

# 第一章 线弹性断裂力学基础

## 1.1 引言

断裂力学是近半个世纪以来发展起来的一门新学科。它主要研究带裂纹固体的强度和裂纹传播的规律。对于不同条件下的不同材料，人们往往根据自己的目的，将材料抽象为某种“理想物质”以反映某些最重要的特性。在研究断裂问题时，将材料抽象为理想线弹性体就是线弹性断裂力学。如果再考虑裂纹尖端塑性区就有弹塑性断裂力学。不少情况下，温度的影响和“时间效应”都不能忽略。从流变学观点出发考虑到材料的流变性能就有流变断裂学，它还可以细分为粘弹性断裂力学，粘弹塑性断裂力学，热粘弹性断裂力学，热粘弹塑性断裂力学等。目前只有线弹性断裂力学发展比较成熟，并已制定出规范（例如美国机械工程师协会 ASEM，锅炉与压力容器规范等）。编成手册应用于生产上。

断裂力学涉及内容很广，这里只介绍一些基础性的内容。中国有句古话：“吃一堑，长一智”。吃一次亏，出来一门新学科。断裂力学可以说是人类吃了大亏，从总结惨痛血的教训中产生的。生产推动了科学发展，科学反过来又促进生产以更高的速度向前发展。在这个过程中，旧的问题不断解决，新的矛盾又不断产生。最初，人们为了提高材料的强度防止脆断，制成了钢材等塑性材料。进一步提高塑性材料的强度是通过阻止屈服（阻止位错运动）来实现的。再进一步提高强度就出现了新的矛盾，强度高了，韧度却低了，构件常在应力不高，甚至低于屈服极限的情况下发生突然的脆性破坏。如焊接铁桥的突然倒塌，焊接轮船的脆性破坏，各种球罐的突然爆炸等等，均不能用传统的建立在连续性假设基础上的强度科学（如材料力学）来解释。随着生产的发展，大量采用新材料（高强度钢、复合材料、塑料）新工艺，新的工作条件（高温、高速、高压、低温）等，致使古典强度科学无法适应新的生产水平的需要。对低应力脆断事故进行大量分析研究表明脆性断裂是由于宏观缺陷或裂纹的失稳扩展引起的。有时，在裂缝的平衡状态达到失稳的临界状态以前还会出现缓慢的准静态亚临界扩展，最后达到临界状态使裂纹高速传播引起最终断裂。这样，强度科学不仅要通过阻止屈服以达到高强度，而且要通过阻止裂纹的扩展来达到高的断裂韧度。

断裂力学这门新的强度科学，扬弃了传统强度理论关于材料不存在缺陷的假设，承认缺陷或裂纹存在，把构件看成连续和间断的统一体，认为裂纹的存在是不可避免的。材料在生产过程中（冶炼、铸造、锻造、焊接、热处理），使用过程中（装配、摩擦损伤、腐蚀、疲劳、中子照射、氢渗入）都会使材料产生裂纹，裂纹尖端附近的局部强度已上升为主要矛盾。这些在传统连续介质力学中是作为次要因素被抹杀了的。

断裂力学是固体力学中研究带裂纹材料强度的学科。它着眼于裂纹尖端局部地区的

应力、位移场来研究带裂纹构件所承受的载荷和断裂韧度及裂纹尺寸间的定量关系，研究裂纹扩展的规律。考察裂纹对结构强度和使用寿命的影响，建立断裂判据。提出容许裂纹的设计方法，探讨如何控制和防止结构断裂破坏的措施。

早在 1920 年 Griffith<sup>[1]</sup> 为了解释玻璃、陶瓷等脆性材料的实际强度与理论强度的重大差异，就已经建立了裂纹扩展的能量判据。在经典能量平衡方程中加入了表面能这一项，它成功地说明了实际强度与最大裂纹尺寸之间的关系，而这一点是通常材料力学观点无法解释的。

Griffith 当年研究了下述问题：设在单位厚度板沿  $y$  轴方向均匀作用着  $\sigma$  使弹性伸长后的两端固定以隔绝外界能源。实验指出，当应力  $\sigma$  达到临界值  $\sigma_c$ ，裂纹开始扩展，增加其自由表面。问题是如何求出  $\sigma_c$ ，即确定什么条件下裂纹会失稳而自动扩展。

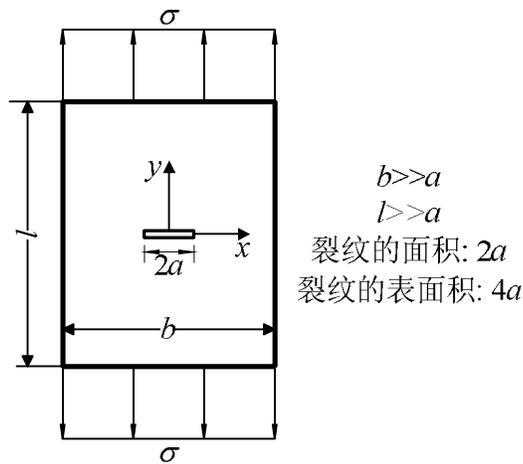


图 1-1 Griffith 带裂纹单位厚度板

可以这样来考虑问题，设想一个无裂纹的板受均匀应力  $\sigma$  拉伸，然后将两端固定，此时板单位面积内的弹性应变能为

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (1-1)$$

$E$  为 Young 氏模量。再设想沿  $Ox$  轴方向割开  $2a$  长的裂纹，由于裂纹表面应力的消失裂口弹性张开消耗一部分能量以形成新裂纹表面。设有裂纹后的应变能变为  $U$ ，则可算出弹性应变能释放为

$$U_c = U_0 - U = \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} = \frac{\pi \sigma^2 A^2}{4E} \quad (1-2)$$

裂纹是由其中心对称地向两端扩展。面积为  $A$  的裂纹上下两个表面能为

$$U_s = 2A\gamma_s \quad (1-3)$$

$\gamma_s$  为单位自由表面的表面能，简称单位表面能。

为了求得临界条件，下面设裂纹虚拟扩展  $\delta_a$ ，有三种情况：

$$\frac{\partial U_e}{\partial A} < \frac{\partial U_s}{\partial A}, \text{ 裂纹处于非扩展状态；}$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial A} > \frac{\partial U_s}{\partial A}, \text{ 裂纹处于失稳状态；}$$

$$G = \frac{\partial U_e}{\partial A} = \frac{\partial U_s}{\partial A} = 2\gamma_s, \text{ 临界状态。}$$

式中  $G$  称为能量释放率，或称裂纹扩展力。由(1-1)、(1-2)式还可见在两端位移固定的情况下， $G = \partial U_e / \partial a = -\partial U / \partial a$ ，因为  $U_0$  不是裂纹长度的函数。依(1-2)、(1-3)及上式有

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\pi \sigma^2 A^2}{4E} \right) = \frac{\partial}{\partial A} (2A\gamma_s) \quad (1-4)$$

临界状态的应力为  $\sigma_c$ ，依上式有

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} = \lambda \sqrt{\frac{E\gamma_s}{a}} \quad (1-5)$$

$$\lambda = \sqrt{2/\pi}, \text{ 平面应力}$$

$$\lambda = \sqrt{2/[\pi(1-\nu^2)]}, \text{ 平面应变}$$

Griffith 的裂纹失稳扩展条件如下

$$G \geq 2\gamma_s, \text{ 或 } \sigma \geq \sigma_c \quad (1-6)$$

长期以来被认为只适用于玻璃等脆性材料的 Griffith 理论直到 50 年代由 Irwin<sup>[2]</sup>-Orowan<sup>[3]</sup>捡起，加以修正用于金属材料的脆性断裂，成为断裂韧度概念的基础。他们认为 Griffith 的能量平衡中必须同时考虑裂纹尖端附近塑性变形耗用的能量。裂纹扩展时能量释放不但用于形成新的表面，对于塑性金属材料来说还要用于支付裂纹扩展前产生塑性变形的能量，以  $\gamma_s + \gamma_p$  代替  $\gamma_s$  得

$$\sigma_c = \lambda \sqrt{\frac{E(\gamma_s + \gamma_p)}{a}} = \lambda \sqrt{\frac{E\gamma_p}{a}} \quad (1-7)$$

$\gamma_p$  为裂纹扩展每单位面积时所消耗的塑性变形能， $\gamma_p$  远大于  $\gamma_s$ 。今后将把表面能理解为“有效单位表面能” $\gamma$ ，它代表裂纹扩展单位面积所需的不可逆功，并将  $G$  的临界值记为  $G_c = 2\gamma$ ，临界条件写为

$$G = G_c \quad (1-8)$$

1955 年和 1957 年 Irwin<sup>[4]</sup>又指出，能量观点相当于一种应力强度观点，当表示裂纹尖端应力场强弱度的应力强度因子达到其临界值（即材料的断裂韧度）时，裂纹便失稳扩展。脆性断裂基本上是在线弹性状态下发生的，不少情况下运用线弹性理论分析脆性断裂能给出比较满意的结果，但当裂纹尖端附近的塑性区不能忽略不计或者与粘弹性有

关的时间效应不能忽略不计时，线弹性断裂力学的应用就受到了限制。那时就要用到下面两章将要讨论的弹塑性断裂力学及流变断裂学。在本章中，我们认为裂纹体是理想线弹性体，问题归结为含裂纹体的线弹性力学分析。

## 1.2 裂纹前沿的应力、位移场

### 1.2.1 Westergaard 方法

Griffith 理论是从整体平衡得到的，但由于未分析裂纹前沿的应力、位移场，因而未能从细节上弄清。根据裂纹面的受力变形方式，可将裂纹分为三种类型：I 型（张开型）、II 型（滑开型）、III 型（撕开型），撕开型也称反平面剪切型。

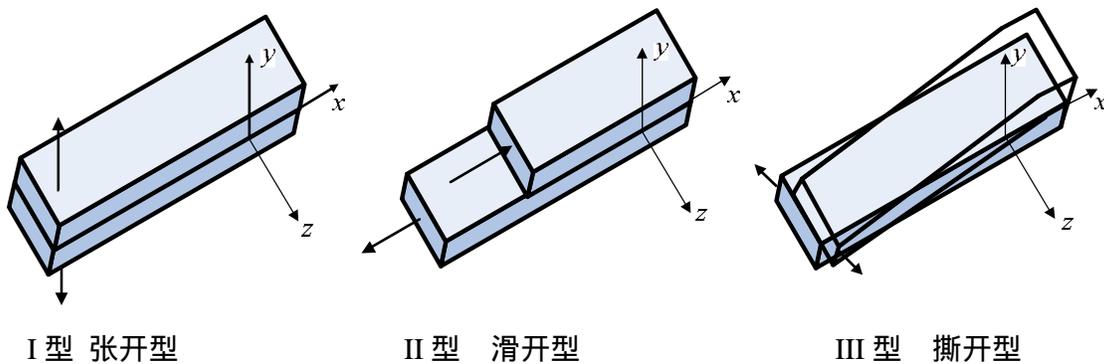


图 1-2 裂纹的三种类型

I、II 型裂纹问题属于平面问题。平面应力和平面应变是平面问题中的两种基本状态。利用表 1-2 改变  $E$  (Young 氏模量) 和  $\nu$  (Poisson 比)，可以使两种状态公式互换从而统一地进行处理。

表 1-1 平面问题的两种状态

平面应力	平面应变
$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$	$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$
$\varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E$	$\varepsilon_z = 0$
各应力、应变及位移分量均不是 $z$ 的函数	

表 1-2 平面问题里两种状态的公式互换

平面应力 平面应变	平面应变 平面应力
$\nu \rightarrow \nu/(1-\nu)$	$\nu \rightarrow \nu/(1+\nu)$
$E \rightarrow E/(1-\nu^2)$	$E \rightarrow E(1+2\nu)/(1+\nu)^2$
剪切模量 $\mu$ 不变	

III 型裂纹问题是反平面应变状态。平面应变状态的位移发生在  $xy$  平面内，位移分量为： $u \neq 0$ ， $v \neq 0$ ， $w = 0$ ，而反平面应变状态的位移发生在垂直于  $xy$  的平面中，位移分量为： $u = 0$ ， $v = 0$ ， $w \neq 0$ 。

不考虑体积力时，单连通域平面弹性理论问题归结为求应力函数 使得 满足双调和方程<sup>[5]</sup>

$$\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = 0 \quad (1-9)$$

及具体问题的边界条件。复连通域还要满足位移单值条件。求得应力函数 后，可依下式计算各应力分量

$$\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad (1-10)$$

式中 称为 Airy 应力函数。不难直接验证，若  $f_i$  ( $i=1,2,3$ ) 均是调和函数，即

$$\nabla^2 f_i = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f_i = 0 \quad (1-11)$$

则它们与  $x$ ， $y$  的线性组合

$$= f_1 + x f_2 + y f_3 \quad (1-12)$$

是双调和函数，即它们满足式(1-9)。

应力函数用复变函数表示时可用来解决许多裂纹问题。若复变函数  $Z(z) = \text{Re}Z + i\text{Im}Z$ ，在某区域上处处可导，则称  $Z(z)$  为该区域上的解析函数。设复变量  $z = x + iy$  的函数为复变解析函数，则其导数和积分仍为解析函数。复变解析函数的实部和虚部都是调和函数，且满足 Cauchy-Riemann 条件：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \text{Re} Z}{\partial x} &= \frac{\partial \text{Im} Z}{\partial y} = \text{Re} \frac{dZ}{dz} \\ \frac{\partial \text{Im} Z}{\partial x} &= -\frac{\partial \text{Re} Z}{\partial y} = \text{Im} \frac{dZ}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

设  $\chi(z)$ 、 $\varphi(z)$  为解析函数，令  $f_1 = \text{Re} \chi(z)$ ， $f_2 = \text{Re} \varphi(z)$  和  $f_3 = \text{Im} \varphi(z)$ ，可将(1-12)写成如下形式<sup>[6]</sup>

$$= \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (1-14)$$

Irwin<sup>[4]</sup>(1957)引用 Westergaard<sup>[7]</sup>应力函数(1939)建立了裂纹尖端奇异应力场。设  $Z(z)$  为复变解析函数并采用以下记号

$$\frac{d\bar{Z}}{dz} = \bar{Z}, \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}} = Z, \frac{dZ}{dz} = Z' \quad (1-15)$$

### 1.2.1.1 I型裂纹

Westergaard 选用如下的 为应力函数：

$$\phi_I = \operatorname{Re} \bar{Z}_1 + y \operatorname{Im} \bar{Z}_1 \quad (1-16)$$

式中下标 I 表示 I 型裂纹。由于(1-16)具有(1-12)的形式，它显然自动满足双调和方程(1-9)，依(1-10)各应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1' \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1' \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1' \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

对任何解析函数  $Z_1(z)$  都可得到依上式所确定的应力，问题归结为寻求一个解析函数  $Z_1(z)$ ，同时满足考虑问题的边界条件，为了求得位移分量，只须将应力(1-17)代入物理关系及应变-位移关系（几何关系）即可。以平面应变状态为例，将(1-17)代入平面应变状态条件下的物理关系

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x] \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

及几何关系

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1-19)$$

并积分得

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu) \operatorname{Re} \bar{Z}_1 - y \operatorname{Im} Z_1] \\ v &= \frac{1+\nu}{E} [2(1-\nu) \operatorname{Im} \bar{Z}_1 - y \operatorname{Re} Z_1] \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

作为 Westergaard 方法应用的例子，现讨论带中心穿透裂纹并受均匀双轴拉应力的无限大板的裂纹尖端应力、位移场。当坐标原点选在裂纹中点时，选取复应力函数

$$Z_1(z) = \sigma \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (1-21)$$

就能满足问题的全部条件

- (1) 在  $y=0$ ， $-a < x < a$  处， $\sigma_y = 0$ ， $\tau_{xy} = 0$ ；
- (2) 在  $z \rightarrow \infty$ ， $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ， $\tau_{xy} = 0$

由于  $Z_1(z)$  除 ( $-a < x < a$ ， $y=0$ ) 以外是解析函数，又满足问题的边界条件，从而是问题的解。为了计算裂缝尖端附近的应力、位移场，将坐标原点移至裂纹右尖端处。令

$\xi = z - a$  , 式(1-21)可写为

$$Z_1(\xi) = \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi}} \quad (1-22)$$

式中

$$f(\xi) = \sigma(\xi + a) / \sqrt{\xi + 2a} \quad (1-23)$$

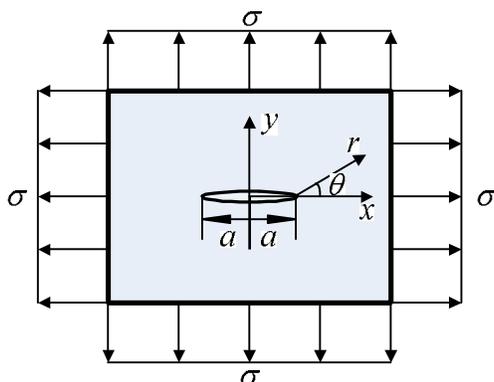


图 1-3 有穿透裂纹并受均匀双轴拉伸的板

在裂纹尖端  $x = a$  的附近, 当  $|\xi| \rightarrow 0$  时,  $f(\xi)$  趋于常数。若用  $K_I / \sqrt{2\pi}$  表示此常数,

则有

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} Z_1(\xi) \sqrt{\xi} = K_I / \sqrt{2\pi} , \text{ 或 } K_I = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} Z_1(\xi) \sqrt{2\pi\xi} \quad (1-24)$$

从而在裂纹尖端附近, 即  $|\xi|$  很小时, 复应力函数可近似表为

$$Z_1(\xi) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad (1-25)$$

采用极坐标  $\xi = re^{i\vartheta} = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$  ,  $\xi^{-1/2} = r^{-1/2}e^{-i\vartheta/2}$  ,  $\xi^{-3/2} = r^{-3/2}e^{-i3\vartheta/2}$  ,  
 $y = r \sin \vartheta = 2r \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$  , 代入(1-25)得

$$Z_1(\xi) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - i \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$$

$$Z_1'(\xi) = \frac{dZ_1}{d\xi} = -\frac{K_I}{2(2\pi)^{1/2} r^{3/2}} \left( \cos \frac{3\vartheta}{2} - i \sin \frac{3\vartheta}{2} \right)$$

以  $Z_1(\xi)$ 、 $Z_1'(\xi)$  代入(1-17)得到裂纹前缘的应力场 (奇异项) 为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

对于平面应力问题，有  $\sigma_z = 0$ ；对于平面应变问题，有  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ 。式中  $K_I$  称为应力强度因子，它表示了应力场的强弱程度。 $K_I$  由(1-24)确定

$$K_I = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} Z_I(\xi) \sqrt{2\pi\xi} = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{\sigma(\xi+a)}{\sqrt{\xi(\xi+2a)}} \sqrt{2\pi\xi} = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1-27)$$

以(1-25)代入式(1-20)并注意到

$$E = 2\mu(1+\nu)$$

$$\bar{Z}_I = \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\xi} = 2K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

得到平面应变情况下裂纹尖端的位移场

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ v &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

或将平面应力、平面应变两种情况写成统一形式

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k-1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k+1) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

式中

$$k = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu), & \text{平面应力} \\ 3-4\nu, & \text{平面应变} \end{cases} \quad (1-30)$$

值得注意的是基于有穿透裂纹并受均匀双轴拉伸这种特殊情况所得到的上述 I 型裂纹尖端附近的应力、位移场具有普遍的意义，即对于其他几何情况（如有限尺寸、中心裂纹、边裂纹）、受力情况（如非均匀受力、集中力）的 I 型裂纹，裂纹尖端场的表达式也是相同的，只要裂纹尖端附近的裂纹面上不受面力作用，所不同的只是应力强度因子，因此，对于特定的结构只要确定  $K_I$  就可以了。对于 II、III 型裂纹尖端也有类似的结论，各种情况下的应力强度因子可查有关手册<sup>[8,9]</sup>。用类似方法可求 II、III 型裂纹尖端场。

### 1.2.1.1 II 型裂纹

对于 II 型（滑开型）裂纹，可取如下的应力函数

$$\bar{\phi}_{II} = -y \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} \quad (1-31)$$

由(1-10)及(1-18)、(1-19)可求得各应力分量及平面应变情况下位移分量

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \sigma_y &= -y \operatorname{Re} Z'_{II} \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II} \\ u &= \frac{1+\nu}{E} [2(1-\nu) \operatorname{Im} \bar{Z}_{II} + y \operatorname{Re} Z_{II}] \\ v &= \frac{1+\nu}{E} [-(1-2\nu) \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II}] \end{aligned} \quad (1-32)$$

对于含有长  $2a$  穿透裂纹的无限大板，在受纯剪切时，可选用如下形式的解析函数

$$Z_{II} = \tau \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (1-33)$$

作为复应力函数，则满足全部边界条件。在裂纹尖端附近有  $Z_{II} = K_{II} / \sqrt{2\pi\xi}$ ，相应的应力及位移分量如下

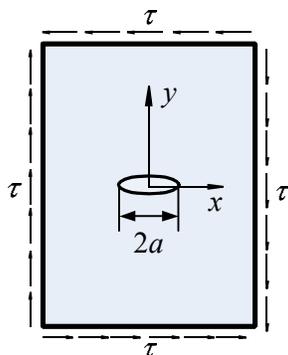


图 1-4 有穿透裂纹并受均匀平面内剪切的无限大板

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

对于平面应力问题，有  $\sigma_z = 0$ ；对于平面应变问题，有  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ 。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \\ v &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ -(1 - 2\nu) + \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-35)$$

或将平面应力、平面应变两种情况写成统一形式

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k+1) + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ \frac{1}{2}(1-k) + \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

$K_{II}$  为 II 型裂纹的应力强度因子

$$K_{II} = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} Z_{II}(\xi) \sqrt{2\pi\xi} = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{\tau(\xi+a)}{\sqrt{\xi(\xi+2a)}} \sqrt{2\pi\xi} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (1-37)$$

### 1.2.3.3 III 型裂纹

III 型裂纹属于反平面应变问题。 $u = v = 0$ ， $w \neq 0$ ，位移垂直于  $xy$  平面，对于反平面应变问题，其基本公式为

$$\text{几何方程：} \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-38)$$

$$\text{物理方程：} \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu} \tau_{xz}, \gamma_{yz} = \frac{1}{\mu} \tau_{yz} \quad (1-39)$$

$$\text{平衡方程：} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (1-40)$$

由(1-38)和(1-40)式得

$$\nabla^2 w = 0 \quad (1-41)$$

$$w = \frac{1}{\mu} \text{Im} \bar{Z}_{III} \quad (1-42)$$

代入(1-38)、(1-39)式并注意到  $\partial \text{Im} \bar{Z} / \partial x = \text{Im} Z$ ， $\partial \text{Im} \bar{Z} / \partial y = \text{Re} Z$ ，得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \text{Im} Z_{III} \\ \tau_{yz} &= \text{Re} Z_{III} \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

对于含有长为  $2a$  的穿透裂纹的无限大板，在无限远处作用有剪应力  $\tau_{yz} = \tau$  时，可选复应力函数为

$$Z_{III} = \tau \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (1-44)$$

在裂纹尖端附近,当 $|\xi| \rightarrow 0$ 时,  $Z_{III} = K_{III} / \sqrt{2\pi\xi}$ , 相应的应力和位移分量依(1-43)、(1-42)

式有

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ w &= \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

III 型裂纹的应力强度因子为

$$K_{III} = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} Z_{III} \sqrt{2\pi\xi} \quad (1-46)$$

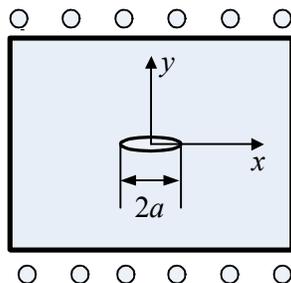


图 1-5 有穿透裂纹并受均匀反平面剪切的无限大板

从而对于图 1-5 的问题, 有

$$K_{III} = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} Z_{III}(\xi) \sqrt{2\pi\xi} = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{\tau(\xi + a)}{\sqrt{\xi(\xi + 2a)}} \sqrt{2\pi\xi} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (1-47)$$

一般情况下在任意平面问题中, 裂纹尖端的奇异场是 I 型和 II 型结果的叠加, 而对于三维裂纹问题, 在沿裂纹边界任意点的奇异场是 I、II 型 (平面应变) 和 III 型问题解的线性叠加。

### 1.2.2 对 Westergaard 方法的修正, 双轴载荷效应

首先指出 Irwin-Westergaard 理论局限性的是薛昌明的论文<sup>[10]</sup>, 他证明了 Westergaard 应力函数只有在双轴均拉时才是准确解。以后 Eftis(1927)<sup>[11]</sup>、Rdewit(1977)<sup>[12]</sup>又讨论了关于修正 Westergaard 方程的问题。所研究的问题集中在用奇异解所描述的裂纹尖端应力场与准确应力场之间的差异上。上面的结果即属于奇性解。它相当于采用 Williams 特征函数展开法求解得到的应力场级数中取首项 (奇性项) 的结果, 对于其他高阶项的作用, Cotterell(1966)<sup>[13]</sup>指出: 如果将裂纹尖端附近的应力场展开成幂级数, 则级数的首

项，即奇性主项就是应力强度因子，第二项起着控制裂纹开裂方向的作用，第三项起着控制裂缝传播稳定性的作用，第四项是确定在裂纹延长线上最大剪应力  $\tau_{\max}$  随着离裂纹尖端的距离是增加还是减小的。Eftis(1978)<sup>[14]</sup>、Liebowitz 等人(1978)<sup>[15]</sup>对裂纹尖端的应力、位移场重新进行了分析，并指出，采用应力的奇性项一般将导致定量甚至定性的错误结论。他们指出，不可忽视双轴载荷效应。周承恂等人(1979)<sup>[16]</sup>用闭合形式的解答讨论了双轴载荷效应。下面是 Eftis(1978)等人对 Westergaard 方程的修正。

### I 型裂纹

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I' + B \\
 \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I' - B \\
 \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_I' \\
 2\mu u &= \frac{k-1}{2} \operatorname{Re} \bar{Z}_I - y \operatorname{Im} Z_I + Bx \\
 2\mu v &= \frac{k+1}{2} \operatorname{Im} \bar{Z}_I - y \operatorname{Re} Z_I - By
 \end{aligned} \tag{1-48}$$

这里已取 Eftis 等人原文中的  $2\varphi'(z) = Z_I(z)$ 。

### II 型裂纹

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z_{II}' \\
 \sigma_y &= -y \operatorname{Re} Z_{II}' \\
 \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II}' - B \\
 2\mu u &= \frac{k+1}{2} \operatorname{Im} \bar{Z}_{II} + y \operatorname{Re} Z_{II} - By \\
 2\mu v &= \frac{-(k-1)}{2} \operatorname{Re} \bar{Z}_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II} - Bx
 \end{aligned} \tag{1-49}$$

这里已取 Eftis 等人原文中的  $2\varphi'(z) = -iZ_{II}(z)$ 。与上面奇性解比较可见两者相差的是与实常数  $B$  有关的项，常数  $B$  由问题的应力边界条件确定，上述 Westergaard 方程的修正结果的推导可参见<sup>[14]</sup>。

Liebowitz 和 Eftis 等人用 Williams 的特征函数展开二项近似指出：即使在张开型的双轴载荷作用下，奇性解与准确解的应力场之间的差异也是十分明显的。周承恂等人用封闭形式的解答得出了同样的结论。他们指出通常采用的奇性解（首项近似）并不能就一般的意义上作为一种好的近似，平行于裂纹平面的载荷的影响表现在局部应力、位移场级数展开式的第二项上，忽略这一项实际上等价于否认其存在，否认它们对断裂的影响。实际上，计算表明，在双轴载荷作用下，裂纹前缘的应力、位移场、局部最大剪应力、等剪应力线、起裂角度、弹性应变能密度和应变能率都反映出明显的双轴载荷效应。计算和实验都表明裂纹尖端附近的等剪应力线（等色线）明显地依赖于双轴载荷系数  $h$ ，

首项近似的奇性解的结果只在  $h=1$  时是正确的，其他情况下均相差很远。

双轴载荷下， $h$  对裂纹的开裂方向也有很大的影响，按  $\sigma_{\vartheta_{\max}}$  判据采用首项近似的奇性解预言，图 1-6 情况下，不论  $h$  为何值起裂角度  $\vartheta_0$  均为  $0^\circ$ 。采用两项近似， $\sigma_{\vartheta}/\sigma$  随  $\vartheta$  的变化依赖于  $h$  的情况示于图 1-7。可见当  $h > 2$  时， $\sigma_{\vartheta_{\max}}$  所在的角度  $\vartheta_0$  不是  $0^\circ$ ，而是随着  $h$  增大而加大，当  $h \rightarrow \infty$ ， $\vartheta_0 \rightarrow \pi/2$ 。

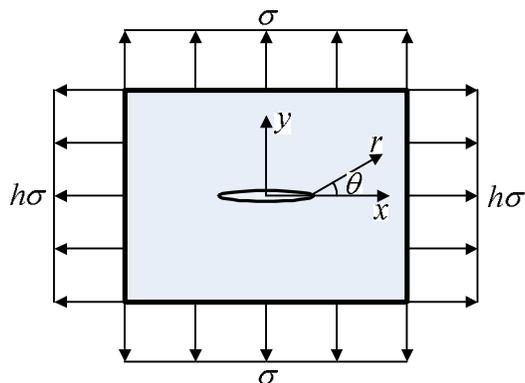


图 1-6 含中心穿透裂纹的板受双轴载荷作用

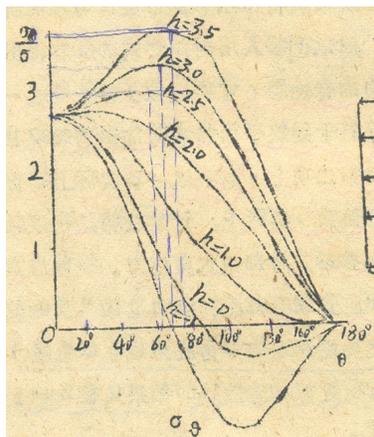


图 1-7  $\sigma_{\vartheta}/\sigma$  随  $\vartheta$  而变依赖于双轴载荷系数  $h$  的情形

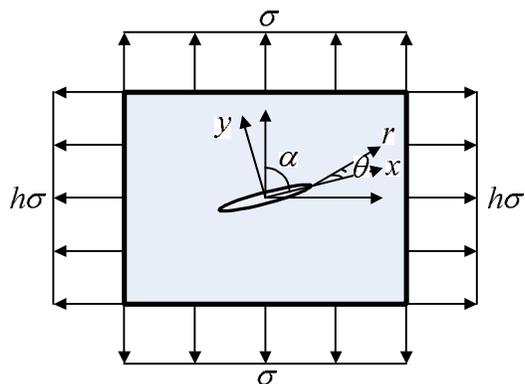


图 1-8 斜中心裂纹受双轴载荷

双轴载荷作用下，斜中心裂纹板的应力强度因子为

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2} [(1+h) - (1-h)\cos 2\alpha] \\ K_{II} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2} (1-h)\sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-50)$$

可见只有当  $h=1$  时， $h$  才对  $K_I$ 、 $K_{II}$  无影响。

### 1.3 应力强度因子

前面已指出， $K_I$ 、 $K_{II}$ 、 $K_{III}$  分别称为 I、II、III 型裂纹前缘应力场的强度因子，简称为应力强度因子。它与坐标  $r$ ， $\theta$  无关，它不涉及应力和位移在裂纹尖端附近的分布情况，而是表示应力场强弱程度的物理量。对于线弹性体，应力强度因子与载荷呈线性关系，并依赖于物体与裂纹的几何形状和尺寸。断裂力学原理的应用很大程度上依赖于应力强度因子。

确定应力强度因子的方法大体上可分为解析法、数值法和实验法。解析法<sup>1</sup>是其他方法的基础。由解析法推出的裂纹前缘的应力、位移场的基本方程是许多其他方法的出发点，在解析法中，广泛使用的是复变函数法（解二维问题）和积分变换法，以及应用弹性力学守恒律的方法等等。数值法中广泛采用的是有限单元法、边界配置法、边界积分方程法等。在实验法中有光弹性方法、激光全息和散斑干涉法等。

下面给出几种重要情况下  $K$  的计算结果和若干计算  $K$  的简便方法。

#### 1.3.1 具有中心穿透裂纹的无限大板

具有中心穿透裂纹的无限大板，在裂纹上、下表面受一对集中力作用，板单位厚度上，承受的力为  $P$  和  $Q$ ，裂纹右尖端的应力强度因子为

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \\ K_{II} &= \frac{Q}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \end{aligned} \right\} \quad (1-51)$$

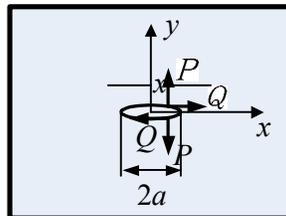


图 1-9 裂纹上下表面有一对集中力

利用这个结果及叠加原理可解决其他载荷的问题。设沿裂纹面上作用着  $\sigma_y(x,0)$  和  $\tau_{xy}(x,0)$  ,  $-a \leq x \leq a$  , 则

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sigma_y(x,0) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \\ K_{II} &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \tau_{xy} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \end{aligned} \right\} \quad (1-52)$$

### 1.3.2 无限大体中有椭圆形片状裂纹

无限大体中有椭圆形片状裂纹，受到垂直于裂纹面的均匀拉伸，椭圆裂纹边缘上任意位置处的应力强度因子为

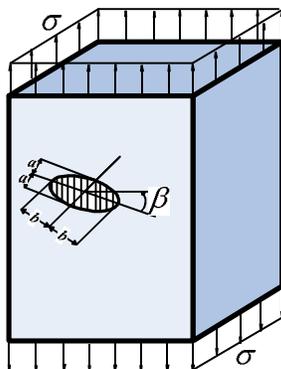


图 1-10 无限大体中的椭圆形片状裂纹

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\phi_0} \sqrt{\sin^2 \beta + \frac{a^2}{b^2} \cos^2 \beta} \quad (1-53)$$

式中  $\beta$  为该位置的方向与长轴的夹角， $\phi_0$  为第二类椭圆积分

$$\phi_0 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (1-54)$$

在椭圆短轴端点处  $\beta = \pi/2$  , 应力强度因子  $K_I$  最大

$$K_{I_{max}} = \sigma \sqrt{\pi a} / \phi_0 \quad (1-55)$$

对于圆裂纹，即  $a = b$  , 有  $\phi_0 = \pi/2$  , 则

$$K_I = 2\sigma \sqrt{\pi a} / \pi \quad (1-56)$$

### 1.3.3 半椭圆表面裂纹并受有均匀拉应力

可采用上述深埋裂纹结果并对前后自由表面进行修正得 A 点处的应力强度因子为

$$K_I = M_1 M_2 \sigma \sqrt{\pi a} / \phi_0 \quad (1-57)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 1 + 0.12 \left( 1 - \frac{a}{2b} \right)^2 \\ M_2 &= \sqrt{\frac{2w}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2w}} \end{aligned} \right\} \quad (1-58)$$

当  $a \ll w$  时,  $M_2 \rightarrow 1$ , 此时短轴端点的最大应力强度因子可依下式计算

$$K_I = 1.1 \sigma \sqrt{\pi a} / \phi_0 \quad (1-59)$$

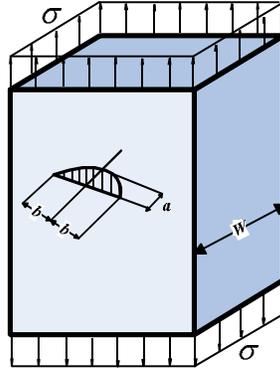


图 1-11 半椭圆表面裂纹

低应力脆断时, 裂纹尖端有小范围屈服, 即塑性屈服远小于裂缝特征尺寸, 此时, 采用 Irwin<sup>[17]</sup>的塑性区修正方法, 仍可应用线弹性理论结果。在计算应力强度因子时只要将有效裂纹尺寸代替原真实裂纹尺寸即可 (见第二章式(2-9))。

$$a_{\text{eff}} = a_0 + r_y \quad (1-60)$$

$$r_y = \frac{R}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2, & \text{平面应力} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2, & \text{平面应变} \end{cases}$$

式中  $a_{\text{eff}}$  为有效裂纹尺寸,  $a_0$  为原有裂纹尺寸,  $R$  为塑性区尺寸,  $r_y$  为修正值,  $\sigma_s$  为屈服应力。例如, 上述半椭圆表面裂纹尖端处于平面应变状态, 等效裂纹长度为

$$a + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

以它代入(1-59)式化简得

$$K_I = 1.1 \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\phi_0^2 - 0.214(\sigma/\sigma_s)^2}} = 1.1 \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{Q}} \quad (1-61)$$

式中  $Q = \phi_0^2 - 0.214(\sigma/\sigma_s)^2$  称为裂纹形状因子。

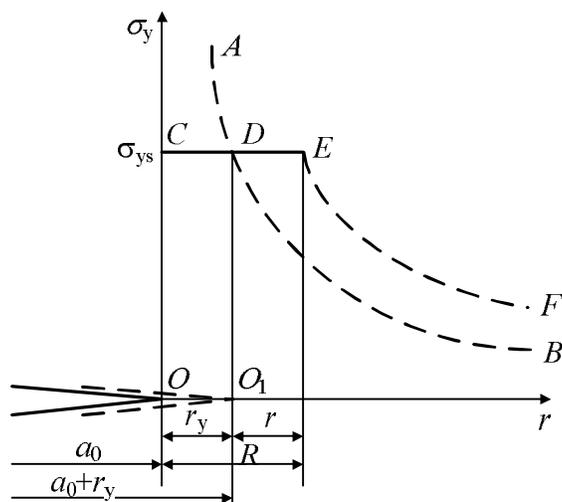


图 1-12 塑性区修正

### 1.3.4 计算 $K$ 的几种简便方法

下面介绍工程中实用的几种计算  $K$  的简便近似方法。

#### 1.3.4.1 双梁、双板模型裂纹问题

当垂直于裂纹平面方向的尺寸较之裂纹尺寸很小时可抽象为双梁或双板模型。张淳源<sup>[18]</sup>曾提出一种既简单又具有较高精确度的方法。这时可依下节方法先求出能量释放率，然后利用  $G-K$  关系求出  $K$ 。由于  $K$  与裂纹尖端  $A$  处截面上的内力素（弯矩  $M_A$  及剪力  $Q_A$ ）有关，所以便于工程技术人员利用熟悉的内力概念来估算  $K$  的大小。具体计算见下节。

#### 1.3.4.2 第一种截面法

Morozov<sup>[19]</sup>曾提出一种近似计算平面问题应力强度因子的方法。想象用一通过裂纹面的截面将物体切开，列出下部分的平衡方程，并考虑到应力场的渐近解(1-26)，以 Griffith 裂纹为例，用平衡方程表示，由于裂纹存在所不能传递的力  $2\sigma a$  应与裂纹尖端应力集中所产生的附加力  $2\int_0^b \sigma_g dr$  相平衡， $b$  依下条件确定

力集中所产生的附加力  $2\int_0^b \sigma_g dr$  相平衡， $b$  依下条件确定

$$\sigma_g(b,0) = \sigma, \text{ 或 } K_I / \sqrt{2\pi b} = \sigma$$

即

$$b = K_I^2 / 2\pi\sigma^2$$

平衡条件为

$$2\sigma a - 2\int_0^b \sigma_g dr = 0$$

以  $\sigma_g = K_I / \sqrt{2\pi r}$  代入上式，得

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

这正是精确解。其他情况下可能得出近似解。

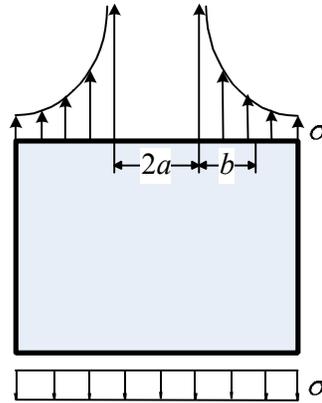


图 1-13

### 1.3.4.3 第二种截面法

Li Xiao-Wei 等<sup>[20]</sup>提出另一种截面法近似计算  $K$

$$K = \sigma_* \sqrt{\pi a}$$

$$\sigma_* = \frac{1}{4}(\sigma_n + 3\sigma_m)$$

式中  $\sigma_n$  为净应力， $\sigma_m$  为平均应力。

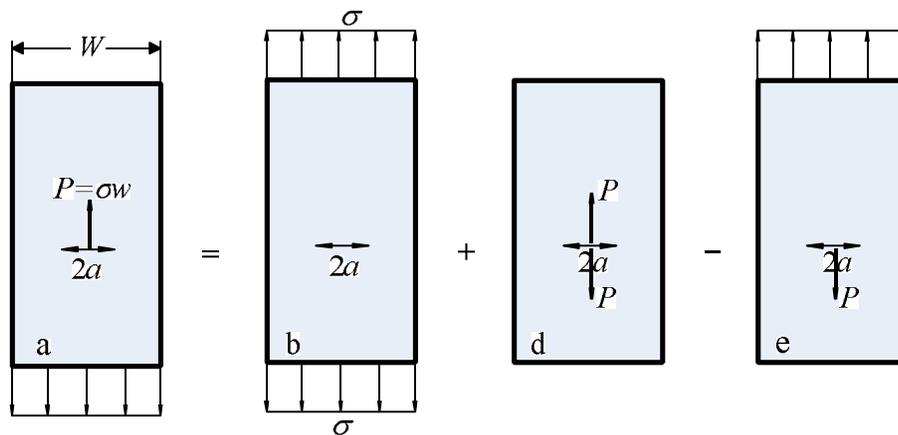
### 1.3.4.4 叠加法

由于同型情况（如 I 型）的应力场方程都相同， $K$  与载荷成线性关系，所以当几种载荷联合作用时可以用叠加法求应力强度因子。对 II、III 型裂纹也是这样。例如对于图 14 情况有

$$K_{Ia} = K_{Ib} + K_{Id} - K_{Ie}$$

因  $K_{Ia} = K_{Ie}$ ，故

$$K_{Ia} = \frac{1}{2}(K_{Ib} + K_{Id}) = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\pi a} + \frac{\sigma w}{2\sqrt{\pi a}}$$



1-14 叠加原理的例子

## 1.4 能量释放率 $G$

### 1.4.1 能量释放率的计算

**Griffith 的能量断裂判据可表示为：**如果使裂纹面积增加  $dA$  所需的能量恰好能由系统所提供，那么裂纹就会扩展。

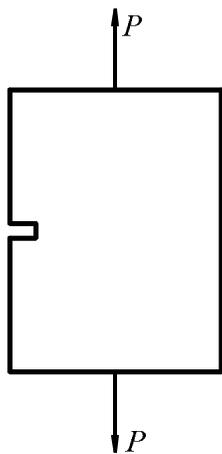


图 1-15

考虑图 1-15 情况，设载荷为  $P$ ，施力点间的相对位移为  $v$ ，裂纹面积为  $A$ 。裂纹扩展单位面积时系统所能提供的能量即为能量释放率。设裂纹面积虚拟扩展  $dA$ ，由能量守恒定律有

$$GdA = Pdv - dU \tag{1-62}$$

因为  $d(Pv) = Pdv + vdP$ ，所以

$$GdA = d(Pv - U) - vdP = -dU - vdP \tag{1-63}$$

式中  $U - Pv$  为物体的势能，线弹性情况下  $U = Pv/2$ ，从而  $-dU = -vdP/2$ 。令  $C = v/P$ ，称为物体的柔度，对于线弹性体，有

$$U = \frac{1}{2}Pv = \frac{1}{2}CP^2 = \frac{1}{2C}v^2 \quad (1-64)$$

(1) 固定位移 (施力点固定)

$dv = 0$  , 由式(1-62)有

$$G = -\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_v \quad (1-65)$$

对于线弹性体有

$$G = -\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{v^2}{2C}\right)_v = \frac{v^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial A} = \frac{1}{2}P^2 \frac{\partial C}{\partial A} \quad (1-66)$$

(2) 固定载荷

$dP = 0$  , 由式(1-63)有

$$G = -\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_P \quad (1-67)$$

对于线弹性体有

$$G = -\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_P = \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{1}{2}CP^2\right) = \frac{1}{2}P^2 \frac{\partial C}{\partial A} \quad (1-68)$$

(3) 载荷和位移都不固定

依式(1-62)、(1-63)有

$$G = P \frac{\partial v}{\partial A} - \frac{\partial U}{\partial A} = -\frac{\partial U}{\partial A} - v \frac{\partial P}{\partial A} \quad (1-69)$$

对于线弹性体, 以  $U = Pv/2$  代入上式, 得

$$G = P \frac{\partial v}{\partial A} - \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{1}{2}Pv\right) = \frac{1}{2}P^2 \frac{\partial C}{\partial A} \quad (1-70)$$

由(1-66)、(1-68)、(1-70)式可见线弹性断裂力学中的能量释放率总可以写成

$$G = \frac{1}{2}P^2 \frac{\partial C}{\partial A} \quad (1-71)$$

它不依赖于周围结构或试验机的柔度, 而只依赖于裂纹扩展所引起的柔度变化。式(1-71)称为 Irwin-Kies 关系, 它提供了一个根据试件的柔度, 用计算或实验来确定能量释放率的方法。

能量释放率与应力强度因子  $K$  之间有一定的关系。下面我们先证明裂纹沿某扩展方向的闭合能量释放率  $\dot{E}$  与系统的能量变化率相等。即考虑整个物体的能量平衡与考虑裂纹尖端的能量平衡是等效的。

考虑单位厚度的穿透裂纹体, 受任意载荷的任意形状连续介质裂纹体的能量平衡基本方程是

$$\dot{W} + \dot{Q} = \dot{K} + \dot{U} + \dot{\quad} \quad (1-72)$$

式中  $\dot{W}$  和  $\dot{Q}$  分别为外力作用于物体的功率和热供给率， $\dot{K}$  和  $\dot{U}$  分别为物体的动量和内能变化率， $\dot{\quad}$  为扩展裂纹表面上的能量耗散率。由(1-72)有

$$\dot{W} + \dot{Q} - \dot{K} - \dot{U} = \dot{\quad} \quad (1-73)$$

若裂纹沿某方向虚拟扩展微小长度  $dL = 0$ ，想象沿此方向已切开，并在切开面上加上应力  $\tau_{ij}$ 。如果  $\tau_{ij}$  与未切开前因外加应力而引起的应力相同，那么切开前后的情况完全等效。假设应力  $\tau_{ij}$  逐渐松弛到零，然后考虑外加应力与  $\tau_{ij}$  联合作用下的能量方程(1-73)，那么外力所作的功还应包括  $\tau_{ij}$  在松弛过程中对裂纹两侧表面相对位移所作的功。由于松弛过程中  $\tau_{ij}$  的方向与相对位移相反，故此功的变化率  $\dot{E}$  为负值，此时，由于想象裂纹扩展处已切开，裂纹无其他扩展，故  $\dot{\quad} = 0$ ，从而对这种情况应用(1-73)式有

$$(\dot{W} - \dot{E}) + \dot{Q} - \dot{K} - \dot{U} = 0 \quad (1-74)$$

比较(1-73)、(1-74)可见

$$\dot{E} = \dot{\quad} \quad (1-75)$$

即(1-73)、(1-75)是等效的，但后者只与裂纹尖端附近的应力、位移场有关，有时更便于计算。考虑单位厚度一维裂纹体，由(1-75)有

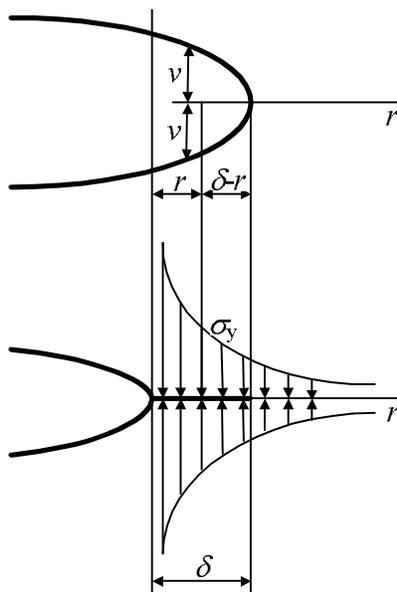


图 1-16 裂纹顶端的闭合

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial L} \frac{dL}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial L} \frac{dL}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} (W + Q - K - U) = 2\gamma \frac{dL}{dt}$$

由于不扩展裂纹的能量守恒定律，上式第二项为零，从而

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial L} \frac{dL}{dt} = 2\gamma \frac{dL}{dt}$$

当  $dL/dt = 0$  可满足上式,表示裂纹不扩展,为了确定起裂的临界状态给裂纹以虚拟扩展,此时  $dL/dt \neq 0$ ,从而

$$G(\vartheta) = \frac{dE}{dL} = 2\gamma(\vartheta) \quad (1-76)$$

此即为裂纹沿  $\vartheta$  方向扩展的 Griffith 条件,在 I 型裂纹的特殊情况下,(1-76)成为

$$G_I = \frac{dE}{da} = G_{Ic} \quad (1-77)$$

$dE/da$  即为闭合能量率。为了计算闭合能量率,可假设裂纹闭合前、后裂纹尖端附近的位移相同。

$$G_I = \frac{dE}{da} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} \frac{\sigma_y v}{2} dr \quad (1-78)$$

由(1-26)式,令  $\vartheta = 0$ ,求得

$$\sigma_y(r) = K_I / \sqrt{2\pi r} \quad (1-79)$$

由式(1-29),令  $\vartheta = 180^\circ$ ,求得

$$v(r) = \frac{K_I \sqrt{r}}{E'} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \quad (1-80)$$

$$\text{或 } E' = \begin{cases} E, & \text{平面应力} \\ E/(1-\nu^2), & \text{平面应变} \end{cases} \quad (1-81)$$

在(1-80)中以  $\delta - r$  代替  $r$  连同式(1-79)代入(1-78)并注意到

$$\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \sqrt{\frac{\delta-r}{r}} dr = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

得

$$G_I = K_I^2 / E' \quad (1-82)$$

类似地,对于 II、III 型裂纹有

$$G_{II} = K_{II}^2 / E' \quad (1-83)$$

$$G_{III} = (1+\nu) K_{III}^2 / E \quad (1-84)$$

假设裂纹沿本身平面扩展,将不同类型的能量相加即得复合型总能量释放率

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} \left( K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1-\nu} \right) \quad (1-85)$$

此式只有在裂纹沿本身平面扩展才正确。通常复合型裂纹扩展将发生转折,此时上式不再适用。

### 1.4.2 双梁、双板模型裂纹的能量释放率

当裂纹体在垂直于裂纹平面方向的尺寸较之裂纹尺寸很小时，可将它们抽象为双梁、双板模型进行研究。我们曾得到一种非常简明实用的结果<sup>[18]</sup>，这些结果将一般受载和一般约束条件下双梁（板）模型裂纹的  $G$  与裂纹尖端  $A$  处的内力素（弯矩  $M_A$  及剪力  $Q_A$ ）用下述简明公式联系起来，并在所论范围内具有足够的精度。

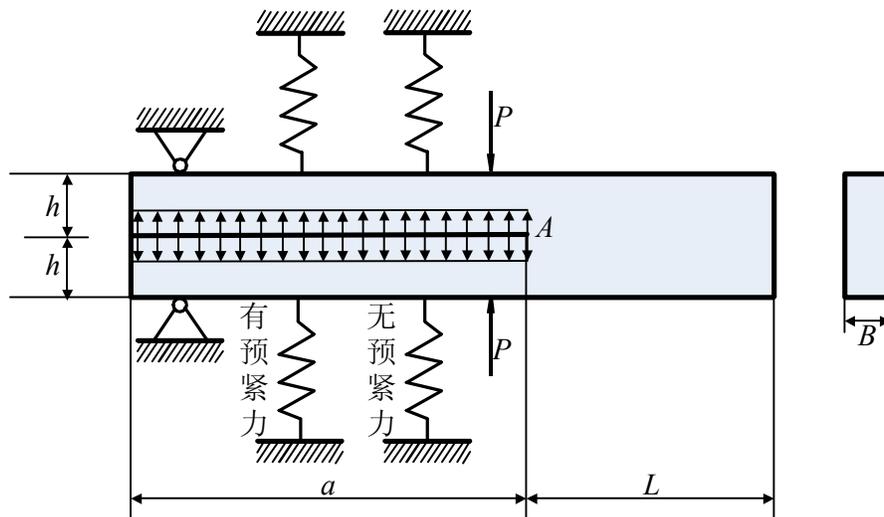


图 1-17 一般载荷和约束条件下的双梁模型裂纹

#### 1.4.2.1 固定端双梁模型

考虑单位厚度双梁。当  $a/h \gg 1$  时，可抽象为固定端双梁模型，此时

$$G_1 = \frac{M_A^2}{E'J_A}, \text{ 或 } K_1 = \frac{2\sqrt{3}M_A}{h_A^{3/2}} \quad (1-86)$$

式中  $E'J = E'h_A^2/12$ ，是  $A$  截面处单位厚度梁的刚度， $M_A$  是单位厚度梁在截面  $A$  处的弯矩。对于双悬臂梁裂纹试件，依(1-86)式有

$$K_1 = \frac{2\sqrt{3}Pa}{Bh^{3/2}}$$

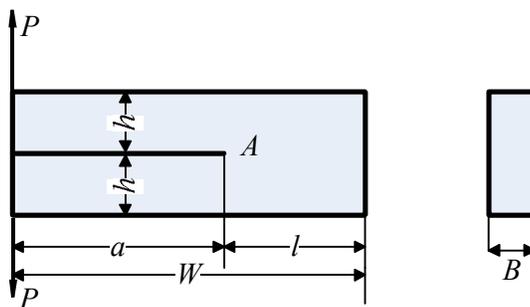


图 1-18 双悬臂梁裂纹试件

与实验结果比较表明直到  $a/h \geq 2$  计算结果仍然精确与实验相符 ( 当  $a/h = 2$  时,  $K_I$  的误差仅为 0.87% )

#### 1.4.2.2 弹性基础双梁模型

当  $a/h > 1 \sim 3$ ,  $L/h \geq 1.5$ , 对于粗短裂纹体可按弹性基础双梁模型计算, 此时

$$G_I = \frac{M_A^2}{E'J_A} \left( 1 + \frac{Q_A}{mM_A} \right)^2, \text{ 或 } K_I = \frac{M_A}{\sqrt{J}} \left( 1 + \frac{Q_A}{mM_A} \right) \quad (1-87)$$

式中  $m = \sqrt[3]{6}/h$ , 可以证明<sup>[21]</sup>, 只要  $L/h \geq 1.92$  ( 可放宽至  $L/h \geq 1.5$ , 误差小于 5% ), 可采用式(1-87)。

#### 1.4.2.3 固定边双板模型

当裂纹前缘处法向弯矩  $M_n$  及板厚为常数时有

$$G_I = \frac{M_n^2}{D}, \text{ 或 } K_I = \frac{2\sqrt{3}M_n}{h^{3/2}} \quad (1-88)$$

$M_n$  为单位长度的法向弯矩,  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ , 为板的刚度。例如圆双板裂纹受均布内压时

$$G_I = \frac{M_n^2}{D} = \frac{q^2 a^4}{64D}$$

$a$  为圆片裂纹的半径。

### 1.5 能量原理

#### 1.5.1 广义 Griffith 条件

能量原理是自然科学中的普遍原理, 能量方法也是处理断裂力学的一般方法。断裂力学就是 80 多年前 ( 1921 年 ) Griffith 在总结能量平衡方程中加入了表面能一项而诞生的。

的著作<sup>[22]</sup>中提出了表示广义 Griffith 条件的能量方法。考虑均匀、各向同性弹性体, 物体及裂纹形状均任意, 假设裂纹扩展过程中局部断裂永远发生在与裂纹表面相切的平面内, 因而不产生裂纹的突然转折, 这时可得到推广的 Griffith 条件。

限于讨论起裂, 不计动能, 弹性裂纹体的能量平衡方程为:

$$\dot{W} + \dot{Q} = \dot{U} + \dot{\Gamma} \quad (1-89)$$

式中

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= \int_{\Sigma} \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j ds + \int_V f_i \dot{u}_i dv = \int_V (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dv + \int_V f_i \dot{u}_i dv \\
 &= \int_V [(\sigma_{ij,j} + f_i) \dot{u}_i + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}] dv = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv \\
 \dot{U} &= \frac{d}{dt} \int_V U_0 dv \\
 \dot{Q} &= T \dot{S} = \int_V T \dot{S}_0 dv \\
 \dot{\gamma} &= \dot{\Sigma} = 2\dot{\gamma} A
 \end{aligned} \tag{1-90}$$

式中  $\sigma_{ij}$  ,  $u_i$  ,  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  ,  $f_i$  为应力张量、位移、应变张量、体力分量, 并采用了 Einstein 求和约定, 凡重复一次的指标均将该指标取遍 1 到 3 然后求和, 例如  $f_i u_i = f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3$  ,  $U$  ,  $Q$  ,  $T$  ,  $s$  分别为物体的内能、供给的热量、绝对温度、熵,  $\Sigma$  为物体的表面 (包括裂纹表面  $2A$  ,  $A$  是裂纹面积),  $n_i$  为物体表面单位外法线向量,  $V$  为物体体积,  $U_0$  ,  $S_0$  分别是单位体积的内能和熵。上面的推导用到散度公式, 平衡方程及  $\varepsilon_{ij}$  的对称性, 当然, 物体由于受力变形引起的表面变化忽略不计, 以式(1-90)代入(1-89), 得

$$\int_V (\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{U}_0 + T \dot{S}_0) dv = 2\dot{\gamma} A \tag{1-91}$$

由上式推得普遍弹性理论方程

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{S_0 = \text{Const}, A = \text{Const}} = \left( \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{T = \text{Const}, A = \text{Const}} \tag{1-92}$$

$F_0 = U_0 - T S_0$  为单位体积的自由能。

并推得广义 Griffith 条件

$$\begin{aligned}
 2\dot{\gamma} &= - \left( \frac{\partial U}{\partial A} \right)_{S_0 = \text{Const}, u_i = \text{Const}} = - \left( \frac{\partial}{\partial A} \right)_{S_0 = \text{Const}, \sigma_{ij} n_j = \text{Const}} \\
 &= - \left( \frac{\partial F}{\partial A} \right)_{T = \text{Const}, u_i = \text{Const}} = - \left( \frac{\partial \bar{G}}{\partial A} \right)_{T = \text{Const}, \sigma_{ij} n_j = \text{Const}}
 \end{aligned}$$

一般可写成  $R = G$  , 其中  $U = \int_{\Sigma} (\sigma_{ij} u_i n_j) ds$  为系统的势能,  $F = U - TS$  为 Helmholtz 自由能,  $\bar{G} = U - TS - \int_{\Sigma} (\sigma_{ij} u_i n_j) ds$  为 Gibbs 自由能,  $R = 2\dot{\gamma}$  为裂纹扩展阻力。(1-93)式把

(1-65)和(1-67)作为特殊情况包括在内, 式(1-92)、(1-93)加上裂纹扩展的不可逆条件

$$\dot{\gamma} \geq 0 \tag{1-94}$$

表示了弹性体中裂纹传播问题的最一般的封闭公式, 它适于非均匀各向异性以及非线性

性弹性体，裂纹表面可以是任意曲面并可以有拐角线。

### 1.5.2 裂纹扩展的稳定性

我们来考虑由于微小干扰随着裂纹表面微小增量  $\delta$  有关的裂纹扩展的局部稳定性问题。设  $\delta U$ ， $\delta u_i$ ， $\delta S$ ， $\delta$  表示干扰引起的该量的无穷小变化。下述一般关系总是成立的

$$\int_{\Sigma} \sigma_{ij} \delta u_i n_j ds + T \delta S - \delta U - \gamma \delta \geq 0 \quad (1-95)$$

上式等号相应于平衡状态（比较(1-91)式），尽管由于不可逆条件  $\delta \geq 0$ ，这一关系式对整个物体或其中一部分均是正确的，不等号是无穷小干扰的不可逆性，左端大于零是由于干扰还可引起物体的动能和热耗散。

考虑线弹性、均匀、各向同性体，设裂纹表面是光滑的，在裂纹边缘任意一点附近可视为平面应变，由式(1-95)可见欲使裂纹扩展能自发的进行（即失稳扩展），随着裂纹的扩展函数  $P$  应减少。

1) 等熵，常位移情况

$$P = U + \gamma = U + \gamma \quad (1-96a)$$

2) 等熵，常载荷情况

$$P = U - \int_{\Sigma} \sigma_{ij} u_i n_j ds + \gamma \quad (1-96b)$$

3) 等温，常位移情况

$$P = F + \gamma = U - TS + \gamma \quad (1-96c)$$

4) 等温，常载荷情况

$$P = \bar{G} + \gamma = U - TS - \int_{\Sigma} \sigma_{ij} u_i n_j ds + \gamma \quad (1-96d)$$

$$\text{即 } \delta P \leq 0 \quad (1-97)$$

时，平衡状态是不稳定的，裂纹可以失稳扩展。在稳定的平衡状态下，必须取极小值，即

$$dP = 0, d^2 P > 0 \quad (1-98)$$

一般地可写为

裂纹失稳的条件是

$$G = R, \quad \frac{\partial G}{\partial a} \geq \frac{\partial R}{\partial a} \quad (1-99)$$

裂纹平衡稳定的条件是

$$\frac{\partial G}{\partial a} < \frac{\partial R}{\partial a} \quad (1-100)$$

裂纹稳定条件是止裂理论的基础，式(1-99)<sub>1</sub>是弹性裂纹体的局部平衡条件，式(1-99)<sub>2</sub>是这个平衡局部为不稳定的条件，而式(1-100)为裂纹平衡的局部稳定性条件。

### 1.5.3 裂纹扩展阻力 (R 曲线)

对于理想的脆性材料，平面应变情况下，裂纹扩展阻力  $R$  与裂纹长度无关，即  $\partial R/\partial a = 0$ ，裂纹式稳条件化为

$$\begin{aligned} G &= R \\ \frac{\partial G}{\partial a} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1-101)$$

以恒定载荷下平面应变情况的 Griffith 裂纹为例，实验发现，平面应变情况下高强金属的裂纹扩展阻力  $R$  近似为常数  $R = G_{IC}$ ，当应力为  $\sigma_1$  裂纹长度为  $a_1$  时，有

$$G_1 = \frac{(1-\nu^2)\pi a \sigma_1^2}{E} < R$$

只有当应力增至  $\sigma_2$  时 (图 1-19)，才满足

$$\begin{cases} G_1 = R \\ \left( \frac{\partial G_1}{\partial a} \right)_{\sigma_2 = \text{const}} = \frac{(1-\nu^2)\pi \sigma_2^2}{E} > \frac{\partial R}{\partial a} = 0 \end{cases}$$

裂纹处于失稳的临界状态，裂纹扩展时  $G_1$  沿  $CD$  上升，永远大于  $R$ ，这种情况下起裂点与失稳点重合，起裂后即失稳扩展。

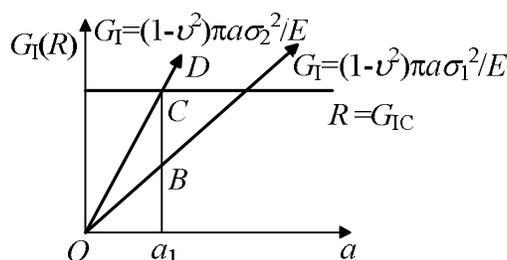


图 1-19 恒定载荷下的能量判据图

上面讨论了恒定载荷的情况，如果是恒定位移的情况，由于裂纹扩展后应力要下降，因此  $G_1$  随  $a$  的上升要比恒定载荷为慢，甚至随  $a$  可能下降。

理想脆性材料平面应变情况下的  $R$  可视为与  $a$  无关，但是对于平面应力情况下，实验表明， $R$  却随裂纹扩展而变化，即使在平面应变情况下，中、低强度金属材料也有此性质，裂纹开始扩展不一定是失稳扩展，起裂点与失稳点不重合。这是因为在裂纹尖端

附近存在塑性区，裂纹扩展要产生塑性变形，这就会使材料硬化，要继续变形必须增加外应力，随着裂纹扩展塑性变形更为困难，从而使裂纹扩展需要消耗的塑性功更大，即材料抵抗裂纹扩展的阻力  $R$  也随  $a$  增大。描述  $R$  随  $a$  变化的曲线称为裂纹扩展阻力曲线，或称  $R$  曲线，能量释放率随  $a$  的变化曲线称为动力曲线（图 1-20 中过原点的射线  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  等），当应力为  $\sigma_0$  时， $G_1 < R$ ，裂纹不致扩展；如果应力增加，动曲线与  $R$  曲线交于  $B$  点， $G_1 = R$ ，裂纹可以起裂，但  $G_1$  沿  $OH$  增长，低于  $R$  曲线，因此裂纹不能在恒定应力  $\sigma_1$  下继续扩展；应力增至  $\sigma_2$ ，裂纹可扩展至  $a_2$ ；只有当应力增至  $\sigma_c$ ，此时  $G$  与  $R$  曲线相切于  $D$  点，由于此时

$$G_1 = R$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial a} > \frac{\partial R}{\partial a}$$

保证了在  $\sigma_c$  作用下随着裂纹扩展总有  $G_1 \geq R$ ，这就导致裂纹失稳扩展。

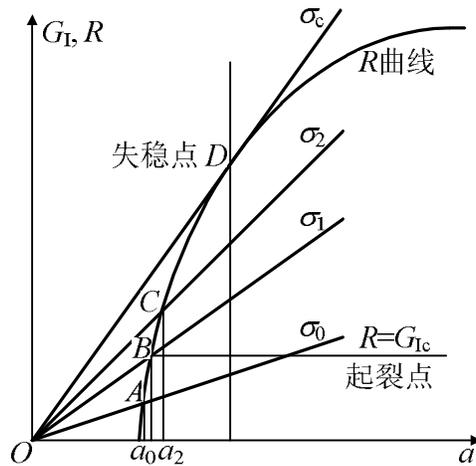


图 1-20 平面应力情况的  $R$  曲线和恒定载荷下的  $G$  曲线

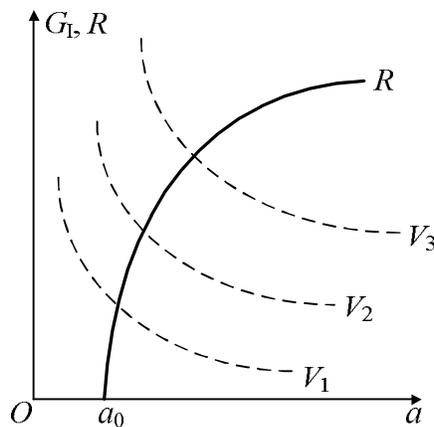


图 1-21 恒定位移下裂纹扩展稳定性分析

在恒定位移的情况下，常常  $\partial G_I / \partial a$  是负值，依条件(1-100)，裂纹扩展总是稳定的。此外，有些受载情况下的裂纹（如图 1-22） $\partial G_I / \partial a$  也是负的，图 1-22 的裂纹体在恒定载荷  $P$  作用下，

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}, G_I = \frac{P^2}{E\pi a}, \left( \frac{\partial G_I}{\partial a} \right)_{P=\text{Const}} = -\frac{P^2}{E\pi a^2} < 0 \quad (1-102)$$

这时，裂纹的扩展也总是稳定的。有时为了方便起见，称这种裂纹（ $\partial G_I / \partial a < 0$ ）为稳定型，而称  $\partial G_I / \partial a > 0$  的裂纹（如 Griffith 裂纹）为失稳型裂纹。

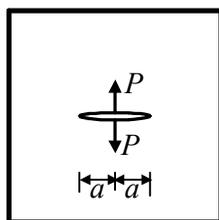


图 1-22

从上面的讨论可见，裂纹平衡的稳定性不仅与载荷有关，还与约束情况及  $R$  曲线有关，值得注意的是改变上述诸因素，一个局部稳定的裂纹，经稳定扩展后可以转化为失稳扩展。相反，适当改变上述因素可以使一个局部失稳的裂纹转化为稳定的，从而达到止裂的目的。

由(1-99)可见 I 型裂纹失稳扩展的临界条件是

$$G_I = R = G_{Ic}, \text{ 且 } \frac{\partial G_I}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (1-103)$$

由于  $G_I$  与  $K_I$  存在关系(1-82)，所以裂纹失稳扩展的临界条件可以改写为

$$K_I = K_{Ic}, \text{ 且 } \frac{\partial K_I}{\partial a} = \frac{\partial K_R}{\partial a} \quad (1-104)$$

$K_{Ic}$  称为材料的断裂韧度， $G_{Ic}$  是断裂韧度的能量指标， $K_R$  是依应力强度因子所作的裂纹扩展阻力。断裂韧度是材料的一种机械性能参数，它表征了材料阻止裂纹扩展的能力，是材料抵抗断裂的一个韧性指标， $K_{Ic}$  一般随材料厚度而下降，平面应变下的断裂韧度最低。材料的断裂韧度大都依赖温度、加载速度、环境（如腐蚀介质的存在）、金属合金纯度及裂纹尖端区域的冶金性质、非金属材料的微观结构等。

值得注意的是，能量断裂判据只是一个必要的判据而不是充分的判据，例如，尽管满足了失稳的能量条件，如果裂纹尖端的应力和塑性变形还不够充分，裂纹也不能扩展。此外，虽然小范围屈服条件下， $G$  判据与  $K$  判据是等价的，但这是在线弹性断裂力学范围的结论。对于像岩石、混凝土、聚合物这类材料来说，为了说明断裂的“时间效应”，常需将它们抽象为粘弹性体，那么， $K$  判据不再适用，它甚至不能解释在常载荷下（或常应力强度因子下）为什么裂纹会出现延迟失稳的现象。因为依  $K$  判据，在  $K=\text{常数}$  下，

裂纹如果瞬时不失稳 ( $K_I < K_{Ic}$ ), 以后也永远不会失稳, 工程中大量出现的延迟失稳现象 (如坝体裂纹的延迟失稳, 构筑物的延迟倒塌等) 要求我们扬弃线弹性假设, 采用更合理的流变模型作为研究的基础, 这将在第三章中讨论。

## 1.6 复合型裂纹

上面主要讨论了 I 型裂纹的情形。实际结构中由于载荷、结构、裂纹方位及  $\nu$  各向异性等因素往往使裂纹不是单一型的, 而是 I、II、III 型的某种复合的情况, 这种裂纹称为复合型裂纹。复合型裂纹的扩展方向往往不是沿原裂纹平面的方向, 而是沿着与原裂纹平面成某一角度的方向。本章介绍复合型裂纹脆性断裂的几种主要理论。这些理论主要是回答, 什么因素促使裂纹开始扩展。着重确定两个问题:

- (1) 裂纹沿什么方向开始扩展? 即需要确定开裂角;
- (2) 裂纹在什么条件下开始扩展? 即需要确定临界点。

下面简要介绍四种主要理论: 最大周向应力判据, 最大能量释放率判据, 最小应变能密度因子判据及最大相当能量释放率判据。

### 1.6.1 最大周向应力判据

该理论是由 Erdogan 和薛昌明<sup>[23]</sup>首先提出来的, 其基本假设有二:

- (1) 裂纹将沿  $\sigma_\theta$  取得最大值的方向扩展;
- (2) 裂纹起始扩展的判据是  $\sigma_{\theta \max}$  达到某临界值  $\sigma_{\theta c}$ 。

对于 I-II 复合裂纹, 裂纹前缘的应力场为式(1-26)、(1-34)的叠加。将直角坐标中的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  化为极坐标中的分量  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  求得 I-II 复合型裂纹前缘的  $\sigma_\theta$  为:

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^I + \sigma_\theta^{II} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \quad (1-105)$$

为了确定开裂角  $\theta_0$ , 对上式求极值。利用条件  $\partial \sigma_\theta / \partial \theta = 0$ , 求  $\theta_0$  值, 不难求得  $\theta_0$  应满足下方程:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (1-106)$$

由上式求得开裂角  $\theta_0$  后代入式 (1-105), 得

$$\sigma_{\theta \max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_0}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right) \quad (1-107)$$

临界值  $\sigma_{\theta c}$  可以从上式已知的特殊情况求出, 即当  $K_{II} = 0$  时化为纯 I 型, 此时  $\theta_0 = 0$ , 以此代入式(1-107), 得

$$\sigma_{\theta c} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1-108)$$

依假设(2)及式(1-107)、(1-108)得到 I、II 复合型裂纹断裂判据为

$$\cos \frac{\vartheta_0}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \vartheta_0 \right) = K_{Ic} \quad (1-109)$$

### 1.6.2 最大能量释放率判据

K.Palaniswamy<sup>[29]</sup>提出两个假设：

- (1) 裂纹沿能量释放率  $G_\vartheta$  取得最大值的方向扩展；
- (2) 裂纹起始扩展的判据是  $G_{\vartheta_{\max}}$  达到某临界值  $G_{\vartheta_c}$ 。

实际上这一假设在[23]中就已提出，但由于求解分枝裂纹边值问题数学上的困难，当时无法具体表达，以后关于  $G(\vartheta)$  的计算方法有带分枝裂纹的解<sup>[25]</sup>，原裂纹的解<sup>[26,27]</sup>，两者同时采用<sup>[28]</sup>三种。R.J. Nuismer<sup>[26]</sup>利用连续性假论，研究了最大能量释放率与最大拉应力判据之间的关系，指出两种假设预言的裂纹起裂角相同。作为最大相当能量释放率判据的特殊情况（ $\alpha = 0$ 时），张淳源<sup>[27]</sup>也独立地得出了上述结论。

### 1.6.3 最小应变能密度因子判据

薛昌明<sup>[29]</sup>提出一种基于局部应变能密度场的断裂概念，其特点是可利用原裂纹尖端附近的应力、位移场来处理所有混合型裂纹扩展问题，不限于 I-II 型。应变能密度因子  $S$  具有方向上的敏感性。他假设：

- (1) 裂纹将沿  $S$  取得最小值的方向扩展；
- (2) 裂纹起始扩展的判据是  $S_{\min}$  达到某临界值  $S_c$ 。

他先求得离裂纹尖端距离  $r$  处的应变能密度为

$$\frac{dU}{dv} = \frac{S}{r} = \frac{1}{r} (a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 + a_{33} K_{III}^2) \quad (1-110)$$

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi\mu} (3 - 4\nu - \cos \vartheta)(1 + \cos \vartheta)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\pi\mu} (2 \sin \vartheta)(\cos \vartheta - 1 + 2\nu)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\pi\mu} [4(1 - \nu)(1 - \cos \vartheta) + (1 + \cos \vartheta)(3 \cos \vartheta - 1)]$$

$$a_{33} = \frac{1}{4\pi\mu}$$

式中  $S$  为应变能密度因子，它表示裂纹尖端附近应变能密度场的幅度或强度。其单位是  $N \cdot m^{-1}$ （或  $Kg \cdot mm^{-1}$ ），式(1-110)中已略去了  $r$  的高阶项。

断裂方向  $\vartheta_0$  满足  $\partial S / \partial \vartheta = 0$ ， $\partial^2 S / \partial \vartheta^2 > 0$ 。断裂判据为：当  $\vartheta = \vartheta_0$  时， $S_{\min} = S_c$ 。

可以从 I 型裂纹的特殊情况下的  $K_{Ic}$  依式(1-110)确定, 以  $K_{II} = K_{III} = 0$ ,  $\vartheta = 0$ ,  $K_I = K_{Ic}$  代入式(1-110), 得

$$S_c = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu} K_{Ic}^2 \quad (1-111)$$

可以把有方向性的量  $S$  理解为裂纹尖端附近的一种抗裂阻力, 裂纹将向阻力最小 (即  $S$  极小) 的方向扩展。将  $S$  分解为体积改变和形状改变两个部分

$$S = S_v + S_d \quad (1-112)$$

不难发现在  $S$  最小的方向, 体积改变比能  $S_v$  大于形状改变比能  $S_d$ , 这是符合经典理论的概念的。

#### 1.6.4 最小相当能量释放率判据

作为最大能量释放率判据的一个自然推广, 计入裂纹的不同断裂机理所消耗的能量不同所带来的裂纹尖端附近各向异性 (对断裂韧性而言) 这个因素, 张淳源<sup>[27]</sup>提出了最大相当能量释放率判据, 它建立在较宽广的实验基础上, 能较全面地反映不同材料在不同条件下两种断裂型式 (张开型和剪切型扩展) 及其相互转化。该判据还考虑了双轴载荷效应, 并把一些已有判据作为特殊情况包括在内, 与实验结果符合得比较好。

为了计及双轴载荷效应 (有时它对断裂载荷及开裂角有显著影响), 可按裂纹尖端附近的级数展开式取二项近似。当  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  同时存在时两项近似解为

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \sqrt{\frac{2r}{a}} \zeta a_{13} \right) = \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi r}} \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \sqrt{\frac{2r}{a}} \zeta a_{23} \right) = \frac{K_{II}^*}{\sqrt{2\pi r}} \\ \tau_{\vartheta z} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \lambda_3 a_{33} = \frac{K_{III}^*}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \quad (1-113)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad a_{12} = -\frac{3}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad a_{13} = \sin^2 \vartheta \\ a_{21} &= \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad a_{22} = \frac{1}{2} (3 \cos \vartheta - 1) \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad a_{23} = -\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \\ a_{33} &= \cos \frac{\vartheta}{2} \end{aligned} \quad (1-114)$$

$$\lambda_2 = \frac{K_{II}}{K_I}, \quad \lambda_3 = \frac{K_{III}}{K_I}, \quad \eta = \frac{K_{III}}{K_{II}} \quad (1-115)$$

$$\zeta = \frac{K_0 - K_I}{K_I} = \frac{p_x - p_y}{p_y}, \quad K_0 = p_x \sqrt{\pi a}, \quad K_I = p_y \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = p_{xy} \sqrt{\pi a} \quad (1-116)$$

$$\text{令 } E' = \begin{cases} \frac{2\mu}{1-\mu} = \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{平面应变} \\ (1+\nu)2\mu = E, & \text{平面应力} \end{cases} \quad (1-117)$$

当  $\vartheta = 0$  时, 在裂纹延长线上, 有

$$\sigma_\vartheta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tau_{r\vartheta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tau_{\vartheta z} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1-118)$$

由于  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  引起的裂纹不连续位移量为

$$\Delta v = \frac{2K_I \sqrt{r}}{E'} \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \quad \Delta u = \frac{2K_{II} \sqrt{r}}{E'} \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \quad \Delta w = \frac{K_{III} \sqrt{r}}{\mu} \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \quad \text{在 } \vartheta = \pi \text{ 处} \quad (1-119)$$

注意式(1-119)中,  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  除与  $E'$  有关外, 完全由  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  确定。§1-4 已证明, 一般情况下能量释放率  $G(\vartheta)$  与闭合能量率相等。为了计入双轴载荷效应, 可计算裂纹沿  $\vartheta$  方向虚拟扩展微小距离  $r_0$  时的平均能量释放率

$$G = G(\vartheta, r_0) = \frac{\Delta E}{r_0}$$

$$\Delta E = \int_0^{r_0} \frac{1}{2} \sigma_\vartheta(r) \Delta v(r') dr + \int_0^{r_0} \frac{1}{2} \tau_{r\vartheta}(r) \Delta u(r') dr + \int_0^{r_0} \frac{1}{2} \tau_{\vartheta z}(r) \Delta w(r') dr \quad (1-120)$$

为了计算  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ , 假设裂纹扩展微小距离  $r_0$  时  $OO_1$  延长线上的应力分布  $\sigma_\vartheta$ ,  $\tau_{r\vartheta}$ ,  $\tau_{\vartheta z}$  与式(1-113)相同, 由于裂纹失稳扩展速度很快, 应力还来不及重新分布, 在临界扩展的瞬间及  $r_0$  很微小或  $\rightarrow 0$  的极限情况下, 这一假设是完全有理由的。比较式(1-113)、(1-118)、(1-119)可见, 由于现在裂纹沿  $\vartheta$  方向扩展代替了沿  $\vartheta = 0$  方向的扩展, 这时为了计算式(1-120)中的不连续位移  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ , 只须在(1-119)中用  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$ ,  $K_{III}^*$  代替  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  即可, 以此代入式(1-120)并取  $r' = r_0 - r$  积分后得到沿  $\vartheta$  方向虚拟扩展  $r_0$  时的平均能量释放率  $G(\vartheta, r_0)$  为

$$G(\vartheta, r_0) = \frac{\Delta E}{r_0} = G + G \quad (1-121)$$

式中

$$\begin{cases} G_\sigma = \frac{K_I^2}{E'} \left[ (a_{11} + a_{12} \lambda_2)^2 + \frac{8\alpha \zeta a_{13}}{3\pi} (a_{11} + a_{12} \lambda_2) + \left( \frac{\alpha \zeta a_{13}}{2} \right)^2 \right], & (\sigma_\vartheta > 0) \\ G_\sigma = 0, & (\sigma_\vartheta < 0) \end{cases} \quad (1-122)$$

$$G_{\tau} = \frac{K_I^2}{E'} \left[ (a_{21} + a_{22}\lambda_2)^2 + \frac{8\alpha\zeta a_{23}}{3\pi} (a_{21} + a_{22}\lambda_2) + \left( \frac{\alpha\zeta a_{23}}{2} \right)^2 + \frac{1}{1-\nu} (\lambda_3 a_{33})^2 \right] \quad (1-123)$$

$$\alpha = \sqrt{2r_0/a} \quad (1-124)$$

在  $\alpha = 0$  的特殊情况下，此解与<sup>[26]</sup>一致， $G_{\sigma}$  称为裂纹扩展张开能量释放率， $G_{\tau}$  称为裂纹扩展的剪切能量释放率，后者包括滑开及撕开能量释放率两部分。

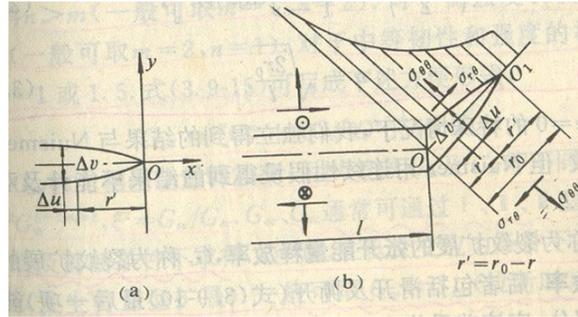


图 1-23 计算能量释放率的示意图

裂纹起裂扩展的临界判据为

$$G(\vartheta, r_0) = 2\gamma(\vartheta) = G_c(\vartheta, r_0) \quad (1-125)$$

$\gamma(\vartheta)$  是有效单位表面能或形成单位新裂纹所需的有效能量损耗，其值由实验确定。不同断裂机理所消耗的能量显然是有区别的，如张开（拉断）与纯撕开（剪断）的  $G_{\sigma c}$  与  $G_{\tau c}$  一般是不同的。由于  $G_c$  是  $\vartheta$  的函数，故裂纹不一定按  $G_{\max}$  的方向扩展，而是按首先满足等式(1-125)的方向发展。

$$\text{当 } G_{\tau} = 0 \text{ 时, } G = G_{\sigma} = G_{\sigma c}, \text{ 为纯拉断} \quad (1-126)$$

$$\text{当 } G_{\sigma} = 0 \text{ 时, } G = G_{\tau} = G_{\tau c}, \text{ 为纯剪断} \quad (1-127)$$

当  $G_{\tau}$ ， $G_{\sigma}$  同时存在时，它们之间的相互影响与材料有关，一般可设断裂判据为

$$\left( \frac{G_{\sigma}}{G_{\sigma c}} \right)^m + \left( \frac{G_{\tau}}{G_{\tau c}} \right)^n = 1 \quad (1-128)$$

它满足式(1-126)、(1-127)两种特殊情况， $G_{\sigma c}$ ， $G_{\tau c}$  是材料常数，可在适当条件下由实验确定。 $m$ ， $n$  与材料有关，对于高强度低韧性材料  $n > m$ （一般可取  $m = 1$ ， $n = 2$ ），对于低强度、高韧性材料  $m > n$ （一般可取  $m = 2$ ， $n = 1$ ），对于中等韧性和强度的材料可取  $m = n = 1$  或 1.5，式(1-128)可写为下述方便的形式

$$G_{\text{xd}} = \left[ G_{\sigma}^m + \left( \frac{G_{\tau}}{\chi} \right)^n \right]^{\frac{1}{m}} = G_{\sigma_c} \quad (1-129)$$

式中  $G_{\text{xd}}$  称为相当能量释放率，用以考虑  $G_{\sigma_c}$  和  $G_{\tau_c}$  等不同的影响， $\chi = \xi^2 G_{\sigma_c}^{1-m/n}$ ， $\xi^2 = G_{\tau_c} / G_{\sigma_c}$ ， $G_{\sigma_c}$ ， $G_{\tau_c}$  通常可通过 I、II、III 型裂纹分别在拉断及剪断条件下求得，

(注意：在低应变应力条件下，I 型裂纹也可能发生剪切型扩展，一般可取  $G_{\sigma_c} = G_{\text{lc}}$  (拉断时)， $G_{\tau_c} = G_{\text{llc}}$ ，故得复合型裂纹扩展规律如下：

(1) 裂纹将沿  $G_{\text{xd}}$  取得最大值的方向扩展

$$\frac{\partial G_{\text{xd}}}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 G_{\text{xd}}}{\partial \vartheta^2} < 0, \quad G_{\text{xd}}(\vartheta_0) = G_{\text{xd max}}, \quad \text{在 } \vartheta = \vartheta_0, \quad -\pi < \vartheta_0 < \pi \text{ 处} \quad (1-130)$$

(2) 裂纹起始扩展的判据是  $G_{\text{xd max}}$  达到某临界值  $G_{\text{lc}}$ ，即

$$G_{\text{xd max}} = G_{\text{xd}}(\vartheta_0) = G_{\text{lc}} = \frac{K_{\text{lc}}^2}{E'} \quad (1-131)$$

当  $m = n = 1$  时，有

$$G_{\text{xd max}} = G_{\sigma} + \frac{G_{\tau}}{\xi^2} = G_{\text{lc}} \quad (1-132)$$

只有当  $m = n = \xi^2 = 1$  时才与  $G_{\text{max}}$  判据重合，此时

$$G_{\text{xd max}} = G_{\text{max}} = G_{\sigma} + G_{\tau} = G_{\text{lc}} \quad (1-133)$$

以 I-II 复合型裂纹为例，此时  $K_{\text{III}} = 0$ ，设  $K_{\text{I}} > 0$ ，为明确计取  $m = n = \xi = 1$ ，此时有

$$G_{\text{xd}}(\vartheta, r_0) = G(\vartheta, r_0) = \frac{K_{\text{I}}^2}{E'} \sum_{i=1}^2 \left[ (a_{i1} + a_{i2} \lambda_2)^2 + \frac{8\alpha\zeta a_{i3}}{3\pi} (a_{i1} + a_{i2} \lambda_2) + \left( \frac{\alpha\zeta a_{i3}}{2} \right)^2 \right] \quad (1-134)$$

由(1-130)得断裂角度应满足下方程

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} (3 \cos \vartheta - 1) \sin \vartheta \right] \lambda^2 + \\ & \left\{ (1 + \cos \vartheta) (1 - 2 \cos \vartheta) - \frac{\alpha\zeta}{3\pi} \left[ (3 \cos \vartheta - 1) (3 + \cos 2\vartheta) \cos \frac{\vartheta}{2} + (7 + 3 \cos \vartheta) \sin 2\vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} \right] \right\} \lambda \\ & - \sin \vartheta \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{2\alpha\zeta}{3\pi} \left[ \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} (5 \cos \vartheta - 1) \right] + \frac{\alpha^2 \zeta^2}{4} \sin 2\vartheta = 0 \end{aligned} \quad (1-135)$$

图 1-24 为带中心斜裂纹单轴均匀拉伸情况下由(1-135)、(1-133)、(1-134)计算出的断裂角度  $\vartheta_0$  及无量纲能量释放率

$$\frac{E'G_{xd \max}}{\pi p_0^2 a} = \frac{(p_{90^\circ}^2 a)_c}{(p_\beta^2 a)}$$

与实验结果的比较。式中用

$$K_0 = p\sqrt{\pi a} \cos^2 \beta, \quad K_I = p\sqrt{\pi a} \sin^2 \beta, \quad K_{II} = p\sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta$$

代入虚线为  $S_{\min}$  理论的结果。

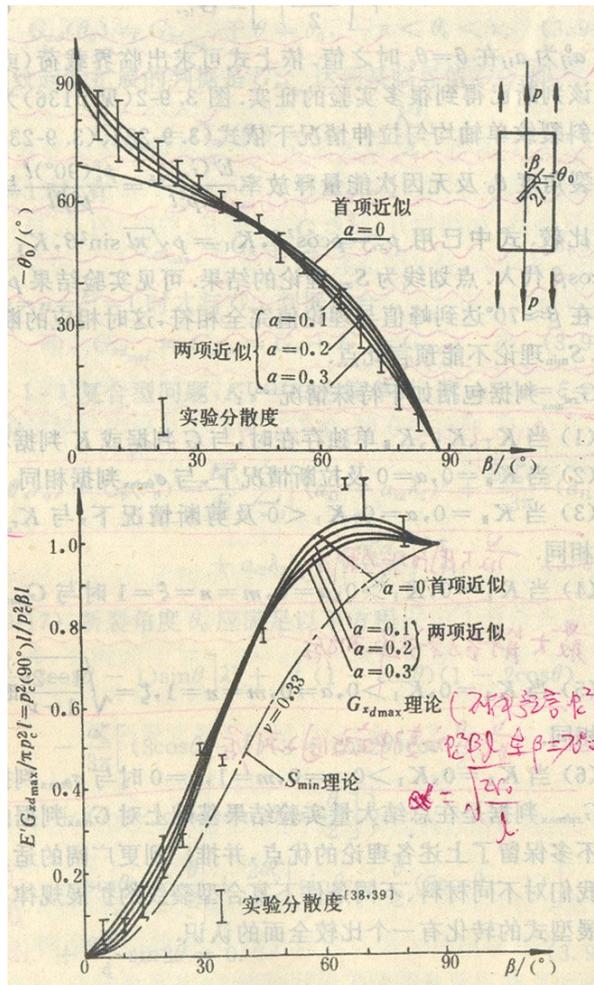


图 1-24 单轴均匀拉伸时断裂角度和断裂载荷比值与实验结果[30]的比较

$G_{xd \max}$  判据包括如下特殊情况<sup>[27]</sup>

- (1) 当  $K_I$ 、 $K_{II}$ 、 $K_{III}$  单独存在，与  $G$  或  $K$  判据相同。
- (2) 当  $K_{III} = 0$ ， $\alpha = 0$ ，及拉断情况下与  $\sigma_{g \max}$  判据相同。
- (3) 当  $K_{III} = 0$ ， $\alpha = 0$ ， $K_I < 0$  及剪断情况下与  $K_{r \max}(\theta)$  判据<sup>[31]</sup>相同。
- (4) 当  $K_{II} = 0$ ， $K_I > 0$ ， $\alpha = 0$ ， $m = n = \xi = 1$  时与  $G_{\max}$  判据相同。
- (5) 当  $K_{II} = 0$ ， $K_I > 0$ ， $\alpha = 0$ ， $m = n = 1$ ， $\xi = \sqrt{(1-2\nu)/(1-\nu)}$  时与  $S_{\min}$  判据相同。
- (6) 当  $K_{II} = 0$ ， $K_I > 0$ ， $\alpha = 0$ ， $m = 1$ ， $n = 0$  时与  $\sigma_{g \max}$  判据相同。

$G_{xd,max}$  判据是在总结大量实验结果的基础上对  $G_{max}$  判据的推广, 它差不多保留了上述各理论的优点, 并推广到更广阔的适用范围, 并使我们对不同材料, 不同条件下复合型裂纹的扩展规律及两种扩展型式的转化有一个比较全面的认识。

## 1.7 讨论

在断裂力学这个总课题中, 线弹性断裂力学发展比较成熟, 已用于解决脆性断裂和准脆性断裂问题。后者指裂纹尖端有小范围屈服的情况, 经过塑性区修正仍可应用。在疲劳及应力腐蚀等问题中也有其应用。各种情况下的应力强度因子已编成手册, 并制订有一些规范供工程计算之用。但这并不是说线弹性理论已经很完善, 相反近年来有些学者<sup>[32,33]</sup>提出一些很基本的看法, 有些看法甚至动摇了线弹性力学的理论根基, 表明还有必要完善其理论基础。有几个基本问题

(1) 关于表面能。表面能从 Griffith 时代开始就被认为是常数, 并且其含义有各种不同的理解和解释, 但实验指出: 自行扩展的裂纹表面能与裂纹扩展速度有关, 环境的影响也会改变表面能的值。Eftis 等考虑其他表面物理量提出了热力学表面能的新定义, 但 Eftis<sup>[32]</sup>等认为由于表面量的加入使得从整体能量平衡来推得局部能量平衡的可能性就不存在了。张淳源<sup>[33]</sup>得到, 考虑表面量后不但仍可从整体平衡方程推得体内的局部平衡方程, 而且可以同时推得新裂纹表面上的局部平衡方程。

(2) 断裂是不可逆过程。物体一旦分为二, 如果把引起断裂的载荷方向改变, 其他条件不变, 物体不会自动合起来。Griffith 只考虑了热力学第一定律, 而未考虑热力学第二定律。即裂纹扩展时, 开裂物的总熵产生率必须大于或等于零。Eftis 等指出了经典断裂理论的矛盾, 不可逆过程必然与熵的增加有关。因此不可逆的裂纹扩展, 一定也以某种方式增加开裂物体的熵。可是对于引起脆断的场合, 对于开裂物体总是被抽象为线弹性体。有热过程的弹性介质中, 任何熵增加都是由于热传导的结果。而如果弹性介质理想地受绝热或等温变形的约束 (通常经典理论是如此假设的), 熵是不可能增加的。裂纹扩展应使熵增加, 但开裂的弹性物体并无含热的部分, 又如何能使熵增加呢? Eftis 并未解决此矛盾。张淳源<sup>[33]</sup>得出了全新的结论: 只要裂纹在扩展, 就不可能是纯粹的力学过程, 必然伴随着热传导和熵产生。这就对经典断裂理论提出了挑战, 断裂力学中不可能有如经典理论假设的那种“等温”或“绝热”过程, 断裂必然伴随着热传导和熵产生。在这个意义上, 经典断裂理论是热力学不相容的。

当然, 上述看法并不妨碍线弹性断裂力学在工程中的应用, 也并未全盘否定它, 而是象所有学科的发展一样, 新理论扬弃旧理论, 保留其合理的内核并使其向前发展。

## 参考文献

- [1] A.A. Griffith Phil. Trans. Roy. Soc. 1920, A221: 163-198.

- [2] G.R. Irwin. Fracturing of metals. ASM. Cleveland, 1948, 147-166.
- [3] E.O. Orowan In: W.M. Murray Ed., Fatigue and Fracture of Metals, Wiley, New York, 1950, 139-167.
- [4] G.R. Irwin. J. Appl. Mech., 1957, 24: 361-364.
- [5] 徐芝纶. 弹性力学. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [6] N.I. Muskhelishvili. 赵惠元 译, 数学弹性力学的几个基本问题. 北京: 科学出版社, 1958.
- [7] H.M. Westergaard. J. Appl. Mech., 1939, 6: 49-53.
- [8] G.C. Sih. Handbook of Stress Intensity Factor. 1975.
- [9] 石田诚. 裂纹的弹性分析和应力强度因子(日文). 培风馆, 1976.
- [10] G.C. Sih. Int. J. of Fracture, 1966, 2: 628-631.
- [11] J. Eftis. Int. J. of Fracture. 1972, 8: 382-392.
- [12] R.de Wit. ICF4, 1977, 3
- [13] B. Cotterell. Int. J. of Fracture, 1966, 2: 3.
- [14] J. Eftis. N. Subramonian. Eng. Fracture Mech., 1978, 10: 45-67.
- [15] H. Liebowitz, J.D. Lee and J. Eftis. Eng. Fracture Mech., 1978, 10: 315-336.
- [16] 周承桐, 郭兆璞. 断裂力学学术会议论文集, 1979.
- [17] F.A. Molintock, G.R. Irwin. STP381, ASTM, 1965.
- [18] 张淳源. 固体力学学报, 1980, 1: 117-122.
- [19] E.M. Morozov. Izv Vyssh Uchebn Zavedenii Stroit I Arkhitekt. 1969, 12. (in Russian)
- [20] Li Xiao-Wei, Tao Xue-Wen. Eng. Fracture Mech., 1983, 18: 161-169.
- [21] 湘潭大学断裂科研组, 湘潭大学学报, 1978, 1: 54-67.
- [22] . . . . 1974.
- [23] F. Erdogan, G.C. Sih. J. of Basic Eng. Ser. D. 1963, 85: 519-527.
- [24] K. Palaniswamy. Int. J. of Fracture Mech., 1972, 8: 114.
- [25] M.A. Hussain, S.L. Pu, J. Underwood. ASTM STP560, 1974: 2-28.
- [26] R.J. Nuismer. Int. J. of Fracture, 1975, 11: 245-250.
- [27] 张淳源. 混合型裂纹的能量释放率. 湘潭大学学报, 1979, 1: 94-111. Zhang Chunyuan. Eng. Fracture Mech., 1982, 16: 139-140.
- [28] T.C. Wang. Institute of Mech, Academia Sinia, 1977.
- [29] G.C. Sih. Eng. Fracture Mech., 1973, 5: 1037.
- [30] J.G. Williams, P.D. Ewing. Int. J. of Fracture, 1972: 4: 441-446.
- [31] A. Otsuka, K. Mori, and Miyata. Eng. Fracture Mech., 1975, 7: 429-439.
- [32] J. Eftis, H. Liebowitz. Eng. Fracture Mech., 1976, 8: 459-485.
- [33] 张淳源. 论非线性断裂力学的基本平衡定律. 科学探索.

## 第二章 弹塑性断裂力学基础

### 2.1 引言

在第一章中我们把裂纹体抽象为线弹性体,裂纹顶端存在应力奇异性。实际材料(特别是金属)常呈现屈服现象,裂纹尖端附近存在一个塑性区。当塑性区尺寸远较裂纹尺寸为小时,称为“小范围屈服”。此时由于塑性区周围的广大区域仍为弹性区,因而,线弹性断裂力学的分析结果具有较好的精确性。如果再加上塑性区修正,还将得到更加符合实际情况的结果,小范围屈服下的断裂,称为“准脆性断裂”。高强度和超高强度钢材一般多属于此种情况。当塑性区尺寸接近或超过裂纹尺寸时,称为“大范围屈服”。“大范围屈服”下的断裂,称为“弹塑性断裂”。例如应用最广的中、低强度钢,除了温度很低、截面很厚、应变速率很高的情况以外,一般都呈弹塑性断裂模式。这种情况下,线弹性断裂力学不再适用,要用弹塑性断裂力学来解决。用弹塑性断裂力学来处理裂纹问题比较困难,弹塑性断裂力学还处在发展阶段。目前只能对 III 型裂纹求得裂纹尖端的弹塑性精确解,对于 I、II 型问题暂时还得不到精确解。由于“全场解”很难求,人们首先着手求“局部解”。所谓“全场解”即为满足外部边界条件的解。对于小范围屈服的情况,要求满足远处 K 场的边界条件;而对于大范围屈服的情况,则要求满足实际的边界条件。所谓“局部解”是指在裂纹附近的主奇异解,它实际上是  $r \rightarrow 0$  的渐近解,除了裂纹表面自由条件以外,不要求满足远处的边界条件。1968 年 Hutchinson<sup>[1]</sup>及 Rice 与 Rosengren<sup>[2]</sup>发表了著名的 HRR 奇异解,它为弹塑性断裂力学提供了一个理论的起点。HRR 奇异解是建立在塑性变形理论及无卸载假定基础上的,实际上相当于物理非线性弹性理论,假定应力-应变关系为 Ramberg-Osgood 型的,对于幂硬化材料,在单向拉伸条件下为

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad n > 1 \quad (2-1)$$

$\alpha$  为硬化系数,  $\sigma_0$  为屈服应力,  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ 。一般情况下,有

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = (1+\nu) \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (2-2)$$

上式右端前两项相当于弹性情况,最后一项对应塑性变形,  $s_{ij}$ ,  $\sigma_e$  和  $\delta_{ij}$  分别为应力偏量, 等效应力和 Kronecker  $\delta$  符号。

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad \sigma_e = \left( \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2-3)$$

Mises 的屈服条件是  $\sigma_e/\sigma_0 = 1$ 。依上述物理关系得到的 HRR 奇异解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \vartheta) &= \sigma_0 K_\sigma r^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\vartheta, n) \\ \varepsilon_{ij}(r, \vartheta) &= \alpha \frac{\sigma_0}{E} K_\sigma^n r^{-n/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\vartheta, n) \\ \sigma_e(r, \vartheta) &= \sigma_0 K_\sigma r^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}_e(\vartheta, n) \\ u_i(r, \vartheta) &= \alpha \frac{\sigma_0}{E} K_\sigma^n r^{1/(n+1)} \tilde{u}_i(\vartheta, n) \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

而称

$$K_\sigma = \left( \frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n} \right)^{1/(n+1)} \quad (2-5)$$

为塑性应力强度因子。 $J$  为  $J$  积分 (见 2.4 节),  $I_n$  为与  $n$  有关的积分。例如对 I 型平面应变情况,  $n$  在相当大范围内变化的实际金属结构材料  $I_n = 4.4 \sim 5.5$ 。由(2-4)可见,  $J$  积分此时确定了应力、应变场的强度。

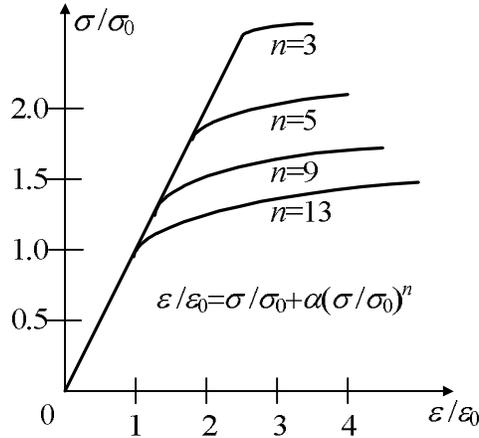


图 2-1 幂硬化材料

许多研究者对 HRR 解进行了进一步的研究, 讨论它的适用范围, 利用它研究断裂准则, 使它逐步获得广泛应用。可是, 当人们研究起裂以后的裂纹扩展问题时, HRR 解的弱点更加显露出来。因为裂纹一旦起裂, 就会在裂尖附近出现严重的非比例塑性变形与卸载, 这就使得 HRR 奇异解所由建立的基础被否定了,  $J$  本身也失去了意义。但幸好有人指出在一些较强的条件下 (例如裂纹扩展量非常小, 材料的  $J$  阻力曲线斜率非常陡等) 裂纹扩展也仍然受  $J$  的控制。近年来为了克服  $J$  控制扩展理论的局限性, 国内外一些学者作了很多工作, 进一步研究扩展中裂纹尖端周围的应力与应变场, 并在此基础上建立以裂纹附近某些物理量 (如裂纹前方的应变或裂纹后方的裂纹开口形状) 为基础的“近尖端断裂准则”。有关这方面的近况及系统介绍请参阅<sup>[3,4]</sup>。

作为工程计算, 本章着重阐述目前应用最广的 COD 理论及  $J$  积分理论。

## 2.2 裂纹尖端模型

裂纹尖端塑性区的形状由弹塑性问题的精确解确定。但到目前为止 I、II 型裂纹前缘的弹塑性精确解还未得到。在“小屈服范围”的情况下，可利用线弹性裂纹尖端场及 Mises 屈服条件求得未考虑应力松弛的塑性区边界曲线方程

$$r = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \left( 1 + 3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right), & \text{平面应力} \\ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \left[ (1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right], & \text{平面应变} \end{cases} \quad (2-6)$$

在裂纹延长线上， $\vartheta = 0$ ，故塑性区尺寸为

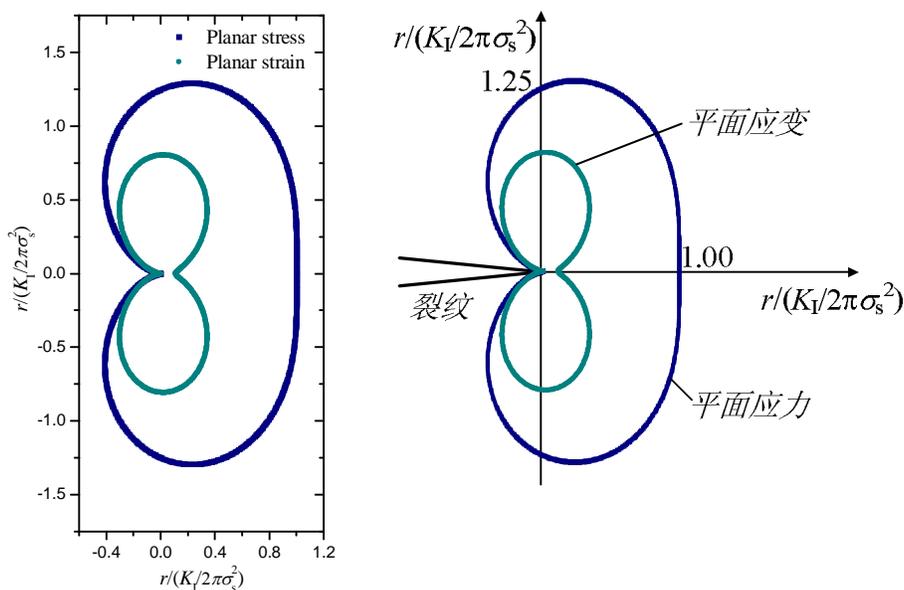


图 2-2 塑性区示意图

$$r_0 = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2, & \text{平面应力} \\ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 (1 - 2\nu)^2, & \text{平面应变} \end{cases}$$

上式可统一写为

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (2-7)$$

$\sigma_{ys}$  为有效屈服应力，平面应力时  $\sigma_{ys} = \sigma_s$ ；平面应变时  $\sigma_{ys} = \sigma_s / (1 - 2\nu)$ 。不过对于厚试

件，表面仍为平面应力情况，实际有效屈服应力由实验测得为  $\sigma_{ys} = 2^{3/4} \sigma_s$ 。代入式(2-7)得到塑性区尺寸为

$$r_0 = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2, & \text{平面应力} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2, & \text{平面应变} \end{cases} \quad (2-8)$$

上面的分析还没有考虑由屈服区塑性变形引起的应力松弛，裂纹平面上原来的应力分布为

$$\sigma_y = K_I / \sqrt{2\pi r}$$

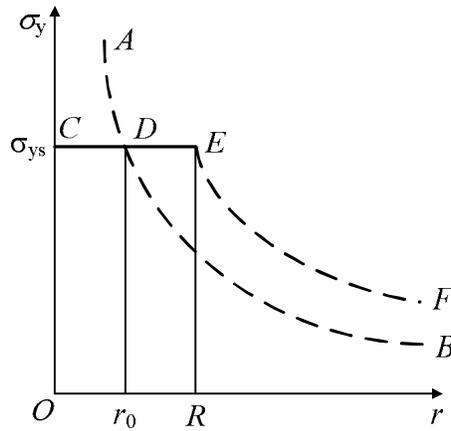


图 2-3 塑性区应力松弛效应

见图 2-3 中的 AB 曲线，应力松弛后改为 CEF 曲线，假设弹性区内应力积分不变，即曲线 EF 和曲线 DB 下的面积相等。由于松弛前后的应力积分后应与外载平衡，所以

$$R\sigma_{ys} = \int_0^{r_0} \sigma_y dr = K_I \sqrt{2r_0 / \pi}$$

以(2-7)，(2-8)代入上式，得到考虑应力松弛后塑性区尺寸为

$$R = 2r_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2, & \text{平面应力} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2, & \text{平面应变} \end{cases} \quad (2-9)$$

这就是第一章进行塑性区修正在计算有效裂纹尺寸时曾用过的公式(1-60)，这些都是近似结果。

由于精确的弹塑性分析很复杂，作为工程计算，通过实验观察和理论分析建立适当的计算物理模型可以大大简化弹塑性的数学分析。

Dugdale<sup>[5]</sup>通过软钢薄板裂纹前缘的塑性区观察发现：塑性区集中在与板面成  $45^\circ$  的横向滑移带上（图 2-4），当塑性区长度  $R$  比板厚  $t$  大得多时，塑性区可理想化为呈尖劈形向两边延伸。窄条塑性区可以用附加切口代替，沿着该表面上作用着代替塑性变形材料的应力  $\sigma_0$ ，这样，就把裂纹的弹塑性问题归结为“裂纹-切口模型”的弹性问题了。Dugdale 认为区域内为塑性区，将  $\sigma_0$  理解为屈服极限，平均分布于表面上。计算中近似取窄条屈服区的高度为零。由于解除了约束，窄条区上、下表面可能存在相对位移，造成位移间断，并认为这一位移间断，就是实际由于塑性变形的发展和伴随着裂纹尖端钝化所产生的张开位移。

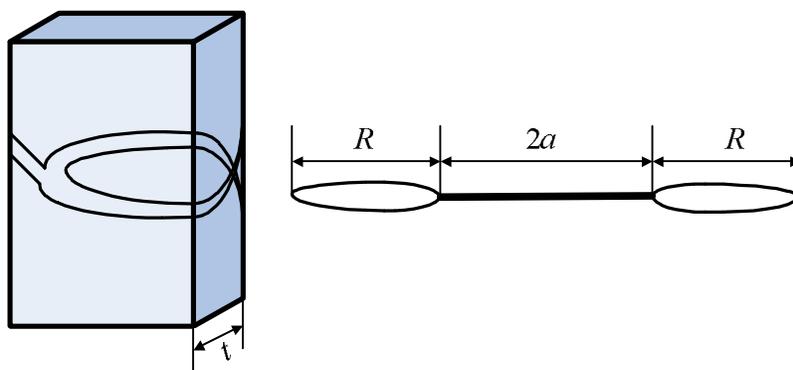


图 2-4 平面应力情况下裂纹尖端塑性区

Barenblatt<sup>[6]</sup>曾提出一种假说：认为线弹性断裂力学的应力分析中，由于裂纹半径趋于零引起无限大的应力集中，而实际上这种应力集中是不可能的。他认为在裂纹尖端存在一微小区域称为内聚区。在此区域内存在原子间相互作用力，依物理定律这种相互作用力取决于可与原子间距相比的距离  $2v(x)$ ，这意味着在  $\Omega$  区内切口表面间没有材料。他认为原子间吸引力  $\sigma$  与拉开距离  $\delta$  有  $\sigma = \sigma(\delta)$  的函数关系，当张开位移超过某临界值  $\delta > \delta^*$  则  $\sigma(\delta) = 0$ ，如果  $\sigma(\delta) = \sigma_0$ ，则 Barenblatt 模型相当于 Dugdale 模型，所以统称为 Dugdale-Barenblatt 模型或 D-B 模型。由于 Dugdale 应用 Muskhelishili 解决求得了这个塑性区尺寸，故有时也称为 D-M 模型。与此相似还有从位错连续统理论出发，对平面应力和反平面应变的弹塑性断裂理论进行分析，所得到的张开位移、撕开位移公式与 D-B 模型结果相同，该模型称为 BCS 模型<sup>[7]</sup>。由 和 <sup>[8]</sup>所提出的  $\delta_k$  模型也是在裂纹延长线上引入所谓的弱联结区，它是一个长  $R$  的切口，在其两侧上作用着自成平衡的应力  $\sigma_0$ ，它等于脆性强度极限。他们还假设仅在张开位移小于某常数  $\delta_k$  时弱联结区两侧面才相互作用。

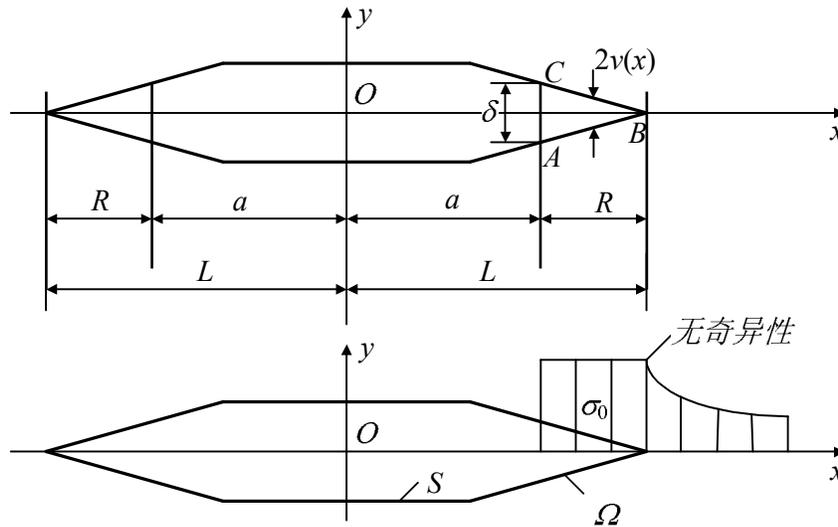


图 2-5 裂纹尖端模型

上述模型除物理解有所不同外，从数学上看均是属于裂纹-切口模型，在切口上作用着自成平衡的分布应力  $\sigma_0$ ，依 Knauss 的计算结果表明，这一分布应力情况对最后结果不起显著影响。通常为了简单起见取它为平均分布的应力  $\sigma_0$ 。

### 2.3 裂纹尖端张开位移(COD)理论

裂纹张开位移(Crack Opening Displacement)理论，简称 COD 理论，或裂纹顶端张开位移(Crack Tip Opening Displacement)理论，简称 CTOD 理论，是 Wells(1961)<sup>[9]</sup>首先提出来的。实验与分析表明，裂纹体受载后裂纹尖端附近的塑性区导致原裂纹尖端处表面张开，这个张开量用  $\delta$  表示。Wells 认为，当裂纹张开位移  $\delta$  达到临界值  $\delta_c$  时，裂纹就将扩展，取  $\delta_c$  作为材料的断裂韧度指标，则相应得断裂判据为

$$\delta = \delta_c \quad (2-10)$$

临界值  $\delta_c$  可依实验来测定。通常采用小型三点弯曲试件来测定  $\delta_c$  值，可参阅我国 1980 年规定的“裂纹张开位移试验方法 GB2358-80”国家标准。

COD 的计算有不同的方法，以下介绍依常用的 D-B 模型计算  $\delta$  的方法。为此，首先计算塑性区尺寸  $R$ 。显然依 D-B 模型计算出的  $R$  将不同于依线弹性理论按小屈服范围情况得到的近似结果式(2-9)。由于塑性区和弹性区的应力连续过渡，因此在塑性区尖端 ( $x = L$  处) 应力应该没有奇异性 (图 2-5)。由于问题已化归线弹性问题，故可用叠加原理求在外载及  $\sigma_0$  联合作用下由长度为  $L = a + R$  的假想裂缝的应力强度因子。根据该顶端应力应该有限 (或无奇异性) 的要求，该应力强度因子应为零。

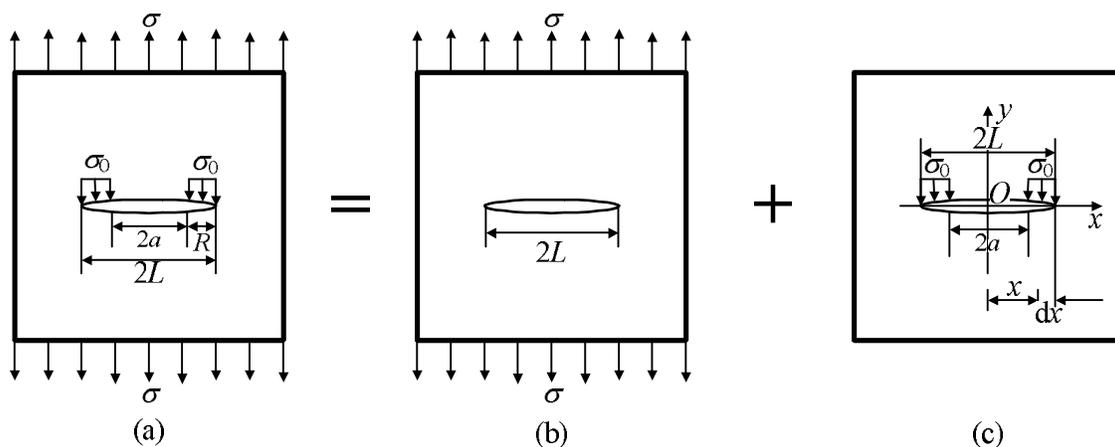


图 2-6

$$K_I^a = K_I^b + K_I^c = 0$$

由第一章已知式(1-27), (1-52)

$$K_I^b = \sigma\sqrt{\pi L}$$

$$K_I^c = \int_a^L \left( \frac{-\sigma_0}{\sqrt{\pi L}} \sqrt{\frac{L+x}{L-x}} + \frac{-\sigma_0}{\sqrt{\pi L}} \sqrt{\frac{L-x}{L+x}} \right) dx = \frac{-2\sigma_0 L}{\sqrt{\pi L}} \cos^{-1} \frac{a}{L}$$

由上三式求得

$$\frac{a}{L} = \cos \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0} \right) \quad (2-11)$$

$$R = L - a = a \left( \frac{L}{a} - 1 \right) = a \left( \sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0} - 1 \right) \quad (2-12)$$

为了计算裂纹尖端张开位移  $\delta$ , 可在真实裂纹两个顶端处 (即求  $\delta$  处) 各加一对虚力  $P$ , 设  $U$  为弹性应变能, 当载荷一定时,  $G_I = \partial U / \partial A$ , 由卡氏定理

$$\delta = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial P} \quad (2-13a)$$

可写为

$$\delta = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial P} \int_0^A G_I dA = \int_0^A \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\partial G_I}{\partial P} dA \quad (2-13b)$$

依叠加原理求出在外载  $\sigma$ ,  $\sigma_0$  及  $P$  联合作用下的  $K_I$ , 代入  $G_I = K_I^2 / E$  后再代入(2-13)积分得

$$\delta = \frac{8\sigma_0 a}{\pi E} \ln \left( \sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0} \right) \quad (2-14)$$

按  $\pi\sigma / (2\sigma_0)$  在  $\pi\sigma / (2\sigma_0) = 0$  处展开为级数得

$$\delta = \frac{8\sigma_0 a}{\pi E} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0} \right)^4 + \frac{1}{45} \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0} \right)^6 + \dots \right]$$

当  $\sigma/\sigma_0 \ll 1$  时，即在小范围屈服条件下，可只取第一项

$$\delta = \frac{8\sigma_0 a}{\pi E} \frac{1}{2} \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0} \right)^2 = \frac{\sigma^2 \pi a}{E \sigma_0} = \frac{K_I^2}{E \sigma_0} = \frac{G_I}{\sigma_0} \quad (2-15)$$

上式建立了小范围屈服条件下 COD 与  $K_I$ ， $G_I$  之间的关系。

裂纹张开位移判据在一定程度上能预计大范围屈服下的断裂。在处理平板的断裂，在中、低强度钢焊接结构和压力容器断裂安全分析和选材中都得到广泛应用。实践证明 COD 方法是更有效而简单的方法，但由于张开位移  $\delta$  不是一个应力、应变场的直接描述参量，究竟如何定义 COD 才能反映裂纹尖端地区有效的应力应变场的强度还有争议。COD 判据的使用目前还是经验性的。目前有一种意见是把 COD 和  $J$  积分联系起来，利用  $J$  积分可为 COD 提供一些理论基础和分析手段。

## 2.4 $J$ 积分理论

### 2.4.1 $J$ 积分定义及其性质

在线弹性断裂力学中应力强度因子刻划了应力场的强度。在弹塑性断裂力学中，人们也希望寻找描述弹塑性断裂的控制参量，以便建立断裂判据。Rice<sup>[10]</sup>应用全量理论避开求解裂纹前缘的弹塑性应力、应变场的数学困难，提出了平面裂纹问题的  $J$  积分理论。 $J$  积分的定义是

$$J = \int W dy - \left( T_x \frac{\partial u}{\partial x} + T_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds \quad (2-16a)$$

利用 Einstein 求和约定，上式可写为

$$J = \int \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (2-16b)$$

式中

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2-17)$$

为应变能密度， $T_x$ ， $T_y$  是作用在围道上的应力分量， $u$ ， $v$  是该处的位移分量。是从裂纹自由表面上任一点开始，逆时针绕过裂纹尖端塑性区，而终止于裂纹另一自由表面上任一点的任意积分回路。

$J$  积分有明显的物理意义。它表示裂纹扩展单位长度时，每单位厚度中流入围道的能量。为了说明此点，可取坐标系  $Oxyz$  随裂纹尖端平行移动，坐标原点放在裂纹尖端。设围道随裂纹尖端一起平动，则作用于围道上牵引力所作的功等于

$$J = B \int (T_x du + T_y dv) ds$$

$B$  为裂纹体的厚度。材料中各点变化为  $dx = -da$  ,  $dy = 0$  , 所以

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial x} da$$

同理

$$dv = -\frac{\partial v}{\partial x} da$$

从而牵引力的功可写为

$$-Bda \int \left( T_x \frac{\partial u}{\partial x} + T_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds \quad (2-18)$$

围道平动时, 右侧进入围道的体积使围道内的弹性应变能增加, 而左侧退出体积将减少围道内的弹性应变能, 其变化为

$$B \int W dy = Bda \int W dy \quad (2-19)$$

积分应依 的正方向求积, 右侧  $dy > 0$  , 在左侧  $dy < 0$  , 将(2-18), (2-19)两项加起来就是裂纹扩展  $da$  时流入围道 的能量

$$Bda \int W dy - \left( T_x \frac{\partial u}{\partial x} + T_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds$$

$$J = \int \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right)$$

表示裂纹扩展单位长度时, 每单位厚度中流入围道 的能量。

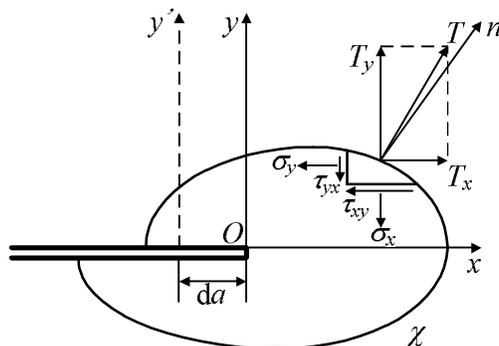


图 2-7  $J$  积分的围道

$J$  积分具有积分值与路径无关的特性。要证明围绕尖端塑性区在内的任意围道  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  具有相同的  $J$  积分值, 只要证明在任意不包含尖端塑性区在内的闭围道  $\Gamma'$  上的  $J$  积

分为零。取  $\Gamma' = \Gamma_1 + CD + (-\Gamma_2) + BA$ ，又由于沿  $CD$  及  $BA$  的  $J$  积分为零（因  $dy=0$  及  $T_i=0$ ），则沿  $\Gamma_1$  与沿  $\Gamma_2$  的  $J$  积分值必须相等。下面来证明沿  $\Gamma'$  的  $J$  积分为零。

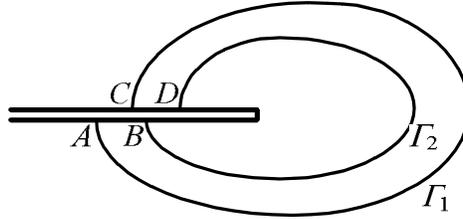


图 2-8

设  $x_1 = x$ ， $x_2 = y$ ， $\sigma_{ij}$ ， $\varepsilon_{ij}$ ， $u_i$  是在单连通域  $D$  的边界  $\Gamma'$  内或  $\Gamma'$  上的不含有奇异性的场方程的解。 $J$  积分可写为如下形式

$$J_{\Gamma'} = \int_{\Gamma'} (Wn_x - \sigma_{ij}n_j u_{i,x}) ds \quad (2-20)$$

这里用到  $dy = n_x ds$ ， $dx = -n_y ds$ ， $T_i = \sigma_{ij}n_j$ 。依 Green 公式

$$\int_{\Gamma'} (Pdx + Qdy) = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

有

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} Wn_x ds &= \int_D W_{,x} dA = \int_D \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij,x} dA = \int_D \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,x} dA = \int_D \sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})_{,x} dA \\ &= \int_D \sigma_{ij} (u_{i,j})_{,x} dA = \int_D \sigma_{ij} (u_{i,x})_{,j} dA = \int_D (\sigma_{ij} u_{i,x})_{,j} dA = \int_{\Gamma'} \sigma_{ij} n_j u_{i,x} ds \end{aligned}$$

从而

$$J_{\Gamma'} = \int_{\Gamma'} (Wn_x - \sigma_{ij}n_j u_{i,x}) ds = 0 \quad (2-21)$$

证明中用到  $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$ ， $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 = \varepsilon_{ji}$  及无体力的平衡方程  $\sigma_{ij,j} = 0$ ，这正是  $J$  积分守恒性成立的前提。第一点要求  $\varepsilon_{ij}$  由  $\sigma_{ij}$  唯一确定，因而，对于弹塑性体不允许卸载；第二点要求变形为小变形；第三点要求不计体力。

#### 2.4.2 $J$ 积分与能量释放率 $G$ 之间的关系

由于  $J$  积分不依赖于路径，只要围道始终包含裂纹尖端全部塑性区，可使围道向尖端收缩，这样就可认为  $J$  积分就是裂纹扩展单位面积时流向裂纹尖端的能量。在小范围屈服条件下  $J$  积分等于线弹性能量释放率  $G$ 。事实上若取  $\Gamma'$  为二维裂纹体（其面积为  $A$ ）的边界曲线，则总势能为

$$= B \int_A W dx dy - B \int_T (T_x u + T_y v) ds \quad (2-22)$$

$T$  为有牵引力的那部分围道，等号右端第一项为弹性应变能，第二项为牵引力势能，它等于牵引力  $T_i$  通过位移  $-u_i$  到势能为零的位置过程中所作的功。势能的降低  $-d$  等于流向裂纹尖端的能量  $JdA$ ，从而

$$J = -d / dA \quad (2-23)$$

换句话说， $J$  积分是对于裂纹面积的势能的减少率。在小范围屈服条件下， $J$  积分就等于能量释放率  $G$ 。对弹塑性材料，只要不出现卸载， $J$  积分仍由(2-23)确定，可见  $J$  积分是线弹性能量释放率  $G$  的一种推广。

$J$  积分理论认为，当  $J$  积分达到临界值  $J_c$  时，裂纹就要扩展。因此在弹塑性情况下可用  $J$  作为参量来建立断裂判据

$$J = J_c \quad (2-24)$$

$J$  积分守恒性要求不允许卸载，但由于裂纹在亚临界扩展时总要引起局部地区卸载，所以严格地说，上式只能是起裂判据。从 HRR 奇异解(2-4)可见，在弹塑性或非线弹性情况下裂纹尖端的应力、应变奇异性强度由  $J$  积分值和材料形变硬化特性参量  $\alpha$  和  $n$  等所确定。当材料确定时，裂纹尖端地区塑性应力和应变场奇异性就由  $J$  积分这个参量所确定。下面我们给出  $J$  积分的形变功率定义。

在 1.4 节中我们根据能量守恒定律得到一般情况下（式(1-69)）

$$G = -\frac{\partial U}{\partial A} + P \frac{\partial}{\partial A} = -\frac{\partial}{\partial A} - \frac{\partial P}{\partial A}$$

在推导上式并未涉及材料是线弹性的事实，因而对于非线性弹性体也适用。由于  $J$  是裂纹扩展单位面积时流入裂纹尖端的能量，所以采用相同的方法可推得在一般情况下（载荷、位移均不固定时）有

$$J = -\frac{\partial U}{\partial A} + P \frac{\partial}{\partial A} = -\frac{\partial}{\partial A} - \frac{\partial P}{\partial A} \quad (2-25)$$

它适用非线性弹性或弹塑性（不许卸载）材料。

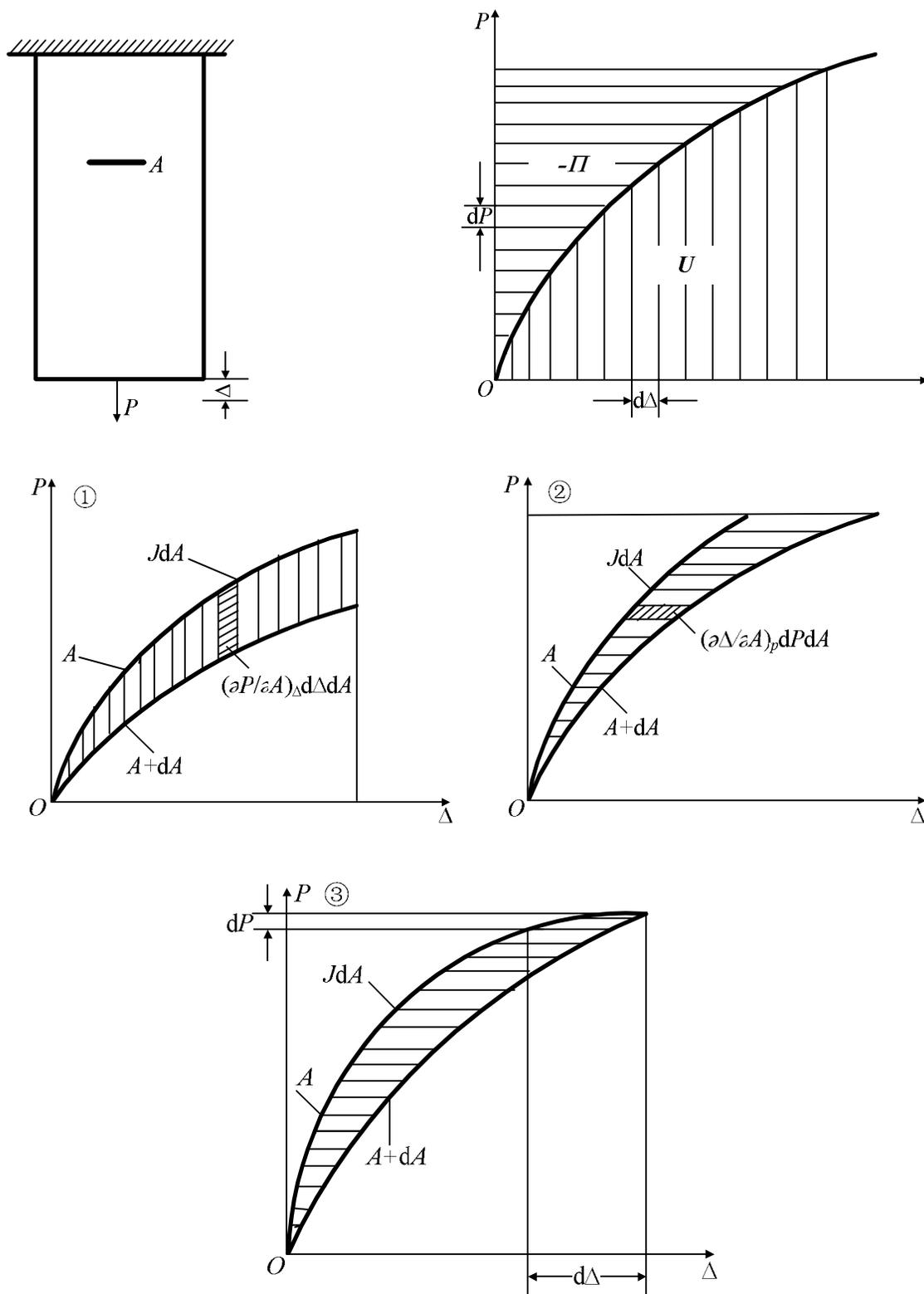
由图 2-9 可见

$$U = \int_0^P Pd \quad (2-26)$$

$$- = -U + P = \int_0^P dP \quad (2-27)$$

在常载荷的情况下， $dP = 0$ ，从而

$$J = -\left(\frac{\partial}{\partial A}\right)_P = \int_0^P \left(\frac{\partial}{\partial}\right)_P dP \quad (2-28)$$



$JdA = -(dU)_\Delta$ , 常位移;  $JdA = -(dII)_P$ , 常载荷;  $JdA = -dII - \Delta dP = -dU + Pd\Delta$ , 一般情况

图 2-9 J 的形变功率定义

在常位移的情况下,  $d = 0$ , 从而

$$J = -\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right) = -\int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial A}\right) d\Delta \quad (2-29)$$

式(2-25), (2-26), (2-29)就是  $J$  积分的形变功率定义。如果知道  $P$ - 加载曲线与试件几何尺寸及裂纹尺寸的函数关系  $P = f(a, \Delta)$  或  $\Delta = \varphi(a, P)$ , 则由于  $J$  积分与宏观可测参量 (载荷  $P$ , 位移  $\Delta$ , 不同裂纹面积时的加载曲线  $P$ - $\Delta$ , 或其下的面积即形变功等) 联系起来, 因此这些定义便成  $J$  积分实验标定和解析分解的基础。

### 2.4.3 $J$ 积分与 COD 之间的关系

现在, 我们在 D-B 模型的范围内来研究  $J$  积分与 COD 的关系。选取塑性区边界 ABC 作为积分路径 (图 2-5), 由图可见沿所选积分路径 ABC 有

$$dy = 0, ds = dx \text{ (在 AB 段)}, ds = -dx \text{ (在 BC 段)}$$

$$T_x = 0, T_y = -\sigma_0 \text{ (在 AB 段)}, T_y = \sigma_0 \text{ (在 BC 段)}$$

代入  $J$  积分表达式, 得

$$\begin{aligned} J &= \int_{ABC} W dy - \left( T_x \frac{\partial u}{\partial x} + T_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) ds = -\int_{AB} (-\sigma_0) \frac{\partial v}{\partial x} dx - \int_{BC} \sigma_0 \frac{\partial v}{\partial x} (-dx) \\ &= \int_A^B \sigma_0 dv + \int_B^C \sigma_0 dv = \sigma_0 (v_C - v_A) = \sigma_s \delta \end{aligned}$$

从而

$$J = \sigma_s \delta \quad (2-30)$$

推导上式时没有考虑材料硬化作用, 且裂纹尖端处于理想平面应力条件下, 即认为裂纹尖端处材料变形不受沿板厚方向的约束, 因而不产生三向应力状态。实际情况与此有别, 应进行修正

$$J = k \sigma_s \delta \quad (2-31)$$

其中  $k = 1.1 \sim 2.0$  称为 COD 减少因子。具体数值取决于物体和裂纹几何特征、裂纹尖端应力状态、材料的硬化特征等因素。

$J$  积分理论为解决中、低强度材料大型构件的断裂问题开辟了道路, 但  $J$  积分全量理论在理论上也存在重大限制, 如限于小变形情况, 塑性区内不允许卸载等。虽然目前还存在不少异议, 但从工程应用容许的近似角度看, 通过引入某些修正, 通过实验建立保证  $J$  积分方法近似有效的几何尺寸要求和有效性判据,  $J$  积分在工程结构断裂分析和断裂韧性实验分析中的应用将大为扩展。

关于积分变分原理及其应用和断裂韧性  $\tilde{G}$  等可参阅文献<sup>[11]</sup>或其他有关文献。

## 参考文献

- [1] J.W. Hutchinson. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, 16(1): 13-31.
- [2] J.R. Rice, G.R. Rosengren. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, 16(1): 1-12.
- [3] 黄克智, 余寿文. *弹塑性断裂力学*. 1983.
- [4] J.W. Hutchinson, ICF5, Cannes, France, 1981.
- [5] D.S. Dugdale. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, 8: 100-104.
- [6] G.I. Barenblatt. *Advances in Applied Mechanics*. Academic Press, New York, 1962.
- [7] B.A. Bilby, A.H. Cottrell, K.H. Swinden. *Proc. Roy. Soc. (London) Ser.A*, 1963, 273: 304-310.
- [8] . . . , . . . . , 1957, 5(4): 391-401.
- [9] A.A. Wells. *The Crack Propagation Sym.* Cranfield, 1961, 210-230.
- [10] J. Rice. *Transactions of the ASME, Series E.J. of Appl. Mech.*, 1968, 35: 379
- [11] 于饶中, 张淳源. *岩石混凝土断裂力学*. 湖南科学技术出版社, 1985.

## 第三章 线黏弹性断裂力学基础

### 3.1 引言

任何一门学科都有它的基本假设，它们确定了该学科的研究范围。基本假设是抓住事物的基本因素，撇开次要因素而作出的，随着生产的发展，某些次要因素转化为主要因素，这就要求人们扬弃原有假设，代之以新的基本假设。基本假设的深度反映了人类对客观世界真认识的深度。无论是线弹性断裂力学还是弹塑性断裂力学都无法解释诸如“延迟失稳”，裂纹体的“寿命”等“时间相依”问题。不少工程材料和聚合物、复合材料、有色金属、岩石、混凝土、土、骨骼组织等在常温下就明显地表现出“时间效应”。这就要求正确选择流变模型作为材料物理方面的基本假设。袁龙蔚、张淳源等为了研究湖南柘溪水电站混凝土坝坝墩裂纹的产生和扩展，发表了“流变断裂学”方面的论文。袁龙蔚<sup>[1-9]</sup>论述了流变断裂学的理论基础，引进了“粘弹对应原理”并将其用于断裂问题。张淳源<sup>[9-18]</sup>把 Griffith-Irwin 的线弹性断裂力学的理论推广到线性黏弹性的情形，提出线黏弹性断裂力学的基本理论及延迟失稳的新概念。该理论得到已有实验的验证，并很好地解释了湖南柘溪水电站混凝土坝坝墩裂纹延迟八年才失稳的原因。龚安特<sup>[19]</sup>讨论了混凝土三维裂纹的热黏弹性断裂问题。周筑宝<sup>[20-22]</sup>对裂纹尖端附近存在初始塑性损伤的蠕变断裂作了分析。李之达、刘吉甫、张淳源<sup>[23]</sup>还作了混凝土裂纹体的延迟失稳实验。

流变断裂学是流变学与断裂力学交缘的一门新学科。它从历史发展的观点出发，把连续的流变与不连续的断裂在热力学相容的原则下结合起来。它的建立与发展必将有着广泛的应用前景。流变断裂学是从流变力学的观点出发，将材料统一地视为具有不同本构方程的流变体来研究这种流变性固体中裂纹发生、发展规律的学科，是研究带裂纹流变体的强度和寿命的学科。由于所论流变体设计各种材料，因而有着广泛的应用范围。

流变断裂学把带裂纹体随时间的运动与变形视为从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的映射，当裂纹体不扩展时，这种映射是连续可微同胚。即指映射 $\chi: S \rightarrow T(S, T$ 是两个拓扑空间)是一一对应的， $\chi$ 与 $\chi^{-1}$ 都是连续可微的。当裂纹扩展时，开裂处映射不再连续，开裂处映射也不是一一对应得，相应的映射成为奇异的。

流变断裂学认为<sup>[1]</sup>：物体的断裂是一个具有记忆的历史过程，是一个能量耗散的过程，是一个不可逆的热力学过程。

断裂是一个具有记忆的历史过程。带裂纹固体的断裂不仅仅是由于现时载荷引起的瞬时现象，而是一个历史过程。它不仅与现时载荷有关，一般说还与整个加载历史有关。过去的载荷对现时的变形产生影响，从而这个意义上我们说这种材料具有“记忆”。离现时愈久的过去载荷比离现时较近的过去载荷对现时变形的影响要小，称为“记忆衰退”。这样可以把材料视为遵循“记忆衰退原理”的材料，而热流变性记忆材料在时间

与温度的一定条件下可以定义为一种黏弹性记忆材料，所以对黏弹性断裂的研究显得特别重要。

断裂是一个能量耗散过程。对于黏弹性体，由于黏性的存在在物体内部各点随着裂纹体的变形要消耗能量。裂纹扩展过程中在裂纹尖端扩展的裂纹表面上及尖端附近塑性区内均要不断地消耗能量。所以整个过程也是一个能量耗散过程。

断裂是一个不可逆的热力学过程。物体断裂后是不可恢复的，不可逆过程必然与熵的增加有关，只有从非平衡（不可逆）连续介质热力学的观点来研究断裂问题，才会使流变断裂学建立在严密的理论基础之上。

根据流变模型的不同选择，流变断裂学又可细分为黏弹性断裂力学、黏弹塑性断裂力学、热黏弹性断裂力学等等。

### 3.2 微分型本构关系

黏弹体与线弹性体的主要区别就在于物理关系，即本构方程。线弹性体的本构方程就是我们所熟知的 Hooke 定律，它是关于应力和应变间的代数方程。描述黏弹体的本构方程有两大类：一类是依赖模型理论得到的微分型本构关系，应力与应变间由微分方程相联系；另一类是依 Boltzmann 叠加原理得到的积分型本构关系。两者有一定的联系，模型理论较形象易懂，但积分型本构关系能描述更广泛一类黏弹性材料。

黏弹性体的应力-应变关系可由两种基本元件串联或并联组成。一种是弹簧，弹簧服从 Hooke 定律  $\tau=2\mu\gamma$ ，为了适应张量的需要， $\gamma$ 的定义与材料力学中略有不同。另一种是黏壶，黏壶服从 Newton 黏性定律， $\tau = 2\eta\dot{\gamma}$ ， $\eta$ 为黏性系数。下面列出各种常见流变模型的本构方程松弛模量与蠕变柔量。单位阶跃剪应变  $\gamma(t)=U(t)$ 作用下，剪应力随时间变化的规律称为松弛模量  $G(t)$ ,

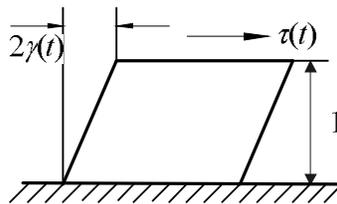


图 3-1

$$G(t) = \tau(t) \Big|_{\gamma(t)=U(t)} \quad (3-1)$$

单位阶跃剪应变  $\tau(t)=U(t)$ 作用下，剪应变随时间变化的规律称为蠕变柔量  $J(t)$ ,

$$J(t) = \gamma(t) \Big|_{\tau(t)=U(t)} \quad (3-2)$$

式中  $U(t)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数，

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

$dU(t)/dt = \delta(t)$  为 Dirac 单位脉冲函数  $\delta(t)$  ,

$$\delta(t) = \frac{dU(t)}{dt} = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

而且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (3-5)$$

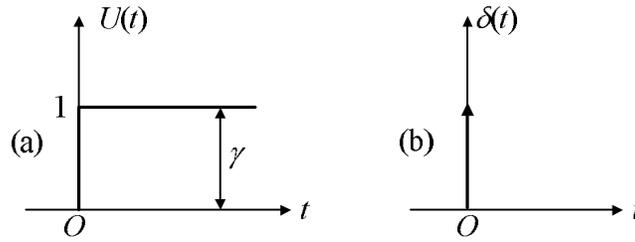


图 3-2 (a)单位阶跃函数；(b)单位脉冲函数

1) 弹簧，以[H]表示，也称 Hooke 体。

$$\text{本构方程：} \tau = 2\mu\gamma \quad (3-6)$$

$$\text{松弛模量：} G(t) = 2\mu U(t) \quad (3-7a)$$

$$\text{蠕变柔量：} J(t) = \frac{1}{2\mu} U(t) \quad (3-7b)$$

2) 黏壶，以[N]表示，也称 Newton 体。

$$\text{本构方程：} \tau = 2\eta\dot{\gamma} \quad (3-8)$$

$$\text{松弛模量：} G(t) = 2\eta\delta(t) \quad (3-9a)$$

$$\text{蠕变柔量：} J(t) = \frac{t}{2\eta} U(t) \quad (3-9b)$$

3) Maxwell 体[24]，以[M]=[H]-[N]表示，短横表示串联。

$$\text{本构方程：} a_1\dot{\tau} + \tau = b_1\dot{\gamma}, a_1 = \eta/\mu = \tau_{\text{rel}}, b_1 = 2\eta \quad (3-10)$$

$$\text{松弛模量：} G(t) = 2\mu \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{rel}}}\right) U(t) \quad (3-11a)$$

$$\text{蠕变柔量：} J(t) = \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{t}{2\eta}\right) U(t) \quad (3-11b)$$

式(3-11a)可从微分方程(3-10)中令  $\gamma(t) = U(t)$ ，然后解微分方程求出，式(3-11b)可由串联的弹簧及黏壶的蠕变柔量相加而得。 $\tau_{\text{rel}}$  具有时间量纲成为“松弛时间”。Maxwell 模型

反映了瞬时弹性和黏性流。

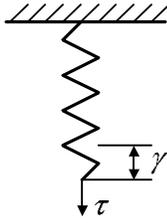


图 3-3 Hooke 体

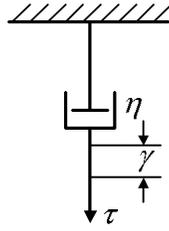


图 3-4 Newton 体

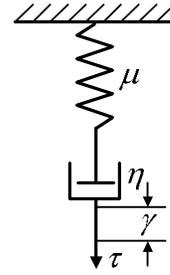


图 3-5 Maxwell 体

4) Kelvin 体<sup>[25]</sup>，以[K]=[H][N]表示，竖线表示并联。

$$\text{本构方程} : a_0 \tau = b_1 \dot{\gamma} + \gamma, a_0 = 1/\mu, b_1 = \eta/\mu = \tau_{\text{ret}} \quad (3-12)$$

$$\text{松弛模量} : G(t) = 2\mu U(t) + 2\eta \delta(t) \quad (3-13a)$$

$$\text{蠕变柔量} : J(t) = \frac{1}{2\mu} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{ret}}}\right) \right) U(t) \quad (3-13b)$$

式(3-13a)可由并联的弹簧及黏壶的松弛模量相加而得，式(3-13b)可从微分方程(3-12)中令  $\tau(t) = U(t)$ ，然后解微分方程求出。 $\tau_{\text{ret}}$  具有时间量纲成为“延迟时间”。Kelvin 体反映了延迟弹性。

总之，当弹簧串联时，蠕变柔量为各串联模型蠕变柔量之和；当模型并联时，松弛模量为各并联模型松弛模量之和。

5) 标准线性体，以[H]-[K]表示。

$$\text{本构方程} : (a_1 D + 1)\tau = (b_1 D + b_0)\gamma \quad (3-14)$$

$$a_1 = \frac{\eta_2}{\mu_1 + \mu_2} = \tau_\epsilon, b_0 = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, b_1 = \frac{\eta_2}{\mu_2} = \tau_{\text{ret}}$$

$$\text{松弛模量} : G(t) = 2\mu_1 \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\epsilon}\right) \right) \right) U(t) \quad (3-15a)$$

$$\text{蠕变柔量} : J(t) = \left( \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{ret}}}\right) \right) \right) U(t) \quad (3-15b)$$

式中  $D = d/dt$  为微分算子。标准线性体反映了瞬时弹性和延迟弹性。

6) Burgers 体，以[M]-[K]表示。

$$\text{本构方程} : (a_2 D^2 + a_1 D + a_0)\tau = (D^2 + b_1 D)\gamma \quad (3-16)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\mu_1}, a_1 = \frac{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_1 + \mu_1\eta_2}{2\eta_1\eta_2\mu_1}, a_0 = \frac{\mu_2}{2\eta_1\eta_2}, b_1 = \frac{\mu_2}{\eta_2} = \frac{1}{\tau_{\text{ret}}}$$

$$\text{松弛模量: } G(t) = 2\mu_1 \left( \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_3} \exp(-p_3 t) + \frac{p_1 - p_2}{p_3 - p_2} \exp(-p_2 t) \right) U(t) \quad (3-17a)$$

$$p_1 = \frac{\mu_2}{\eta_2} = \frac{1}{\tau_{\text{ret}}}, \quad p_{2,3} = \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\eta_2} + \frac{\mu_1}{\eta_1} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\eta_2} + \frac{\mu_1}{\eta_1} \right)^2 - \frac{4\mu_1\mu_2}{\eta_1\eta_2}}$$

$$\text{蠕变柔量: } J(t) = \left( \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{ret}}}\right) \right) + \frac{t}{2\eta_1} \right) U(t) \quad (3-17b)$$

Burgers 体反映了瞬时弹性、黏性流和延迟弹性。

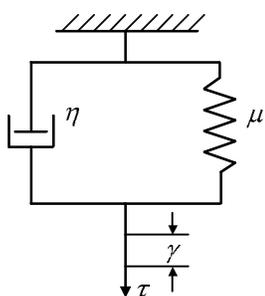


图 3-6 Kelvin 体

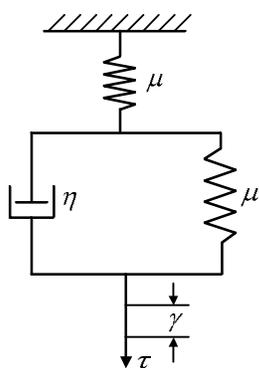


图 3-7 标准线性体

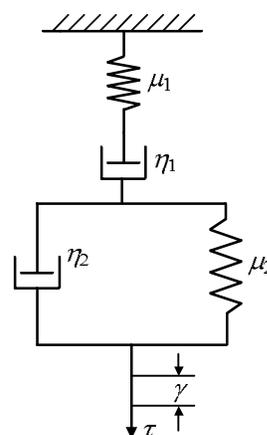


图 3-8 Burgers 体

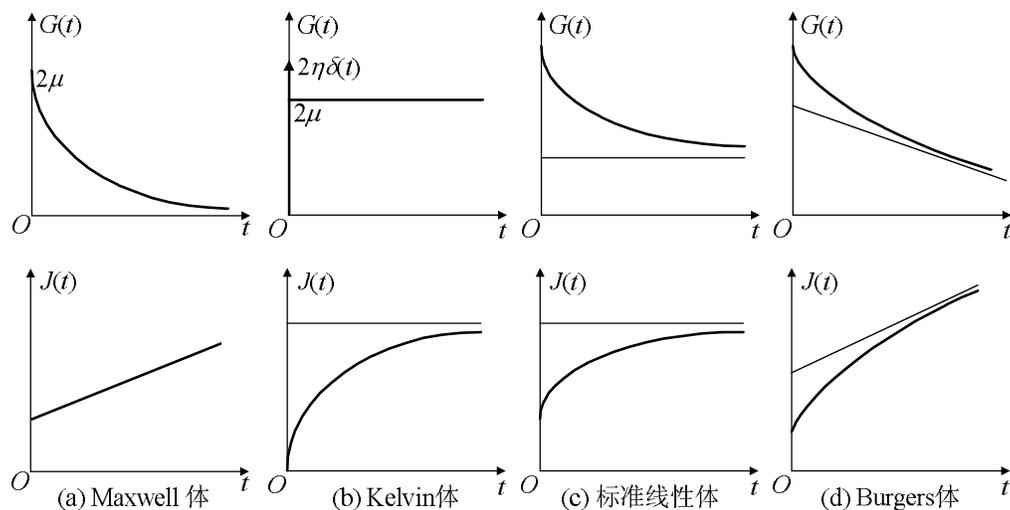


图 3-9 各种黏弹体的松弛模量与蠕变柔量

7) 广义 Kelvin 模型与延迟谱, 以[H]-[K]-[K]-.....-[K]-[N]表示。

对呈现延迟弹性的物体, 由延迟时间为  $\tau_{\text{ret}}^{(1)}, \tau_{\text{ret}}^{(2)}, \dots, \tau_{\text{ret}}^{(n)}$  的多个 Kelvin 模型串

联组合有时能更接近实验结果。若再串联弹簧及黏壶，就可得到广义 Kelvin 体，其蠕变柔量为

$$J(t) = \left( \frac{1}{2\mu_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\mu_i} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{ret}}^{(i)}}\right) \right) + \frac{t}{2\eta} \right) U(t) \quad (3-18)$$

以上延迟时间是离散分布的，如果延迟时间是连续分布的，将具有延迟时间  $\tau_{\text{ret}}$  和  $\tau_{\text{ret}} + d\tau_{\text{ret}}$  之间的结构对  $J(t)$  的贡献用

$$f(\tau_{\text{ret}}) \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{ret}}}\right) \right) d\tau_{\text{ret}}$$

表示，则式(3-18)可写为

$$J(t) = \left( J_0 + \int_0^{\infty} f(\tau_{\text{ret}}) \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{ret}}}\right) \right) d\tau_{\text{ret}} + \frac{t}{2\eta} \right) U(t) \quad (3-19)$$

由于  $\tau_{\text{ret}}$  从 0 到  $\infty$  之间变化，所以用  $\log \tau_{\text{ret}}$  来代替  $\tau_{\text{ret}}$  较为方便，此时定义

$$L(\log \tau_{\text{ret}}) = \tau_{\text{ret}} f(\tau_{\text{ret}})$$

可将式(3-19)写为

$$J(t) = \left( J_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} L(\log \tau_{\text{ret}}) \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{ret}}}\right) \right) d(\log \tau_{\text{ret}}) + \frac{t}{2\eta} \right) U(t) \quad (3-20)$$

式中  $L(\log \tau_{\text{ret}})$  称为“延迟谱”。如果给出延迟谱， $J_0$ ， $\eta$  等，物体的蠕变柔量就可完全确定。延迟谱可通过实验确定。

8) 广义 Maxwell 模型与松弛谱，以  $[H][M][M] \dots [M][N]$  表示。

对呈现松弛现象的物体有时用松弛时间为  $\tau_{\text{rel}}^{(1)}$ ， $\tau_{\text{rel}}^{(2)}$ ， $\dots$ ， $\tau_{\text{rel}}^{(n)}$  的多个 Maxwell 模型并联更能接近实验结果。若再并联弹簧及黏壶，就可得到广义 Maxwell 体，其松弛模量为

$$G(t) = \left( 2\mu_0 + \sum_{i=1}^n 2\mu_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{rel}}^{(i)}}\right) \right) U(t) + 2\eta\delta(t) \quad (3-21)$$

以上松弛时间是离散分布的，如果松弛时间是连续分布的，将具有松弛时间  $\tau_{\text{rel}}$  和  $\tau_{\text{rel}} + d\tau_{\text{rel}}$  之间的结构对  $G(t)$  的贡献用

$$g(\tau_{\text{rel}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{rel}}}\right) d\tau_{\text{rel}}$$

表示，则式(3-21)可写为

$$G(t) = \left( 2\mu_0 + \int_0^{\infty} g(\tau_{\text{rel}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{rel}}}\right) d\tau_{\text{rel}} \right) U(t) + 2\eta\delta(t) \quad (3-22)$$

由于  $\tau_{rel}$  从 0 到  $\infty$  之间变化，所以用  $\log \tau_{rel}$  来代替  $\tau_{rel}$  较为方便，此时定义

$$H(\log \tau_{rel}) = \tau_{rel} g(\tau_{rel})$$

可将式(3-22)写为

$$G(t) = \left( 2\mu_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} H(\log \tau_{rel}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{rel}}\right) d(\log \tau_{rel}) \right) U(t) + 2\eta \delta(t) \quad (3-23)$$

式中  $H(\log \tau_{rel})$  称为“松弛谱”。如果给出松弛谱， $\mu_0$ ， $\eta$  等，物体的松弛模量就可完全确定。

广义 Kelvin 模型和广义 Maxwell 模型的本构方程可以写成较一般的微分方程形式，

$$P_1(D)S_{ij} = Q_1(D)e_{ij}, P_2(D)\sigma_{kk} = Q_2(D)\varepsilon_{kk} \quad (3-24)$$

式中， $D$  是时间微分算子。如  $Df = \partial f(t)/\partial t$ ， $D^2 f = \partial^2 f/\partial t^2$  等， $P_i$ ， $Q_i (i=1,2)$  为算子多项式

$$P_1(D) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k D^k, Q_1(D) = \sum_{k=0}^{m_1} b_k D^k, P_2(D) = \sum_{k=0}^{n_2} c_k D^k, Q_2(D) = \sum_{k=0}^{m_2} d_k D^k \quad (3-25)$$

其中  $a_k$ ， $b_k$ ， $c_k$ ， $d_k$  为坐标  $x_1$ ， $x_2$ ， $x_3$  的实值函数。当然并不是任何(3-25)形式的多项式都可以表示真实的材料，它们受到基于热力学考虑的限制。

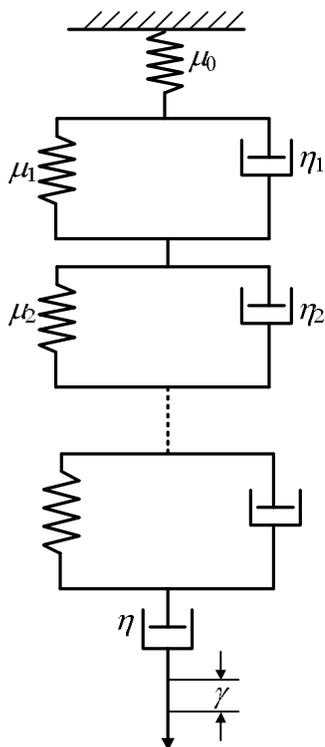


图 3-10 广义 Kelvin 体

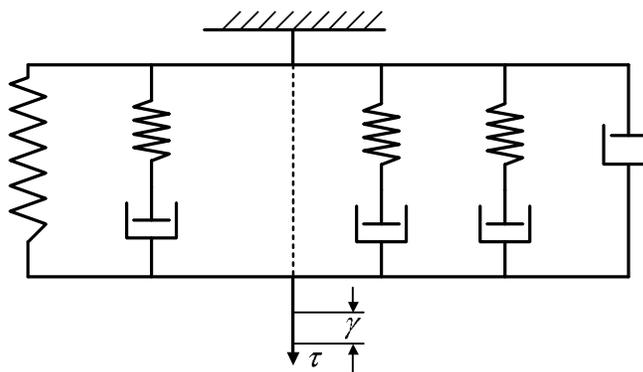


图 3-11 广义 Maxwell 体

### 3.3 积分型本构关系

Boltzmann<sup>[26]</sup>曾研究材料的蠕变和延迟弹性,他给出了一个线性理论。设应力 $\tau_1(t)$ 作用于黏弹体物体,其应变为 $\gamma_1(t)$ ,而当应力单独作用时,其应变为 $\gamma_2(t)$ ,Boltzmann(1876)假设,如果 $\tau_1(t)+\tau_2(t)$ 同时作用于物体,其总应变为 $\gamma_1(t)+\gamma_2(t)$ ,这就是著名的Boltzmann叠加原理。这意味着:较早时刻 $\xi$ 的应变对于现时 $t$ 的应力的影响与其他 $\xi \leq t$ 时刻所曾受过的应变无关。这种假设将限于微小应变的情况,也就是说此原理不一定总成立。从物理上看,只有当不同时刻的过去应变对现时应力的影响互不相干,其相应影响可以忽略不计时,结论才是正确的,即只有当非线性高阶项可以忽略不计时才是对的。下面我们假定这些条件是满足的。

首先,我们注意,在 $G(t)$ 和 $J(t)$ 中, $t$ 是从加上应变或应力算起的“时间推迟”。给予应变 $\gamma(t)=\gamma_0 U(t-t_0)$ 将产生应力 $\tau(t)=\gamma_0 G(t-t_0)$ ,即响应是时间平移不变量。只要时间推迟相同,应力就相同。

其次考虑两个阶跃应变历史

$$\gamma(t) = U(t-t_1)\Delta\gamma_1 + U(t-t_2)\Delta\gamma_2 = \sum_{i=1}^2 U(t-t_i)\Delta\gamma_i$$

依 Boltzmann 假设,将引起应力

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^2 G(t-t_i)\Delta\gamma_i$$

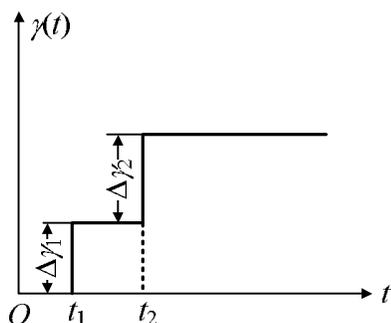


图 3-12 双阶跃应变历史

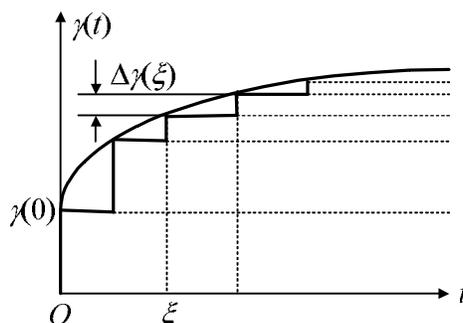


图 3-13 任意应变历史的阶跃应变逼近

对于任意的应变历史 $\gamma = \gamma(t)$ ,可利用一系列阶跃应变来逼近,在极限情况下,得

$$\int_{-\infty}^t U(t-\xi)d\gamma(\xi), \tau(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\xi)d\gamma(\xi) \quad (3-26)$$

上式中积分下限用 $-\infty$ 是为了不提及应变从何时开始,但除特别声明外,一般情况下理解为在某一初始时刻以前 $\gamma = 0$ ,积分上限也可换写成 $\infty$ 或 $t$ 到 $\infty$ 之间的任一值,因为当 $\xi > t$ 时积分值为零(当 $t < 0$ 时, $G(t) = 0$ )。

如果运动从  $t=0$  开始, 而当  $t < 0$  时,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\tau(t) = 0$ , 且在  $t=0$  处  $\gamma(t)$  有一跳跃, 则式(3-26)变为

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \int_{0^+}^t U(t-\xi) d\gamma(\xi), \quad \tau(t) = \gamma(0)G(t) + \int_{0^+}^t G(t-\xi) d\gamma(\xi) \quad (3-27)$$

不难证明下述关系

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \int_{-\infty}^t G(t-\xi) d\gamma(\xi) = \int_0^{\infty} G(s)\gamma'(t-s) ds = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t G(t-\xi)\gamma(\xi) d\xi \\ &= G_g \gamma(t) + \int_{-\infty}^t G'(t-\xi)\gamma(\xi) d\xi = G_g \gamma(t) + \int_0^{\infty} G'(s)\gamma(t-s) ds \quad (0 < s < \infty) \end{aligned} \quad (3-28)$$

若令

$$\phi(t) = -G'(t) \quad (3-29)$$

式(3-28)可写为

$$\tau(t) = G_g \gamma(t) - \int_{-\infty}^t \gamma(\xi)\phi(t-\xi) d\xi \quad (3-30)$$

式中  $G_g = G(0^+)$ , 由于  $G(t)$  为单调减函数,  $G'(t) < 0$ , 所以  $\phi(t) > 0$ , 式(3-30)表示过去时刻  $\xi$  所形成的应变  $\gamma(\xi)$  对现在时刻  $t$  的影响, 其遗留形式为

$$\gamma(\xi)\phi(t-\xi)$$

因此 Boltzmann 称  $\phi(t)$  为余效函数, 也称记忆函数,  $\phi(t)$  为  $t$  的单调减少函数, 这似乎是在时间上具有某些“记忆”。Volterra(1860-1940)称(3-28)型的为“遗传性定律”。为了强调线性假设, 我们称遵从这类定律得材料为“线性遗传性材料”。通常的其他名称如黏弹性、蠕变、内摩擦阻尼弹性后效、应力松弛等只是强调了某一方面或某一种模型。

式(3-26)~(3-30)是本构关系的应力松弛积分形式。如果给定应力历史来求应变的话, 上面的讨论方法完全适用。同理可得本构关系的蠕变积分形式

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\xi) d\tau(\xi) \quad (3-31)$$

如果运动从  $t=0$  开始, 当  $t < 0$ ,  $\gamma(t) = \tau(t) = 0$ , 且在  $t=0$  处  $\tau(t)$  有一跳跃, 则上式成为

$$\gamma(t) = \tau(0)J(t) + \int_{0^+}^t J(t-\xi) d\tau(\xi) \quad (3-32)$$

式(3-31)可写为

$$\gamma(t) = J_g \tau(t) + \int_{-\infty}^t \tau(\xi)J'(t-\xi) d\xi \quad (3-33)$$

式中  $J_g = J(0^+)$ , 令  $J'(t) = \phi(t)$ , 上式可写为

$$\gamma(t) = J_g \tau(t) + \int_{-\infty}^t \tau(\xi)\phi(t-\xi) d\xi \quad (3-34)$$

$\psi(t)$  称为松弛核,  $\phi(t)$  称为蠕变核, 均是时间的单调下降函数, 可理解为随着时间增加

记忆在逐渐衰退，或影响在逐渐减少。当  $t < 0$  时， $\phi(t)$  及  $\psi(t)$  均等于零，因为只有过去的应力或应变才会对现时应力或应变有影响，这常称为“不可倒逆作用公理” (axiom of nonretroactivity)。式(3-30)，(3-34)称为 Boltzmann 基础方程式。

在处理黏弹性问题中，我们将遇到很多卷积，因此有必要将这种写法加以简化，采用 Stieltjes 卷积符号。Sternberg 和 Gurtin<sup>[27]</sup> 基于 Stieltjes 卷积发展了黏弹性理论。

设  $f$  为连续于  $0 \leq t < \infty$ ，且  $t < 0$  时  $f(t) = 0$ ， $g$  (及  $h$ ) 为定义于  $-\infty < t < \infty$  的函数，且当  $t \rightarrow -\infty$ ， $g(t) \rightarrow 0$ 。利用 Riemann-Stieltjes 积分定义  $f * dg$  如下

$$f * dg = f(t)g(0) + \int_0^t f(t-\xi)dg(\xi) = \int_{-\infty}^t f(t-\xi)dg(\xi) \quad (3-35)$$

如果该积分存在的话，不难证明 Stieltjes 卷积的下述性质

- (1) 交换律： $f * dg = g * df$
- (2) 结合律： $f * d(g * dh) = (f * dg) * dh = f * dg * dh$  (3-36)
- (3) 分配律： $f * d(g + h) = f * dg + f * dh$
- (4) Titchmarsh 定理：若  $f * dg = 0$ ，则  $f \equiv 0$  或  $g \equiv 0$ 。

由此可以将式(3-26)，(3-31)写成如下形式

$$\text{松弛型: } \tau(t) = G * d\gamma \quad ; \quad \text{蠕变型: } \gamma(t) = J * d\tau \quad (3-37)$$

简单拉伸情况下，有

$$\text{松弛型: } \sigma(t) = E * d\varepsilon = \int_{-\infty}^t E(t-\xi)d\varepsilon(\xi) = E\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t \varepsilon(\xi)\psi_1(t-\xi)d\xi \quad (3-38a)$$

$$\text{蠕变型: } \varepsilon(t) = D * d\sigma = \int_{-\infty}^t D(t-\xi)d\sigma(\xi) = \frac{1}{E}\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \sigma(\xi)\phi_1(t-\xi)d\xi \quad (3-38b)$$

$E(t)$  和  $D(t)$  分别为拉伸应力松弛模量和蠕变柔量，并有关系式  $D'(t) = \phi_1(t)$ ， $-E'(t) = \psi_1(t)$ ， $E(0) = 1/D(0) = E$ ， $E$  为 Young 氏模量。

在小变形情况下黏弹体本构方程为

$$\text{松弛型: } \sigma_{ij}(x, t) = G_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(x, t-\tau)\partial\varepsilon_{ij}(x, \tau)/\partial\tau d\tau \quad (3-39a)$$

$$\text{蠕变型: } \varepsilon_{ij}(x, t) = J_{ijkl} * d\sigma_{kl} = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(x, t-\tau)\partial\sigma_{ij}(x, \tau)/\partial\tau d\tau \quad (3-39b)$$

其中  $G_{ijkl}$  和  $J_{ijkl}$  分别为材料张量松弛函数和张量蠕变函数，且均为四阶张量。若于  $t = 0$  施加载荷，仅当  $t \geq 0$  才会有响应，因此

$$\text{当 } -\infty < t < 0 \text{ 时, } G_{ijkl} = 0, J_{ijkl} = 0 \quad (3-40)$$

在各向同性材料情况下， $G_{ijkl}$  为迷向张量，

$$G_{ijkl} = \frac{G_2 - G_1}{3} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{G_1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3-41)$$

以(3-41)代入(3-39)可将各向同性粘弹性材料的本构方程写为  
松弛型

$$\text{畸变方程: } s_{ij}(\mathbf{x}, t) = G_1 * de_{ij} = G_1(0)e_{ij}(t) - \int_{-\infty}^t e_{ij}(\xi)\psi_s(t-\xi)d\xi \quad (3-42a)$$

$$\text{体变方程: } \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) = G_2 * d\varepsilon_{kk} = G_2(0)\varepsilon_{kk}(t) - \int_{-\infty}^t \varepsilon_{kk}(\xi)\psi_d(t-\xi)d\xi \quad (3-42b)$$

蠕变型

$$\text{畸变方程: } e_{ij}(\mathbf{x}, t) = J_1 * dS_{ij} = J_1(0)s_{ij}(t) - \int_{-\infty}^t S_{ij}(\xi)\phi_s(t-\xi)d\xi \quad (3-43a)$$

$$\text{体变方程: } \varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t) = J_2 * d\sigma_{kk} = J_2(0)\sigma_{kk}(t) - \int_{-\infty}^t \sigma_{kk}(\xi)\phi_d(t-\xi)d\xi \quad (3-43b)$$

式中  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  分别为位移矢量、应力张量、应变张量分量,  $e_{ij}$ ,  $s_{ij}$  为应变张量及应力张量的偏斜分量

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (3-44)$$

它们均是物体点位置  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  及时间  $t$  的函数。

将上述黏弹体的本构方程与弹性体本构方程进行比较是有意义的。各向异性弹性体本构方程为

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{或} \quad \varepsilon_{ij} = J_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (3-45)$$

式中  $G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{jilk} = G_{klij}$ ,  $J_{ijkl} = J_{jikl} = J_{jilk} = J_{klij}$ 。因此极端各向异性情况下材料常数个数从  $3^4 = 81$  个化为 21 个独立常数, 且  $J_{ijkl}$  由  $G_{ijkl}$  完全确定。各向同性材料情况下, 广义 Hooke 定律化为

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2\mu} \quad \text{或} \quad S_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (3-46a)$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3k} \quad \text{或} \quad \sigma_{kk} = 3k\varepsilon_{kk} \quad (3-46b)$$

$\mu$  为剪切模量,  $k$  为体变模量

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

比较式(3-39), (3-42), (3-43)及(3-45), (3-46)可见, 两者非常相似, 黏弹体情况下以“卷积”代替了普通“乘积”。正因为如此才有下节谈到的“对应性原理”。

依松弛模量及蠕变柔量的定义不难直接得到下述关系式

$$G_1(t) = G_1(0) - \int_0^t \psi_s(\xi)d\xi = 2\mu - \int_0^t \psi_s(\xi)d\xi$$

$$\begin{aligned}
 G_2(t) &= G_2(0) - \int_0^t \psi_d(\xi) d\xi = 3K - \int_0^t \psi_d(\xi) d\xi \\
 E(t) &= E(0) - \int_0^t \psi_1(\xi) d\xi = E - \int_0^t \psi_1(\xi) d\xi \\
 J_1(t) &= J_1(0) + \int_0^t \phi_s(\xi) d\xi = \frac{1}{2\mu} + \int_0^t \phi_s(\xi) d\xi \\
 J_2(t) &= J_2(0) + \int_0^t \phi_d(\xi) d\xi = \frac{1}{3K} + \int_0^t \phi_d(\xi) d\xi \\
 D(t) &= D(0) + \int_0^t \phi_1(\xi) d\xi = D + \int_0^t \phi_1(\xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{3-47}$$

### 3.4 线黏弹性问题解法——对应性原理

积分变换方法是解线黏弹性问题有效方法之一。

定义：设函数  $f(t)$  当  $t \geq 0$  时有定义，且积分

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

( $p$  是一个复参量) 在  $p$  的某一个域内收敛，则由此所定义的函数

$$f^*(p) = L[f(t): t \rightarrow p] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \tag{3-48}$$

称为函数  $f(t)$  的 Laplace 变换，已知  $f^*(p)$  可依下式求其 Laplace 逆变换

$$f(t) = L^{-1}[f^*(p): p \rightarrow t] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^*(p)e^{pt} dp \tag{3-49}$$

$\sigma$  是大于收敛横标的任意常数。

Laplace 变换的性质

(1) 线性性质

$$L[af_1(t) + bf_2(t)] = af_1^*(p) + bf_2^*(p), \quad L^{-1}[af_1^*(p) + bf_2^*(p)] = af_1(t) + bf_2(t) \tag{3-50}$$

(2) 微分性质

$$L[Df(t)] = pf^*(p) - f(0)$$

$$L[D^2 f(t)] = p^2 f^*(p) - pf(0) - f'(0)$$

⋮

$$L[D^n f(t)] = p^n f^*(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{3-51}$$

(3) 积分性质

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{p} f^*(p)$$

∴

$$L\left[\int_0^t dt \int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{p^n} f^*(p) \quad (3-52)$$

(4) 位移性质

$$L[e^{at} f(t)] = f^*(p-a) \quad (\text{Re}(p-a) > p_0) \quad (3-53)$$

(5) 延迟性质

$$L[f(t-t_1)U(t-t_1)] = e^{-pt_1} f^*(p) \quad (3-54)$$

(6) 初值定理

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pf^*(p) \quad (3-55a)$$

(7) 终值定理

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pf^*(p) \quad (3-55b)$$

(8) 卷积定理

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = f_1^*(p)f_2^*(p), L^{-1}[f_1^*(p)f_2^*(p)] = f_1(t) * f_2(t) \quad (3-56)$$

$$L[f * dg] = L[g * df] = pf^*(p)g^*(p), L^{-1}[pf^*(p)g^*(p)] = f * dg = g * df \quad (3-57)$$

“卷积”的 Laplace 变换化为“乘积”，这就启发我们利用黏弹体基本方程作 Laplace 变换的办法来找黏弹体及相应的线弹性的解之间的对应关系。

均匀、各向同性、准静态线黏弹性理论的基本方程如下

(1) 平衡方程

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + f_i(\mathbf{x}, t) = 0, \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t) \quad (3-58)$$

(2) 几何方程

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3-59)$$

(3) 边界条件

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j = p_i(\mathbf{x}, t), \text{在 } \partial R_\sigma \text{ 下}; u_i(\mathbf{x}, t) = u_i^0(\mathbf{x}, t), \text{在 } \partial R_u \text{ 上} \quad (3-60)$$

(4) 本构方程

微分型

$$\text{松弛型畸变方程: } P_1(D)s_{ij}(\mathbf{x}, t) = Q_1(D)e_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (3-61a)_1$$

$$\text{松弛型体变方程: } P_2(D)\sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) = Q_2(D)\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t) \quad (3-61b)_1$$

$$\text{蠕变型畸变方程: } Q_1(D)e_{ij}(\mathbf{x}, t) = P_1(D)s_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (3-61a)_2$$

$$\text{蠕变型体变方程: } Q_2(D)\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t) = P_2(D)\sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) \quad (3-61b)_2$$

积分型

$$\text{松弛型畸变方程: } s_{ij}(\mathbf{x}, t) = G_1 * de_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (3-61a)_3$$

$$\text{松弛型体变方程: } \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) = G_2 * d\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t) \quad (3-61b)_3$$

$$\text{蠕变型畸变方程: } e_{ij}(\mathbf{x}, t) = J_1 * ds_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (3-61a)_4$$

$$\text{蠕变型体变方程: } \varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t) = J_2 * d\sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) \quad (3-61b)_4$$

式中  $\partial R_\sigma$ ,  $\partial R_u$  分别为物体所占域  $R$  的给定应力  $p_i(\mathbf{x}, t)$  的边界及给定位移  $u_i(\mathbf{x}, t)$  的边界,  $J_1$  和  $J_2$  (或  $G_1$  和  $G_2$ ) 均只是时间的单调函数, 它们应用于剪切和体变蠕变函数(或松弛函数)。

### (5) 初始条件

如果物体原先未受干扰, 则初始条件为

$$u_i = 0, e_{ij} = 0, \sigma_{ij} = 0, \text{对 } -\infty < t < 0 \quad (3-62)$$

如果采用微分型本构关系(3-61)<sub>1</sub>, 且在  $t=0$  有一个跳跃的条件, 则初始条件采取给定

$$e_{ij}(0^+), \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}(0^+), \dots, \frac{\partial^n e_{ij}}{\partial t^n}(0^+) \text{ 和 } s_{ij}(0^+), \frac{\partial s_{ij}}{\partial t}(0^+), \dots, \frac{\partial^n s_{ij}}{\partial t^n}(0^+) \text{ 的形式。这些初$$

值必须由以下条件相联才能使微分型本构方程(3-61)<sub>1</sub> 与积分型本构方程(3-61)<sub>2</sub>, (3-61)<sub>3</sub> 等价, 也才能使函数有跳跃时, 式(3-61)<sub>1</sub> 中的微分运算成立[28]:

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial^{k-r} s_{ij}}{\partial t^{k-r}}(0^+) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial^{k-r} e_{ij}}{\partial t^{k-r}}(0^+), \quad r=1, 2, \dots, n \quad (3-63)$$

其中  $n$  是  $P_i(D)$  和  $Q_i(D)$  次数的大者, 体变初始值也有类似的关系。

黏弹性力学问题通常是对于给定的  $f_i$ ,  $p_i$ ,  $u_i^0$  及初始条件, 求  $u_i$ ,  $e_{ij}$  和  $\sigma_{ij}$ , 除了本构方程以外其他均与弹性力学有相同的形式。而本构方程的区别可以从两种观点来看它们的相似性:(1) 可视为其区别在于以“卷积”代替了“乘积”;(2) 可视为其区别在于以“积分算子”代替了“弹性常数”。由前者得到“黏弹对应性原理”, 由后者得到“Volterra 原理”。多数情况下两种方法是等价的, 导致相同的结果, 但后者适用范围更广一些。这里只介绍对应性原理。

如果有关函数当  $t < 0$  时为零, 则可用单边 Laplace 变换, 否则要用双边 Laplace 变换<sup>[11]</sup>。对(3-58)~(3-61)进行 Laplace 变换, 得

### (1) 平衡方程

$$\sigma_{ij,j}^*(\mathbf{x}, p) + f_i^*(\mathbf{x}, p) = 0, \quad \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \sigma_{ji}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-64)$$

### (2) 几何方程

$$\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^*(\mathbf{x}, p) + u_{j,i}^*(\mathbf{x}, p)) \quad (3-65)$$

### (3) 边界条件

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p)n_j = p_i^*(\mathbf{x}, p) \text{ 在 } \partial R_\sigma \text{ 下}; u_i^*(\mathbf{x}, p) = u_i^0(\mathbf{x}, p) \text{ 在 } \partial R_u \text{ 上} \quad (3-66)$$

### (4) 本构方程

微分型

$$\text{松弛型畸变方程} : P_1(p)s_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = Q_1(p)e_{ij}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-67a)_1$$

$$\text{松弛型体变方程} : P_2(p)\sigma_{kk}^*(\mathbf{x}, p) = Q_2(p)\varepsilon_{kk}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-67b)_1$$

$$\text{蠕变型畸变方程} : Q_1(p)e_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = P_1(p)s_{ij}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-67a)_2$$

$$\text{蠕变型体变方程} : Q_2(p)\varepsilon_{kk}^*(\mathbf{x}, p) = P_2(p)\sigma_{kk}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-67b)_2$$

积分型

$$\text{松弛型畸变方程} : s_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = pG_1^*(p)e_{ij}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-67a)_3$$

$$\text{松弛型体变方程} : \sigma_{kk}^*(\mathbf{x}, p) = pG_2^*(p)\varepsilon_{kk}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-67b)_3$$

$$\text{蠕变型畸变方程} : e_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = pJ_1^*(p)s_{ij}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-67a)_4$$

$$\text{蠕变型体变方程} : \varepsilon_{kk}^*(\mathbf{x}, p) = pJ_2^*(p)\sigma_{kk}^*(\mathbf{x}, p) \quad (3-67b)_4$$

推导(3-67)<sub>1</sub>, (3-67)<sub>2</sub> 时已经利用了初始条件(3-62)或(3-63), 材料性能  $Q_i(p)$ ,  $P_i(p)$ ,  $G_i^*(p)$ ,  $J_i^*(p)$  ( $i=1,2$ ) 均为已知。问题归结为对于  $R$  中给定的体力  $f_i^*$ , 和边界上给定的  $p_i^*$ ,  $u_i^{0*}$  来求解  $u_i^*$ ,  $\sigma_{ij}^*$ ,  $e_{ij}^*$ 。这与线弹性力学基本方程的求解完全一样, 只不过采用变换后的体力  $f_i^*$  和面力  $p_i^*$  或给定位移  $u_i^{0*}$  以及采用新的弹性常数  $2\tilde{\mu}^*$ ,  $3\tilde{K}^*$

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mu}^* &= \frac{Q_1(p)}{P_1(p)} = pG_1^*(p) = \frac{1}{pJ_1^*(p)} = \frac{2\mu}{1+2\mu\phi_s^*} \\ 3\tilde{K}^* &= \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} = pG_2^*(p) = \frac{1}{pJ_2^*(p)} = \frac{3K}{1+3K\phi_d^*} \end{aligned} \quad (3-68)$$

求解此弹性力学问题。如有解答, 对此解答进行 Laplace 反演变换, 就得到原黏弹性问题的解。这个原理称为“黏弹对应性原理”。利用它可以将大多数线弹性力学的成果转到黏弹性体相应的问题上来。

很多作者对该原理的发展和应用做出了贡献。Alfrey (1944)<sup>[29]</sup>指出, 在给向同性黏弹体为不可压缩的情况下, 在给定应力时黏弹体的应力与弹性体的相当(相当于  $P_2(p)/Q_2(p)=0$  的特殊情况)。钱学森(1950)<sup>[30]</sup>将此结论推广到可压缩、各向同性黏弹体的情况并计及体积力, 但他对算子  $P_1(p)$ ,  $Q_1(p)$ ,  $P_2(p)$ ,  $Q_2(p)$  假设了限制, 使等价 Poisson 比化为常数, 而不是速率相依的算子。Read(1950)<sup>[31]</sup>曾用 Fourier 变换讨论一般的动态问题。Lee(1955)<sup>[32]</sup>得到上述微分型本构方程形式下的对应性原理。Graham(1968)<sup>[33]</sup>将黏弹对应性原理推广到包括时间相依区域的混合边值问题(如裂纹扩展问题等)得到“广义对应性原理”。张淳源(1980)<sup>[11]</sup>将其用于解决线黏弹体的断裂问题, 并用双边 Laplace 变换将对应性原理推广到初始状态非自然状态的情形。上面引用的文献大多数可从译文集<sup>[34]</sup>中找到。

对于各向同性材料, 只有两个独立常数, 可以任选两个, 从而弹性常数代换等价于

(1) 一般情况

$$2\tilde{\mu}^* = \frac{1}{pJ_1^*(p)} = \frac{2\mu}{1+2\mu\phi_s^*} = pG_1^*(p) = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}^* &= \frac{1}{pD^*(p)} = \frac{E}{1+E\phi_1^*} = pE^*(p) = \frac{3}{p[2J_1^*(p)+J_2^*(p)]} \\ &= \frac{3pG_1^*(p)G_2^*(p)}{2G_2^*(p)+G_1^*(p)} = \frac{3Q_1(p)Q_2(p)}{Q_1(p)P_2(p)+2P_1(p)Q_2(p)}\end{aligned}\quad (3-69)$$

(2) 设体变模量  $K$  保持恒定, 此时  $\phi_d = 0$

$$2\tilde{\mu}^* \text{ 同前}, 3K^* = 3K \quad (3-70)$$

(3) 设 Poisson 比  $\nu$  保持恒定, 此时  $\phi_d = (1-2\nu)\phi_1$ ,  $\phi_s = (1+\nu)\phi_1$

$$\tilde{\nu}^* = \nu, \tilde{E}^* \text{ 同前} \quad (3-71)$$

(4) 不可压缩情况,  $\varepsilon_{kk} = 0$ , 相当于  $\nu = 0.5$  且不随时间而变

$$\tilde{\nu}^* = 0.5, \tilde{E}^* \text{ 同前} \quad (3-72a)$$

或

$$\tilde{E}^* \text{ 同前}, 2\tilde{\mu}^* = \frac{2}{3pD^*(p)} = \frac{2E}{3(1+E\phi_1^*)} \quad (3-72b)$$

很多黏弹性材料, 如聚合物及聚合物基复合材料, 常可采用  $K$  保持恒定的假设(材料弹性地压缩的假设)。有的资料指出像混凝土等可采用  $\nu$  保持恒定的假设。采用不可压缩假设应基于实验资料慎重从事, 否则易导致较大错误。采用上述假设使计算大为简化, 所需实验资料也减少。

值得注意的是(3-68)~(3-72)中带~的常数  $\tilde{\mu}^*$ ,  $\tilde{E}^*$ ,  $\tilde{K}^*$ ,  $\tilde{\nu}^*$  等表示了保持黏弹性问题与弹性问题的对应关系在象空间的常数应取的值。例如(3-71)中的  $\tilde{\nu}^* = \nu$  表示象空间的  $\tilde{\nu}^*$  应取  $\nu$ , 而不能理解为  $\nu^* = L[\nu(t)] = \nu$ 。字母上面的~正是为了区别象空间应取的弹性常数  $\tilde{\nu}^*$  与随时间变化的弹性常数的 Laplace 变换  $\nu^*$ 。

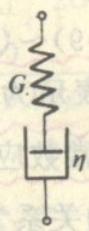
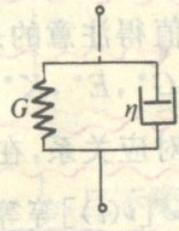
表(3-1)列出了当  $K$  保持常数时各种线黏弹性体的本构方程及经 Laplace 变换后应采用的弹性常数。上述原理适用于无时间相依边界区域的问题, 否则(如有亚临界扩展的裂缝问题, 曲面冲模问题等)要用到“广义对应性原理”。

### 3.5 线黏弹体裂纹前缘的应力位移场

在[11~12,15]中曾把线弹性裂纹前缘的应力位移场推广到线黏弹体的情况下。下面介绍有关的首项近似的结果。线弹性裂纹前缘的应力位移场如下

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^* &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( K_{\text{I}}^* \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} - K_{\text{II}}^* \frac{3}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right) + \dots \\ \tau_{r\theta}^* &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( K_{\text{I}}^* \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + K_{\text{II}}^* \frac{1}{2} (3 \cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2} \right) + \dots \\ \tau_{\theta z}^* &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{\text{III}}^* \cos \frac{\theta}{2} + \dots\end{aligned}\quad (3-73)$$

表 3-1(a) 各种黏弹性体的本构方程及变换后应采用的弹性常数

当 $K = \text{常数}$		Maxwell 体	Kelvin 体
流变模型			
结构公式		[H]—[N]	[H]   [N]
微分本构	$P_1(D)s_{ij} = Q_1(D)e_{ij}$ $P_2(D)\sigma_{kk} = Q_2(D)\epsilon_{kk}$	$(a_1 D + a_0)s_{ij} = b_1 D e_{ij}$ $\sigma_{kk} = c \epsilon_{kk}$ $a_1 = \frac{\eta}{G} = \tau, a_0 = 1$ $b_1 = 2\eta$ $c = 3K$	$a_0 s_{ij} = (b_1 D + b_0)e_{ij}$ $\sigma_{kk} = c \epsilon_{kk}$ $a_0 = \frac{1}{2G}, b_1 = \frac{\eta}{G} = \tau$ $b_0 = 1, c = 3K$
	积分型	松弛型 $s_{ij}(t) = G_1 * de_{ij}$ $\sigma_{kk}(t) = G_2 * d\epsilon_{kk}$ 蠕变型 $e_{ij}(t) = J_1 * ds_{ij}$ $\epsilon_{kk}(t) = J_2 * d\sigma_{kk}$	$s_{ij}(t) = 2G \exp(-\frac{t}{\tau}) \cdot \theta(t) * de_{ij}$ $\sigma_{kk}(t) = 3K \theta(t) * d\epsilon_{kk}$ $e_{ij}(t) = (\frac{1}{2G} + \frac{t}{2\eta}) \cdot \theta(t) * ds_{ij}$ $\epsilon_{kk}(t) = \frac{1}{3K} \theta(t) * d\sigma_{kk}$
变换后的常数	$2\tilde{G}^* = \frac{1}{pJ_1^*(p)}$ $\tilde{G}^* = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)}$ $3\tilde{K}^* = 3K$	$2\tilde{G}^* = \frac{b_1 p}{a_1 p + 1} = \frac{2\eta G p}{\eta p + G}$ $3\tilde{K}^* = c = 3K$	$2\tilde{G}^* = \frac{b_1 p + 1}{a_0}$ $\tilde{G}^* = 2(\eta p + G)$ $3\tilde{K}^* = c = 3K$

当  $g = 0$  时，在裂纹延长线上有

$$\sigma_g^* = \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi r}}, \tau_{rg}^* = \frac{K_{II}^*}{\sqrt{2\pi r}}, \tau_{gc}^* = \frac{K_{III}^*}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3-74)$$

由  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$ ,  $K_{III}^*$  引起的裂纹不连续位移量为

表 3-1(b) 各种黏弹性体的本构方程及变换后应采用的弹性常数

当 $K = \text{常数}$		标准线性体	Burgers 体
流变模型			
结构公式		[H]—[K]	[M]—[K]
本构方程	微分型	$(a_1 D + a_0) s_{ij} = (b_1 D + b_0) e_{ij}$ $\sigma_{kk} = c \epsilon_{kk}$ $a_1 = \frac{\eta_2}{G_1 + G_2} = \tau_\epsilon$ $b_0 = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2}, a_0 = 1$ $\frac{b_1}{b_0} = \frac{\eta_2}{G_2} = \tau, c = 3K$	$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) s_{ij} = (b_2 D^2 + b_1 D) e_{ij}$ $\sigma_{kk} = c \epsilon_{kk}$ $a_2 = \frac{1}{2G_1}, a_1 = \frac{G_1 \eta_1 + G_2 \eta_1 + G_1 \eta_2}{2\eta_1 \eta_2 G_1}$ $b_2 = 1$ $a_0 = \frac{G_2}{2\eta_1 \eta_2}, b_1 = \frac{G_2}{\eta_2} = \frac{1}{\tau}, c = 3K$
	积分型	$s_{ij}(t) = 2G_1 \left[ 1 - \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\epsilon}\right) \right) \right] \cdot \theta(t) * de_{ij}$ $\sigma_{kk}(t) = 3K \theta(t) * d\epsilon_{kk}$ $e_{ij}(t) = \left[ \frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \right] \cdot \theta(t) * ds_{ij}$ $\epsilon_{kk}(t) = \frac{1}{3K} \theta(t) * d\sigma_{kk}$	$s_{ij}(t) = 2G_1 \left( \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_3} \exp(-p_3 t) + \frac{p_1 - p_2}{p_3 - p_2} \exp(-p_2 t) \right) \theta(t) * de_{ij}$ $\sigma_{kk}(t) = 3K \theta(t) * d\epsilon_{kk}$ $p_1 = \frac{G_2}{\eta_2} = \frac{1}{\tau}, p_2 = \left( \frac{G_1 + G_2}{\eta_2} + \frac{G_1}{\eta_1} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{G_1 + G_2}{\eta_2} + \frac{G_1}{\eta_1} \right)^2 - \frac{4G_1 G_2}{\eta_1 \eta_2}}$ $e_{ij}(t) = \left[ \frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) + \frac{t}{2\eta_1} \right] \theta(t) * ds_{ij}$ $\epsilon_{kk}(t) = \frac{1}{3K} \theta(t) * d\sigma_{kk}$
变换后的弹性常数		$2\tilde{G}^* = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + 1} = \frac{2G_1(\eta_2 p + G_2)}{\eta_2 p + G_1 + G_2}$ $3\tilde{K}^* = c = 3K$	$2\tilde{G}^* = \frac{p^2 + b_1 p}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{2G_1 \eta_1 \eta_2 p^2 + 2G_1 G_2 \eta_1 p}{\eta_1 \eta_2 p^2 + (\eta_1 G_2 + \eta_1 G_1 + G_1 \eta_2) p + G_1 G_2}$ $3\tilde{K}^* = c = 3K$

$$\Delta v^* = \frac{2K_I^* \sqrt{r}}{\tilde{E}^*} \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \Delta u^* = \frac{2K_{II}^* \sqrt{r}}{\tilde{E}^*} \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \Delta w^* = \frac{2K_{III}^* \sqrt{r}}{2\tilde{\mu}^*} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \quad (3-75)$$

式中  $\sigma_g^*$ ,  $\tau_{r,g}^*$ ,  $\tau_{g,z}^*$  为应力分量,  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  为位移分量,  $\tilde{E}^*$ ,  $\tilde{\mu}^*$ ,  $\tilde{\nu}^*$  分别为拉压弹性模量、剪切弹性模量和 Poisson 比。为了进行 Laplace 反演方便, 各函数均加上\*号。

$$\frac{1}{\tilde{E}^*} = \begin{cases} \frac{1-\tilde{\nu}^{*2}}{\tilde{E}^*} = \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3\tilde{k}^* + \tilde{\mu}^*} + \frac{1}{4\tilde{\mu}^*} \right) = \frac{1}{2\tilde{\mu}^*} \left( 2 - \frac{\tilde{E}^*}{2\tilde{\mu}^*} \right), & \text{平面应变} \\ \frac{1}{\tilde{E}^*} = \frac{3\tilde{k}^* + \tilde{\mu}^*}{9\tilde{k}^* \tilde{\mu}^*}, & \text{平面应力} \end{cases} \quad (3-76)$$

下面分别给定载荷及给定位移两种情况来讨论黏弹体的裂纹尖端应力位移场。

### (1) 给定载荷

设  $K_i(t)$  可表示成如下形式

$$K_i(t) = K_i f_{i\sigma}(t), \quad (i = \text{I, II, III})$$

依黏弹对应性原理, 若将式(3-73)~(3-75)中的  $K_i^*$  取由给定载荷引起的  $K_i(t)$  的象函数, 并将各式中的弹性常数用(3-69)代入然后反演这些式子就得到黏弹体裂纹前缘的应力位移场如下

$$\begin{aligned} \sigma_g(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( K_{\text{I}} f_{\text{I}\sigma}(t) \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \cos \frac{\vartheta}{2} - K_{\text{II}} f_{\text{II}\sigma}(t) \frac{3}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} \right) + \dots \\ \tau_{r,g}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( K_{\text{I}} f_{\text{I}\sigma}(t) \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} + K_{\text{II}} f_{\text{II}\sigma}(t) \frac{1}{2} (3 \cos \vartheta - 1) \cos \frac{\vartheta}{2} \right) + \dots \\ \tau_{g,z}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{\text{III}} f_{\text{III}\sigma}(t) \cos \frac{\vartheta}{2} + \dots \end{aligned} \quad (3-78)$$

当  $\vartheta = 0$ , 在裂纹延长线上, 有

$$\sigma_g(t) = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} f_{\text{I}\sigma}(t), \quad \tau_{r,g}(t) = \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}} f_{\text{II}\sigma}(t), \quad \tau_{g,z}(t) = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} f_{\text{III}\sigma}(t) \quad (3-79)$$

由  $K_{\text{I}}(t)$ ,  $K_{\text{II}}(t)$ ,  $K_{\text{III}}(t)$  引起的裂纹不连续位移量为

$$\Delta v(t) = L^{-1} \left( \frac{2K_{\text{I}}\sqrt{r}}{E'} \sqrt{\frac{8}{\pi}} f_{\text{I}\sigma}^* \frac{E'}{\tilde{E}^*} \right) = \frac{2K_{\text{I}}\sqrt{r}}{E'} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left( f_{\text{I}\sigma}(t) * L^{-1} \left( \frac{E'}{\tilde{E}^*} \right) \right) = \Delta v(0) f_{\text{I}u}(t)$$

同理

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= \frac{2K_{\text{II}}\sqrt{r}}{E'} \sqrt{\frac{8}{\pi}} f_{\text{II}\sigma}(t) = \Delta u(0) f_{\text{II}u}(t) \\ \Delta w(t) &= \frac{2K_{\text{III}}\sqrt{r}}{2\mu} \sqrt{\frac{8}{\pi}} f_{\text{III}\sigma}(t) = \Delta w(0) f_{\text{III}u}(t) \end{aligned} \quad (3-80)$$

式中

$$f_{iu}(t) = f_{i\sigma}(t) * L^{-1}\left(\frac{E'}{\tilde{E}^*}\right), \quad (i = \text{I, II}); f_{\text{III}u}(t) = f_{\text{III}\sigma}(t) * L^{-1}\left(\frac{\mu}{\tilde{\mu}^*}\right) \quad (3-81a)$$

其中\*表示卷积

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$L^{-1}[F(p)]$  表示对  $F(p)$  进行 Laplace 反演变换

$$L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

如果已知材料的蠕变柔量，可以证明式(3-81)<sub>1</sub>可改写为

$$\begin{aligned} f_{iu}(t) &= f_{i\sigma}(t) * d \frac{C'(t)}{C'(0)} = f_{i\sigma}(t) + \frac{1}{C'(0)} \int_0^t \frac{\partial C'(t-\tau)}{\partial(t-\tau)} f_{i\sigma}(\tau) d\tau, \quad (i = \text{I, II}) \\ f_{\text{III}u}(t) &= f_{\text{III}\sigma}(t) * d \frac{J_1(t)}{J_1(0)} = f_{\text{III}\sigma}(t) + \frac{1}{J_1(0)} \int_0^t \frac{\partial J_1(t-\tau)}{\partial(t-\tau)} f_{\text{III}\sigma}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-81b)$$

式中  $C'(t)$  为平面应力或平面应变蠕变柔量

$$C'(t) = L^{-1}[C^*(p)] = \begin{cases} D(t), & \text{平面应力} \\ C(t) = L^{-1}\left(J_1^*(p) \left(2 - \frac{J_1^*(p)}{D^*(p)}\right)\right), & \text{平面应变} \end{cases} \quad (3-82a)$$

当  $\nu$  保持恒定时，有

$$C(t) = (1-\nu^2)D(t) \quad (3-82b)$$

$$C'(0) = \frac{1}{E'} = \begin{cases} D(0) = \frac{1}{E}, & \text{平面应力} \\ C(0) = \frac{1-\nu^2}{E}, & \text{平面应变} \end{cases} \quad (3-83)$$

(2) 给定位移

例如在裂纹尖端附近裂纹面上  $r = r_0$  处的位移跳跃被指定

$$\Delta v(t) = \Delta v f_{iu}(t), \quad \Delta u(t) = \Delta u f_{\text{III}u}(t), \quad \Delta w(t) = \Delta w f_{\text{III}u}(t) \quad (3-84)$$

在式(3-75)中采用(3-84)的象函数，对(3-84)作 Laplace 变换，代入(3-75)再解出  $K_i^*$ ， $i = \text{I, II, III}$ ，得

$$K_{\text{I}}^* = \frac{E' \Delta v}{2\sqrt{r_0}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\tilde{E}^*}{E'} f_{iu}^*, \quad K_{\text{II}}^* = \frac{E' \Delta u}{2\sqrt{r_0}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\tilde{E}^*}{E'} f_{\text{III}u}^*, \quad K_{\text{III}}^* = \frac{\mu \Delta w}{2\sqrt{r_0}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\mu^*}{\mu} f_{\text{III}u}^* \quad (3-85)$$

以(3-85)代入(3-73)然后进行 Laplace 反演得指定位移时的应力场如下

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( K_{\text{I}}(0) f_{\text{I}\sigma}(t) \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \cos \frac{\vartheta}{2} - K_{\text{II}}(0) f_{\text{II}\sigma}(t) \frac{3}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} \right) + \dots \\ \tau_{r\vartheta}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( K_{\text{I}}(0) f_{\text{I}\sigma}(t) \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} + K_{\text{II}}(0) f_{\text{II}\sigma}(t) \frac{1}{2} (3 \cos \vartheta - 1) \cos \frac{\vartheta}{2} \right) + \dots \quad (3-86) \\ \tau_{\vartheta z}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{\text{III}}(0) f_{\text{III}\sigma}(t) \cos \frac{\vartheta}{2} + \dots\end{aligned}$$

式中,  $K_i(t) = K_i(0) f_{i\sigma}(t)$ ,  $i = \text{I, II, III}$

$$K_{\text{I}}(0) = \frac{E' \Delta v}{2\sqrt{r_0}} \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad K_{\text{II}}(0) = \frac{E' \Delta u}{2\sqrt{r_0}} \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad K_{\text{III}}(0) = \frac{\mu \Delta w}{\sqrt{r_0}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \quad (3-87)$$

$$f_{i\sigma}(t) = f_{iu}(t) * L^{-1} \left( \frac{\tilde{E}^*'}{E'} \right), \quad (i = \text{I, II}); \quad f_{\text{III}\sigma}(t) = f_{\text{III}u}(t) * L^{-1} \left( \frac{\tilde{\mu}^*}{\mu} \right) \quad (3-88a)$$

如果已知材料的松弛模量, 可以证明式(3-88a)可改写为

$$\begin{aligned}f_{i\sigma}(t) &= f_{iu}(t) * \text{d} \frac{R'(t)}{R'(0)} = f_{iu}(t) + \frac{1}{R'(0)} \int_0^t \frac{\partial R'(t-\tau)}{\partial(t-\tau)} f_{iu}(\tau) \text{d}\tau, \quad (i = \text{I, II}) \\ f_{\text{III}\sigma}(t) &= f_{\text{III}u}(t) * \text{d} \frac{G_1(t)}{G_1(0)} = f_{\text{III}u}(t) + \frac{1}{G_1(0)} \int_0^t \frac{\partial G_1(t-\tau)}{\partial(t-\tau)} f_{\text{III}u}(\tau) \text{d}\tau\end{aligned} \quad (3-88b)$$

式中,  $R'(t)$  为平面应力或平面应变松弛模量

$$R'(t) = L^{-1} [R^*(p)] = \begin{cases} E(t), & \text{平面应力} \\ R(t) = L^{-1} \left( \frac{G_1^*(p)}{2 - E^*(p)/G_1^*(p)} \right), & \text{平面应变} \end{cases} \quad (3-89a)$$

当  $\nu$  保持恒定时, 有

$$R(t) = \frac{1}{1-\nu^2} E(t) \quad (3-89b)$$

式(3-81a)及(3-88a)中的  $\tilde{E}^*$  由(3-76)确定, 然后对于不同流变模型采用相应的弹性常数代换便可依(3-81a)和(3-88a)求出各时间因子。如果已知蠕变柔量及松弛模量, 则可依(3-82b)和(3-89a)先求出  $C'(t)$  或  $R'(t)$ , 然后再代入(3-81b)和(3-88b)便可求出各时间因子。对于不同的流变模型, 不同应力状态, 不同边界条件(给定载荷, 给定位移)具有不同的时间因子。各种情况下的时间因子已列成表格供应用, 可参考[7,14-17]。

### 3.6 能量断裂判据

裂纹体的功率平衡方程为

$$\dot{W} + \dot{Q} - \dot{K} - \dot{U} = \dot{\quad} \quad (3-90)$$

$\dot{W}$ ,  $\dot{Q}$  分别为外力作用于物体的功率和单位时间加入物体的热量,  $\dot{K}$ ,  $\dot{U}$  分别为物体

的动能和内能变化率， $\dot{\epsilon}$ 是在扩展的裂纹表面上的能量耗散率。

对于黏弹体，由于黏性的存在，必须计及能量的耗散。在等温条件下，有

$$\dot{Q} + \dot{D} = 0 \quad (3-91)$$

$\dot{D}$ 是物体的耗散能率，此时(3-90)化为

$$\dot{W} - \dot{D} - \dot{K} - \dot{U} = \dot{\epsilon} \quad (3-92)$$

设裂纹沿某 $\vartheta$ 方向虚拟扩展 $dl$ ，现在来计算沿该方向扩展的能量释放率。想象沿 $\vartheta$ 方向已切开，并在切开的面上加上应力 $\sigma_{ij}$ 。如果 $\sigma_{ij}$ 与未切开前因外加应力而引起的应力相同，那么切开前后的情况完全等效。假设应力 $\sigma_{ij}$ 逐渐松弛到零，然后对外加应力与 $\sigma_{ij}$ 联合作用情况下来应用功率平衡方程(3-92)，此时外力所作的功就还应包括 $\sigma_{ij}$ 在松弛过程中对裂纹两侧表面相对位移所作的功。由于松弛过程中 $\sigma_{ij}$ 的方向与相对位移的方向相反，故此功德变化率 $\dot{E}$ 加负号。此时由于想象裂纹扩展处已切开，裂纹无其他扩展，故 $\dot{\epsilon} = 0$ ，从而有

$$(\dot{W} - \dot{E}) + \dot{Q} - \dot{K} - \dot{U} = 0 \quad (3-93)$$

比较(3-92)和(3-93)可见

$$\dot{E} = \dot{W} - \dot{D} - \dot{K} - \dot{U} = \dot{\epsilon} \quad (3-94)$$

可见考虑整体的能量平衡与考虑裂纹尖端处的能量平衡是等效的。就应用来说，如果已知裂纹尖端的应力、位移，式(3-94)比式(3-92)方便得多，因为无需计算耗散能率 $\dot{\epsilon}$ 。考虑单位厚度二维裂纹体，由于式(3-94)中 $W, D, K, U$ 均是 $t$ 和 $l(t)$ 的函数，故式(3-94)可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(W - D - K - U) + \dot{l} \frac{\partial}{\partial l}(W - D - K - U) = \frac{\partial E}{\partial l} \dot{l} = 2\gamma_0 \dot{l} \quad (3-95)$$

上式左端第一项为零，这是从不扩展裂纹的能量守恒定律推出的，裂纹不扩展时， $\dot{l} = 0$ ，上式当然满足，我们需要知道的是裂纹达到临界状态的条件，即裂纹起裂条件，在此瞬时 $\dot{l} \neq 0$ ，由(3-95)，得

$$G(\vartheta, t) = \partial E / \partial l = 2\gamma_0(\vartheta) \quad (3-96)$$

若在所考察的时间内材料的断裂性能不变，限于讨论起裂条件，可设 $2\gamma_0$ 不是 $t$ 的函数，对于各向同性材料(指包括断裂韧性而言) $2\gamma_0$ 还不是 $\vartheta$ 的函数。式(3-96)即为沿 $\vartheta$ 方向扩展的推广的Griffith条件。在I型裂纹的特殊情况下，式(3-96)成为

$$G_I(t) = \partial E / \partial a = 2\gamma_0 = G_{Ic} \quad (3-97)$$

能量释放率 $G_I(t)$ 与闭合能量率 $\partial E / \partial a$ 相等，式中 $a$ 为裂纹长度，当达到临界值 $G_{Ic}$ 时，裂纹开始失稳扩展。

下面按照Irwin的方法，设裂纹沿延长线方向虚拟扩展来计算 $G_I, G_{II}, G_{III}$

$$\begin{aligned}
 G_I &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \int_0^{\Delta v} \sigma_g(r, \vartheta) d(\Delta v(\delta - r)) dr \\
 G_{II} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \int_0^{\Delta u} \tau_{r,g}(r, \vartheta) d(\Delta u(\delta - r)) dr \\
 G_{III} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \int_0^{\Delta w} \sigma_{\vartheta z}(r, \vartheta) d(\Delta w(\delta - r)) dr
 \end{aligned} \tag{3-98}$$

式中, 裂纹延长线上( $\vartheta = 0$ )的应力可表示为

$$\sigma_g(r, 0, t) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{I\sigma}(t), \quad \tau_{r,g}(r, 0, t) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{II\sigma}(t), \quad \sigma_{\vartheta z}(r, 0, t) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{III\sigma}(t) \tag{3-99}$$

由于  $K_I(t)$ ,  $K_{II}(t)$ ,  $K_{III}(t)$  引起的裂纹不连续量可写为

$$\Delta v(t) = \Delta v f_{Iu}(t), \quad \Delta u(t) = \Delta u f_{IIu}(t), \quad \Delta w(t) = \Delta w f_{IIIu}(t) \tag{3-100}$$

即应力为相应的弹性解乘以应力强度因子时间因子  $f_{i\sigma}(t)$  ( $i = I, II, III$ ), 位移跳跃为相应的弹性解乘以位移时间因子  $f_{iu}(t)$  ( $i = I, II, III$ )。以(3-99)和(3-100)代入(3-98)不难得到

$$G_i(t) = G_i f_{ig}(t) \tag{3-101}$$

$$f_{ig}(t) = f_{i\sigma}(t) f_{iu}(t), \quad (i = I, II, III) \tag{3-102}$$

即黏弹性裂纹体的能量释放率为相应的弹性解乘以能量释放率的时间因子  $f_{ig}(t)$ , 而该时间因子为应力强度因子时间因子和位移时间因子的乘积。式中

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}, \quad G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu}$$

(1) 给定载荷

由(3-102)和(3-81), 有

$$\begin{aligned}
 f_{ig}(t) &= f_{i\sigma}(t) \left( f_{i\sigma}(t) * d \frac{C'(t)}{C'(0)} \right) = f_{i\sigma}(t) \left( f_{i\sigma}(t) * L^{-1} \left( \frac{E'}{E^*} \right) \right), \quad (i = I, II) \\
 f_{IIIg}(t) &= f_{III\sigma}(t) \left( f_{III\sigma}(t) * d \frac{J_1(t)}{J_1(0)} \right) = f_{III\sigma}(t) \left( f_{III\sigma}(t) * L^{-1} \left( \frac{\mu}{\tilde{\mu}^*} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3-103}$$

当  $f_{i\sigma}(t) = U(t)$  ( $i = I, II, III$ ) 时, 上式化为

$$\begin{aligned}
 f_{ig}(t) &= U(t) \left( U(t) * d \frac{C'(t)}{C'(0)} \right) = \frac{C'(t)}{C'(0)}, \quad (i = I, II) \\
 f_{IIIg}(t) &= U(t) \left( U(t) * d \frac{J_1(t)}{J_1(0)} \right) = \frac{J_1(t)}{J_1(0)}
 \end{aligned} \tag{3-104}$$

(2) 给定位移

由(3-102)和(3-88), 有

$$f_{ig}(t) = f_{iu}(t) \left( f_{iu}(t) * d \frac{R'(t)}{R'(0)} \right) = f_{iu}(t) \left( f_{iu}(t) * L^{-1} \left( \frac{E^*'}{E'} \right) \right), \quad (i = I, II) \quad (3-105)$$

$$f_{IIIg}(t) = f_{IIIu}(t) \left( f_{IIIu}(t) * d \frac{G_1(t)}{G_1(0)} \right) = f_{IIIu}(t) \left( f_{IIIu}(t) * L^{-1} \left( \frac{\tilde{\mu}^*}{\mu} \right) \right)$$

当  $f_{i\sigma}(t) = U(t)$  ( $i = I, II, III$ ) 时, 上式化为

$$f_{ig}(t) = U(t) \left( U(t) * d \frac{R'(t)}{R'(0)} \right) = \frac{R'(t)}{R'(0)}, \quad (i = I, II) \quad (3-106)$$

$$f_{IIIg}(t) = U(t) \left( U(t) * d \frac{G_1(t)}{G_1(0)} \right) = \frac{G_1(t)}{G_1(0)}$$

### 3.7 黏弹性裂纹体的延迟失稳<sup>[17]</sup>

线弹性断裂力学只能解决裂纹的瞬时失稳问题。工程实践表明, 对于黏弹体, 裂纹失稳扩展常不是在施加载荷后立即发生, 而是经过某时间  $t_c$  才发生的, 这种现象我们把它称为裂纹体的“延迟失稳扩展”。我们知道, 理想线黏弹体失稳型裂纹 ( $dK_I/da > 0$ ) 常载下没有亚临界扩展, 临界状态(即裂纹扩展的起始)发生在载荷施加以后某时间  $t_c$ 。值得注意的是在这个时间内 ( $0 < t < t_c$ ) 裂纹初始长度保持不变, 但由于材料的黏弹性时间相依的性能, 裂纹表面的位移逐渐随时间而增长, 裂纹面逐渐张开, 因而黏弹性裂纹体的能量释放率  $G_1(t)$  随时间而增长, 当  $G_1(t)$  到达  $G_{Ic}$  时, 裂纹的平衡成为不稳定。在没有惯性约束的理想线黏弹体中, 裂纹将以无限大的(有惯性约束时将以很高的)速度开始传播。如果材料的蠕变柔量  $C(t)$  具有一个较高的极限(如 Kelvin 体 标准线性体等), 那么存在一个较低的极限载荷(或裂纹尺寸), 低于它裂纹将不会扩展, 我们称这一载荷(或裂纹尺寸)为“裂纹延迟失稳临界载荷”(或裂纹尺寸)。Nuismer<sup>[35]</sup>曾正确地指出作为断裂判据的热力学功率平衡不能预测裂纹的扩展速度而只能预测起裂(这个结论对于失稳型裂纹是对的), 他得到与 Graham<sup>[36]</sup>相同的结果。但该结果不能预测延迟失稳, 由于他们的推导默认了加载后裂纹立即开始扩展, 所以只有在  $t_c = 0$  即线弹性的特殊情况下才正确, 对于黏弹性失稳型裂纹这个结论是成问题的。

以 I 型裂纹为例, 裂纹起始失稳扩展判据为

$$G_1(t) = G_I f_{Ig}(t) = G_{Ic}$$

当材料给定时,  $G_{Ic}$  被设为常数, 有几种可能

- (1)  $G_1(0) \geq G_{Ic}$ , 加载瞬时 ( $t=0$ ) 立即失稳, 等号相应于瞬时失稳的临界情况。
- (2)  $G_1(0) < G_{Ic}$ , 又分几种情况
  - (i)  $G_1(t_c) = G_I f_{Ig}(t_c) = G_{Ic}$ , 那么于加载后某时刻  $t_c$  将发生延迟失稳。
  - (ii)  $G_1(\infty) = G_I f_{Ig}(\infty) < G_{Ic}$ , 那么裂纹将永远不会失稳。

$$(iii) G_I(\infty) = G_I f_{lg}(\infty) = G_{Ic} \quad (3-108)$$

即为延迟失稳临界状态。如果给定了裂纹尺寸（或载荷），那么延迟失稳临界载荷（或裂纹尺寸）可由式(3-108)式确定，只要  $f_{lg}(t)$  已知。如果载荷（或裂纹尺寸）小于这一临界值，则永远不致发生延迟裂纹失稳扩展，如果载荷及裂纹尺寸均已确定，则由式(3-107)可以确定发生延迟失稳所需时间  $t_c$ 。

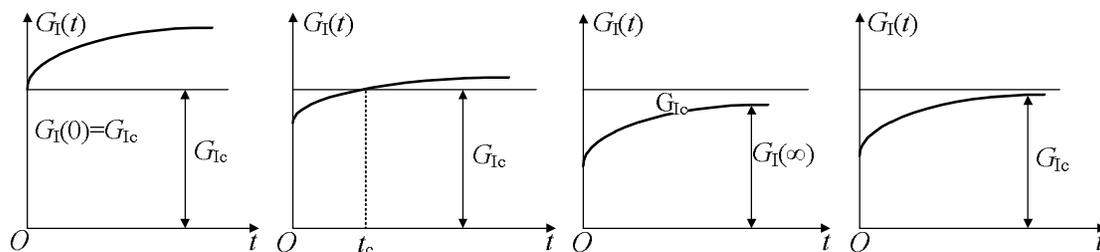


图 3-14 裂纹失稳扩展的几种可能情况

对于给定载荷问题，设  $f_{Ic}(t) = U(t)$ ，则依式(3-104)及 Laplace 变换终值定理式(3-55)，有

$$f_{lg}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{D(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pD^*(p)}{D(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} (1 + E\phi_1^*), \quad \text{平面应力} \quad (3-109)$$

$$\begin{aligned} f_{lg}(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{C(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pC^*(p)}{C(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} pJ_1^*(p) \left( 2 - \frac{J_1^*(p)}{D^*(p)} \right) \frac{2\mu}{1-\nu} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} (1 + 2\mu\phi_s^*) \left( 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( 1 - \frac{1+2\mu\phi_s^*}{1+E\phi_1^*} \right) \right), \quad \text{平面应变} \end{aligned} \quad (3-110)$$

(1) 广义 Kelvin 体

其剪切和单轴蠕变柔量

$$\begin{aligned} J_1(t) &= J_1(0) \left( 1 + \sum_{i=1}^m \mu W_i (1 - e^{-\beta_i t}) \right) \\ D(t) &= D(0) \left( 1 + \sum_{i=1}^m E C_i (1 - e^{-\lambda_i t}) \right) \end{aligned} \quad (3-111)$$

由(3-110)，得

$$f_{lg}(\infty) = \begin{cases} 1 + E \sum_{i=1}^n C_i, & \text{平面应力} \\ 1 + \mu \sum_{i=1}^m W_i \left( 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( 1 - \frac{1 + \mu \sum_{i=1}^m W_i}{1 + E \sum_{i=1}^n C_i} \right) \right), & \text{平面应变} \end{cases}, \quad (3-112)$$

(2) 蠕变核于  $t=0$  具有奇异性的固体

很多材料可以用下述形式的蠕变核描写

$$\phi_1(t) = Ae^{-\beta t} / t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, A > 0, \beta > 0 \quad (3-113)$$

代入(3-110), 对于平面应力情况, 有

$$f_{lg}(\infty) = 1 + \lambda(\alpha) / \beta^\alpha, \quad \text{平面应力} \quad (3-114)$$

式中  $\lambda(\alpha)$  为 Gamma 函数。

对于具有黏性流的材料, 如 Maxwell 体, Burgers 体, 由于  $f_{lg}(t)$  随时间而一直增长, 没有有限的极限, 因而无论多么小的载荷 (或裂纹尺寸), 只要时间足够长, 终将发生延迟失稳。这时可用规定的使用寿命  $t_c$  来确定其名义延迟失稳临界载荷 (或裂纹尺寸)。

从式(3-104)及(3-82b)可见, 对于应力强度因子恒定的情况  $f_{I\sigma}(t) = U(t)$  以及 Poisson 比恒定的情况, 有

$$f_{lg}(t) = \frac{C'(t)}{C'(0)} = \begin{cases} \frac{D(t)}{D(0)}, & \text{平面应力} \\ \frac{C(t)}{C(0)} = \frac{(1-\nu^2)D(t)}{(1-\nu^2)D(0)} = \frac{D(t)}{D(0)}, & \text{平面应变} \end{cases} \quad (3-115)$$

即不论平面应力还是平面应变, 均有

$$G_1(t) = G_1(0) \frac{D(t)}{D(0)} = \frac{K_1^2}{E'} = \frac{D(t)}{D(0)} \quad (3-116)$$

这样, 只要通过实验求得拉压情况下的蠕变曲线, 就可以直接依式(3-116)求出  $G_1(t)$ , 不需要任何本构方程的解析式<sup>[37]</sup>。这对于解决  $\nu$  保持恒定的材料 (如可认为混凝土的  $\nu$  近似保持常数) 的裂纹延迟失稳问题是非常有用的。

下面给出理论与实验的比较:

Knauss<sup>[38]</sup>(1970)曾给出了由聚胺基甲酸乙酯合成橡胶 Solithane 113(50/50)制成的带有穿透中心直裂纹薄板寿命确定的实验研究资料。实验结果用  $\lg(\sigma/\sigma_\infty)^2$  与  $\lg t_f$  的关系表出, 其中  $t_f$  为断裂时间,  $\sigma_\infty$  为依下式确定的应力

$$\frac{\sigma_\infty^2 \pi a}{E_\infty} = G_{lc}$$

实际上  $\sigma_\infty$  即我们前面提到的延迟失稳临界应力, 因为上式可写为

$$\frac{\sigma_\infty^2 \pi a}{E_\infty} = \frac{\sigma_\infty^2 \pi a}{E_0} \frac{D(\infty)}{D(0)} = G_1(0) f_{lg}(\infty) = G_{lc}$$

依延迟失稳临界应力的定义, 当  $\sigma/\sigma_\infty < 1$  时, 永远不会发生延迟失稳, 即从理论上说只有当  $\lg(\sigma/\sigma_\infty)^2 > 0$  时才会产生延迟失稳。由图 3-15 可见全部实验点均位于  $\lg(\sigma/\sigma_\infty)^2 > 0$  的范围, 且实验点形成的曲线的水平渐近线与  $\lg(\sigma/\sigma_\infty)^2 = 0$  重合, 它有力地支持了上述理论。同时说明, 尽管 Solithane 113(50/50)有明显的亚临界扩展, 不能

利用理想黏弹性理论准确求出断裂时间，但是利用线黏弹性断裂理论求出的延迟失稳临界应力(或裂纹尺寸)仍是适用的，即微小塑性区的存在并不显著影响延迟失稳的临界值。

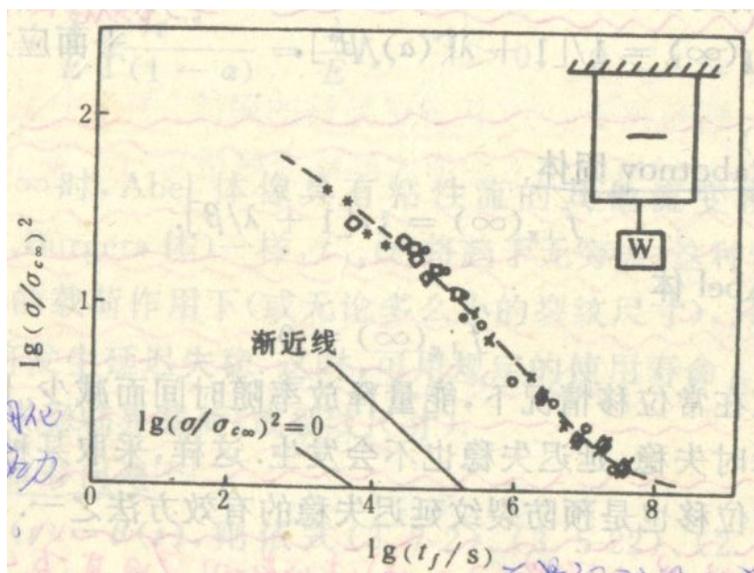


图 3-15 理论与实验的比较表明，实验点描出的曲线的水平渐近线与  $\lg(\sigma/\sigma_{\infty})^2 = 0$  重合

### 3.9 复合型裂纹

在§1.6 中我们讨论了线弹性复合型裂纹问题，下面我们采用最大相当能量释放率理论来讨论黏弹体 I-II 复合型裂纹问题。

设  $K_I(t) = K_I U(t)$ ， $K_{II}(t) = K_{II} U(t)$ ，即为恒定阶跃载荷情况。此时由于线弹性裂纹尖端应力场中不包含材料常数，从而黏弹体与弹性裂纹前缘具有相同的应力场。与§1.6 推导方法相同，不难得出黏弹体在恒定阶跃载荷作用下裂纹沿  $\vartheta$  方向虚拟扩展  $r_0$  时的平均能量释放率为

$$G_{xd}(\vartheta, r_0, t) = G(\vartheta, r_0, t) = G(\vartheta, r_0) f_u(t) \quad (3-117)$$

式中  $G(\vartheta, r_0)$  即为§1.6 中线弹性裂纹体的结果，由于  $f_{\sigma}(t) = U(t)$ ，从而  $f_g(t) = f_u(t)$ 。

依最大相当能量释放率理论不难看出，使  $G_{xd}(\vartheta, r_0, t)$  达到最大值的方向  $\vartheta_0$  仍与§1.6 中之结果式(1-135)相同，即黏弹体 I-II 复合型裂纹的扩展方向与相应弹性体 I-II 复合型裂纹的扩展方向相同。以  $\vartheta_0$  代入(3-117)，得

$$G_{xd\max} = G(\vartheta_0, r_0) f_u(t) = G_{lc} \quad (3-118)$$

可见时间因子进入了判据。依上式不难确定延迟失稳临界载荷（或裂纹尺寸），或估算裂纹体的寿命  $t_c$ 。

例如，从附录一可知，对于  $\nu = \text{Const}$  的标准线性体，当  $f_{\sigma}(t) = U(t)$  时，

$$f_u(t) = 1 + EC(1 - e^{-\lambda t}) \quad (3-119)$$

代入(3-118)，得断裂判据为

$$G_{xd \max} = G(\mathcal{G}_0, r_0)(1 + EC(1 - e^{-\lambda t})) = G_{lc} \quad (3-120)$$

用同样的方法不难分析其他复合型裂纹问题。

下面举几个应用实例。

例 1 设材料  $\nu$  保持恒定的标准线性体， $a \gg h$ ，求  $P(t) = PU(t)$  作用下双悬臂梁裂纹的  $G_1(t)$ 。

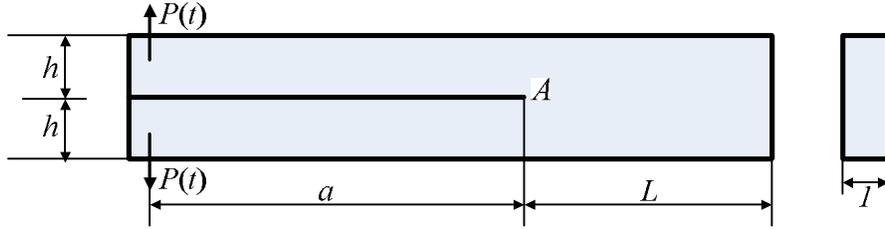


图 3-16

解：当  $f_\sigma(t) = U(t)$  时，对于  $\nu = \text{Const}$  的标准线性体，有

$$f_u(t) = 1 + EC(1 - e^{-\lambda t})$$

从而

$$G_1(t) = \frac{M_A^2}{EJ} f_{lg}(t) = \frac{M_A^2}{EJ} f_u(t) = \frac{P^2 a^2}{EJ} (1 + EC(1 - e^{-\lambda t}))$$

式中， $M_A = Pa$  为截面 A 处的弯矩。

$$\frac{G_1(\infty)}{G_1(0)} = 1 + EC \quad (3-121)$$

例 2 设材料为  $\nu = \text{Const}$  的标准线性体， $a \gg h$ ，并设固定端双悬臂模型裂纹在自由端被刚体异物张开  $\Delta(t) = \Delta U(t)$ ，求  $G_1(t)$ 。

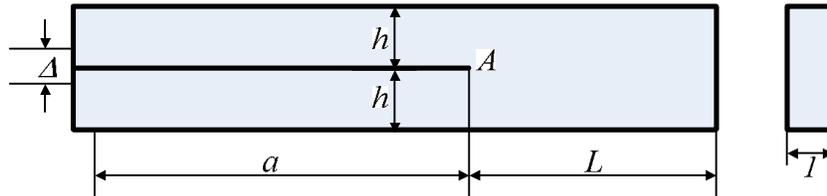


图 3-17

解：张开位移  $\Delta$  所需的力  $P$  为

$$P = \frac{3EJ\Delta}{2a^3}$$

截面 A 处的弯矩  $M_A$  为

$$M_A = \frac{3EJ\Delta}{2a^2}$$

从而

$$G_1(t) = \frac{M_A^2}{EJ} f_{lg}(t) = \frac{M_A^2}{EJ} f_{l\sigma}(t) = G_1(0) f_{l\sigma}(t)$$

当位移恒定时，由附录一查得

$$f_{l\sigma}(t) = \frac{1}{1+EC} (1+ECe^{-p_1 t})$$

式中  $p_1 = \lambda(1+EC)$ ，从而

$$\frac{G_1(t)}{G_1(0)} = \frac{1}{1+EC} (1+ECe^{-p_1 t}), \quad \frac{G_1(\infty)}{G_1(0)} = \frac{1}{1+EC} \quad (3-122)$$

式中， $G_1(0) = \frac{M^2 A}{EJ} = \frac{9\Delta^2 EJ}{4a^4}$ 。由式(3-121)，(3-122)可见常载荷下，对于标准线性体，

$\nu = \text{Const}$ ， $G_1(t)$  随时间而增长，当  $t \rightarrow \infty$  时可达  $G_1(0)$  的  $1+EC$  倍。常位移下， $G_1(t)$  随时间而减少，当  $t \rightarrow \infty$  时为  $G_1(0)$  的  $1/(1+EC)$  倍。例如当混凝土的力学性能为  $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ， $C = 6 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$ ， $\lambda = 0.02 \text{ day}^{-1}$ ， $\nu = 1/6$ ， $K_{lc} = 50 \text{ kg/cm}^{3/2}$  时，常载荷下  $G_1(\infty)/G_1(0) = 1+EC = 2.2$ ，常位移下  $G_1(\infty)/G_1(0) = 1/(1+EC) = 1/2.2$ 。

例 3 设某半无限大混凝土构筑物上有一条表面半椭圆长裂纹，其长短半轴之比  $a/b \gg 1$ ，裂纹面承受水压  $p$  作用， $p = 5.5 \text{ kg/cm}^2$ 。当混凝土的力学性能为  $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ， $C = 6 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$ ， $\lambda = 0.02 \text{ day}^{-1}$ ， $\nu = 1/6$ ， $K_{lc} = 50 \text{ kg/cm}^{3/2}$  时，求延迟失稳扩展临界深度  $b$  [13]。

解：因  $a/b \gg 1$ ，对于弹性体，有

$$K_I = 1.1 p \pi b$$

从而

$$G_1 = \frac{1.1^2 p^2 \pi b (1-\nu^2)}{E}$$

对于黏弹体，有

$$G_1(t) = G_1 f_{lg}(t) = G_1 f_{lu}(t) = \frac{1.1^2 p^2 \pi b (1-\nu^2)}{E} (1+EC(1-e^{-\lambda t})) = \frac{K_{lc}^2 (1-\nu^2)}{E}$$

因此裂纹深度若超过 9.9 cm 将导致裂纹延迟失稳。

### 3.9 讨论

从本章上述讨论可小结如下：

(1) 理想线黏弹性裂纹体失稳扩展型裂纹常载荷下无亚临界扩展，它从受载至失稳扩

展是一个流变过程。

(2) 一般情况下, 应力强度因子、位移及能量释放率均是时间的函数。给定载荷时, 裂纹附近的应力场与弹性体的相同, 而位移场则随时间而变化。给定位移时, 裂纹尖端附近位移场与弹性体相同, 而应力场则随时间而变化(松弛)。

(3) 黏弹性裂纹体的能量释放率等于线弹性裂纹体的能量释放率乘以某时间因子  $f_{lg}(t)$ 。该因子是应力强度因子时间因子  $f_{i\sigma}(t)$  与位移时间因子  $f_{iu}(t)$  之乘积。这些时间因子对于不同流变模型, 不同应力状态(平面应力、平面应变、反平面剪切), 不同边界条件(给定载荷、给定位移)具有不同的值(见附录)。

(4) 常载下, 能量释放率将由于蠕变而随时间增长, 直到某极限值(如标准线性体)或不断增长, 直至失稳扩展(如 Maxwell 体、Burgers 体)。

(5) 常位移下, 能量释放率将由于松弛而随时间减少直到某极限值(如标准线性体)或不断减少直到零(如 Maxwell 体或 Burgers 体)。

(6) 能量释放率  $G(t)$  不仅与现时载荷有关, 而且与整个加载历史有关, 不同加载历史条件下能量释放率依赖于时间的关系是不同的。

(7) 对于理想线黏弹体, 裂纹的平衡可以瞬时地或于加载后某时刻  $t_c$  成为不稳定。当裂纹尺寸(或外加应力)已给定时, 取决于外加应力(裂纹尺寸),  $t_c$  可依式(3-107)确定, 对于 I-II 复合型裂纹则由式(3-118)确定。

(8) 如果材料的蠕变函数具有一个较高的极限, 那么存在延迟失稳临界载荷(裂纹尺寸)。从式(3-110), (3-112), (3-114)可见, 这一临界载荷(裂纹尺寸)不依赖于  $J_1(t)$ ,  $D(t)$  的中间值, 而完全由其终值与初值之比所确定, 因而如果只要求延迟失稳临界载荷或裂纹尺寸, 采用标准线性体模型就足够了, 因为它的曲线与实验结果的差别仅在于加载不久这一段, 并不影响其终值。然而欲计算  $t_c$ , 则要求采用更准确的模型(如式(3-113)或分数指数核的积分方程)。当  $\nu = \text{Const}$  时, 在常载荷作用下, 为了计算  $t_c$  值只需直接根据拉压实验蠕变曲线即可求得  $t_c$  值。

(9) 对于 Maxwell 体和 Burgers 体等, 由于黏性流的存在,  $G(t)$  将随时间而无限增长, 这种情况下可采用规律定的寿命  $t_c$  定义的“条件延迟失稳临界载荷”(或裂纹尺寸)。

(10) 当蠕变过程中  $\nu$  保持常数时, 计算大大简化。此时

$$\begin{aligned} C(t) &= (1-\nu^2)D(t), \quad R(t) = \frac{1}{1-\nu^2}E(t) \\ J_1(t) &= (1+\nu)D(t), \quad G_1(t) = \frac{1}{1+\nu}E(t) \\ J_2(t) &= (1-2\nu)D(t), \quad G_2(t) = \frac{1}{1-2\nu}E(t) \end{aligned} \quad (3-123)$$

而  $p^2 E^*(p) D^*(p) = 1$

从而只要知道  $D(t)$  即可求出其他蠕变及松弛函数。此时,对于平面应力、平面应变、反平面应变情况具有相同的时间因子。

(11) 在蠕变过程中  $K = \text{Const}$  的情况下,问题并未得到太大的简化。

(12) 如果 Poisson 比不是常数,则平面应变与平面应力蠕变柔量的时间相依性将不采取同一形式。

(13) 在黏弹性情况下, $K$  判据与  $G$  判据不再等价。由于  $K$  判据不能反映黏弹体的时间相依性(例如常载时, $K = \text{Const}$ ,因而  $K$  判据不能预测裂纹的延迟失稳),因而它对于黏弹体是不适用的。能量判据才反映了问题的本质。

(14) 上述理论对于亚临界扩展不明显的情况下是适用的,它把线弹性断裂力学作为特殊情况包括在内。但当亚临界扩展十分明显时,缓慢亚临界扩展占据构件整个寿命的主要部分,因而当讨论这类问题构件的寿命时必须采用黏弹塑性理论来计及裂纹扩展速度。

## 参考文献

- [1] 袁龙蔚,湘潭大学学报(流变断裂学专刊),1980,(2): 31-84.
- [2] 袁龙蔚,科学探索,1981,(4): 1.
- [3] 袁龙蔚,湘潭大学学报,1982,(1): 38.
- [4] 袁龙蔚,科学探索,1982,(4): 45.
- [5] L.W.Yuan, Engineering Fracture Mechanics, 1982, 16(1): 155.
- [6] 袁龙蔚,科学探索,1984,(4): 1.
- [7] 袁龙蔚,岩石混凝土断裂与强度,1984,(2): 9-11.
- [8] L.W.Yuan, 科学探索,1981,(1): 1; L.W.Yuan, 科学探索,1982,(2): 45.
- [9] 张淳源,袁龙蔚,湘潭大学学报(流变断裂学专刊),1980,(2): 70-84.
- [10] 张淳源,湘潭大学学报(流变断裂学专刊),1980,(2): 84-125, 166-172.
- [11] 张淳源,科学探索,1981,(1): 29-42.
- [12] 张淳源,科学探索,1981,(2): 35-50.
- [13] 张淳源,冶金建筑,1981,(6): 20-27.
- [14] 张淳源,湘潭大学学报,1982,(2): 88-94.
- [15] Zhang Chunyuan, 科学探索,1982,(3): 92-104.
- [16] Zhang Chunyuang, Engineering Fracture Mechanics, 1982, 16(1): 140.
- [17] Zhang Chunyuan(张淳源), ICF Beijing, 北京 国防断裂力学学术讨论会论文集, (1983), 1038-1044.
- [18] 张淳源. 黏弹性力学讲义, 1983.
- [19] 龚安特,湘潭大学学报(流变断裂学专刊),1980,(2): 133-140.

- 
- [20] 周筑宝, 湘潭大学学报(流变断裂学专刊), 1980, (2): 126-132.
- [21] 周筑宝, 湘潭大学学报, 1984, (2): 44.
- [22] 周筑宝, 固体力学学报, 1983, (1): 100.
- [23] 李之达, 刘吉甫, 张淳源, 岩石混凝土断裂与强度, 1983, (2).
- [24] J.C.Maxwell, Phil. Mag. 1868, 35: 129-145; Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1869, 151: 149.
- [25] L. Kelvin, "Elasticity" in Encyclo Paedia Britannica, 1875.
- [26] L. Boltzmann, Pojg. Ann. Ery. Bd., 1876, 7: 624.
- [27] M.E.Gurtin, E.Sternberg. Archive Rat. Mech. Analysis, 1962, 11: 291-356.
- [28] Y.C.Fung, Foundations of Solid Mechanics, 1965.
- [29] R.Alfrey. Q. Appl. Math., 1944, 2: 113-119.
- [30] X.S.Qian, Q. Appl. Math., 1950, 8: 104-106.
- [31] W.T.Read, J. Appl. Physi, 1950, 21: 671-674.
- [32] E.H.Lee, Q. Appl. Math., 1955, 13: 183-190.
- [33] G.A.C.Graham, Q. Appl. Math., 1968, 26: 167-174.
- [34] 湘潭大学学报, 黏弹性断裂力学译文专辑(上、下册), 1983.
- [35] R.J.J. Nuismer, J. Appl. Mech., 1974, 41 : 631-634.
- [36] G.A.C. Graham, Q. Appl. Math., 1969, 27(4): 479-507.
- [37] 张淳源. 科学探索, 1986, (3).
- [38] W.G. Knauss. International Journal of Fracture Mechanics, 1970, 6: 7-20.

## 第四章 线黏弹性断裂力学简介

### 4.1 引言

无论是线弹性还是弹塑性断裂力学都无法解释诸如“延迟失稳”，构筑物的“延迟倒塌”，裂纹体“寿命”等“时间相依”的问题。不少工程材料如聚合物、复合材料、有色金属、岩石、混凝土、土、骨骼组织等在常温下就明显地表现出“时间效应”。这就要求正确选择流变模型作为材料物理方面的基本假设。线黏弹性断裂力学是将材料视为线黏弹性材料来研究物体中裂纹发生、发展规律的学科，是研究带裂纹的黏弹性体的强度与寿命的学科，它是流变断裂学的一部分<sup>[1]</sup>。为了研究某混凝土坝坝墩裂纹的延迟失稳问题，张淳源把 Griffith-Irwin 的线弹性断裂力学的理论推广到线黏弹性的情况，提出了线黏弹性断裂力学的基本理论<sup>[2-9]</sup>。提出了延迟失稳的新概念。找到了预防延迟失稳的办法，即让载荷（或裂纹尺寸）小于延迟失稳临界载荷（或裂纹尺寸），还能预测裂纹发生延迟失稳所需的时间，找到了不需更深的数学工具，直接通过材料蠕变曲线来确定延迟失稳临界值的方法，使理论达到便于工程人员应用的程度。对于工程常见材料的各种流变模型还列出了时间因子的表格以便于工程人员设计计算时查阅。理论得到已有实验的验证。利用该理论很好地解释了某混凝土水坝坝墩裂纹蓄水时不坏，过八年以后才失稳扩展的原因。

### 4.2 黏弹性裂纹体的能量释放率

利用黏弹性对应原理，张淳源<sup>[2,5,6]</sup>求出了裂纹尖端的应力位移场，从而计算出黏弹性裂纹体的能量释放率

$$G_i(t) = G_i(0)f_{ig}(t), \quad f_{ig}(t) = f_{i\sigma}(t)f_{iu}(t), \quad (i = I, II, III) \quad (4-1)$$

其中  $G_i(0)$  为  $G_i(t)$  在  $t=0$  时刻的值，与线弹性裂纹体的能量释放率相同， $G_I(0) = K_I^2/E$ ， $G_{II}(0) = K_{II}^2/E$ ， $G_{III}(0) = K_{III}^2/2\mu$ ， $f_{ig}(t)$  为能量释放率时间因子。各种流变模型在各种情况下的时间因子已列成表格可供查阅<sup>[2,3,8]</sup>。

当给定材料时， $G_{lc}$  被认为是常数，对于失稳型裂纹，有几种可能的情况：

(1)  $G_I(0) \geq G_{lc}$ ，加载瞬时（ $t=0$ ）即失稳，等号相应于临时临界平衡情况。

(2)  $G_I(0) < G_{lc}$

(i)  $G_I(t_c) = G_I f_{ig}(t_c) = G_{lc}$ ，那么加载后某时刻  $t_c$  将发生延迟失稳。

(ii)  $G_I(\infty) = G_I f_{ig}(\infty) < G_{lc}$ ，那么裂纹永远不会失稳。

(iii)  $G_I(\infty) = G_I f_{ig}(\infty) = G_{lc}$  (4-2)

为延迟失稳临界状态。如果给定了裂纹尺寸（或载荷），那么可以依(3-2)确定延迟失稳临界载荷（或裂纹尺寸）。小于这一临界值，则永远不会发出裂纹延迟失稳扩展。如果

载荷及裂纹尺寸已给定，则可依(3-1)确定发生延迟失稳所需时间  $t_c$  (寿命)。下面给出依蠕变实验曲线确定延迟失稳临界值的办法。

在常载荷及 Poisson 比  $\nu$  保持常数的情况下

$$f_{lg}(t) = D(t)/D(0)$$

从而依(3-1)，有

$$\frac{G_1(t)}{G_1(0)} = \frac{D(t)}{D(0)} = \frac{G_{lc}}{G_1(0)}$$

为了依(3-2)确定延迟失稳临界值，只需求出

$$f_{lg}(\infty) = D(\infty)/D(0)$$

这可以直接从蠕变曲线上求出。为了依

$$G_1(t_c) = G_1(0)f_{lg}(t_c) = G_{lc}, \text{ 或 } \frac{G_1(t_c)}{G_1(0)} = \frac{D(t_c)}{D(0)} = \frac{G_{lc}}{G_1(0)}$$

求出临界时间，亦可直接从蠕变曲线上找到，如图 3-1。由于上述方法不需要更深的数学工具，简便易行，所以对于解决有关工程实际问题很适合。至于其他更复杂的情况及复合型裂纹等问题请参阅前述论文。

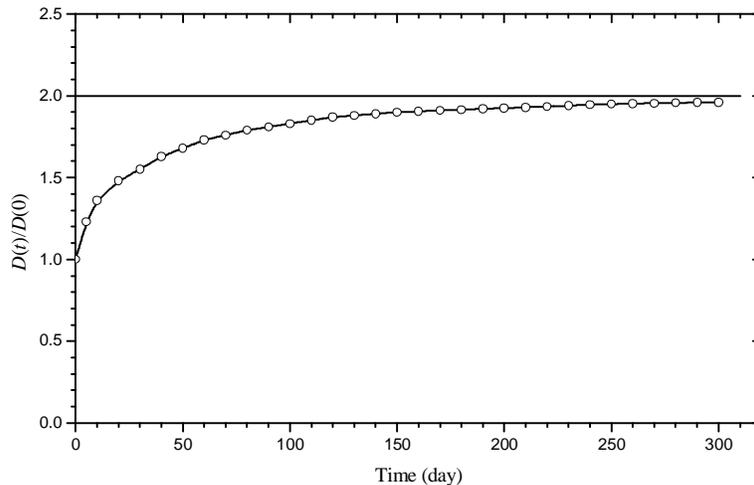


图 4-1 直接依蠕变实验曲线确定延迟失稳临界值

### 参考文献

- [1] 袁龙蔚, 张淳源 等. 湘潭大学学报(流变断裂学专刊), 1980, 2.
- [2] 张淳源. 科学探索, 1981, 1: 29-42.
- [3] 张淳源. 科学探索, 1981, 2: 35-50.
- [4] 张淳源. 冶金建筑, 1981, 6: 20-27.
- [5] 张淳源. 湘潭大学学报, 1982, 2: 88-94.

- [6] Zhang Chunyuan(张淳源). 科学探索, 1982, 3: 92-104.
- [7] Zhang Chunyuan(张淳源), ICF Beijing, 北京 国防断裂力学学术讨论会论文集, (1983), 1038-1044.
- [8] 张淳源. 黏弹性力学讲义, 1983.
- [9] Zhang Chunyuan. Engineering Fracture Mechanics.