論，并且为了搞清楚应該用哪一个强度理論的問題，他做了一些有益的实驗。利用一个由高强度鋼制成的厚壁圓筒，他完成了在很大的流体靜压力下各种材料的压縮試驗。他发覺各向同性体

的材料在这种情况下經得起很高的压力。他設計并制成了能在立方体試件上产生两个垂直方向的压力的一具专用仪器，并且用水泥試件作出一系列的这种試驗。

虎勃继承了包兴格在慕尼黑着手进行的沃勒式疲劳实驗。他将它們扩展到試驗带沟槽的試件研究了应力集中的效应。他也用理論方法研究了这个問題，并証明了有嵌条連接的上下段直徑不同的軸杆受扭时，其应力集中很大部分取决于嵌条的半徑。

虎勃是最先作出关于柔性軸在高速轉动下的旋轉理論的人，同时他还在他的試驗所內做出了一系列的試驗来証实他的理論。

这位工程师在"試驗所公报"上发表了他所作实驗的全部結果。这种期刊是由包兴格創办的，从第二十四期开始，由虎勃继續刊行，直到他去世为止。凡热心于材料力学的工程师都很熟悉这个刊物，因而，它对于这門科学的发展也发生过相当大的影响。

第十章

1867～1900年間的結构理論

64. 靜定桁架

在第七章里我們討論过工程师們为了分析桁架所提出的各种方法。在非潑和儒拉夫斯基所叙述的簡单例子中，桁架各杆的力是根据节点的平衡条件得出的。随后，里特尔(A. Ritter)和施維德勒(J. W. Schwedler)介紹了截面法(method of sections)，而馬克斯威尔，台勒和克里孟納也說明了作互易图(reciprocal diagram)的方法。这些方法充分能够分析当时所有的大多数桁架，不过由于結构物的日漸使用金属材料，就需要更全面地来研究桁架的各种型式了。

穆比斯(A. F. Möbius, 1790～1868)曾闡述过桁架理論的一些基本定理，他是萊比錫大学的天文学教授。在他的靜力学书中[1]，穆比斯討論过一个鉸接杆系的平衡問題，証明了如果有 n 个鉸，就必須有不少于 $(2n-3)$ 根杆件在平面內組成一剛性系統或必須有不少于 $(3n-6)$ 根杆件組成一个三維系統。穆比斯也指出有一些例外情况，其中具备 $(2n-3)$ 根杆件的系統却不是絕对剛性的，而能允許各鉸有較小的相对位移。当研究象这样一些例外的情况时，他发現当桁架各节点的平衡方程組的行列式等于零时，便会发生这些情况。因此，他观察到如果一个系統具有其剛性所必需的杆件根数，同时如果假定有一根杆件，例如 a 及 b 两节点間长度为 l_{ab} 的那根杆件被取去时，則此系統将如一个机械装置一样各杆件会发生移动，相对移动的結果，a 及 b 两节点間的距离将有改变。現在假想构成系統的形状是使 a，b 两节点間的距离为一极大值或一极小值，于是系統的极微小相对移动不致改变 ab 的距离，这指出插入了 l_{ab} 杆不可能完全消除系統的极微小移动。这便是一个例外的情况。

穆比斯的重要成就許多年来沒有被工程师們发觉，直到鋼桁架在实用上获得了重要地位而需要将桁架的一般理論加以改进时，工程师們才重新发掘了穆比斯

[1] 穆比斯著"靜力学教程"(Lehrbuch der Statik)，两卷集，1837 年于萊比錫出版。見卷 2，第 4 章及第 5 章。

的定理。在这个发掘工作中，摩尔[1]的名气最大。他得出了构成一个刚性靜定系統所必需的杆件数目。他也研究了极微小移动的例外情况。他解释有些靜定桁架是不能用以前所推荐的一些方法来分析的，他建議用虛位移原理来研究这些系統。

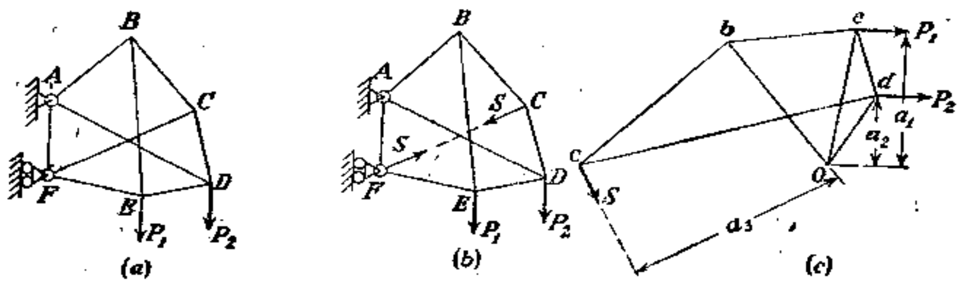


图 184

图 184 *a* 是一个不能用老方法来解算的靜定系統的例子。用虛位移原理計算任一杆件（例如斜杆 FC）的应力时，我們假定此杆被取去而用两个相等且反向的力来代替它对系統中其他部分的作用。如图 184 *b* 所示，此系統不再是剛性的了，因此我們可对此系統的鉸取定虛位移。现在将各已知外力 P_1，P_2 及內力 S 在虛位移中所作的功列出方程并使等于零，即得計算力 S 的方程式。当然这个方法的适用性和取定虛位移的方式有关。图 184 *c* 說明摩尔[2]所采用的方法。当图 184 *b* 中整个系統作极微小位移时，鉸 B，D 及 E 向垂直于半徑 AB，AD 及 FE 的方向移动。在作位移图时（图 184 *c*），我們取一个极点 O 并作直綫 Ob，Od 及 Oe 平行于各位移方向，其中任一位移的大小，例如 Ob，可以随意取定。然后作 be 綫垂直于杆 BE[3] 且作 de 垂直于 ED，可得出其他的两个位移。最后，我們只要作 bc 及 dc 两直綫垂直于杆 BC 及 CD，就得出了图 184 *c* 上所繪图形的 *c* 点。得出全部各鉸的虛位移以后，我們便能算出虛功并写出求解各未知力的方程式。

空气动力学理論中最著名的先驅人物茹可夫斯基（Н. И. Жуковский，1847～1921）建議[4]将图 184 *c* 中的位移图認定为一个在极点 O 处被鉸住的剛体，其上作用有力 P_1，P_2 及 S（旋轉了 90°）。于是虛功的表示式和对极点 O 取諸力的力矩

[1] Z. Architek. u. Ing. Ver. 第 509 頁，1874 年于汉諾威出版。Ziviling，第 289 頁，1885 年。并参看他的"工程力学方面的論文集"（Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik）第 12 章，1905 年出版。

[2] 見"論文集"（Abhandlungen）第 4 章。

[3] 象 be 与 BE 等綫条的互相垂直是根据下一事实确定的，即在图形平面中杆件的任何移动只能繞瞬时中心轉动。

[4] 在向莫斯科数学学会上提出的論文中，1908 年。参看茹可夫斯基的"論文集"卷 1，第 566 頁，1937 年出版。

表示式等同，而图形的平衡方程也和虚位移的方程等同。由此即得

$$P_1a_1+P_2a_2-Sa_3=0$$

故

$$S=\frac{P_1a_1+P_2a_2}{a_3} \qquad (a)$$

当图 184 c 中的 S 力通过极点 O 时，距离 $a_3=0$，而(a)式所得 S 值为无穷大。这就表示給定的系統满足了极微小移动的例外情况的要求。

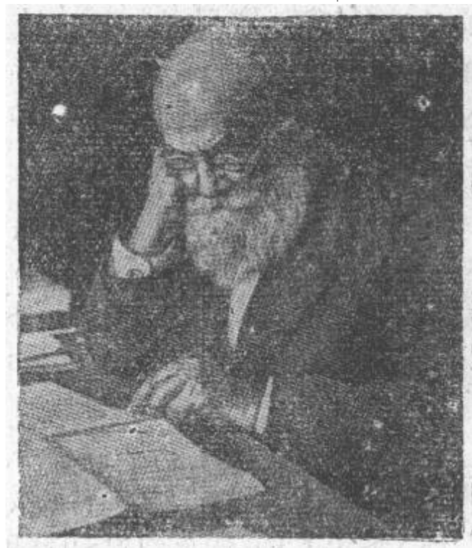


图 185 Н. И. 茹可夫斯基

茂勒布累斯劳[1]提供了一个稍有不同的求虚位移的方法。这个方法的說明見图 186。取上述的同样系統，并且假定 FC 杆被取去，我們又得到一个需要研究其虚位移的非剛性系統。对于这些位移不用分别另行作图，一切必需資料都在同一个图形上表出。B 鉸位移的大小 δ 是随意取定的，B' 点是将此位移旋轉 90° 而得。根据瞬时中心原理，我們断定借作出平行于 BE 的直綫 $B'E'$ 可得到决定 E 鉸的轉动位移 EE' 的 E' 点。同样由作出平行于 ED 的 $E'D'$ 綫得出 D' 点，而最后决定 C 鉸的轉动位移的 C' 点可由平行于 CD 及 BC 的两直綫 $D'C'$ 及 $B'C'$ 的交点得出。現在有了各鉸的虚位移，再計算各外力以及作用于 $E,D,C\cdots$ 各点上的 S 力对 $E', D', C'\cdots$ 各点的力矩总和便可求得虚功。使各虚功的总和等于零，便得出計算 S 的方程式。如果 C' 点位于 FC 綫上，S 力将为无穷大；这就表示了极微小移动的例外情况。

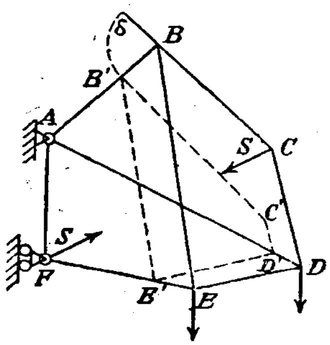


图 186

汉尼堡 (L. Henneberg)[2] 提供分析复杂桁架的另外一个一般方法。此方法是根据移去几根杆子而用安装在不同位置的其他杆子代替把給定的复杂桁架改变成为一个比較簡单的桁架。我們仍取上面討論过的那种情况来加以解释（图

[1] 杳勒-布累斯劳的論文刊在 Schweiz. Bauztg. 卷 9，第 121 頁，1887 年出版。

[2] 汉尼堡著"剛性系統靜力学" (Statik der Starren Systeme)，第 122 頁，1886 年于达姆斯塔特出版。并参看他的"剛性系統图解靜力学" (Graphische Statik der Starren Systeme)，第 526 頁，1911 年出版，以及他的論著刊在"数学知識百科全书" (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften)，卷 4，第 406 頁。

187 a)。用 AE 杆代替 FC 杆，卽得一簡单桁架如图 187 b 所示，其中各杆应力可以繪制成馬克斯威尔图来求算。設 S_i' 表示作用于后来用上的杆子 AE 的內力。我們考虑两个相等而反向的单位力作为一个簡单的輔助問題，如图 187 c 所示。設 S_i'' 表示在此情况下 AE 杆的內力。如果不用单位力，而用大小为 S 的一些載荷作用如图 187 d 所示，则 AE 杆中将发生一力 S_{si}''。将图 187 b 及图 187 d 两种情况迭加后便得实际系統各杆的內力(图 187 a)。显然，实际的 S 值应該是能使 AE 杆內的力消失时的值。因此卽得下式，

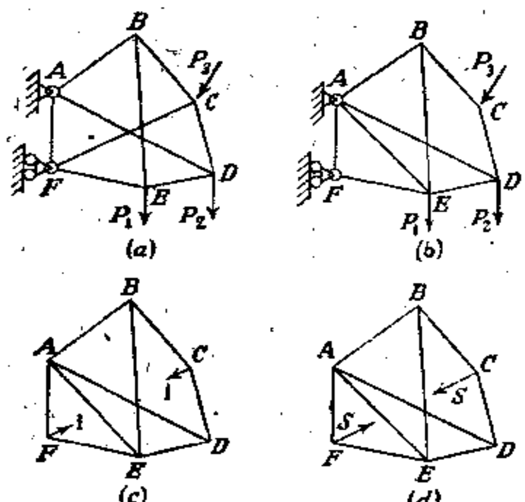


图　187

$$S_i'+S_{si}''=0$$

由該式卽可算出 S 力。如果 S_i'' 值等于零，就属于上面所提过的那种例外情况。这个方法可推广到需要将一根以上的杆件换去才能得出一个簡单桁架的許多系統上，并且它提供了一个分析复杂平面桁架的一般方法。薩威阿第 (C. Saviotti)[1] 和舒尔 (F. Schur)[2] 另外提供了这个問題的其他一般方法。

三維系統的普遍理論也是由穆比斯起源的。他証明要牢固地連接 n 个鉸就必須有 $(3n-6)$ 根杆件，并再一次观察到发生极微小移动的例外情况。这些例外情况的特征是各节点平衡方程組所組成的行列式等于零。他給出一个有效的实际方法用以判定一已知系統是不是剛性的。如果对于某些載荷我們能在不发生分岐的情况下求出此系統所有各杆的內力，而上述的行列式又不等于零，则此系統可断定是剛性的。穆比斯建議用零載荷作为最簡单的假定，因此对于这种情况若我們能証明所有各杆內力都等于零，则此系統是剛性的。

穆比斯研究了一个自閉空間桁架的非常重要的問題，此桁架具有閉合多面体的形状，穆比斯指出[3]，如果該多面体的各表面为三角形或已被分成三角形，而杆件根数恰好和靜力方程的个数相等时，则此桁架为靜定的。图 188 示出此类桁架的两个例子。

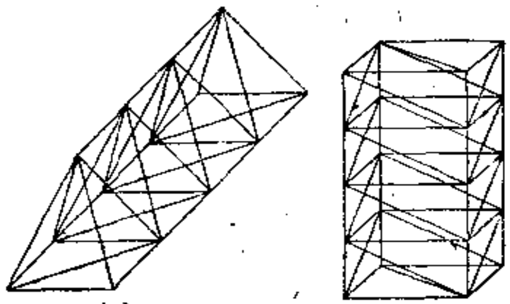
---

[1] 薩威阿第著"图解靜力学" (La Statica grafica)，三卷集，1888 年于米兰出版。并參看他的論文刊在 Atti. accad. Nazl. Lincei, (3)，卷 2，第 148 頁，1875 年于罗馬出版。

[2] Z. Math. u. Physik, 卷 40，第 48 頁，1895 年出版。

[3] 參看他的"靜力学" (Statik)，卷 2，第 122 頁。

穆比斯在三維系統方面的成就也沒有为工程師們所发覺，他們在以后各自发展了空間桁架的理論。这項研究主要是由虎勃完成的，他將他在这方面的研究搜集起来写成一本书[1]。在这本书里，我們发覺其中有一些空間結构方面的重要問題都是他第一次所提出来的。虎勃的书已公認为一本重要的文献，它为以后在这方面进行許多研究工作打下了基礎。



(a) (b)

图 188

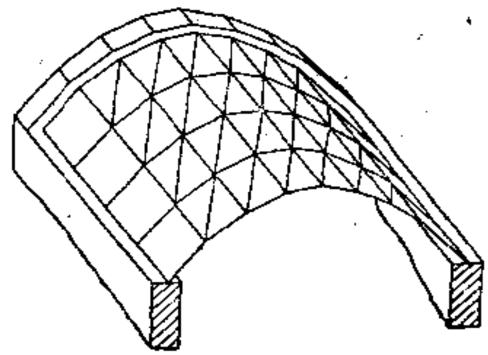


图 189

虎勃开始研究图 188 所示形式的結构物。这些，他称之为格子結构 (Lattice structures) (das Flechtwerk)。他并不知道穆比斯在这方面有过研究，因此他說过："將来編写工程历史的作者也許会惊奇地要問，在 1891 年以前，对于格子結构的基本概念还完全不知道，怎么能够很早地就有許多这样的結构建造起来呢?" 当时他証明这类系統是靜定的，并討論到將它作为屋架之用 (图 189)。虎勃很热心于这种桁架系統的研究，他做出一个相当大的模型在試驗所內进行試驗。这些試驗証明在这种情况下一般假定在节点处为鉸的形式，不能給出象对二維桁架作假說那样的滿意結果。因此，較精确地分析空間結构时，必須考慮到节点的剛性。

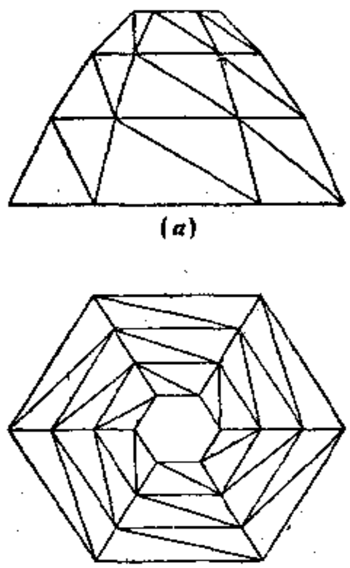
此后，虎勃討論了施維德勒的穹篷式屋頂結构[2] (图 190)，他自己也設計了一个(图 191)。他自己設計的一个曾用来建造萊比錫的大商場[3]。虎勃对于上述的每一种构形方式都叙述了在任何载荷作用下計算各杆內力作用的一些方法。此外，他研究了結构物应当用怎样的支承方式才能消除微小移动的情况。在虎勃的分析中我們看到他用了节点法和截面法。至于在更为复杂的結构物中，香勒布累斯劳[4]

[1] 虎勃著"空間桁架" (Das Fachwerk im Raume)，1892 萊比錫。

[2] Z. Bauwesen, 1866 年。

[3] 見 Schweiz. Bauzg.，卷 17，第 77 頁，1891 年出版。

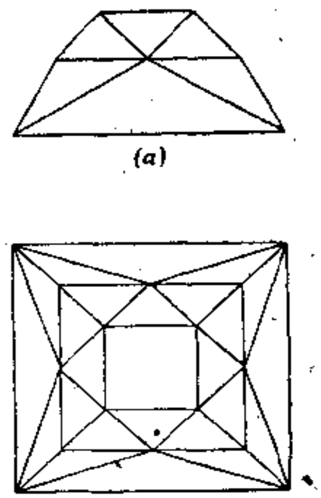
[4] Zentr. Bauv.，卷 11，第 437 頁，1891 年；卷 12，第 225 及 244 頁，1892 年。



(a)

(b)

图　190



(a)

(b)

图　191

成功地应用了虚位移法和汉尼堡的方法。

桁架分析研究主要与鋼桥的設計密切相关，其中以求一个动載荷的最不利位置的問題最为重要。在影响綫方法中可得出一种解法。在很多实际結构物中，可用迭加原理，因此当单元載荷沿跨度移动的效应已被研究出来以后，便能求得任何載荷系統在桁架内所产生的应力了。影响綫是用来帮助显示单元載荷在改变其位置时对于应力的影响。我們已經提过（参看第 36 节）在这方面作出开創工作的是摩尔和尹克勒(1868 年)。尹克勒在他那桥梁理論的书中[1]用了影响綫，那本书是在这方面写得最好的而且是远近傳誦的一本书。佛朗克尔（W. Fränkel）写过一篇論文[2]，第一次系統地叙述了影响綫的理論。在査勒布累斯勞的著作[3]中对影响綫的各种应用曾作出最全面的描述。他是柏林工业学院的一位教授，他对于用图解法来求解結构理論上的一些問題也作过很多貢献。

65. 桁架的变位

在設計桁架中，經常要計算变位。当一个静定桁架所有各杆的内力都已求

[1]“桥梁建筑論文”(Vorträge über Brückenbau)，卷 1，桥梁理論 (Theorie der Brücken)，1872 年于維也納出版。

[2] 土木工程，卷 22，第 441 頁，1876 年发行。

[3] 査勒布累斯勞著“建筑結构的图解静力学”(Die graphische Statik der Baukonstruktionen)，第 2 版于 1887 年出版。并参看他的“建筑結构静力学与应力分析新法”(Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen)，第 1 版于 1886 年出版。

出时，便可用虎克定律算出杆件长度的改变，因此发生了一个純粹几何学問題。知道各个杆件的伸长量以后，我們怎样可求出桁架各节点相应的位移呢？在許多例子中我們都只需求出其中少数节点的位移。如果有許多力作用于各該节点上，那么，卡斯提安諾定理便成为一个有用的方法。卡氏也指出，如果沒有力作用于所求的該节点上，我們可在該处加上一个虛构的力在作出計算以后，再假定最后結果中所加的力等于零。他用广义力的概念証明了在两个相等且相反的力 P 沿一直綫作用的情况下，导数 $\frac{\partial V}{\partial P}$ 給出两力作用点之間的距离改变，而在一力偶 M 作用于一彈性系統的情况下，导数 $\frac{\partial V}{\partial M}$ 給出系統内力偶作用着的部件的旋轉角（参看第 61 节）。

如前所述（参看第 45 节），馬克斯威尔作出了另外一个方法来計算桁架各节点的位移（較卡斯提格里安諾的为早）。不过他用很抽象的形式来表达，因此这个方法幷沒有为工程师們所注意，直到摩尔[1] 重新发掘出来以后，才得到正常的应用。摩尔幷不知道有馬克斯威尔的著作，他用虛功原理想出这个方法幷且用一些例子解釋它的实用价值。为了說明摩尔的方法，我們可取以前討論过的如图 141 *a*（参看第 45 节）的問題来研究。我們可算出由已知載荷 P_1，P_2，… 所产生的节点 A 的变位。在求解这个問題时，摩尔研究了如图 141 *b* 所示的輔助情况。为了求得杆 i 的伸长量 Δ_i' 与节点 A 的相应变位 δ_a' 之間的关系，他除去該杆幷用两个相等而反向的力 s_i' 代替它对桁架的作用。認定其他各杆均为絕对剛体，他得出具有一个自由度的一个系統，其上作用有单元載荷、支座反力和 s_i' 諸力。因为这些力是平衡，在任何虛位移时它們的功必須等于零。因此他得到下式

$$-s_i'\Delta_b' + 1\cdot\delta_a' = 0$$

由此

$$\delta_a' = \Delta_i'\frac{s_i'}{1} \tag{a}$$

可見采用了虛位移原理，便能成立伸长量 Δ_i' 和变位 δ_a' 之間所需的关系式，它能适合于任何微小的 Δ_i' 值。有了这个关系式以后，在实际載荷 P_1，P_2，… 作用下节点 A 处的变位 δ_a（图 141 *a*）便可以求得。将杆 i 的实际伸长量 S_iL_i/EA_i 代入(a)式，他得出仅由于一根杆件伸长时节点 A 的变位。将所有各杆的这种变位总加起来，得出

$$\delta_a = \sum\frac{S_i s_i' l_i}{A_i E} \tag{b}$$

摩尔所得的这个結果和以前由馬克斯威尔所得的完全相符（参看第 45 节）。

---

[1] 見 Z. Architek. u. Ing. Ver. 第 509 頁，1874 年于汉諾威出版；第 17 頁，1875 年出版。

由此可見，用馬克斯威尔-摩尔法来計算几个节点的变位，我們必須对每一个节点解出一个如图 141 b 所示的輔助問題。如果节点的数目很多，这个方法就太复杂了。为了克服这个困难，摩尔提出另外一个方法[1]，用此方法，可借助于作出一根簡支梁支承若干虛載荷的弯矩图从而得出全部所求的变位来。例如，設考虑图 192 a 所示桁架的竪向变位。桁架各杆的內力及相应的伸长量和縮短量是很容易求出的。为了計算各节点由于任一杆，例如 CD 杆的伸长量 Δl_i 而引起的竪向变位，我們取用(a)式决定在 CD 杆对面的节点 m (图 192 b)的变位 δ_m 为

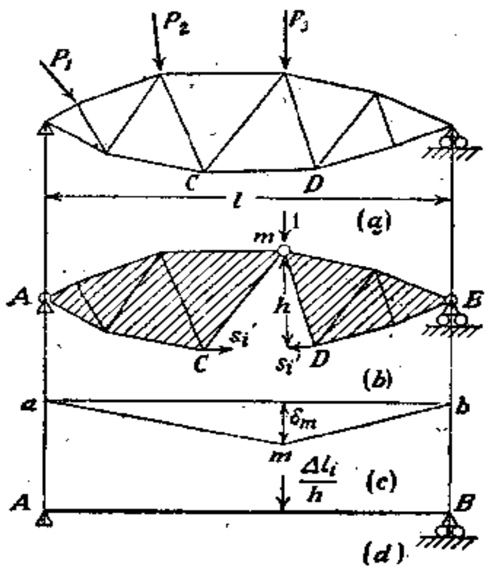


图 192

$$\delta_m = \Delta l_i \frac{s_i'}{1} \tag{c}$$

式中 s_i' 为由于在 m 处作用一单元載荷时 CD 杆內的軸向力。因为除 CD 杆外其他各杆均假定为剛性的，于是在图 192 b 中阴影表示的桁架的两部分将如剛体一样繞 m 鉸互相轉动。因此，所有各节点的竪向变位显然可由图 192 c 中 amb 图形的恰当縱距来表示。观察到由于 m 处的单元載荷在 CD 杆內产生的軸向力 s_i' 是等于 m 处的弯矩除以距离 h，根据(c)式，我們断定可将图 192c 中的变位图認作 AB 梁受虛載荷作用的弯矩图(图 192 d)，此虛載荷为

$$\frac{\Delta l_i}{h} \tag{d}$$

用同样方法也能求出由于桁架任一其他弦杆长度改变所产生的变位。这样，由于所有弦杆的长度改变而发生的桁架变位都能按下列方法算出，即桁架变位对于每个节点来說，可看作 AB 梁承受每一节点上由(d)式所确定的虛載荷时在相应截面上的弯矩，我們知道这些載荷都是純数值，而相应的弯矩却具有一个长度的因次。摩尔指出由于腹杆变形的附加变位可用同样方法推导出来，因此最后計算該种桁架(图 192 a)各节点的变位可簡化为正确选擇虛載荷系統在梁上产生弯矩的計算。

尹克勒[2]对决定桁架变位作了进一步的发展，他指出桁架每一根弦杆两端节

[1] 見摩尔的論文，刊在 Z. Architek. u. Ing. Ver. 第 17 頁，1875 年于汉諾威出版。并參看他的"論文集"(Abhandlungen)，第 377 頁，1906 年出版。

[2] 見他的"桥梁理論"(Theorie der Brücken)，第二期，第二版，第 363 頁，1881 年出版。

点的变位可以从考虑該弦上的各杆件来計算。如果此弦呈水平直綫，例如，如图 193 中所示桁架的上弦杆一样，则計算就特别簡单。显然，当我們知道了上弦各杆长度的改变以及它們的旋轉角，那么变位就完全被肯定了。因为此弦呈水平直綫，各杆长度改变的結果仅使上面各节点发生水平位移。这样，在这些点处的竪向位移仅与上弦各杆的轉动有关。尹克勒[1]指出如果我們算出了桁架的每一个三角形由于杆件变形而产生的角度改变，那末这些轉动就可立刻将其求出。假定这时在上弦节点 m 处(图 193 a) 的各角 ϕ_1, ϕ_2 及 ϕ_3 的改变已經求出，将它們总加起来，便得出一个微小角度 $\Delta\theta_m$，它代表撓曲后 m 节点处两弦杆間的角度。假定 $\Delta\theta_m$ 为正值，则上弦的相应变位有如图 193 b 所示。在节点 m 左方弦杆上任一点的变位将等于 $\Delta\theta_m l_2 x/l$，而在 m 右方任一点处的变位将等于 $\Delta\theta_m l_1(l-x)/l$。我們看出这些表示变位的式子完全与一簡支梁作用着图 193 c 所示的虚載荷 $\Delta\theta_m$ 所产生的弯矩式子相同。这样，給上弦的每个节点 i 算出其 $\Delta\theta_i$ 值，便能依照求一根簡支梁承受虚載荷 $\Delta\theta_i$ 的弯矩一样用迭加法得出所求的变位。

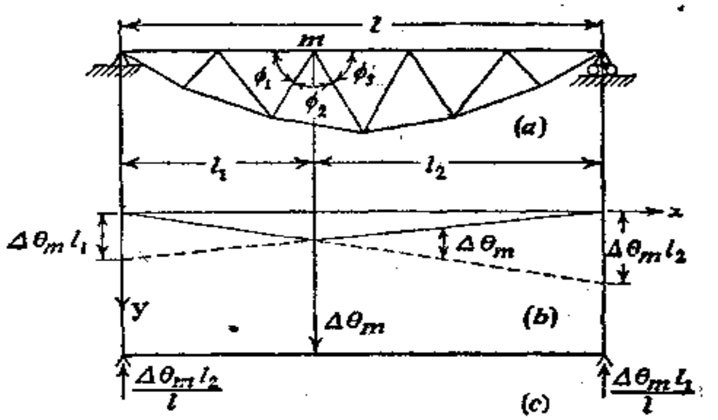


图 193

如果求变位的弦杆呈多角形，例如，如图 193 a 所示桁架的下弦，因各杆間角度改变所产生的变位可完全按照同样方式計算出来。因弦杆长度改变所发生的变位应該加入到因轉动所发生的变位里面去。这些也可以依照求一根簡支梁受适当选定的一組虚載荷所产生的弯矩一样来求。

威里沃特(M. Williot)[2]提供了一个純粹图解方法来决定桁架的变位。这个方法可用图 194 所示的簡单例子来說明，图中杆 1 及 2 組成一个节点 A，杆端在 B 及 C 处樞接。假定节点 B 及 C 的位移 BB' 及 CC' 已知为杆 1 及 2 的长度改变。求节点 A 处的最后位移。首先我們假定杆件在 A 处已被拆开，并将它們移到和它們原先位置相平行的位置 $A'B'$ 及 $A''C'$，因此，BB' 及 CC' 分别表示了节点 B 及

[1] 見"桥梁理論"第二版，第二册，第 202 頁。

[2] 威里沃特著"图解靜力学的实用概念" (Notions Pratiques sur la Statique Graphique)，1877 年于巴黎出版。并参看 Ann. génie civil，第二組，第 6 年，1877 年出版。

C 的已知位移。从这些新的位置着手，我們将 B' 及 C' 两点固定，并且在杆件的他端作出位移 $A'A_1'$ 及 $A''A_1''$。如图中粗綫所示。这些最后位移等于各杆长度的已知改变量；即，$A'A_1'$ 为杆 1 的已知伸长量而 $A''A_1''$ 为杆 2 的已知縮短量。为了完成构图，我們現在須将杆 $B'A_1'$ 繞着 B' 轉动并将杆 $C'A_1''$ 繞着 C' 轉动使 A_1' 和 A_1'' 两点結合在一起。由于我們所处理的是极微小的变形和极微小的轉角，在轉动的过程中，A_1' 及 A_1'' 各点所行經的圓弧綫可用垂直綫 $A_1'A_1$ 及 $A_1''A_1$ 来代替，两垂直綫的交点即为节点 A 的新位置 A_1。这样一来，向量 AA_1 便表示 A 点的所求位移。

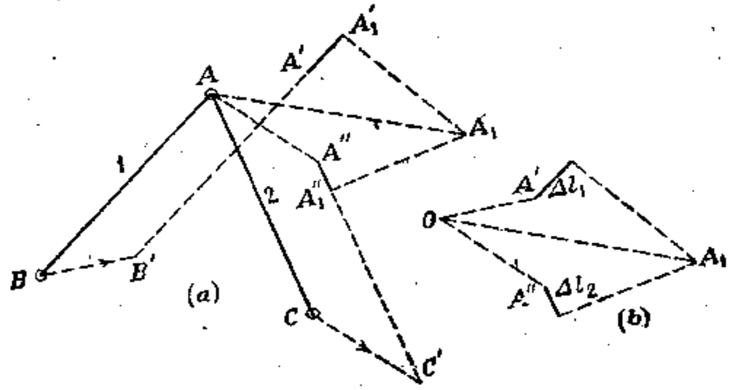


图 194

因为杆的伸长量和节点的位移和它們的长度比較起来都是极小的，因此必須将这些量的比例尺放大，繪成一个单独的图形，如图 194 b 所示。我們取一极点 O，按选定的比例尺将节点 B 及 C 的已知位移量 OA' 及 OA'' 描上。然后从 A' 及 A'' 两点作出用粗綫表示的向量 Δl_1 及 Δl_2，它們代表了杆 1 及 2 的已知长度改变。此时必須注意这些伸长量的符号。这里假定为杆 1 的长度是增长的，因此 Δl_1 繪成从 B 到 A 的方向。杆 2 的长度是縮短的，因此 Δl_2 繪成从 A 到 C 的方向。最后，在向量 Δl_1 及 Δl_2 的两端作出两根垂直綫相交于 A_1 点。它定出了节点 A 所求的位移 OA_1。图194 b 即表示这个簡单結构的威里沃特图。

对于桁架的組成形式是从一根杆件出发而每个节点又用两根新的杆件所組成的所有桁架，要繪制其位移图时，都可循同样步驟进行。在处理这类桁架时，我們可經常假定两节点的位移为已知，而用上述方法来决定第三节点的位移。有了这个位移，我們便能継續进行下一个节点，再重复同样的构图法，其他依此类推。得出各鉸的全部位移以后，我們便可用投影法得出一座桥梁桁架位移的竪向分量，然后象我們以前所作过的一样用卡斯提格里安諾的或馬克斯威尔与摩尔的解析方法或用虛載荷的半解析半图解的方法繪出撓度曲綫。

从这里所討論的一段时期內的著作物中，可以看出对結构理論中所使用的解析法和图解法的評价，形成了两种不同的意見。有些工程师常常借重图解法，另外一些却認为它不够精确，而宁愿用解析法来求所有的未知量。尹克勒在他的桥梁著作的序言中[1]討論过这个問題。他指出图解法的优点是說明性强，易于发覺錯誤。图解工作并不象解析法那么費事，它的解答常常在很短时間內即可求出，較之数値計算所需时間要少得多，同时它的結果已具有适合实用的足够精确度。据尹克勒所說，在分析連續梁时，图解法所需时間仅为解析法所需的三分之一。不过这位作者也看到数値計算的一些优点。他指出在要求有較大精确度的那些情况下，还是以数値計算为宜，特别在为着将来的需要而編制数値表时。在結构理論的实际应用中，尹克勒和摩尔两人在推行图解法这方面是很有成績的。

66. 超靜定桁架

我們已經知道克列布希研究过具有冗余杆的桁架的应力分析的問題(参看第56节)。他指出若将各鉸的位移作为所求的未知量，我們常能写出和未知量个数相同的若干方程式。他考虑了可容易地应用他的方法来求解的几个簡单例子。研究超靜定桁架获得进一步发展的是馬克斯威尔。他的方法，自从由摩尔将其重新发掘出来(参看第65节)之后，即为建筑工程师所普遍采用。处理这个問題的另一方法——根据应变能的考虑出发，是由卡斯提安諾提供出来的。我們可用具有一根冗余杆的桁架系統作为簡单例子来說明馬克斯威尔-摩尔法以及卡氏法。如图195 a 所示，我們取斜杆 AB 作为冗余杆。应用馬克斯威尔-摩尔法时，我們除去 AB 杆而用两个相等而反向的力 X 来代替它对其余杆系的作用。这样，我們得出如图195 b 所示的靜定桁架，其上作用有已知載荷 P_1，P_2 及未知力 X。由已知載荷 P_1，P_2 所产生于此系統內各杆的力是容易算出来的。設 s_i 表示作用于任一杆 i 的內力。为了决定由两力 X 产生于該杆的力，我們先解輔助問題，在此問題中移去了載荷 P_1 及 P_2 而用两个单位力代替 X 力(图195 c)。設 s_i' 表示由这一对力在杆 i 內所产生的力。于是由載荷 P_1 及 P_2 以及由 X 力所产生于任一杆 i 的总載荷(图195 b)显然为

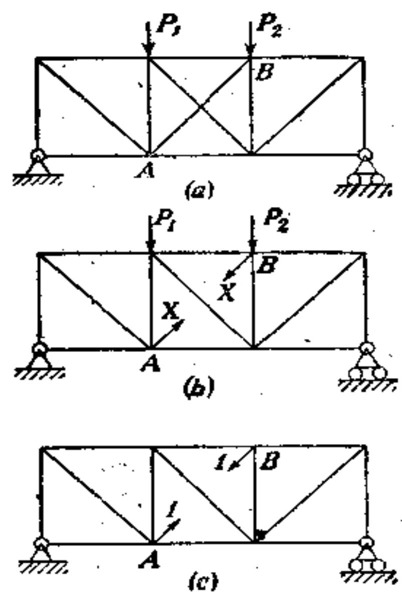


图 195

[1] "桥梁理論" 1873 年于維也納出版。

$$S_i+s_iX \tag{a}$$

杆 i 的相应伸长量为 $(S_i+s_iX)l_i/A_iE$。由于这种伸长量的关系，节点 A 及 B 之間的距离将有改变，由 B 向 A 的距离改变值可由下式得出[1]

$$\sum\frac{(S_i+s_iX)s_il_i}{A_iE} \tag{b}$$

現在 X 力的大小可根据下述事实得出，卽在实际桁架中（图 195 a），A 及 B 两鉸間距离的改变与斜杆 AB 的伸长量 Xl/AE 相等。这样我們就得出下式

$$-\sum\frac{(S_i+s_iX)s_il_i}{A_iE}=\frac{Xl}{AE} \tag{c}$$

由此，卽可决定未知量 X，然后利用(a)式算出所有各杆的內力。

应用卡氏法时，我們算出图 195 b 所示系統的应变能，得

$$V_1=\sum\frac{(S_i+s_iX)^2l_i}{2A_iE}$$

导数 $\dfrac{\partial V_1}{\partial X}$ 使我們得出了决定 B 鉸向 A 鉸移动的(b)式。使这个位移（带有負号）和斜杆 AB 的伸长量相等，我們又得出(c)式。

具有几根冗余杆的某些桁架系統也可以用同法处理。例如，图 196 a 示具有两根冗余杆的一个系統。我們取支座 A 处反力的两分量 X 及 Y 作为冗余值，并考虑图 196 b 及 196 c 所示的两个輔助問題。設 s_i' 及 s_i'' 表示此两种情况的任一杆 i 內的力，并假定 S_i 为当支座A取去，$X=Y=0$ 时由載荷 P_1 及 P_2 产生于杆 i 內的力。于是在图 196 a 的实际情况下任一杆 i 內的总力将为

$$S_i+s_i'X+s_i''Y \tag{d}$$

現在利用上一节中的 (b) 式并使图 196 a 的实际情况中 A 鉸的水平和鉛直位移等于零，我們得出下面的两个含有 X 及 Y 的綫性方程：

$$\left.\begin{aligned}\sum\frac{(S_i+s_i'X+s_i''Y)s_i'l_i}{A_iE}=0\\ \sum\frac{(S_i+s_i'X+s_i''Y)s_i''l_i}{A_iE}=0\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

由此，可以算出 X 及 Y。

同法，有三根冗余杆的一个系統能給出含有三个未知量的三个綫性方程，其他依此类推。我們常常能做到有多少个未知量就得出多少个綫性方程，因之可以从它們求出各超靜定量。实际上，冗余杆数目增多，問題也愈为复杂，不仅因为方程式的数目多了[如(e)式]，而且也因为这些方程式通常都属于这样一类，卽当所

[1] 总和的正值表示 AB 距离减小，負值表示增加。

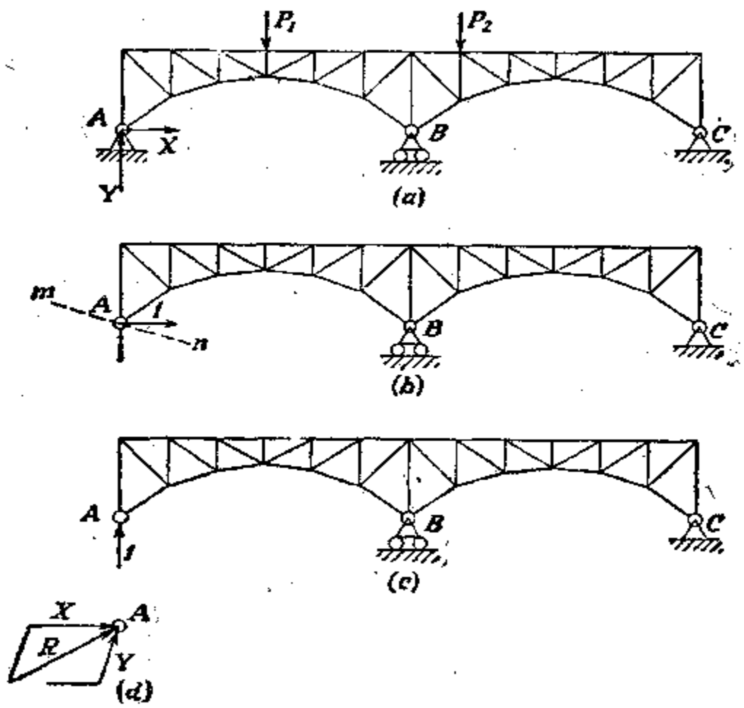


图 196

求各量需按某一精确度求出时[1]，全部数値計算必須按更高的精确度来进行。而且，图解分析总是不够精确的。要克服这个困难，經建議未知量的选取必須使求冗余値的每一个方程式只含有一个未知量。摩尔說明了[2]怎样按这个原則来求解有三根冗余杆的一个拱式桁架的特殊例子(图 197)。

为了說明怎样依照一般方法来选定未知量，我們仍取图 196 所示的那种情况来討論。檢查相应的(e)式，可以看出，如果

$$\sum \frac{s_i' s_i'' l_i}{A_i E} = 0 \tag{f}$$

便能达到所要求的簡化目的。(f) 式的意义是[如同第 65 节 (b) 式中所見到的一样]沿 X 方向作用的单元載荷須使节点 A 沿 Y 方向不产生位移。要滿足这个要求，我們可用繪制威里沃特图的方法，首先研究图 196 b 中，A 鉸在水平单元載荷作用下将沿什么方向移动。設此方向为 mn。于是，在計算 A 鉸处反力 R 的两分

[1] 在分析具有多数冗余杆的超靜定系統中所需数字計算的精确度經拍列特 (J. Pirlet) 討論过，見高等工业学院論文集 (Dissertation, Technische Hochschule)，1909 年于河城(Aachen)出版；并参看西兰(A. Cyran)的論文，刊在 Z. Ver. deut. Ing.卷 54，第 438 頁，1910 年出版。

[2] 摩尔的論文，刊在 Z. Architek. u. Ing. Ver. 卷 27，第 243 頁，1881 年于汉諾威出版。

量中，我們取垂直于 mn 的分量 Y 如图 196 d 所示。象这样选定两分量的方向，就能滿足(f)式的条件，而每一个(e)式也只含有一个未知量。

图 197 a 中的拱是一个具有三根冗余杆的系統。如果我們取杆 1，2 及 3 的內力 S_1，S_2 及 S_3 作为未知量，并如前述程序进行分析，我們将得出和(e)式相类似的三个方程式，每一个都包含全部三个未知量 S_1，S_2 及 S_3。为了使此三个方程式中的每一个都只含有一个未知量以簡化此問題，我們用三个力的等效靜力系統来代替 S_1，S_2 及 S_3，选取此三个力系时須使它們中間每一个在单独作用时不致使其他两个力系产生相应的位移。为此，我們假定 A 鉸及 B 鉸与一絕对剛性块体 AOB 相連接(图 197 b)。然后我們在此块体上加上适当选定的力 X 及 Y 和一个力偶 M。这些都看作是广义力(generalized forces)。为了求出 X 及 Y 两力所必須作用到的 O 点，可应用威里沃特图来研究在力偶 M 作用下 ABO 块体的位移。我們取定在位移时保持不动的点作为 O 点。由于在力偶 M 作用下 O 点并不移动，我們根据互易定理可以断定作用于 O 处的力将不致使块体发生任何轉动。因此，計算未知反力的三个方程式之一(例如，包含 M 的那个方程式)将不包含 X 及 Y，而其他两个也将只包含 X 或 Y。按照前述的图 196 那种情况的同样方式来选定 X 及 Y 的方向，我們最后得出了每个只含有一个未知量的三个方程式。

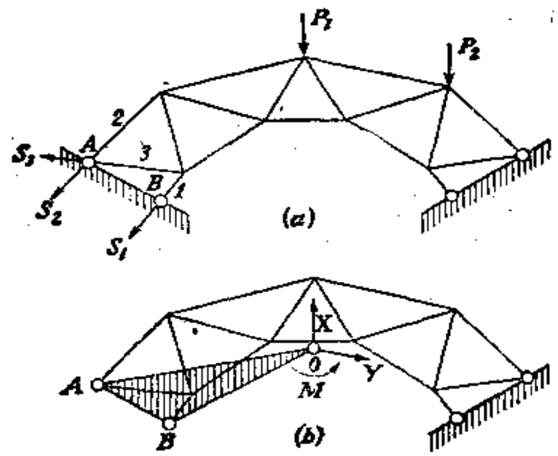


图 197

求冗余杆系統中应力的一些方法可以推广到由于溫度差异使杆件长度改变的那些情况。在卡氏和摩尔的著作中都有过这类例子。

应用影响綫来分析超靜定系統已經有很大发展。在作影响綫时，馬克斯威尔曾提出两个力的簡单情况的互易定理，嗣后貝替(E. Betti)[1] 对这个定理又加以普遍証明。雷莱更将这个定理推广到彈性系統的振动[2]，証明了如果有一个已知振幅和周期的諧和力作用于彈性系統的 P 点上，則在另一点 Q 处形成的位移其振幅和振相与該力作用于 Q 点而在 P 点形成的位移的振幅和振相完全相同。于是他推

[1] 見意大利的杂志，Nuovo cimento (2)，卷 7 及 8，1872 年出版。

[2] Proc. London, Math. Soc. 卷 4，第 357～368 頁，1873 年出版。

論靜力互易定理似乎是力具有无穷大周期的一个特例[1]。在他的著作中，雷萊用广义力和对应广义位移(corresponding generalized displacement)这两个概念考虑了一个力和一个力偶作为一个特例。他說："为了反駁那些思想上蔑視广义坐标的人，这里对理論計算的結果作出了一个更为专門的驗証……"。雷萊用实驗証明了他的定理，他用一根梁作实驗决定出某一既定截面上梁的撓度的影响綫。用实驗方法得出影响綫，这还是最早的一次。

雷萊的著作，特别是他所著"声学理論"(The Theory of Sound)[2]对于俄国的結构理論的发展起了很大的影响。喀比杰夫教授(В. Л. Кирпичев, 1844～1913)將互易定理的实用意义結合着广义力的概念，用来繪制簡支梁、連續梁和拱[3]的各种影响綫。随后，此广义力和广义坐标的概念为喀比杰夫广泛地用在他的重要著作"結构理論中的冗余值"(Redundant Quantities in Theory of Structures)中[4]。这样，他已經把各种超静定結构分析法的表示方法大大地加以簡化了。在他那本书的序言中，喀比杰夫說过所有从事結构理論研究的工程师都应該讀一讀雷萊的"声学理論"。在十九世紀末及二十世紀初，俄国的材料力学方面以喀比杰夫的著作[5]和他的講义最为卓越。

在桁架理論研究中，直到現在还是將各节点假定为理想鉸。但在实际事物中，鉸通常都很剛固，因此各杆除承受拉力或压力以外还有少許的弯曲。这使得对桁架作应力分析时增加了很多困难。对于考虑到弯曲的应力分析方法发展得相当緩慢。在阿西蒙特(Asimont)教授[6]建議下，慕尼黑工程学院將具有剛性节点的桁架分析方法作为一个悬奖征答的問題公布出来，結果由曼德拉(H. Manderla)[7]对这个問題作出了精細的研究。他指出对于这种剛架，我們要考虑的不独是节点的位移，而且还要考虑它們的轉角。因此他对每个节点导出必需的三个平衡方程。在推导中由于考虑了桁架各杆的軸向力对弯矩的影响，因而他的方程組非常复杂，不合实用。为了实用目的，曾提出几个近似的方法，其中只考虑弦杆是連續的而各腹杆仍假定为鉸接[8]。較为精确的近似法是由摩尔提出来的[9]。他假定节点的位

[1] 見 Phil. Mag. 卷 48, 第 452～456, 1874 年; 卷 49, 第 183～185 頁, 1875 年。

[2] 这本名著的第1版于 1877 年发行。

[3] 見 Bull. Tech. Inst. 1885 年于圣彼得堡出版。

[4] 1903 年于基輔出版。

[5] 除了上述的书以外，喀比杰夫还刊出了两卷集的材料力学教程和一本图解力学教程。

[6] 阿西蒙特的論文，刊在 Z. Baukunde, 1880 年。

[7] 曼德拉的論文"次应力的計算"(Die Berechnung der Sekundärspannungen)，刊在 Allgem. Bauztg. 卷 45, 第 34 頁, 1880 年出版。

[8] 見尹克勒所著"桥梁理論"第二期，第 276 頁；并参看恩格塞的"鋼桁架桥的附加力与次应力"(Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerk Brücken)，1892 年于柏林出版。

[9] 摩尔的論文，刊在 Zivilingenieur, 卷 38, 第 577 頁, 1892 年；并参看他的"論文集"第 2 版，第 467 頁。

移受节点剛性的影响不大，并且用分析理想鉸桁架所推演的方法求出这些位移。这样，所有各杆(ik)的轉角ψ_{ik}都能算出（例如，用威里沃特图来求）。他取剛性鉸的轉角ϕ_i作为未知量。于是任一杆ik的节点i处的弯矩可由下式得出

$$M_{ik}=\frac{2EI_{ik}}{l_{ik}}(2\phi_i+\phi_k-3\psi_{ik}) \tag{g}$$

式中$\phi_i-\psi_{ik}$及$\phi_k-\psi_{ik}$为杆ik的i端及k端对于弦杆ik的轉角。根据节点的平衡条件，他得出了和未知轉角ϕ_i的数目一样多的若干个具有下列形式的方程式：

$$\sum M_{ik}=0 \tag{h}$$

虽然(h)式的个数也許很多，摩尔指出它們都能簡捷地用逐次漸近法解出。解出了角度ϕ_i之后，再从(g)式求出弯矩，并算出相应的弯曲应力（或次应力）这种对具有剛性鉸的桁架的分析方法經事实証明是足够精确的，因而在实际工程中广泛采用。

由于桁架分析是根据各种簡化的假定，工程师們常常用实验方法对理論計算的应力与变位加以驗証。例如，佛朗克尔(W. Fränkel)制出一架专用的伸长仪来測量桁架各杆的应力。他又設計了一种記录桥梁在动载荷下变位的仪器。这些实驗[1]証明了由測量所得的量和由理論計算所得的数值非常相符。

67. 拱与擋土墙

我們已經知道（参看第 35 节）布累塞作出了曲杆理論，他将一个双鉸拱和一个固端拱作为例子进行过討論。可惜在当时工程师們都不認为彈性理論能用到石拱設計上，他們对这些拱仍継續看作为由絕对剛体所組成。直到尹克勒（参看第 36 节）和拍洛底尔(de Perrodil)[2]作出了許多实驗研究，特别是在奧国工程师与建筑师学会的一个专門委員会作出大量試驗以后[3]，工程师們才逐漸相信彈性曲杆理論对于决定石拱的正确尺寸具有充分的精确度。尹克勒和摩尔都是将这个理論介紹到实用中去的主要人物。

在尹克勒的材料力学书中（参看第 36 节），他非常詳細地論述了双鉸拱和无鉸拱，而在他那 1868 年[4]的重要論文中，他将影响綫的概念应用在拱里。他利用最小功原理研究了拱内压力綫(pressure lines)的位置[5]并且用公式表示出这一原理，这公式是用他的名字来命名的。它說明了凡是对于作用載荷所能作出的一切

[1] 佛朗克尔的論文，刊在土木工程卷 27，第 250 頁，1881 年出版；卷 28，第 191 頁，1882 年；卷 30，第 465 頁，1884 年。

[2] 拍洛底尔的論文，刊在 Ann. ponts et chaussées，第 6 組，卷 4，第 111 頁，1882 年。

[3] 見 Z. österr. Ing. u. Architek. Ver. 1895 年及 1901 年。

[4] Mitt. Architek. u. Ing. Ver. 第 6 頁，1868 年于波赫門(Böhmen)出版。

[5] "拱的压力綫的位置"(Die Lage der Stützlinie im Gewölbe)刊在 Deut. Bauztg. 第117，127 及 180 頁，1879 年；又第 58，184，210 及 243 各頁，1880 年。

索曲綫中，眞正的压力綫就是和拱的中心綫偏差极小的那根綫。要得出这个結論，可論証如下：首先我們假設拱的应变能可以单独用弯曲的能量十分精确地表示出来，因此：

$$V=\int_0^s \frac{M^2ds}{2EI} \tag{a}$$

用 z 表示从拱的中心綫上任一点鉛直地量到压力綫的相应点的距离，并用 H 表示拱的水平推力，得 $M=Hz$。于是，根据最小功原理并根据(a)式，可知眞正压力綫就是当下示积分为最小值时的那根綫。

$$\int_0^s \frac{H^2z^2}{2EI}\,ds \tag{b}$$

当全部載荷均为鉛直方向，对于 s 来說，H 为常数，如果拱的截面也是常数时，則将积分式(b)减到最小的必要条件可簡化为下示的积分形式

$$\int_0^s z^2\,ds \tag{c}$$

这个条件构成了尹克勒原理(Winkler's principle)。

这个原理对于某些变截面的拱也能适用，其截面的改变須符合于下式

$$I=I_0\frac{ds}{dx}$$

式中 I_0 为在跨度中央截面的惯性矩。現在，不用积分式(c)，此理論只要下示积分

$$\int_0^l z^2\,dx \tag{d}$$

减到最小值就可以了。

从尹克勒原理可知，如果取对于作用載荷所作出的索曲綫当作拱的中心綫，則压力綫与中心綫重合，将无弯曲发生。实际上，由于拱的軸向受压总会有一些弯曲，在应变能的式子(a)中則将其忽略不計。但这种弯曲通常很小，因此我們应用尹克勒原理还是适当的。这样，通常就将对靜載荷所作的索曲綫作为拱的中心綫。

摩尔对于拱的理論的主要貢献发表他在1870年[1]所写的那篇論文里，文中提供了一个分析拱的图解法。摩尔考虑一个两鉸拱(图193 a)，他首先假定右端 B 鉸能自由地作水平移动，計算該鉸由一个竪向单元載荷作用于 E 点所产生的水平位移。在这項計算中，他用了图解法根据对某些虛载荷所作的索曲綫来决定位移量。具体步驟如下：取定在 C 处两截面間拱的一个元素，他观察到由于此元素的弯曲使 CB 部分的轉角 $d\phi$ 为 $M\,ds/EI$ 而 BD 的相应位移的水平分量等于

[1] Z. Architek. u. Ing. Ver. 1870 年于汉諾威出版。

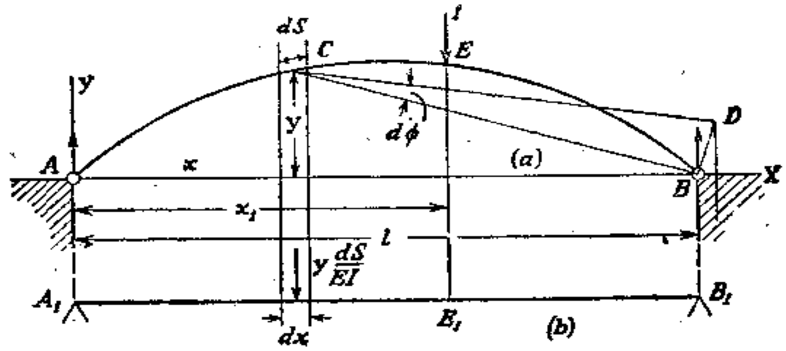


图 198

$My\,ds/EI$。將这些元素的位移总加起来，他求出 B 鉸的水平总位移为

$$u=\int_0^l \frac{My\,ds}{EI}=\int_0^{x_1}\frac{x(l-x_1)y\,ds}{lEI}+\int_{x_1}^l \frac{x_1(l-x)y\,ds}{lEI}$$

可見此水平位移能按簡支梁 A_1B_1（图 198 b）在截面 E_1 处的弯矩来計算，此梁承受着大小为 $y\,ds/EI$ 的虛构力作用于梁的每个元素 dx 上。同样，如果在 B 处放上一个水平单元載荷来代替在 E 处的竪向单元載荷，則 B 鉸的水平位移 u_0 也可計算出来。由于在实际情况中，B 鉸是不能移动的，故在 E 处的单元載荷将引起一水平推力 H。此推力的大小很明显地应为

$$H=1\,\frac{u}{u_0}$$

摩尔根据此式推断出对于竪向单元載荷的每一位置，相应的推力是与位移 u 成正比，而且对于 A_1B_1 梁的虛載荷所作出的弯矩图可作为計算推力 H 的影响綫。

虛載荷法以及选擇超靜定量的有关基本概念（如图 197 所解释的）乃是根据彈性理論分析拱的两个主要簡化方式。正因为这样，它們加速了这种分析法在实际中的应用。

在擋土墙的設計中，工程师們仍然沿用着庫侖所假定（参看第 14 节）的方法，即假定砂粒的滑动是沿一个斜面发生的[1]，其主要进展是在于发展了純粹图解的分析方法。这类方法中最有用的一个是由雷布赫恩（G. Rebhann）[2] 提出来的。他考虑了一般情况，即墙背面 AB 不是垂直的（图 199），反力 R 作用在与水平成傾角 β 的方向上，以及頂上地面为一曲面 ACE。

[1] 关于这方面完整的傳記見奧尔巴赫（Felix Auerbach）和赫尔逊康普（Felix Hülsenkamp）合著的"物理与工程力学手册"（Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik），卷 4，1931 年出版。

[2] 雷布赫恩著"土压力理論以及和建筑工程特別有关的擋土墙"（Theorie des Erddruckes und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen），1871 年于維也納出版。

雷布赫恩証明：如果 BD 为天然傾斜面，BC 为庫侖所确定的滑动面，且 CD 綫与垂直于 BD 的 CF 綫成 β 角，則 ABC 和 BCD 两块面积必定相等。因此，他作出 BC 綫将 $BACD$ 面积等分为两半，即求得此滑动面。作者又說明了計算擋土墙反力 R 的一个簡单方法。他只要作出三角形 KCD（图 199），其中 $KD=CD$，然后将此三角形的面积乘以单位体积砂粒的重量 γ 便得出擋土墙单位长度的反力 R。

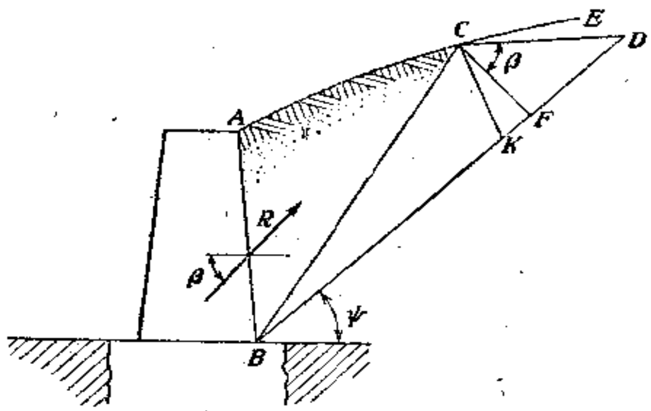


图 199

朗肯根据松散材料的应力分析来設計擋土墙的观念曾由几个工程师[1]作过深入的討論。不过他們所得的結果并不較庫侖的理論更为可靠，因此沒有为人們所接受。鮑克(Pauker)提供了一个求算基础深度的理論[2]。在图 200 中，設 P 表示由牆身 AB 傳到土壤上的均布压力（墙身长度系与图面垂直相交）。現在，考虑墙脚下松散材料的一个元素 ab，采用朗肯理論的(a)式（参看第 44 节），他斷定要防止土壤滑动，側压力 σ_y 必須滿足下示条件

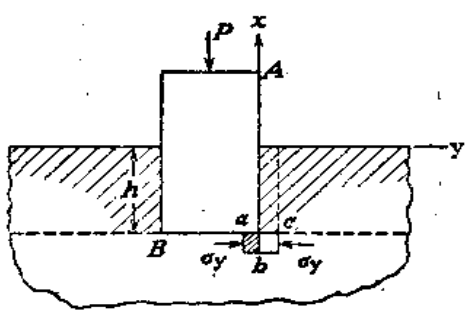


图 200

$$\sigma_y \geqslant \frac{p(1-\sin\phi)}{1+\sin\phi} \tag{e}$$

式中 ϕ 为材料的自然坡角。現在考虑相邻的一个元素 bc，它承受着竪向压力 $h\gamma$，他求出側压力的极限值为

$$\sigma_y = \frac{\gamma h(1+\sin\phi)}{1-\sin\phi} \tag{f}$$

代入(e)，得出基础的必需深度为

$$h \geqslant \frac{p(1-\sin\phi)^2}{\gamma(1+\sin\phi)^2} \tag{g}$$

[1] 康西台雷 (A. Considère) 的論文，刊在 Ann. ponts et chaussées (4)，卷 19，第 547 頁，1870。列維 (M. Lévy) 的論文，刊在 J. mathématiques (2)，卷 18，第 241 頁，1873。

尹克勒的論文，刊在 Z. österr. Ing. u. Architek. Ver. 卷 23，第 79 頁，1871。

摩尔的論文，刊在 Z. Architek. u. Ing. Ver. 第 344 頁，1871 年于汉諾威出版；第 67 及 245 頁，1872；并参看他的"論文集"第 236 頁，1914。

[2] 見 J. Dept. Ways of Communication，1889 年于圣彼得堡出版。

为了驗証此公式并求出砂粒发生滑动时所沿的平面，庫久莫夫（В. И. Кудюмов）[1] 在圣彼得堡交通工程学院的試驗所內作了一些重要的实驗。他用一只四壁为玻璃制成的小匣，里面装上砂粒。在块体 AB（图 200）上逐漸增加压力 P，他能求出在各个深度 h 时，砂粒开始滑动而使块体突然下移时 P 的极限值。在該瞬时所摄得的照片显示出砂粒的滑动面。实驗証明，若要产生这种滑动，必需有較(g)式所得的更大的压力 P。茂勒布累斯劳[2] 另外用一个擋土墻模型作出了一些精細的实驗工作。这些实驗都証明墻背上承受的压力有时会比庫侖理論所計算出的为大。它們也清楚地指出堆砂的方式、砂的振动以及在它的表面上加載和卸載，都对加于墻背的砂压力大小有很大的影响。

[1] 庫久莫夫的論文，刊在土木工程卷 38，第 292～311 頁，1892。

[2] 見茂勒布累斯劳所著“擋土墻上的土压力”（Erddruck auf Stützmauern），1906 年于斯图加特出版。

第十一章

1867~1900 年間的彈性理論

68. 圣維南的学生們的成就

圣維南的最出色的学生乃是約瑟夫·惠倫丁·包沁涅斯克(Joseph Valentin Boussinesq, 1842~1929)[1]。他出生于法国南部赫劳脫(Hérault)省的圣安得雷山哥尼(Saint-André-de-Sangonis)的小鎮上。他在家乡接受初等教育，直到十六岁，才去芒佩列埃(Montpellier)讀語文和数学。十九岁毕业后，他选擇了教书的工作，在法国南部几个小市镇的一些中学里教数学，并在教学之余研究富勒、拉普拉斯和柯西这些数学家的著作。不久，他开始个人写作，1865年由拉梅介紹将他的第一篇科学論文(关于毛細管現象)向科学院提出。


图 201 J. V. 包沁涅斯克

1867年，包沁涅斯克在巴黎大学获得博士学位。大致在同一时期他写了一篇关于彈性理論的研究报告。这篇論文曾向科学院提出由圣維南担任檢閱，圣維南从这篇論文中一眼看出这位青年作家的卓越才力，从此就特别重視他的著作，并經常通訊联系，討論包沁涅斯克所遇到的一些問題。这位年青人的写作表达能力較差，常常拙于作理論上的解釋，因此有好几次圣維南向他建議要他在著作中注意文句清楚和作出詳細的論証。

中等学校的教学工作还不能使包沁涅斯克的才能得到发展，因此圣維南尽很大的力量帮助他找大学里的工作。他終于在1873年获得了里尔(Lille)大学教授的职位。此后他就专心致力于科学工作使他在理論物理学中的某些部門作出了一

---

[1] 关于包沁涅斯克的傳記，見皮卡德(E. Picard)的法刊在 Mém. acad. sci. 1933 年出版。

些重要的研究。1886 年他被选为科学院的会員并充任巴黎大学的力学教授。从那时起直到死去为止，他一直住在巴黎，从事科学研究。在水动力学、光学、热力学以及彈性理論各方面他都有不少的成就。他对彈性理論最主要的貢献包含在“彈性固体的平衡和运动中的位能的应用”(Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques...[1] 这本书里。自从圣維南发表过关于杆件受扭和受弯那篇著名的研究报告之后，在这門学科中，他这本书是最重要书籍之一。

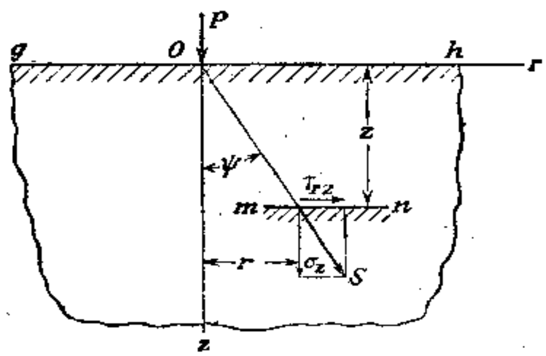


图　202

拉梅和克尔文在分析球体的变形时早已用过势函数，而包沁涅斯克却应用它来分析許多种問題。从实用价值的观点上看，他的解法中最重要的还是那些关于在半无限体中由已知力作用于边界面上所产生的应力和变形。在最簡单的情况中，他假設有一力 P 垂直地作用于水平边界面 gh(图 202)上。取指向物体内部的 z 軸方向为正，并在水平面内取极坐标 r 及 θ，包沁涅斯克得出作用在水平面上的应力分量如下：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z&=-\frac{3P}{2\pi}z^3\left(r^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\\ \tau_{rz}&=-\frac{3P}{2\pi}rz^2\left(r^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

由上式得

$$\frac{\sigma_z}{\tau_{rz}}=\frac{z}{r}$$

这表明作用于水平面 mn (图 202) 任一点处合应力的方向就是通过受載点 O 的一条直綫的方向，而其大小为

$$s=\sqrt{\sigma_z^2+\tau_{rz}^2}=\frac{3P}{2\pi}\frac{\cos^2\psi}{r^2+z^2}\qquad\text{(b)}$$

式中 ψ 为合应力的方向綫和 z 軸所交的角度。我們看出合应力是与距載荷 P 的作用点的距离的二次方成反比的。

包沁涅斯克考虑了边界面的竪向变位 w，得出

$$w=\frac{P\left(1-\mu^2\right)}{\pi E r}$$

[1] 1885 年于巴黎出版。

它指出 wr 的积在边界上是一个常数，即，在边界面上由原点作出的半徑将成为一条双曲綫（变形以后），其漸近綫为 Or 及 Oz。在原点处位移为无穷大。为了克服这个困难，可假定靠近原点的材料被一个极小半徑的半球面所截开，并假定集中力 P 可用分布在此表面上的等效静力来代替。

有了对于一个集中力的解并利用迭加原理，包沁涅斯克解出了載荷分布在一个半无限体的部分边界上的問題。例如，考虑一集度为 q 的均匀載荷分布在半徑为 a 的圓形面积上的情况，他求出圓心处竪向变位为

$$w_0=\frac{2(1-\mu^2)qa}{E}$$

而在圓周上則为 $2w_0/\pi$。用同样方法，他解出了一个載荷分布在椭圓面积上和矩形面积上的变形問題。这些問題对于研究工程結构物中基础的沉陷是有价值的。

包沁涅斯克又討論到这么一些情况，即不給出分布力，而給出了部分边界面上的竪向位移。例如，他討論了压在半无限弹性体边界面上的一个絕对刚性的压模（呈半徑为 a 的圓柱形状），并且求出压模的位移为

$$w=\frac{P(1-\mu^2)}{2aE}$$

这样一来，对于一已知的平均压力 $P/\pi a^2$ 值，变位就不是常数而是与压模的半徑成正比增加。在压模下面的压力分布也显然不是均匀的，其最小值是在中心处，它等于圓形接触面积上平均压力之半。在这个面积的边界上，压力变为无穷大，它指出材料的屈伏将沿边界发生。然而，这种屈伏是局部性的，它并不怎样影响到去圓周較远距离处的压力分布。

包沁涅斯克应用他的解来証明圣維南的原理。取一个平衡力系作用于一物体的某一小部分上，他指出所产生的应力是局部性的。它們按离受载区域距离的增加而迅速消失，在离开载荷的距离較受载区域的周长大几倍的那些点上，簡直可以忽略不計。

在上述关于位能的应用一书的后面附录有几个"补注"（Notes complementaires），它們都是很有价值的。其中有一个討論杆的振动理論。作为第一个例子，包沁涅斯克考虑了一根均匀的薄条半无限杆件，其軸綫由原点沿正向无限伸长。考虑側向振动时，他采用下式

$$a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

并且在端部 $x=0$ 处得出各种情况下的一些解。他特別注重在极短时間内象冲击之类的力作用在端部所发生的振动，他发覺横向振波并不象在縱向振动中一样保

持它們的形状，而是在沿杆件傳播中漸次消散。作者討論过一冲击物体的冲击速度的极限值 v，超过此极限时，无論冲击物体的質量怎样小，杆件材料也会发生局部的永久变形。他得出

$$v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\frac{\sigma_{yp}}{E}\cdot\frac{2i}{h}$$

式中 $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 为在杆件中的声速，h 为梁的高度，而 i 为其截面的回轉半徑。这个結果和我們已經知道的湯姆士·楊对于縱向冲击所得的結果相似(参看第 22 节)。

包沁涅斯克也研究过杆件的縱向冲击，得出了这个問題的全解，这个解式得到了圣維南的重視(参看第 52 节)。

包沁涅斯克在薄杆理論和薄板理論[1]方面都做了許多研究。他得出一个新的方法来推导以前为克希霍夫所得出的薄杆的平衡方程。在薄板理論中，他得出平衡微分方程的一个新的推导方法，根据用另一靜力等效的力系代替原先沿周界作用的一个力系后对所产生的局部扰动的研究結果，討論了泊松-克希霍夫边界条件。用这个方法，他得出了和克尔文已經得出的同样結論来(参看第 57 节)。包沁涅斯克着手这項研究是由圣維南所建議的[2]，这項研究成果也收集在圣維南所譯出的克列布希那本书的"第 73 号后記"中。

最后，应当着重提一下包沁涅斯克在松散(或粒状)物質的平衡方面的成就[3]。在他以前的研究者只着重在这类物質的平衡极限的計算，但包沁涅斯克却研究了它的彈性变形。他假定在重力作用下，顆粒(砂)間存在着充分的压力，其摩擦力能防止顆粒之間的任何滑移，因此在諸力作用下該物質将产生如彈性体一样的变形。他更假定象这样的物体的剪切模量是与任一点处平均压力 $p=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$ 成正比的，而且在不計体积的改变时，他建立了应力分析所需的方程。他将問題限于考虑二維情况，得出了能应用于擋土墙理論的解。圣維南[4]将包沁涅斯克的理論結果和实驗数据作了比較，断定包沁涅斯克的理論較之朗肯和其他人的要进步一些。在他的建議下，佛拉門特(Flamant)根据包沁涅斯克的理論[5]編制出一些表

---

[1] 見 J. Mathématiques, 第 2 組, 卷 16, 第 125～274 頁; 卷 5, 第 163～194 及 329～344 頁, 1879 年。

[2] 見圣維南在翻譯克列布希的书中的注，在第 691 頁上。

[3] 見"松散物質彈性平衡理論的論文"(Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents...) 刊在 Mémoires...publiés par l'Académie de Belgique.

[4] Compt. rend. 卷 98, 第 850 頁, 1884 年。

[5] "土压力計算的数值表"(Tables numériques pour le calcul de la poussée des terres) 刊在 Ann. ponts et chaussées, 卷 9, 第 515～540 頁, 1885 年于巴黎出版。

来以便于擋土墙的設計。 庇尔逊对包沁涅斯克的研究作过广泛的評論[1]，在他的結論中写道："在圣維南的許多学生中間，很少有人能象包沁涅斯克一样在彈性問題上研究得这么广泛，也很少有人能象他一样对彈性理論方面作出那么多的貢献……。 他解释彈性理論大都是凭着巧妙的分析，而不是完全借重于力学問題和物理問題上的特殊解"。

圣維南的另一个学生是毛萊士·列危(Maurice Lévy, 1838～1910)。他先后毕业于工业学院(1858 年)和桥梁道路学院(1861 年)。毕业后在巴黎当土木工程师，同时又在工业学院兼任講师。嗣后(在 1875 年)他充任中央制造工艺学院(Ecole Central des Arts et Manufactures)的应用力学教授，并且在 1883 年被选为科学院的会員。

列危在彈性理論中的各种問題上作过很多研究。他导出由均匀横向压力作用于一杆件上发生平面弯曲时的平衡微分方程，討論了杆件的中心綫在不受应力状态下成一圓弧的解[2]。当杆件只有些微弯曲时，可将方程式簡化，由此，列危得出了一个圓环被压碎时的压力临界值[3]。

在他的平板研究中[4]，列危討論了克尔文对于泊松的和克希霍夫的边界条件的折衷意见，并且对于一块有限厚度的平板，他得出局部扰动的一个精密的分析，这种扰动是由另一力系(等效的)代替边界力的一个静力系所产生的。列危考虑，两对边是簡支的，而其他两对边则可以是固定的、簡支的、或完全悬空的矩形板的弯曲，得出了一个重要的解法[5]。这种解法得到广泛的应用，而各种特殊情况也由艾斯坦納夫(E. Estanave)研究出来写在他的博士論文中[6]。

列危解出了楔体中应力分布的二維問題，此楔体表面承受压力作用[7]。他建議用这个解来分析石坝的应力。这位科学家还写过一部书[8]，书中我們可看到对于結构分析的图解法的論述。

阿尔佛雷德·爱梅·佛拉門特(Alfred-Aimé Flamant)从桥梁道路学院毕业以后，便在法国北部参加水工建筑方面的工作。 隨后他充任了桥梁道路学院的結构理論教授和中央制造工艺学院的力学教授。他对粒状物質的彈性理論感到兴趣

[1] 見"历史"卷 2，第 2 部分，第 356 頁。
[2] J. mathématiques (3)，卷 10，1884 年出版。
[3] 布累塞是得出这个解答的第一个人。
[4] J. mathématiques (3)，卷 3，第 219～306 頁，1877 年。
[5] Compt. rend. 卷 129，1899 年。
[6] Thèse, 1900 年于巴黎出版。
[7] Compt. rend. 卷 127，第 10 頁，1898 年。
[8] "图解静力学"(La Statique Graphique)，第 3 版，卷 1～4，1907 年巴黎出版。

并且簡化了包沁涅斯克的理論[1]。他和圣維南合作翻譯了克列布希的书。圣維南和佛拉門特两人一同研究出来的关于杆件縱向冲击的問題也收入在該书中作为一个附录。

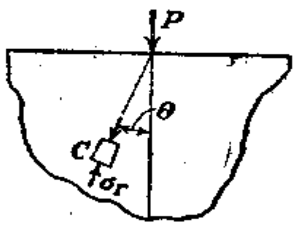


图　203

佛拉門特应用包沁涅斯克对半无限体所作的解作为特例，得出了一块单位厚度的半无限平板承受一垂直于其边緣的力 P 所产生的应力分布（图 203）[2]。在此例中，应力分布是非常簡单的。离载荷作用点为 r 处的任一元素 C 沿徑向承受着簡单压縮，其压力值为

$$\sigma_r=-\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r} \tag{a}$$

在这种情况下，应力 σ_θ 及剪应力 $\tau_{r\theta}$ 都等于零。这就是最簡单的徑向应力分布，以后米歇尔（J. H. Michell）曾用来求解几个重要的問題（参看第 71a 节）。

69. 雷萊

雷萊[即約翰·威廉·斯特路特（John William Strutt）][3]是第二代雷萊男爵（Baron Rayleigh）的長子，他出生于邻近特尔林（Terling）的朗格佛庄园（Langford Grove）。靠着他父亲的領地，在那里度过了大半世的生活。他在私家专設的学校里学习之后，1861 年进入劍桥的特棱尼梯学院。他作为一个大学在学学生由洛斯（Routh）教授单独教他数学和力学。洛斯是一个很著名的教师，雷萊对他非常欽佩。当雷萊后来充当皇家学会的主席时，有一次还提到洛斯，他說[4]："在劍桥我感謝他在数学方面給予我的教育和鼓励，我現在还能清楚地回忆到我那时对他的惊异之情。当我还是大学新生时，我看出他的学識是旣广博而又精深，向他提任何問題时他都能很快地予以解决……，我常常感覺到人們对洛斯的科学貢献估計得过低了。有人認为他旣是个献身于教学的人，应当对細小枝节也不遺余力。这种想法是很錯誤的……我想也許人們对当时数学教学方法的好处認識不清，到現在也許还在摧殘这个由洛斯博士研究出来的教学制度。当我举办后期科学事业时，我才感到再沒有机会去請教他，而深悔过去在劍桥学习数学課程的那些时間浪費得太可

[1] Ann. ponts et chaussées, 卷 6, 第 477～532 頁, 1883 年。并参看他所著"松散物质平衡理論的論文"(Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents)，巴黎出版。对于松散物质稳定的基本討論可参看佛拉門特的教本"結构稳定，材料抗力"（Stabilité des constructions, résistance des matériaux）1886 年于巴黎出版。

[2] 見佛拉門特的論文，刊在 Compt. rend. 卷 114, 第 1465 頁，1892 年。包沁涅斯克将此解答推广到斜力作用，見 Compt. rend. 卷 114, 第 1510 頁，1892 年。

[3] 雷萊的傳記刊在"約翰·威廉·斯特路特，第三代雷萊男爵"1924 年于倫敦出版，由他的儿子，罗伯特·約翰·斯特路特，第四代雷萊男爵所写出来的。

[4] 参看上面提过的傳記，第 27 頁。

惜了”。然而，雷萊同时也注意到一些“劍桥大学的坏习气”，提出該校有“把数学教学只看作为夸耀学校名誉的目的，而沒有把它看作求解科学問題的利器”的傾向。

在劍桥大学是沒有机会作实驗工作的。該校在雷萊求学的头几年，还沒有設物理課程，直到1864年秋季他才有机会听到斯托克斯教授的光学課程。这些講課給予他极深的印象，特别是关于实驗示教方式。前面已經說过，該校是沒有物理实驗室的，斯托克斯用了“最簡单实用的器具”作出他的实驗研究。

图 204 雷萊

雷萊是一个工作最有条理的人，因此在将近数学优等生考試时，他的成績逐漸上升，超过了洛斯班上所有的同学。1884年12月，他通过考試获得甲等优秀生的身分。在这次考試录取后他留在劍桥准备参加奖学金考試。他又想“开始作科学研究，可是他覺得这是一件非常困难的事。因为当时劍桥的設备很少。特别是他本人缺少实驗知識……。他从斯托克斯在教学中所标示的实驗中学到一些知識，他还想从这方面多学一点，但苦于找不到門徑。斯托克斯教授是非常和靄可亲的，每在講課之余回答各种問題。可是他想从斯托克斯那里学习使用这些仪器，却总是不容易达到目的……，他渴望能被邀帮助进行实驗工作，但沒有遇到任何反应，甚至連叫他把仪器拿出来或放起来的机会也沒有，因此他感到失望”[1]。

在理論研究方面是比較容易得到指导的。雷萊讀过斯托克斯和克尔文的許多重要論文，也研究过馬克斯威尔的偉大著作“电磁場的动力理論”(A Dynamical Theory of the Electro-magnetic Field)。他和台特并和馬克斯威尔互相通信。那时，馬克斯威尔定居在格侖萊尔(Glenlair)，但在数学优等生考試的时候总要来劍桥一次，于是他們就能聚会在一起。

1866年，雷萊被选为特棱尼梯学院的会員，次年他去北美作了第一次旅行。1868年回国后，他着手作出关于电学方面的一些实驗，为此目的他购买了一些簡单的仪器。大約在同一时期他讀了希姆霍茲的名著“声覚学”(Lehre von den Tonempfindung)，因而对于声学发生了兴趣[2]。他用共鳴器作出一些理論上和实

[1] 見雷萊自傳，第37頁。

[2] 見雷萊自傳，第50頁。

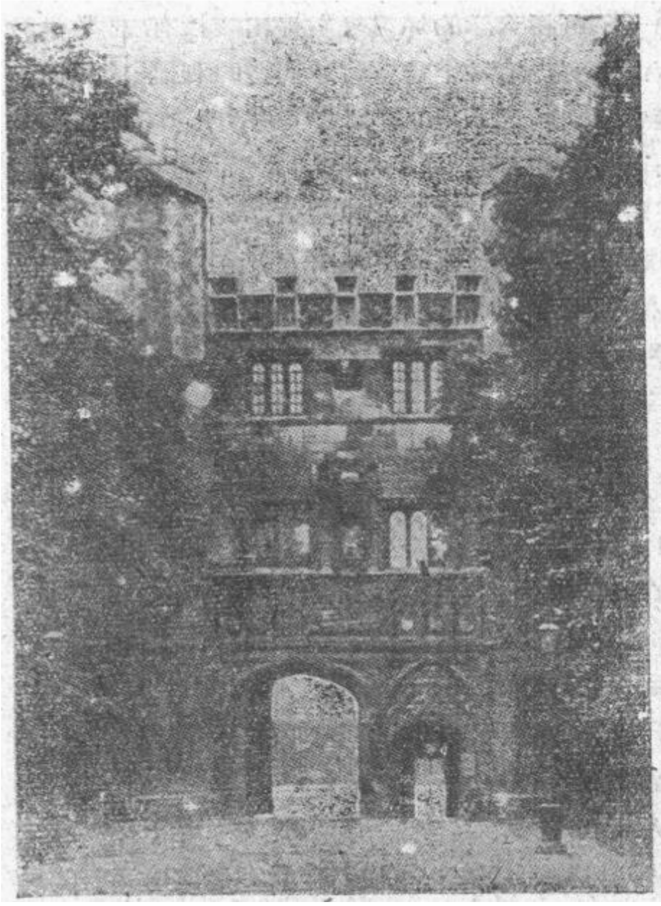


图　205　特棱尼梯学院

驗上的研究，并且写出一篇关于共鳴理論的論文[1]，这就是雷萊在声学方面写作的开始。以后，由于讀了廷道尔 (Tyndall) 的著作，使他对于为什么天空是藍色的問題进行了研究，于是发表了几篇关于光的理論的論文[2]。这些論文获得了馬克斯威尔和廷道尔的贊揚。

1871年，他結婚了，接着就退出了特棱尼梯学院会員的特惠身份。1872年，在生了一場很厉害的病以后，医师囑咐他必須在較热的气候下度过这一冬。于是他带了妻子和几个亲属坐上一艘可以在水上住家的帆船远航到尼罗河。远航中的生活是很单調的，但这对雷萊却很合适。他开始写出他那名著"声的理論" (The Theory of Sound)，他是"每天上午都在船仓里写这本书……这些时候，很难劝他上岸，縱令那儿有最美丽的庙宇他都不想去游覽"[3]。

1873年，雷萊的父亲去世，这位科学家此后就担負了管理产业的事务。他定居在特尔林，为了継續他的研究工作，他建立起一所小型实驗室。他継續写作他的书直到1877年才将它出版。希姆霍兹在"自然" (Nature) 杂志上对他这本书作过評論，根据希姆霍兹的建議将这本书譯成德文而在1878年出版。

1879年，馬克斯威尔去世，雷萊被选为劍桥的实驗物理学教授。根据他自己的經驗，他懂得給予学生以作实驗研究的机会是非常重要的。"在他来此以前，对于一般在学学生得到实驗教育的机会是不够的，它沒有办法达到希姆霍兹在德国所

[1] Phil. Trans. 卷 161, 第 77～118 頁, 1870 年发行。
[2] 見 phil. Mag. 卷 41, 1871 年发行。
[3] 見雷萊自傳, 第 62 頁。

制訂的水平……。幸亏雷萊重視发展一般的基本教育，他决定超出原先所实行的范圍进行大規模的扩展，为此就必需添置許多仪器……”[1]。为了償付这項費用，雷萊籌措了一笔基金，这笔基金就是他本人和底汪賽尔 (Devonshire) 侯爵两人捐献的[2]。

在管理实驗室这項工作中，雷萊得到格拉茲布洛克 (R. Glazebrook) 和蕭氏 (Shaw) 两人的帮助。那时，蕭氏正在写作“实用物理学”(Practical Physics)，其中就叙述了这所实驗室的早期实驗。雷萊教过一些基本課程如靜电与磁学、电流学、声学等；还教过电測方面的高深課程。但“当时劍桥的自然科学院仍然处于幼年时代，当然参加听卡文笛施实驗室 (Cavendish Laboratory) 的課的人数是不多的……”。第一次开課时听課的学生只有十六人，在雷萊担任講座的全部期間，差不多一直只有这些人数[3]。

1884 年，雷萊第二次到美国旅行，在巴尔的摩 (Baltimore) 听过克尔文公爵的講演。关于这些，过后他曾和他的儿子談論过他的經历，他說：“那是多么不平凡的一次講演啊！我一直認为他那天上午的講演就是从我們(和他)在一起吃早飯时所提出的那些問題里談起来的”。他的儿子問他：“不是所有美国的著名物理学家們都来听他的講演么？他們不是都希望他好好地准备一下么？”雷萊回答道：“恰好相反，他們那天所得的印象极为深刻，在休息时間总有不少人在交口称贊他”[4]。

1884 年年底，雷萊辞去了劍桥的教授职位又回到他的領地定居。在他的“书房”和他的实驗室里継續做着精深的科学工作直到他去世为止。

他也担任过很多社会公职。其中，他担任过皇家学院的自然科学教授(1887～1905)，皇家学会的主席(1905～1908)，以及劍桥大学的名誉校长 (1908 年起直到他去世为止)。他一生获得了不少的荣誉，包括 1904 年的諾貝尔物理学奖金和国家勛章。

雷萊在彈性理論中的主要貢献都包括在他所著“声学理論”一书中。在这部名著的第一卷中他討論了綫、杆、薄膜、板与壳的各种振动。作者指出工程师应用广义力和广义坐标这两个概念会得到很多好处。引用这些概念并应用貝替和雷萊的互易定理，使处理冗余杆結构能大大地得到簡化。这种研究不仅包括声的特性而且也包括无声振动 (non-sonic vibration)。雷萊解釋了使用正規坐标 (normal

[1] 雷萊自傳，第 105 頁。

[2] 关于这所实驗室成立的一些有趣的資料可参看“卡文笛施实驗室的历史” (A. History of the Cavendish Laboratory) 1910 年出版。

[3] 雷萊自傳，第 106 頁。

[4] 同上注，第 145 頁。

coordinates) 的好处，并且説明从振动分析中将速度等于零，能引出解静力問題的方法。这样，他得出用正规函数表示的杆、板和壳的变位；这些观念在工程上具有很重大的意义。

在求复杂系統的振动頻率时，他通过将运动方式假定为常規的形式将此問題轉变为一简单振蕩器的振动問題，从而得出了一个近似值。他又叙述了改进此近似值可能采取的步驟。这种不用微分方程而直接从考虑能量来計算頻率的观念是后来由瓦尔特·里茨 (Walter Ritz)[1] 推敲出来的。現在这个雷莱-里茨法，不仅在研究振动方面，而且在解决彈性理論、結构理論、非綫性力学以及其他物理学各分支部門的許多問題上都得到广泛应用。也許再沒有其他可以单独地利用的数学方法能够在材料力学和結构理論上引出这么多的研究成果了。

雷莱在几个复杂問題中用了他的近似法。在弦綫的振动方面，他指出当弦綫整个长度上的質量不是均匀分布时求近似解的方法，他又研究了将一小顆物質穿附在弦索上对頻率所发生的影响。在討論到杆件的縱向振动中，他估計了由于忽略掉不在軸綫上的各質点的横向运动的慣性所产生的誤差[2]。他指出近似法对圓杆計算的結果和根据普希罕默 (L. Pochhammer)[3] 提出的更精深的理論計算結果非常符合。此外，他又对具有旋轉慣性的杆件的横向振动的簡单理論作了修正[4]。

雷莱对薄壳的振动理論也作过重要的发展。他考虑了两类振动：(1)使壳的中央表面受拉伸作用的伸长性振动方式以及(2)弯曲性的或不伸长性的振动方式。在第一种情况下，壳的应变能与其厚度成正比；而在第二种情况下，则与其立方成正比。現在，根据对給定的位移，壳的应变能应尽量小的原則，雷莱断定“当厚度无限减小时，真正的位移将属于純弯曲一类，如果这样，便能满足給定的条件”。他应用这个結論檢算了[5] 圓柱形壳、圓錐形壳和球壳的弯曲性振动，都得到与实驗非常符合的結果。

雷莱在彈性力学方面有一个重要貢献沒有写入他的論著中，那就是彈性表面波的理論[6]。这种以他的名字命名的波，运动是在一彈性介質的表面上散布开来的，其形式和靜水表面被扰动时所产生的波形相似。正如雷莱所預見的，这些波在

[1] 里茨的論文，刊在 Crelle's J, 卷 85, 1909 年。

[2] “声学理論”卷 1, 第 157 节。

[3] J. Math. (Crelle), 卷 81, 1876 年发行。

[4] “声学理論”卷 1, 第 162 节。

[5] 同上注，第 2 版，卷 1, 第 396 頁。

[6] proc. London Math. Soc. 卷 17, 1887 年，或“科学論文集”(Scientific papers)，卷 2, 第 441 頁。

地震方面具有头等重要的意义。

70. 1867～1900 年間英国的彈性理論

雷萊的声学論著以及湯姆逊和台特的“自然科学”(参看第 57 节)問世以后对于普通物理学，特别对于彈性理論起了很大的影响。在十九世紀的最后 25 年間，英国彈性力学家們做出了許多优越的成績，本书只就工程师所最应注意的一些內容作一簡要的总結。

图 206 H. 藍姆

荷雷斯·藍姆爵士 (Sir Horace Lamb, 1849～1934)[1] 出生于斯托克波特 (Stockport, 靠近曼徹斯特)。他是一个棉織厂領工的儿子。在进入劍桥的特棱尼梯学院以前，他在家乡市立語文学校讀过书。1872 年，他毕业时获得第二名数学优秀生和第二名斯密士奖金，被留在特棱尼梯充任講师，直到 1875 年，才去澳大利亚阿迭萊德 (Adelaide) 大学充任数学教授；在那儿执教十年。以后回到曼徹斯特大学担任純粹数学教授(随后又担任应用数学)。他的教学时期延长到 1920 年为止，这时他被选为劍桥特棱尼梯学院的名誉董事，正是雷萊在劍桥大学講授数学的时期。听說藍姆不仅是第一流科学家而且也是一位天才的教师。

藍姆的主要成就是在流体动力学方面，但他也研究彈性理論，并且在这方面发表了几篇重要論文。根据雷萊在薄壳振动方面研究的結果，他提出了板与壳的理論并且研究雷萊的近似理論中所沒有考虑到的圓柱形壳和球壳的伸长性振动[2]。在討論矩形板各边緣上的边界条件中，他指出一块矩形板可用两对相等的力保持为一种互反曲面的形状，此两对相等的力系与此平板正交而作用于角隅上[3]。这个結果代表着平板弯曲的最簡单情况，嗣后被納台 (A. Nadai) 利用在驗証平板弯曲近似理論(克希霍夫的理論)的一个实驗[4]中。边界条件的另一个重要問題是在湯姆逊和台特合著的“自然科学”中提出来的。书中写道：“可惜数学家們至今还沒有解出，也許根本沒有想到去求解关于将一根寬而很薄的带条 (例如鐘表中的彈簧)

---

[1] 見“名人傳記字典” (Dictionary of National Biography)，牛津出版。

[2] Proc, London Math. Soc. 卷 21，第 119 頁，1891 年。

[3] 同上注，第 70 頁。湯姆逊和台特也在下列书中討論了这一情况，“自然科学”卷 2，第 656 节。

[4] 見納台的“彈性平板” (Elastische Platten)，第 42 頁，1925 年于柏林出版。

弯成一个圆圈那种美妙的問題"[1]。藍姆研究了沿薄带边緣的互反曲面弯曲(anticlastic bending)[2]并且在求解梁的問題中获得很大的进展[3]。他考虑一根具有狭窄矩形截面的无限长度的梁承受着間隔距离相等而方向則上下交替的一些集中力，簡化了属于二維問題的解式，并且对于某些情况得出了撓度曲綫的表示式。它証明在梁的高度比起长度来为很小时，基本的伯諾里弯曲理論是足够精确的。它也証明了由朗肯的和格拉斯霍夫的基本理論所給定的剪力修正值稍嫌过大，应該減低到約为原值的 75%。应該提到的藍姆的研究成果还有关于彈性球的振动理論[4]、半无限固体表面上彈性波的傳播[5]以及被两个平面所限界的固体内彈性波的傳播[6]。他也討論过本生曲杆的振动理論[7]。他和苏斯威尔(R. V. Southwell)一起研究的轉盘的振动对于工程师也具有特别重大的价值[8]。

勒夫(A. E. H. Love, 1863～1940)也是在我們所討論的这段时期内从劍桥大学出来的另一个彈性力学方面的著名人物[9]。他出身于上西馬尔(Weston super Mare)，是一个軍医的儿子，他进入沃尔夫罕普頓(Wolve-hampton)文法学校(1874年)。随后进了劍桥的圣約翰学院，1885年以第二名优秀生毕业。他終身不娶，从1887到1899年一直是圣約翰学院的一个会員，并且在他后半世一直主持牛津大学的遂德列安講座(Sedleian Chair)。他在工作上获得許多荣誉。在1894年他被选为皇家学会的会員，并与倫敦数学学会保持密切联系。

勒夫的主要事业是在彈性力学和地球物理学方面，不过他也象他的許多劍桥大学的同事們一样，在其他学科上也有很多成就。他的主要著作"数理彈性理論"(Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity)，在1892～1893年分作两卷出版。在初版时，該书的内容稍嫌抽象。在其后几版中，勒夫尽了很大的努力将它改写，因此能使它的内容更合于工程师的需要[10]。这是一本标准著作，从那时起他就成为这門学科的主要知識来源。这本著作包含了关于这門学科的一段簡短的历史評論以及許多新发現的彈性理論方面的参考資料。

[1] "自然科学"卷 2，第 717 节。

[2] phil.Mag. (5) 卷 31，第 182 頁，1891 年发行。

[3] 見 Atti. congr. intern. math. 在罗馬第四次会議，1909 年，卷 3，第 12 頁；Phil. Mag. (6)，卷 23，1912 年发行。

[4] Proc. London Math. Soc. 卷 13，1883 年发行。

[5] Trans.Roy. Soc. (倫敦) (A)，1904 年。

[6] Proc. Roy. Soc. (倫敦) (A)，1917 年。

[7] Proc. London Math. Soc. 卷 19，第 365 頁，1888 年发行。

[8] Proc. Roy. Soc. (倫敦)，(A)，卷 99，1921 年。

[9] 見勒夫的訃告，刊在 J. London Math Soc. 卷 16，1941 年发行。

[10] 本书第 2 版(1906 年出版)曾譯成德文，并在中欧和俄国广泛地采用。

勒夫在彈性理論上的写作是以薄壳理論开始的。联系着雷莱在壳的振动方面的研究(上面提过的)，勒夫用克希霍夫的方法对薄壳弯曲作了全面研究[1]，指出雷莱关于弯曲性振动方面的假設并不眞正地滿足边界条件。在他的书的后期版本中他采用了米歇尔(J. H. Michell)的彈性二維問題的解法[2]将平板的精确理論大大地加以推广。勒夫又研究出一个实心球的彈性平衡問題[3]，出版了"地球动力学的某些問題"(Some Problems of Geodynamics)一书[4]。其中包括許多地球物理学問題的独創論点。最后一章还包含有地震波傳播的討論，其中包括有对"雷莱波"理論的修正，使重力能考虑在內；以及对目前已命名为勒夫波的存在可能性作了重要說明。这种勒夫波(Love waves)能在成层介质中出現，并产生出在傳递体自由边界的平面中与傳播方向成横交的运动。


图 207 A. E. H. 勒夫

卡尔・庇尔逊(Karl Pearson, 1857～1936)[5]，另一位从劍桥大学出来的科学家，他对于发展彈性理論也有很大貢献。他在倫敦出生，并且在劍桥大学的高等学院(King's College)受教育。1879 年他以第三名优秀生毕业，以后在海德尔堡大学和柏林大学当过研究生。他最初发表的是些文学作品。起先他想做律师工作，1884 年放弃法律而从事应用数学，担任了倫敦大学的应用数学和力学教授。在該校的最初几年活动中，他对彈性理論就有許多貢献。1891 年他兼任格雷斯罕学院 (Gresham College)的教授在該校开講了普及教育。他是一位出色的教师，因而拥有大批的学生和临时参加的人們听課。1822 年他出版了"科学文法"(The Grammar of Science)一书，它对于青年一代起了很大的影响。从十九世紀末尾起，庇尔逊从事研究或然率理論，以及它在統計学和其他自然科学上的应用。1911 年他充任加尔頓(Galton)的优生学教授。

庇尔逊在彈性理論上主要的貢献是主編了他和伊薩克・塔德亨特(Isaak Todhunter)合写的"彈性力学史"(History of the Theory of Elasticity)一书，第一

[1] Trans. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 179, 1888 年。
[2] Proc. London Math. Soc. 卷 31, 第 100 頁, 1899 年。
[3] Proc. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 82, 第 73 頁, 1909 年。
[4] 本书在 1911 年发行。曾获得亚当斯(Adams)奖金。
[5] 見"名人傳記字典 1931～1940 年"牛津出版。

卷于 1886 年出版[1]，第二卷在 1893 年出版。塔德亨特是担任起草工作的，他只打算将属于数学性质的一些研究报告加以評述，而庇尔逊是完成这項工作的，他再将其范圍扩大使包括有物质上和工程上价值的一些論文的評述，并作了最后的定稿工作。这样，加工整理后的內容其实用价值大大地提高了。庇尔逊对于圣維南的著作特別重視，因此将对于这位科学家的著作的評論特别从第二卷中抽出来另外印成独立的一卷[2]，題詞为"献給热心于継承圣維南事业的人們"。

当庇尔逊在倫敦大学开始他的科学事业的时候，他发表过关于彈性力学上几篇創作性的論文，其中研究承受連續載荷系統的大梁的弯曲 (On the Flexure of Heavy Beams Subjected to Continuous Systems of Load)[3] 的一篇对彈性力学家是有很大价值的。在这篇著作中，庇尔逊将梁的弯曲理論推广到有体力(例如重力)作用着的那些情况。根据对以圓形及椭圓形截面等作例子的問題的全解中，庇尔逊断定"如果認为伯諾里-欧拉理論是一个完整的理論时，則在有連續載荷的梁的情况下就不正确了。换言之，它的結果只和眞实理論所得的非常近似而已"。庇尔逊的論文中有些是对工程师們有价值的。他研究了連續梁在彈性支座上的弯曲[4]，指出在这种情况下可得到包含有在五个連續的支座上的弯矩的方程式。他也討論了石坝內应力的重要实际問題[5]。

这段时期內研究弹性力学的英国科学家还有下列数人。拉摩尔 (J. Larmor) 将克希霍夫的动力比拟原理推广到本生曲杆上[6]。他也証明了[7] 如果一根受扭軸有一个圓形截面的圓柱形空洞且其軸綫和軸杆的軸綫平行，則接邻空洞处的剪力約为該处沒有此空洞时的最大剪力的两倍。查理士・施里 (Charles Chree) 是一位著名的地球物理学家，在他早期的几篇論文中也討論过彈性力学。他对那些由一个轉动的球、一个轉动的椭圓体以及轉动的圓盘所产生的应力进行过分析[8]。这些都是具有实用价值的，因为它对厚度变化的轉盘(例如在蒸汽透平和煤气透平中常用的)的应力分布的一般理論作出了一些修正。

[1] 这是为了紀念圣維南的。

[2] 庇尔逊著"圣維南的彈性研究" (The Elastical Researches of Barré de Saint-Venant)，1889 年于劍桥出版。

[3] Quart. J. Pure Applied Math. 第 93 期，1889 年发行。

[4] "数学通报"(The Messenger of Mathematics) 新的一組，第 225 期，1890 年。

[5] 見德雷珀斯(Drapers)的"公司研究报告"(company Research Memoirs) 刊在 Tech. 第 2 組，1904 年倫敦出版；又 Tech. 第 5 組，1907 年。

[6] Proc. London Math. Soc. 卷 15，1884 年。

[7] Phil. Mag. (5)，卷 33，1892 年。

[8] Proc. Cambridge Phil. Soc. 卷 7，第 201，233 各頁，1892 年；Proc. Roy. Soc. (倫敦) (A)，卷 58，1895 年。

我們已經知道，在十九世紀最后的 25 年中，英国科学家們得出了許多显著的成就。上面所提到的这些人不愿把他們自己置身于物理学的任一分支部門，在某些場合中，彈性力学似乎是一条显明的分界綫。英国这一段学术上的全盛时期是由我們适才討論过的这些人，以及由費朗（L. N. G. Filon），苏斯威尔（R. V. Southwell），台勒（G. I. Taylor）和其他教授們的參加下过渡到本世紀的。

71．1867～1900 年間德国的彈性理論

在十九世紀的末期，德国科学家在彈性理論方面完成了許多研究工作。在这一学科中出版了好几部书，其中最重要的是前面已經提过的（參看第 54 节）佛兰茲·紐曼所写的教程。有些紐曼的学生成为德国各大学的物理学教授，他們都能保持他們老师的学派傳統，在物理学方面制定了研究室和毕业后留校研究的制度，并且很注重彈性理論（附带于物理学內）。关于紐曼的早期学生克希霍夫和克列布希的成就，上面已經討論过了。至于紐曼的后期学生，其中最著名的乃是沃尔德馬尔·沃依特（Woldemar Voigt, 1850～1919）[1]。

沃依特出生于薩克逊尼州的萊比錫。他在該地受完中学教育后曾进入大学学习，1870 年被征入薩克逊尼軍队參加 1870～1871 年的普法战爭。战事結束以后，他决定进入哥尼斯堡大学，參加了紐曼的物理学实驗室那个班。他对彈性理論很有兴趣，并写出（1874 年）关于岩盐彈性的博士論文。1875 年，他充任哥尼斯堡大学的副教授，并且帮助紐曼修訂了一部分教学大綱。

1883 年，沃依特被选为格廷根大学教授，講授理論物理学。他也成立了一所实驗室，在該实驗室所作的一些实驗以彈性理論占最重要的部分。他特别重視晶体的彈性，在这方面他作出很显著的成績。他在这門学科上的許多著作都收集在“晶体物理教本”（Lehrbuch der Kristallphysik）[2]一书中，該书直到現在仍是这方面的一本重要书籍。

沃依特的研究工作最后解决了多年来关于少-常数和多-常数理論上的爭辨。这些問題是：“彈性各向同性体是用一个常数来确定，还是用两个常数来确定？并且，在一般情况下，彈性各向异性体是用 15 个常数来确定，还是用 21 个常数来确定？”渥賽姆（G. Wertheim）和克希霍夫两人的实驗不能解决这个問題，因为他們作实驗所用的材料組織不純。沃依特在他的实驗中却使用了由单晶体上沿不同方

[1] 关于沃依特的簡略傳記見侖治（C. Runge）的論著“沃尔德馬尔·沃依特”刊在 Nachr. Ges. wiss. 格廷根，数理类，1920 年出版。

[2] 1910 年由条布尼尔（Teubner）于萊比錫发行。并參看沃依特的报告“关于晶体彈性方面知識的新近报告”，（L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux），提离国际物理学会議，1900 年于巴黎。

向截下来的很薄的柱体，从这些柱体的扭轉和弯曲試驗中确定它們的彈性模量。另外，他研究了在均匀的流体靜压力作用下晶体的压縮。他所得的結果明确地反駁了根据少-常数理論得出的各彈性常数間的关系。这样一来，关于分子力的納維埃-泊松假說証明出是不成立的。

沃依特也研究过圣維南的棱柱杆縱向冲击理論(参看第 52 节)，他曾用金属杆作出一系列的試驗[1]，其結果与理論計算所得并不相符。圣維南的理論是根据这样的假定，即杆件間的接触是在杆端整个表面同一瞬时发生的。实际上这种情况是很难实現的，为了使他的实驗結果和理論符合，沃依特建議將两根杆件用一"过渡层"隔开，以防接触面不能完全接触。正确地选定过渡层的力学性質，可得出实际和理論相符合的滿意結果。这些实驗的主要困难是在于冲击的时間非常短促。更好地符合于圣維南理論的实驗是由兰姆騷尔 (C. Ramsauer) 得出的[2]，他用螺旋彈簧来代替直杆。这样，减小了縱向波傳播的速度，而且其振波沿彈簧杆通过并傳回的一段时間較之将直杆端部的微小不齐整弄平来傳遞振动所需的时間为长。还有另一种方法能使端部条件在冲击时更为明确，其法系采用有球面端部的杆子并且用赫茲的理論[3]来处理端部的局部变形。

工程师們非常重视沃依特和他的学生們所作关于闡明材料极限强度的概念的一系列的实驗研究[4]。采用由岩盐的大晶体上截得的試件进行实驗，他看到抗拉强度主要与試件軸綫对晶体軸綫所取的方位有关。它也和試件的表面情况有关。沃依特指出玻璃試件側面如有輕微的鏤刻細紋將引起它的抗拉强度大大地提高。此外，他指出在非均匀应力分布下，在一点上的强度不仅与該点应力的大小有关，而且也与点到点之間应力的改变率有关。例如，取岩盐和玻璃作实驗所得的拉伸与弯曲两者的极限强度相比較，他发現弯曲断裂时的最大应力約为拉伸断裂时的两倍。他又用綜合应力的方式做出很多試驗，以便校核摩尔的理論。所有这些試驗都是用脆性材料做出的，所得結果并不与理論相符。沃依特由此得出結論，認为强度問題是非常复杂的，要想提供一个单独的理論有效地应用到所有各种建筑材料上是不可能的。

---

[1] 見 Ann. Physik, 卷 19, 第 44 頁, 1883 年; 卷 46, 第 657 頁, 1915 年。

[2] 同上, 卷 30, 第 416 頁, 1909 年。

[3] 象这样的研究是由西雅士 (J. E. Sears) 完成的, 見 Trans. Cambridge phil. soc. 卷 21, 第 49 頁, 1908 年。并参看瓦格斯塔夫 (J. E. P. Wagstaff) 的論文, 刊在 Proc. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 105, 第 544 頁, 1924 年出版。

[4] 这些研究的主要結果由沃依特收集在一篇論著中, 刊在 Ann. physik. (4), 卷 4, 第 567 頁, 1901 年发行。

沃依特結合着他对晶体的研究，在彈性力学方面做了重要的理論分析。关于从晶体上截下的柱体扭轉和弯曲問題，他推广了圣維南理論，将它用到各种各向异性体的材料上去。对于平板因中央平面受力而产生变形的問題，这位科学家推导出[1]一个四阶偏微分方程，其应力函数必須能适合于各向异性材料的情况。他也研究过各向异性板的弯曲，建立了側向撓曲的微分方程[2]，应用它来討論这类板的振动。这样，他对于在各向异性圓板中有节綫的薩瓦特的实驗[3]給出了一个理論上的說明。分析节綫是一种檢查板料是否越出完全各向同性范圍的最敏感的方法。最后应該指出，沃依特是将張量和張量三联（tensor-triad）这两个概念最先引入彈性理論的人。这两个概念現在都被广泛地使用了。

在結束我們对紐曼的学生中較出名的彈性力学家的討論时，还必須提一提万格林（A. Wangerin），他研究了旋轉体对称变形的問題[4]；还有薩尔許茨（L. Saalschütz），他研究了棱柱杆产生巨大撓度的許多特殊情况[5]；以及波尔察朵（C. W. Borchardt），他有功于温度应力理論。正当杜哈美尔和紐曼只研究到圓柱体和球体两种情况的温度仅为徑向距离的函数时，波尔察朵用积分形式得出了此两者在任何温度分布方式下的解法[6]。他将这个方法推广到圓柱体和球体受任何表面力产生的变形問題上[7]。

图 208 H. 赫茲

海恩里希·赫茲（Heinrich Hertz）[8]所作的重要发展也应归属在这段时期内。赫茲（1857～1894）出生于汉堡的一个很富有的律师家庭。从他幼年时候起就表現出超越的学习能力，并且爱做机械工艺。他在中学时期参加了一所工业学校的夜班，学得了制图和使用測量仪器的經驗。毕业以后，他决定学习工程，于是在1877年进入慕尼黑工业学院。可是不久他覚得自己的

[1] "晶体物理教本"第689頁。

[2] 同上注，第691頁。

[3] Ann. chim. et Phys. 卷 40, 1829 年。

[4] Archiv. Math. 卷 55, 1873 年。

[5] 見薩尔許茨所著"受載杆件"（Der belastete Stab），1880年于萊比錫出版。

[6] 波尔察朵著"全集"（Gesammelte Werke），第246頁，1888年于萊比錫出版。

[7] 同上注，第309頁。

[8] 这位工作者的傳記，見"全集"中关于赫茲的介紹，卷1，以及希姆霍茲在卷3中的前言，1894年于萊比錫出版。

兴趣对純粹科学方面較为濃厚；因此，在慕尼黑剛讀滿一年之后，轉学到柏林大学，此时著名物理学家希姆霍兹和克希霍夫正在該校任教。

1878年10月，赫兹开始在希姆霍兹的物理实驗室学习；由于他以前在家中以及在慕尼黑有过一些經驗，使他的工作有較好的准备因而进展得很快。当时該大学的科学研究部向学生們頒布了关于电动力学的一个悬奖項目，赫兹决定在这方面从事首創性的研究。从他写給他父母亲的一些信件里，我們知道了他和希姆霍兹初次会見以及对这問題作初步討論的情况。赫兹使希姆霍兹得到极好的印象，因而供給他一間单独的房間和所需的一切設备。希姆霍兹对这个年青人的实驗极为重視，每天总要来他房間里和他討論研究的进程。赫兹不久就表現出第一流实驗家的才能。在1878～1879年冬天完成了研究，赫兹終于获得該大学所頒发的金质奖章。他继續研究电动力学，在1880年1月提出了他的博士論文，并获得了"至善至美"(summa cum laude)这个最难得到的荣誉。

1880年秋季，赫兹充当了希姆霍兹的助手，因此在他的工作中可以任意使用学校的任何仪器。在作牛頓色环的实驗时，他研究了彈性体的压縮理論，并在1881年1月把在該方面写出的一篇著名論文[1]向柏林物理学会提出。他不仅提供这个問題的一般解，而且将它应用到一些特殊情况，还編制了一个数值表来簡化实际应用。他又将他的理論推广到冲击方面，导出了計算两球冲击的持續时間和計算此种冲击时所产生的应力的公式。这篇論文不独引起物理学家的注意而且也引起工程师們的重視，在他們請求之下，他編写出那篇論文的另一修訂本[2]，其中增加了用球形物体和圓柱形物体作压縮实驗的說明。加压前在物体之一的表面上涂以一薄层烟炱，作为显現接触面的外形輪廓綫之用，他得出一个椭圓形的接触面，可精确地量出椭圓的軸綫。这样，他就能对他的理論得出一个实驗証明。

在研究彈性体受压时，赫兹对材料的硬度加以注意。他不滿意測量硬度的各种方法[3]，而引用了他自己的硬度規定。他主張采用能使接触面为圓形的物体(为了測量起見)，因此他利用一个具有一定半徑的球，将此球压在所研究的物体的水平表面上。他取定能使受試材料产生永久变形的載荷作为硬度量測的标准。用这个規定来研究玻璃的硬度(在破坏瞬时以前一直保持为彈性)时，他是取定沿接触面边界上出現第一条裂痕时的載荷作为測量硬度的准則的。赫兹的方法并沒有为

[1] J. reine angew. Math. 卷92, 第156～171頁, 1881年。

[2] 見"制造工艺促进会的討論"(Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses), 1882年11月于柏林出版。

[3] 他从下列书中找到这些方法的叙述。胡貝尼(M. F. Hugueny)著"物体硬度的实驗研究"(Recherches expérimentales sur la dureté des corps), 1874年于斯特拉斯堡(Strasbourg)出版。

一般人所接受，因为在延性材料中要找出永久变形开始时的載荷是非常困难的[1]。

1883 年年初，赫兹又研究了一个彈性問題。这个問題是研究浮在水面上的一块无限平板在一点上受正交載荷时的弯曲問題[2]。他发現在此載荷作用下板向下弯曲但在去載荷有一定距离处其撓度变为負值。此后，在一更大的距离处，又变为正值，以下照此类推。因此表面成波浪形，随着去載荷的距离的增加，波的高度就很快地減小。这样，他得出一个好象荒謬但可能是真理的結論，这个結論是：比水重的一块薄板，只要加載荷于其中心便可使它浮在水上。它的解釋是：由于薄板弯曲会得出薄壳的形状，它能压出較相当于它本身重量还要多的水量。

同年，赫兹解决了另一个重要的彈性問題[3]。他考虑一个长圓柱承受着垂直于其軸綫的載荷其集度沿圓柱长度方向上保持不变的情况。他得出这个問題的一般解，并且，作为一个特例，研究了象建造活动桥梁支座中所用的那种圓滚筒的应力分布。

1883 年，当他在希姆霍兹的实驗室做满三年助理工作之后，他就到基尔(Kiel)大学担任講师。1885 年被聘为卡尔斯鲁赫工业学院的物理学教授。在該校时期，他作出电动力学方面的著名研究。他发現了电磁波在空間的傳播，証明它是和光波及热波相似的。这样，他給馬克斯威尔的数学理論提供了实驗証明。1889 年赫兹被聘为波恩 (Bonn) 大学物理学教授。在該校时期他研究了稀薄气体中的放电，并且写出一篇关于力学原理的論文。这是他最后的著作，在 1894 年 1 月，他就在波恩去世了。虽然他在彈性理論方面的研究只占他的科学成就的一小部分，但他解出了一些困难的并且也是最富于实用价值的問題。现在，赫兹的彈性体压縮理論已在鉄道工程及机械設計中广泛地使用[4]。

普希罕默(L. Pochhammer, 1841～1920)的研究成果也属于这里所討論的一段时期。1876 年，这位德国科学家发表了关于圓柱体振动的一篇重要論文[5]。自从欧拉时代起，处理这个問題系假定在縱向振动时质点的徑向运动是可以不必計

---

[1] 虎勃曾試用赫兹的方法，他采用两根等直徑的圓柱体作为試件，其軸綫彼此垂直。見 Mitt. mech. tech. Lab. 1897 年于慕尼黑出版。

[2] 見怀顿曼 (G. Wiedemann) 的論文，刊在 Ann. 卷 22，第 449～455 頁，1884 年发行。

[3] Z. Math. u. physik, 卷 28，第 125 頁，1883 年。

[4] 見別拉結夫(H. M. Беляев)的"彈性体受压的局部应力"俄文本于 1924 年圣彼得堡出版。这个理論的进一步发展是在接触面上不仅取法向力而且也取切向力，經佛洛姆(H. Fromm)討論过，見 ZAMM，卷 7，第 27～58 頁，1927 年出版；及虎勃(L. Föppl)的"工程方面的研究" (Forschung Gebiete Ingenieurw)，第 209 頁，1936 年出版。并参看薩維林(M. M. Саверин)的"材料的表面强度" (Surface Strength of Materials)，1946 年于莫斯科出版。

[5] J. Math. (Crelle)，卷 81，第 324 頁，1876 年发行。

入的。普希罕默取消了这个假定，考虑了更普遍的振动方式。这样，他能算出对各种纵向振动方式下傳播速度应有的修正值。他也研究了弯曲性的振动方式。

在第二篇論文中[1]，普希罕默討論了梁承受着分布于其側面上的力的弯曲，并且指出中性軸并不通过截面的形心，因此通常計算弯曲应力的基本公式只能看作是第一次的近似值。对于一根圓形截面的悬臂梁，当載荷沿其頂部的母綫均匀分布时，他算出一个較精确的近似值。普希罕默曾将他的方法推广到空心圓柱形的梁和曲杆的計算上。

71 a．1867～1900 年間二維問題的解法

在十九世紀最后一段时期中，对于求解彈性力学的二維問題已有相当大的进展。这类問題有两种。如果一块薄板承受着作用于薄板中央面(我們可取 xy 平面作为这样的平面)的边界上的力，則在薄板两个表面上的应力分量 σ_z，τ_{xz} 和 τ_{yz} 都等于零，而且还可以假定板的全部厚度上的应力分量都等于零也不会有多大的誤差。这就是平面应力(plane stress)的問題。另一种二維問題是当一長圓柱或棱杆承受着分布載荷，載荷集度沿圓柱长度保持不变。在这种載荷方式下，在离两端較大距离处的部分主要是产生平面变形 (plane deformation)，即变形时在垂直于圓柱軸綫(我們可取 z 軸作为它的軸綫) 的一些平面內产生位移。在这种情况下，应变分量 ε_z，γ_{xz} 及 γ_{yz} 都等于零，因此我們只須考虑三个应变分量：ε_x，ε_y 及 γ_{xy}。这就是所謂平面应变(plane strain)。在这两种問題中，我們看到未知量的个数由 6 个减为 3 个。这自然是一种簡化的情形。

克列布希是第一个討論平面应力分布問題的人，他得出一个圓形薄板的解法(参看第 56 节)。另外一种最富实用价值的例子是由哥罗溫 (Х. С. Головин)[2] 解出来的。他研究了等截面的圓拱的变形和应力。認定这个問題是一个二維問題，他得出了图 209 所示受力方式的解。他发現在純弯曲的情况下(图 209a)，截面保持为平面，如同在曲杆基本理論中通常所假定的一样。不过他所发現的应力

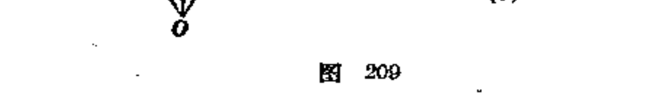


图 209

[1] 見普希罕默所著“彈性杆件平衡方面的研究” (Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes)，1879 年于基尔出版。

[2] Bull. Tech. Inst. 1880～1881 年于圣彼得堡出版。

分布并不与基本理論的应力分布方式相符，因为基本理論中假定縱向纖維仅承受簡单拉应力或压应力 σ_t，而哥罗溫却指出还有徑向作用着的应力 σ_r。在端部（图 209b）作用一力 P 产生了弯曲时，則每个截面上不仅产生法向应力，而且还有剪应力，剪应力的分布并不象基本理論所假定的一样呈抛物綫形。哥罗溫不仅算出曲杆的应力而且还算出它的撓度，应用这些撓度公式，他就能求解固端拱的超静定問題。由計算一般拱的尺寸中得到証明，基本理論在实际应用中是够精确的。哥罗溫的研究代表着在拱的应力分析上第一次应用了彈性理論。

因为現阶段的彈性理論的精确解还只能推导一些极簡单的情况，因此用实驗方法测定应力經常吸引工程师們的注意。馬克斯威尔业已指出用光测彈性法来测定应力，可是他的研究并没有受到当时一般工程师們的重視。經过了四十年之后，卡魯斯·威尔逊（Carus Wilson）[1]才再次用光测彈性法来测定应力。他采用这个方法研究一根矩形梁中央受載时的应力。他发覺測得的应力和用梁的一般公式計算而得的有很大的差异。斯托克斯提供了这种差异的說明，他主張該梁內的应力可用簡支梁（图 210b）中所产生的徑向拉应力（和无限平板的压应力相等但方向相反）迭加在一个半无限平板（图 210a）中所产生的簡单徑向应力分布上来进行計算[2]。这些拉应力的合力，对于梁的每一半来說，是由支座上的垂直反力 $P/2$ 和作用于 m 点处（图 210a）的水平力 P/π 来平衡的。因此，在梁的截面 mn 处，其弯矩为

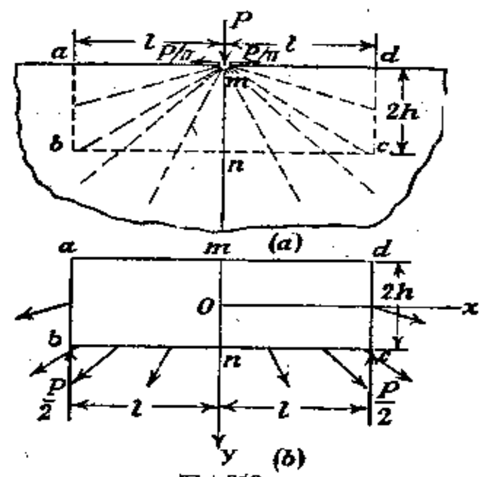


图 210

$$\frac{P}{2}l-\frac{P}{\pi}h$$

而拉力为 P/π。相应的法向应力 σ_x 将为[3]

$$\sigma_x=\left(\frac{Pl}{2}-\frac{Ph}{\pi}\right)\frac{y}{I}+\frac{P}{2\pi h}$$

威尔逊将这些应力迭加到半无限平板的徑向压应力上，得出了和他的光测彈性試驗一样的具有充分精确度的結果来。

美斯納格（A. Mesnager）的著作中列有光测彈性法测定应力的另外一个例子，[4]他用实驗方法校核了由作用于板中央面的集中力所产生的徑向应力分布。

[1] Phil. Mag. (5)，卷 32，1891 年。

[2] 斯托克斯說过他是从包沁涅斯克的书中得出这样的应力分布，見“位能的应用”1885 年出版。并参看斯托克斯的“数理論文集”（Mathematical and Physical Papers），卷 5，第 238 頁。

[3] 假定平板厚度等于单位元素。

[4] 国际物理会議（Congr. intern. phys.）卷 1，第 348，1900 年于巴黎出版。

我們可以看到，接近十九世紀末尾时，工程师們已經开始認識到光測彈性法的重要性了。在二十世紀的头几年中可以看到它的应用获得了飞速发展，到現在光測彈性法已經成为我們在应力分析实驗中最有力的一种工具。

在二維問題的理論研究上进一步得到发展是以采用应力函数为基础的。我們已經知道(參看第 49 节)，这种函数是艾雷首先介紹出来的，他曾用它来分析矩形梁的弯曲。艾雷将应力函数选擇得使其能滿足边界条件；不过他忽視了这一事实，即此应力函数也必須滿足圣維南所建立的相容方程 (Compatibility equation)。馬克斯威尔在他所著"互易图形、构架与力綫图"(On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces) 一书中改正了艾雷的錯誤[1]，建立了求应力函数的微分方程。他也指出，如果不存在体力，則求解两种二維問題的方程完全相同，因此应力分布和材料的彈性常数无关。

米歇尔 (J. H. Michell, 1863～1940)[2] 对二維問題的理論作了一个重要的补充。他在研究二維問題时[3]，証明了如果(1)不存在体力以及(2)边界是单連通的，則应力分布和各向同性板的彈性常数无关。如果边界是多重連通的，例如象多孔板一样，則只有在每个边界上的合力等于零时应力才与模量无关。

米歇尔将一般理論应用于特殊情况[4]，采用蚌包沁涅斯克和佛拉門特(參看第 68 节) 所得出的簡单徑向应力分布。这样他得出了作用力斜向着板直边的一块半无限板的解以及端部受載的一根楔形悬臂梁 (图 211)的解。从后一解式对变截面梁的求解結果可作出关于簡支梁公式的精确度的結論。

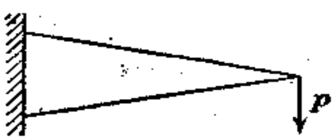


图 211

米歇尔又得出一力作用于一无限板內部一点处的問題的解，証明了在这里应力分布是和彈性常数有关的。在力作用点处的应力将变为无穷大，为了消除这个困难，必須假設在板中截有一小圓孔，并且有一种靜力等效于給定力的边界分布載荷作用于圓孔周边。这样就得到一个多重連通的边界。

米歇尔考虑了在圓盘內由作用于其边界上的集中載荷所产生的应力，得到如赫茲以前所得出的同样解答 (參看第 71 节)。然后他进而求解一个重式圓盘或滚筒在一个水平平面上的应力分布。米歇尔的論文里面也列有几幅解釋圓板中各种应力分布体系的重要图表。

---

[1] 見他的"科学論文集"卷 2, 第 200 頁。

[2] 米歇尔出生于沃大利亚。他在劍桥大学讀书，并在 1887 年得到碩士学位。在劍桥教了几年书以后，回到沃大利亚充任新金山(Melbourne)大学的教授。

[3] Proc. London Math. Soc. 卷 31, 第 100～124 頁, 1899 年发行。

[4] 同上注，卷 32, 第 35 頁, 1900 年。

第十二章

二十世紀中材料力学的进展

从十九世紀末叶起，材料力学已进入飞速发展的阶段。国际材料試驗会議引起越来越多的工程师和物理学家的重視，前者着重在研究材料的力学性能，后者着重在研究固体的物理性質。由于希姆霍茲和渥勒·齐門斯 (Werner Siemens) 的努力，在柏林成立了国立研究院 (Reichsanstalt) (1883～1887)[1]，其目的在于使物理学家的研究工作能与工业上的实际需要密切結合。1891 年，俄里佛·洛奇 (Oliver Lodge) 在英国学会作主席致詞中要大家注意德国国立研究院研究工作的进步并且强調英国工业应当成立同样的研究院[2]。由于这个建議的結果，学会便組成一个委員会指派委員前去波茨坦 (Potsdam) 参观国立研究院和試驗所。在委員会的报告中，强調着研究工作統一化具有相互密切校核的优点。报告也說到"現在还不需要也不便于爭夺或干涉私营的或其他試驗所中所进行的各种材料試驗工作，不过有許多材料强度和性質方面的特殊的和重要的試驗研究可由拟議中的单独試驗所来进行，将会得到很大便利"。1899 年，国家物理实驗所的計划被批准了，于是这个重要的机构便开始进行工作。在美国成立了国家标准局，它有一所很大的試驗所专門研究各种材料的力学性能。

私营工业开始認識到科学研究的重要性，很快地都建立了許多工业研究所。結果不仅材料力学研究的范圍增大了，而且工作的性質也改变了。新的实驗所促使工程师和物理学家們互相接触，因此在他們的工作中都密切注意到研究固体材料的結构和力学性能上的基本問題。当劳埃 (Laue) 发現 (1912 年) 了晶体中 X 射綫的干涉現象以后，便有可能根据这种現象来研究金属的結构。生产大粒晶体的技术也已发明，单晶体的研究大大地帮助了我們了解金属在各种条件下的力学性

[1] 关于这个机构的历史和工作，見斯塔克 (J. Stark) 所著"德国物理工程材料試驗五十年来的实驗与研究" (Forschung und Prüfung 50 Jahre physikalisch-technische Reichsanstalt)，1937 年于萊比錫出版。

[2] 見格拉茲布洛克 (Sir Richard Glazebrook) 所著"国立物理实驗室的初期" (Early days at the National Physical Laboratory)，格氏是該实驗室的第一屆負責人 (1900～1919)。

质[1]。从事于材料的力学性能研究的人数，和这方面所发表的論文都大量增加，所以我們只能在这些著作中提出少数最重要的来介紹。

在材料的这些实驗研究发展的同时，材料力学和彈性理論的应用范圍也迅速扩大了。在十九世紀时期已經在結构工程中正式采用了应力分析。在二十世紀初期机械工业中出現了一个新的趋向，它迫切需要对机械零件作出更精密的应力分析。这种新的趋向表現在机械設計方面新出版的一些书籍中，其中斯脫拉(A. Stodola)所著“汽輪机”(Die Dampfturbinen)便是一个鮮明的例子。因为以前这方面的书本对于机械零件的設計主要是根据經驗公式，而且只用到初級材料力学。斯脫拉在他的书中才根据彈性理論充分地应用了各种应力分析的方法。他討論过板与壳的应力，研究了温度应力和轉盘应力，并且特别注意到各类振动所产生的应力。他也注意到孔洞与嵌縫处所存在的应力集中，并且注意到几种用实驗作应力分析的方法。这本书在一定程度上引导出材料力学发展的方向，并且是一本用科学方法設計机械的重要著作。

72. 材料在彈性极限內的特性

格論尼逊(E. Grüneisen)[2]介紹了决定彈性模量的更为精确的方法。他利用光的干涉来测量微小的伸长，指出象鑄鉄那样的材料在較小应力下(不超过140磅/吋²)完全能服从虎克定律，并指出布尔芬格(G. B. Bülffinger)[3]与霍芝肯逊[4]所提出的并广泛地被巴赫[5]与修尔(W. Schüle)[6]采用过的指数公式 $\varepsilon=a\sigma^m$ 在极小的变形情况下也完全不能适用。对于不服从虎克定律的材料，美姆基(R. Mehmke)[7]曾提出各种应力-应变公式来作过討論。

用单晶体試件进行試驗指出模量和晶体的方位有着显著的关系。例如，图212中便指出鉄的模量 E 与 G 的差别[8]。有了这个单晶体的資料以后，就使得計算多晶体試件的模量平均値的方法发展到将实驗結果計算得相当精确的程度[9]。

---

[1] 叙述单晶体粒的最重要书籍有：施米德(E. Schmid)和波雅斯(W. Boas)合著的“晶体塑性”(Kristall-plastizität)，1935年于柏林出版；以及艾兰爾(C. F. Elam)的“金屬晶粒的擘动”(The Distortion of Metal Crystals)，1936年于牛津大学出版社发行。

[2] 格論尼逊的論文，刊在 Verhandl. physik. Ges. 卷4，第469頁，1906年。

[3] 布尔芬格的論文，刊在 Comm. Acad. Petrop. 卷4，第164頁，1729年。

[4] 霍芝肯逊的論文，刊在 Mem. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc. 卷4，第225頁，1822年。

[5] 巴赫的論文，刊在 Abhandl. u. Ber. 1897年于斯图加特发行。

[6] 修尔的論文，刊在 Dinglers Polytech. J. 卷317，第149頁，1902年。

[7] 美姆基的論文，刊在 Z. Math. u. Physik. 1897年。

[8] 見施米德与波雅斯合著的书，第200頁。

[9] 波雅斯与施米德合写的論文，刊在 Helv. phys. Acta, 卷7，第628頁，1934年。

利用光的干涉，已研究出在"完全彈性材料"中虎克定律有微小的偏差，它指出石英单晶体中的滞变回綫(hysteresis loops)和彈性后效(elastic aftereffect)能完全用材料的温差彈性和压电性(piezo-electric)来解釋[1]。

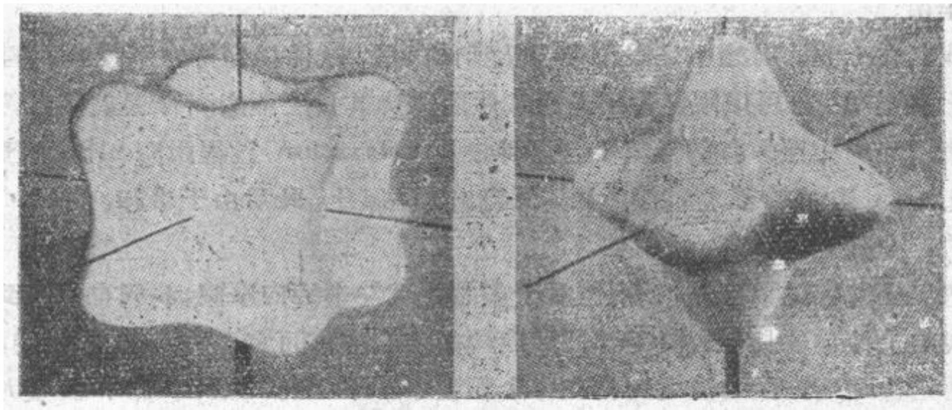


图 212 鉄的模数 E 与 G 的差异

克尔文[2]已指出过，如果在非常緩慢加載的情况下进行拉伸試驗，則試件的温度与其周圍的温度保持相等，应力应变間的关系可用直綫 OA 来表示(图 213a)，該直綫的斜率表示在等温情况 (isothermal conditions) 下模量 E 的大小。如果拉力載荷是很快地加上去的，那就沒有足够的时間使温度改变，于是得出直綫 OB 代替了直綫 OA，而且在絕热情况(adiabatic conditions)下所得的模量 E 通常較等温情况下所得的为大。由于試件的突然延伸，它的温度将較室温为低。如果試件在不变載荷下經过充分长久的时間，它就会逐漸上升到和室温相等的温度，結果試件发生了附加延伸(由图中水平綫 BA 来表示)。这个伸长量就称为彈性后效，它是由于材料的温差彈性所引起的。如果在温度达到完全均衡以后，突然取去試件上的載荷，它的絕热收縮可用图 213a 中平行于 OB 的 AC 綫来表示。由于这个迅速的縮短，試件的热度又上升，而最后降到室温的冷却过程将使它更加收縮，由 CO 来表示。由此可知，使試件在絕热情况下产生变形，然后給以相当时間达到温度均衡，可描出象平行四边形 $OBAC$ 所表示的一个完整的循环。其面积表示每一循环所消耗的机械能。在这个推論中所假定的絕热变形，实际上，在每一循环过程中总会有一些热交換的。因此，可得出如图 213b 所示的回綫以代替平行四边形。絕热模量和等

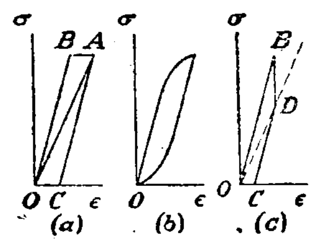


图 213

[1] 約菲(A. F. Joffe)的論文，刊在 Ann. Physik，第4組，卷 20，1906 年。

[2] 見克尔文所著"彈性学与热学"(Elasticity and Heat)，第 18 頁，1880 年于爱丁堡出版。

溫模量的差值通常是很小的[1]，而且每一循环中机械能的損失也是很小的。但是如果象在振动中一样发生継續不断的許多次循环，机械能的損失将成为重要因素，必須加以考慮，因为它們相当于一般所称的內摩擦(internal friction)会对振动起阻尼作用。

我們在上面的討論中是假定当突然延伸以后，試件仍保持在不变載荷的作用下的。換言之，也可以假定为延伸的試件能保持其长度不变。于是試件的热度上升将使原先的作用力有些微減小。这种張弛(relaxation)过程由图 213c 中垂直綫 BD 来表示。現在突然将試件放松，便得出 DC 部分，此后由于冷却，又得 $OBDC$ 循环的閉合綫 CO。

我們已考察过单晶体試件，但对于多晶体試件中的內摩擦，我們也将看到有同样的現象。晶体伸长时的溫差彈性效应視晶体的方位而定。由于这个事实，多晶体試件延伸时所产生的溫度变化在每个顆粒中都不相同，因此我們不仅要考慮試件与其周圍环境之間的热交換，而且也要考慮各个晶体之間的热流。由于顆粒中所发生的热与其体积成正比，热交換又視其表面积大小而定，显然顆粒大小的減小将对溫度均衡有利，但机械能的損失将增多。这是有很重要的实际意义的，因为在許多情况中弹性系統的振动阻尼主要視材料的內摩擦而定。要想在这种系統中增加阻尼作用，必須采用顆粒很小的材料。

在这里的討論中，試件的变形是假定为完全彈性的(应力很小时通常可以这样假定)。在較大应力时，內摩擦現象愈趋复杂，因此我們不仅要考慮上述的由于热交換所引起的机械能損失，而且要考慮每个顆粒內部由于塑性变形所引起的机械能損失[2]。

73. 脆性材料的断裂

近年来在研究脆性材料(例如玻璃)的断裂方面获得了显著的进展。玻璃的拉伸試驗通常得出很小的极限强度值(只达到 10^4 磅/吋^2)，若取彈性模量 $E=10^7$ 磅/吋^2，則只要作出每立方吋 5 磅-吋的功就能使这种材料发生断裂。同时，根据将分子分裂时所需的力来計算，其能量要較上面所引的数字大到 30,000 倍之多。

---

[1] 对于鋼料来說，大約为 1/3 %。

[2] 測量各种材料阻尼能力的許多研究工作由洛威特(Rowett)做出，見 Proc. Roy. Soc.(倫敦)，卷 89，第 528 頁，1913 年，最近又由虎勃 (Otto Föppl) 及其助手們在布倫斯威克 (Brunswick) 的沃勒学院 (Wöhler Institute) 做过。参看 VDI，卷 70，第 1291 頁，1926 年；卷 72，第 1293 頁，1928 年；卷 73，第 766 頁，1929 年。齐勒(C. Zener)和他的助教們研究并指出內摩擦的溫差彈性原因的重要性。参看 phys. Rev. 卷 52，第 230 頁，1937 年；卷 53，第 90 頁，1938 年；卷 60，第 455 頁，1941 年。这些研究的結果都收入齐勒所著“金属的彈性与非彈性”(Elasticity and Anelasticity of Metals) 一书中，1948 年出版。

为了解释这个差异，格利菲斯（A. A. Griffith）提出了一个理論[1]，他假定玻璃强度之所以大大减低是由于存在着作为应力激升物（stress raisers）看待的极細微裂痕所致。假定裂痕为一个狭长的椭圓孔，并且用求定平板中繞一个椭圓孔的应力分布的著名解式（該平板系沿一个方向均匀延伸，如图214所示），他求出，由于孔的存在，平板（厚度为一个单元）的应变能将减少

$$\frac{\pi l^2\sigma_0^2}{4E}, \tag{a}$$

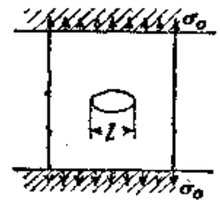


图 214

式中 l 为裂痕长度，板厚取为一个单元。認定 σ_0 为裂痕开始横越平板而扩展以至发生断裂时应力的大小，格利菲斯观察到这种开裂在不作任何額外的功时，仅在下列条件下，即由于裂痕长度的增量 dl 使表面能量（surface energy）的增加恰巧和相应的平板应变能的减少互相抵消时才有可能。由此得出下式

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{\pi l^2\sigma_0^2}{4E}\right)dl=2\ S\,dl \tag{b}$$

式中 S 为表面拉力（surface tension）。他从此式得出

$$l=\frac{4SE}{\pi\sigma_0^2} \tag{c}$$

这样，他如果先从拉伸試驗中得出玻璃的抗拉极限强度 σ_0，便能算出裂痕的长度。取表面拉力 S 为 5.6×10^{-4} 公斤/厘米[2]，并将 $E=7\times10^5$ 公斤/厘米^2，$\sigma_0=700$ 公斤/厘米^2 代入，他得出 $l\approx1\times10^{-3}$ 厘米。

为了証实他的理論，格利菲斯用薄玻璃管作了內压力实驗。在管子表面上平行于管子軸綫划上（用金剛鉆）不同长度的人为裂痕，通过实驗求出 σ_0 的临界值。它和理論公式（c）所得的結果相符。格利菲斯更用纖細的玻璃絲作出进一步的实驗，发覚当玻璃絲的直徑为 3.3×10^{-3} 毫米时，其抗拉极限强度等于 3.5×10^4 公斤/厘米^2。此值較上述的抗拉极限强度要高出50倍。根据格利菲斯的理論，玻璃絲之所以有比較大的强度可解釋为在拉成細絲的过程中，原先垂直于纖維长度方向的裂痕都被消灭之故。格利菲斯注意到細絲在存放一段时間以后会失去部分的强度，他又在剛拉成时立刻进行試驗，得出当細絲直徑为0.5毫米时极限强度竟达

[1] 格利菲斯的論文，刊在 Trans. Roy. Soc.（倫敦），（A），卷221，第163頁，1920年。并参看 Proc. Intern. Congr. Applied Mechanics，第55頁，1924年于德尔夫特（Delft）出版。并参看斯米加（A. Smekal）的論文，刊在"物理与工程力学手册"（Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik），卷4，第1頁，1931年发行。

[2] 格利菲斯采用熔状玻璃在各种溫度下作出試驗，然后将試驗結果通过外插法得出 S 值来。

到 6.3×10⁴ 公斤/厘米²。这个数值約为考虑分子力計算出的理論强度的一半。所有这些实驗清楚地証明了在脆性材料中由于內部存在着細微裂痕的疵点，抗拉强度将大大地減低。

对此問題作深入研究可用单晶体試件进行拉伸試驗。約非(A. Joffe)[1]用岩盐作为試件，他发现如果在室溫的空气中进行試驗，該种材料的抗拉极限强度仅为45公斤/厘米²；如果将同一試件在热水中进行試驗，到达屈伏点时，其应力为80公斤/厘米²，以后是塑性延伸，最后断裂时的应力为16,000公斤/厘米²，此值較兹晏斯基(F. Zwicky)[2]算出的理論强度20,000公斤/厘米²已相差不远。这些实驗說明了試件表面光滑对抗拉强度起了很大的作用[3]。

最有意义的关于云母片抗拉强度的实驗是由阿洛万(E. Orowan)[4]作出来的。他指出如果用一叠云母片来代替图215*a*所示的拉伸試件(从一張云母片上割下来的)进行試驗，并用夹鉗*A*使*mn*一段面积上产生拉力，如图215*b*所示，則极限强度約增加十倍。这里又一次証明了沿試件(*a*)纵向一边的疵点能使强度显著地减低，因此采用象(*b*)那样的装置方式以消除这些影响，就能得出較高的极限强度值来。

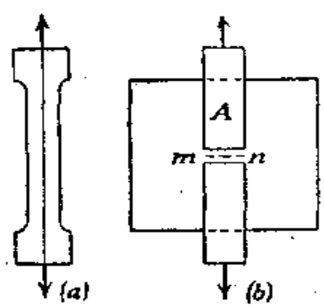


图 215

如果脆性材料的强度由于疵点存在受到很大的影响时，从理論上似可推定，极限强度值是和試件的大小有关的，因为尺寸加大时，存在疵点的机会也較多，极限强度值就較小。試件尺寸的影响在許多脆性断裂的例子中已被引起注意，例如由冲击試驗[5]或疲劳試驗[6]所发生的脆性断裂，就作过不少的研究，但根据統計資料来解释这一事实还是在以后由魏布尔(W. Weibull)[7]所完成的。他指出对于某一給定的材料，如果我們用两种不同体积 V_1 和 V_2 但几何相似的試件作出两組拉伸試驗时，其相应的极限强度值将成如下的比例

$$\frac{(\sigma_{ult})_1}{(\sigma_{ult})_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{a}$$

[1] 見 Z. Physik, 第286頁, 1924年。并参看 Proc. Intern. Congr. Applied Mechanics, 第64頁, 1924 德尔夫特。

[2] 兹晏斯基的論文，刊在 Physik. Z., 卷24, 第131頁, 1923。

[3] 施米德与波雅斯合著的书对于約非效应有过深入的討論，見該书第271頁。

[4] 見 Z. Physik, 卷82, 第235頁, 1933。

[5] 察比(M. Charpy)的論文，刊在 Assoc. intern. essai matériaux, 在紐約举行的第6次会議, 1912, 卷4, 第5頁。

[6] 皮特逊(R. E. Peterson)的論文，刊在 J. Applied Mechanics, 卷1, 第79頁, 1933。

[7] 魏布尔的論文，刊在 Roy. Swed. Inst. Eng. Research, Proc., 第151期, 1939 斯德哥尔摩。

式中m为材料常数。决定出 m 以后,我們便能从(a)式求出試件任何尺寸的 σ_{ult} 值。这种实验是由达維靖可夫(H. H. Давиденков)[1] 做出来的。他利用含磷量很高的鋼料作成两种不同直徑 d (10 毫米及 4 毫米) 和不同长度 l (50 毫米及 20 毫米)的試件进行实驗,得出 σ_{ult} 的两个値来 (57.6公斤/毫米^{2}及65.0公斤/毫米^2)。于是由(a)式得出 $m=23.5$。采用这个 m 值,計算出 $d=1$ 毫米、$l=5$ 毫米的試件的极限强度为 77.7公斤/毫米^2。实驗所得数值为75.0公斤/毫米^2,因此理論和实驗是相当符合的。

魏布尔应用同样的統計法計算(在前面提过的論文中)矩形梁受純弯曲时的极限强度,得出如下的比例

$$\frac{(\sigma_{ult})_{弯}}{(\sigma_{ult})_{拉}}=(2m+2)^{1/m} \tag{b}$$

这一公式也被达維靖可夫的实驗所証实。从試驗中他得出此比值为 1.40, 而理論計算的数值为 1.41 (根据 $m=24$ 計算)。

魏布尔的論文里还討論了其他几种有实用意义的应力分布型式。也提到几种实驗研究,其結果証明与統計理論充分符合。当然这个理論只能应用于脆性断裂。如果某一材料在断裂以前呈現出显著的塑性变形,它能减弱所有"疵点"处的局部应力集中,因之破坏时可按平均应力来計算。

脆性材料在学术試驗中,一般都将試件承受压力,但很难在这些試驗中得出均匀分布的压应力。由于試件与試驗机平台間接触面上的摩擦阻止了側向膨胀,因此在这些区域的材料便处于三向受压的情况中。結果,靠近接触面处的材料保持完整无损而試件的各边都被压碎了。为了消除摩擦作用,虎勃 (A. Föppl) 用石蜡[2]涂在接触面上,在这种情况下破坏的形状便和以前所得到的完全不同。立方体試件被分裂成和側边相平行的許多薄片。如果在压力試驗中使用圓柱形試件(其高度較直徑大 2~3 倍),在中間的一段上具有接近均匀的应力分布,这样,端部效应实际上已經不存在了。另外一种产生均布受压的方法是由齐貝尔 (E. Siebel) 和彭浦(A. Pomp)[3] 两人提出来的,如图 216 所示。圓柱体試件放在两个圓錐形接触面之間受压,此圓錐面的底角 α 等于摩擦角。如此总压力将与圓柱体試件的軸綫相平行。

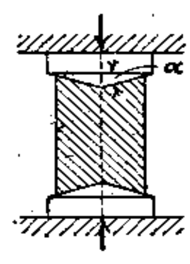


图 216

[1] 他的論文有英譯本,見 J. Applied Mechanics, 卷14, 第63頁, 1947。

[2] 見 Mitt. mech. tech. Lab. 第27期, 1900 慕尼黑。

[3] 見 Mitt. Kaiser-Wilhelm Inst. Eisenforsch. 卷9, 第157頁, 1927年于杜塞尔多夫 (Düsseldorf) 出版。

用脆性材料受很高的流体靜压力所作出的实驗指出了在这种情况下脆性材料会呈現出塑性材料一样的性质[1]。卡尔曼(Theodore von Kármán)[2]用大理石和砂岩作成圓柱体試件,使产生軸向压力和側向压力,得出了在塑性材料(例如銅)中所經常产生的受压桶形。

74. 延性材料的試驗

近来在单晶体試件变形的研究方面給予我們許多有关延性材料应变的新知識。这些研究[3]已揭露了当一个单晶体延伸时的塑性变形系由材料在一定方向上沿某一結晶平面的滑移所造成。例如,如果我們取具有面心(face-centered)立方形格子結构的鋁单晶体試件进行試驗(图 217),滑动将沿平行于八面晶体面之一发生(例如 abc),而其滑动方向将平行于三角形之一边。在拉伸試驗中,試件所发生的滑移将不在最大剪应力所作用的那个成 45° 的平面上发生,而是发生在八面晶体最不利方位的平面上。这就說明了我們在試驗单晶体的試件时,所得出試件在屈伏开始时的拉伸載荷值会參差不一的緣故。我們看出这些数值不仅和材料的力学性质有关,而且和晶体軸綫对試件軸綫的方位也有关。

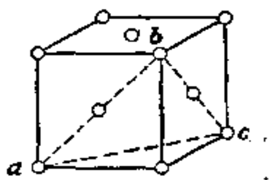


图 217

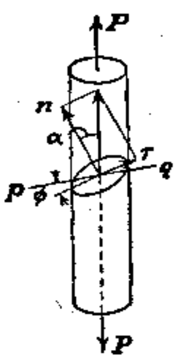


图 218

例如,在下述(单晶体)拉伸試件中(图 218),假定截面积为 A,八面晶体滑动面最不利方位的方向由法綫 n 来确定,滑动的方向由 pq 綫来确定。則作用于滑动面上的剪应力为

$$\tau=\frac{P}{A}\cos\alpha\sin\alpha \tag{a}$$

实驗証明滑动的开始不仅决定于 τ 的大小,而且須决定于沿滑动方向 pq 这个应力的分量 $\tau\cos\phi$ 的大小。当此分量达到某一定值 $\tau\cos\phi=\tau_{cr}$ 时,便开始滑动。代入(a)式,得

$$\tau_{cr}=\frac{P}{A}\cos\alpha\sin\alpha\cos\phi \tag{b}$$

由此可見,当 τ_{cr} 对于某一給定材料为一定值时,开始屈伏时的載荷 P 須視 α 及 ϕ 角之数值而定。

由于滑动而产生的延伸过程如图 219 所示。我們可假定它是按两个步驟发生

[1] 見刻克(F. Kick)的論文,刊在 VDI, 卷 36, 第 278, 919 頁, 1892 年,又亚当斯(F. D. Adams)及尼可逊(J. T. Nicolson)合写的論文,刊在 Phil. Trans. 卷 195, 第 363 頁, 1901。

[2] 見 VDI, 卷 55, 第 1749 頁, 1911。

[3] 見以前提过的艾兰姆,施米德和波雅斯所著的一些书。

的：(1)沿滑动面平移(图 219 b)，(2)然后試件向原先方向轉动一个 β 角(图 219 c)。从这个伸长的机械作用，很明显地看出：(1)拉力 P 的方向与滑动面間的角度在扭曲时有了改变，(2) 試件的原始圓截面变成了椭圓，其主軸的比例等于 $1:\cos\beta$。

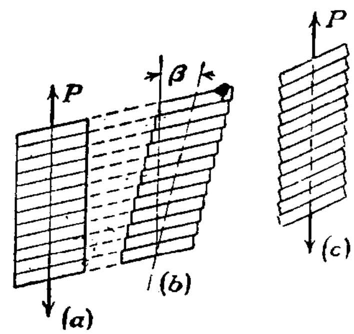


图 219

用单晶体作出的許多实驗，所得結果都能符合上述結論。例如，图 220 中表示一个拉伸过的銅-鋁单晶体試件[1]。同样的一些实驗也証明了滑动开始时 τ_{cr} 的数值通常是很小的。图 221 表示在不同温度下試驗单晶体鋁試件所得剪应变和剪应力之間的关系[2]。可見 τ_{cr} 的数值是很小的，不过为了继續

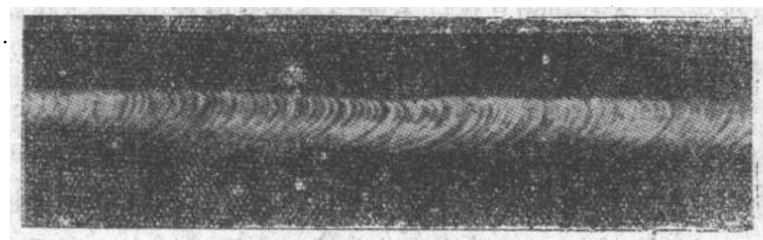


图 220 一个拉伸过的銅-鋁单晶体試件

滑动所需 τ 的大小将逐漸随着变形而增大。这就是材料**应变硬化** (strain hardening) 的結果。

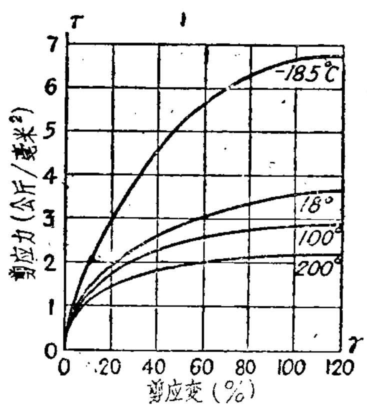


图 221

根据考虑分子力的計算方法所得的 τ_{cr} 值是很大的。这說明了滑动的过程并不单独地只包括原子面之間的平移；我們还必須假定由于存在某些局部疵点，在一个較小的力的作用下，会从这些疵点开始滑动而扩展到整个滑动面。解說这种滑动可能性的模型(滑动是由疵点处开始的)已經由普兰道尔 (L. Prandtl)[3] 加以描述。另外一种力学模型是由台勒 (G. I. Taylor)[4] 提供的。假定在原子分布中有一种局部扰动 (一种"錯位")，他指出这种扰动在一个

[1] 見艾兰姆所著"金属晶粒的變动" (The Distortion of Metal Crystals)，第 182 頁，1935。

[2] 見波雅斯与施米德合著的論文，刊在 Z. Physik，卷 71，第 703 頁，1931。

[3] 这个模型經普兰道尔在彈性理論一次課堂討論中提出来討論过，1909 年于格廷根，其詳細記叙刊在 ZAMM，卷 8，第 85～106 頁，1928。

[4] Proc. Roy. Soc. (倫敦)，卷 145，第 362～404 頁，1934。

极小应力 τ_{cr} 的影响下将在晶体中沿滑动面移动,同时这种扰动也会使晶体的一部分对其他一部分产生相对位移。台勒应用他的模型不独能説明在极小的 τ_{cr} 值下就开始滑动,而且也能説明如图 221 中的曲綫所示的应变硬化現象。

对通常的多晶体試件試驗的結果能更好地明了有关单晶体試件性質的知識。依尹(J. A. Ewing)和罗逊海恩(W. Rosenhain)[1]用磨光的鉄質拉伸試件作过很有意义的实驗。用显微鏡观察金属的表面証明了卽使在比較低的拉伸載荷下,"滑脫带"(slipband)仍然在一些顆粒的表面出現。滑脫带表明了在这些顆粒中滑动是沿一定結晶平面进行的。由于一个单晶体的彈性在各个方向上可以大不相同,又由于晶体的分布是不規則的,因而拉伸試件的应力也不是均匀分布的。在平均拉应力达到屈伏点的数値以前,滑动将在个别晶体內最不利的方位上发生。如果从这样一个試件上卸去載荷,业經滑动的晶体已不能完全恢复原状,結果,在此卸載后的試件內留下了一些殘余应力。試件中有些后效(aftereffect)也可說成为起因于这些应力的作用。在加載卸載之間,个别晶体的屈伏也会导致能量的損失,并会增加滞变回綫(参見第 72 节)的面积。如果使試件第二次再承受拉伸試驗,則已滑动过的顆粒将不在拉伸載荷达到第一次加載的数値以前屈伏。只有当載荷超过該値时才再开始滑动。如果試件在前述的拉伸試驗以后再来承受压力,則所产生的压应力連同殘余应力(由上次作拉伸試驗时留下来的)将在平均压应力达到試件由原始状态产生滑脫带时的数値以前,使处在最不利方位的晶体屈伏。这样一来,拉伸試驗循环提高了拉伸方面的彈性极限,但压縮方面的彈性极限却因此減低了。由此可見,考虑个别晶体的滑动以及考虑由該滑动所产生的殘余应力就能給包兴格效应(Bauschinger effect)作了解釋[2]。

在研究建筑鋼的抗拉强度时,工程师們特别注意到在屈伏点上突然伸长的現象。拉应力达某一定値时,拉伸載荷发生一突然下降,此后金属在稍低的应力下急遽伸长,这个事实已为人所共知。巴赫[3]对此应力的两个数値取名为屈伏点的上限和下限。进一步的实驗指出,屈伏点的下限受試件形状的影响較上限为小。因此它更具有实用意义。弯曲和扭轉实驗指出,屈伏的特性綫(路德士綫——应为契尔諾夫綫,譯者注)在比均匀应力分布情况下高得多的应力中出現,因此屈伏开始不仅和最大应力的大小有关而且也和应力梯度有关。最近在納台的領导下作出了鋼

---

[1] Trans. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 193, 第 353 頁, 1900。

[2] 監金 (C. F. Jenkin) 做出一个能說明滞变回綫和包兴格效应的模型。見工程界, 卷 114, 第 603 頁, 1922。

[3] 巴赫的論文,刊在 VDI, 卷 58, 第 1040 頁, 1904 年;卷 59, 第 615 頁, 1905。

在屈伏点时的一些重要实驗。它們指出屈伏的开始极大部分要依靠应变率[1]。图 222 中的曲綫表示軟鋼在一个較广泛的应变率范圍內得出的一些結果$\left(u=\frac{d\varepsilon}{dt}=9.5\times10^{-7}/\text{秒}\text{ 到 }u=300/\text{秒}\right)$。可見不仅屈伏点,而且极限强度和总伸长都在很大程度上和应变率有关。

为了說明鋼在屈伏点时的突然伸长,有人[2]認为顆粒的边界系由脆性材料組成并且它們形成了一种剛性骨架在較低的应力下能阻止顆粒的塑性变形。要是沒

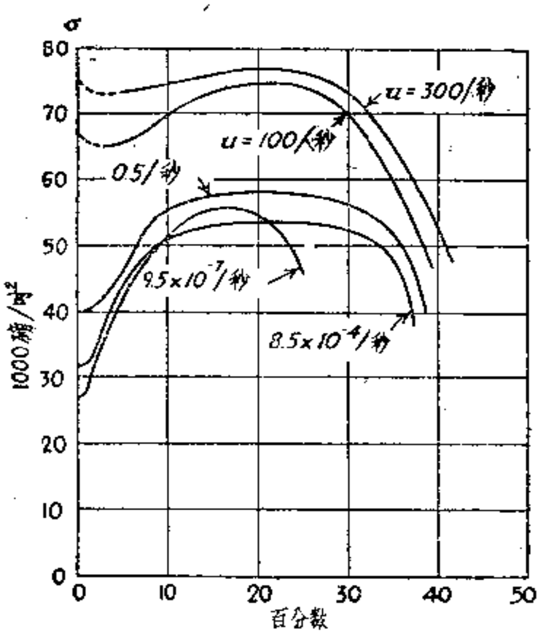


图 222

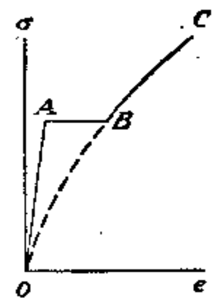


图 223

有这样的骨架,拉伸图将如图 223 中虛綫所示。由于剛性骨架的存在,材料保持着完全彈性并服从虎克定律直到 A 点才发生彈性破坏。于是塑性顆粒材料突然得出永久的应变 AB,以后,材料就服从于一般塑性材料的曲綫 BC。这个理論說明了材料在屈伏点上限处的不稳定情况。

它也說明了有較小顆粒的材料經常显示出較高屈伏应力値,結果,在屈伏点处发生較大的伸长(由图 223 中水平綫 AB 的长度来表示)。而且,它也說明了在高速度試驗中屈伏点应力的增加伴随着在該应力下伸长量增加(可由图 222 中曲綫上看到)。

---

[1] 曼卓因(M. J. Manjoine)的論文,刊在 J. Applied Mechanics, 卷 11, 第 211 頁, 1944。

[2] 見路德威克(P. Ludwik)与修氏(Scheu)的"晶体材料"(Werkstoffanschuss), VDI, Ber.,第 70 期, 1925; 刻斯特(W. Köster)的論文,刊在 Archiv. Eisenhüttenw., 第 47 期, 1929。

由于作拉伸图时引用了测得应力(true stress)和自然应变(natural strain)这两个概念,在研究拉伸試件在超过屈伏点时的塑性变形方面已有所发展[1]。測得应力是将载荷除以相应于該載荷下試件变形的眞正截面积。在計算自然应变中[2],用测得长度 l 来代替原来长度 l_0。于是应变的增量为

$$d\varepsilon=\frac{dl}{l},$$

而自然伸长可用下列积分式求得

$$\varepsilon=\int_{l_0}^{l}\frac{dl}{l}=\log_e\frac{l}{l_0}$$

当試件上的拉伸載荷达到最大值时,开始出現局部收縮(或称"頸縮")。在頸部的截面上应力将不再保持为均匀分布,这时已不是简单拉伸而得出了三維应力分布。在頸部最小截面上的应力分布是由达維靖可夫[3]用圓形試杆研究出来的。他发現作用在截面中心的拉应力最大而在边緣上的最小。这些应力值可用下列近似式来表示:

$$\sigma_{\max}=\sigma_a\frac{R+0.50a}{R+0.25a}\quad \sigma_{\min}=\frac{\sigma_a R}{R+0.25a}$$

式中 σ_a 为平均拉应力,a 为最小横截面的半徑,而 R 为頸部縱剖面的曲率半徑。除了試件軸綫方向上的应力以外,在徑向和切向还存在着应力 σ_r 及 σ_θ。达維靖可夫証明这两种应力是相等的,可用下式表示

$$\sigma_r=\sigma_\theta=\frac{\sigma_a R}{R+0.25a}\,\frac{a^2-r^2}{2Ra}$$

式中 r 为一点离試件軸綫的徑向距离。

普兰道尔在研究断裂現象时,認为有两种断裂型式已可断定[4]:(1)垂直于拉力方向的凝聚断裂或脆性断裂(brittle fracture)以及(2)剪切断裂(shear fracture)。在試驗建筑鋼的圓柱形試件中,得出了所謂錐窩断裂(cup-and-cone fracture)。在断裂的中央部分,表面是和試件軸綫垂直的,它属于脆性型式。断裂

[1] 对于拉伸試驗各方面的討論以及相应的历史叙述收集在薩克斯(G. Sachs)著"拉伸試驗"(Der

处的外部形成一个圓錐形表面，与拉力方向傾斜約45°的角度，它代表剪切断裂。路德威克(P. Ludwik)[1]注意到断裂是从頸部的最小截面中心开始的，并且象脆性断裂一样扩展到截面的中央部分，此时外部材料仍継續呈塑性伸长。用显微鏡檢查軟鋼断裂处[2]发現有些顆粒沿立方体各平面裂开而其他的却沿八面体各平面破裂。在塑性变形时裂口表面上晶体被拉成纖維状的外貌。

75. 强度理論

現有的关于延性材料力学性质的大部分知識是从拉伸試驗中得到的，而关于脆性材料的則是从压縮試驗中得到的。为了对工程实踐中所常遇到的綜合应力在各种情况下选定其工作应力时找出一些根据，于是发展了各种强度理論[3]。象拉梅和朗肯这些科学家們都假定了最大主应力为强度的判別点，但随后一般都接受了最大应变理論(maximum strain theory)，这主要是受了象彭西列特和圣維南这些权威人士的影响。因此假定当最大应变达到相当于临界值时(根据拉伸試驗求得)，在任何种类的綜合应力下都要发生破坏和屈伏伸长。

馬克斯威尔建議用应变能的式子来决定綜合应力的临界值。他指出单位体积的总应变能可分解成两部分：(1)均匀拉伸或压縮的应变能，(2)畸变应变能。馬克斯威尔在談到畸变应变能时說过："我有很充足的理由相信当畸变应变能达到某一定限时，元素才开始屈服"。他再說："在这个題目上写論文我算得是第一次。在此以前我还沒有看到过对这个問題的任何研究报告，这問題是：已知一元素上三个方向的机械应变，它将在什么时候屈服？"我們看到馬克斯威尔已經有了些屈伏方面的理論，即我們現在所称的最大畸变能理論(maximum distortion energy theory)。不过他沒有再回到这个問題上作深入研究，因此他的观念直到他的书信[4]出版之后才为人們所熟知。工程师們在最后将理論发展得与馬克斯威尔的完全相同之前，他們是化了相当长的一段时間的。

杜奎特(C. Duguet)[5]发展了一个拉伸理論，和庫侖过去所提出的压縮理論相似(参看第12节)。处理軟鋼在各种情况下的綜合应力的最大剪应力理論是由格斯特(Guest)[6]提出来的。这个理論是前面提过的(参看第60节)摩尔的一个特例。

[1] Schweiz. Verband Materiatprüfung. Tech., 第13期, 1928 柏林。

[2] 廷柏(C. F. Tipper)的論文，刊在 Metallurgia, 卷39, 第133頁, 1949。

[3] 对这个題目較完整的历史記載見汉斯·佛洛姆(Hans Fromm)的著作；并参看"物理与工程力学手册"(Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik), 卷44, 第359頁, 1931。

[4] 馬克斯威尔写給他的朋友威廉·湯姆逊的信，原稿刊在 Proc. Cambridge Phil. Soc., 第5部分，卷32中。随后由劍桥大学出版科，紐約和劍桥刊印成书于1937年出版。

[5] 杜奎特著"固体变形"(Déformation des corps solides), 卷2, 第28頁, 1885。

[6] 格斯特的論文，刊在 Phil. Mag., 卷50, 第69頁, 1900。

根据象砂岩那种脆性材料作出的实驗証明摩尔的理論并不与脆性断裂的試驗結果相符[1]。

别特拉米(Beltrami)[2]建議在决定綜合应力的临界值时，材料每单位体积內儲存的应变能的数值应該用作为判定毁坏的依据。然而这个理論并不与实驗相符，因为材料在均匀的流体静压力下不发生断裂或屈伏时，它所儲存的应变能是很大的。

胡伯(M. T. Huber)[3]对这个强度理論提出了一些改进意見，他在决定綜合应力的临界状态中只考虑畸变能。此畸变能的式子为

$$U=\frac{1}{12G}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right] \tag{a}$$

式中 σ_1, σ_2 及 σ_3 为三个主应力。在簡单拉伸中，在屈伏点应力时的畸变能可将 $\sigma_1=\sigma_{yp}$, $\sigma_2=\sigma_3=0$ 代入(a)式中得出。于是得

$$U=\frac{\sigma_{yp}^2}{6G} \tag{b}$$

将(a)，(b)两式列成等式，即得任何三維应力系統的屈伏条件为

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2=2\sigma_{yp}^2 \tag{c}$$

对于平面应力分布(取 $\sigma_3=0$)，从(c)式可得二維情况的屈伏条件，即：

$$\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2=\sigma_{yp}^2 \tag{d}$$

例如，对于純剪切应为 $\sigma_1=-\sigma_2=\tau$，由(d)式得屈服点的剪应力为：

$$\tau_{yp}=\frac{\sigma_{yp}}{\sqrt{3}}=0.5774\,\sigma_{yp} \tag{e}$$

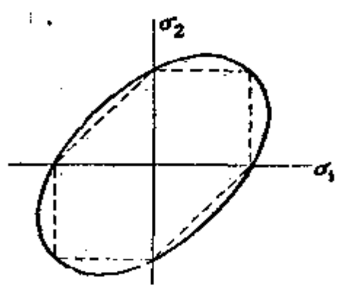


图 224

这个数值和实驗結果非常符合。

取 σ_1 及 σ_2 为直角坐标，屈伏条件(d)可用图 224 中所示的椭圆来表示。該图中的不等边六角形表示服从于最大剪应力理論的屈伏条件。

由主应力 σ_1, σ_2 及 σ_3 可算出作用在八面体各面(即各平面对各主軸的傾角都相等)。上的剪应力 τ_{0ct}[4]，

[1] 卡尔曼的論文，刊在 VDI，卷 55，第 1749 頁，1911；又波喀尔(R. Böker)的論文，刊在 Forsch. Gebiete Ingenieurw.，第 175～176 期，1915。

[2] 見 Rendiconti，第 704 頁，1885；Math. Ann.，第 94 頁，1903。

[3] 胡伯的論文，刊在 Czasopismo tech.，卷，15，1904 年，Lwów. 并参看虎勃(A. Föppl 与 L. Föppl)合著的"应力与变形"(Drang und Zwang)第 2 版，卷 1，第 50 頁。米齐斯(R. von Mises)独立地也得出同一观念；見 Göttinger Nachr.，第 582 頁，1913。

[4] 使用这个概念不要和图 217 中所解釋的相混淆。

得

$$\tau_{0ct}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \tag{f}$$

代入屈伏条件的(c)式，得

$$\tau_{0ct}^2=\frac{2}{9}\sigma_{yp}^2$$

也就是說，屈伏的畸变能理論可用下述簡单語句来表示：在綜合应力的任何情况下，当八面体的剪应力达到

$$\tau_{0ct}=\sigma_{yp}\frac{\sqrt{2}}{3}$$

値时，便开始屈伏。

为了探討畸变能理論的精确性，曾做过許多的实驗研究。在納台的建議下，路德(W. Lode)[1]采用鉄、銅和鎳等材料制成的薄壁管作出承受軸向拉力和管内承受流体靜压力的一些試驗。这样，便能得出一个具有 $\sigma_1:\sigma_2$ 的各种比値的二維应力情况(徑向应力可以不計)。通过实驗发現实驗所得的各点沿着图 224 中所示椭圓边綫上占有同样精确的位置。罗斯(M. Roś)和爱琴格尔(A. Eichinger)[2]在苏黎世工业学院材料試驗所中做出了类似的实驗。他們的結果再一次与畸变能理論相符。台勒(G. I. Taylor)和奎因列(H. Quinney)[3]利用鋁、銅和軟鋼制成的薄壁管在拉伸和扭轉联合作用下得出了各种二維应力情况。采用鋁、銅两种金属时，他們发現試驗結果特别能和畸变能理論計算的結果相符。

薩克斯(G. Sachs)[4]用完全不同的方法达成了(e)式中的关系(剪切的屈伏应力和拉伸的屈伏应力之間的关系)。从第 74 节(b)式中，我們知道在单晶体試件上的屈伏載荷須視晶体的方位而定。現在假定多晶体試件为无規律分布的晶体系統，不計晶体边界的效应，并且假定全部晶体同时开始屈伏；薩克斯用近似平均法[5]算出了 σ_{yp} 和临界剪应力 τ_{cr} 之間的关系。对于具有面心立方体格子結构的晶体(鋁、銅、鎳)，他得出

$$\sigma_{yp}=2.238\,\tau_{cr}$$

同法，对于純剪切，为

---

[1] Z. Physik., 卷 36, 第 913 頁, 1926。

[2] 見 Proc. Intern. Congr. Applied Mechanics, 1926, 苏黎世。

[3] Trans. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 230, 第 323～362 頁, 1931。

[4] 薩克斯的論文，刊在 VDI, 卷 72, 第 734 頁, 1928。

[5] 1925 年在德累斯登召开应用数学和力学学会的会議討論中，普兰道尔建議这样計算。見路德的論文中一个脚注，刊在 Z. Physik. 卷 36, 第 934 頁, 1926。

$$\tau_{yp}=1.293\,\tau_{cr}$$

最后，

$$\tau_{yp}=\sim 0.577\,\sigma_{yp}$$

在他計算的精确限度以內，这个数值与用畸变能理論的(e)式的計算結果相符。薩克斯假定对于体心立方体格子結构(例如鉄)可近似地得出同样的結果。我們可以看出，他的研究对于以前假定每种材料当单位体积內儲存的畸变能的数值达到其某一定值时才开始屈伏[1]的結果，提供了物理学上的根据。

76. 高温下金属的蠕变

十九世紀內关于材料在高温下的强度已作过一些研究，不过試驗的种类是和室温中所作的相同。那时的試驗目的只是为了寻求材料在高温下的极限强度和彈性模量。在最近三十年中，关于材料在高温下力学性能的問題更具有重大的实用意义。在各种型式的蒸汽发动机中要求在更高温度下經济地使用燃料。蒸汽发动机的温度由 1920 年的約为 650°F 到这时已提高到 1000°F。因此在汽輪机設計中对于高温下金属性能的知識更占重要地位。在設計柴油机和煤气机中，工程师們也遇到同样的問題。只要找到了能經受高温的金属，燃气輪机和噴气推进式发动机的发展已成为可能。在炼油及化学工业的新問題中对于在高温下金属的力学性能也成为一个重要問題。为了满足工业方面的要求，有些地方都开始进行高温下金属的蠕变試驗[2]。在法国有雪汶納德 (P. Chevenard)[3] 开始了这項工作。在英国則由迭更逊 (J. H. S. Dickenson)[4] 作出一些鋼料在赤热状态下流动的实驗。

已經发現出鋼制試件在高温下承受一定的拉力所产生的蠕变現象(creep)和鉛在室温下产生的蠕变相同。有人試图确定出一个“蠕变的极限应力”，使在此极限內不产生蠕变，但結果証明并不存在这样一种极限，因为尽管采用极为灵敏的測量仪器，但发現了只要有微小的应力就会使受载試件产生蠕变。这就很清楚地看出了平常所用的选择結构构件尺寸的一些方法(根据工作应力)在高温下全不能适用了。設計者尙須考虑因蠕变使結构产生的变形正确地选定其尺寸。他們必須按下述方式选定尺寸，即按結构物使用期限(例如动力机械可取为 20～30 年)內所产生

---

[1] 各种强度理論的討論以及对本問題的全面历史記述可参看罗斯和爱琴格尔合著的“固体的破坏”(Die Bruchgefahrfester körper)，刊在 EMPA 第 172 期，1949 年于苏黎世发行。

[2] 关于这项工作的資料和这个題目的历史記述可参看塔普塞(H. J. Tapsel)的“金属的蠕变”(Creep of Metals)，1931 年于牛津出版，及斯密士 (George V. Smith) 的“高温下金属的性质” (Properties of Metals at E-evated Temperatures) 1950 年于紐約出版。

[3] Compt. rend. 卷 169，第 712～715 頁，1919。

[4] J. Iron Steel Inst. (倫敦)，卷 106，第 103 頁，1922。

的变形不超过一定的容許限度。

有些試驗所已着手进行恒載下的拉伸試驗以求得必需的資料。这些試驗結果通常如图 225 中的曲綫所示，图中伸长量表示成时間的函数。这些曲綫是根据各种拉伸载荷值得出的。例如，以 $OABCD$ 曲綫而論，可以看出在加上载荷的瞬間，試件伸长了 OA 量，然后开始蠕变，其蠕变率逐漸减小。这可由 AB 曲綫的斜度来說明。BC 部分上的斜度实际上已保持不变，試件在蠕变率不变的情况下伸长。最后，在 CD 部分上，蠕变率随时間而增大；这主要是由于截面不断地减小使得蠕变在不断增高的拉应力下継續进行所致。曲綫上 BC 一段对工程师們来說是最重要的，他們經常在这个"最小蠕变速度"的范圍内进行研究。假設在相应于曲綫 BC 段的时間范圍内由蠕变产生的应变硬化不断地被高温的韌煉效应所克服，那么，由于这种平衡，蠕变便在恒定的速率下进行[1]。

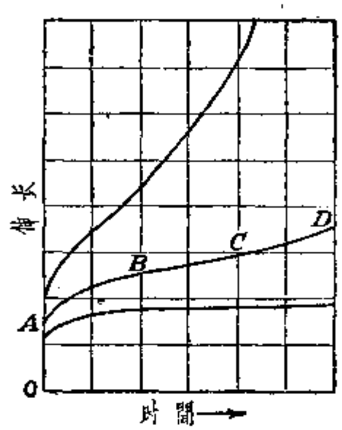


图 225

試驗所的試驗时間通常不过几千小时，因此要預計結构物整个使用期限内的蠕变变形就需要根据試驗結果利用外推法才能做到。利用各种鋼料作出的实驗証明了在曲綫的 AB 段(图 225)上，最小蠕变率以上的蠕变率超值，系按几何級数减小而时間則按算术級数增加。因此，通常采用下述的蠕变率和时間之間的关系式[2]：

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=v_0+ce^{-\alpha t} \tag{a}$$

式中 v_0 表示最小蠕变率，它和 c 及 α 两常数一样，都要由实驗所得的蠕变-时間曲綫来决定，实驗系在一定温度下进行的，其应力須用外推法求得。將上式积分，得

$$\varepsilon=\varepsilon_0+v_0t-\frac{c}{\alpha}e^{-\alpha t} \tag{b}$$

常数 ε_0 可再次从試驗中求得，因此試件在任何时間 t 的伸长都可立即由(b)式算出。当 t 值很大时，(b)式中最后一項可以忽略不計，并可用漸近綫 BD 来代替蠕变-时間曲綫 AC (图 226)，这样，根据金属在 850°F 和各种应力值的情况下的实

[1] 这个观念是由貝萊(R. W. Bailey)介紹出来的，他在研究蠕变这方面有过許多貢献。見 J. Inst. Metals, 卷 35, 第 27 頁, 1926。

[2] 外推法是由麦克威梯(P. G. McVetty)提供出来的。見 Proc. ASTM, 第二部分, 卷 34, 第 105～129 頁, 1934。

驗結果繪出了如图 227 中所示的曲綫[1]。应用这些曲綫，可求得任意假定的应力值 σ 及使用期間內的伸长量。

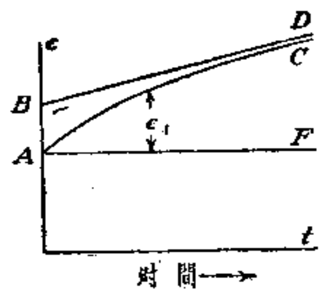


图 226

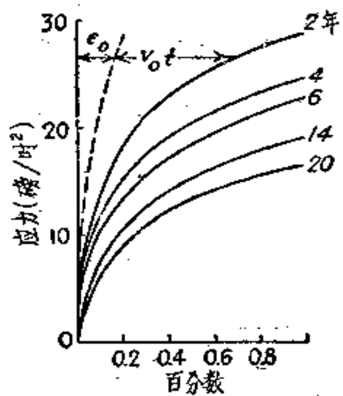


图 227

对于結构物在高溫下的应力計算，最好有一个能表示初始伸长后发生总蠕变这一部分(如图 226 中的 ε_1)的式子。通常假定此值可用下式表示：

$$\varepsilon_1=\phi(\sigma)\psi(t)$$

式中 ϕ 仅为 σ 的函数，而 ψ 仅为 t 的函数。在实用上，經常取 ϕ 为 σ 的指数函数，而取图 226 所示实驗曲綫 AC 作为 ψ。这样，我們得出下式

$$\varepsilon_1=a\sigma^m\psi(t) \tag{c}$$

式中 a 及 m 为两常数，常数的选定須能与实驗曲綫相合。应用此方程式，就可求解高温結构設計中所遇到的一些实际問題。

例如，設取一根矩形梁，高度为 h，寬度为 b，試考慮它的純弯曲。假定它在弯曲时截面仍保持为平面，并假定材料在拉伸和压縮时其性質相同，因此中性軸通过截面的形心。令 $\sigma_{\max}$ 表示最大应力，σ 表示距中性軸为 y 处的应力，则由(c)式，可得

$$\varepsilon_{\max}=\frac{h}{2\rho}=a\sigma_{\max}^m\psi$$

$$\varepsilon=\frac{2y}{h}\varepsilon_{\max}=a\sigma^m\psi \tag{d}$$

由此

$$\sigma=\sigma_{\max}\left(\frac{2y}{h}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{e}$$

把它代入求弯矩的式子中，得

$$M=2\int_0^{\frac{h}{2}}b\sigma y\,dy=\sigma_{\max}\frac{bh^2}{6}\frac{3m}{2m+1}$$

[1] 这些結果是从麦克威梯的論文中摘引来的，見 Proc. ASTM，卷 34，1938。

这样就能求得 σ_{max}，而且也能从(d)式算出对任何时間 t 的曲率 $1/\rho$。在此推导中对于弯矩 M 加上去那一瞬时所产生的曲率是被略去了的。

关于在綜合应力下的蠕变也作过一些实驗。貝萊[1]曾在室温中作过鉛管承受內压力作用以及內压力和軸向載荷联合作用的一些实驗。他也研究了鋼管在 900°F 及 1020°F 温度中受軸向拉力和扭轉的联合作用时的材料性质。艾佛累特(F. L. Everett)[2]試驗过在高温时受扭轉的鋼管。如果对綜合应力作用下的蠕变沒有足够的实驗資料时，則可采用簡单拉伸的蠕变試驗結果以求解这些較复杂的問題。通常按下述几个假定进行：(1)在塑性变形过程中，主应力(σ_1, σ_2 及 σ_3)的方向与主应变(ε_1, ε_2 及 ε_3)的方向一致；(2)材料体积保持不变，因此对于細小的变形为

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0 \tag{f}$$

(3)最大剪应力与相应的剪应变成正比，即

$$\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sigma_1-\sigma_2}=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\sigma_2-\sigma_3}=\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_1}{\sigma_3-\sigma_1}=\theta \tag{g}$$

式中 θ 为 σ_1、σ_2 及 σ_3 的某种函数，系根据实驗决定。从(f)及(g)两式中，得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]\\ \varepsilon_2&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]\\ \varepsilon_3&=\frac{2\theta}{3}\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right]\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

这些方程和虎克定律的应力-应变关系式类似，但其間有两点不同：出現 $\frac{2\theta}{3}$ 这个量代替了常数 $\frac{1}{E}$ 以及出現 $\frac{1}{2}$ 这个因子代替了泊松比。

应用(h)式求算恒定速率的蠕变时，可将这些方程除以时間 t。用符号 $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_2$ 及 $\dot{\varepsilon}_3$ 表示主蠕变率，并用 k 表示括号前的因子，得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1&=k\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]\\ \dot{\varepsilon}_2&=k\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]\\ \dot{\varepsilon}_3&=k\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right]\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

---

[1] 世界动力会議，1929年，日本东京；見"工程"，卷 129，第 265～266，327～329 及 772 各頁，1930。

[2] Trans. ASME. 卷 53，1931 年；Proc. ASTM，卷 39 第 215～224 頁，1939。

将这些方程式应用于簡单拉伸中，当 $\sigma_1=\sigma$ 及 $\sigma_2=\sigma_3=0$ 时，则为：

$$\dot{\varepsilon}=k\cdot\sigma \tag{j}$$

前面已說过，在簡单拉伸中对于恒定的蠕变率的实驗結果可适当地用一个指数函数表示：

$$\dot{\varepsilon}=b\sigma^m \tag{k}$$

式中 b 及 m 为材料的两个常数。要使(j)及(k)两式相等，我們必須令

$$k=b\sigma^{m-1} \tag{l}$$

以(i)式表示一般情况时，該式中函数 k 的形式，可取用第 75 节的(c)式来建立，(c)式系表示三維应力系統和簡单拉伸这两种屈伏条件之間的关系。于是将下式

$$\sigma_e=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \tag{m}$$

的值作为一等效拉应力代入(l)式。对于簡单拉伸，由此再一次得出了(k)式，对于一般情况，由(i)式得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1&=b\sigma_e^{m-1}\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]\\ \dot{\varepsilon}_2&=b\sigma_e^{m-1}\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]\\ \dot{\varepsilon}_3&=b\sigma_e^{m-1}\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right]\end{aligned}\right\} \tag{n}$$

把簡单拉伸的蠕变試驗所得的值代替 b 及 m，即得計算一般情况下蠕变率 $\dot{\varepsilon}_1$，$\dot{\varepsilon}_2$ 及 $\dot{\varepsilon}_3$ 的公式。有些书的作者[1]用过同样公式来求解承受内压力的厚壁圓筒和轉盘的蠕变那类重要問題。在这些情况下的应力 σ_1，σ_2 及 σ_3 不能从静力学公式中求得，而必須采用逐步积分法才能解出这类問題。

77. 金属的疲劳

机器工业的現代发展已使金属在应力循环下引起疲劳所遭致的意外事故成为最突出的問題。机器在使用中損坏的主要原因是由于机械零件的疲劳，因此这种現象也就成为二十世紀中材料試驗所最重要的研究对象了[2]。从沃勒和包兴格的

[1] 奧得奎斯特(F. K. G. Odqvist)著"塑性理論"(plasticitetsteori …)，刊在 Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Research, 1934; 貝萊的論文刊在 J. Inst. Mech. Engrs.，卷 131，第 131 頁，1935；薩徳堡(C. R. Soderberg)的論文，刊在 Trans. ASME, 卷 58，第 733～743 頁，1936。

[2] 关于这項工作的叙述見下列书籍：高赫著："金属的疲劳"(The Fatigue of Metals)，1924，倫敦，沐尔(H. F. Moore)与可麦斯(J. B. Kommers)合著："金属的疲劳"1927，紐約；高赫在麻省理工学院复写的讲义，1937 年 6～7 月暑期班用；以及洛斯与爱琴格尔合写的論著，刊在 EMPA，第 173 期，1950，苏黎世。

时代起，巳經确定了持久极限 (endurance limit) 和应力幅度 (range of stress) 这两个概念。求出了完全反向应力的持久极限之后，任何其他种循环的疲劳特性一般系根据格尔伯(W. Gerber) 的假定来求算[1]，他的假定是应力幅度 R 和平均应力 σ_a 发生下列抛物綫定律的关系：

$$R=R_{\max}\left(1-\frac{\sigma_a^2}{\sigma_{ut}^2}\right)$$

在試驗所中用慢速度的拉伸試驗机测定持久极限需要很长时間和很大費用；因此許多人試图以静力試驗求出持久极限和其他力学性质間的关系，这些努力沒有什么成就，虽然也曾找出承受完全反向应力的黑色金属的持久极限近于(0.40～0.55)×极限强度，但还是很不够的。

对于寻求滞变現象和疲劳現象之間所存在的关系（如果有的話）已作了許多研究。包兴格早已引出了本生比例极限 (natural proportional limits) 这个概念，卽材料經受一定应力循环以后，其比例极限不变；在疲劳試驗中，曾将它作为确定安全幅度(safe range)之用。貝尔斯托(L. Bairstow)[2] 将这个概念更向前推进。他应用一具鏡式伸长仪和一架緩慢加載、卸載的試驗机結合在一起，量出了滞变回綫的寬度，并发現当这些寬度按所加循环应力的最大值点出时，試驗結果就成为一条近似直綫。貝尔斯托建議用此直綫和应力軸綫的交点来决定应力安全幅度(safe range of stress)。其后，持久性試驗的結果証实了这个假定。从那时起，已提出了好几个从滞变回綫中迅速求定疲劳幅度的方法。霍普金逊和威廉士[3] 对一次循环的能量消耗作出热量測量，用来代替測量滞变回綫的寬度，从而提出了一个迅速决定持久极限的方法。在更为近些的时期内，虎勃 (O. Föppl) 和他的助手們在布倫斯威克的沃勒学院作出了許多关于測定金属的阻滞能力 (damping capacity of metals) 及其与疲劳强度之間关系的研究[4]。

另外一个快速决定持久极限的方法是由依尹和亨佛雷 (J. C. W. Humfrey)[5] 两人提供的。他們用瑞典鉄作成有光滑表面的試件，使在承受若干次反向应力循环之下进行显微鏡观察。他們看出如果作用的应力超过了某一限度，不久，有些晶体的表面出現了滑脫带 (slipbands)。有些滑脫带似乎因循环次数的增加而加寬

[1] 格尔伯的論文刊在 Z. bayer. Architek. u. Ing. Ver., 1874。

[2] Trans. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 210, 第 35 頁, 1911。

[3] 霍普金逊和威廉合写的論文，刊在 Proc. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 87, 1912。

[4] 这个工作的英文总結經海迭散普(G. S. Heydekamp)发表，刊在 Proc. ASTM, 卷 31, 1931, 以及虎勃(O. Föppl)的論文，刊在 J. Iron and Steel Inst. (倫敦), 卷 134, 1936。

[5] 依尹与亨佛雷合写的論文，刊在 Trans. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 200, 第 241 頁, 1903。

了，最后加寬的滑脫帶之一沿着其外部輪廓綫开始裂縫。他們假定产生滑脫帶时的应力是超出了安全幅度的。如果这种应力循环繼續下去，就沿着表面发生連續滑移。它和剛体滑动面間的滑移一样，是由摩擦力造成的。由于这种摩擦力作用，材料沿滑动面(依照这个理論)逐漸磨損，結果产生了一道裂縫。高赫(H. J. Gough)和汉生(D. Hanson)[1]作出了进一步的研究，他們証明滑脫帶也許在較材料持久极限稍低的应力时形成，因此它們扩展和加寬不一定会形成一条裂縫。

为了在疲劳試驗中对破坏的机械作用作更深入的观察，高赫[2]采用了一种新的方法，郎利用精密的 X 射綫技术。用单晶体試件进行观察，他指出延性金屬晶体变形的机械作用在应力循环下和在靜力条件下是一样的；郎沿某一晶体平面在一定的方向上发生滑动，而此滑动是由在滑动方向上的剪应力分量的大小来控制的。用 X 射綫分析的結果，証明了[3]如果应力循环超过了安全幅度，“晶体平面将扭曲成这样一种形式，郎此时它們的平均曲率极为微小……但存在有严重的局部曲率。认为較大的局部应变——也許还有实际的晶格断裂——必在如此的扭曲面內发生，郎在充分大的表面应力或应变作用下此扭曲面将发生一条逐漸扩大的裂縫；在循环应变較小的时候，这种情况就稳定下来了”。

利用軟鋼之类的晶体材料作实驗时，初級的靜力試驗曾指出过如果所作实驗保持在彈性极限以內，在完整顆粒中不致产生永久变形。在彈性极限和屈伏点之間，少数完整顆粒将发生破裂，形成了一小部分更小的顆粒和晶体(晶体碎屑尺寸的最小极限为 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 厘米)。在屈伏点以后，每一个完整顆粒都破裂了，形成更小的顆粒和大量的晶子。通过应力循环的作用，可发现“如果所作用的应力幅度超出了安全幅度，則扩展性的破坏及破裂成晶子以至終于断裂，其过程和在靜力試驗中的断裂完全相同”。这样，实驗証明在靜力和疲劳应力作用下金屬的断裂都伴随着同样的結构变化。

对影响持久极限的各种因素的研究方面也完成了許多工作。将可以用作不同頻率的应力循环的机器使之运轉，証明了頻率高到每分鈡 5000 次循环时，沒有看到显著的頻率效应。当頻率加高到超过每分鈡 1,000,000 次循环时，坚金[4]发現了对于阿姆可鉄(Armco iron)及鋁，其持久极限增高了 30% 以上。

用原已拉伸到过了屈伏点的鋼制試件再作疲劳試驗，証明了适度的拉伸能产

[1] 高赫与汉生的論文，刊在 Proc. Roy. Soc. (倫敦)，(A)，卷 104，1923。

[2] 这項工作的总結曾提向皇家航空学会(Royal Aeronautical Society)。見 J. Roy. Aeronaut. Soc.，1936 年 8 月号。

[3] 見上面提过的高赫的論文。

[4] 坚金的論文，刊在 Proc. Roy. Soc. (倫敦)，(A)，卷 109，第 119 頁，1925；卷 125，1929。

生較高的持久极限。倘再继續进行冷拉，由于加工过度[1]，会发生疲劳极限降低的情况。作用了若干次超过持久极限的应力循环以后再着手进行正規的持久試驗，在这种实驗里指出了这里存在着超应力循环的极限次数(視超应力的大小而定)，在此极限次数以内，持久极限不受影响。但超过此极限次数时，能經受的循环次数即将減少。根据这些循环极限次数在图上点出其超应力循环的最大应力，可得出所試材料的損坏曲綫(damage curve)[2]。曲綫下面的面积表示不致引起損坏的超应力范圍。这种損坏曲綫可用于使用程度不超过持久极限，但时刻承受着超应力循环的机械零件。計算在破坏以前机械零件能承受各种强度的超应力循环次数的公式已經建立起来了[3]。在飞机結构中，常常作各种零件的工作应力的統計分析[4]，而疲劳試驗也設計得使所研究的零件在試驗所內作用的应力循环可調整到与零件的实际使用情况相符。

关于金属暴露在一种养化剂中承受养化作用而又承受着应力循环时的性能，已完成了許多研究工作。海赫(P. B. Haigh)[5]观察到黄銅試件当經受着盐水、阿摩尼亚或盐酸的作用并同时承受反复应力时，其持久极限有一些减低。他也指出除非被侵蝕性物质和反复应力所同时作用，阿摩尼亚对黄銅是不会发生損坏作用的。麦克达姆(D. J. McAdam)[6]在侵蝕疲劳(corrosion fatigue)方面作了进一步的发展，他研究了侵蝕和疲劳的綜合作用对各种金属与合金的影响。这些試驗証明了在大多数情况下，在持久試驗以前受强烈侵蝕的材料其損坏程度还不及在試驗中受輕微侵蝕和疲劳同时作用下所造成的那么严重。試驗也指出了当在空气中試驗时鋼料的持久极限几乎与极限强度成同一比例而增高，但在淸水中試驗时，所得的結果却大不相同。試驗中发現含碳 0.25% 以上的鋼其侵蝕疲劳的极限不会增高，反会因受到热处理作用而减低。在眞空中所作实驗証明了[7]鋼的持久极限和在空气中試驗所得几乎相同，但銅和黄銅試件的持久极限却分别增高了 14% 及 16% 以上。所有这些結果都有很重要的实用价值，因为有許多使用中的破坏情况是由于侵蝕疲劳所引起的。

这里所說到的疲劳方面的資料大部分是从弯曲試驗及直接拉-压試驗中得到

[1] 沐尔与可麦斯合写的論文，刊在 Univ. Illinois Eng. Exp. Sta. Bull. 第 124 期，1921。

[2] 佛兰支(H. J. French)的論文，刊在 ASST，卷 21，第 899 頁，1933。

[3] 朗吉尔(B. F. Langer)的論文，刊在 J. Applied Mechanics，卷 4，第 160 頁，1937。

[4] 考尔(H. W. Kaul)的論文，刊在 Jahrb. deut. Luftfahrt-Forsch.，第 307～313 頁，1938。

[5] J. Inst. Metals，卷 18，1917。

[6] 麦克达姆的論文，刊在 Proc. Intern. Cong. Testing Materials，1928，阿姆斯特丹，卷 1，第 305 頁。

[7] 高赫及薩普維奇(D. G. Sopwich)合写的論文，刊在 J. Inst. Metals，卷 49，第 93 頁，1932。

的，确定出在綜合应力情况中应用的法則就显得非常重要。为了获得必要的实验資料，高赫和波拉德(H. V. Pollard)[1]使用了同相的反向弯曲和反向扭轉的联合作用。用改变最大弯矩和最大扭矩的比例的方法，实驗指出在軟炭鋼及鉻鎳鋼中($3^1/_2$% 的鎳)，弯曲应力和剪应力的极限值可由下式求得

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_e^2}+\frac{\tau^2}{\tau_e^2}=1 \tag{a}$$

式中 σ_e 为弯曲的持久极限而 τ_e 为扭轉的持久极限。

应用最大畸变能理論可得出同一結果。将第75节中(c)式写成下列形式

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2=2\sigma_e^2 \tag{b}$$

并且在上式中用下列数值代替 σ_1 及 σ_3

$$\frac{1}{2}\left(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right),\quad \sigma_2=0,\quad \tau_e=\frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

即得(a)式。由皮特逊(R. E. Peterson)和华尔(A. M. Wahl)[2]做出的一些試驗也証明(b)式能适用于延性材料。

慘痛的經驗告訴我們，絕大多数的疲劳裂縫是在应力集中的地点发生的；这些裂縫經常在实际机械零件的嵌縫、沟槽、孔眼、栓槽等处的周圍出现。沃勒作出了关于应力集中影响及疲劳的第一个实驗(参看第39节)。包兴格継續了沃勒的工作，他用車出沟槽的試件作出一些試驗[3]。采用0.1及0.5毫米的沟槽，他发覚軟鋼的持久极限降低不多。虎勃(A. Föppl)对应力集中作了更有系統的研究[4]。他用有圓孔的矩形試件作拉-压試驗，发覚孔的影响較理論公式所算出的小得多。发生这个偏差是因为在这些試驗中用了較高的应力从而减少了产生断裂时应需的循环次数之故。在較小应力下，孔的影响将更为显著。虎勃又用有圓形沟槽的試件作过拉-压和弯曲試驗，所得結果仍和上述結論相符。最后，他用有1毫米及4毫米半徑的嵌縫的圓形試件($d=20$ 毫米)作出扭轉疲劳試驗。他仍然用較高的应力使試件在相当少的循环次数($n=10^5$)下发生断裂，又一次发覚了嵌縫的影响較之用他的理論研究所計算的小得多[5]。

[1] Proc. Inst. Mech. Engrs., 卷131。

[2] 見向工程教育普及学会上提出的論文，1941年6月23日，見 Ann Arbor, Mich。

[3] 見 Mitt. mech. tech. Lab. Technischen Hochschule, 第25期，1897，慕尼黑。

[4] 同上注，第31期，1909，慕尼黑。

[5] 虎勃(A. Föppl)也許是最先提出受扭軸杆尖槽处应力集中系数的近似公式的人。見 VDI, 第1032頁，1906。对同一問題得出較精确的解答是晏勒斯(F. A. Willers)，見 Z. Math. u. Physik., 卷55，第225頁，1907。用玻璃試件由实驗中求出应力集中系数的人是李昂(A. Leon)，見"嵌縫大小与嵌縫影响"(Kerbgrösse und Kerbwirkung)，1902，維也納。

皮特逊进一步检验了应力集中对疲劳的影响[1]。他用不同直径的試件作出一些实验，从实验的結果中他得出了下列結論：(1)有些情况中疲劳試驗結果和理論上的应力集中数值非常相符。(2)合金鋼和淬火碳鋼的疲劳結果較之不淬火碳鋼的相应疲劳結果更接近于理論上的数值。(3)如将試件尺寸减小，因嵌縫或孔眼而减低的疲劳强度就較小，如嵌縫或孔眼极小，則疲劳强度的减低更小。在这些試驗結果的基础上，便可在設計較大的机械零件时以及采用細顆粒鋼料如合金鋼和热处理碳鋼等时，规定出应力集中系数的理論值。

在包含应力集中的疲劳試驗中所发現的尺寸效应(size effect)，現在已經有各种理論来加以說明了。皮特逊[2]指出这个效应可用魏布尔所介紹的(由脆性材料作靜力拉伸試驗所得的結果)用以分析实驗結果(参看第73节)的統計方法来說明。这个方法是否能够充分說明疲劳試驗中的尺寸效应，要看我們的試驗是否采用了大量不同尺寸的試件以及所得的实驗資料是否充分而定。用廷姆肯(Timken)式机器[3]以及在英国的斯塔維里(Stavely)[4]用船軸机加工出来的大型試件所作的疲劳試驗証明了大試件的疲劳极限是大大地减低了。

减小应力集中的損坏作用是机械設計中的首要問題。适当地将設計加以改变可以得到某种程度的补救，例如消除尖銳的突緣，采用大半徑的嵌条，将嵌条的剖面設計得正确一些以及采用凸起的沟槽等等。不过有时这些方法不能采用，因此只能設法改进危險地点的材料。有时可将材料加以适当的表面热处理而得到改善。用冷軋方法可得到显著的改善；利用表面冷加工来改进材料的疲劳性能这一观念是佛勃(O. Föppl)提出来的，他对小尺寸的試件作过若干次研究[5]。薄斯克瓦尔特(T. V. Buckwalter)和哈尔格(O. J. Horger)[6]将这个方法用在十足尺寸的軸杆上并且发明了一架机器能試驗直徑达14吋的軸。这說明了进行疲劳試驗研究的現代趋向，并且，在某些場合中，靜力的破坏試驗也用十足尺寸的构件来进行了。沃勒对疲劳的著名研究是由試驗十足尺寸的鉄路車軸开始的(参看第39节)，以后才轉到实驗室的小試件試驗。現在，为了試驗設計上的改进以及研究尺寸的

---

[1] J. Applied Mechanics, 卷1, 第79, 157各頁, 1933; 卷3, 第15頁, 1936。

[2] 皮特逊著"工程材料中金属的性质"(Properties of Metals in Materials Engineering), 美国金属学会发行, 1948, 俄亥俄, 克利夫兰德(Cleveland)。

[3] 哈尔格与涅佛特(H. R. Neifert)合写的論文, 刊在 Proc. ASTM, 卷39, 第723頁, 1939。

[4] 朵雷(S. F. Dorey)的論文, 刊在工程界, 1948。

[5] 見他的論文, 刊在 Mitt. Wöhler Inst., 布倫斯威克; 并参看"机械工程"(Maschinenbau), 卷8, 第752～755頁, 1929。

[6] 薄斯克瓦尔德和哈尔格合写的論文, 刊在 Trans. ASM, 卷25, 第229～244頁, 1937。并参看作者的論文, 刊在 Proc. Inst. Mech. Engrs. (倫敦), 卷156, 第345頁, 1947。

效应,已經再采用十足尺寸的試件进行了。

78. 实驗应力分析

材料力学的现代成就也应包含在实驗研究中采用新式量测設备的內容。它使我們在工程結构物的应力分布方面增加不少的知識。实驗应力分析得到发展有着几个原因。材料力学和彈性理論的理論公式是材料被假定为匀质的、完全彈性的并且能服从虎克定律的条件下推导出来的。事实上，材料的性质往往和完全匀质和完全彈性之間的差异还很大，因此对根据理想材料所推导出来的一些公式加以驗証具有很大的实际意义。只有在最簡单的情况中，理論才能給予我們以应力分布問題的全解。而在絕大多数情况中，工程师們还在应用近似解，其精确度必須通过直接試驗加以校核。目前工程設計的新趋向是朝着最經济的材料重量上发展的，因此就得提高容許应力并减低安全系数。只有在設計者获得了有关材料性能的精确資料，并且掌握了应力分析的精确方法的条件下，这样的設計方法才能保証安全。对于这种应力分析必須具备結构物实际使用情况的精确知識，尤其是关于作用在結构物上的各种外力的知識。我們对作用在結构物上面的力通常只能概略地了解一些，因此要想丰富我們的知識，应当借助于从事实际結构物在各种使用情况下应力的研究。所有这些討論都說明了近代发展实驗应力分析的重大意义[1]。

彈性力学方面的新发展包括采用新的量测設备和决定应力的新的近似法。对于直接測量应变，已經发明了各种应变仪；它們不仅可在实驗研究上应用，而且也可在工地上用以測量使用中的实际結构物。电阻絲应变仪經使用証明特別有用。这种应变仪不仅能簡化靜力情况中的应力測量，而且也能記录結构物在承受变化不定的外力或机器零件在运轉时的应力循环。这种記录在正确分析振动問題时有很大帮助，同时大大地提高了我們对作用于結构物上的动力的訊識。另外一种应变仪是电感应仪(electric-inductance gauge)，已广泛地使用于測量軌条在机車車輪滚动下所产生的应力以及測量軸杆在轉动中的扭轉角[2]。

二十世紀中更广泛地使用着馬克斯威尔（参看第58节）所发明的应力分析的光測彈性法。美斯納格采用此法来校核佛拉門特关于集中力作用点周圍的应力分布的理論[3]。他也采用这个方法来求解拱桥中应力的实际問題[4]。光測彈性法

[1] 实驗应力分析学会在美国成立；它的活动和著作吸引了广大的工程师們的重視。此学会新刊出的"实驗的应力分析手册"(Handbook of Experimental Stress Analysis)由海騰依(M. Hetényi)教授主編，对于材料力学和彈性理論实驗研究中給我們增加了不少的知識。

[2] 对这种应变仪作出較全面的討論可参看胡吉尔的文章；并参看"实驗的应力分析手册"第238～273頁。

[3] Ann. ponts et chaussées, 卷4, 第128～190頁, 1901。

[4] 同上注，卷16，第133～186頁，1913。

給我們得出了两主应力之差。美斯納格建議主应力之和应該从平板模型上所研究的一点測量其厚度变化而得。柯克(E. G.Coker)利用这个概念創造了一具专用的横向伸长仪来測量这些厚度变化。他也介紹了使用賽璐珞能大大地簡化光測彈性試驗模型的装置。在推广这个方法方面柯克也是有很多功績的[1]。在倫敦大学柯克的实驗室里工作的許多光測彈性学方面的年青研究人員得到了初步的經驗。

在彈性力学这方面作出进一步貢献的是士齐(Z. Tuzi)[2]，他介紹了应力測量和攝影記录的所謂流苏法(fringe method)。利用这个方法能在加載后立刻得出結果，因此由于时間效应所发生的誤差可減到最小。他还利用一种具有較大感光性的新材料——酚塑胶(phenolite)作模型。在光測彈性学方面，法佛雷(H. Favre)提出了一个純粹光学的方法[3]。現在光測彈性法已經在工程师們中非常普遍了，我們到处可看到光測彈性学方面的一切設备，不仅在科学研究院和大学的实驗室內，而且也在許多工业机关里面，它都成为必要的設备了。制造模型和測量的技术都有了很大的改进，因此我們目前对于还沒有建立理論方法的許多二維問題都能用充分精密的实驗方法来求解[4]。

現在，有些人正企图在模型中采用冻結应力法(method of freezing the stress)来研究三維光測彈性应力分析。这个現象是馬克斯威尔首先观察出来的。可是到現在为止，三維光測彈性学还处在幼年时期，沒有成熟[5]。

对于近似地决定复杂結构(很难采用理論的应力分析的那些結构)最弱处的应力，采用脆性涂料法(method of brittle coatings)是非常便利的[6]。如果在加載以前在模型或試件表面上涂上一种脆性漆，然后逐漸加載，涂漆层表面上最先出現的裂縫就揭露为最大应变的地点，而开裂的方向就指示出最大拉应力的方向；它是与裂縫垂直的。如果将一根涂了同种漆的刻有标度的杆件作簡单的拉伸試驗，也能决定出它的应力大小。为了得出更精确的結果，可再在裂縫方向的最弱处装上很敏感的应变仪，并与裂縫相垂直。戴特里希(Dietrich)和列尔(Lehr)[7]曾用这个

---

[1] 柯克的实験研究，以及費朗的理論著作都收集在"光測彈性学論述"(A Treatise on Photoelasticity)一书中，1931，劍桥。

[2] 士齐的論文，刊在 Sci. Papers Inst. Phys.Chem. Research (东京)，卷 7，第 79～96 頁，1927。并参看 Proc. 3d Intern. Congr. Applied Mechanics, 卷 2，第 176～180 頁，1931 斯德哥尔摩。

[3] 見 Schweiz, Bauz., 卷 20, 1927。

[4] 見佛洛希特(M. M. Frocht)所著"光測彈性学"(Photoelasticity)，1941，紐約。

[5] 这个新的发展的历史可参看海騰依的論文，J. Applied Mechanics, 1938 年 12 月。并参看三維的光彈性学的論題，刊在"实驗的应力分析手册"，第 924～965 頁，1950。

[6] 叙述这个方法可見海騰依的論著，刊在"实驗的应力分析手册"第 636～662 頁。

[7] VDI, 卷 76，第 973～982 頁，1932。

方法分析过曲拐軸、連杆和其他机械零件的应力。

对于机械零件在各种工艺过程中經常产生的殘留应力也已經完成了許多研究工作。例如，通过模子拉出来的銅条，其整个截面上的应力分布并不是均匀的。靠近表面的金属較之中心处受力要大些，如图 228a 所示。当除去拉力 P 时，銅条均匀地收縮并且有一个均匀应力从曲綫 mn 所示的应力中被减去。于是最后得出图 228b 中阴影面积所表示的殘余应力。外层纖維成为受拉状态而內层纖維成为受压状态。如果再将此杆沿縱綫截开，并假定截开后的两部分呈图 228c 所示的曲綫状，则殘余应力就会有部分消除。冷軋也会发生类似的殘余应力，如图 228d 所示。如果在作縱向截开以前将伸长仪附着在杆件的外表面上，则在弯曲时（如图 228c 所示）可量出殘余应力的峰值[1]。

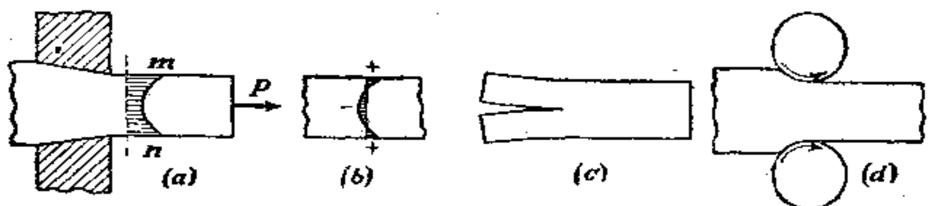


图 228

殘余应力具有很大的实际意义。它会使机件在制造过程中产生有害的翹曲，干裂(season cracking)也是由它所引起的。有几种銅合金冷拉管如在冷拉以后沒有經过适当的退火处理，也会产生殘余应力。測量結构构件內所存在的殘余应力时，必須将构件切成薄层，測量其切成薄层时所发生的变形，即可由此得到計算殘余应力的資料。这类实驗的第一次是研究大炮殘余应力的卡拉考茲基(Н. Калакуцкий)[2]作出来的。在研究矩形杆中的殘余应力（图 229）时，我們先将其刨去一厚度为 Δ 的薄层。如果該

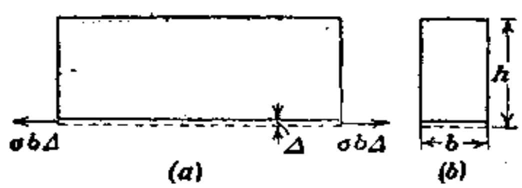


图 229

薄层有殘余拉应力 σ，刨制对杆件产生变形的效应和作用有两个偏心拉力 $\sigma b\Delta$ 时是一样的（图 229a）。此两力将产生一縱向应变 ε 和曲率 $1/\rho$，分别按下式計算：

$$\varepsilon=\frac{\sigma b\Delta}{Ebh} \tag{a}$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sigma bh\Delta}{2EI} \tag{b}$$

[1] 有些这类实驗是由作者在西屋电气公司研究实驗室內作出来的，1924。

[2] 卡拉考茲基所著"鑄鐵与鋼中內应力的研究"1887 年于圣彼得堡出版，1888 年英譯本(The Study of Internal Stresses in Cast Iron and Steel)在倫敦出版。

在每一层刨去以后，测定曲率的改变，我們便得到了用(a)，(b)两式計算初始殘余应力的充分資料。上述方法可改用化学处理将材料逐层脱去以代替車刨。这一改进方法是由达維靖可夫提供的[1]。此法也可用来研究冷拉管的殘余应力。

实心圓柱杆中的殘余应力可用鉆孔方法进行研究。将材料从圓柱内面分层(薄层)車去，并且在圓柱的縱向和切向量出它們相应的变形，我們可得到充分資料用以計算与圓柱軸成对称分布的殘余应力[2]。此法已經用来研究各种热处理过程中所产生的殘余应力以及用来檢查由于不均匀冷却所产生的塑性变形[3]。对于热处理产生的塑性变形也可利用同样的方法。現在經常采用火焰硬化法和硝化法来改进机械零件在高度应力集中处的疲劳强度。这样，高殘余压应力将在表面上发生，这种应力和工作时产生的应力循环一起，将結合成一种更有利的应力起伏。

在焊接結构物中殘余应力也是很重要的。由于焊接过程中引起局部的高温，最后冷却时常会出现很高的殘余应力。在鋼鈑焊接成的結构物中，这些应力的大小可用蔷薇形应变仪(rosette strain gauge)[4]来测定鋼鈑平面上三个方向的应变。有了这些測得的数据，便可算出主应变的大小和方向以及相应的主应力来。要得出鋼鈑內存在的殘余应力，必須进行两次測量，一次是在鋼鈑未割截以前进行，另一次是在截出一小部分以后进行。两者讀数之差表示分离元素的应变結果，也表示殘余应力的大小。

实驗应力分析法正向各方面継續发展，我們可以預期在这个領域中会得到进一步推进，使我們在材料力学方面的知識継續提高。在很长的一段时間內，材料力学一直流行着解析法。这种方法当然是有用的，可是不能經常充分地解決所有的工程問題。广泛地使用实驗方法已使材料力学的研究获得了新的生命力。

---

[1] J. Tech. Phys. (苏联)，卷 1，1931。

[2] 这个計算方法是由薩克斯(G. Sachs)发表出来的，見 Z. Metallkunde，卷 19，第 352～357 頁，1927；Trans. ASME，第 821 頁，1939。

[3] 薄赫霍玆 (H. Buchholtz) 与布赫勒 (H. Bühler) 合著"鋼与鉄" (Stahl u. Eisen)，卷 52，第 490～492 頁，1932；并参看伏克斯 (S. Fuchs)的論文，刊在 Mitt. Forsch -Inst.，卷 3，第 199～234 頁，1933，及布赫勒，薄赫霍玆与修尔茨(F. H. Schultz)等人的論文，刊在 Archiv. Eisenhüttenw.，卷 5，第 413～418 頁，1942。

[4] 叙述各种蔷薇形应变仪以及其理論和应用，見梅慈(J. H. Meier)的文章，刊在"实驗的应力分析手册"第 390～437 頁。

第十三章

1900~1950 年間的彈性理論

79. 克萊恩 (Felix Klein)

自从高斯(Gauss)的时代起，格廷根大学已成为数学的一个重要中心。高斯不独是个偉大的数学家，而且他用数学解决了天文学、物理学、和測地学各方面不少的問題。由于他的工作成果，在格廷根大學树立了将数学和实际应用相結合的傳統。他的繼承者，卓越的数学家底里希列特 (Dirichlet)，黎曼 (Riemann) 和克列布希都保持这个傳統并經常和純粹数学一样地开講理論物理学中的各分支学科。当十九世紀末叶及二十世紀初期，在克萊恩的影响下，关于将这些学科串联在一起的观念更得到新的激发。

費立克斯·克萊恩 (1849~1925) 出生于杜塞尔多夫 (Düsseldorf)[1]。他从高等学校毕业以后，进入波恩 (Bonn) 大学，在該校不久就充当物理学教授普勒斯克 (Plucker) 的助教。克萊恩在 1868 年获得博士学位，此后轉往格廷根大学任教，該时克列布希也正在該校任教。1871 年他充任該校的講师，次年卽离开格廷根大学而在厄尔兰根 (Erlangen) 大学担任教授。在該校他提出了他那著名的“厄尔兰根的教学計划” (das Erlanger Programm)，其中强調数学要和应用到数学的各种科学范疇相結合的重要性。1875 年，克萊恩受聘为慕尼黑工业学院的数学教授。在該校他不仅担任通常的积分教程而且还开設了更高水平的数学专門講座。他認为如果工程系的学生能够多学点数学，无論对于应用科学的研究工作，或者担任教学工作，都是对工程教育有利的。1880 年，克萊恩由慕尼黑轉到萊比錫大学，1886 年重回格廷根大学担任教授。他一貫强調純粹数学对于技术物理学和应用力学的重要性。以前在德国各大学里这些学科都沒有开过課，由于克萊恩的影

[1] 見克萊恩的自傳附注加在他所著下列书籍的某些有关部分，“綜合数学論文集” (Gesammelte Mathematische Abhandlungen)，1921，柏林。并参看 Universitätsbund Göttingen E. V. Jahrgang 26, Mitteilungen, 1949, 第 1 期；米齐斯的論文刊在 ZAMM, 卷 4, 第 86 頁, 1924。关于格廷根大学的数学历史，可參看克萊恩与施姆馬克 (Schimmack) 合著的“数学教学” (Der Mathematische Unterricht…)，第一部分，第 158 頁，1907。

响，在格廷根大学开始設立了应用数学、技术物理学(电气工程学)和应用力学三个新的講座。

1893 年，克莱恩去美国旅行并参观芝加哥国际博覽会。他参加了那年的数学会議，并且在伊凡斯頓 (Evanston) 向美国数学家作过一系列的演講。从那个时候起，克莱恩經常与美国科学家們保持接触，在他的課堂里面常有从美国来的一些学生。当他在美国时，他研究了那些設有工程学院的大学組織，并且注意到各該大学的数学教育不独設有供学生选定数学专业的課程，而且也設有供将来充当工程师时应用的数学課程。許多大学和科学研究組織都是由私人的基金来开办的，行政独立，这点給予克莱恩的印象很深。

图 230 F. 克莱恩

他回到格廷根大学以后，决定試用美国的方法并和德国实业界的代表們建立联系。他向那些人解釋，在格廷根大学組織应用数学、应用力学和应用物理学三个研究院能訓練出大批的青年科学家，这样做是有利于工业发展的。他叙述了这些研究院的活动怎样会有利于数学教学方法以及怎样有助于訓練一批具有一些工程科学知識的数学教师。1898 年，毕竟成立了“格廷根应用数理研究协会” (Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik)，并且由于这个协会在經济上的支持，在格廷根大学出现了几个研究院。克莱恩替这些新的学院找到了經济来源，而且聘到了在应用科学方面一些杰出的人才作为研究院的主持人。1904 年組織完成，当时的应用数学方面的主任是侖治 (C. Runge)[1]，应用力学方面的主任是普兰道尔 (L. Prandtl)，而电气工程方面的主任为西蒙 (H. T. Simon)。

为了使这些新的研究院和純粹数学学院保持联系，由克莱恩自任主席邀集应用科学全体教授組織研究会。材料力学、結构理論、彈性理論、电机工程等等都列为連續一学期共同研究的題目。每次两小时的会議中，由一个学生根据事先提供的題目經过相关的教授指导在会上作出論文报告。論文报告提出来以后，接着由在座的教授和学生們进行討論。克莱恩的意見总是很有价值的，因为作为一个教

[1] 关于侖治的傳記，見意丽斯·侖治 (Iris Runge) 所著“卡尔·侖治” (Carl Runge)，其中有二十世紀初期他在格廷根大学生活的一張生动的照片。

师来說，他有丰富的知識和卓越的才能，他能在每个专門問題中看出某些最重要的关鍵以中肯的意見指出所提問題和有关学科中各种問題之間的关系。这种由純粹数学和应用科学的代表們联合在一起的研究会是一种新頴的組織，它不独吸引德国的，而且也吸引其他国家的許多青年工程师們的兴趣，因此集会时經常具有国际性的气氛。这种新的学术活动获得了极大的成功，有很多学生都选擇了格廷根大学为他們毕业后継續作研究工作的場所。該校刊出过許多篇关于应用科学方面的博士論文，并且还替許多工业学校提供应用力学方面的教授。从那时起克莱恩、侖治和普兰道尔的学生在德国的工程力学方面都有相当大的貢献。

克莱恩的活动并不限于这些格廷根大学的組織工作上。他还运用那卓越的才能和渊博的知識从事于一些国际間重要的科学規划。他領导过編輯出版"数学百科全书"(Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften)(1901～1914)。因为和国外数学家常有过接触，他順利地得到一些著名科学家的合作，在百科全书上完成了一件国际性事业。克莱恩自己主編了力学部分。在他領导下編写的四卷中，列入了直至最近期为止的理論力学和应用力学中各分支的全部資料，并附有一个非常完整的书目提要。其中也将历史資料收入在內。这些书的出版在現代力学发展中是一項重大的事件。它在一定程度上帮助了个别科学家的研究工作；更由于将理論和实用科学更为密切結合，对于促使工程力学提到較高水平，也起了极大的作用。

克莱恩改进純粹科学和实用科学間关系的另一种方式是通过他在中学和大学修正数学教育的教学計划来实現的。他提倡在德国各大学里面設立应用科学学院。他也要求工程学院尽量分担訓練数学教师的任务，以提高他們的基础学科水平。这些观念，对于德国的数学教育起了很大的影响，而且在以后，通过国际数学会議的国际委員会，也影响了其他国家的数学教学方法。

在二十世紀中，材料力学趋向于更大量地运用数学工具，而对此門科学所作的主要貢献都是由那些既有工程素养又对基本科学有过充分准备的人們做出来的。这証明克莱恩早已預見到工程科学的这种发展方向了。

80. 普兰道尔

路德威格·普兰道尔在 1875 年出生于慕尼黑附近的佛賴津(Freising)，他的父亲是一个农学院教授。他在慕尼黑工业学院受过工程教育。毕业以后，留在学校里充任虎勃教授的助教，那时虎勃剛开始在該校任課，虎勃修改了工程力学的教学大綱并修改了材料試驗所的实驗計划。普兰道尔协助虎勃做好这些工作，并且一开始便完成了一項重要的研究工作。

那时，普兰道尔正热心于曲杆的弯曲理論，并对鉄路車輛挽鈎的强度作出許多

次試驗。他認为简支直梁公式能充分精确地用来計算曲鉤內的最大弯曲应力。那时在斯图加特工业学院的巴赫教授却有不同意見，他用的是尹克勒的曲杆弯曲理論，該理論是根据假定曲杆的截面在弯曲时仍保持为平面推导出来的。普兰道尔对計算狹长矩形截面的曲杆的純弯曲，得出了精确解。这証明了在純弯曲时截面仍保持为平面，而且应力分布也和尹克勒理論所得出来的非常接近[1]。


图 231 L. 普兰道尔

普兰道尔在圓形薄板的弯曲試驗中，注意到只是在撓度很小时撓度才与載荷成正比，而撓度較大时薄板显現出的剛度大于理論推算的結果。这也許是对应用一般薄板理論的界限所作的第一个实驗証明。1899 年，他写出一篇关于狹长矩形截面梁在最大抗弯剛度平面內弯曲时的側向压屈的論文作为博士論文[2]。他得出具有实用价值的好些特殊情况的解[3]，算出求解这个問題所需用的貝塞尔函数(Bessesl's function)表，并且作出一系列的实驗，其結果証明了和他的理論是相符的。在作出这些試驗时，普兰道尔发明了一种能精密地决定临界載荷的实驗技术，这种技术在以后为多数研究人員用来研究彈性稳定。这篇关于側向压屈的論文介紹了梁[4]和曲杆[5]側向稳定的許多研究資料。

普兰道尔完成他的博士論文以后，便在工业界工作。但不久又重回学校工作，早在 1900 年，他接受了汉諾威工业学院工程力学教授的聘請。在該校他发表了关于扭轉問題中薄膜比拟(membrane analogy)的一篇重要論文[6]。在这篇論文中，

[1] 对于圓杆弯曲的精确解答老早由哥罗溫 (Головин) 得出。不过他的論文只在苏联发表，在西欧还不知道。普兰道尔并沒有将这項研究发表，而是在廷普的論文中提到了它，見 Z. Math. u. Physik, 卷 52, 第 348 頁, 1905。

[2] 普兰道尔著"側向压屈" 1899 慕尼黑。

[3] 米歇尔 (A. G. M. Michell) 独自解出了純弯曲下压屈的最簡单情况，見 Phil. Mag. (5)，卷 48, 第 298 頁, 1899。

[4] 作者本人研究了工字梁的側向压屈；見本人的論文，刊在 Bull. Polytech. Inst. 卷 4, 1905 圣彼得堡；卷 5, 1906。更进一步研究同一問題由施瓦拉(E. Chwalla)做过，見 Bauing.，卷 17, 1936。并参看 Sitzber. Akad. Wiss. Wien Math.—Naturw. Klasse, Abt IIa, 卷 153, 1944, 及皮特逊 (O. Pettersson) 的論文，刊在 Bulletin. 第 10 期，皇家工程学院, 1952, 斯德哥尔摩。

[5] 見作者本人的論文，刊在 Bull. Polytech. Inst. 1910, 基輔。

[6] Physik., Z., 卷 4, 1903。

他指出利用肥皂膜片可以用实驗方法得出扭轉中应力分布的全部資料。这方面的有些成績是由他的学生安梯斯 (H. Anthes)[1] 在以后完成的。这种比拟法的实用意义經过格利菲斯(A. A. Griffith) 和台勒 (G. I. Taylor) 采用皂膜法来决定各种复杂截面杆件的抗扭剛度而得到承认[2]。

克萊恩知道了普兰道尔在工程力学上的成就后，并由于虎勃的推荐，他决定将普兰道尔請到格廷根大学并任命他担負該大学发展工程力学的重大任务。将一个青年工程师請到数学学院来交給他这样重大的任务，这种不寻常的措施又一次証明了克萊恩的远見[3]。普兰道尔到格廷根大学工作以后使該院生色不少。

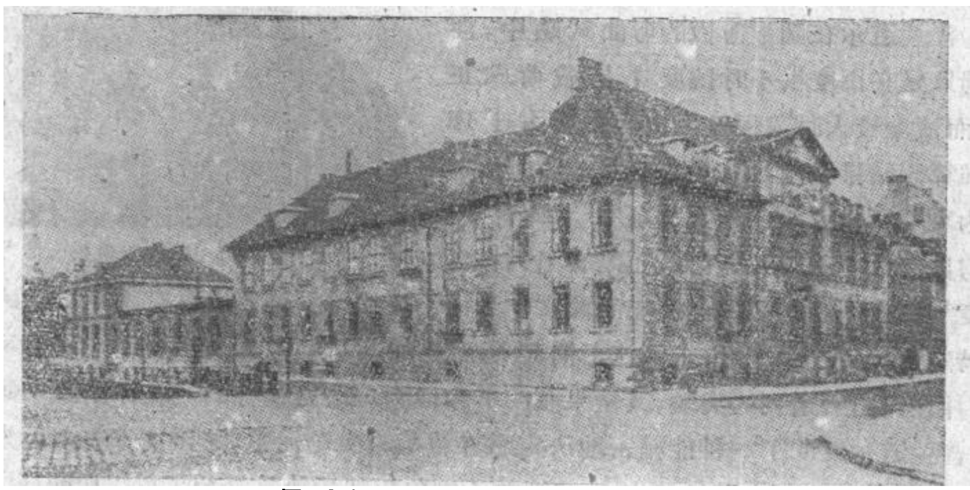


图 232 格廷根大学应用数学与力学学院

1904 年在海德尔堡举行的国际数学会議的一次集会上，普兰道尔提出了他那著名的論文“关于摩擦极小的流体运动” (Über Flüssigkeits-bewegung bei sehr kleiner Reibung)，其中第一次討論了边界层。克萊恩听完了普兰道尔这篇报告以后，立刻体会到这篇論文对将来研究流体动力学或空气动力学非常重要，并向这位青年伙伴表示这篇論文是会議中最好的一篇。

普兰道尔在格廷根的工作是从 1904 年秋季开始的。在同一年里，他的一位亲密朋友命治教授和他一起来到該校講授应用数学。在密切配合下，他俩一起改进了应用数学和力学学院[4]，由于他俩的努力結果，不久这个学院就成为吸引青年人

[1] 安梯斯的論文，刊在 Dinglers Polytech. J.，第 342 頁，1906。

[2] Tech. Rept. Advisory Comm. Aeronautics，倫敦，卷 3，第 910，933 各頁，1917～1918。

[3] 有些教授不同意在这个大学里教应用科学，但普兰道尔的工作証明只有这样才能和大学教育較高理想充分协調。参看沃依特的“节日講演” (Festrede)，1912 格廷根。

[4] 在这所建筑物的墙壁上可以看到紀念湯姆士·楊的銅牌，在十八世紀末年他是在这儿研究物理的一个学生(参看第 22 节)。

学习应用数学的一个重要中心[1]。那时，普兰道尔的学生毕业后主要是研究材料力学。哈特 (H. Hort)[2] 写出一篇关于鋼在拉伸試驗中温度变化的論文，伯林勒 (S. Berliner)[3] 研究了鑄鉄拉伸試驗中的滞后循环，而作者(指鉄木生可本人——譯者注)則着手研究前面已提过的工字梁的侧向压屈。随着建造奎比克桥(Quebec Bridge)的失敗，普兰道尔重視了組合柱的压屈，并且指出与該桥受压部件的大弦杆相連接的斜杆和板条，其截面尺寸均嫌不足[4]。

大致在同一时期，卡尔曼来到格廷根，也在普兰道尔指导下开始研究柱在塑性界限內的压屈問題(他的博士論文題)[5]。当他获得了博士学位以后，留在格廷根好几年作为普兰道尔的助教，进行曲管弯曲的研究[6](这个問題是普兰道尔最重視的)。他也作过在纵向和侧向压力联合作用下石块受压强度的实驗研究[7]。普兰道尔自己也发表了固体的两种断裂型式的理論，并且也設計出供解釋滞后回綫用的模型(参看第 74 节)。

他很重視梁的塑性变形，在他的指导下赫尔伯特 (H. Herbert)[8] 写出一篇关于这个問題的論文。有些塑性变形問題早已由圣維南解出了(参看第 52 节)。普兰道尔在这方面作了进一步的研究，解出了半无限体中更复杂的二維問題[9]。該半无限体如图 233 所示，在一狭条地带(寬度为 a)上分布着均布压力 p。他指出在一定的临界压力 p_{cr} 值时，三角形土块 ABC 将向下移动，而 BDE 和 AFG 两个三角形土块，在 BCD 及 ACF 两个扇形体所傳递的压力作用下，将向上移动。滑移将沿图示的最大剪应力面而发生。假定在屈伏时最大剪应力等于拉伸屈伏点应力之半，則临界压力将为

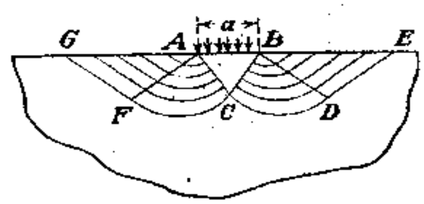


图 233

$$p_{cr}=\sigma_{yp}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

---

[1] 見桑默菲尔德 (A. Sommerfeld) 关于普兰道尔六十岁紀念会上的报告，刊在 ZAMM，卷 15，第 1頁，1935。

[2] 哈特(H. Hort)著“拉伸試驗中加热过程” (Über die Wärmevorgänge beim Zerreissversuch)，1906。

[3] 伯林勒的論文，刊在 Ann. Physik，卷 20，第 527 頁，1906。

[4] VDI，卷 55，1907。

[5] Forschungsarb.，第 81 期，1910，柏林。

[6] VDI，卷 55，第 1889 頁，1911。

[7] 同上注，第 1749 頁；Forschungsarb.，第 118 期，1912，柏林。

[8] 赫尔伯特的論文，1909，格廷根。

[9] 見 Z. angew. Math. u. Mechanik，卷 1，第 15 頁，1921。

这篇論文发表以后，塑性理論开始有迅速的进展。这个題目現在已組成为材料力学中一个重要的分支。在納台[1]、薩可洛夫斯基(B. B. Соколовский)[2]和希尔(R. Hill)[3]所著的一些书中都有詳細的叙述。

普兰道尔的論文还具有历史上的另一种重要意义。它刊登在应用数学及力学杂志(Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik)的創刊号里。此杂志由米齐斯主編，不仅在德国，而且对其他各国，它都具有很大的影响性。好些国家都仿照这个榜样开始出版应用力学方面的杂志。这些杂志对于材料力学工作者进行新的研究工作給以莫大的便利。

普兰道尔在材料力学方面的論文只代表了他在工程力学上貢献的一小部分。他的主要成就还是在空气动力学方面，因为这不屬于我們討論的題目范圍以內，我們在这里只从 1906 年成立飞机发动机研究委員会(Motorluftschiff-Studiengesellschaft)后普兰道尔以极大部分时間专心研究气体动力学說起。1908 年，根据普兰道尔的計划在格廷根建造了第一个小型的风洞。在这个风洞里所作的研究工作以及进行測量和記录的技术都是很成功的，因此不久世界各国的空气动力实驗家都应用普兰道尔的方法来进行实驗。在第一次世界大战时期，格廷根又建造了第二个(較大的)风洞；普兰道尔发表了杰出的論文“机翼理論”(Tragflügeltheorie)，这篇論文說明了根据小模型在风洞內的实驗結果来設計飞机的方法。他的意見又一次得到公認，所以現在全世界的飞机設計者都应用它来进行工作。

普兰道尔所有論文的主要特点是它們的創造性。他的著作經常給研究者开辟了新的范疇并且他拥有相当多的学生可以依照他的先行工作所指示的方向作他的接班人。这些学生中間有許多現在都在德国及其他国家担任教学工作[4]。在估量普兰道尔对工程力学方面的貢献时，我們不仅要注意他的著述，更值得注意的是他在格廷根开創的偉大的力学学院。

81. 解彈性問題的近似法

在二十世紀中，机械設計和結构理論方面所遇到的新問題需要作出較以前所提到的各种情况更为精确的应力分析。材料力学上的基本公式通常是不够精确

---

[1] 納台著“固体的流动和断裂理論”(Theory of Flow and Fracture of Solids)，第2版，1950。

[2] 薩可洛夫斯基著“塑性理論”(Theory of Plasticity)(俄文本)，1946，莫斯科。

[3] 希尔著“数学的塑性理論”(The Mathematical Theory of Plasticity)，1950，牛津。

[4] 普兰道尔的許多学生和以前的助教現在都在美国活跃着。卡尔曼在美国空气动力学方面作出許多成就。納台在西屋研究实驗室对塑性作出重要的研究，而普拉格(W. Prager)在布朗大学(Brown University)領导着塑性方面新的研究工作。佛柳芝(W. Flügge)教授夫人在斯丹福大学工程力学系工作。邓哈达格和作者本人过去都在格廷根爭取学位工作时住了一些日子，因此我們都承認是普兰道尔的学生。

的，因此普遍地要求应用彈性理論来解决实际問題。彈性理論这門課程以前只在少数学校里开讲，而且一般都属于理論性的，現在許多工程学校都把它列入教学計划中，已成为一門非常重要的应用科学了。这門課程的教本也都改变了体裁，作者們所討論的問題已不只是理論方面，而且也常常談到实用方面[1]。

对于彈性問題，精确的数学解只是在极簡单的情况下才有实用价值，彈性理論的現代发展趋势是使用各种近似法。这些方法之一是以利用比拟法为基础的[2]。我們已經提过普兰道尔所提供的薄膜比拟法，經証明在研究扭轉問題中是很有用的。这种比拟法已由温宁·梅尼兹 (Vening Meinesz)[3] 推广到弯曲理論上。利用非均布受载薄膜的一个方程式，本书著者簡化了梁弯曲的分析方法[4]。邓哈达格 (J. Den Hartog)建議在二維光測彈性研究中利用薄膜比拟法来决定两主应力的总和[5]。魏貝尔 (E. E. Weibel) 接下去研究細小嵌縫处的应力集中[6]也得到成功。

电比拟法也用来求解彈性問題。其中之一已为雅可布逊 (L. S. Jacobsen) 在变直徑的軸杆受扭中加以闡明了。如薄板具有象軸的横截面一样的边界，他指出[7]适当地改变薄板的厚度能使势函数的微分方程与軸的应力函数的微分方程相一致。应用这个比拟法，便能研究两不同直徑的軸杆相連接的小嵌縫处应力集中的重要問題。关于这方面进一步的研究已由孙姆 (A. Thum) 及包兹 (W. Bautz)[8] 作出，他們用了变深度的一个电解箱来代替变厚度的一块薄板。

穆斯希里施維里 (Н. И. Мусхелишвили) 指出另一种重要的比拟法[9]。它和由二維定常温度分布所产生的应力以及由位錯所产生的应力都有关系。通过这一事实，魏貝尔[10]用光测彈性法研究了圓管和矩形管的定常温度应力。

---

[1] 特别为工程师們写出的第一本彈性理論的书是虎勃 (A. Föppl) 的"工程力学，高級彈性理論最重要教程"(Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie, technische Mechanik)，卷 5，1907，莱比錫。随后与 L. Föppl 合作又补充了一些分成三卷出版，"应力与变形"(Drang und Zwang)，1920～1947。

[2] 在应力分析中使用比拟法在"实驗的应力分析手册"一书中有过叙述。并参看"工程动力学"(Technische Dynamik)，比齐諾 (C. B. Biezeno) 与格兰美尔 (R. Grammel) 合著，1939，柏林。

[3] Ingenieur，第 108 頁，1911 烏特勒支 (utrecht)。

[4] 見 Bull. Inst. Engrs. Ways of Communication, 1913，圣彼得堡；并参看 Proc. London Math. Soc. (2)，卷 20，第 398 頁，1922。

[5] Z. angew. Math. Mech.，卷 11，第 156 頁，1931。

[6] Trans. ASME，卷 56，第 601 頁，1934。

[7] 同上注，卷 47，第 619 頁，1925。

[8] VDI，卷 78，第 17 頁，1934。

[9] Bull. Elecrotech. Inst. 卷 13，第 23～37 頁，1916 圣彼得堡；并参看 Rend. accad. Nazl. Lincei，第 5 組，卷 31，第 548～551 頁，1922；比沃特 (M.A.Biot) 的論文，刊在 Phil. Mag.，卷 19，第 540 頁，1935。

[10] Proc. 5th Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge, Mass.，第 213 頁，1938。

有一种比拟法是根据下面这个事实提出的，即艾雷应力函数的双调和微分方程符合于被沿边緣分布的力和力偶所弯曲的一块薄板的側向撓曲的方程。它已經被用来求解二維的彈性問題[1]。

俞治[2]提供了一个用来得出近似解的很有用的方法。他用有限差分方程来代替微分方程。在求解扭轉問題中，需要积分下式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=C$$

式中 ϕ 为应力函数，他将下面的有限差分方程来代替这个关系

$$\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4-4\phi_0=C_1 \tag{a}$$

对于受扭杆件横断面上所分成的一些小方形格子上任一点（如图 234 中的 O 点）都必須滿足此式。对于方格网里面的每一点写出(a)式并看出在边界处 ϕ 等于零，就可得出能足够算出所有 ϕ 值的一組綫性方程。从这些数值中可算出抗扭剛度和最大剪应力。在对称的情况下，如图 234 所示，我們只消写出三个方程式，即，对于 0, 1 及 5 各点的方程式。这样直接求解这些方程是不会有任何困难的。要想得出較精确的結果，必須应用更小的方格网，当然也就需要更多的方程式。

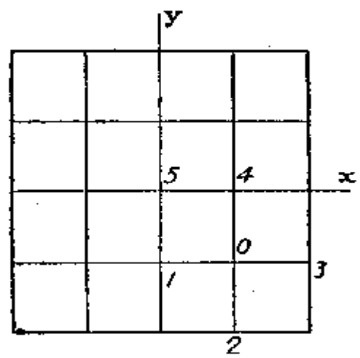


图 234

如果方程式的个数很多，可以采用迭代漸近法来求解[3]。我們假定一些任意的初值作为 ϕ 的值。将它們作为 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 代入(a)式中，我們得出方格网中所有各点一个新的 ϕ_0 值，而且，用它們反复进行計算。这样重复几次之后，便可得出 ϕ 的非常精确的数值。

里查逊 (L. F. Richardson)[4] 在二維彈性問題上成功地用了有限差分方程，此类問題中的应力函数必須滿足一个四阶微分方程。进一步发展此法应归功于苏斯威尔 (R. V. Southwell)，他改进了这个方法并系統地在許多物理学問題上加以使用，其中便包括了許多的彈性力学上的問題[5]。

[1] 怀哈郡 (K. Wieghardt) 的論文，刊在 Mitt. Forschungsarb.，卷 49，第 15~30 頁，1908。并参看克兰茲 (H. Cranz) 的論文，刊在 Ing-Arch.，卷 10，第 159~166 頁，1939。

[2] Z. Math. u. Physik.，卷 50，第 225 頁，1908。

[3] 見李勃曼 (H. Liebmann) 的論文，刊在 Sitz. ber. math-naturw. Abt. bayer. Akad. Wiss. München，第 385 頁，1918。

[4] Phil. Trans.，(A)，卷 210，第 307~357 頁，1910。

[5] 見苏斯威尔的"工程科学中的松弛法" (Relaxation Methods in Engineering Science)，1940，牛津，又"理論物理学中的松弛法" (Relaxation Methods in Theoretical Physics)，1946，牛津。

对于寻求彈性力学問題的近似解方面，雷萊-里兹法也是很有用的。当求一个复杂系統的基本振动方式的頻率时，雷萊建議对該种方式假定出某些形状，导出計算合成頻率的一个表示式，于是选定参数，使頻率表示式的值为最小，从而确定所假定的形状。里兹[1]研究了矩形薄板的弯曲，認定位能的表示式为

$$I=\iint\left\{\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right)\right]-wq\right\}dx\,dy \quad \text{(b)}$$

式中 w 为撓度，q 为横向載荷集度而 D 为抗弯剛度。他看到撓度 w 的真实解应使此能量为极小值，因此将解展成下列的級数形式

$$w=a_1\phi_1(x,\ y)+a_2\phi_2(x,\ y)+a_3\phi_3(x,\ y)+\cdots\cdots \quad \text{(c)}$$

其中每一函数 ϕ 都能滿足薄板的边界条件而系数 $a_1,\ a_2,\ a_3\cdots\cdots$ 可从下列一組綫性方程算出

$$\frac{\partial I}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial I}{\partial a_2}=0,\quad \frac{\partial I}{\partial a_3}=0\cdots\cdots \quad \text{(d)}$$

当得出近似解(c)时，这些綫性方程就表示使积分 I 为极小值的条件[2]。实驗証明經常只要取級数(c)中前面几項就能得出滿意的結果来。

对于杆件在横向力和軸向力联合作用下的弯曲，采用这个方法，也能得出近似公式。同样的方法也可用来求解某些有初曲率的杆件和圓环[3]。应用里兹方法計算薄膜的撓度，在薄膜比拟法中，可导出簡单公式来計算变截面杆件中的扭曲应力和弯曲应力[4]。在研究变截面杆件以及具有不同边界条件的矩形薄板的振动时，用同样的方法也能获得有用的結果。

里兹方法也曾經結合着最小功原理一起来使用[5]。这說明了如果有一物体，在其边界上有給定的力作用着，同时如果假定应力分量的改变不致影响到平衡方程和边界条件，則真正的应力分量就是那些能使应变能的改变消失为零的应力分量。例如，在一个含有应力函数 ϕ 的二維問題中，应变能将为

$$V=\frac{1}{2E}\iint\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)^2\right]dx\,dy \quad \text{(e)}$$

---

[1] 关于这位著名科学家的傳記，見他的“論文集”(Collected Papers)，1911，巴黎。

[2] 这样可得出 I 最小值的上限。底里弗茨 (E. Trefftz) 指出如何得出 I 最小值的下限；見 Math. Ann., 卷 100, 第 503 頁, 1928。

[3] 見作者本人的論文，刊在“奥古斯特·虎勃七十誕辰紀念册”(Festschrift zum Siebzigsten Geburtstage, August Föppl)，1923。

[4] 見作者本人的論文，刊在 Bull. Inst. Engrs. Ways of Communications, 1913, 圣彼得堡；并見 Proc. London Math. Soc., (2), 卷 20, 第 398 頁, 1922。

[5] 見作者本人的“彈性理論”(Theory of Elasticity) (俄文本)，1914 圣彼得堡；并見作者本人的論文，刊在 Phil. Mag., 卷 47, 第 1095 頁, 1924。

将应力函数展成下列級数形式

$$\phi=a_1\phi_1(x, y)+a_2\phi_2(x, y)+a_3\phi_3(x, y)+\cdots\cdots \quad (f)$$

式中每一項都滿足此問題的边界条件，将它代入(e)式，就可由下列各式算出系数 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$ 等数値来。

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial a_2}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial a_3}=0\cdots\cdots$$

将这些数値代入(f)式，卽得出应力函数，可用来作应力的近似計算。利用这个方法，已經解决了工字梁在弯曲作用下寬翼緣（翼緣的有效寬度）的应力分布問題[1]。利用它也解决了薄壁构件的剪力迟滞(shear lag)問題[2]。

82. 彈性的三維問題[3]

本世紀中継續进行着圣維南关于悬臂梁受扭和受弯問題的研究，已經找出了对几种新截面形状的精确解[4]。在弯曲問題上，已采用非对称截面确定出不会产生扭轉作用的弯曲載荷的作用点[5]。已經証明了在半圓形和等边三角形的截面中，只要将載荷由形心偏移稍許距离便能消除扭轉。但在薄壁截面內，这种偏移可以大些，于是它便具有很大的实际意义了。这个問題由梅拉特(R. Maillart)[6]予以闡明，他提出了剪切中心(shear center)这个概念，并且說明了求定該点的方法。

在圣維南对扭轉問題的解法中，是假定作用的扭矩其在杆两端的剪应力分布形式和中間的任一横截面上的剪应力分布形式相同的。如果两端的应力分布不与此相同，則在总应力中将有一局部扰动，而圣維南的解只在去两端某一距离的区域內才有效。这类局部扰动曾經有一些学者进行过研究[7]。在开口薄壁截面中，

[1] 卡尔曼的論文，刊在"奥古斯特·虎勃七十誕辰紀念册"上，第114頁，1923。

[2] 伊萠克·雷斯勒(Eric Reissner)的論文，刊在 Quart. Applied Math.，卷4，第268頁，1946。

[3] 在这节中所提到的一些論文，只有几篇是有实用价値的。在这方面較全面的叙述可参看廷普(A. Timpe)和鉄端(O. Todone)两人在数学知識百科全书(Encyklopädie Math. Wiss.)中所写的文章，卷44，1914；以及特利菲茨和格斯克勒(J. W. Geckeler)在"物理手册"(Handbuch der Physik)一书中所写的文章，卷6，1928。

[4] 見特利菲茨的論文，刊在 Math. Ann.，卷82，第97頁，1921；又 ZAMM，卷2，第263頁，1922。

[5] 見作者本人的論文，刊在 Bull. Inst. Engrs. Ways of Communication，1913，圣彼得堡。并参看西加尔(M. Seegar)及皮尔逊(K. Pearson)的論文，刊在 Proc. Roy. Soc.(倫敦)，(A)，卷96，第211頁，1920。

[6] 梅拉特的論文，刊在 Schweiz. Bauztg.，卷77，第195頁，1921；卷79，第254頁，1922。并参看艾更施外勒(A. Eggenschwyler)的論文，刊在 Diss. E. Tech. Hochschule，1921，苏黎世。这个題目进一步研究由韦伯(C. Weber)作出，見 ZAMM，卷4，第334頁，1924。并参看特利菲茨的論文，刊在 ZAMM，卷15，第220頁，1935。

[7] 普尔塞(F. Purser)的論文，刊在 Proc. Roy. Irish Acad. (A)，卷26，第54頁，1906；廷普的論文，刊在 Math. Ann.，卷71，第480頁，1912；沃尔夫(K. Wolf)的論文，刊在 Sitzsber. Akad. Wiss. Wien, Math-Naturw. Klasse，卷125，第1149頁，1916。两端固定的矩形杆經作者本人研究过，見 Proc. London Math. Soc.，卷20，第389頁，1921。关于圣維南原理，格第尔曾有一个証明刊在 Phil. Mag. (7)，卷24，第325頁，1937。

很难使用圣維南原理，因为扭轉角在很大程度上与扭轉力作用于两端的方式有关。作者本人研究过一端固定的工字梁扭轉的問題[1]，已发現要想得出扭轉角的滿意数値，不独要考虑到圣維南的扭曲应力，而且还要考虑翼緣的弯曲应力。由扭矩 T 所产生单位长度內的扭轉角的微分方程将为

$$C\theta - C_1\theta'' = T \tag{a}$$

C 为圣維南的抗扭剛度而 C_1 为一个常数，視翼緣的抗弯剛度而定。經实驗証明其結果与(a)式所得的理論結果充分相符，并指出由于翼緣的弯曲不是局部性的，所以圣維南原理的适用性是一定限度的。韦伯 (C. Weber)[2] 在研究槽形截面受扭中以及符拉索夫 (В. З. Власов)[3] 在他的开口薄壁受扭的一般性討論中都得出同样的結果。

应用复变函数求解圣維南問題是由穆斯雷里施維里所闡明的[4]。他得出了对几种新截面形状的解式并且查出了象鋼筋泥凝土那样由两种不同材料构成的杆件的受扭情况[5]。

扭矩和軸向載荷联合作用的問題也作了进一步的研究。湯姆士·楊（参看第22节）考察了一根圓軸的受扭，他求得扭矩的表示式，該式由下列两項所組成：其一与单位长度扭轉角 θ 成正比，另一与 θ^3 成正比。他指出为了得出第二項，在討論变形中必須将高阶微量考虑在內。这些在分析扭轉中通常是被忽略掉的。設取与軸杆共軸的圓柱面上一个矩形元素 $abcd$，半徑为 r，我們可断定由于扭轉作用它将变为一个平行四边形 ab_1c_1d（图 235），因之剪应变为 $r\theta$。根据相应的剪应力 $Gr\theta$ 可得出計算扭矩的著名公式

$$T_1 = \int_0^a Gr\theta \cdot 2\pi r^2 dr = I_p G\theta \tag{b}$$

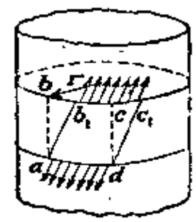


图 235

可是，如果我們假定軸上两截面間距离在扭轉时保持不变，我們可看到象 ab 及 cd 那样的綫元素将伸长而其单位伸长为

$$\varepsilon = \sqrt{1+r^2\theta^2} - 1 \sim \frac{1}{2} r^2\theta^2 \tag{c}$$

根据相应的拉应力 $Er^2\theta^2/2$ 可得出繞軸杆軸綫作用的附加扭矩：

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_0^a Er^2\theta^2 \cdot r\theta \cdot 2\pi r^2 dr = \frac{\pi a^6}{6}\theta^3 E \tag{d}$$

---

[1] Bull. Polytech. Inst. 1905～1906，圣彼得堡。

[2] ZAMM，卷 6，第 85 頁，1926。

[3] 見符拉索夫所著"彈性薄壁构件" (Thin Walled Elastic Bars)，1940，莫斯科。

[4] Rend. accad. nazl. Lincei 第 6 組，卷 9，第 295～300 頁，1929。

[5] Compt., rend., 卷 194，第 1435 頁，1932。

可見，它是和 θ^3 成正比的。湯姆士·楊是第一个考慮引出(c)式的高阶微量的人。在鋼軸中，修正式(d)与一般公式相差很小，但对于象橡皮那样在彈性范圍内能产生极大变形的一些材料却非常重要。在开口薄壁截面中它也是很重要的[1]。近代許多研究家[2]已发展了大撓度的理論，比沃特[3]也証明了上面所解釋的湯姆士·楊的方法能給予圓軸以正确的解答。开口薄壁截面受扭轉和軸向力的联合作用以及受扭轉和純弯曲的联合作用的几种情况已經由格第尔 (J. N.Goodier)[4] 研究出来，他应用最大应变理論，再一次証明了根据湯姆士·楊的假定所作的基本推导能和更精确的研究成果相符。

对于变直徑的圓軸受扭的問題，已經得到某些进展。米歇尔(J. H.Michell)[5]和虎勃 (A. Föppl)[6] 各自都指出了应力分布可只用一个应力函数来确定，并得出了圓錐杆的应力函数。在具有橢圓体、双曲綫体以及旋轉拋物綫体的各种形状的軸杆中都可用同一方法求解。命治[7]提供了一个近似法来計算連接两不同直徑的圓柱形杆的小嵌縫处的局部应力。

現在也有些人正在研究旋轉体的軸对称应力分布的一些問題。米歇尔[8]和勒夫 (A. E. H. Love)[9] 指出，在这些問題中，全部应力分量能用一个簡单应力函数的形式来表示。这个应力函数与二維問題中的应力函数之間的关系已經由韦伯[10]研究出来。将表示軸对称应力分布的函数写成多項式的形式，可得出計算圓板在几种对称形式的載荷分布下弯曲时的精确解来[11]。

費朗 (L. N. G. Filon)[12] 对于圓筒在其两端附近受表面剪应力的作用而伸

---

[1] 見濮斯克雷 (Buckley) 的論文，刊在 Phil. Mag.，卷 28，第 778～787 頁，1914；并参看韦伯的論文，刊在“虎勃的紀念册”上，1924，柏林。

[2] 見苏斯威尔的論文，刊在 Trans. Roy. Soc. (倫敦)，(A)，卷 213，第 187 頁，1913；比齐諾 (C. B. Biezeno) 与亨斯基 (H. Hencky) 的論文，刊在 Proc. Acad. Sci. 卷 31，第 569～578 及 579～592，1928，阿姆斯特丹；特利菲茨的論文，刊在 ZAMM，卷 12，第 160～165 頁，1933。

[3] 比沃特的論文，刊在 Phil. Mag.，卷 27，第 468～489 頁，1939。

[4] J. Applied Mechanics，卷 17，第 383～387 頁，1950。并参看格林 (A. E. Green) 及史尔德 (R. T. Shield) 的論文，刊在 Trans. Roy. Soc. (倫敦)，A，卷 244，第 47 頁，1952。

[5] Proc. London Math. Soc.，卷 31，第 140 頁，1900。

[6] Sitzsber. Math-Naturw. Abt. bayer. Akad. Wiss. 卷 35，第 249，504 各頁，1905，慕尼黑。

[7] 見長勒斯 (F. A. Willers) 的論文，刊在 Z. Math. u. Physik. 卷 55，第 225 頁，1907。并参看虎勃 (L. Föppl) 的論文，刊在同上注，卷 51，第 61 頁，1921。

[8] Proc. London Math. Soc.，卷 31，第 144 頁，1900。

[9] “数学的彈性理論” (Mathematical Theory of Elasticity)，第 4 版，第 274 頁，1927。

[10] ZAMM，卷 5，1925。

[11] 見哥罗波夫 (A. Коробов) 的論文，刊在 Bull. Polytech. Inst. 1913，基輔。在板中心作用一集中力由納台研究出来；見他所著“彈性平板” (ElastischePlatten)，第 315 頁，1925。

[12] Phil. Trans.，(A)，卷 198，第 147 頁，1902。

长以及圓筒在两块剛硬平板間的受压都已作过实驗，他用貝塞尔函数写出其解式来。在一个长圓筒中由于沿圓周的一个窄条地带上作用着均布法向压力而产生的应力分布是极有实用意义的，因为它近似地相当于将一个短領圈緊箍在一个长軸杆上所引起的应力分布。这个問題已經由几个学者在进行討論[1]，现在已得出对这个問題的充分資料。

彈性微分方程的一般解近来已引起工程师們的注意了。包沁涅斯克指出变位的三个分量 u, v 及 w 可用三个双調和函数来确定[2]。拔甫考維奇 (П. Ф. Папкович)[3] 更指出包沁涅斯克的解式还可加以簡化而用下列形式来表示：

$$u=B\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_1,\quad v=B\frac{\partial w}{\partial y}+\phi_2,\quad w=B\frac{\partial w}{\partial z}+\phi_3$$

式中 B 为一常数，

$$w=w_0+\frac{1}{2}(\phi_1 x+\phi_2 y+\phi_3 z)$$

函数 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 及 ω_0 均满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

这个一般解由紐伯尔 (H. Neuber)[4] 独自得出，他用它来求解許多带有沟槽或椭圓孔的圓軸产生应力集中的实际問題[5]。紐伯尔也将他的解法用到二維应力分布上，导出了一些公式，用来計算沟槽或椭圓孔中的以及一块薄板在其平面上承受拉力、剪力或弯曲的各种应力集中系数。紐伯尔所著的书中[6]所列出的許多图表用来分析机械零件的应力集中是非常方便的。

83 彈性的二維問題

本世紀中在掌握彈性的二維問題上获得了更大的进展，在实际应力分析中使用精确解已极为普遍。美斯納格[7]采用多项式形式的应力函数解出了二維問題，

[1] 虎勃 (A. Föppl 及 L. Föppl) 著“应力与变形”第2版，卷 2，第 141 頁，1928。巴頓 (M. V. Barton) 的論文刊在 J. Applied Mechanics, 卷 8, 第 97 頁, 1941; 南金 (A. W. Rankin) 的論文, 刊在 J. Applied Mechanics, 卷 11, 第 77 頁, 1944; 脫南特 (C. J. Tranter) 和克拉格斯 (J. W. Craggs) 的論文, 刊在 Phil. Mag., 卷 38, 第 214 頁, 1947。

[2] “位能的应用” (Application des Potentiels), 第 281 頁, 1885, 巴黎。

[3] Compt. rend. 第 513 頁, 1932。

[4] ZAMM, 卷 14, 第 203 頁, 1934。并参看 Ing. Arch., 卷 5, 第 238～244 頁, 1934; 卷 6, 第 325～334 頁, 1935。

[5] 苏斯威尔研究过空球壳的情况, 見 Phil. Mag., 1926, 以及格第尔的論文, 刊在 Trans. ASME, 卷 55, 第 39 頁, 1933。椭圓孔的一般情况經薩多夫斯基 (M. A. Садовский) 与斯特恩堡 (E. Sternberg) 研究出来, 見 J. Applied Mechanics, 卷 16, 第 149～157 頁, 1949。

[6] 紐伯尔所著“刻槽应力理論” (Kerbspannungslehre), 1937, 柏林。

[7] Compt. rend., 卷 132, 第 1475 頁, 1901。

并且将結果应用到几个狭长矩形截面梁的弯曲問題上去。他証明了用材料力学的基本公式能得出自由端受載悬臂梁的法向应力和剪应力的正确数值。他也証明了均布載荷梁的精确解对基本公式所作的改正值很小，在实际应用上可以忽略不計。

里比尔 (M. C. Ribière)[1] 应用富勒級数来討論矩形梁的弯曲。費朗对該項問題作了进一步的研究[2]，他将一般解应用于具有实用价值的一些特殊情况中。兰姆 (H. Lamb)[3] 考虑一条无限长的矩形带，在等距离間隔内作用着方向上下交錯的等集中力。由此，他研究了由一个集中載荷所产生的撓度。卡尔曼[4]再次研究該問題，导出了計算一根簡支梁由一个集中力产生出的撓度的精确公式。

富勒級数曾被克列布希用来研究过圓形板(参看第56节)，也被文思开 (O. Venske)[5] 用来研究过圓环。廷普[6]研究了几种特殊情况，得出了計算圓环段弯曲的哥罗温 (X. C. Головин) 解式，該圓环段的弯曲是由于其两端作用有力和力偶所引起的。圓环組成了多連通域的最簡单情况，計算此情况的一般解包含有多值項。廷普通过下述方式得出多值解的物理意义：他考虑了切断圓环时所能发生的殘余应力，将一端对他端移动某一距离，然后用某些方法将它們連接起来。正如以上所述(参看第71a节)，米歇尔对多連边界的二維問題解法作出了一般性討論[7]。他指出如果沒有体积力且各面力的合力在每一边界上都等于零时，应力分布将与材料的彈性模量无关。在采用光测彈性法来分析应力的場合里，这个結論具有很大的实用价值。明德林 (R. D. Mindlin)[8] 討論过在圓盘上任一点处承受集中力的情形。作为一个受力圓环的特例，作者本人[9] 也討論过沿一直徑方向作用着两个相等而反向的力的受压問題。經証明在距載荷作用点某一距离所取定的横截面上，由尹克勒基本理論得出的双曲綫应力分布在实用上是足够精确的。其他关于

[1] 見他的論文"矩形杆弯曲的各种情况"(Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles), 1889, 波尔多 (Bordeaux)。

[2] Phil. Trans., (A), 卷 201, 第 63 頁, 1903。

[3] 兰姆的論文，刊在 Atti congr. intern. matemat., 4th Congr., 1909, 罗馬, 卷 3, 第 12 頁。

[4] Abhandl. aerodynam. Inst. Tech. Hochschule Aachen, 卷 7, 第 3 頁, 1927。

[5] Nachr. Ges. Wiss. 第 27 頁, 1891, 格廷根。

[6] Z. Math. u. Physik, 卷 52, 第 348 頁, 1905。

[7] Proc. London Math. Soc., 卷 31, 第 100 頁, 1899。并参看佛尔特拉 (V. Volterra) 的論文，刊在 Ann. école norm., 第 3 組, 卷 24, 第 401～517 頁, 1907; 虎勃 (A. Föppl) 的論文，刊在 Tech. Mech. 卷 5, 第 293 頁, 1907。

[8] J. Appl. Mechanics, 卷 4, 第 A-115 頁, 1937。

[9] 作者本人的論文，刊在 Bull. Polytech. Inst. 1910, 基輔; Phil. Mag., 卷 44, 第 1014 頁, 1922。

圓环变形的例子也分别由費朗[1]和雷斯勒 (H. Reissner)[2] 討論过。結合着滚柱軸承的应力分析，納尔逊 (C. W. Nelson)[3] 也研究过沿徑向作用于环的内外边緣的两个相等而反向的力的問題。

在沟槽、小嵌縫以及各种形状的孔洞等处所发現的应力集中也是具有很大的实际意义的，从許多例子中已求出二維彈性問題的精确解。刻希 (G. Kirsch)[4] 分析过在一块受单向均匀拉力的薄板内环繞一个圓孔的应力分布。这个解式証明孔的边緣上(在垂直于作用拉应力方向的直徑两端)将发生最大应力，它較作用应力大三倍。这样(也許是第一次)，就証明了研究孔洞产生局部不規則应力分布的重要性。从那时起，工程师們对应力集中問題做出許許多多理論上和实驗上的研究。豪兰 (R. C. J. Howland)[5] 考虑了有限寬度的薄板在其对称軸上有一个圓孔的情况。比斯克萊 (W. G. Bickley)[6] 研究过力作用于孔的边緣上的情况。哥罗索夫 (Г. В. Колосов)[7] 以及随后的英格里斯 (C. E. Inglis)[8] 研究过橢圓孔，而作者本人[9]也研究过用一个有細孔的小圓球来加强圓孔边緣时的应力减低。还有其他一些学者[10]研究过两个圓孔以及更多个圓孔的問題。

許多重要的彈性二維問題都已經用复变函数解出。这种方法基本上应归功于哥罗索夫[11]和他的学生穆斯希里施維里。从穆斯希里施維里所著的书中[12]可以看到这方面的参考书目，其中包括一些主要的俄文书籍。

对飞机那样的薄壁結构作应力分析时，常需研究如图 236 所示截面的梁的弯曲。翼緣寬度 a 及腹板間的距离 a 比起梁的跨度来并不小，因此必須考虑有效寬度(effective width)和剪力迟滞的問題。这类問題的

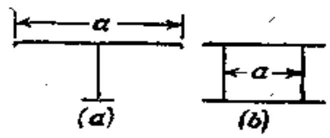


图 236

[1] "工程論文选集" (Selected Engineering Papers)，第 12 期，土木工程学会发行，1924，倫敦。

[2] Jahrbuch Wiss. Ges. Luftfahrt，第 126 頁，1928。

[3] J. Applied Mechanics，論文 50-A-16，在美国机械工程师学会上提出，1950 年 12 月。

[4] VDI，卷 42，1898。

[5] Trans. Roy. Soc. (倫敦)，(A)，卷 229，第 49 頁，1930；卷 232，第 155～222 頁，1932。

[6] Trans. Roy. Soc. (倫敦)，(A)，卷 227，第 383 頁，1928。

[7] 論文集，1910，圣彼得堡。

[8] Trans. Inst. Naval Architects，1913，倫敦。

[9] 作者本人的論文，刊在 J. Franklin Inst.，卷 197，第 505 頁，1924。

[10] 韦伯的論文，刊在 ZAMM，卷 2，第 267 頁，1922；薩多夫斯基 (M. A. Садовский) 的論文，刊在 ZAMM，卷 8，第 107 頁，1928；豪兰(R. C. J. Howland)的論文，刊在 Proc. Roy. Soc. (倫敦)，(A)，卷 148，第 471 頁，1935。

[11] 見前面所提过的論文并参看刊在下列杂志的論文，Z. Math. u. Physik，卷 62，第 383～409 頁，1914。

[12] "数学彈性理論中几个基本問題" (Some Fundamental Problems of the Mathematical Theory of Elasticity) (俄文)，1949，莫斯科——本书已由赵惠元同志譯出，科学出版社出版，1957。譯者附注。

近似解已經由一些学者提供出来了,相应的参考书目可参看施瓦拉(E. Chwalla)[1]、雷斯勒(E. Reissner)[2]以及哈治阿古里斯(J. Hadji-Argyris)和卡喀斯(H. L. Cox)[3]等人的論文。

由于各种結构物采用了木材和其他各向异性的材料,使工程师們的注意力都集中到各向异性体的理論研究。在研究此項二維問題中有了一些进展,其中假定了薄板的彈性可由下式来确定:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E_1}\sigma_x-\frac{\mu_1}{E_2}\sigma_y$$

$$\varepsilon_y=-\frac{\mu_2}{E_1}\sigma_x+\frac{1}{E_2}\sigma_y$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}$$

式中 $E_1\mu_1=E_2\mu_2$。利用这些关系式,可导出类似于各向同性情况中所使用的計算应力函数的微分方程。列赫尼兹基(С. Г. Лехницкий)[4]得出了这个方程計算矩形梁、圓环以及圓形或椭圓形孔的各种解法,它們都和上面提过的各向同性板的解法相类似。

84. 板与壳的弯曲

在近代結构物中广泛使用比較薄的板和壳促使板与壳的理論有所发展。虽然有关的方程式是由克希霍夫导出的,而且也在声学上用过,但在工程上广泛使用薄板理論还是在二十世紀才开始的。列维(M. Lévy)与艾思坦納夫(E. Estanave)(参看第 68 节)研究了两对边簡支而其他两对边具有任意边界条件的矩形板。这在实用上是具有重要意义的,工程师們又研究了各种特殊情况的載荷制出最大撓度和最大弯矩的一些表来。其他呈椭圓形的、三角形的以及呈扇形的一些薄板也都研究过,而着重介紹薄板弯曲的书籍亦有問世[5]。对于某种問題还沒有得出精确解的,或者該項解式采用級数表示不能适合实际需要的,工程师們只能轉回到近似分析方面。在薄板理論中已广泛地利用着里兹法,它能得出很有用的結果。在一些复杂的情况中,应用了有限差分方程,必要的資料都可用数值运算而获

[1] Stahlbau, 卷 9, 第 73 頁, 1936。

[2] Quart. Applied., Math., 卷 4, 第 268 頁, 1946。

[3] Aeronaut. Research Council (英国), Rept. 1969, 1944。

[4] 列赫尼兹基著"各向异性板" (Anisotropic Plates) (俄文本), 1947, 莫斯科。本书关于这个問題有較全面的叙述(譯者注——本书已由胡海昌同志譯出,由科学出版社出版)。

[5] 作者本人的"彈性理論" (俄文本)卷 2, 1916 圣彼得堡;納台的"彈性板" (Elastische Platten), 1925, 柏林;加留金的"彈性薄板" (Elastic Thin Plates), 1933, 莫斯科。

得[1]。

許多工程問題中也遇到四边都固定的矩形板，对于这种情况作数学分析是有許多困难的。第一个作出能适合于数値运算的对此种問題的解法应归功于科加洛維奇（Б. М. Коялович）[2]。后来又由波布諾夫（И. Г. Бубнов）[3]略加簡化，波布諾夫算出了各种尺寸薄板的最大撓度和最大弯矩的数値表。伊凡士（T. H. Evans）[4]也根据作者本人的解法[5]算出了許多更精細的表来。

在板上作用一个集中力的情况引起了对载荷作用点处局部应力的研究。这是不能用平板基本理論来完成的。这个問題曾由納台[6]和沃諾斯基-克里格尔（S. Woinowsky-krieger）[7]討論过。还有一些学者[8]研究了一个集中力作用在各边簡支的矩形板上的情况。作者本人也研究过一个集中力作用在各边固定的平板上的情况，該項研究在前面所提过的那篇向第五次国际会議提出的論文里有所叙述，这个問題也曾由楊氏（D. Young）[9]研究过。

板被一列等距离支柱所支承的問題在鋼筋混凝土設計上具有很大的实用价値。关于这个問題的第一个近似解由格拉斯霍夫[10]作出，并由列惠（V. Lewe）[11]作了进一步的研究。这个問題在前面提过的納台和加留金（Б. Г. Галеркин）的书中也有过討論。关于該項問題更近期的研究可参看沃諾斯基-克里格尔的論文[12]。

关联到公路建筑上所用平板的应力分析，在彈性地基上的平板也引起許多人的注意，特別在魏斯特迦德的著作中[13]。芬特（J. Vint）和艾尔果德

[1] 見馬古斯（H. Marcus）的"彈性网的理論"（Die Theorie elastischer Gewebe）第2版，1932，柏林。并参看霍尔（D. L. Holl）的論文，刊在 J. Applied Mechanics，卷3，第81頁，1936。

[2] 見他的博士論文，1902 圣彼得堡。

[3] 見波布諾夫所著"船舶結构理論"（Theory of Structure of Ships）（俄文本）卷2，第465頁，1914 圣彼得堡。

[4] J. Applied Mechanics，卷6，第A-7頁，1939。

[5] 見 Proc. 5th Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938。

[6] 見他的"彈性板"（Elastische Platten），第308頁。

[7] Ing.-Arch. 卷4，第305頁，1933。

[8] 見納台的論文，刊在 Bauing，第11頁，1921；作者本人的論文，刊在 Bauing，1922，第51頁。并参看加留金的論文刊在 Messenger Math. 卷55，第26頁，1925。

[9] J. Applied Mechanics，卷6，第A-114頁，1939。

[10] 見他的"彈性与强度的理論"（Theorie d. Elasticität u. Festigkeit），第2版，第358頁，1878。

[11] 見他的"无梁楼盖"（Pilzdecken）第2版，1926 柏林。本书对这方面作出較全面的叙述。

[12] ZAMM，卷14，第13頁，1934。

[13] 見 Ingenieuk. 卷82，第513頁，1923；并参看他的論文刊在 J. Public Roads, 1926, 1929, 1933 各年。

(W. N. Elgood)[1] 以及穆飞 (G. Murphy)[2] 还对这类平板作过实驗。

大量使用木板和鋼筋混凝土板促使各向异性板的弯曲理論有所发展。虽然格赫林(Gehring)[3] 做出了这項工作的第一步，但是可供实用的一些解式大部分还是由胡伯(M. T. Huber)达成的。他那許多关于这方面的著作都收集在"工程上重要的各向异性板靜力問題"(Probleme der Statik technisch Wichtiger orthotroper Platten) 一书中 (1929 年于华沙出版)。也可参考他最近出版的彈性理論方面的书[4]。这方面更进一步的成就主要应归功于苏联工程师們，这些結果都收集在前面所提过的列赫尼兹基所著的书中。

在薄板基本理論中系假定撓度比起厚度来是小得多的。在大撓度情况下，应該考虑到薄板中央面的伸长；这些方程式已由克希霍夫[5]和克列布希 (参看第 56 节)导出。它們都是非綫性的，因此很难处理，克希霍夫也只将它們用在中央面伸长均匀的最簡单情况中。在这方面的进展是由一些工程师所完成的，特别是研究有关船壳的应力分布那些工程师。波布諾夫[6]考虑一块均匀受載的狭长矩形板的弯曲，他将这个問題化为一根狭长条的弯曲，并根据船舶建造中常常遇到的各种边緣条件解出了这个問題。他又編制了能大大簡化应力分析的計算表，現在已在造船工业上被广泛应用。作者本人[7]討論了沿边緣均匀分布着力偶作用时圓板的大撓度，从而研究了基本綫性理論的精确限度。进一步研究此問題的是韦氏 (S. Way)[8]，他根据理論和实驗研究了固定边圓板均匀受載时的弯曲。他也分析了均匀受載的矩形板[9]并且証明当两边比值 a/b 大于 2 时，其最大应力与波布諾夫根据一块无限长板計算所得的結果相差无几。

虎勃 (A. Föppl) 利用計算平板中央面所作用的应力的应力函数[10] 簡化了計算极薄平板大撓度的一般方程。平板必須"极薄"的条件已由卡尔曼予以消除[11]，

[1] Phil. Mag. 7th Series 卷 19, 第 1 頁, 1935。

[2] Iowa Eng. Exp. Sta. Bull. 卷 135, 1937。

[3] 見他的博士論文, 1860, 柏林。

[4] "彈性理論" (Théorie de L'élasticité) (波兰), Cracow, 卷 1, 1948; 卷 2, 1950。

[5] 見他的"数学物理,工程上的講演集" (Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik), 第 2 版, 1877; 并参看格赫林的論文中的克希霍夫的建議, Crelle's J., 卷 56。

[6] 这篇論文的英譯本見 Trans. Inst. Naval Architects, 卷 44, 第 15 頁。

[7] Mem. Inst. Engrs. Ways of Communication, 卷 89, 1915。

[8] Trans. ASME, 卷 56, 第 627, 1934。并参看菲德霍佛的論文,刊在 Luftfahrt-Forsch., 卷 21, 第 1 頁, 1944, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Math.—naturw. Klasse, Abt. IIa, 卷 155, 第 15 頁, 1946。

[9] 見他的論文刊在 Proc. 5th Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938。

[10] 見他的"工程动力学" (Technische Mechanik), 卷 5, 第 132 頁, 1907。

[11] 見他的"机械构造的强度"(Festigkeit im Maschinenbau),数学知識百科全书,卷 4,第 311 頁,1910。

他的方程已由納台引入书中（前已提及），并由列危（S. Levy）[1] 用来研究矩形板的大撓度。

推导板的基本理論方程式时，系假定板中平行于中央平面 xy 的每一薄层是处于平面应力状态，此时只有应力分量 σ_x, σ_x 及 τ_{xy} 不等于零。在較厚的板中得出問題的全解是非常有用的，其中須考慮到所有的六个分量。这类解式中有些已經由圣維南在他所譯克列布希的书[2]中列出。有些对圆板的基本精确解已为科罗波夫（A. Коробов）[3] 得出，米歇尔[4]对板的精确理論作了一般討論，而勒夫（A. E. H. Love）在他那本关于彈性力学的书[5]中作了进一步的发展。最近板的精确理論已引起工程师們的重視，有些問題已得到完全解决。值得特別提出的是伏諾斯基-克里格尔[6]和加留金[7]两人的論文。

由于薄壁結构日漸推广的結果，薄壳理論在现代也引起許多人的注意。在許多薄壳問題中，如忽略其弯曲且假定应力系均匀分布在結构物的厚度上，已可得出滿意的解式。对于几种回轉曲面，特别是球形和圓柱形[8]曲面，其薄膜应力（membrane stresses）都已研究出来。薄壳弯曲的一般理論是由阿朗（H. Aron）[9] 及勒夫[10] 提出来的，而第一次将此理論用于工程实用上的乃是斯脫拉（A. Stodola）对等厚度錐形壳的应力分析[11]。雷斯勒（H. Reissner）[12] 研究了等厚度受对称載荷的球壳。他指出弯曲应力主要是由于沿結构物固定边緣作用的反力所产生，由此他导出了計算这些力的微分方程。梅斯勒（E. Meissner）和他的学生一起，利用这些方程对一些具有实用意义的問題得出了精确解[13]。这些精确解的适用性視解

[1] 見 Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, 846, 847, 853。

[2] 見該譯本第 337 頁。

[3] 見作者本人所著"彈性理論"，第 315 頁，1934。

[4] Proc. London Math. Soc. 卷 31，第 100 頁，1900。

[5] 見第 4 版，第 473 頁，1927。

[6] Ing.—Arch. 卷 4，第 203, 305 各頁，1933。

[7] Compt. rend. 卷 190，第 1047 頁；卷 193，第 568 頁；卷 194，第 1440 頁。

[8] 关于傳記，見佛柳芝（W. Flügge）的"薄壳的靜力学与动力学"（Statik und Dynamik der Schalen），1934，柏林。格尔克曼（K. Girkmann）的"平面网状結构"（Flächentragwerke），第 2 版，1948，維也納。

[9] J. Reine u. ang. Math. 卷 78，第 136 頁，1874。

[10] Phil. Trans. (A)，卷 179，第 491 頁 1888。

[11] "蒸汽透平"（Die Dampfturbinen），第 4 版，第 597 頁，1910 柏林；并參看克尔勒（H. Keller）的論文刊在 Schweiz. Bauztg. 1913 年，第 111 頁，以及"穹窿計算"（Berechnung gewölbter Böden），1922 柏林。

[12] "杏勒-布累斯劳紀念册"第 192 頁，1912。

[13] 梅斯勒的論文刊在 Physik. Z, 卷 14，第 343 頁，1913；波里（L. Bolle）的論文刊在 Schweiz. Bauztg. 卷 66，第 105 頁，1915；杜波恩（F. Dubois）的論文刊在 Promotionsarb. 1916；苏黎世；杭尼格尔（E. Honegger）的論文，刊在 ZAMM，卷 7，第 120 頁，1927。

式中級数展开收斂的速度而定，对于較薄的壳則收斂較慢。为了克服这些困难，布魯門脫 (O. Blumenthal)[1] 和格斯克勒 (J. W. Geckeler)[2] 提供了近似法，极为适用。哈佛士 (A. Havers)[3] 研究了球壳上非对称的載荷分布。至于圓柱形壳的理論也受到从事鍋炉及管綫設計方面的几位学者的注意[4]。

85. 彈性稳定

由于在工程結构物上（特別在桥梁、船舶和飞机方面）广泛使用了鋼料和高强度合金，彈性不稳定已成为一个非常重要的問題[5]。关于各种結构构件稳定的条件，无論在理論上或者在实驗上，近年来都迫切需要作出广泛的研究。以前受压构件側向压屈的問題是工程师們所关切的唯一問題，然而現在就需要解决很多其他的重要問題了。前面已經講过对于梁的側向压屈問題，普兰道尔研究过狭长矩形截面而作者本人則研究过工字梁。

开口薄壁截面受扭的問題对于工字梁側向压屈具有实用意义。角鋼截面受扭压屈最簡单的情况已經被研究出来(图 237)[6]。瓦格勒 (H. Wagner)[7] 作出了象飞机結构中所用的那些薄壁截面压杆受扭压屈的一般研究，卡普斯 (R. Kappus)[8] 又提出了更精确的理論根据。从那时起，許多工程师都在研究梁的側向压屈和压杆的受扭压屈的理論，它不仅在飞机制造方面，而且在桥梁建造方面都得到广泛应用。特别要提出来的是格底尔[9]的成就，他不仅研究了一根隔离的压杆在不同条件下的稳定，而且也研究了与彈性薄板固結在一起的一根压杆的稳定。利用最大变形理論，他得出一个确切的証据，証明了瓦格勒的受扭压屈理論所根据的假定是正确的[10]。尼南德尔 (H. Nylander)[11] 对工字

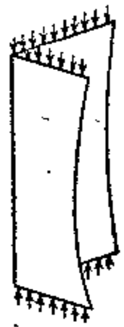


图 237

[1] Z. Math. Physik, 卷 62, 第 343 頁, 1914。

[2] Forschungsarb. 第 276 期, 1926 柏林。并参看 Ing.—Arch. 卷 1, 第 255 頁, 1930。

[3] Ing.—Arch. 卷 6, 第 282 頁, 1935。

[4] 关于壳的理論的历史見格斯克勒的“物理手册” (Handbuch der Physik), 卷 6, 1928; 佛柳芝的“薄板的靜力学与动力学” 1934 柏林; 作者本人的“飯与壳学” (Theory of Plates and Shells), 1940。

[5] 柴格勒 (H. Ziegler) 給出彈性理論中稳定标准的一般討論。見 ZAMM, 卷 20, 第 49 頁, 1952。

[6] 見作者本人的論文, 刊在 Bull. Polytech. Inst. 1907 基輔。并参看普拉斯 (H. J. Plass) 的論文刊在 J. Applied Mechanics, 卷 18, 第 285 頁, 1951。

[7] 見他的論文刊在“丹澤高等工业学校 25 周年紀念册”(Festschrift Fünfundzwanzig Jahre Technische Hochschule Danzig) 第 329 頁, 1929。

[8] 見德国航空年鉴(Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung), 1937; 及 Luftfahrt-Forsch. 卷 14, 第 444 頁, 1938。

[9] Cornell Univ. Eng. Exp. Sta. Bulls. 27, 1941, 及 28, 1942。

[10] J. Applied Mechanics, 卷 17, 第 383 頁, 1950。

[11] Proc. Roy. Soc. Swed. Inst. Eng. Research, 第 174 期, 1943。

梁側向压屈也有过貢献，他在这个問題上作出許多实驗研究。施瓦拉[1]研究非对称截面梁的側向压屈得出了一般方程，該方程对于工字梁可作为一个特例来处理。作者本人[2]研究了各种开口截面薄壁构件的弯曲、扭轉和压屈的基本理論。符拉索夫[3]在他的书中对于受扭压屈理論发展了一个与众不同的近似法，并且指出圣維南原理不能适用于薄壁构件，他說，在Z形截面杆件两端的翼緣上作用着弯曲力偶，可能产生扭曲，就是一个例子。

由于俄国海軍中发生了一些結构上的問題，作者本人研究过矩形板在其中央面上受力的彈性稳定[4]。布里安 (G.H. Bryan) (参看第62节)已經解出了各边簡支矩形板均匀受压的最簡单情况，不过在船舶制造中工程师常遇到的却是其他种类的边界条件，需要作更精细的計算才能求出应力的临界值。那时所解的問題都是对許多特殊情况而作的，并編制了应力临界值表以供应用。

研究彈性稳定問題經常要用到微分方程，要得出精确解比較困难，因此必須依靠一些近似法来計算临界力。作者本人[5]曾发展出一个方法，該法系考虑一个系統的能量(象雷萊用来近似地計算过彈性系統振动頻率那种系統的能量一样)作为根据的，曾用来解决过許多稳定問題。例如，有一根受压的柱子，我們可以假定出受压屈柱子的撓曲曲綫的某一表示式，使其能滿足端部条件，于是根据下面的条件来計算載荷的临界值，即压屈时柱所增加的应变能必与压力所作的功相等。这样，由于假定的撓曲曲綫是取得与在此系統中引入附加約束的情况相等，所以我們所得出的临界載荷值經常比实际的稍高。这样可避免柱子循原定的假定曲綫以外的其他曲綫形状压屈。将这种附加約束引入以后，临界載荷只能得出較大的值。在假定曲綫的表示式中取用几个参数，依靠参数的变換可使曲綫形状得到稍許改变，这样便能求得更为近似的临界載荷值。将这些参数調整到能使临界載荷的表示式为最小值，我們便可得出更精确的临界載荷值来。这个方法能适用于計算好几种情况，包括杆系的情况在内。这样，組合柱、空式桥的受压弦以及有几种框架系統的稳定都研究出来了。

以各种加勁肋加强的加强板問題也可用近似法来解决。在船舶制造中我們就常常遇到有一組縱向或横向加勁肋加强的均匀受压矩形板。对于这种加强板，

[1] 見 Sitzsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, 卷 153, 第 25～60 頁, 1944。

[2] J. Franklin Inst. 卷 239, 第 201 頁, 1945。

[3] 符拉索夫著“彈性薄壁构件”1940, 莫斯科。

[4] Bull. Polytech. Inst. 1907, 基輔。并見德譯本,刊在 Z. Math. Physik, 卷 58, 第 357 頁, 1910。

[5] Bull. Polytech. Inst. 1910, 基輔,并見法譯本,刊在 Ann. ponts et chaussées, 1913, 巴黎。

压应力的临界值可用能量法来决定，并已算出一些表以簡化加勁肋尺寸的选擇。矩形板在剪应力作用下的压屈也可用同样的近似法求解，并研究了合理选择加勁肋的方法[1]。自从采用长跨度鈑梁以后，腰鈑加强的問題也是用同样方法来求解的[2]。

受压曲杆的彈性穩定对于建造薄拱具有实用价值。赫尔布林克（E. Hurlbrink）[3]解出了等截面的两鉸圓弧拱，而作者本人[4]則研究了微小初曲率問題。梅依尔（R. Mayer）[5]研究了三鉸拱，而格伯尔（E. Gaber）[6]則对这种結构物作了实驗。研究固定端等截面均匀受压圓弧拱的有尼古拉依（И. Николай）[7]而研究变截面拱的則有斯脫尔曼（E. Steuermann）[8]、靖尼克（A. H. Динник）[9]以及菲德霍佛（K. Federhofer）[10]等人。哈林克斯（J.A. Haringx）[11]对螺旋彈簧的穩定作出了最全面的研究。

薄壳的彈性穩定在現代飞机构造中具有头等重要的意义。目前的成就主要是圓柱形壳，軸向受压的問題已經由一些作者[12]討論过。經証明不仅能发生对称形状的压屈，而且也能发生非对称形状的压屈。在研究潜水艇艇壳的彈性穩定中，圓柱壳在軸向及側向压力联合作用下的穩定問題已由米齐斯（R. von Mises）[13]研究出来。作者本人[14]研究了薄曲板嵌块的軸向受压，而列吉特（D. M. A. Leggett）[15]也研究了在剪力作用下薄曲板嵌块的压屈。施維林

[1] 見作者本人的論文，刊在 Mem. Inst. Engrs. Ways of Communication，卷 89，第 23 頁，1915。无限长矩形板的情况是由苏斯威尔独立地研究出来的，見 Phil. Mag. 卷 48，第 540 頁，1924。

[2] 見作者本人的論文，刊在 Eisenbau，卷 12，第 147 頁，1921；工程界，卷 138，第 207 頁，1934。关于用加勁肋加强板的压屈的进一步研究，可参見巴布雷（R. Barbré）的論文，刊在 Bauing. 卷 17，1936；施瓦拉的論文也刊在 Bauing. 卷 17，1936。

[3] Schiffbau，卷 9，第 517 頁，1908。

[4] J. Applied Mechanics，卷 2，第 17 頁，1935。

[5] Eisenbau，卷 4，第 361 頁，1913。

[6] Bautech. 1934，第 646 頁。

[7] Bull. Polytech. Inst. 卷 27，1918，圣彼得堡；ZAMM，卷 3，第 227 頁，1923。

[8] Ing.—Archiv. 卷 1，第 301 頁，1930。

[9] 工程技术公报（Вестник инженеров и Тех.）第 6，12 期，1933。

[10] Bauing. 卷 22，第 340 頁，1941。

[11] Philips Research Repts. 卷 3，1948；卷 4，1949。

[12] 罗倫茲（R. Lorenz）的論文，刊在 VDI，卷 52，第 1766 頁，1908；Physik. Z. 卷 13，第 241 頁，1911。作者本人的論文，刊在 Z. Math. u. Physik，卷 58，第 378 頁，1910；Bull. Electrotech. Inst. 卷 11，1914，圣彼得堡。并参看苏斯威尔的論文，刊在 Phil. Mag. 卷 25，第 687 頁，1913；Trans. Roy. Soc.（倫敦），(A)，卷 213，第 187 頁，1914。

[13] VDI. 卷 58，第 750 頁，1914。

[14] 見作者本人的"彈性理論"（俄文本），卷 2，第 395 頁，1916。

[15] Proc. Roy. Soc.（倫敦），(A)，卷 162，第 62～83 頁，1937。

(E. Schwerin)[1] 和唐尼尔 (L. H. Donnell)[2] 分别研究了圓柱形壳在扭力作用下的压屈。

承受純弯曲的圓柱形薄管的稳定性已由佛柳芝 (W. Flügge)[3] 研究出来。他証明其临界压应力較之对称压屈的軸向受压圓柱壳要高出30%。关連到飞机的制造工作，在理論上和实驗上都試过各种加强圓柱壳的方法。如果一个圓柱形壳用等距离的縱向及沿圓周安設的肋来加强，这个問題便可化簡为研究一个各向异性壳的压屈問題来处理。关于这个問題的微分方程已由佛柳芝 (W. Flügge) 确定出来，周繼傳(譯音) (Dji-Djüän Dschou)[4] 在这方面作过一些計算。

佐野里 (R. Zoelly)[5] 和紐特 (Van der Neut)[6] 注意过均匀受压的球壳，佐野里研究了压屈的对称形状，而紐特在这方面又作了更普遍的研究。比齐諾 (C. B.Biezeno)[7] (研究了小曲率球面弓形的压屈問題)。

利用計算撓度的綫性微分方程已得出計算板与壳的临界应力的理論公式，这个公式是根据假設撓度为甚小时推导出来的。当載荷較其临界值为大时，則檢查板与壳压屈的变形必須采用最大应变理論。瓦格勒[8]指出具腹鈑极薄的鈑梁在腹板已发生压屈后还能支承相当大的附加載荷，他作出了計算此极限載荷的近似公式。卡尔曼[9]討論了受压矩形板的极限載荷并得出一个計算有效寬度的近似公式。作者本人[10]和特利菲茨与馬奎雷 (K. Marguerre)[11] 对这个問題作过进一步的研究。根据对薄壳压屈作出的一些实驗証明：压屈一般在实际載荷較理論計算值小得多时就会发生。解释这种現象的人有卡尔曼和錢学森[12] 两人，他們利用大撓度理論証明了实現眞正稳定平衡形式所需的載荷值較由經典理論所得的为小。这个問題又由唐尼尔[13] 和佛莱德里希 (K. O. Friedrichs)[14] 两人作了进一步的研究。

---

[1] Repts. Intern. Cong. Applied Mechanics, Delft, 1924; ZAMM, 卷5, 第235頁, 1925。

[2] Natl. Advisory comm. Aeronautic. Rept. 479, 1933。

[3] Ing.—Arch. 卷3, 第463頁, 1932。

[4] Luftfahrt-Forsch. 卷11, 第223頁, 1935。

[5] 論文集, 1915 苏黎世。

[6] 論文集, 1932, 德尔夫特。

[7] ZAMM, 卷15, 第10頁, 1935。

[8] Z. Flugtech. u. Motorluftschiffahrt, 卷20, 第200頁, 1929。

[9] Trans. ASME, 卷54, 第53頁, 1932。

[10] "彈性稳定理論" (Theory of Elastic Stability), 第390頁, 1936。

[11] ZAMM, 卷16, 第353頁, 1936; 卷17, 第121頁, 1937。

[12] J. Aeronaut. Sci. 卷7, 第43頁, 1939; 卷8, 第303頁, 1941。

[13] J. Applied Mechanics, 卷17, 第73頁, 1950。

[14] 卡尔曼周年紀念集, 第258頁, 1941。

彈性稳定問題通常在物体各部分尺度中有一个或两个极小尺度的物体中引起(郎:薄条或薄板与薄壳)。不过对于象橡皮那样在彈性极限内能产生很大变形的材料，则稳定問題也会在所有各尺度相同的物体中引起。最早討論这类問題的是苏斯威尔[1]。对彈性稳定基本理論作出进一步研究的人有比齐諾与亨斯基[2]以及比沃特[3]和特利菲茨[4]。

86. 振动与冲击

現代的机械經常要分析由于动力上的起因而产生应力的許多問題。例如：軸的受扭振动、渦輪叶子板与渦輪盘的振动、轉軸的急轉、鉄路軌道和桥梁在滚动載荷下的振动以及各种基础的振动等重要实际問題，只有通过振动理論才能充分了解。也只有利用这个理論才能得到合适的設計尺寸，使机器的工作条件尽量不接近共振的临界状态(当发生强烈振动的地方)。

工程师們一致認为研究振动的首要問題之一是輪船螺旋桨軸杆的受扭振动問題。佛剌姆 (Frahm)[5] 也許是第一个从理論上和实驗上研究这个問題的人，他証明，在发生共振的地方，扭曲应力很大，就会因疲劳而引起突然断裂。自从他发表了那篇著名的論文以后，許多工程师們都对受扭振动进行了研究，不仅对螺旋桨軸杆方面，而且也涉及具有許多轉动装置的机器曲軸那样更复杂的情形。这个問題可以想象和化成为求解一組具有常系数的綫性微分方程。由此可导出頻率方程式，当轉动装置的数目增加时，此方程式各系数的数值計算和方程式本身的数值解将更加复杂。在实际应用中我們常常会遇到有許多轉运装置組成的系統，需要費很多功夫才能求定各系数的数值并解出頻率方程式，这样做是不合算的。因此必須应用不用导出頻率方程式而能計算頻率的近似法。在計算低頻率时，用雷萊的方法通常可获得滿意的結果。无論低頻率或者高頻率都可用逐步求近法来計算。这个方法是由維安尼洛(L. Vianello)[6] 提出来的，他曾用此法計算过压杆的压屈载荷。斯脫拉在其所著汽輪机的一书中应用这个方法計算了軸杆的主頻率。比齐諾和格兰美尔两人合著的书中[7]对此方法作了全面討論，而克洛特(K. Klotter)[8]。则对研究受扭問題中所提出的各种方法作出了更全面的評論(各

[1] Trans. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 213, 第 187～244 頁, 1913。

[2] Proc. Acad. Sci. 卷 31, 第 569～592 頁, 1928, 阿姆斯特丹。

[3] Proc. 5th Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938; 及 Phil. Mag. (7), 卷 27, 第 468～489 頁, 1939。

[4] ZAMM, 卷 13, 第 160～165 頁, 1933。

[5] VDI, 1902, 第 797 頁。

[6] VDI, 卷 42, 第 1436 頁, 1898。

[7] "工程动力学" (Technische Dynamik), 1939, 柏林。

[8] Ing.-Arch. 卷 17, 第 1 頁, 1949。

种方法相互比較)。

軸与梁的横向振动也具有很大的实际重要性。十八世紀中就研究过棱柱杆振动的最簡单情况，其解法包括在声学方面的书里。将这些解应用在横截面尺寸与长度比較下并不甚小的梁，或者高頻率振动方式占主要地位的梁的那些实际情况时，必須导出一个更完全的微分方程，其中要考虑到剪力对撓度的影响[1]。經常横截面尺寸沿梁的长度而变化。象这样的梁其振动的精确分析只能按最簡单的情况来进行[2]，而且一般須依靠一个将微分方程积分的近似法来进行。这些方法对于求算船舶的横向振动频率[3]占有首要地位。它們經常是以上述的維安尼洛所首創的逐步求近法的概念为根据的。两端装有附属装置的棱柱杆的振动在实用上也极为重要，其振动的基本方式已經研究出来了[4]。

在动载荷作用下桥梁的横向振动問題仍然继續引起工程师們的注意。1905年，克魯劳夫(A. H. Крылов)[5]得出了这个問題的全解，他将滚动载荷的質量忽略不計而假定为一不变的力在不变的速度下越过一根棱柱形梁。作者本人曾研究过象一辆不完全平衡的机車通过桥梁时所发生的那种脉冲载荷的情况[6]。研究指出脉冲力在共振的情况下能产生相当大的振动。英格里斯 (C. E. Inglis)[7] 也研究过这个問題，他用一些簡化的假定考虑了滚动質量的效应。普遍地討論滚动質量的效应要推沙侖康普 (A. Schallenkamp)[8]，他还用小模型作出一些实驗，发覺实驗所得的撓度曲綫与理論計算非常相符。艾莱(R. S. Ayre)，乔治·福特(George Ford) 和雅可布逊 (L. S. Jacobson) [9] 三人在斯丹福大学对一个运动力在两跨連續梁上产生的振动作了理論上和实驗上的研究。

关联到汽輪机設計的改进，工程师們研究了几种重要的振动問題。带有一个圓盘的軸的高速运轉首先由虎勃 (A. Föppl)[10] 在理論上和实驗上作过研究。

---

[1] 見作者本人的"彈性理論"(俄文本)，卷 2，第 206 頁，1916，并参看 Phil. Mag. (6)，卷 41，第 744 頁；卷 43，第 125 頁。

[2] 見瓦德 (P. F. Ward) 的論文，刊在 Phil. Mag. 卷 25，第 85～106 頁，1913；及浦尼克論文集，1915，爱卡杰里諾斯拉夫。

[3] 对船舶振动各文献作出非常完整的評論，而且将各种方法进行了比較，应归功于拔甫考維奇 (П. Ф. Папкович)，見 Appl. Math. Mechanics (俄文本)，卷 1，第 97～124 頁，1933。

[4] 見作者本人的論文，刊在 Z. Math. u. Physik，卷 59，1911。

[5] Math. Ann. 卷 61，1905。

[6] 見作者本人的論文，刊在 Bull. Polytech. Inst. 1908，基輔；Phil. Mag. 卷 43，第 1018 頁，1922。

[7] "鉄道桥梁振动方面的数学論著" (A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges)，1934，劍桥。

[8] Ing.—Arch. 卷 8，第 182 頁，1937。

[9] J. Applied Mechanics，卷 17，第 1，283 頁。

[10] 土木工程，卷 41，第 333 頁，1895。

对这个問題作出深入研究是在斯脱拉所著汽輪机的一书中。肯勃尔 (A. L. Kimball)[1] 研究了滞后現象对于軸杆高速运轉的效应。渦輪叶子板有时因振动过大而产生破裂。許多工程师們研究了这个問題。現在我們这里正在研究横向力和軸向力联合作用下变截面杆的振动。在計算基本頻率时，一般是采用雷萊法[2]的。为了减弱这种效应，常将叶子板成組相連，对于这种复杂的組合体的振动情况已經由施維林 (E. Schwerin)[3] 和克隆 (R. P. Kroon)[4] 分别加以討論。

旋轉圓盘的振动是在渦輪机設計中所出现的另一个重要問題。斯脱拉[5]利用雷萊法作过理論上的研究，而甘培尔 (Wilfred Campbell)[6] 則作过实驗上的研究，甘培尔叙述了在圓盘运行中观測其振动的方法。对于圓盘振动作出非常完整的实驗研究的是瓦勒 (M. D. Waller)[7]，他发展了一个求克拉尼綫(Chladni lines) 的很有效的新方法。对于矩形板振动的研究也有許多进展，主要是瓦尔特·里兹 (Walter Ritz) 的划时代的研究成果（参看第 69 节）。丹納·楊 (Dana Young)[8] 最近将里兹方法应用于各种边界条件的矩形板的頻率計算中。

圓环及圓环段的振动問題在研究圓形框架、轉动的电气机械与拱时都会遇到。霍普 (R. Hoppe)[9] 研究过圓形截面的环在它本身所在平面内的弯曲振动，而米歇尔[10]研究过它在与本身所在平面相垂直的方向上的弯曲振动。巴塞特 (A. B. Basset)[11] 研究过上述圓环的受扭振动。还有一些作者討論过各种端部条件的圓环段的振动，其中对此問題作出非常完整的研究要算菲德霍佛[12]，他最近已把他在这方面的許多著述收集起来編成专书出版。

二十世紀中仍在继續研究彈性体的冲击。从許多鋼球的冲击实驗中証明了赫兹理論的正确性[13]。圣維南的圓柱形杆的縱向冲击理論已經由西雅士 (J. E.

---

[1] Phys. Rev. 1923; Phil. Mag. 第 6 組，卷 49，第 724 頁，1925。

[2] 見西林生 (C. B. Серенсен) 的論文，刊在 Ing.—Arch. 卷 8，第 331 頁，1937；美斯麦 (G. Mesmer) 的論文，刊在 Ing.—Arch. 卷 8，第 396 頁，1937。

[3] Z. Tech. Physik, 卷 8，第 312 頁，1927。

[4] Trans. ASME, 卷 56，第 109 頁，1934；Mech. Eng., 卷 62，第 531 頁，1940。

[5] Schweiz. Bauztg. 卷 63，第 112 頁，1914。

[6] Trans. ASME, 卷 46，第 31 頁，1924。

[7] Proc. Phys. Soc. (英国)，卷 50，第 70 頁，1938。

[8] J. Applied Mechanics, 卷 17，第 448 頁，1950。

[9] J. Math. (Crelle), 卷 73，1871。

[10] Messenger Math. 卷 19，1890。

[11] Proc. London Math. Soc. 卷 23，1892。

[11] "拱与圓环的动力学" (Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes)，1950，維也納。

[12] 靖尼克 (A. Н. Динник) 的論文，刊在 J. Russian Phys. Soc. 卷 38，第 242 頁，1906。

Sears)[1] 証明是与实驗相符的，他在試驗中用了圓端头的杆件。台波尔(D. Tabor)[2] 更研究了超过彈性极限的球的冲击。

作者本人[3]在理論上研究过球在梁上的側向冲击。将赫兹对于接触面上的变形理論和梁的側向振动理論結合起来，发現出能够算出冲击所經的时間，并且能够指出在冲击过程中經常出現一些球与梁之間的接触間断現象。这个結果已經由馬逊 (H. L. Mason)[4] 用实驗証实了。还有許多研究者[5]在作側向冲击的深入研究。关联到一些軍事上的問題，杆件在冲击情况下的塑性变形以及各种結构物的彈性和塑性变形最近受到极大的重視。

---

[1] Proc. Cambridge Phil. Soc. 卷 14, 第 257 頁, 1908; 井拿晋瓦格斯塔夫 (J. E. P. Wagstaff) 的論文, 刊在 Proc. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 105, 第 544 頁, 1924; 普鲁西 (W. A. Prowse) 的論文刊在 Phil. Mag. (7), 卷 22, 第 209 頁, 1936; 大卫斯 (R. M. Davies) 的論文, 刊在 Trans. Roy. Soc. (倫敦), (A), 卷 240, 第 375～457 頁, 1948。

[2] 工程界, 卷 167, 第 145 頁, 1949。

[3] Z. Math. u. Physik. 卷 62, 第 198 頁, 1914。

[4] J. Applied Mechanics, 卷 58, 第 A-55 頁, 1936。

[5] 見阿諾德 (R. N. Arnold) 的論文, 刊在 Proc. Inst. Mech. Engrs. (倫敦), 卷 137, 第 217 頁, 1937; 李氏 (E. H. Lee) 的論文, 刊在 J. Applied Mechanics, 卷 62, 第 A-129 頁, 1940; 齐勒 (C. Zener) 的論文, 刊在 J. Applied Mechanics, 卷 61, 第 A-67 頁, 1939; 土齐 (Zirô Tuzi) 及馬薩塔卡·尼齐达 (Masataka Nisida) 的論文, 刊在 Bull. Inst. Phys. Chem. Research (东京), 卷 15, 第 905—922 頁, 1936。

第十四章

1900～1950 年間的結构理論

87. 求解超靜定系統的新方法

結构理論在十九世紀的发展主要是桁架分析。通过假定各节点均为鉸接的方法使所有构件只承受軸向力，这样就可得出桁架分析的滿意解式。自从建筑工程中使用鋼筋混凝土以后，各种框架結构得到了广泛的采用。这些結构經常屬于高次的超靜定系統，其构件主要系承受弯曲作用。过去所发展的方法已經不适于分析这类系統，因此引用了以考慮变形为根据的一些新方法。

前面已經提过（第 66 节），在分析次应力时，最好把剛性节点的轉角作为未知量。系統地使用轉角来分析框架結构应归功于阿克逐尔·本笛克星（Axel Bendixen）[1]，他发展了所謂角变位移法(Slope-deflection method)。設剛架結构的节点位移可以忽略，则可应用著名的方程式[2]

$$M_{mn}=2K_{mn}(2\theta_{mn}+\theta_{nm})+M^0_{mn} \tag{a}$$

来計算作用于杆 mn 的 m 端的弯矩 M_{mn}(图 238)。θ_{mn} 及 θ_{nm} 为两端的轉角，取顺时針方向为正；$K_{mn}=EI_{mn}/l_{mn}$ 称为勁率(stiffness factor)；而 M^0_{mn} 为定端力矩(fixed-end moment)，即假設杆的两端被固定且仅受横向載荷 P 及 Q 作用时在 m 端所作用的力矩。如果在杆上作用的这些力矩为顺时針方向，则它們的符号取为正的。例如取图 239 所示的系統并假定在 ab, ac, ad 及 ae 各杆端作用的力矩均为未知量，我們必須导出并求解七个方程式；可是当我們假定剛性节点 a 的轉角 θ_a 作为未知量时，此問題便可簡化为只需一个方程式。只要我們把連接在 a 处的四根杆子的端部力矩总加起来使等于零，便能得出此方程

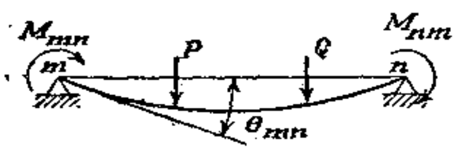


图 238

[1] 見他所著"剛架結构計算中 α 方程法"(Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen), 1914, 柏林。

[2] 在本笛克星的論文中，他更考慮到一些更普遍的情况。

式。利用端部力矩方程式(a)并假定 b, c, d 及 e 各端均为固定,可得

$$4\theta_a(K_{ab}+K_{ac}+K_{ad}+K_{ae})=-(M^0_{ab}+M^0_{ad}) \tag{b}$$

解出 θ_a 并代入(a)式,我們便求得此系統所有各杆的端部力矩。对于更为复杂的結构,我們只要考虑其中的几个节点(好比上例中的节点 a),对于每一节点,可以写出象(b)式那样的一个方程式。这些方程式的个数是和轉角的未知量个数相等的,故在計算出这些角度后,即可由(a)式求得所有的端部力矩。

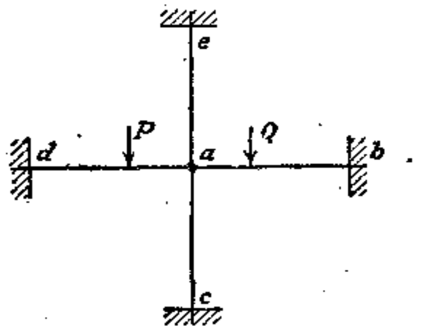


图 239

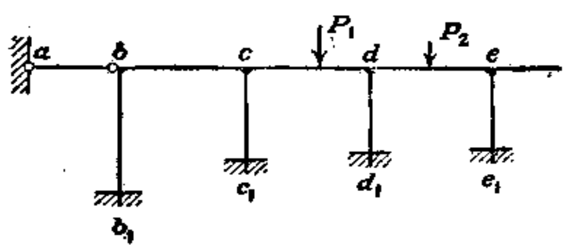


图 240

将刚架結构分析作进一步簡化的是卡里雪夫(K. A. Čališev)[1]。他采用逐步求近法,在每一步中将問題化成为只求解含一个未知量的一个方程式。設取一个刚架結构(如图 240 所示),其中引入水平杆 ab 以避免任何横向移动,他首先假定各节点均为固定以及当载荷 P_1, P_2 作用时都不发生轉动。在此假定下,他算出所有受載杆件的定端力矩并对于每一节点得出其总和来。带有負号的总和代表了作用于节点上的不平衡力矩(unbalanced moment)。将作用于各节点处不平衡力矩所产生的端部力矩与以前所算出的定端力矩相加(代数相加),便得出端部力矩的最后結果来。卡里雪夫用逐步求近法解出了下面这个問題。他用 M_c, M_d 及 M_e 表示这个系統的不平衡力矩(图 240),每次松开一个节点而其他节点則保持固定,算出轉角的第一次近似值。例如,在图 240 中先松开节点 d[2] 而認定其他各节点被固定,对于轉角 θ_d 的第一次近似值 θ'_d,他写出了和(b)式相同的方程式;即

$$4\theta'_d(K_{dc}+K_{de}+K_{dd_1})=-(M^0_{de}+M^0_{dc})=M_d$$

由此得

$$\theta'_d=\frac{M_d}{4\Sigma K_{mn}} \tag{c}$$

端部力矩相应的第一次近似值 M'_{mn} 可由各节点的轉角借下列著名的方程式

[1] 工程图表,第 1~2 期,1922;第 17~21 期,1923。

[2] 卡里雪夫建議从不平衡力矩为最大值的那个节点上开始。

$$M'_{mn}=2K_{mn}(2\theta'_{mn}+\theta'_{nm}) \tag{d}$$

求得。由于此方程式中 θ'_{mn} 和 θ'_{nm} 的数值还不精确，故总和 $-\Sigma M'_{mn}$ 还不等于节点 d 处的不平衡力矩 M_d。为了得到第二次近似值，卡里雪夫引入差值 $\Delta' M_d = M_d + \Sigma M'_{mn}$ 并将它代替 (c) 式中的 M_d，他得出一个修正值 $\Delta\theta'_d$。算出了各节点的这种修正值并将它們用于(d)式中，便能算出相应的修正值 $\Delta M'_{mn}$。把这些修正值加到端部力矩的第一次近似值中，于是得出这些力矩的更近似值。一般說来，在实际应用上象上面这样做一次就够精确了。如果需要更精确的近似值，可按照上述方式再做一次，得出第二次近似值 M''_{mn}，依此再求第三次近似值，其他由此类推。

如果不用方程式 (c) 及 (d) 来求逐次近似值，我們可以在每次松开一个节点而認定其他节点被固定时将不平衡力矩直接进行分配，也能达到同样的目的。这个逐步求近法是由哈第·克劳斯 (Hardy Cross)[1] 提出来的，在美国得到了广泛的应用。

在选定鋼結构的正常截面尺寸时，有时不仅須考虑材料开始屈伏时的載荷，而且須考虑使結构完全破坏时的載荷。分析指出，如果有两个結构物是按相对于屈伏状态的同一个安全系数設計的，这两个結构物之間，可以得出大不相同的相对于完全破坏的安全系数来。例如，考虑梁的純弯曲并假定建筑鋼在到达屈伏点以前服从虎克定律而超过此限度后它在沒有应变硬化的情况下伸长，则我們对于 (1) 屈伏开始，以及 (2) 完全破坏这两种极限状态的应力分布有如图 241a 及图 241b 所示。对于矩形截面 (图 241c) 的相应弯矩为

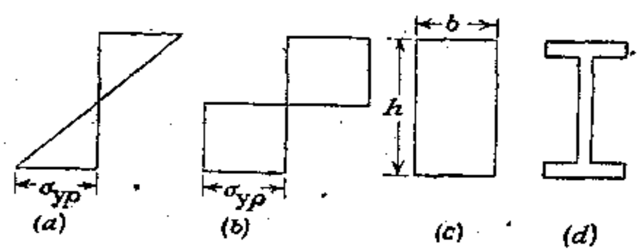


图 241

$$M_{yp}=\sigma_{yp}\frac{bh^2}{6},\quad M_{ult}=\sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$$

因此
$$M_{ult}:M_{yp}=1.5$$

对于工字梁，这个比值就小得多，視截面各尺寸的比例而定(图 241d)。由此可見，如果一根矩形梁与一根工字梁都按相对于屈伏状态的同一安全系数来設計，則相对于完全破坏的工字梁的安全系数較之矩形梁的为小。

斟酌了这个事实，有些工程师主張結构构件的截面尺寸应該根据极限强度来

[1] Trans. ASCE, 卷 96, 1932。

选择[1]。他們指出如果我們取极限强度状态下的应力分布如图 241b 所示，便能立即計算出相应的极限载荷。例如从图 242a 所示的两端固定而中央受载的梁中，我們能断定在梁的三个断面 a, b 及 c 处当弯矩达到其极限值 M_{ult} 时梁必发生完全破坏。对于任何其他载荷，情况将与两鉸杆的相同(图 242b)。于是极限载荷的大小可从相应的弯矩图中(图 242a)求得，由此得

$$\frac{P_{ult}l}{4}=2M_{ult}$$

如果我們循同样方法来分析象办公大楼那种建筑的高次超静定系統，并将鉸配置在弯矩达到极限值的所有各截面处，則决定极限载荷的問題就成为剛体的静力学上的簡单問題，而此系統的全部应力分析也能大大地加以簡化。

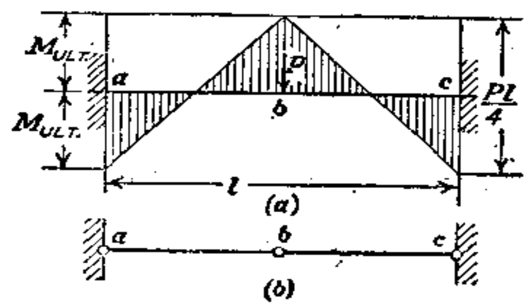


图 242

梁式柱的問題在分析既承受軸向力又承受横向力的細長杆系統中显得非常重要。第一个对此类問題作出系統研究的人是汪·德·佛里特(Van der Fleet)[2]。他不仅对此問題作了理論上的研究，而且算出了一些表，使問題的分析得到簡化。随着飞机結构的发展，梁式柱分析的問題被提到首要的地位，后来还有几个作家[3]編制出更精确的一些表可供簡化这类分析之用。

88. 拱与悬索桥

由于建筑工程中使用了鋼筋混凝土，拱的結构形式又被广泛地来用了，特别在桥梁建筑中为然。而拱的应力分析方法也成为研究的对象了。在无鉸拱系統中存在着三个超静定量，适当地选擇这些量，便能将这种分析大大地加以簡化。庫尔曼 (K.Culmann)[4] 介紹了所謂彈性中心 (elastic center) 并指出如果作用于拱的台座上的反力能以作用于其彈性中心的一力及一力偶来表示，便能求出此三个未知量(力的两个分量及一力偶)，每一个可由只含一个未知量的一个方程式中

[1] 見岂斯特 (N.C.Kist) 的論文，刊在 Eisenbau, 1920，第 425 頁，並看格俞陵 (M.Grüning) 所著："超静定桁架的安全載荷" (Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke…, 1926，柏林)一书中关于此問題的理論分析。

[2] Mem. Inst. Engrs. Ways of Communication, 1900～1903; Bull. Polytech. Inst. 1904，圣彼得堡。

[3] 极为完备的表是由尼尔斯 (A.S.Niles) 算出的，列入在他和尼維尔 (J.S.Newell) 合著的"飞机結构"(Aeroplane Structures) 第 2 版，1938。

[4] 見里特尔 (W.Ritter) 所著"图解靜力学的应用" (Anwendungen der graphischen Statik)，卷 4，第 197 頁，1906，苏黎世。

求得。他利用图解法来決定彈性中心的位置并計算反力，图解法中应用了相似于計算梁的撓度时所用的虛构力。其他各种拱的分析法是由木尔希 (E.Mörsch)[1]、米兰 (J.Melan)[2] 和斯特拉斯勒 (A.Strassner)[3] 提出来的。他們的著作里都列出了許多計算各种尺寸的拱的推力和弯矩的表。

使拱的中心綫和恒載的索曲綫相重合是有利的。如果在三鉸拱中能滿足这个条件，則每一断面的合力均与中心綫相切，只产生了均布压应力。在无鉸拱中，內力与結构物的变形有关，因此我們不能完全消除弯曲应力。如果这种拱的中心綫起始时与恒載索曲綫相重合，由于材料的压縮、混凝土的收縮和溫度的降低，将使拱的軸綫发生某些收縮。根据对三鉸結构的計算，拱的推力将有少許減小。因此，无鉸拱的推力綫在拱頂处将从假設的中心綫(与恒載索曲綫重合)向上偏移，而在拱脚处将向下偏移。在厚而平坦的拱中，我們可以預料在它的台座处会产生有害的拉应力，这种偏移就特别大。現在已經有許多方法用来減少巨大拱形建筑物的这种偏移。有时在拱頂和拱脚处装上临时性的鉸，使在偏心时能允許自由轉动。这样便能消除由恒載使中心綫压縮所发生的推力綫的偏移。偏移后用混凝土将临时性鉸处的接縫填塞，就成为中心綫与恒載索曲綫相重合的无鉸拱。为了允許由于混凝土收縮及溫度降低所产生的推力綫偏移，必須将临时性鉸安放得带有适度的偏心，使在偏移后填塞好接縫时，在拱頂及拱脚处产生弯矩，其符号須与預料到以后因混凝土收縮和溫度降低产生弯矩时相反。佛雷新尼特 (E. Freyssinet)[4] 建議在两个半拱之間拱頂处临时性鉸的接縫中装入填块。用了填块，則在用混凝土填塞接縫以前便能保証拱冠处推力綫的最有利位置。在具有連結梁的拱中，笛兴格尔 (F. Dischinger)[5] 建議使用拉纜将它們拉紧，这样，由于恒載作用和混凝土收縮所产生的弯矩便能大大減低[6]。目前在結构物中普遍采用了預加应力 (prestressing) 的方法。例如，用了这个方法，笛兴格尔对于最近在德国設計的一些鋼筋混凝土桥梁的重量已減輕很多。

在混凝土工程中采用預应力已經作出了許多实驗上的和理論上的成就[7]。使

[1] Schweiz. Bauztg. 卷 47, 第 83 頁, 1906; 并参看木尔希所著“鋼筋混凝土結构” (Der Eisenbetonbau) 卷 2, 第 3 部分, 1935。

[2] 米兰和格斯特斯奇 (T. Gesteschi) 合著“鋼筋混凝土拱桥手册” (Bogenbrücken, Handbuch für Eisenbetonbau), 卷 11, 1931。

[3] 斯特拉斯勒著“拱与拱桥” (Der Bogen und das Brückengewölbe), 第 3 版, 卷 2, 1927, 柏林。

[4] Génie civil, 卷 79, 第 97 頁, 1921; 卷 93, 第 254 頁, 1928。

[5] Bauing, 卷 24, 第 193 頁, 1949。

[6] Génie Civil, 1944。

[7] 計算初应力的方法和实驗的記述見下列一些书籍：里裝尔与拉台 (P.Lardy) 的“預应力混凝土” (Vorgespannter Beton), 1946; 苏黎世; 与格斯塔夫·馬格尼尔 (Gustave Magnel) 的“預应力混凝土” (Prestressed Concrete), 1948, 耿特 (Ghent), 英譯本則在 1950 年于倫敦出版。

用高强度的鋼絲，让它在混凝土硬化时一直保持着高度的拉应力，可以預制出混凝土中存在很大初压应力的鋼筋混凝土梁。这种預应力梁在混凝土开始出現裂縫以前所能承受的載荷比沒有預加应力的梁要大得多。为了簡化預加应力的手續，洛雪尔 (H. Lossier) 建議采用硬化时会膨脹的特种混凝土[1]。这样，鋼絲中产生了拉应力而混凝土中产生了压应力，就不必依靠預加应力用的特殊設备了。

設計拱的工程师們通常假定由彈性变形所造成的位移很小，因而在分析时只考慮初始的未經变形的拱的中心綫。但是在大跨度的拱中，撓度对冗余力数値的影响就很大[2]。如果这样，根据初始的未經变形的中心綫所作出的一些計算只能为認是第一次近似計算；利用这些計算，将前一次近似計算所指出的撓度加以計算，可得出更精确的結果来。

由于拱坝的大量使用，工程师們遭到了求解极复杂的应力分析的問題。在美国对于大拱坝的应力分析已提出了一个近似法，用一个水平拱系和一个竪立悬臂梁系迭加起来来代替坝，可以得到第一次近似計算。用試算法将水平的水压力分解为两个徑向分量，其一作用于拱上，另一作用于悬臂梁上。当載荷分配得能使各点上撓度的徑向分量不論在拱上的以及在悬臂梁上的数値相同时便为所求的情况。这个方法是由美国垦荒局的工程师們提出来的[3]。要想得出較好的近似値，在分析中应当考慮水平截面上和垂直截面上的扭矩的影响，沿拱中心綫在各水平截面上作用的剪力的影响以及在各徑向截面內相应的垂直剪力的影响[4]。为了校核这个理論，其中有几种重要情况曾用模型作过实驗。这个方法在联系到胡佛坝 (Hoover Dam) 的建造时，曾用一个塑胶模型做过試驗，用水銀作为載荷，所得变形結果与設計上的分析非常符合。最后在坝上进行实地測量的結果仍和計算的以及模型試驗的結果非常符合。

在悬索桥的分析和建造方面近年来得到了显著的进步[5]。十九世紀初期所建

---

[1] 笛兴格尔在建造阿尔斯列本 (Alsleben) 附近的賽尔 (Saale) 桥时，采用了这种預应力方法 1927～1928 年，在战时还用这种方法建造了許多飞机棚库。

[2] 見 J. 米兰的論文，刊在"工程知識手册" (Handbuch der Ingenieurwissenschaften)，卷 2，1906；以及刊在 Bauing. 1925。并参看薩赫諾夫斯基 (C.Сахановский) 的論文刊在 Stahlbau, 1931，以及佛里茨 (B. Fritz) 著"实体拱桥的理論与計算" (Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger)，1934，柏林。

[3] 見豪威尔 (C. H. Howell) 及雅奎斯 (A. C. Jaquith) 的論文，刊在 Trans. ASCE, 卷 93，第 1191 頁，1929。

[4] 見魏斯特迦德 (H. M. Westergaard) 的論文，刊在 Proc. 3d Intern. Cong. Applied Mechanics, 卷 2，第 366 頁，1931，斯德哥尔摩。

[5] 关于悬索桥較完整的历史由雅著拉 (A. A. Jakkula) 用傳記形式写出；見 Bull. Agr. Mech. Coll. Texas, 第 4 部，卷 12，1941。

造的那些悬索桥都不能达到預期的效果，因为它們的柔性太大，其中有許多由于动載荷或风力产生了剧裂的震动，都已經倒坍了。这种不利的柔度在以后建造的結构物中是用加劲桁架来克服的。过去也曾发現过由动載荷所发生的振动随着跨度的加长与桥重的增大而減小，因此，在大桥中不用加劲桁架也可得出滿意的条件。过去对于有加劲桁架的悬索桥作应力分析时，通常假定变形很小，用的是分析剛构桁架时的同样方法。第一个考虑加劲桁架变位的人是里特尔 (W. Ritter)，他是里加 (Riga) 工业学院的一位教授[1]。在这方面还有几位研究者有过进一步的貢献，而米兰 (J. Melan)[2] 則提出了一种适合实用的形式。在美国曾应用这个理論設計出許多巨大的悬索桥。此理論适用于全部跨长負有均布恒載而部分跨长則負有均布动載的情况。

为了选定最不利的載荷分布，哥达德 (T. Godard) 建議在稍有限制的意义下(認为应用迭加原理不精确，而应加限制) 应用影响綫[3]。作者用三角級数分析过加劲桁架的弯曲[4]。采用这个方法，一个集中力对加劲桁架弯曲的影响便能象作影响綫时所用的方法一样进行研究。这个級数方法已由布萊希 (H. H. Bleich)[5] 和斯脫尔曼 (E. Steurman)[6] 加以推广，前者在加劲桁架的几种端部条件下用了它，而后者在变截面的加劲桁架上用了它。正如斯士西 (F. Stüssi)[7] 所証实的，有限差分方程可用来分析变截面加劲桁架的弯曲。作者本人在韦氏 (S. Way)[8] 的合作下研究过具有連續三跨加劲桁架的悬索桥。

悬索桥理論仍不断引起工程师們的注意，最近在这方面发表过几篇論著[9]。悬

---

[1] 見 Z. Bauwesen, 1877，第 139 頁。

[2] 見他所著"鋼拱桥与悬索桥的理論" (Theorie der eisernen Bogenbrücken und der Hängebrücken)，第 2 版，1888，柏林。

[3] Ann. ponts et chaussées, 卷 8, 105～189 頁, 1894。

[4] Proc. ASCE, 卷 54, 第 1464 頁, 1928。馬丁 (H. M. Martin) 单独地証明能用三角級数分析加劲桁架的弯曲，刊在"工程"，卷 125，第 1 頁，1928。与米兰的級数法作出比較的是雅若拉，Pub. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng. 卷 4，第 339 頁，1936，苏黎世。

[5] 見他所著"悬索桥的計算" (Die Berechnung verankerter Hängebrücken)，1935，維也納。

[6] Trans, ASCE. 卷 94, 第 377 頁, 1930。

[7] Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng. 卷 4，第 531 頁，1936。并参看他的論文，刊在 Schweiz. Bauztg. 卷 116, 1940; 卷 117, 1941。

[8] Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng. 卷 2，第 452 頁，1934。

[9] 参考下列論著：阿特金逊 (R. I. Atkinson) 与苏斯威尔 (R. V. Southwell) 的論文，刊在 J. Inst. Civil Engrs. (倫敦)，1939，第 289～312 頁；克娄潑 (K. Klöppel) 与賴伊 (K. H. Lie) 的論文，刊在 Forschungshefte Stahlbau，第 5 期，1942，柏林；格朗霍姆 (H. Granholm) 的論文刊在 Trans. Chalmers Univ. Technol, 1943，哥登堡 (Göthonburg)；阿斯普倫德 (S. O. Asplund) 的論文，刊在 Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Research，第 184 期，1945，斯德哥尔摩；錫尔堡 (A. Solberg) 著"悬索桥設計" (Design of Suspension Bridges)，1946，特朗德海姆 (Trondheim)；俄尔逊 (R. Gran Olsson) 的論文，刊在 Kgl. Norske Videnskab. Selskabs. 卷 17，第 2 期。

索桥的自感应震动 (self-induced vibration) 問題已占极重要的地位，对这个問題最近已有几篇論文发表。这里还应該提到由阿曼(O. H. Amman)，卡尔曼、邓恩(L. G. Dunn)和伍德鲁夫(G. B. Woodruff)所提出的关于达可馬窄桥 (Tacoma Narrow Bridge) 破坏的研究报告以及雷斯勒 (H. Reissner)[1] 的論文与克娄溌 (K. Klöppel) 和賴伊 (K. H. Lie)[2] 合写的論文。

89. 鉄路軌道应力

大致从第一条鉄路建成的时候起，对于在动載荷作用下的鋼軌应力分析就已經引起工程师們的注意了。巴洛（参看第 23 节）將軌条認定为擱在两个支座上的梁，研究了各种截面形式鋼軌的抗弯强度。这样，如載荷为 P，支座間距离为 l，則最大弯矩將为 $0.250\,Pl$。尹克勒[3]將軌条看作擱在剛性支座上的連續梁，求得最大弯矩值为 $0.189\,Pl$。

齐美曼 (H.Zimmermann)[4] 对此問題作了进一步的研究，他編制出一些表来簡化尹克勒对彈性基础梁的分析方法并应用此理論来計算軌枕的撓度。他認定軌条为一根擱在彈性支座上的連續梁。由于軌枕之間具有适当的間距，垂直的軌条載荷是分布在几根軌枕上的，这样，各个独立的彈性支座便能用一个等效的彈性連續基础来代替。因此可用彈性基础梁的理論来分析鋼軌的应力和撓度[5]。用 K 表示基础模量，撓度曲綫(图 243)的微分方程將是

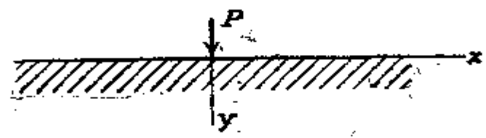


图 243

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-Ky \tag{a}$$

認定軌条为一根无限长的梁將(a)式积分，我們求得最大弯矩为

$$M_{\max}=\frac{P}{4}\sqrt[4]{\frac{4EI}{K}} \tag{b}$$

---

[1] J.Applied Mechanics, 卷 10, 第 A23～A32 頁, 1943。

[2] Ing.-Arch. 卷 13, 第 211～266 頁, 1942。

[3] 尹克勒著"鉄路建筑論文集" (Vorträge über Eisenbahnbau), 第 3 版, 1875, 布拉格。

[4] 齐美曼著"鉄路上部建筑的計算" (Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues), 1888, 柏林, 第 2 版于 1930 年也在柏林出版。并参看他的論文"上部建筑的計算" (Berechnung des Oberbaues), 刊在工程知識手册中, 卷 2, 第 1～68 頁, 1906。

[5] 这个簡化的理論經作者本人推广到俄国的鉄路系統中。見 Mem. Inst. Engrs. Ways of Communication, 1915, 圣彼得堡。由瓦修丁斯基用到波兰的鉄路系統中；見 Ann. acad. Sci. tech. Varsovie, 卷 4, 第 1～136 頁, 1937。在德国有薩勒(Saller)用过；見 Organ Fortschritte Eisenbahnw. 卷 87, 第 14 頁, 1932。并参看斯齐塔里 (E. Czitary) 在同一杂志中的論文, 卷 91, 1936。

相应的最大应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{S}=\frac{P}{4}\cdot\frac{\sqrt[4]{I}}{S}\sqrt[4]{\frac{4E}{K}} \tag{e}$$

式中 S 为軌条的截面模量。此公式中的第二个因子的因次为吋$^{-2}$，因之可断定对于几何相似的軌条断面以及 E/K 量的常数值，如果載荷 P 的增加与单位长度軌条的重量增加成同一比例时，則 $\sigma_{\max}$ 值将保持不变。

利用彈性基础梁的理論，对于作用在軌条上的載荷系統可以用迭加原理得出其弯矩图来。例如，图 244 即代表四个等載荷的弯矩图，其中 $I=44$ 吋^4，而 $K=1,500$ 磅/吋^2。一个孤立載荷 P 的 $M_{\max}$ 值可从(b)式取得，作为力矩标度的一个单元。由图可知，最大弯矩将在第一个及最末一个載荷的下面发生，它等于孤立載荷 P 所产生的弯矩的 75%。在几个載荷之間的一段軌条是向上弯成凸形的，相应的弯矩最大数值約为(b)式所算出的 25%。由此可知，当机車經过时，軌条任一截面内的应力大小和符号都会变换好几次。这就表明为軌条的疲劳破坏。

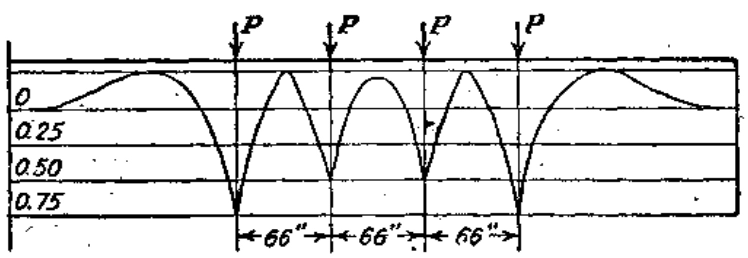


图　244

測量鉄路軌道在动載荷下变形的工作巳經做过許多实驗。不过以前作此項研究时所用的机械設备并不可靠。瓦修丁斯基 (A. Вдениотунский) 发明了一个光学方法成功地得出了鋼軌在一台运行中的机車的各个車輪下軌条内的弯曲应变和撓度的摄影記录[1]。

美国西屋电气公司 (Westinghouse Electric Corporation) 对軌道应力进行过大規模的試驗。在这些試驗中，用了磁性应变仪进行应变的測量[2]。这些实驗証明了彈性基础梁的理論用在軌道应力分析上是够精确的。实驗也証明了横向力

[1] 关于这些重要試驗的詳細叙述見瓦修丁斯基向道路工程师学会所提出的論文，1899 年于圣彼得堡发表。并参看 Verhandl. Internat. Eisenbahn kong., 1895～1898，以及瓦修丁斯基所著"鉄軌彈性变形的研究" (Beobachtungen über die elastischen Formänderungen des Eisenbahngleises)，1899，維斯巴登 (Wiesbaden)。

[2] 里特尔 (J. G. Ritter) 創制了最原始的仪器。更进一步的改进是由西屋电气公司工程师朗吉尔 (B. F. Langer) 和山伯格 (J. P. Shamberger) 两人完成的，他們做出了軌条应力的实驗。朗吉尔所著"实驗应力分析手册" (Handbook of Experimental Stress Analysis)，第 238 頁对这种仪器有較詳細的叙述。

和垂直載荷一样能使軌条产生弯曲和扭轉。这些效应是不能忽略的[1]。为了选擇在現場試驗中計算这些力的最理想的方法，在实驗室事先作出实驗，研究了受彈性支承的軌条的弯曲和一个集中載荷在作用点处的局部应力[2]。通过这項研究已确定出現場試驗中裝置应变仪的合理位置。

現場实驗指出动力系数对車輪运轉所产生的軌道应力有很大的影响。瓦修丁斯基在上面所提过的論文里指出了踏面上有些扁平的貨車輪較之踏面光滑的重机車輪能使軌条产生更大的撓度。車輪踏面的扁平口和軌面的凹口对于动力效应显然是最首要的一个因素，对于这方面作出理論研究的是彼得洛夫(H. П. Петров)[3]，他也是軸承摩擦的流体动力理論的首創者。他在推导中不計軌条的質量，并将軌条看作为擱在等距离彈性支座上的梁，从而导出了和威里斯方程一样的微分方程(参看第40节)；該方程可用算术逐步法来积分。这样，計算軌条上的輪压力不仅要考虑軌条的弯曲而且还要考虑支座的彈性垂直振动和因軌面低凹而发生的車輪的垂直振动。

将鋼軌作为擱在整个彈性基础上的梁，以代替擱在各个分立的彈性支座上的梁，可以使这种分析得到簡化[4]。这样，軌面的凹口对鋼軌撓度的动力效应便能分析出来。例如，假設凹口的縱剖面綫(长度为 l，而深度为 δ)能用下式表示

$$y=\frac{\delta}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right) \tag{d}$$

可知由于这个凹口所产生的附加动力撓度是与 δ 成正比，而且与 T_1/T 的比值大小有关，此中 T 为将軌条看作为一个彈簧时，車輪在垂直方向振动的周期，而 T_1 为車輪越过此一凹口所需的时間。最大的附加撓度为 1.47δ，此撓度在速度对应于 $T_1/T=\frac{2}{3}$ 时发生。因此可断定由于凹口所发生的附加动压力大致与能使軌条产生静力撓度为 1.5δ 时的載荷相等。由此可知，在一定的速度下，很小的凹口也会产生相当显著的动力效应。在这个分析中，軌条質量比起車輪質量来很小，是略而不計的。如果时間 T_1 和軌条在彈性基础上的震动周期比起来要長得多，不計軌条的質量是可以的。

---

[1] 見作者本人的論文，刊在 Proc. 2d Intern. Cong. Applied Mechanics, 第407頁, 1926, 苏黎世。

[2] 見作者本人和胡吉尔合作写出的論文，刊在 Trans. ASME, 卷54, 第277頁, 1932。

[3] 見 Bull. Russian Imp. Tech. Soc. 1903, 及他的最后著作刊在 J. Depart. Ways of Communication.

[4] 見本书357頁注[5]中所提到的作者本人的論文；并参看作者本人另一篇論文刊在 Génie Civil, 1921, 巴黎, 第551頁。关于軌条上輪子的动力作用的进一步研究由荷魏 (B. K. Hovey) 做出，写在他的博士論文中，1933年于格廷根发表。

在推导(a)式时，系假定梁的任一断面处的撓度与該断面处基础所受的压力成正比。不过当我們把地基看作半无限弹性体时，梁上任一断面处的撓度将为沿梁长分布的压力的函数，于是撓度問題变为更复杂的了。比沃特[1]和馬奎雷 (K. Marguerre)[2] 对此作过更精密的研究。馬奎雷証明了这个更精确的理論所指出的梁内最大弯曲应力較之按基本公式所算出的約高出 20% 。

89. 船舰結构理論

二十世紀以来，在船艦結构設計中应用应力分析已获得巨大的成就，特别在兵舰設計方面为然。由于艦只的吨位日益增大，故船壳重量务求減小，以便装置更重的大炮和防卫設备并满足增加速率等要求，因此設計者遇到了許多新的問題。为了满足这些要求，他們已經集中到理論分析上去探求。

湯姆士·楊曾将兵艦假定为一根大梁并建議出作浮力曲綫和載重曲綫的方法，此两条曲綫的纵标距之差即为作用于"兵艦主梁"上的載荷。这种分析船艦纵向强度的方法已被普遍接受，而它的精确度也已經由直接試驗校驗出来了。从驅逐艦豺狼号(Wolf)[3] 以及后来又从驅逐艦普利斯登号(Preston)和布魯士号(Bruce)[4] 所作出的弯曲实驗証明，如果在計算船艦的抗弯剛度时已将某些鋼鈑因受压屈而减低其效能的实际情况考虑在内，則測得的撓度和应力能够和梁的理論相符。普利斯登号和布魯士号开始損坏时是由于受压鋼鈑和纵梁的压屈所致。

实驗証明，除了一般地考虑船艦主梁的抗弯强度之外，还須对截面突然改变之处的局部应力作出研究并作必要的加强措施。有些船舰在主結构甲板(或称强力甲板)上建造有一所仓面船室。記录下来的很多例子說明了无論在甲板上的或者在仓面船室的牆上的裂縫大多数都发生在轉角的地方。还有另一个重要的应力集中的情况是在一块强力甲板上靠升降口的几个角子处出現。这許多情况都显示裂縫是从这些处所开始而經过甲板逐漸扩展起来，致使船艦的安全受到严重的威胁[5]。甲板上孔口的应力集中是由英格里斯[6] 研究出来的，而圓形孔口的加强方

[1] J. Applied Mechanics, 卷 4, 第 1～7 頁, 1937 。

[2] ZAMM, 卷 17, 第 224～231 頁, 1937 。

[3] 見比尔斯 (J. H. Biles) 的論文，刊在 Trans. Inst. Naval Architects. 卷 1, 1905; 郝夫曼 (G. H. Hoffmann) 的論文，刊在同一杂志上，1925 。

[4] 見霍夫迦德 (W. Hovgaard) 的論文刊在 Trans. Soc. Naval Architects Marine Engrs. 1931, 第 25 頁; 并参看碁尔在海軍建筑师与造船工程师学会 (Society of Naval Architects and Marine Engineers) 会議上提出的論文, 1931 。

[5] 馬結斯迪克号 (S. S. Majestic) 事件可参看艾尔斯堡 (E. Ellsberg) 的"造船工程" (Marine Engineering), 1925 。关于列維坦号 (Leviathan) 的同样事件由威尔逊 (J. Lyell Wilson) 在下列論文中討論过，刊在 Trans. Soc. Naval Architects Marine Engrs. 1930 。

[6] Trans. Inst. Naval Architects, 1913, 倫敦。

法则是作者本人研究出来的[1]。

船舰横向强度的問題也經过許多造船技师作过研究，并且发展了各种分析构架变形的方法。这个問題在魚雷艇和潜水艇中特别重要。这些舰艇的构架很相似于封閉环圈，因之曲杆理論和在拱的理論中所用的一些方法都被用来分析这些构架[2]。

克累劳夫 (A. H. Крылов, 1863--1945) 的成就对于发展应力分析上的各种理論方法及其在船舰結构設計中的应用都起着重大的作用。关于这位偉大的工程师和科学家的主要功績应当在这里作个簡单的介紹[3]。当他还在海軍学校讀书的时候，他那优异的数学天才早已出人头地。他經常利用課余时間閱讀数学书籍，因此，当他从这个学校毕业时(1884年)，他所具备的数学基础已远远超出学校規定的教学大綱。在俄国海軍中参加实习之后，1888年进入海軍学院，在該校他特别爱好船舰理論和船舰的結构設計。由于他是一个最优秀的学生，毕业后(1890年)被留在該学院充任数学助教。1891年他改任船舰理論的

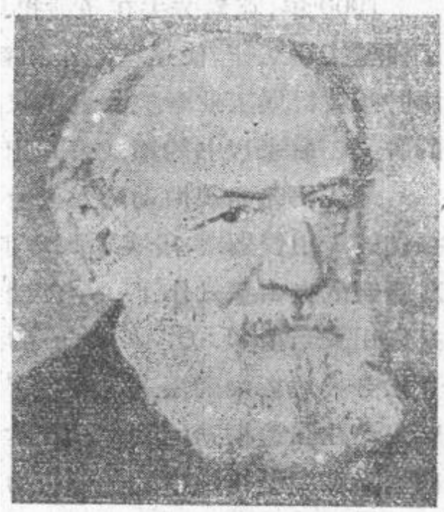


图 245 A. H. 克累劳夫

講师。作为这門課程的入門书，这位青年写出一系列关于近似計算的講义，并且說明怎样使数学家和天文学家所发明的計算方法也能被工程师所利用。以这些講义为基础，他随后出版了(1906年)一本关于近似計算的书。这本书在近似計算方面到現在还是最有用的书籍之一。

不久，克累劳夫从事于船舰在波浪中振动的理論研究。当时对于船舰左右搖摆的問題已經由佛劳德 (Froude) 研究过，但克累劳夫却从事研究更复杂的前后顛簸的問題。1896年他胜利地将此問題解决了，并且将这一成果用英文[4]和法文[5]发表出来。随后他继續研究船舰在波浪中的一般振动，并且将結論写成論文“船舰在波

[1] J. Franklin Inst. 卷 197，第 505 頁，1924。

[2] 見馬貝克 (M. Marbec) 的論文，刊在 Bull. Assoc, Tech. Maritime, 1908。

[3] 見克累劳夫著“我的回忆录” (My Reminiscences)，由苏联科学院出版，1945 年。并参看克累劳夫的訃聞，刊在 J. Applied Math, Mechanics (俄文)，卷 10，第 3 頁，1946。在訃聞里面列出克累劳夫生前所写的論文和书籍一覽表。

[4] 船舰在波浪中前后顛簸运动的新理論，見 Trans. Inst. Naval Architects, 1896，第 326～359 頁，倫敦。

[5] Bull. assoc. tech. maritime, 卷 8，第 1～31 頁，1897。

浪中振蕩的一般理論"(General Theory of the Oscillations of a Ship on Waves)[1]。这些著作使克累劳夫获得了船舰理論方面的权威地位。英国造船工程师学会以該学会的金質奖章贈給他，在他以前从来沒有外国人得到过这个荣誉。在研究船舰的振动时，克累劳夫注意船壳中因惯性力而产生应力的問題，提供了計算这种应力的有效方法[2]。他在俄国海軍中的几艘艦艇上利用他自己設計的一架极灵敏的伸长仪作了动力应力的实驗研究。

1900年，克累劳夫在圣彼得堡俄国海軍学院主持模型船塢。在該学院他改組了模型实驗工作，使这些工作和新建舰只的海上試驗能相輔进行。在同一时期，他协助圣彼得堡工业学院改組了該院的造船系，并替該院編写了一本关于船舰振动的講义。后来以书的形式公开出版[3]。

最先研究船舰振动的人可能是施里斯克(O. Schlick)[4]。他制出一架記录这种振动的专用仪器[5]，用实驗測定了各种振动方式的频率。克累劳夫在上述教程中对船舰的自由振动作了一个理論上的分析。在分析中，他将船舰假定为变截面梁，并采用亚当斯(J. C. Adams)的近似法[6]来积分寻常微分方程。大約在同一时期克累劳夫对桥梁的振动也发生了兴趣，他发表了上述(參看第86节)关于动載荷在梁上产生强迫振动的論文。在这篇論文里面所用的方法以后曾用来研究汽缸的縱向振动和測量枪炮中的气体压力[7]。

結合着船舶在波浪中振动的問題，克累劳夫研究出为达到稳定目的而用的回轉仪[8]，后来出版了一本关于回轉仪的书[9]。

这位科学家在"数学知識百科全书"里写过一节船舰理論[10]，他是应克萊恩的邀請(參看第79节)而写的，因为克萊恩正在收集关于力学这一卷的材料，这点我們在前面已經提过了。

---

[1] Trans. Inst. Naval Architects, 卷40, 第135～190頁, 1898, 倫敦。

[2] 見"工程", 1896年, 第522～524頁; 及 Trans. Inst. Naval Architects, 卷40, 第197～209頁, 1898。

[3] "船舰的振动"(俄文), 1936。

[4] 見 Trans. Inst. Naval Architects, 1884, 第24頁。

[5] 同上注, 1893, 第167頁。

[6] 見巴施佛特(F. Bashford)的"毛細作用理論的試驗，附亚当斯所用积分方法的說明"(An Attempt to Test the Theories of Capillary Action with an Explanation of the Method of Integration Employed by J. C. Adams), 1883, 劍桥。

[7] Bull. Russian Acad. Sci. 第6組, 1909, 第623～654頁。

[8] 見他的論文, 刊在 Bull. Assoc. Tech. Maritime, 1909, 第109～139頁。

[9] "回轉仪的基本理論及其在工程上的应用"(俄文), 苏联科学院出版, 1932年, 第394頁。

[10] 見"数学知識百科全书"卷4, 第3部分, 第517～562頁, 1906。

1908 年，克累劳夫負責建造俄国海軍的全部艦艇。那时俄国正在努力重建在日俄战爭中遭到严重損失的艦队。有些完全新型的战斗艦(无畏艦級，Dreadnoughts)剛在英国建成，而俄国也訂出了制造同类艦只的計划。在設計这些新型艦只中出現了許多新的問題，克累劳夫以他的丰富知識尽可能地用各种科学方法来謀求解决。他用数学分析来代替經驗法則，这种見解已被事实証明是极为成功的，在他的領导之下，有許多結构上的問題都得到了完滿的解决。他亲自参加这項研究并发展了一个分析彈性基础梁的新方法，这个方法大大地簡化了計算，特别是关于那些变截面梁的复杂問題[1]。他对于撓度很大的压屈支杆的彈性曲綫也作过全面的分析[2]。

作为他进行教学的成果，他出版了几本关于应用数学和力学方面的书籍。那本工程用偏微分方程曾引起許多工程师和物理学家的注意[3]，第一版在几天內就銷售一空。他的关于尋常微分方程的数值积分法一书已被譯成法文[4]。在他的"回忆录"(Reminiscences)[5]中曾說到他在公余时間总讀些天文学和数学方面的經典著作作为消遣。在这样的方式下，他发表了重要的著作"由少次观測中决定彗星和行星的軌道"(On Determination of Trajectories of Comets and Planets from a Small Number of Observations)一文[6]。他又承担了将牛頓的"物界原理"(Principia)譯成俄文的巨大工作；在翻譯过程中他加上了两百个以上的注解。在他生命史的后半期內，他还翻譯了欧拉的关于月球运动的新理論一书[7]。俄国科学院曾将克累劳夫的全部著作汇編成全集分为八卷出版(1936～1943)。

波布諾夫是克累劳夫的学生和同事，他設計了第一批俄国的无畏艦級战斗艦和潛水艇，并对船艦結构理論作过很重要的貢献。他是第一个将板的弯曲理論用到船艦結构設計中的人，他指出板在流体靜压力下的弯曲并不太小，因此对板的中央平面不仅須考虑其弯曲还要考虑其伸长。他导出这个問題的一般解，并制出一些数值表以簡化应用。这一成果得到俄国和其他国家的高度重視。关于这个問題的早期論文已被譯成英文[8]，而以后的成果則都包括在他所著"船艦結构理

[1] 这項研究的細节后来写成一本书，見"彈性基础梁的分析"(俄文)苏联科学院出版，第 2 版，第 154 頁，1931。

[2] Bull. Russian Acad. Sci. 第 7 組，1931，第 963～1012 頁。

[3] 海軍学院出版，第 2 版，1913；苏联科学院出版，472 頁，1932。

[4] "微分方程的近似数值积分应用于拋射体軌迹的計算"(Sur l'intégration numerique approchée des équations differentielles avec application au calcul des trajectoires des projectiles)，1927，巴黎。

[5] 参看第 48 节。

[6] 見 Publs. Naval Academy, 1911, 1～161 頁。

[7] 見 Publs. Russian Acad. Sci. 1934。

[8] Trans. Inst. Naval Architects. 卷 44，第 15 頁，1902。

論”(Theory of Structure of Ships)[1] 一书中。

縱向横向互联梁的理論在船舰設計中是极为重要的，波布諾夫在这个理論上貢献很大。他考虑了由一根橫梁支承的一組平行等距縱梁，指出可将这种支承看成彈性基础上的一根梁，并制出一些表来簡化这种梁的分析。随后波布諾夫将他的方法推广到有几根橫梁的情况中[2]。

在各种載荷和边界条件下对板的彈性稳定的分析在俄国无畏艦級战斗艦的設計中最先采用[3]。在一艘战斗艦入塢时只将主龙骨擱置在船塢上，对于横向間壁的彈性稳定和强度是会遇到很大困难的。为了解决这个問題，对于前面所提过的加勁板压屈理論(参看第 85 节)已有所发展，同时还用 15 呎長 7 呎寬的模型做了一系列的試驗。在分析縱横互联梁的弯曲中，应用了雷莱-里兹法[4]，从而得出了充分精确的解式。

所有这些关于船舰結构的应力分析的精萃方法都由拔甫考維奇(П. Ф. Папкович, 1887～1946)在他所著的下列书中加以严正的評論和扩充："船舰結构理論"卷 1, 1～816 頁, [构架与互联梁的理論(Theory of Frames and Interconnected Beams)], 1947 年莫斯科出版，以及卷 2, 1～960 頁, [板、壳的弯曲、压屈理論(Theory of Bending and Buckling of Plates and Shells)], 1941 年。这两卷书构成了船舰結构理論上最完整的現代論著。

---

[1] 这本重要著作的头两卷在 1912 年首先在圣彼得堡出版。第三卷关于船舰設計中結构理論的应用，还是油印的底稿。并参看作者本人著的"板壳理論"(Theory of Plates and Shells)——我国已有譯本，由王俊奎同志譯出，譯者附注，第 1—33 頁，1940; 以及韦氏(S. Way)在应用力学全国会議(National Meeting of Applied Mechanics)上所提出的論文，1933 年 6 月。

[2] 这类問題的进一步研究和这方面的傳記可参看海腾依(M. Hetényi)的"彈性基础梁"(Beams on Elastic Foundation)，1946 年于密西根大学出版社发行。并参看薩利兹契夫(J. M. Hlitčijev)"彈性理論"1950，貝尔格萊德(Beograd)。

[3] 作者本人曾以顧問工程师名义参加了这項工作(1912～1917)。

[4] 見作者本人的"材料力学"第 321 頁，1911 年——本书在我国有譯本，由王德荣同志譯出，譯者附注；"彈性力学"(俄文)卷 2，第 72 頁，1916 年——本书在我国也有譯本，由徐芝綸、吳永禎两位譯出，譯者附注。并参看作者本人的論文，刊在 ZAMM，卷 13，第 153 頁，1933。

人 名 索 引

(有[ ]的节数表示该人的历史资料)

三 画

四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

十 八 画

十 九 画

中英名詞对照

（数字表示节数）

七　画

十 画